

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL  
FACULTAD REGIONAL SANTA FE

---

# Matemática Superior

## Trabajo Práctico 1B

---

Busso, Francisco  
*francisco.busso@outlook.com*

Ferraro Trivelli, Giovanni  
*gftrivelli@frsf.utn.edu.ar*

Storani, Miguel  
*miguelignaciostorani@gmail.com*

## Índice

1. Transformada Discerta	3
2. Sistema masa-resorte-amortiguador discreto	4

## 1. Transformada Discerta

Una vez separada la función en segmentos y calculadas las Transformadas de Fourier en Tiempo Discreto de cada uno, se construyó la Matriz de Espectro  $E$  utilizando la formula propuesta. Posteriormente se determinaron los valores máximo y mínimo de dicha matriz y se construyó una nueva matriz de igual dimensión a la matriz de espectro, en la cuál se le asignó a cada posición de la misma un valor entre 0 y 255, mediante la siguiente fórmula:

$$V_{(i,j)} = \frac{E_{(i,j)} - m}{M - m} * 255 \quad (1)$$

Donde  $M$  representa al valor máximo de la Matriz de Espectro y  $m$  al valor mínimo de la misma. Esto se realizó para diferenciar gráficamente las frecuencias predominantes (zonas blancas) de las frecuencias que aportan menos energía (zonas negras) a la señal final.

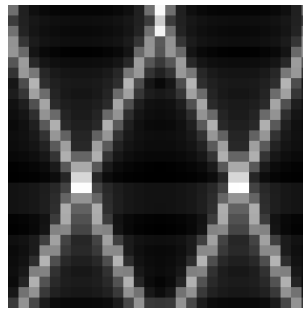


Figura 1: Representación gráfica de la Matriz de Espectro

Lo mismo se realizó para una señal simple de frecuencia constante y para una señal con variación de frecuencia lineal.

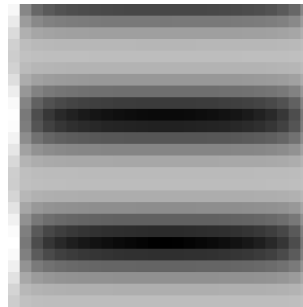


Figura 2: Representacion gráfica de una señal de frecuencia constante

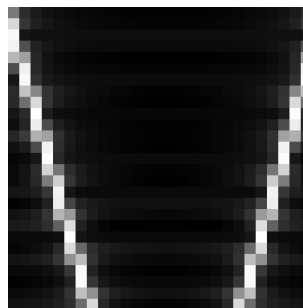


Figura 3: Representación gráfica de una señal con variación de frecuencia lineal

Este procesamiento de los datos fue realizado con el fin de poder analizar más intuitivamente la información presentada, pudiendo así contrastar los diferentes escenarios conocidos contra la señal en estudio e identificar a cuál se asemeja.

Una vez hecho esto, pudimos conjeturar que los valores presentes en la matriz de espectro representan la concentración de energía en determinadas frecuencias de los valores que conforman los segmentos. Además, se pudo concluir que la señal propuesta se asemeja a una función que varía linealmente en frecuencia.

## 2. Sistema masa-resorte-amortiguador discreto

Como contrapartida de la ecuación diferencial que modela el comportamiento del sistema en estudio, se desarrolla la ecuación en diferencias contemplando las siguientes igualdades:

$$y'_{(t)} \approx \frac{y_{[n+1]} - y_{[n-1]}}{2T}$$

$$y''_{(t)} \approx \frac{y_{[n+2]} - 2y_{[n]} + y_{[n-2]}}{4T^2}$$

siendo  $T$  el tiempo entre muestras. Si bien no es posible interpretar la derivada de una función discreta en el tiempo, las expresiones mostradas son una aproximación.

Por lo tanto, para aproximar la ecuación diferencial que simula al sistema del amortiguador, debemos reemplazar todas las apariciones de  $y'$  e  $y''$ .

Siendo el sistema continuo del amortiguador:

$$k_3 y''_{(t)} + k_2 y'_{(t)} + k_1 y_{(t)} = x_{(t)}$$

Nos queda que la ecuación en diferencia que aproxima al modelado continuo del sistema sería:

$$k_1 y_{[n]} + k_2 \left( \frac{y_{[n+1]} - y_{[n-1]}}{2T} \right) + k_3 \left( \frac{y_{[n+2]} - 2y_{[n]} + y_{[n-2]}}{4T^2} \right) = x_{[n]}$$

A partir de esta ecuación en diferencias se puede calcular la función de transferencia del sistema, quedando la misma:

$$H(z) = \frac{1}{z^2 \left( \frac{k_3}{4T^2} \right) + z \left( \frac{k_2}{2T} \right) + \left( k_1 - \frac{2k_3}{4T^2} \right) + z^{-1} \left( \frac{k_2}{2T} \right) + z^{-2} \left( \frac{k_3}{4T^2} \right)}$$

Reemplazando los valores de  $k_1$ ,  $k_2$ , y  $k_3$  por los correspondientes a la entrega anterior, y definiendo  $T = 0,1$  obtendríamos una discretización del sistema estudiado, obteniendo valores con una frecuencia de 10 Hz. De esta manera podemos reconstruir cualquier señal con un ancho de banda menor a 5 Hz, debido a que el amortiguador es un sistema mecánico suponemos que no existirán variaciones de mayor frecuencia que esta.

$$k_1 = 1$$

$$k_2 = 10$$

$$k_3 = 1$$

De esta manera contrastar la respuesta del sistema continuo y la discretización resultante en este ejercicio.

Como se observan en las imágenes, la discretización elegida no resulta útil para el estudio del sistema, ya que no existe una clara relación con su contraparte continua. Esto deja en evidencia que el muestreo elegido no fue adecuado. Posiblemente se logren mejores aproximaciones utilizando frecuencias de muestreo mayores.

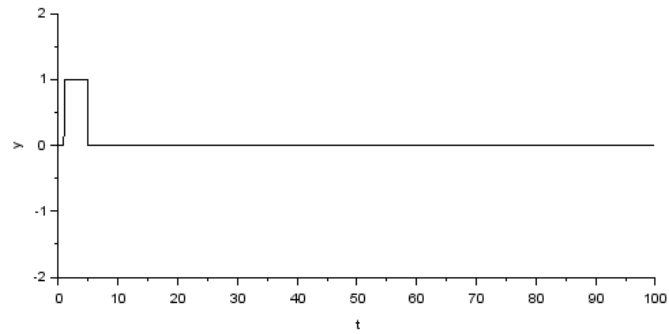


Figura 4: Entrada del sistema.

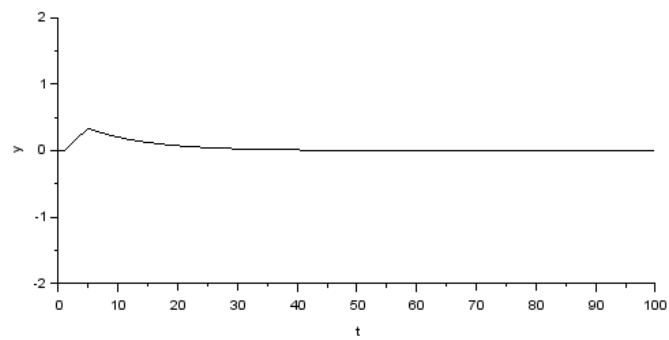


Figura 5: Salida resultante de simular el sistema con un sistema LTI continuo.

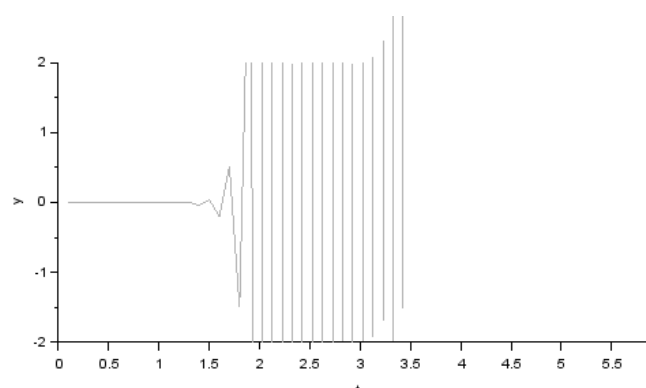


Figura 6: Salida resultante de simular el sistema con un sistema LTI discreto.