

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL SANTA FE

Matemática Superior

Trabajo Práctico 1B

Busso, Francisco
francisco.busso@outlook.com

Ferraro Trivelli, Giovanni
gftrivelli@frsf.utn.edu.ar

Storani, Miguel
miguellignaciostorani@gmail.com

Índice

1. Transformada Discreta	3
1.1. Visualización de la matriz	3
1.2. Análisis de los resultados	3
2. Sistema masa-resorte-amortiguador discreto	4

1. Transformada Discreta

1.1. Visualización de la matriz

Una vez separada la función en segmentos y calculadas las Transformadas de Fourier en Tiempo Discreto de cada uno, se construyó la Matriz de Espectro E utilizando la formula propuesta. Posteriormente se determinaron los valores máximo y mínimo de dicha matriz y se construyó una nueva matriz de igual dimensión a la matriz de espectro, en la cuál se le asignó a cada posición de la misma un valor entre 0 y 255, mediante la siguiente fórmula:

$$V_{(i,j)} = \frac{E_{(i,j)} - m}{M - m} * 255 \quad (1)$$

Donde M representa al valor máximo de la Matriz de Espectro y m al valor mínimo de la misma. Esto se realizó para diferenciar gráficamente las frecuencias predominantes (zonas blancas) de las frecuencias que aportan menos energía (zonas negras) a la señal final.

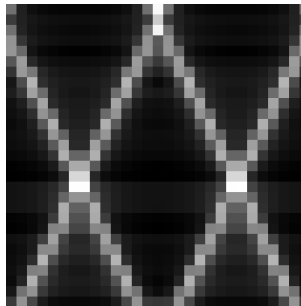


Figura 1: Representación gráfica de la Matriz de Espectro

Lo mismo se realizó para una señal simple de frecuencia constante y para una señal con variación de frecuencia lineal.

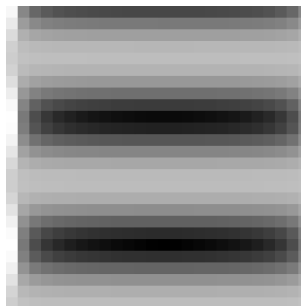


Figura 2: Representación gráfica de una señal de frecuencia constante

Este procesamiento de los datos fue realizado con el fin de poder analizar más intuitivamente la información presentada, pudiendo así contrastar los diferentes escenarios conocidos contra la señal en estudio e identificar a cuál se asemeja.

1.2. Análisis de los resultados

Para ayudarnos en el análisis de la señal en estudio, procesamos de igual manera señales conocidas, para así comparar sus matrices de espectro con la de la señal en estudio. Pudimos conjeturar que los valores presentes en la matriz de espectro representan la concentración de energía en determinadas frecuencias de los valores que conforman los segmentos. Además, se pudo concluir que la señal propuesta se asemeja a una función que varía linealmente en frecuencia.

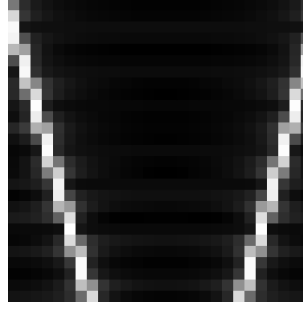


Figura 3: Representación gráfica de una señal con variación de frecuencia lineal $y_{[n]} = \text{sen}(\frac{2\pi}{60}n^2)$

Analizando más en detalle matrices de espectro con funciones de frecuencia linealmente variable, concluimos que a partir del muestreo de distintas funciones se observa un patrón, en el caso de funciones con frecuencias aptas para el muestreo (bajas frecuencias) se observan dos líneas de frecuencias predominantes.

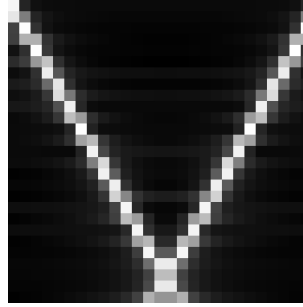


Figura 4: Representación gráfica de una señal con variación de frecuencia lineal $y_{[n]} = \text{sen}(\frac{2\pi}{15}n^2)$

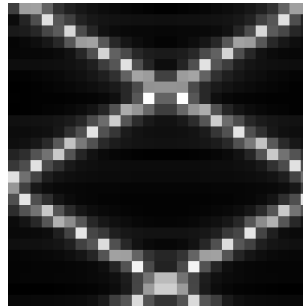


Figura 5: Representación gráfica de una señal con variación de frecuencia lineal $y_{[n]} = \text{sen}(\frac{2\pi}{5}n^2)$

Se puede observar desde la figura 3 hasta la 5, que a medida que aumentamos la frecuencia, las líneas predominantes se interceptan. En las imágenes 4 y 5 se produce aliasing por el efecto del muestreo de señales de alta frecuencia. Por lo tanto analizando la matriz de espectro de la señal en estudio podemos determinar que se produce aliasing y en consecuencia la discretización de la señal no fue buena.

2. Sistema masa-resorte-amortiguador discreto

Como contrapartida de la ecuación diferencial que modela el comportamiento del sistema en estudio, se desarrolla la ecuación en diferencias contemplando las siguientes aproximaciones:

$$y'_{(t)} \approx \frac{y_{[n+1]} - y_{[n-1]}}{2T}$$

$$y''_{(t)} \approx \frac{y_{[n+2]} - 2y_{[n]} + y_{[n-2]}}{4T^2}$$

siendo T el tiempo entre muestras. Si bien no es posible interpretar la derivada de una función discreta en el tiempo, las expresiones mostradas son una aproximación.

Por lo tanto, para aproximar la ecuación diferencial que simula al sistema del amortiguador, debemos reemplazar todas las apariciones de y' e y'' .

Siendo el sistema continuo del amortiguador:

$$k_3 y''_{(t)} + k_2 y'_{(t)} + k_1 y_{(t)} = x_{(t)}$$

Nos queda que la ecuación en diferencia que aproxima al modelado continuo del sistema sería:

$$k_1 y_{[n]} + k_2 \left(\frac{y_{[n+1]} - y_{[n-1]}}{2T} \right) + k_3 \left(\frac{y_{[n+2]} - 2y_{[n]} + y_{[n-2]}}{4T^2} \right) = x_{[n]}$$

A partir de esta ecuación en diferencias se puede calcular la función de transferencia del sistema, quedando la misma:

$$H(z) = \frac{1}{z^2 \left(\frac{k_3}{4T^2} \right) + z \left(\frac{k_2}{2T} \right) + \left(k_1 - \frac{2k_3}{4T^2} \right) + z^{-1} \left(\frac{k_2}{2T} \right) + z^{-2} \left(\frac{k_3}{4T^2} \right)}$$

Reemplazando los valores de k_1 , k_2 , y k_3 por los correspondientes a la entrega anterior, y definiendo $T = 0,1$ obtendríamos una discretización del sistema estudiado, obteniendo valores con una frecuencia de 10 Hz. De esta manera podemos reconstruir cualquier señal con un ancho de banda menor a 5 Hz, debido a que el amortiguador es un sistema mecánico suponemos que no existirán variaciones de mayor frecuencia que esta.

$$k_1 = 1$$

$$k_2 = 10$$

$$k_3 = 1$$

De esta manera contrastar la respuesta del sistema continuo y la discretización resultante en este ejercicio.

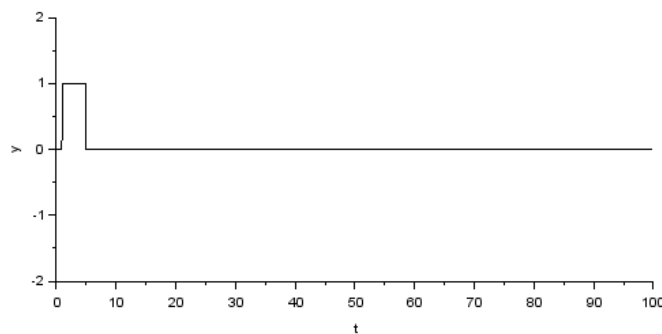


Figura 6: Entrada del sistema.

Como se observan en las imágenes, la discretización elegida no resulta útil para el estudio del sistema, ya que no existe una clara relación con su contraparte continua. Esto deja en evidencia que el muestreo elegido no fue adecuado. Posiblemente se logren mejores aproximaciones utilizando frecuencias de muestreo mayores.

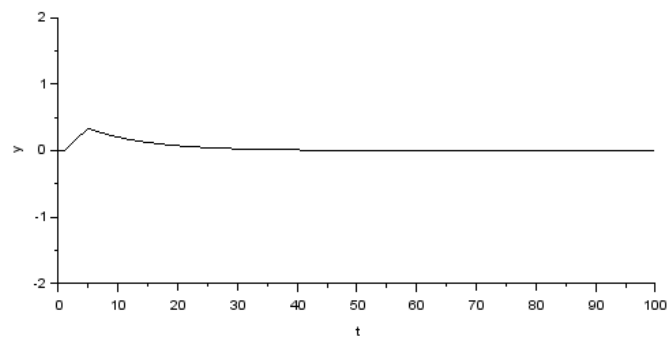


Figura 7: Salida resultante de simular el sistema con un sistema LTI continuo.

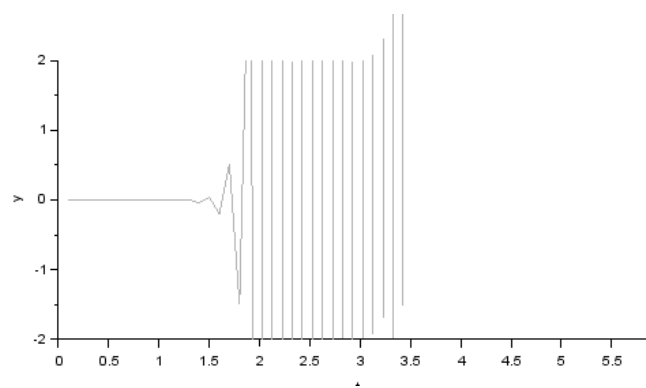


Figura 8: Salida resultante de simular el sistema con un sistema LTI discreto.