Nichtlineare Funktionalanalysis

Kompletter Mitschrieb zur Vorlesung im Sommersemester 2011

Dozent:
Dr. Patrick Dondl

Stand:
30. Juli 2011

Luis Felipe Müller

Institut für Angewandte Mathematik
Universität Heidelberg

Organisatorisches

Termine

- Vorlesung: Mo./Mi. 9-11ct. -104 Ang. Math.
- Übungsaufgaben: Mi. - Mi. vor der Vorlesung. Kasten in der Angew.Math
- Übungsgruppe: Fr. 16-18 Angew. Math. -101
- Website zur Vorlesung: http://dondl.org/wiki/Sommersemester_11
- Literatur:
  1. Růžička M: Nichtlineare Funktionalanalysis, Eine Einführung
  2. Aubin-Ekeland: Applied nonlinear Analysis
  3. Deimling: Nonlinear Functional Analysis
  4. Schwartz: Nonlinear Functional Analysis
  5. Zeidler: Nonlinear Functional Analysis and its applications
- Prüfungen: Zulassung mit etwa 50% der Übungsaufgaben-Punkte. Prüfung ist mündlich, beispielsweise am 29. Juli (Fr.)
- Dozent: Patrick Dondl, Sprechstunde Mo./Mi. 11-12 in Raum 130 (Angew. Math.)
- Tutor: Julian Scheuer

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Thema der Vorlesung

In der linearen Funktionalanalysis haben wir eine Vielzahl von Methoden kennengelernt um Ergebnisse aus der endlichdimensionalen linearen Algebra auf den unendlichdimensionalen Fall zu verallgemeinern. Ein Hauptaufgabe war dabei, die Lösbarkeit von Gleichungen der Form

$$Ax = y$$

für lineare Operatoren A auf ∞-dimensionalen Banchräumen zu zeigen.

Ein Beispiel:

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, gefüllt mit einer inkompressiblen, riskosen Flüssigkeit. $v_j(x)$ sei die Geschwindigkeit der Flüssigkeit an der Stelle $x \in \Omega$. $p(x)$ ist der Druck an der Stelle x.

Randbedingungen: $v_j(x) = 0 \quad x \in \partial\Omega$

Inkompressibilität: $\partial_j v_j(x) = 0 \quad x \in \Omega$

Bewegungsungleichung: Wir betrachten die Kräfte, die auf einen kleinen Würfel, eingeschlossen durch (x_1, x_2, x_3), $(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3)$. Druck auf eine Oberfläche des Würfels mit Normale x, ist $f_j^p = p \cdot \Delta x_2 \Delta x_3 \cdot \delta_{ij}$ auf die gegenüberliegende Seite wirkt

$$-(p + \partial_i p \Delta x_i) \Delta x_2 \Delta x_3 \delta_{ij}$$

Zusammen ergibt sich

$$f = (\partial_j p) \Delta V$$

Kraft durch Viskosität auf eine Oberfläche mit Normale x_1 ist

$$f_j^{V,x_i} = -2\eta \Delta x_2 \Delta x_3 \partial_1 v_j$$

mit einer Konstante η. Der gleiche Trick wie oben ergibt für die gegenüberliegende Oberfläche

$$\eta \Delta x_2 \Delta x_3 \partial(v_j + \partial v_j \Delta x_1)$$

Zusammen ergibt sich

$$f_j^V = \eta \Delta V \cdot \partial_i \partial_i v_j$$

$$\text{Newton:} \quad \rho \Delta V \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} v_j(t, x(t)) = \eta \Delta V \partial_i \partial_i v_j - \Delta V (\partial_j p) + \Delta V \kappa_j$$

mit einer externen Konstante κ_j, bspw. Gravitation. Teilen durch ΔV und die Kettenregel ergibt

$$\begin{aligned} \rho\partial_t v_j &= \eta\partial_i\partial_i v_j - \rho(v_i\partial_i) - \partial_j p + K_j \quad \text{(Newton)} \\ d_j v_j &= 0 \end{aligned}$$

Navier-Stokes. Frage: Existiert eine eindeutige Lösung zur sationären Navier-Stokes-Gleichung:

$$\eta\partial_i\partial_i v_j - (v_i\partial_i)v_j + \partial_j p + K_j = 0 \tag{1.1}$$

Wir können die Gleichung etwas umschreiben. Sei H ein Hilbertraum

$$H := \overline{\{u \in C_c^\infty(\Omega,\mathbb{R}^3),\ \text{so dass } \partial_j v_j = 0\}}^{W^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^3)}$$

Ein Skalarprodukt auf H ist gegeben durch

$$(u,v)_H := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} (\partial_i u_j)(\partial_i v_j)$$

Ω beschränkt $\Rightarrow (\cdot,\cdot)_H$ ist äquivalent zum üblichen Skalarprodukt (mittels Poincaré). Wir multiplizieren (1.1) mit $\omega \in H$, integrieren und erhalten

$$\begin{aligned} \int_\Omega (\eta\partial_i\partial_i v_j - (v,\partial_i)v_j + K_j)\cdot\omega_j &= \int_\Omega (\partial_j p)\omega_j = 0, \text{ da } \omega \text{ divergenzfrei.} \\ (1.1) \Rightarrow \eta(v,\omega)_H - a(v,v,w) - \int_\Omega K\omega &= 0 \end{aligned}$$

Ebenso für a:

$$a(u,v,w) := (\underbrace{B(u,v)}_{\text{bilinear.}}, w)_H$$

Also

$$(1.1) \Rightarrow \ (\eta v - B(u,v)) - \tilde{K}, \omega)_H = 0 \quad \forall \omega \in H$$

somit

$$\eta v - B(v,v) = \tilde{K}$$

Das ist eine Gleichung der Form

$$Fv = \tilde{K}, \quad \text{mit } F \text{ einem Nichtlinearen Operator} \tag{1.2}$$

Im ersten Teil der Vorlesung beschäftigen wir uns mit der eindeutigen Lösbarkeit von Gleichungen der Form

$$Fx = y, \quad F : X \to Y, \quad X, Y \quad \text{Banachräume}$$

und zum Abschluß zeigen wir mit Hilfe des *Schauder'schen Fixpunktsatzes* die Existenz und finden eine Lösung von (1.2), also der schwachen Form der stationären Navier-Stokes-Gleichung.
Im zweiten Teil der Vorlesung beschäftigen wir uns mit Variationsrechnung (d.h. dem Finden von Minimierern nichtlinearer Funktionalen)

$$W : X \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad X \quad \text{ein Banachraum}$$

Finde

$$x_0 \in X :\ W(x_0) = \inf_{y\in X} W(y)$$

Insbesonder treffen wir dort auf Probleme in der Elastizitätstheorie.

Aufbau der Vorlesung

- Abbildungsgrad → Existenz von Lösungen von $Fx = y$
- Monotone Operatoren → Eindeutigkeit von Lösungen von $Fx = y$; zeitabhängige Probleme.
- Variationsrechnung → $\inf_{y \in X} W(y)$

1.2 Vorarbeiten

1.2.1 Ableitung in Banachräume und implizite Funktionen

Es seien X und Y Banachräume, $\Omega \subset X$ offen, $F : \Omega \to Y$, $x_0 \in \Omega$

Definition 1.1 (Gâteaux-Ableitung) Die Gâteaux-Ableitung $\mathrm{d}F(x_0, \psi)$ des Operators F im Punkt x_0 in Richtung $\psi \in X$ ist gegeben durch

$$\mathrm{d}F(x_0, \psi) = \lim_{s \to 0} \frac{F(x_0 + s \cdot \psi) - F(x_0)}{s} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} F(x_0 + s\psi)\Big|_{s=0}$$

falls der Limes existiert. Der Operator F heißt in diesem Fall in x_0 Richtung ψ Gâteaux-differenzierbar.

Definition 1.2 (Fréchet-Ableitung) Der Operator F heißt Fréchet-differenzierbar in $x_0 \in \Omega$, falls ein beschränkter, linearer Operator

$$F'(x_0) : X \to Y$$

existiert, so dass

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{\|F(x_0 + h) - F(x_0) - F'(x_0) \cdot h\|}{\|h\|} = 0 \tag{2.1}$$

$F'(x_0)$ heißt dann Fréchet-Ableitung von F in x_0.

Theorem 1.3 *i) $F'(x_0)$ ist durch (2.1) eindeutig bestimmt.*

ii) Falls F stetig ist in x_0, so ist jeder lineare Operator, der (2.1) erfüllt, ebenfalls stetig.

iii) Ist $L : X \to Y$ linear, so gilt

$$L'(x) = L \quad \forall x \in X$$

Beweis: i) Es gelte (2.1) auch für L. Dann haben wir

$$\|Lh - F'(x_0)h\| \le \varepsilon \|h\| \quad \text{falls} \quad \|h\| < \delta = \delta(\varepsilon, x_0)$$

Für beliebiges h folgt aber

$$\begin{aligned} &\|(L - F'(x_0))(\delta \|h\|^{-1} \cdot h)\| \le \delta\varepsilon \\ &\qquad \Rightarrow \|(L - F'(x_0))h\| \le \varepsilon \|h\| \quad \forall\, h \in X,\ \forall\, \varepsilon > 0 \\ &\quad \Rightarrow \|L - F'(x_0)\|_{\mathscr{L}(X,Y)} = 0 \end{aligned}$$

ii) (2.1) wird umgeformt zu

$$\|F'(x_0)h\| \le \varepsilon \|h\| + \|F(x_0 + h) - F(x_0)\|$$

Mit $h \to 0$ folgt die Stetigkeit (für $\|h\| \le \delta$) von $F'(x_0)$ an der Stelle 0. Wegen Linearität von $F'(x_0)$ ist $F'(x_0)$ somit stetig.

iii) (2.1) gilt offensichtlich für $L'(x_0) = L$, mit i) folgt Eindeutigkeit.

□

Proposition 1.4 *Jeder Fréchet-differenzierbare Operator F ist Gâteaux-differenziebar $\forall\, \psi \in X$ und es gilt*

$$F'(x_0)\psi = \mathrm{d}F(x_0, \psi)$$

BEWEIS: Übungsaufgabe

□

Definition 1.5 F heißt (Fréchet-)differenzierbar auf Ω, falls $\forall\, x \in X$ ein $F'(x)$ existiert, sodass $F'(x)$ stetig ist und (2.1) erfüllt. F heißt stetig (Fréchet-)differenzierbar in Ω, falls die Abbildung

$$F' : \Omega \to \mathscr{L}(X, Y)$$

stetig ist.

Proposition 1.6 *Existiert die Gâteaux-Ableitung $\mathrm{d}F(x, \psi)\, \forall x \in \Omega$, und ist sie linear und stetig in ψ $\forall\, x \in \Omega$, so ist F Fréchet-differenziebar auf Ω und es gilt*

$$F'(x)\psi = \mathrm{d}F(x, \psi)$$

BEWEIS: Übungsaufgabe

□

Definition 1.7 Sei F auf Ω stetig differenziebar, $x_0 \in \Omega$. Falls ein stetiger linearer Operator

$$F''(x_0) : X \to \mathscr{L}(X, Y)$$

existiert mit

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{\|F'(x_0 + h) - F'(x_0) - F''(x_0)h\|_{\mathscr{L}(X,Y)}}{\|h\|} = 0$$

dann heißt F in x_0 zweimal (Fréchet-)differenzierbar und $F''(x_0)$ heißt zweite Ableitung von F in x_0. Höhere Ableitungen entsprechend.

Bemerkung: Es gilt die Kettenregel: Seien X, Y, Z Banachräume, $\Omega_X \subset X$ offen, $x_0 \in \Omega_X$,

$$F : \Omega_X \to Y, \quad F(x_0) = y_0 \in \Omega_Y \subset Y \quad \text{offen}$$

$$G : \Omega_Y \to Z$$

Falls $F'(x_0)$ und $G'(y_0)$ existiert, so ist

$$(G \circ F)'(x_0) = G'(y_0) \circ F'(x_0)$$

Definition 1.8 (Partielle Ableitung) Seien X, Y, Z Banachräume, $\Omega_X \subset X$ offen, $x_0 \in \Omega_X$, $\Omega_Y \subset Y$ offen, $y_0 \in \Omega_Y$. Der Operator

$$F : \Omega_X \times \Omega_Y \to Z$$

heißt partiell in (x_0, y_0) nach dem zweiten Argument (nach y) differenzierbar, falls die Abbildung

$$F(x_0, \cdot) : \Omega_Y \to Z$$

differenziebar ist. Wir nennen den linearen Operator $F_Y(x_0, y_0) : Y \to Z$, der

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{\|F(x_0, y_0 + h) - F(x_0, y_0) - F_Y(x_0, y_0)h\|}{\|h\|} = 0$$

erfüllt, die partielle Ableitung von F in (x_0, y_0) nach dem zweiten Argument.

Proposition 1.9 *Seien X, Y Banachräume, $\Omega \subset X$ offen und konvex mit $x_0, x_1 \in \Omega$. $F : \Omega \to Y$ sei stetig Fréchet-differenzierbar auf Ω. Dann gilt*

$$F(x_1) - F(x_0) = \int_0^1 F'(x_0 + t(x_1 - x_0))(x_1 - x_0)\,\mathrm{d}t$$

Das Integral ist als Limes der entsprechenden Riemannsumme zu verstehen und dieser existiert.

Beweis: Übungsaufgabe

□

Ähnlich dem endlichdimensionalen Fall geben uns die Ableitungen im Banachraum hinreichende Bedingungen um Operatoren implizit zu definieren. Die Fragestellung ist die folgende: Seien X, Y, Z Banachräume, U eine Umgebung von $x_0 \in X$. V eine Umgebung von $y_0 \in Y$. Wir suchen zu $F : U \times V \to Z$ einen Operator

$$T : U_0 \subset U \to V,$$

sodass gilt

$$F(x, Tx) = F(x_0, y_0) \quad \forall\, x \in U_0.$$

Durch eine einfache Verschiebung ist es ausreichend, den Fall

$$F(x_0, y_0) = 0$$

zu untersuchen.

Proposition 1.10 *Sei X ein Banachraum,* $\mathrm{Id} : X \to X$, $x \mapsto x$ *die Identität auf X. Es sei*

$$R : B_r(0) \subset X \to X,$$

eine k-Kontraktion mit $k < 1$, d.h. $\|R(x) - R(y)\| \leq k\|x - y\|$, und es gelte

$$\|R(0)\| < r(1 - k)$$

Dann existiert genau ein $x \in B_r(0)$ mit

$$(\mathrm{Id} + R)x = 0$$

Beweis: Sei $S = -R$, wir suchen also einen Fixpunkt von S.

1. Eindeutigkeit: Seien $Sx = x$ und $Sx' = x'$, damit gilt

$$\|x - x'\| = \|Sx - Sx'\| \leq k\|x - x'\|.$$

   Mit $k < 1$ folgt $x = x'$.

2. Existenz: Sei $x \in B_r(0)$, es gilt

$$\|Sx\| \leq \|Sx - S(0)\| + \|S(0)\| \leq k\|x\| + \|S(0)\| < kr + r(1 - k) = r$$

   Sei $x_p = Sx_{p-1}$, $x_0 = 0$. Es gilt (wie auch im Banach'schen Fixpunktsatz, siehe ÜB 1), dass

$$\|x_{n+p} - x_n\| \leq k^n(1 - k)^{-1}\|x\|,$$

   damit ist $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge und konvergiert gegen $x \in X$. Wir haben weiter, dass

$$\|x\| \leq \underbrace{\|x - x_{p+1}\|}_{\to 0} + \|x_{p+1}\| \quad \text{mit} \quad \|x_{p+1}\| < (1 - k)\|S(0)\| = r \Rightarrow \|x\| < r$$

   Wegen $x_{p+1} = Sx_p$ gilt dass $x = Sx$, somit ist x der gesuchte Fixpunkt.

□

Theorem 1.11 (Satz über implizite Funktion) *Seien X, Y, Z Banachräume, $U \subset X$ Umgebung von $x_0 \in X$, $V \subset Y$ Umgebung von $y_0 \in Y$. Sei weiter*

$$F : U \times V \to Z$$

stetig und stetig differenzierbar nach der zweiten Variablen. $F_Y(x_0, y_0)$ sei eine Bijektion von Y nach Z und es gelte

$$F(x_0, y_0) = 0$$

Dann existiert $B_\delta(x_0) \subset U$, $B_r(y_0) \subset V$ und genau ein Operator $T : B_\delta(x_0) \to B_r(y_0)$, so dass $T(x_0) = y_0$ und $F(x, Tx) = 0 \; \forall \, x \in B_\delta(x_0)$. T ist stetig.

Beweis: Ohne Einschränkung sei $x_0 = y_0 = 0$. Sei $L := F_Y(0,0)$, $\mathrm{Id} : Y \to Y$ die Identität auf Y. Es sei $S(x,y) := L^{-1}F(x,y) - y$ für $(x,y) \in U \times V$. Somit gilt

$$F(x,y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y + S(x,y) = 0.$$

S ist stetig differenzierbar nach dem zweiten Argument mit

$$S_Y = L^{-1}F_Y(x,y) - \mathrm{Id}$$

Damit gilt

$$S_Y(0,0) = 0$$

Sei $k \in (0,1)$. Wegen Stetigkeit von S_Y existiert $r > 0$ mit

$$\|S_Y(x,y)\| \leq k \quad \forall (x,y) \in B_r(0) \times B_r(0)$$

Sei nun $x \in B_r(0)$, $y, \tilde{y} \in B_r(0)$ Es gilt nach Proposition 1.9, dass

$$\|S(x,y) - S(x,\tilde{y})\| = \left\| \int_0^1 S_Y(x, \tilde{y} + t(y - \tilde{y}))(y - \tilde{y}) \, \mathrm{d}t \right\| \leq k \cdot \|y - \tilde{y}\|$$

Wegen $S(0,0)$ und Stetigkeit von S existiert $\delta \leq r$, so dass

$$\|S(x,0)\| \leq r(1-k) \quad \forall \, x \in B_\delta(0)$$

Sei also $x \in B_\delta(0)$. Nach Proposition 1.10 existiert genau ein $y \in B_r(0)$ mit $y + S(x,y) = 0$. Wir setzen

$$Tx = y, \quad T : B_\delta(0) \to B_r(0)$$

Es gilt $T(0) = 0$ wegen $0 + S(0,0) = T(0) + S(0, T(0)) = 0$ und der Eindeutigkeit von T. Es bleibt die Stetigkeit von T zu zeigen: Seien $x, x' \in B_\delta(0)$, damit gilt

$$0 = Tx + S(x, Tx) = T(x' + S(x, Tx'))$$

also

$$\begin{aligned}
\|Tx - Tx'\| &\leq \|S(x', Tx') - S(x, Tx')\| + \|S(x, Tx) - S(x, Tx)\| \\
&\leq \|S(x', Tx') - S(x, Tx')\| + k\|Tx - Tx'\| \\
&= (1-k)\|Tx - Tx'\| \\
&\leq \|S(x', Tx') - S(x, Tx')\| \to 0 \quad \text{für } x \to x'
\end{aligned}$$

Somit ist T stetig.

□

Bemerkung: Ist F r-mal stetig differenziebrar, so gilt das auch für T.

Beweis: Übungsaufgabe

□

Theorem 1.12 *Seien X, Y Banachräume, $U \subset X$ eine Umgebung von x_0. Es sei $F : U \to Y$ stetig differenzierbar und $F'(x_0)$ sei eine lineare Bijektion von X nach Y. Dann existiert eine Umgebung $U_0 \subset U$ von x_0, so dass*

$$F|_{U_0} : U_0 \to F(U_0) \ni y_0 = F(x_0)$$

ein Homöomorphismus (bistetige Abbildung) ist.

Beweis: Wir wenden Satz 1.11 auf

$$\tilde{F}(x, y) := F(x) - y$$

an.

□

Bemerkung: Ist F r-mal stetig differenzierbar, so gilt das auch für F^{-1} (F ist ein r-Diffeomorphismus).

Beweis: Übungsaufgabe

□

Definition 1.13 (Zusammenhände Mengen) - Sei X ein (topologischer metrischer, normierter) Raum. Eine Menge $\Omega \subset X$ heißt zusammenhängend, falls es keine zwei abgeschlossenen (offenen) Ω_1, Ω_2 gibt mit

$$\Omega \subset \Omega_1 \cup \Omega_2, \quad \Omega \cap \Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset, \quad \Omega \cap \Omega_{1,2} \neq \emptyset$$

- Eine Menge $\Omega \subset X$ heißt wegzusammenhängend, falls sich je zwei Punkte in Ω durch eine stetige, in Ω verlaufende Kurve verbinden lassen.

- Eine Menge $\overline{\Omega} \subset \Omega$ heißt Zusammenhangskomponente von Ω, falls $\overline{\Omega} \subset \Omega$ maximal, zusammenhängend.

Bemerkung: Wegzusammenhängend $\Rightarrow$ Zusammenhängend.
Offen, zusammenhängend $\Rightarrow$ Wegzusamenhängend

Theorem 1.14 (Mittelwert) *Seien X, Y Banachräume, $F : X \to Y$ stetig differenzierbar.*

i) Falls Ω konvex ist, so gilt

$$\|F(x) - F(y)\| \leq M\|x - y\|,$$

wobei

$$M = \max_{0 \leq t \leq 1} \|F'((1 - t)x + ty)\|$$

ii) Umgekehrt gilt: Falls

$$\|F(x) - F(y)\| \leq M\|x - y\| \quad \forall\, x, y \in \Omega$$

Dann gilt

$$\sup_{x \in \Omega} \|F'(x)\| \leq M$$

Beweis: Sei $f(t) := F((1 - t)x + ty)$, $0 \leq t \leq 1$. Nach Kettenregel gilt

$$f'(t) = F'((1 - t)x + ty)(x - y)$$

$$\Rightarrow \|f'(x)\| \leq \tilde{M} := M\|x - y\|$$

i) Sei $\phi(t) := \|f(t)\|$ für $\delta > 0$. Wir wollen zeigen, dass $\phi(t) \leq 0 \;\forall\, \delta > 0,\ 0 \leq t \leq 1$. Sei also (zum Widerspruch)

$$t_0 := \max\{t \in [0,1] \,|\, \phi(s) \leq 0 \;\forall\, s \leq t\}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\phi(t_0 + \varepsilon) &= \|f(t_0+\varepsilon) - f(t_0) + f(t_0) - f(0)\| - (\tilde{M} + \delta)t \\
&\leq \|f(t_0+\varepsilon) - f(t_0)\| - (\tilde{M} + \delta) - \phi(t_0) \\
&\leq \|f'(t_0)\varepsilon + o(0)\| - (\tilde{M} + \delta)\varepsilon \\
&\leq (\tilde{M} + o(1) - \tilde{M} - \delta)\varepsilon \\
&= (-\delta + o(1))\varepsilon < 0 \quad \text{für } \varepsilon \text{ hinreichend klein.}
\end{aligned}$$

ii) Angenommen, es existiert x_0 mit $\|F'(x_0)\| \geq M + 2\delta$, $\delta > 0$. Dann existiert $e \in X$, $\|e\| = 1$, $\|F'(x_0)e\| \geq M + \delta$. Somit gilt

$$\begin{aligned}
M\varepsilon &\geq \|F(x_0 + \varepsilon, e) - F(x_0)\| = \|F'(x_0)(\varepsilon e) + o(\varepsilon)\| \\
&\geq (M + \delta)\varepsilon - o(\varepsilon) > M\varepsilon
\end{aligned}$$

Das ist ein Widerspruch.

□

Corollar 1.15 *Sei $\Omega \subset X$ offen, (weg-)zusammenhängend, F stetig differenzierbar auf Ω. Es gilt*

$$F = \text{Const} \quad \Leftrightarrow \quad F' = 0$$

Bemerkung: Wir schreiben wie im endl. dim. $C(\Omega) = C^0(\Omega)$, $C^1(\Omega)\ldots$

Anwendungen: Lokale Existenz und Eindeutigkeit Banachraum-wertiger Differentialgleichungen. Sei X Banachraum, $\Omega \subset X$ offen, $I \subset \mathbb{R}$ kompaktes Intervall. Es sei $C_b(I, \Omega)$ der Banachraum der beschränkten, stetigen Abbildungen von I nach Ω, versehen mit der sup-Norm.

Lemma 1.16 *Sei Y ein Banachraum, $f \in C(\Omega, Y)$ und sei die Funktion*

$$f_\star : C_b(I, \Omega) \to C_b(I, Y)$$

definiert als

$$(f_\star x)(t) = f(x(t))$$

Es gilt $f_\star \in C^r$

Beweis: $r = 0$: Sei $x_0 \in C_b(I, \Omega)$, $\varepsilon > 0 \;\forall\, t \in I$ existiert $\delta(t) > 0$, so dass

$$\|f(\xi) - f(x_0(t))\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall\, \xi \in B_{2\delta(t)}(x_0(t))$$

Die offenen Kugeln

$$\{B_{\delta(t)}(x_0(t))\}_{t \in I}$$

sind eine offene Überdeckung vom $\{x_0(t)\}_{t\in I}$. Diese Menge ist als stetiges Bild einer kompakten Menge kompakt, und somit existiert endliche Teilüberdeckung

$$\{B_{\delta(t_j)}(x_0(t_j))\}_{1 \leq j \leq N}$$

Sei nun $x \in C_b(I, \Omega)$ mit

$$\|x - x_0\| \le \delta := \min_{1 \le j \le N} \delta(t_j)$$

Somit existiert $\forall\, t \in I$ ein t_j, so dass $\|x_0(t) - x_0(t_j)\| < \delta(t_j)$, und deshalb gilt

$$\|f(x(t)) - f(x_0(t))\| \le \underbrace{\|f(x(t)) - f(x_0(t_j))\|}_{\le 2\delta} + \underbrace{\|f(x_0(t_j)) - f(x_0(t))\|}_{\le \delta},$$

denn

$$\|x(t) - x_0(t_j)\| \le \|x(t) - x_0(t)\| + \|x_0(t) - x_0(t_j)\| \le 2\delta(t_j).$$

Somit folgt die Steigkeit......

$r = 1$: Wir müssen zeigen, dass

$$\sup_{t \in I} \|f(x_0(t) + x(t)) - f(x_0(t)) - f'(x_0(t))x(t)\| \le \varepsilon \sup_{t \in I} \|x(t)\|$$

denn

$$(f'_\star(x_0)x)(t) = f'(x_0(t))x(t)$$

Übungsaufgabe. Folgt wie Stetigkeit durch Kompaktheit von I.

□

Kapitel 2

Der Brouwer'sche Abbildungsgrad

Motivation

Ziel: $f(x) = 0$ zu lösen für $f : U \subset X \to X$, X Banachraum.

Frage: Existenz/Anzahl der Lösungen

Rückblick auf Funktionentheorie: Sei $z_0 \in \mathbb{C}$

$$n(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z - z_0} \, \mathrm{d}z$$

$\rightsquigarrow$ Verallg.: $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. $0 \notin f(\gamma)$

$$n(f(\gamma), 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'}{f} \, \mathrm{d}z = \sum_k n(\gamma, z_k)\alpha_k$$

wobei $f(z_n) = 0$, α_k Vielfachheiten.
Ziel: Verallg. des Begriffs „Umlaufzahl" für Abb. $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

2.1 Die Determinantenformel

Notation

$U \Subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned}
J_f(x) &:= \det \mathrm{d}f(x) \\
\mathrm{RV}(f) &:= \{y \in \mathbb{R}^n \mid \forall\, x \in f^{-1}(y),\ J_f(x) \neq 0\} \\
\mathrm{CV}(f) &:= \mathbb{R}^n \setminus \mathrm{RV}(f) \\
D_y^k(\overline{U}, \mathbb{R}^n) &:= \{f \in C^k(\overline{U}, \mathbb{R}^n) \mid y \notin f(\partial U)\} \\
D_y(\overline{U}, \mathbb{R}^n) &:= D_y^0(\overline{U}, \mathbb{R}^n)
\end{aligned}$$

$\tau(\mathbb{R}^n)$ bezeichne die Topologie auf $\mathbb{R}^n$.

Definition 2.1 Eine Abbildung

$$\deg : \bigcup_{U \in \tau(\mathbb{R}^n),\, y \in \mathbb{R}^n} (D_y(\overline{U}, \mathbb{R}^n) \times \{U\} \times \{y\} \to \mathbb{R},$$

d.h.

$$\deg = \deg(f, U, y)$$

heißt Gradabbildung, falls

(D1) Translationsinvarianz:

$$\deg(f, U, y) = \deg(f - y, U, 0)$$

(D2) Normalisation:

$$\deg(\mathrm{Id}, U, y) = 1 \quad \forall y \in U$$

(D3) Additivität: Seien $U_1, U_2 \subset U$ offen und disjunkt, sodass

$$y \notin f(\overline{U} \setminus (U_1 \cup U_2)),$$

dann gelte

$$\deg(f, U, y) = \deg(f, U_1, y) + \deg(f, U_2, y)$$

(D4) Homotopieinvarianz:

$$H(t) = (1-t)f + tg \in D_y(\overline{U}, \mathbb{R}^n) \quad \forall t \in [0,1] \Rightarrow \deg(f, U, y) = \deg(g, U, y)$$

Theorem 2.2 *Sei* deg *eine Gradabbildung. Dann gilt*

(i) $\deg(f, \varnothing, y) = 0$ *und*

$$\deg(f, U, y) = \sum_{i=1}^{N} \deg(f, U_i, y)$$

falls

$$y \notin f(\overline{U} \setminus \bigcup_{i=1}^{N} U_i),$$

wobei $U_i \subset U$ offen und disjunkt für $1 \le i \le N$.

(ii) $y \notin f(U) \Rightarrow \deg(f, U, y) = 0$

(iii) $|f(x) - g(x)| < \mathrm{dist}(y, f(\partial U))\ \forall x \in \partial U \Rightarrow \deg(f, U, y) = \deg(g, U, y)$

Beweis: (i) Sei $U_1 = U$, $U_2 = \varnothing$, einsetzen in **(D3)**

$$\Rightarrow \deg(f, \varnothing, y) = 0$$

$i = 1$: $U_2 = \varnothing$

$$\Rightarrow \deg(f, U, y) = \deg(f, U_1, y)$$

$i > 1$: Induktion mittels **(D3)**

(ii)

$$y \notin f(U) \Rightarrow y \notin f(\overline{U}) \Rightarrow y \notin f(\overline{U} \setminus \varnothing)$$
$$\overset{(i)}{\Rightarrow} \deg(f, U, y) = 0 \quad (i = 1, U_1 = \varnothing)$$

(iii) Sei $H(t,x) := (1-t)f(x) + tg(x)$ und sei $x \in \partial U$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\ |H(t,x) - y| &= |f(x) - y + t(g(x) - f(x))| \\
&\geq |f(x) - y| - |g(x) - f(x)| \\
&\geq \operatorname{dist}(y, f(\partial U)) - |g(x) - f(x)| > 0 \\
\Rightarrow\ y \notin H(t,\partial U) \quad \forall\, t &\Rightarrow\ H(t) \in D_y(\overline{U}, \mathbb{R}^n) \\
&\overset{\textbf{(D4)}}{\Rightarrow}\ \text{Behauptung.}
\end{aligned}$$

□

Theorem 2.3 *i)* $\deg(\cdot, U, y)$ *ist lokal konstant in* $D_y(\overline{U}, \mathbb{R}^n)$

ii) $\deg(f, U, \cdot)$ *ist lokal konstant in* $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial U)$

iii) Seien $H : [0,1] \times \overline{U} \to \mathbb{R}^n$ *und* $y : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ *stetig (d.h.* H *ist eine Homotopie zwischen* $H(0) = H(0,\cdot)$ *und* $H(1)$*), so gilt*

$$\deg(H(0), U, y(0)) = \deg(H(1), U, y(1)),$$

falls $H(t) \in D_{y(t)}(\overline{U}, \mathbb{R}^n)$ $\forall t \in [0,1]$

Beweis: Beachte: $D_y(\overline{U}, \mathbb{R}^n)$ ist offen in $C^0(\overline{U}, \mathbb{R}^n)$

i) $\|f - g\|_{C^0,\overline{U}} < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - g(x)| < \varepsilon\, \forall\, x \in \partial U$ mit

$$\varepsilon := \operatorname{dist}(y, f(\partial U)) \Rightarrow \deg(f, U, y) = \deg(g, U, y)$$

ii) Sei $y_0 \notin f(\partial U)$ und $y \in B_{\operatorname{dist}(y_0, f(\partial U))}(y_0) \subset \mathbb{R}^n \setminus f(\partial U)$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow\ \|(f - y) - f\| < \operatorname{dist}(y_0, f(\partial U)) \\
&\overset{i)}{\Rightarrow}\ \deg(f - y, U, y_0) = \deg(f, U, y_0) \\
&\overset{\textbf{(D1)}}{\Rightarrow}\ \deg(f, U, y_0 + y) = \deg(f, U, y_0)
\end{aligned}$$

iii) H ist gleichmäßig stetig

$$\Rightarrow\ H : [0,1] \to C^0(\overline{U}, \mathbb{R}^n) \quad t \mapsto H(t,\cdot)$$

ist auch stetig. H ist ein stetiger Weg in $D_y(\overline{U}, \mathbb{R}^n)$. Sei y fest

$$\Rightarrow\ \deg(H(t,\cdot), U, y) = \text{Const}\,,$$

weil $\deg(\cdot, U, y)$ konst. auf Zusammenhangskomponenten ist. Für $y = y(t)$:

$$\begin{aligned}
\deg(H(0), U, y(0)) &= \deg(H(0) - y(0), U, 0) = \deg(H(t) - y(t), U, 0) \quad \forall t \in [0,1] \\
&= \deg(H(1), U, y(1)).
\end{aligned}$$

□

Lemma 2.4 *Zwei nichtsinguläre Matrizen* $M_1, M_2 \in \mathrm{Gl}(n)$ *sind genau dann homotop in* $\mathrm{Gl}(n)$*, falls*

$$\operatorname{sign}\det M_1 = \operatorname{sign}\det M_2$$

Beweis: „⇒" Sei $M \in \mathrm{Gl}(n)$. Wegen der Linearität von det in Zeilen können elementare Zeilenumformungen mit Hilfe stetiger Deformationen in $\mathrm{Gl}(n)$ erzeugt werden.

$$M \rightsquigarrow \mathrm{diag}(m_1, \dots, m_m), \quad \text{mit} \quad |m_i| = 1$$

weil sign det M_1 = sign det M_2.

$$H(t) := \begin{pmatrix} \pm\cos(\pi t) & \mp\sin(\pi t) \\ \sin(\pi t) & \cos(\pi t) \end{pmatrix}$$

ist eine Homotopie in $\mathrm{Gl}(n)$ von $\mathrm{diag}(\pm 1, 1)$ nach $\mathrm{diag}(\mp 1, -1)$. $i = n$ transformiere $\mathrm{diag}(\mp 1, -1)$. $i = n$ transformiere $\mathrm{diag}(m_i, \dots, m_i)$ nach $\mathrm{diag}(\pm 1, 1)$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} \text{sign det}\, M & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

□

Theorem 2.5 *Sei $f \in D^1_y(\overline{U}, \mathbb{R}^n)$, $y \notin \mathrm{CV}(f)$ und* deg *eine Gradabbildung. Dann gilt*

$$\deg(f, U, y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{sign}\, J_f(x),$$

wobei die Summe endlich ist.

Beweis: O.B.d.A. $y = 0$ (nach **D1**). Alle $x \in f^{-1}(0)$ sind isolierte Punkte in U (Homöomorphiesatz). $f^{-1}(0)$ hat höchstens am Rand einen Häufungspunkt, aber $0 \notin f(\partial U)$.

$$\Rightarrow f^{-1}(0) = \{x^i\}_{i=1}^N$$

Wähle $\delta > 0$ so klein, dass $B_\delta(x^i)$ paarw. disjunkt.

$$\overset{2.2\ \mathrm{i})}{\Rightarrow} \deg(f, U, 0) = \sum_{i=1}^N \deg(f, B_\delta(x^i), 0).$$

Beachte $0 \notin f(\overline{U} \setminus \bigcup_{i=1}^N B_\delta(x^i))$.

$$f \in C^1 \Rightarrow f(x) = \mathrm{d}f(x^i)(x - x^i) + |x - x^i| r(x - x^i) \quad \text{mit} \quad r \in C^0(B_\delta(x^i), \mathbb{R}^n), \quad r(0) = 0.$$
$$H(t, x) := \mathrm{d}f(x^i)(x - x^i) + (1 - t)(x - x^i) + (x - x^i)$$

Zeige $0 \notin H(t, \partial B_\delta(x^i))$, für alle $t \in [0, 1]$.

$$J_f(x^i) \neq 0 \Rightarrow \exists\, \lambda > 0 : |\,\mathrm{d}f(x^i)(x - x^i)| \geq \lambda |x - x^i|$$

O.B.d.A. sei δ so klein, dass $|r(x - x^i)| < \lambda$ in $B_\delta(x^i)$.

$$\Rightarrow |H(t, x)| > |\,\mathrm{d}f(x^i)(x - x^i)| - (1 - t)(x - x^i) r(x - x^i) \geq \lambda\delta - \delta|r| > 0 \quad \forall\, x \in \partial B_\delta(x^i)$$
$$\overset{(\mathbf{D4})}{\Rightarrow} \deg(f, U, 0) = \sum_{i=1}^N \deg(\,\mathrm{d}f(x^i)(\cdot - x^i), B_\delta(x^i), 0)$$

Lemma 2.4

$$\Rightarrow \deg(\,\mathrm{d}f(x^i)(\cdot - x^i), B_\delta(x^i), 0) = \deg(\mathrm{diag}(\text{sign}\, J_f(x^i), 1, \dots, 1), B_\delta(x^i), 0)$$

Falls $J_f(x^i) > 0 \overset{\textbf{(D2)}}{\Rightarrow} \deg(I(\cdot - x^i), B_\delta(x^i), 0) = 1$. Es genügt also, $\deg(M(\cdot - x^i), B_1(x^i), 0)$. Zu berechnen, wobei $M = \mathrm{diag}(-1, 1, \dots, 1)$ ist.

$$\begin{aligned}
U_1 &:= B_1(x^i) = \{\max_{1\le k\le n} |x_k - x^i_k| < 1\} \\
U_2 &:= U_1 + (2, 0, \cdot, 0) \\
g(r) &= 2 - |r-1|,\ h(r) = 1 - r^2 \\
f_1(x) &:= (1 - g(x_1 - x_1^i)h(x_2 - x_2^(i)) \dots h(x_n - x_n^{(i)}), \dots, 1) \\
f_2(x) &:= (1, x_2 - x_2^{(i)}, \dots, x_n - x_n^{(i)}) \\
f_1^{-1}(0) &= \{y, z\} \quad y = x^i, z = x^i + (2, 0, \dots, 0) \\
f_1|_{\partial U} &= f_2|_{\partial U} \quad \Rightarrow \quad \deg(f_1, U_2, 0) = 0 \\
\Rightarrow\ \deg(f_1, U, 0) &= \deg(f_1, U_1, 0) + \deg(f_2, U_2, 0) \quad (\star) \\
\Rightarrow\ \deg(M, B_1(x^i), 0) &= \deg(\partial f_1(y), B_1(x^i), 0) \\
&= \deg(f_1, U_1, 0) \overset{(\star)}{=} -\deg(f_1, U_2, 0) \\
&= -\deg(\partial f_1(z), U_2, 0) = \deg(\mathrm{Id}, U_2, 0) = -1
\end{aligned}$$

□

2.2 Verallgemeinerung der Determinantenformel

Wir haben einen Kandidaten für deg identifiziert; für $f \in D^1_y(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, $y \in \mathbb{R}^n \cap \mathrm{RV}(f)$ gilt

$$\deg(f, \Omega, g) = \sum_{x_j \in f^{-1}(y)} \operatorname{sign} J_f(x_j).$$

Problem: Nur für glatte f, und reguläre Punkte zu definieren. Programm zum Existenzbeweis: Verallgemeinerung der Determinanten-Formel auf

- kirtische Werte y.

- nur stetige Funktionen f.

Drei Beispiele zur Illustration:

1. $f(x) = x^2$, $U = (-1, 1)$
2. $f(x) = x^2$, $U = (-1, 2)$
3. $f(x) = x + 2\sin(x)$, $U = (-10, 10)$

Wie aus den Beispielen ersichtlich ist, haben wir noch (kleine) Schwierigkeiten, den Abbildungsgrad an kritischen Werten von f zu definieren. Stetige Fortsetzungen liegt aber nahe. Das funktioniert aber nur falls es von diesen nicht „zu viele" gibt.

Schritt 1: Kritische Werte von f

Lemma 2.6 (Sard) *Es sei $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sei offen und beschränkt. Dann ist $\mathrm{CV}(f)$ eine Lebesgue-Nullmenge.*

Beweis: Klar, falls f eine affine Abbildung ist. (Dimension des Bildraumes der (konstanten) Ableitung!) Wir linearisieren.
Es sei $\mathrm{CP}(f) := \{x \in \Omega \,|\, J_f(x) = 0\}$ die Menge der kritischen Punkte von f. Sei $\{Q_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare, offene Überdeckung von Ω bestehend aus Würfeln, so dass

$$\overline{Q}_i \subset \Omega,\ i \in \mathbb{N}.$$

Es gilt

$$\mathrm{CV}(f) = f(\mathrm{CP}(f)) = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} f(\mathrm{CP}(f) \cap Q_j)$$

Es reicht also zu zeigen, dass

$$|f(\mathrm{CP}(f) \cap Q_j)|$$

für alle $j \in \mathbb{N}$ verschwindet. Sei nun Q ein solcher Würfel, ρ dessen Kantenlänge. Sei $\varepsilon > 0$, und sei Q unterteilt in N^n Würfel Q^i der Seitenlänge $\frac{\rho}{N}$, so dass

$$|f(x) - f(\tilde{x}) - f'(\tilde{x})(x - \tilde{x})| \leq \int_0^1 |f'(\tilde{x} + t(x - \tilde{x})) - f'(\tilde{x})| \cdot |x - \tilde{x}| \,\mathrm{d}t \leq \frac{\varepsilon\rho}{N} \quad \text{für alle} \quad x, \tilde{x} \in Q^i \tag{2.1}$$

So ein N existiert, nachdem f' auf Q gleichmäßig stetig ist. Nun enthalte Q^i einen kirtischen Punkt $\tilde{x}_i \in \mathrm{CP}(f)$, ohne Einschränkung sei $\tilde{x}_i = 0$, $f(\tilde{x}_i) = 0$, und setzen $M = f'(\tilde{x}_i)$. Wegen $\det M = 0$ existiert eine ONB $\{b^j\}_{j=1}^n$ mit

$$b^n \perp \mathrm{Bild}(M)$$

Weiter gilt

$$Q^i \subset \left\{ \sum_{j=1}^n \lambda_j b^j \,\Big|\, \|\lambda\|_2 \leq \sqrt{n}\frac{\rho}{N} \right\} \subset \left\{ \sum_{j=1}^n \lambda_j b^j \,\Big|\, |\lambda_j| \leq \sqrt{n}\frac{\rho}{N}\ \forall 1 \leq j \leq n \right\}$$

Damit existiert $C > 0$, (unabhängig von i), so dass

$$MQ^i \subset \left\{ \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j b^j \,\Big|\, |\lambda_j| \leq C \cdot \frac{\rho}{N} \right\}$$

mit $C = \sqrt{n}\max_{x\in\overline{Q}} |f'(x)|$. Damit gilt nach (2.1) sogar, dass

$$f(Q^i) \subset \left\{ \sum_{j=1}^n \lambda_j b^j \,\Big|\, |\lambda_j| \leq (C + \varepsilon)\frac{\rho}{N}\ \forall 1 \leq j \leq n-1,\ |\lambda_n| \leq \frac{\varepsilon\rho}{N} \right\}$$

Es folgt

$$|f(Q^i)| \leq \frac{\tilde{C}\varepsilon}{N^n},$$

falls in Q^i ein kritischer Punkt liegt. Es gibt maximal N^n Unterwürfel Q^i mit kritischen Punkten. Somit gilt

$$|f(Q \cap \mathrm{CP}(f))| \leq C \cdot \varepsilon$$ □

Dank Lemma 2.6 ist $\mathbb{R}^n \setminus \mathrm{CV}(f)$ dicht in $\mathbb{R}^n$. Das reicht leider (?) noch nicht.
Wir brauchen $d_1 = d_2$, um den Abbildungsgrad sinnvoll durch die Determinanten-Formel definieren zu können. (denn deg soll konstant sein auf Zusammenhangskomponenten, unabhängig von kritischen Werten.)
Idee: Umschreiben der Determinantenformel als *Integral*. Es sei im Weiteren η_ε ein Standard-Mollifier, d. h.

$$\eta_\varepsilon \in C_c^\infty(B_\varepsilon(0) \subset \mathbb{R}^n), \quad \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon = 1, \quad \eta_\varepsilon \geq 0$$

Lemma 2.7 *Sei $f \in D^1_y(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, $y \notin \mathrm{CV}(f)$. Dann gilt*

$$\deg(f, \Omega, y) = \sum_{x_j \in f^{-1}(y)} \operatorname{sign} J_f(x_j) = \int_\Omega \eta_\varepsilon(f(x) - y) J_f(x)\, \mathrm{d}x \tag{2.2}$$

für alle ε hinreichend klein, d. h.

$$\varepsilon_0 > \varepsilon > 0, \quad \textit{mit} \quad \varepsilon_0 = \varepsilon_0(f, y)$$

Es gilt $\operatorname{supp}(\eta_\varepsilon(f(\cdot) - y)) \subset \Omega$ *für* $\varepsilon < \operatorname{dist}(y, f(\partial\Omega))$

BEWEIS: 1) Falls $f^{-1}(y) = \varnothing$, dann sei $\varepsilon_0 = \operatorname{dist}(y, f(\partial\Omega))$

2) Falls $f^{-1}(y) := \{x^i\}_{1 \leq i \leq N}$, sei $\varepsilon_0 > 0$, so dass

$$f^{-1}(B_{\varepsilon_0}(y)) = \bigcup_{i=1}^N U(x_i) =: \bigcup_{i=1}^N U_i$$

mit $U_i \cap U_j = \varnothing$ für $i \neq j$. Aus dem *Satz über die implizite Funktion* (war ja klar, dass wir den mal brauchen) folgt für evtl. noch kleiners ε_0, dass

$$f\big|_{U_i} \quad \text{bijektiv,} \quad J_f(x) \neq 0 \quad \forall x \in U_i.$$

Wieder gilt

$$\eta_\varepsilon(f(x) - y) = 0 \quad \forall x \in \overline{\Omega} \setminus \bigcup_{i=1}^N U_i$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}\int_\Omega \eta_\varepsilon(f(x) - y) J_f(x)\, \mathrm{d}x &= \sum_{i=1}^N \operatorname{sign} J_f(x^i) \cdot \int_{B_{\varepsilon_0}(x)} \eta_\varepsilon(\tilde{x})\, \mathrm{d}\tilde{x} \\ &= \sum_{x^i \in f^{-1}(y)} \operatorname{sign} J_f(x^i)\end{aligned}$$

mit $\tilde{x} = f(x) - y$.

□

Die Integraldarstellung ergibt auch für kritische Punkte Sinn. Aber: Wegen der Abhängigkeit von ε_0 von f und y ist auch der Wert des Integrals nicht *a priori* stetig in f, y.
Dieses Problem können wir beseitigen, wenn wir $f \in C^2$ fördern. Wir brauchen zunächst einen Hilfssatz.

Proposition 2.8 *a) Sei $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$,* $\operatorname{supp} u \subset K$, *$K$ kompakt. Sei $\varphi = \operatorname{div} u$. Dann gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, \mathrm{d}x = 0$$

b) Sei $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^n)$, und sei $z \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$\varphi(x + z) - \varphi(x) = \operatorname{div}\left(z \cdot \int_0^1 \varphi(x + tz)\, \mathrm{d}t\right)$$

c) Seien u, K, φ wie in a), $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt. Sei $f \in C^2(\overline{\Omega})$ mit $K \cap f(\partial\Omega) = \varnothing$. Dann existiert $v \in C^1(\overline{\Omega})$, mit $\operatorname{supp} v \subset \Omega$, *so dass*

$$\varphi(f(x)) J_f(x) = \operatorname{div} v(x) \quad \textit{auf} \quad \Omega$$

BEWEIS: a) Klar!

b) Sei

$$\eta(x) := \int_0^1 \varphi(x - sz)\,\mathrm{d}s.$$

$$\begin{aligned}(z \cdot \eta(x)) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\eta(x+tz)\Big|_{t=0} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(x+sz+tz)\Big|_{t=0}\mathrm{d}s \\ &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(x+sz)\,\mathrm{d}s = \varphi(x+z) - \varphi(x)\end{aligned}$$

c) Es sei d_{ij} der (i,j)- Eintrag der Kofaktormatrix von $(f')_{ij} = \partial_i f_j(x)$. Es sei $v_j(x) = \sum_{j=1}^n u_j(f(x))\,\mathrm{d}_{ij}(x), i = 1,\dots,n$. Es gilt $K \cap f(\partial\Omega) = \Phi$, $f \in C(\overline{\Omega})$, damit existiert $\delta > 0$ mit $\mathrm{dist}(K, f(\overline{\Omega} \setminus f(\Omega_\delta))) > 0$. Somit gilt $\operatorname{supp} v \subset \Omega_\delta \subset \Omega$. Wir rechnen:

$$\partial_i v_i = \sum_{\mathrm{d}_{ij}(x)\partial_k u_j(f(x))} \partial_i f_k. + \sum_{j=1}^n u_j(f(x))\partial_i\,\mathrm{d}_{ij} x$$

Behauptung 1:

$$\sum_{i=1}^n \partial_i\,\mathrm{d}_{ij}(x) = 0$$

Behauptung 2:

$$\sum_{i=1}^n \mathrm{d}_{ij}(x)\partial_i f_k(x) = \delta_{ij} \cdot J_f(x)$$

Somit gilt:

$$\begin{aligned}\operatorname{div} u(x) &= \sum_{k,j} \partial_k u_j(f(x)) \cdot \left(\sum_{i=1}^n \mathrm{d}_{ij}(x)\partial f_k(x)\right) + \sum_{i=1}^n u_j(f(x))\left(\sum \partial_i\,\mathrm{d}_{ij}(x)\right) \\ &= \sum_{k,j} \partial_k u_j(f(x))\delta_{jk} J_f(x) = \varphi(f(x)) J_f(x)\end{aligned}$$

Behauptungen: Siehe Übungsblatt 2. Wir wollen nun zeigen, dass der über die Determinantenformel definierte Abbildungsgrad konstant ist auf Zusammenhangskomponente. Zu zeigen: $\deg(f,\Omega,y_1) = \deg(f,\Omega,y_2)$.

Lemma 2.9 *Sei*

$$f \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n), \quad y_0 \notin f(\partial\Omega), \quad \rho := \mathrm{dist}(y_0, f(\partial\Omega))$$

Dann ist $\deg(f,\Omega,\cdot)$ *(definiert durch die Determinantenformel) konstant auf*

$$B_\delta(y_0) \cap \mathrm{RV}(f)$$

BEWEIS: Sei $y^j \in B_\delta(y_0) \cap \mathrm{RV}(f)$, $j = 1,2$, sei $\delta := \rho - \max_{j=1,2} \|y^j - y_0\|$. Sei $\varepsilon > 0$, so dass

$$\deg(f,\Omega,y^j) = \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(f(x) - y^j) J_f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{(nach Lemma 2.7)}$$

mit Proposition 2.8 b) gilt

$$\begin{aligned}\eta_\varepsilon(x-y^2) - \eta_\varepsilon(x-y^1) &= \eta_\varepsilon(x - y^1 + (y^1 - y^2)) - \eta_\varepsilon(x-y^1) \\ &= \operatorname{div} w(x) \quad \text{mit} \\ w(x) &= (y^1 - y^2)\int_0^1 \eta_\varepsilon(x - y^1 + t(y^1-y^2))\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Behauptung: Es gilt $\operatorname{supp} w \subset B_\delta(y_0)$

Beweis: Sei $x \in \operatorname{supp} w$. Damit existert $t \in [0,1]$ mit $|x - y^1 + t(y^1 - y^2)| < \varepsilon$

$$\Rightarrow |x - y_0| \leq \varepsilon + |y^1 - t(y^1 - y^2) - y_0| \leq \varepsilon + |(1-t)(y^1 - y_0) + t(y^2 - y_0)|$$
$$\varepsilon + \rho - \delta < \rho$$

Damit gilt aber, dass $f(\partial\Omega) \cap \operatorname{supp} w = \varnothing$. Mit Proposition 2.8 c) existiert

$$v \in C^1(\Omega),\ \operatorname{supp} v \subset \Omega.$$

und

$$\left(\eta_\varepsilon(f(x) - y^2) - \eta_\varepsilon(f(x) - y^1)\right) J_f(x) = \operatorname{div} v(x)$$

Mit der Proposition 2.8 a) folgt die Behauptung.

□

□

Definition 2.10 Sei $f \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, $y \notin f(\partial\Omega)$. Wir setzen

$$\deg(f, \Omega, y) = \deg(f, \Omega, \tilde{y}) = \sum_{x \in f^{-1}(\tilde{y})} \operatorname{sign} J_f(x),$$

wobei $\tilde{y} \in \mathrm{RV}(f)$ mit

$$|\tilde{y} - y| < \operatorname{dist}(y, f(\partial\Omega))$$

Behauptung: deg ist somit nach dem vorherstehenden Überlegungen wohldefiniert.

2. Schritt: Nur stetige Funktionen f

Auch hier die Idee: Sei $f \in D_y(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$. Wir suchen $\tilde{f} \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ hinreichend nahe an f (in derselben Zusammenhangskomponente von $D_y(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$) und übertragen den Wert von $\deg(\cdot, \Omega, y)$ von $\tilde{f}$ auf f. Es bleibt zu zeigen, dass die so definierte Funktion stetig ist.

Lemma 2.11 *Sei $f \in D_y^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, sei $g \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$. Dann existiert $\varepsilon > 0$, so dass*

$$\deg(f + tg, \Omega, y) = \deg(f, \Omega, y) \quad \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$$

Beweis: 1) $f^{-1}(y) = \varnothing \;\Rightarrow\; (f + tg)^{-1}(y) = \varnothing$ falls

$$|t| < \frac{\operatorname{dist}(y, f(\overline{\Omega}))}{\|g\|_\infty}$$

2) $y \in \mathrm{RV}(f) \;\Rightarrow\; f^{-1}(y) = \{x\}_{i=1}^N$. Mithilfe des *Satzes über die implizite Funktion* finden wir

$$U(x^i) =: U^i$$

disjunkte Umgebungen, so dass eindeutige Lösungen $x^i(t) \in U^i$ existieren von

$$(f + tg)(x) = y \quad \forall |t| < \varepsilon$$

Wir können (zumindest auf evtl. noch kleineren U^i) annehmen, dass das Vorzeichen von J_{f+tg} konstant ist auf U^i. Sei

$$\varepsilon_2 = \frac{\operatorname{dist}(y, f(\Omega \setminus \bigcup_{i=1}^N U^i))}{\|g\|_\infty}.$$

Dann gilt $\operatorname{dist}(y, (f + tg)(\partial\Omega)) > 0\ \forall |t| < \varepsilon_2$. Das Lemma gilt somit für $\varepsilon = \min(\varepsilon, \varepsilon_2)$

3) $y \in \mathrm{CV}(f)$. Sei dann $\tilde{y} \in \mathrm{RV}(f)$.

$$|y - \tilde{y}| < \frac{\rho}{3} = \frac{1}{3}\mathrm{dist}(y, f(\partial\Omega)).$$

Nach Definition 2.10 gilt

$$\deg(f, \Omega, y) = \deg(f, \Omega, \tilde{y}).$$

Sei $\tilde{\varepsilon} > 0$ mit $\deg(f, \Omega, \tilde{y}) = \deg(f + tg, \Omega, \tilde{y})$ für $|t| < \tilde{\varepsilon}$ (Nach Schritt 2). Mit $\varepsilon = \min(\tilde{\varepsilon}, \frac{\rho}{3\|g\|_\infty})$ gilt:

$$|\tilde{y} - (f + tg)(x)| \geq \frac{\rho}{3} \quad \forall x \in \partial\Omega$$

Somit gilt

$$|\tilde{y} - y| < \mathrm{dist}(\tilde{y}, (f + tg)(\partial\Omega))$$

also

$$\deg(f + tg, \Omega, \tilde{y}) = \deg(f + tg, \Omega, y)$$

Es folgt

$$\deg(f, \Omega, y) = \deg(f + tg, \Omega, y)$$

□

Theorem 2.12 (Existenz und Eindeutigkeit des Brouwer'schen Abbildungsgrades) *Es existiert eine eindeutige Abbildung*

$$\deg(f, \Omega, y)$$

mit den Eigenschaften ***(D1)-(D4)****. Weiter gilt*

$$\deg(\cdot, \Omega, y) : D_y(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n) \to \mathbb{Z}$$

ist konstant auf Zusammenhangskomponente von $D_y(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$. Für $f \in D_y(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ ist $\deg(f, \Omega, y)$ *gegeben durch*

$$\deg(f, \Omega, y) = \sum_{x \in \tilde{f}^{-1}(y)} \mathrm{sign}\, J_{\tilde{f}}(x),$$

wobei

$$\tilde{f} \in D_y^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$$

beliebig aus derselben Komponente von $D_y(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ wie f gewählt werden kann mit $y \in \mathrm{RV}(\tilde{f})$.

Beweis: Aus Lemma 2.9 und 2.13 folgt, dass deg wohldefiniert ist und lokal konstant mit Werten in $\mathbb{Z}$. Die Abbildung deg auf Zusammenhangskomponenten.

(D2) → klar.

(D1) gilt nachdem diese Bedingung per Konstruktion für die Determinatenformel gilt.

(D3) Wir wählen $\|f - \tilde{f}\|_\infty < \mathrm{dist}(y, f(\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cap \Omega_2)))$. **D3** gilt per Konstruktion für $\tilde{f}$, sonst für f.

(D4) folgt aus der Konstruktion von f auf Zusammenhangskomponente.

□

Beispiele:

1) Sei

$$f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 + \cos(x_1 + x_2) \\ x_2 + 2x_1 + \sin(x_1 + x_2) \end{pmatrix}$$

und

$$g(x_1, x_2) := \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 \\ x_2 + 2x_1 \end{pmatrix}$$

Es gilt $|g(x)| = \sqrt{5}|x|$ und $|f(x) - g(x)| = \sqrt{\sin^2(x_1 + x_2) + \cos^2(x_1 + x_2)} = 1$. Sei $h(t) = (1 - t)g + tf = g + t(f - g)$.

$$|h(t)| \geq |g| - t|f - g| > 0 \quad \text{für} \quad |x| > \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow \deg(f, B_r(0), 0) = \deg(g, B_r(0), 0) = 1 \quad \text{für} \quad r > \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Somit existiert eine Lösung $x : f(x) = 0$.

2)

Theorem 2.13 *Ein stetiges Vektorfeld im $\mathbb{R}^n$, das auf einer Kugeloberfläche überall nach außen zeigt, muss auf einem Punkt im Innern der Kugel verschwinden.*

Anders formuliert, sei $f : \overline{B_R(0)} \to \mathbb{R}^n$ stetig, so dass $f(x) \cdot x > 0\ \forall |x| = R$. Dann existiert ein $x_0 \in B_R(0)$ mit $f(x_0) = 0$.

Beweis: Wir haben $\deg(\mathrm{Id}, B_R(0), y) = 1$ für $y \in B_R(0)$. Angenommen, $f(x) \neq 0$ für alle $x \in B_R(0)$. Dann gilt $f^{-1}(0) \cap B_R(0) = \emptyset$.

$$\Rightarrow \deg(f, B_R(0), 0) = 0$$

Sei $H(t) = (1 - t)\mathrm{Id} + tf$.

$$\deg(H(0), B_R(0), 0) = 1$$
$$\deg(H(1), B_R(0), 0) = 0.$$

Es existiert ein $t_0 \in (0, 1)$, so dass $H(t_0) \notin D_0(\overline{B_R(0)}, \mathbb{R}^n)$.

$$\exists x_0 \in \partial B_R(0) \cdot (H(t_0))(x_0) = 0.$$

$$\begin{aligned} 0 &= H(t_0)(x_0) \\ \Rightarrow 0 &= H(t_0)(x_0) \cdot x_0 = \underbrace{(1 - t_0)R^n}_{>0} + \underbrace{t_0 f(x_0) x_0}_{>0} > 0 \end{aligned}$$

Widerspruch!

□

2.3 Der Brouwer'sche Fixpunktsatz

Der *Brouwer'sche Fixpunktsatz* ist eine Folgerung aus den Eigenschaften des Abbildungsgrades. Er besagt, dass stetige Abbildungen, die kompakte, konvexe Mengen im $\mathbb{R}^n$ (oder Mengen, die dazu homöomorph sind) in sich selbst abbilden, einen Fixpunkt besitzen.

Einschub:

Zerlegung der Eins: Sei $\{U_i\}_{i\in I}$ eine Überdeckung von X, X ein topologischer Raum. $\{\varphi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ ist eine $\{U_i\}_{i\in I}$ untergeordnete lokal endliche Zerlegung der Eins, falls gilt

- $\varphi_\lambda \in C(U,[0,1])\ \forall\,\lambda$.
- $\forall\,\lambda\in\Lambda\ \exists\, i\in I:\ \operatorname{supp}\varphi_\lambda \subset U_i$
- $\sum_{\lambda\in\Lambda}\varphi_\lambda = 1$
- $\forall x \in X\ \exists\, U(x)$ Umgebung von x, so dass nur *endlich viele* $\lambda\in\Lambda$ existieren, mit $U(x)\cap \operatorname{supp}\varphi_\lambda \neq \varnothing$ (lokal endlich).

Konstruktion aus einer lokal endlichen Überdeckung $(V_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ($\forall x\in X\ \exists\, U(x)$ Umgebung: $U(x)\cap V_\lambda \neq \varnothing$ nur für endlich viele $\lambda\in\Lambda$.) in metrischen Räumen (X,d).

- Sei $\alpha(x) = \sum_{\lambda\in\Lambda}\operatorname{dist}(x, X\setminus V_\lambda) > 0\ \forall x\in X$, mit $\operatorname{dist}(x,\varnothing) := 1$.
- $\varphi_\lambda(x) := \frac{1}{\alpha(x)}\operatorname{dist}(x, X\setminus V_\lambda)\ \in [0,1]$, $\varphi_\lambda = 0$ für $x\notin V_\lambda$.

„Konstruktion“ einer lokal endlichen Überdeckung $\{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, die eine offen Überdeckung $\{U_i\}_{i\in I}$ verfeinert (d.h. $\forall\,\lambda\in\Lambda\ \exists i\in I$, $V_\lambda\subset U_i$).

Die Existenz einer solchen lokal endlichen verfeinernde Überdeckung zu jeder offenen Überdeckung ist die Definition der *Parakompaktheit*.

Theorem 2.14 *Jeder metrische Raum ist parakompakt.*

Beweisidee: Angenommen $I = \mathbb{N}$ also wohlgeordnet. (jede Teilmenge besitzt ein eindeutiges kleinstes Element.) Wir setzen für $i\in I$, $n\in\mathbb{N}$.

$$D_{in} = \bigcup_{x\in\Phi(i,n)} B_{2^{-n}}(x)$$

$$\Phi(i,n) := \left\{ x\in X \,\middle|\, \text{mit} \begin{cases} i \text{ ist die kleinste Zahl, so dass } x\in U_i \\ x\notin D_{jm} \text{ für } m<n \\ B_{3\cdot 2^{-n}}\subset U_i \end{cases} \right\}$$

klar: $\{D_{in}\}$ verfeinert $\{U_i\}$

Überdeckung: Klar, denn für jedes $x\in X$ finden in ein kleinstes $i\in I=\mathbb{N}$ und ein n hinreichend groß.

lokale Endlichkeit: (s.Artikel). Ist I nun eine beliebige Indexmenge, so läßt sich diese wohlordnen (*Zorn'sches Lemma*), und die Wohlordnung ist die einzige Eigenschaft von I, die wir benutzt haben.

□

Theorem 2.15 (Fortsetzung stetiger Funktionen) *Sei X ein metrischer Raum, Y normierter Raum. Sei $K\subset X$ abgeschlossen. Sei $F\in C(K,Y)$. Dann besitzt F eine stetige Fortsetzung $G: X\to Y$, so dass*

$$G(X)\subset \operatorname{conv} F(K)$$

Beweis: Wir betrachten die offene Überdeckung

$$\left\{B_{\rho(x)}(x)\right\}_{x\in X\setminus K} \quad \text{von} \quad X \setminus K$$

mit $\rho(x) = \frac{1}{2}\mathrm{dist}(x, K)$. Wir wählen nun eine lokal endliche Zerlegung der Eins $\{\varphi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, welche der offenen Überdeckung untergeordnet ist. Sei

$$G(x) := \begin{cases} F(x) & \text{für} \quad x \in K \\ \sum_{\lambda\in\Lambda} \varphi_\lambda(x) \cdot F(x_\lambda) & \text{für} \quad x \in X \setminus K \end{cases},$$

wobei x_λ beliebig in K so gewählt ist, dass

$$\mathrm{dist}(x_\lambda, \mathrm{supp}\,\varphi_\lambda) \leq 2 \cdot \mathrm{dist}(K, \mathrm{supp}\,\varphi_\lambda).$$

G ist offensichtlich stetig auf $X \setminus \partial K$ und

$$G(X) \subset \mathrm{conv}\, G(K).$$

Sei also $x_0 \in \partial K$ und sei $\varepsilon > 0$. Wir wählen $\delta > 0$, so dass

$$\|F(x) - F(x_0)\| \leq \varepsilon \quad \forall x \in K \quad \text{mit} \quad d(x, x_0) \leq 9\delta.$$

Es bleibt zu zeigen, dass

$$\|G(x) - F(x_0)\| \leq \varepsilon \quad \forall x \in X \setminus K \quad \text{mit} \quad d(x, x_0) \leq \delta$$

a Sei also $x \notin K$, dann gilt

$$\|G(x) - F(x_0)\| \leq \sum_{\lambda\in\Lambda} \varphi_\lambda(x)\|F(x_\lambda) - F(x_0)\|$$

Nach Konstruktion liegt x_λ nicht weit von x entfernt, damit nicht weit von x_0, falls $x \in \mathrm{supp}\ \varphi_\lambda$. In der Tat gilt für $x \in \mathrm{supp}\ \varphi_\lambda$:

$$\begin{aligned} d(x, x_\lambda) &\leq \mathrm{dist}(x_\lambda, \mathrm{supp}\ \varphi_\lambda) + \underbrace{\mathrm{diam}(\mathrm{supp}\ \varphi_\lambda)}_{=\sup_{x,y\in\mathrm{supp}\ \varphi_\lambda} d(x,y)} \\ &\leq 2\mathrm{dist}(K, \mathrm{supp}\ \varphi_\lambda) + \mathrm{diam}(\mathrm{supp}\ \varphi_\lambda) \end{aligned}$$

Nachdem $\{\varphi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ der Überdeckung $\{B_{\rho(x)}\}_{x\in X\setminus K}$ untergeordnet ist, existiert $\tilde{x} \in X \setminus K$, so dass

$$\mathrm{supp}\ \varphi_\lambda \subset B_{\rho(\tilde{x})}(\tilde{x})$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \mathrm{diam}(\mathrm{supp}\ \varphi_\lambda) \leq 2\rho(\tilde{x}) = \mathrm{dist}(\tilde{x}, K) \leq 2\mathrm{dist}(K, B_{\rho(\tilde{x})}(\tilde{x})) \leq 2\mathrm{dist}(K, \mathrm{supp}\,\varphi_\lambda) \\ &\qquad \Rightarrow d(x_0, x_\lambda) \leq 4\mathrm{dist}(K, \mathrm{supp}\ \varphi_\lambda). \end{aligned}$$

Und es folgt

$$\begin{aligned} d(x_0, x_\lambda) &\leq d(x_0, x) + d(x, x_\lambda) \\ &\leq d(x_0, x) + 4\mathrm{dist}(K, \mathrm{supp}\ \varphi_\lambda) \\ &\leq d(x_0, x) + 8\mathrm{dist}(K, \mathrm{supp}\ \varphi_\lambda) \\ &\leq d(x_0, x) + 8d(x_0, x) = 9d(x_0, x) \leq \delta. \end{aligned}$$

Nach Wahl von δ gilt

$$\|F(x_\lambda) - F(x_0)\| \leq \varepsilon \quad \forall \lambda \in \Lambda : \varphi_\lambda(x) \neq 0.$$

Somit gilt

$$\|G(x) - G(x_0)\| \leq \varepsilon \quad \text{für} \quad d(x, x_0) \leq \delta.$$

□

Bemerkung: Mit Hilfe dieses Satzes und dem Abbildungsgrad lässt sich der sog. „Igelsatz" zeigen, der besagt, dass man einen Igel nicht stetig kämmen kann. Übungsaufgabe.

Theorem 2.16 (Brouwer'scher Fixpunktsatz) *Sei K ein topologischer Raum, der zu einer kompakten konvexen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ homöomorph ist. Sei $f \in C(K, K)$. Dann besitzt f einen Fixpunkt.*

Beweis: 1. $K = \overline{B_r(0)} \subset \mathbb{R}^n$. Falls für f ein Fixpunkt auf dem Rand existiert, dann sind wir fertig. Ansonsten gilt für $H(t) = \mathrm{Id} - tf$, dass $0 \notin H(t)(\partial B_r(0))$, nachdem

$$|H(t)(x)| \geq |x| - t|f(x)| \geq (1-t)r > 0 \quad \text{für} \quad 0 \leq t < 1, \quad x \in \partial B_r(0).$$

Nach der Annahme der Nichtexistenz eines Fixpunktes auf $\partial B_r(0)$ ist auch $H(1)(x) \neq 0 \ \forall x \in \partial B_r(0)$.

$$\Rightarrow \ \deg(\mathrm{Id} - f, B_r(0), 0) = \deg(\mathrm{Id}, B_r(0), 0) = 1.$$

Somit existiert $x \in B_r(0)$ mit $x = f(x)$.

2. Sei nun $K \subset \mathbb{R}^n$ konvex, kompakt. Für ein $\rho > 0$ gilt $K \subset B_\rho(0)$ und gemäß Satz 2.15 können wir f stetig durch g auf $\overline{B_\rho(0)}$ fortsetzen mit

$$g\left(\overline{B_\rho(0)}\right) \subset \operatorname{conv} K = K.$$

Nach 1. finden wir $x \in \overline{B_\rho(0)}$ mit $x = g(x)$. Es gilt $g(x) \in K$, somit folgt $x \in K$ und wir haben $x \in K$ mit $f(x) = x$.

3. Sei K homöomorph zu $K^\star \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, konvex. Sei h die entsprechende Homöomorphie. nach 2. besitzt $h \circ f \circ h^{-1}$ einen Fixpunkt $x^\star \in K^\star$. Damit ist aber $x = h^{-1}(x^\star) \in K$ ein Fixpunkt von f.

□

Bemerkung: 1. Die Bedingungen sind tatsächlich notwendig. Gegenbeispiele siehe Übung.

2. Es existiert auch eine stetige Abbildung $f \in C(\overline{B_1(0)}, \overline{B_1(0)})$, $B_1 \subset X$ separabler ∞-dimensionaler Hilbertraum ohne Fixpunkt.

   → Beispiel von Kakutani später.

   → *Schauder'scher Fixpunktsatz.*

3. Im eindimensionalen Fall ist 2.16 nichts anderes als der Zwischenwertsatz angewendet auf $x - f(x)$.

4. Vergleich mit dem *Banach'schen Fixpunktsatz*: Wesentlich geringere Anforderungen an den Operator (nur Stetigkeit), dafür hohe Anforderungen an den Raum (endlichdim., kompakt, konvex). Wir bekommen keine Eindeutigkeitsaussage.

Ein Anwendungsbeispiel

Existenz positiver (bzw. nichtnegativer) Eigenwerte und Eigenfunktionen. Sei $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ eine Matrix und sei $a_{ij} \geq 0 \ \forall (i,j)$. Dann existiert $\lambda \geq 0$, $x = (x_i)_{i=1}^n$, $x_i \geq 0 \ \forall i$ mit

$$Ax = \lambda x \tag{3.1}$$

Beweis: Sei

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, x_j \geq 0, \ \sum_i x_i = 1\}$$

kompakt und konvex.

1) Falls $Ax = 0$ für ein $x \in K$, gilt (3.1) mit $\lambda = 0$.

2) Sei $Ax \neq 0$ $\forall x \in K$. Dann existiert $\alpha > 0$ mit

$$\sum_i (Ax)_i \geq \alpha \quad \forall x \in K.$$

Es sei also

$$f : x \mapsto \frac{Ax}{\sum_i (Ax)_i}; \quad (f(x))_i \geq 0 \quad \forall i$$

und es gilt

$$\sum_i (f(x))_i = 1 \quad \forall x \in K.$$

Dann ist $f(K) \subset K$ und nach Satz 2.16 existiert ein Fixpunkt $x \in K$ mit $x = f(x)$, d.h.

$$Ax = \lambda x \quad \text{mit} \quad \lambda = \sum_i (Ax)_i > 0$$

□

2.4 Weitere Eigenschaften des Abbildungsgrades

Sei $m < n$, wir identifizieren im Folgenden den $\mathbb{R}^m$ mit dem Unterraum

$$\{x \in \mathbb{R}^n \,|\, x_{m+1} = \ldots = x_n = 0\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Theorem 2.17 (Reduktionseigenschaften des Abbildungsgrades) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $\Omega \cap \mathbb{R}^m \neq \varnothing$ und sei*

$$f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^m \text{ stetig}, \quad g = \mathrm{Id} - f$$

Sei $y \in \mathbb{R}^m$, $y \notin g(\partial\Omega)$. Dann gilt

$$\deg(g, \Omega, y) = \deg(g|_{\overline{\Omega \cap \mathbb{R}^m}}, \Omega|_{\mathbb{R}^m}, y).$$

Beweis: Sei $\Omega_m = \Omega \cap \mathbb{R}^m \neq \varnothing$ offen, beschränkt im $\mathbb{R}^m$, und $g_m := g|_{\overline{\Omega_m}}$. Es gilt

$$\partial\Omega_m = \partial\Omega \cap \mathbb{R}^m.$$

und

$$g_m(\overline{\Omega_m}) \subset \mathbb{R}^m, \; y \notin g_m(\partial\Omega_m).$$

$\Rightarrow \deg(g_m, \Omega_m, y)$ ist definiert (als Abbildungsgrad im $\mathbb{R}^m$).

1) Sei $g \in C^1(\overline{\Omega})$ und $y \in \mathrm{RV}(g)$ und $x \in \Omega$, $g(x) = y$.

$$\Rightarrow \; x = y + f(x) \in \mathbb{R}^m \; \Rightarrow \; x \in \Omega_m.$$

Somit haben wir

$$g^{-1}(y) = g_m^{-1}(y).$$

Nach der Determinantenformel genügt es nun zu zeigen, dass

$$J_{g_m}(x) = J_g(x) \quad \text{für} \quad x \in \Omega_m.$$

Es sei Id_k die $k \times k$-Einheitsmatrix. Es gilt

$$J_{g_m}(x) = \det(\mathrm{Id}_m - f'(x)) \quad (f|'_{\Omega_m})$$
$$J_g(x) = \det \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_m - (\partial_j f_i(x)) & -\partial_j f_i \\ 0 & \mathrm{Id}_{n-m} \end{pmatrix} \quad \text{wegen } f(\overline{\Omega}) \subset \mathbb{R}^m.$$

Die gewünschte Aussage folgt sofort durch Entwicklung der Determinante nach den letzten $n-m$ Zeilen.

2) Der allgemeine Fall folgt durch Wahl von $\tilde{g} = \mathrm{Id} - \tilde{f}$ hinreichend nah an g, so dass $\tilde{g}$ die in 1. geforderten Eigenschaften besitzt.

□

Es sei nun wieder $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt, $f \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$. Nach Satz 2.3 gilt, dass $\deg(f, \Omega, \cdot)$ konstant ist auf Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$. Wir bezeichnen diese Zusammenhangskomponenten mit $\{G_j\}_{j \in I}$ und schreiben $\deg(f, \Omega, y) = \deg(f, \Omega, G_j)$ für $y \in G_j$

Theorem 2.18 (Produktregel) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt. Seien G_j die Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$ für $f \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ und sei*

$$g \circ f \in D_y(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n), \quad y \in \mathbb{R}^n$$

Dann gilt

$$\deg(g \circ f, \Omega, y) = \sum_j \deg(f, \Omega, G_j) \cdot \deg(g, G_j, y) \tag{4.1}$$

Beweis: (Endlichkeit der Summe) Es gilt $f(\overline{\Omega})$ ist kompakt, somit existiert $r > 0$ mit $f(\overline{\Omega}) \subset B_r(0)$. Nachdem $g^{-1}(y)$ abgeschlossen ist, gilt $g^{-1}(y) \cap B_r(0)$ kompakt ist. $\{G_j\}_{j \in I}$ ist eine offene Überdeckung dieser Menge, es genügen somit endlich viele $\{G_j\}_{j=1}^N$ um $g^{-1}(y) \cap B_r(0)$ zu überdecken.

1) Wir nehmen an, dass $g \circ f \in C^1(\overline{\Omega})$, $y \in \mathrm{RV}(g \circ f)$. Es gilt nach der Kettenregel, dass

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \circ f'(x)$$

Die Behauptung folgt dann durch eine längere Rechnung.

$$\begin{aligned}\deg(g \circ f, \Omega, y) &= \sum_{x \in (g \circ f)^{-1}(y)} \operatorname{sign} J_{g \circ f}(x) = \sum_{x \in (g \circ f)^{-1}(y)} (\operatorname{sign} J_g(f(x))) \cdot (\operatorname{sign} J_f(x)) \\ &= \sum_{z \in g^{-1}(y)} \operatorname{sign} J_g(z) \cdot \sum_{x \in f^{-1}(z)} \operatorname{sign} J_f(x) = \sum_{z \in g^{-1}(y)} \operatorname{sign} J_g(z) \cdot \deg(f, \Omega, z)\end{aligned}$$

Mit der Überdeckung $\{G_j\}_{j \in I}$ von $g^{-1}(y)$ gilt

$$\begin{aligned}\deg(g \circ f, \Omega, y) &= \sum_{j=1}^m \sum_{z \in g^{-1}(y) \cap G_j} \operatorname{sign} J_g(z) \cdot \deg(f, \Omega, z) = \sum_{j=1}^N \deg(f, \Omega, G_j) \cdot \sum_{z \in g^{-1}(y) \cap G_j} \operatorname{sign} J_g(z) \\ &= \sum_{j=1}^N \deg(f, \Omega, G_j) \cdot \deg(g, G_j, y)\end{aligned}$$

Diese Formel gilt nun natürlich auch für $y \in \mathrm{CV}(g \circ f)$ und für g nur stetig. Etwas problematischer ist der Fall, dass f nur stetig ist, da sich bei der Modifikation von f die Mengen G_j ändern.

Es sei

$$L_l = \{z \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega) \mid \deg(f, \Omega, z) = l\}$$

Für $l \neq 0$ gilt, dass L_l aus einer Vereinigung von Mengen G_j bestehen muss. Sei nun $\tilde{f} \in C^1(\overline{\Omega})$, so dass $|f(x) - \tilde{f}(x)| < \frac{1}{2}\text{dist}(g^{-1}(y), f(\partial\Omega))$ für $x \in \overline{\Omega}$. Wir definieren $\tilde{G}_j$ und $\tilde{L}_l$ entsprechend für die Funktion $\tilde{f}$. Es gilt

$$L_l \cap g^{-1}(y) = \tilde{L}_l \cap g^{-1}(y).$$

nach Satz 2.2 (iii). ($\|f(x) - \tilde{f}(x)\| < \text{dist}(y, f(\partial\Omega) \quad \forall x \in \partial\Omega) \quad \Rightarrow \quad \deg(f, \Omega, y) = \deg(\tilde{f}, \Omega, y)$.)
Es gilt somit

$$\begin{aligned}\deg(g \circ f, \Omega, y) = \deg(g \circ \tilde{f}, \Omega, y) &= \sum_j \deg(f, \Omega, \tilde{G}_j) \cdot \deg(g, \tilde{G}_j, y) \\ &= \sum_{l \neq 0} l \cdot \deg(g, \tilde{L}_l, y) = \sum_{l \neq 0} l \cdot \deg(g, L_l, y) = \sum_j \deg(f, \Omega, G_j) \cdot \deg(g, G_j, y)\end{aligned}$$

Vorsicht vor der unbeschränkten Komponente K_∞ von $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$! Diese taucht jedoch in der Produktformel ausschließend nicht auf, denn

$$f(\overline{\Omega}) \subset B_r(0), \text{ mit } f(\overline{\Omega}) \text{ kompakt}$$

$$\Rightarrow \deg(f, \Omega, K_\infty \cap B_{2r}(0)) = 0 \quad \text{und} \quad f(\overline{\Omega}) \cap (\mathbb{R}^n \setminus B_{2r}(0)) = \emptyset$$

somit können wir vereinfacht schreiben

$$\deg(f, \Omega, K_\infty) = 0$$

Der in der Produktformel auftauchende Term

$$\deg(f, \Omega, K_\infty) \cdot \deg(g, K_\infty, y)$$

ist also unproblematisch, da er verschwindet.

□

Eine wichtige Anwendung der Produktformel ist das folgende

Theorem 2.19 (Jordanische Kurvensatz) *Es seien C_1 und C_2 zwei kompakte, zueinander homöomorphe Teilmengen des $\mathbb{R}^n$. Dann besitzen $\mathbb{R}^n \setminus C_1$ und $\mathbb{R}^n \setminus C_2$ die selbe Anzahl von Zusammenhangskomponenten.*

2.5 Der Fixpunktsatz von Kakutani und eine Anwendung in der Spieltheorie

Im Folgenden beweisen wir die sogenannten *Nash-Gleichgewichte* in n-Personen. Als Vorbereitung ist es notwendig, den *Brouwer'schen Fixpunktsatz* auf mengenwertige Funktionen zu verallgemeinern.
Für $K \subset \mathbb{R}^n$ konvex, kompakt, bezeichnen wir mit $\text{CS}(K)$ die Menge der konvexen, nichtleeren (Teil-)Mengen von K.

Theorem 2.20 (Kakutani) *Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, konvex $f : K \to \text{CS}(K)$. Falls die Menge*

$$\Gamma := \{(x, y) \in K \times K \,|\, y \in f(x)\}$$

in $K \times K$ abgeschlossen ist, dann existiert $x \in K$ mit $x \in f(x)$.

Beweis: In einer Dimension: $K = [v_1, v_2]$, wir wählen $y_j \in f(v_j)$ und definieren

$$f^1(x) = \sum_{j=1}^{2} \lambda_j(x) y_j,$$

wobei $\lambda_j(x)$ die baryzentrischen Koordinaten von x bezeichne, d.h.

$$\lambda_j(x) \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{2} \lambda_1(x) = 1, \quad x = \sum_{j=1}^{2} \lambda_j(x) v_j$$

Nach Konstruktion ist $f^1 : K \to K$ stetig, besitzt mit Brouwer also einen Fixpunkt. Das hilf noch nicht viel. Wir betrachten die $k-1$-te baryzentrische Unterteilung der Menge K gegeben durch die Vertizes

$$\{v_i\}_{i=1}^{2^{k-1}+1}$$

Wir wählen wieder $y_j \in f(v_j)$ und definieren $f^k(v_j) = g_j$ interpolieren auf den unterteilten Intervallen wie gehabt durch baryzentrische Koordintaten. Es gilt

$$f^k : K \to K$$

ist stetig, also mit Fixpunkt

$$x^k = \sum_{i=1}^{2} \lambda_i^k v_i^k = \sum_{i=1}^{2} \lambda_i^k y_i^k \quad \text{mit} \quad y_i^k = f^k(v_i^k) \tag{5.1}$$

in einem Teilintervall (in einem Simplex der k-fachen baryzentrischen Koordinaten). Es gilt:

$$\left(x^k, \lambda_1^k, \lambda_2^k, y_1^k, y_2^2\right) \in K \times [0,1]^2 \times K^2$$

Somit konvergiert eine Teilfolge in K gegen

$$\left(x^0, \lambda_1^0, \lambda_2^0, y_1^0, y_2^0\right)$$

Nachdem die Teilintervalle zu Punkten degenerieren gilt:

$$v_i^k \to x^0 \quad i = 1, 2$$

Wir haben

$$\left(v_i^k, y_i^k\right) \in \Gamma \to \left(v_i^0, y_i^0\right) \in \Gamma \quad \text{wegen Abgeschlossenheit von } \Gamma$$

Somit gilt $y_i^0 \in f(x^0)$, $i = 1, 2$. Mit (5.1) folgt

$$x_0 = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{2} \lambda_i^k y_i^k = \sum_{i=1}^{2} \lambda_i^0 y_i^0 \in f\left(x^0\right),$$

$f\left(x^0\right)$ ist konvex.
In n Dimensionen nehmen wir zunächst an, dass K ein Simplex (Konvexe Hülle von $n+1$ nichtdegenerierten Vertizes) ist. Wir wenden wiederholt die Baryzentrische Unterteilung an, der Durchmesser der Simplizes schrumpft mit einem Faktor $\frac{n}{n+1}$. Zur k-ten baryzentrischon Unterteilung mit Vertizes $\{v_j\}_{j=1}^{N_k}$. Wählen wir wieder $y_j \in f(v_j)$ mit $f^k(x)$ durch Interpolation mittels baryzentrischen Koordinaten in jdn. Unter-Simplex. Wir erhalten wieder Fixpunkte x^k, und eine Teilfolge von

$$(x^k, \lambda_1^k, \ldots, \lambda_{n+1}^k, y_1^k, \ldots, y_{n+1}^k)$$

konvergiert im „richtigen“ Unter-Simplex. Der Rest des Beweises folgt exakt wie im eindimensionalen Fall. Ist K kein Simplex, so können wir f^k jeweils auf einen Simplex $\tilde{K} \supset K$ stetig fortsetzen und verfahren wie im Beweis des *Brouwer'schen Fixpunktsatzes*.

□

Spieltheorie:

Ein n-Personen Spiel besteht aus n Spielern, wobei der i-te Spieler m_i mögliche Aktionen ausführen kann. Die Menge der möglichen Aktionen des i-ten Spielers bezeichnen wir mit $\Phi_i = \{1, \dots, m_i\}$. Nachdem jeder Spieler eine Aktion ausgeführt hat, wird abgerechnet. Der i-te Spiele bekommt den Payoff

$$R_i(\varphi), \quad \varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in \Phi = \prod_{j=1}^{n} \Phi_j$$

Wir betrachten den Fall, dass das Spiel häufig ausgeführt wird, und jeder Spieler seine Aktion nach einer Wahrscheinlichkeitsverteilung (einer Strategie) auf Φ_i wählt. Diese bezeichenen wir mit

$$S_i = \{s_i^1, \dots, s_i^{m_i}\}, \quad s_i^k \geq 0, \quad \sum_{k=1}^{m_i} s_i^k = 1 \quad \forall i$$

Die Menge aller möglichen Strategien für den i-ten Spieler nennen wir S_i. S_i^k ist die Wahrscheinlichkeit, dass der i-te Spieler die Aktion k wählt. Die Wahrscheinlichkeit, dass jeder Spieler eine bestimmte Aktion s_i^k wählt ist

$$S(\varphi) = \prod_{i=1}^{n} s_i(\varphi), \quad s_i(\varphi) = s_i^{k_i}$$

mit $\varphi = (k_1, \dots, k_n) \in \Phi$. Wir nehmen hier an, dass die Spieler ihre Aktionen unabhängig voneinander wählen. Der mittlere Payoff für Spieler i ist dann der Erwartungswert für $R_i(\varphi)$. Wir nennen diesen $R_i(s)$ und erhalten

$$R_i(s) = \sum_{\varphi \in \Phi} s(\varphi) K_i(\varphi)$$

Nach Konstruktion ist

$$R_i(s)$$

stetig in s. Was ist nun die optimale Strategie für Spiel i? Falls alle anderen Spiele nach einer bekannten Strategie handeln, ist es optimal $\overline{s}_i$ so zu wählen, dass

$$R_i(s \setminus \overline{s_i}) = \max_{\tilde{s}_i \in S_i} R_i(s \setminus \tilde{s}_i) \tag{5.2}$$

$s \setminus \tilde{s}_i$: Strategiekomination, die sich ergibt, wenn man s_i durch $\tilde{s}_i$ ersetzt. Wir bezeichnen mit $B_i(s)$ die Menge aller Strategien $\overline{s}_i \in S_i$, die (5.2) erfüllen. Insbesondere gilt $\overline{s}_i \in B_i(s)$ genau dann wenn $\overline{s}_i^k = 0$ falls

$$R_i(s \setminus (0, \dots, 1, \dots)) < \max_{1<l<m_i} R_i(s \setminus (0, \dots, 1, \dots)) \quad \text{mit der 1 als } l\text{-ter Eintrag}$$

Insbesondere existiert immer eine reine (immer die selbe Aktion wird gewählt) optimale Strategie zu gegebenem S. Weiter sieht man, dass $B_i(s)$ konvex ist und nicht leer. Es seien nun $s, \overline{s} \in S$. Wir nennen $\overline{s}$ die optimale Antwort gegen s, falls $\overline{s}_i \in B_1(s)$ $i = 1, \dots, n$. Es sei $B(s)$ die Menge aller optimalen Antworten gegen s, wir haben

$$B(s) = \prod_{i=1}^{n} B_i(s).$$

Definition 2.21 (Nash-Gleichgewicht) Eine Strategiekombination $\overline{s} \in S$ heißt Nash-Gleichgewicht, falls gilt

$$\overline{s} \in B(\overline{s})$$

d.h. $\overline{s}$ ist eine optimale Antwort gegen sich selbst. Anders gesagt, $\overline{s}$ ist ein Nash-Gleichgewicht, falls kein Spieler durch eigene Änderung seiner Strategie seinen Payoff erhöhen kann.

Beispiele:

Das Gefangenendilemma: Zwei Gefangene können entweder schweigen, oder mit der Polizei kooperieren, das heißt den jeweils anderen belasten.

R_1	k_2	s_2	R_2	k_2	s_2
k_1	0	2	k_1	0	-1
s_1	-1	1	s_1	2	1

Theorem 2.22 *Jedes n-Personen Spiel besitzt ein Nash-Gleichgewicht.*

Beweis: Wir betrachten $s \mapsto B(s)$, S ist kompakt, konvex, $B(s) \subset S$ ist nicht leer, konvex für alle s. Abgeschlossenheit des Graphen folgt mit Folgenkompaktheit.

$$s^n \in S, \quad \overline{s}^m \in B(s^m), \quad s^m \to s, \quad \overline{s}^k \to \overline{s}$$

Wir haben $R_i(s^m \setminus \tilde{s}_i) \leq R_i(s^m \setminus \overline{s}_m)$ für alle $\tilde{s}_i \in S_i$ mit Stetigkeit von R_i folgt sofort

$$R_i(s \setminus \tilde{s}_i) \leq R_i(s \setminus \overline{s}) \quad \forall s_i \in S_i$$

Somit ist $\overline{s} \in B(s)$ und $\Gamma = \{(s, B(s)) \subset S^2\}$ ist abgeschlossen. Der *Fixpunktsatz von Kakutani* garantiert Existenz von

$$\overline{s} \in S \quad \text{mit} \quad \overline{s} \in B(\overline{s}).$$

□

Kapitel 3

Der Leray-Schauder Grad und der Schauder'sche Fixpunktsatz

Das Ziel ist es, den Fixpunktsatz von Brouwer auf ∞-dimensionale Räume zu verallgemeinern. So einfach ist das nicht.

Theorem 3.1 (Kakutani) *Sei H ein ∞-dimensionaler separabler Hilbertraum. Dann existiert eine stetige Abbildung*

$$f : H \to H,$$

welche die Einheitenkugel in sich selbst abbildet und die keinen Fixpunkt besitzt.

Beweis: Sei $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ eine Orhonormalbasis von H. Für $x = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \alpha_j e_j$ definieren wir

$$U(x) := \sum_{j=-\infty}^{\infty} \alpha_j e_{j+1}; \quad f(x) := \frac{1}{2}(1 - \|x\|)e_0 + U(x)$$

Zu zeigen:

- U ist stetig.

- $\|U(x)\| < 1$ für $\|x\| < 1$

- f besitzt keinen Fixpunkt in $\overline{B_1(0)}$

  - bei $x = 0$.
  - auf dem Rand.
  - im Innern.

□

3.1 Der Abbildungsgrad auf endlichen Banachräumen

Definition 3.2 Sei X ein (reeller) Banachraum von Dimension n, und sei Φ ein Isomorphismus von X nach $\mathbb{R}^n$. Für $f \in D_y(\overline{\Omega}, X)$, $\Omega \subset X$ offen, beschränkt, $y \in X$ definieren wir

$$\deg(f, \Omega, y) = \deg(\Phi \circ f \circ \Phi^{-1}, \Phi(\Omega), \Phi(y))$$

Proposition 3.3 *Der in Definition 3.2 definierte Abbildungsgrad ist unabhängig von der Wahl von* Φ.

Beweis: Sei Ψ ein zweiter Isomorphismus. Es gilt $A = \Psi \circ \Phi^{-1} \in \mathrm{Gl}(n)$. Wir schreiben

$$f^\star := \Phi \circ f \circ \Phi^{-1}, \quad y^\star \in \mathrm{RV}(\tilde{f}^\star)$$

und wählen wie üblich $\tilde{f}^\star \in D^1_y(\Phi(\overline{\Omega}), \mathbb{R}^n)$ aus derselben Komponente von $D_y(\Phi(\overline{\Omega}), \mathbb{R}^n)$ wie $f^\star$, so dass $y^\star \in \mathrm{RV}(\tilde{f}^\star)$. Dann ist auch

$$A \circ \tilde{f}^\star \circ A^{-1} \in D^1_y(\Psi(\overline{\Omega}), \mathbb{R}^n)$$

in derselben Komponente von $D_y(\Psi(\overline{\Omega}), \mathbb{R}^n)$ wie $A \circ f^\star \circ A^{-1} = \Psi \circ f \circ \Psi^{-1}$. Nach der Kettenregel gilt

$$J_{A \circ \tilde{f}^\star \circ A^{-1}}(Ay^\star) = \det(A) J_{\tilde{f}^\star}(y^\star) \det(A^{-1}) = J_{\tilde{f}^\star}(y^\star).$$

Und es folgt

$$\deg(\Psi \circ f \circ \Psi^{-1}, \Psi(\Omega), \Psi(y)) = \deg(\Phi \circ f \circ \Phi^{-1}, \Phi(\Omega), \Phi(y)) \qquad \square$$

Die Eigenschaften des Abbildungsgrades im $\mathbb{R}^n$ übertragen sich mit Definition 3.2 auf den Abbildungsgrad in endlichdimensionalen Banachräumen. Das gilt ebenfalls für die Reduktionseigenschaft aus Satz 2.17, nachdem $\Phi : X \to \mathbb{R}^n$ so gewählt werden kann, dass $\Phi(X_1) = \mathbb{R}^n$, wobei X_1 ein m-dimensionaler Untervektorraum von X ist.

3.2 Kompakte Operatoren

Es seien X und Y Banachräume, $\Omega \subset X$ (nicht unbedingt offen).

Definition 3.4 Ein stetiger, beschränkter Operator $F : \Omega \to Y$ heißt

- *endlichdimenisional*, falls ein endlichdimensionaler Untervektorraum $Y_1 \subset Y$ existiert, sodass $F(\Omega) \subset Y_1$.
- *kompakt*, falls F beschränkte Teilmenge von Ω auf relativ kompakte Teilmengen von Y abbildet.

Wir bezeichnen die Menge der endlichdimensionalen Operatoren von Ω nach Y mit

$$\mathscr{F}(\Omega, Y)$$

und die kompakten mit

$$\mathscr{C}(\Omega, Y)$$

Bemerkung: 1) Es gilt

$$\mathscr{F}(\Omega, Y) \subset \mathscr{C}(\Omega, Y) \subset C(\Omega, Y)$$

2) Falls Ω kompakt ist, so gilt

$$\mathscr{C}(\Omega, Y) \subset C(\Omega, Y)$$

3) Falls $\dim(Y) < \infty$, so gilt

$$\mathscr{F}(\Omega, Y) = \mathscr{C}(\Omega, Y)$$

4) Falls $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, so gilt

$$\mathscr{F}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n) = \mathscr{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n) = C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$$

Lemma 3.5 *Sei $K \subset X$ kompakt, $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein endlichdimensionaler Untervektorraum $X_\varepsilon \subset X$ und eine stetige Abbildung*

$$P_\varepsilon : K \to X_\varepsilon,$$

so dass

$$\|P_\varepsilon(x) - x\| \leq \varepsilon \quad \forall x \in K$$

Beweis: Es sei $\{x_j\}_{j=1}^N \subset K$, so dass $\bigcup_{j=1}^N B_\varepsilon(x_j)$ eine Überdeckung von K darstellt. Sei $\{\Phi_j\}_{j=1}^N$ eine Zerlegung der Eins, welche $\{B_\varepsilon(x_j)\}_{j=1}^N$ untergeordnet ist. Wir definieren

$$P_\varepsilon(x) := \sum_{j=1}^N \Phi_j(x) x_j$$

Damit gilt

$$\|P_\varepsilon(x) - x\| = \left\| \sum_{j=1}^N \Phi_j(x) x_j - \sum_{j=1}^N \Phi_j(x) x \right\| \leq \sum_{j=1}^N \Phi_j(x) \|x - x_j\| \leq \varepsilon$$

Es ist nämlich $\|x - x_j\| < \varepsilon$ für alle $x \in B_\varepsilon(x_j)$, aber für $\|x - x_j\| > \varepsilon$ ist $\Phi_j(x) = 0$.

□

Theorem 3.6 *X, Y Banachräume. Sei $\Omega \subset X$ beschränkt. Dann gilt*

$$\overline{\mathscr{F}(\Omega, Y)}^{C(\Omega,Y)} = \mathscr{C}(\Omega, Y)$$

(D.h. der Abschluss von $\mathscr{F}(\Omega, Y)$ bzgl. der Norm der gleichmäßigen Konvergenz ist der Raum der kompakten Operatoren $\mathscr{C}(\Omega, Y)$.)

Beweis: Es sei $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathscr{C}(\Omega, Y)$, sodass $F_n \to F$. Wir nehmen an, dass $F \notin \mathscr{C}(\Omega, Y)$. Dann existiert eine (beschränkte) Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass

$$\|F(x_k) - F(x_l)\| \geq \rho > 0 \quad \text{für} \quad k \neq l$$

Es sei n so groß, dass

$$\|F_n - F\|_{C(\Omega,Y)} < \frac{\rho}{4}$$

Damit gilt

$$\|F_n(x_k) - F_n(x_l)\| \geq \frac{\rho}{2}.$$

Das ist ein Widerspruch zur Annahme, dass $F_n \in \mathscr{C}(\Omega, Y)$. Somit gilt auch

$$\overline{\mathscr{F}(\Omega, Y)}^{C(\Omega,Y)} \subset \mathscr{C}(\Omega, Y)$$

Sei andererseits $F \in \mathscr{C}(\Omega, Y)$,und sei $K = \overline{F(\Omega)}$ kompakt. Sei P_ε gewählt wie in Lemma 3.5. Es gilt

$$F_\varepsilon = P_\varepsilon \circ F \in \mathscr{F}(\Omega, Y) \quad \text{und} \quad F_\varepsilon \to F \quad (\varepsilon \to 0)$$ □

Zur Definition des Abbildungsgrades auf unendlichdimensionalen Räumen betrachten wir insbesondere kompakte Störungen der Identität (d.h. Operatoren der Form $\mathrm{Id} + F$, $F \in \mathscr{C}$). Wir bezeichnen deshalb zunächst einige Interessante Eigenschaften von $\mathrm{Id} + F$.

Lemma 3.7 *Sei X ein Banachraum und $\Omega \subset X$ beschränkt und abgeschlossen, $F \in \mathscr{C}(\Omega, X)$. Dann ist $\mathrm{Id}+F$ eine eigentliche Abbildung (d.h. $(\mathrm{Id}+F)^{-1}(K)$ ist kompakt für $K \subset X$ kompakt), die abgeschlossene Teilmengen von Ω auf abgeschlossene Teilmengen von X abbildet.*

Beweis: Sei $A \subset \Omega$ abgeschlossen, und sei

$$y_n = (\mathrm{Id} + F)(x_n), \quad \text{mit } x_n \in A,$$

so dass $y_n \to y$ in X. Zu zeigen ist, dass $y \in (\mathrm{Id} + F)(A)$. Es gilt

$$y_n - x_n = F(x_n),$$

somit folgt $y_n - x_n \to z$ in X, nach Extraktion einer Teilfolge (da F kompakt, (x_n) beschränkt in Ω). Es folgt $x_n \to x \in A$, da A abgeschlossen und y_n konvergent nach Annahme. Wir haben aber $x = y - z \in A$. Nachdem aber $y = x + F(x) \in (\mathrm{Id} + F)(A)$ folgt die Behauptung mit $F(x) = z$
Sei nun Ω abgeschlossen und $K \subset X$ kompakt. Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $(\mathrm{Id} + F)^{-1}(K)$. Wir können wieder eine Teilfolge

$$K \ni y_n = x_n + F(x_n)$$

wählen, so dass $y_n \to y$. Wie im vorhergehenden Teil folgt, folgt dass $x_n \to x \in K$, somit ist $(\mathrm{Id}+F)^{-1}(K)$ kompakt.

□

3.3 Der Leray-Schauder Grad

Sei $\Omega \subset X$, X ein Banachraum. Wir setzten

$$\mathscr{D}_y(\overline{\Omega}, X) = \{F \in \mathscr{C}(\overline{\Omega}, X) \,|\, y \notin (\mathrm{Id} + F)(\partial\Omega)\}$$

und

$$\mathscr{G}_y(\overline{\Omega}, X) := \{F \in \mathscr{F}(\overline{\Omega}, X) \,|\, y \notin (\mathrm{Id} + F)(\partial\Omega)\}$$

Es gilt für $F \in \mathscr{D}_y(\overline{\Omega}, X)$, dass $\mathrm{dist}(y, (\mathrm{Id} + F)(\partial\Omega)) > 0$, da $\mathrm{Id} + F$ abgeschlossene Mengen auf abgeschlossene Mengen abbildet.

Definition 3.8 (Der Leray-Schauder Grad) Sei $\Omega \subset X$ offen, beschränkt, $y \in X$, $F \in \mathscr{D}_y(\overline{\Omega}, X)$. Sei $\rho := \mathrm{dist}(y, (\mathrm{Id} + F)(\partial\Omega))$ und sei

$$F_1 \in \mathscr{F}(\overline{\Omega}, X),$$

sodass

$$\|F - F_1\| < \rho. \quad (\Rightarrow F_1 \in \mathscr{G}_y(\overline{\Omega}, X))$$

Nun sei $X_1 \subset X$ ein endlichdimensionaler Untervektorraum, so dass

$$F_1(\Omega) \subset X_1,\ y \in X_1$$

und sei $\Omega_1 = \Omega \cap X_1$. Damit ist $F_1 \in \mathscr{G}_y(\overline{\Omega}_1, X_1)$ und wir definieren

$$\deg(\mathrm{Id} + F, \Omega, y) := \deg(\mathrm{Id} + F_1, \Omega_1, y)$$

Proposition 3.9 *Die obige Definition ist unabhängig von der Wahl von F_1 und X_1.*

Beweis: Sei $F_2 \in \mathscr{F}(\overline{\Omega}, X)$, $\|F_2 - F\| < \rho$, X_2 entsprechend endlichdim UVR von X. Es sei $X_0 = X_1 + X_2$, $\Omega_0 = \Omega \cap X_0$. Dann gilt

$$F_i \in \mathscr{G}_y(\overline{\Omega}_0, X_0) \quad i = 1, 2$$

und es folgt wegen der Reduktionseigenschaft des endlichdimensionalen Abbildungsgrades, dass

$$\deg(\mathrm{Id} + F_i, \Omega_0, y) = \deg(\mathrm{Id} + F_i, \Omega_i, y) \quad i = 1, 2$$

Sei $H(t) = \mathrm{Id} + (1-t)F_1 + tF_2$. Es folgt, dass

$$H(t) \in D_y(\overline{\Omega}_0, X_0) \quad t \in [0,1],$$

nachdem gilt $\|H(t) - (\mathrm{Id} + F)\| < \rho \; \forall t \in [0,1]$.

$$\Rightarrow \deg(\mathrm{Id} + F_1, \Omega_0, y) = \deg(\mathrm{Id} + F_2, \Omega_0, y)$$

□

Theorem 3.10 *Sei $\Omega \subset X$ beschränkt und offen und sei $F \in \mathscr{D}_y(\overline{\Omega}, X)$, $y \in X$. Dann gilt*

i) $\deg(\mathrm{Id} + F, \Omega, y) = \deg(\mathrm{Id} + F - y, \Omega, 0)$

ii) $\deg(\mathrm{Id}, \Omega, y) = 1$, *falls* $y \in \Omega$.

iii) Falls Ω_1, Ω_2 offene, disjunkte Teilmengen von X sind, so dass $y \notin (\mathrm{Id} + F)(\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2))$, dann gilt

$$\deg(\mathrm{Id} + F, \Omega, y) = \deg(\mathrm{Id} + F, \Omega_1, y) + \deg(\mathrm{Id} + F, \Omega_2, y).$$

iv) Falls $H : [0,1] \times \overline{\Omega} \to X$ stetig, so dass $\forall t_0$, $\forall \varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt mit

$$\|H(t_0) - H(t)\| \le \varepsilon, \textit{ falls } |t - t_0| < \delta, \quad y[0,1] \to X \textit{ stetig,}$$

und sei $H(t) \in \mathscr{D}_{y(t)}(\overline{\Omega}, X)$ $\forall t \in [0,1]$. Dann gilt

$$\deg(\mathrm{Id} + H(0), \Omega, y(0)) = \deg(\mathrm{Id} + H(1), \Omega, y(1))$$

Beweis: *i)-iii)* folgen sofort aus der Definition und den entsprechenden Eigenschaften des endlichdimensionalen Abbildungsgrades.
iv) O.E. sei $y(t) = 0$ ($\tilde{H}(t)(x) = H(t)(x) - y(t)$).
Behauptung: $H \in \mathscr{C}([0,T] \times \overline{\Omega}, X)$

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$, $\forall t \in [0,1]$ sei H_ε^t eine endlichdimensionale Approximation von $H(t)$, so dass

$$\|H_\varepsilon^t - H(t)\| \le \frac{\varepsilon}{4} \quad \forall t \quad \text{nach Satz 3.6}$$

Nun sei $\{t_j\}_{j=1}^N$, so dass $\bigcup_{j=1}^N B_{j_j}(t_j) \supset [0,1]$ mit δ_j, so dass $\|H(t_j) - H(t)\| \le \frac{\varepsilon}{4}$ für $t \in B_{f_j}(t_j)$. Nun sei F_ε die stückweise affine Interpolation von $H_\varepsilon^{t_j}$. Damit ist F_ε endlichdimensional und $\|F_\varepsilon(t) - H(t)\| < \varepsilon$. Somit ist nach Satz 3.6 $H \in \mathscr{C}([0,1] \times \overline{\Omega}, X)$.

□

Mit dem selben Argument, das in Satz 3.7 benutzt wird gilt, dass

$$A := \bigcup_{t \in [0,1]} (\mathrm{Id} + H(t))(\partial\Omega)$$

abgeschlossen ist als Bild einer abgeschlossenen Menge, somit gilt

$$\mathrm{dist}(A, y) = \rho > 0$$

Jetzt benutzen wir einfach die bereits vorher konstruierte endlichdimensionale Approximation $F_{\frac{\varrho}{2}}$ von H und wenden die Homotopieinvarianz im endlichdimensionalen Fall an.

□

Auch die anderen Aussagen über den endlichdimensionalen Abbildungsgrad übertragen sich. Die Beweise bleiben gleich.

Theorem 3.11 *Seien $F, G \in \mathscr{D}_y(\overline{\Omega}, X)$. Es gilt*

i) $\deg(\mathrm{Id} + F, \varnothing, y) = 0$. *Weiter gilt, falls Ω_i, $1 \le i \le N$ offen, disjunkt, so dass*

$$y \in (\mathrm{Id} + F)(\overline{\Omega} \setminus \bigcup_{i=1}^{N} \Omega_i),$$

folgt dass $\deg(\mathrm{Id} + F, \Omega, y) = \sum_{i=1}^{N} \deg(\mathrm{Id} + F, \Omega_i, y)$

ii) Falls $y \notin (\mathrm{Id} + F)(\Omega)$, dann gilt

$$\deg(\mathrm{Id} + F, \Omega, y) = 0$$

(die Umkehrung gilt nicht notwendigerweise!)

Äquivalent dazu gilt

$$\deg(\mathrm{Id} + F, \Omega, y) \neq 0 \Rightarrow y \in (\mathrm{Id} + F)(\Omega)$$

iii) Falls $\|F(x) - G(x)\| < \mathrm{dist}(y, (\mathrm{Id} + F)(\partial\Omega))\ \forall x \in \partial\Omega$, so gilt

$$\deg(\mathrm{Id} + F, \Omega, y) = \deg(\mathrm{Id} + G, \Omega, y).$$

Insbesondere gilt das auch für den Fall, dass

$$F = G \quad \text{auf } \partial\Omega$$

iv) $\deg(\mathrm{Id} + \cdot, \Omega, y)$ *ist konstant auf Zusammenhangskomponenten von $D_y(\overline{\Omega}, X)$.*

v) $\deg(\mathrm{Id} + F, \Omega, \cdot)$ *ist konstant auf Zusammenhangskomponenten von $X \setminus (\mathrm{Id} + F)(\partial\Omega)$.*

3.4 Das Leray-Schauder-Prinzip und der Schauder'sche Fixpunktsatz

Fixpunktsätze in schneller Folge!

Theorem 3.12 (Leray-Schauder-Prinzip) *Es sei $F \in \mathscr{C}(X, X)$ und es existiere $M > 0$, so dass jede Lösung x von*

$$x = tF(x) \quad t \in [0, 1]$$

die a priori Abschätzung

$$\|x\| \le M$$

erfüllt. Dann besitzt F einen Fixpunkt.

Beweis: Sei $\rho > M$. Es gilt

$$\deg(\mathrm{Id} - F, B_\rho(0), 0) = \deg(\mathrm{Id}, B_\rho(0), 0) = 1$$

Aus der *a priori* Abschätzung folgt

$$H(t) \in \mathscr{D}_0(B_\rho(0), X) \quad \forall t \in [0, 1]$$

Somit existiert eine Lösung von $x - F(x) = 0$.

□

Theorem 3.13 (Schauder'sche Fixpunktsatz) *Sei K ein abgeschlossene, konvexe, beschränkte Teilmenge von X, ein Banachraum. Sei $F \in \mathscr{C}(K, K)$. Dann besitzt F einen Fixpunkt.*

Beweis: K beschränkt, also sei $\rho > 0$ mit $K \subset B_\rho(0)$. Es sei R die stetige Fortsetzung von $\mathrm{Id} : K \to K$ auf X nach Satz 2.15. Es gilt $R : X \to K$, $R(x) = x$ für $x \in K$.
Anmerkung: So eine Abbildung heißt „Retraktion", K ist dann ein Retrakt von X.
Wir betrachten $\tilde{F} = F \circ R \in \mathscr{C}(\overline{B_\rho(0)}, \overline{B_\rho(0)})$. Mit $H(t) - t\tilde{F}$ folgt

$$\deg(\mathrm{Id} - \tilde{F}, B_\rho(0), 0) = \deg(\mathrm{Id}, B_\rho(0), 0) = 1$$

Somit existiert $x_0 = \tilde{F}(x_0) \in K \Rightarrow \tilde{F}(x_0) = F(x_0) = x_0$.

□

Bemerkung: Existenz eines Fixpunktes gilt natürlich auch für $F : G \to G$, wobei G nur homöomorph zu einer konvexen, abgeschlossen, beschränkten Teilmenge eines Banachraumes X ist.

Theorem 3.14 *Sei $\Omega \subset X$ offen und beschränkt, $F \in \mathscr{C}(\overline{\Omega}, X)$. Angenommen, es existiert ein $x_0 \in \Omega$, so dass*

$$F(x) - x_0 \neq \alpha(x - x_0) \quad \forall x \in \partial\Omega,\ \forall \alpha \in (1, \infty)$$

Dann besitzt F einen Fixpunkt.

Beweis: Sei $H(t)(x) = x - x_0 - t(F(x) - x_0)$. Dann gilt aber

$$H(t) \neq 0 \quad \forall x \in \partial\Omega,\ t \in [0, 1)$$

Falls $H(1)(x) = 0$ für ein $x \in \partial\Omega$, dann ist x ein Fixpunkt von F und wir sind fertig. Ansonsten gilt allerdings

$$\deg(\mathrm{Id} - F, \Omega, 0) = \deg(\mathrm{Id} - x_0, \Omega, 0) = \deg(\mathrm{Id}, \Omega, x_0) = 1$$

und es existiert wieder ein Fixpunkt von F.

□

Corollar 3.15 *Sei $\Omega \subset X$ offen und beschränkt, $F \in \mathscr{C}(\overline{\Omega}, X)$. Dann besitzt F einen Fixpunkt falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:*

i) $\Omega = B_\rho(0)$, $F(\partial\Omega) \subset \overline{\Omega}$ (Rohte)

ii) $\Omega = B_\rho(0)$, $\|F(x) - x\|^2 \geq \|F(x)\|^2 - \|x\|^2$ $\forall x \in \partial\Omega$ (Altmann)

iii) X ist ein Hilbertraum, $\Omega = B_\rho(0)$, $(F(x), x) \leq \|x\|^2 \quad \forall x \in \partial\Omega$ (Krasnosel'shii).

Beweis: Übungsaufgabe.

□

Beispiele:

1. nichtlineares 2-Punkt Randwertsproblem: Wir betrachten auf $[0, T]$ das Randwertsproblem

$$\left.\begin{array}{rcl} g(t, u(t), u'(t)) & = & u''(t) \quad 0 \leq t \leq T \\ u(0) = u(1) & = & 0 \end{array}\right\} \tag{4.1}$$

Es sei $C_0^2 = \{u \in C^2 \,|\, u(0) = u(T) = 0\}$
Behauptung: L ist bistetig.

BEWEIS: Injektivität: klar.

Surjektivität: Beispielsweise mittels *Green'scher Funktion*:

$$K(s,t) = 2T \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^2 n^2} \sin\frac{n\pi s}{T} \sin\frac{n\pi t}{T}$$
$$u(s) = L^{-1}(f)(s) = -\int_0^T K(s,t) f(t)\,\mathrm{d}t$$

Stetigkeit: klar.

Stetigkeit: *Satz über die offene Abbildung*.

□

Theorem 3.16 *Sei $g : [0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige beschränkte Funktion. Dann bestizt (4.1) eine Lösung $u \in C_0^2$.*

BEWEIS: Es sei $G : C^1([0,1]) \to C([0,1])$ definiert durch $G(u)(t) = g(t,u(t),u'(t))$ und es sei

$$J : C_0^2 \to C^1([0,T])$$

die Einbettung. Dann ist (4.1) äquivalent zu

$$L(u) = GJ(u) \Leftrightarrow u = GJL^{-1}(u).$$

Es gilt JL^{-1} ist kompakt, das folgt aus *Arzelá-Ascoli*. G ist ein beschränkter Operator, denn g ist stetig und beschränkt, somit ist GJL^{-1} kompakt und es existiert $\rho > 0$ mit $GJL^{-1}(B_\rho(0)) \subset B_\rho(0)$. Damit besitzt GJL^{-1} einen Fixpunket.

□

2. Existenz von Lösungen der stationären Navier-Stokes-Gleichung Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ offen, zusammenhängend und beschränkt, und es sei $K : \Omega \to \mathbb{R}^3$ eine gegeben Funktion. Wir suchen eine Lösung $v : \Omega \to \mathbb{R}^3$ zum Problem

$$\left.\begin{array}{rcll} \eta\Delta v - v\cdot\nabla v - \nabla\rho + K & = & 0 & \text{in } \Omega \\ \operatorname{div} v & = & 0 & \text{in } \Omega \\ v & = & 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{array}\right\} \tag{4.2}$$

mit hinreichend glatten v, ρ.

Eine sehr schöne Herleitung der Gleichung findet man in einem Vortrag auf der Website des Clay Mathematics Institute → Link sehe Vorlesungssite.

Einschub: Sobolev-Räume

Wir betrachten die Menge $C^1(\Omega,\mathbb{R})$ und das darauf definierte Skalarprodukt

$$(u,v)_{H^1} = \int_\Omega u(x)v(x)\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Der normierte Vektorraum $(C^1(\Omega,\mathbb{R}), \sqrt{(\cdot,\cdot)_{H^1}})$ ist nicht vollstöndig. Die Vervollständigung bezeichnen wir mit $H^1(\Omega,\mathbb{R})$. Die Vervollständigung von $C^1(\Omega,\mathbb{R})$ bezüglich der H^1-Norm bezeichnen wir mit $H_0^1(\Omega,\mathbb{R})$. Die Räume H^1, H_0^1 heißen Sobolev-Räume und sind (separable) Hilberträume.
Wir benötigen den folgenden wichtigen Satz aus der linearen Funktionalanalysis:

Theorem 3.17 (Rellich) *Die Einbettung*

$$H_0^1(\Omega,\mathbb{R}) \hookrightarrow L^2(\Omega,\mathbb{R})$$

ist kompakt.

Weiter gilt die Abschätzung

Lemma 3.18 (Poincaré-Friedrichs) *Sei $u \in H_0^1(\Omega,\mathbb{R})$. Es gilt*

$$\int_\Omega u^2 \le (d_j)^2 \int_\Omega (\partial_j u)^2,$$

wobei $d_j = \sup\{|x_j - y_j| \mid (x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots y_n) \in \Omega\}$, bzw. gilt

$$\|u\|_{L^2} \le \frac{\operatorname{diam}\Omega}{\sqrt{n}}\|x\|_{H^1}$$

Beweis: Übungsaufgabe.

□

Wir verfeinern nun das Einbettungresultat von Rellich. Dazu benötugen wir das folgende

Lemma 3.19 (Ladyzhenshaya) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Für $u \in H_0^1(\Omega,\mathbb{R})$ gilt*

$$\|u\|_{L^4} \le \sqrt[4]{8}\|u\|_{L^2}^{1/4}\|\nabla u\|_{L^2}^{3/4}$$

Beweis: Wir betrachten zuerst den Fall, dass

$$u^2(x_1,x_2,x_3) = \int_{-\infty}^{x_1} \partial_1 u^2(\xi,x_1,x_3)\,\mathrm{d}\xi \le 2\int_{-\infty}^{\infty} |u(\xi,x_2,x_3)\partial_1 u(\xi,x_2,x_3)|\,\mathrm{d}\xi.$$

Es folgt

$$\max_{x_1\in\Omega} u^2(x_1,x_2,x_3) \le 2\int_{-\infty}^{\infty} |u\cdot\partial_1 u|\,\mathrm{d}x_1$$

Nun lassen wir x_3 fest und integrieren über x_1 und x_2:

$$\begin{aligned}\iint u^4(x_1,x_2,x_3) &\le \int \max_{x_1} u^2(x_1,x_2,x_3)\,\mathrm{d}x_2 \cdot \int \max_{x_2} u^2(x_1,x_2,x_3)\,\mathrm{d}x_1\\ &\le 4\iint |u\partial_1 u|\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \cdot \iint |u\partial_2 u|\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\\ &\le 4\left(\iint u^2\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\right)^{2/2}\cdot\left(\iint(\partial_1 u)^2\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\right)^{1/2}\cdot\left(\iint(\partial_2 u)^2\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\right)^{1/2} \quad \text{(nach Cauchy-Schwarz)}\end{aligned}$$

Jetzt integrieren wir über x_3 und bekommen

$$\begin{aligned}\iiint u^4\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3 &\le 4\int \mathrm{d}x_3\left(\iint u^2\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\right)\left(\iint(\partial_1 u)^2+(\partial_2 u)^2\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\right)\\ &\le 4\left(\iint \max_{x_3} u^2(x_1,x_2,x_3)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\right)\left(\iiint(\partial_1 u)^2+(\partial_2 u)^2\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3\right)\\ &\le 8\iiint |u\partial_3 u|\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3\cdot\left(\iiint(\partial_1 u)^2+(\partial_2 u)^2\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3\right)\\ &\le 8\cdot\left(\iiint u^2\right)^{1/2}\cdot\left(\iiint(\partial_3 u)^2\right)^{1/2}\cdot\left(\iiint(\partial_1 u)^2+(\partial_2 u)^2\right)^{2/2}\\ &\le 8\|u\|_{L^2}\cdot\|\nabla u\|_{L^2}^3\end{aligned}$$

Sei nun $u \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R})$. Wir wählen $(u_j)_{j=1}^{\infty}$ eine Folge in $C_0^1(\Omega, \mathbb{R})$, so dass

$$u_j \to u \begin{cases} \text{in } H_0^1 \\ \text{in } L^2 \end{cases} .$$

Dies ist wegen der Ladyzhenskaya-Ungleichung eine Cauchy-Folge in L^4 und konvergiert somit gegen $v \in L^4$. Mit Hölder gilt $u = v$ und wir können den Limes in der Ungleichung bilden.

□

Mit *Poincaré-Friedrichs* und *Ladyzhenshaya* folgt sofort, dass

$$\|u\|_{L^4} \leq \left(\frac{8 \operatorname{diam} \Omega}{\sqrt{n}}\right)^{1/4} \cdot \|u\|_{H^1}$$

für alle $u \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R})$ und damit auch

Corollar 3.20 *Die Einbettung*

$$H_0^1(\Omega, \mathbb{R}) \hookrightarrow L^4(\Omega, \mathbb{R})$$

ist kompakt.

Zurück zu Navier-Stokes: Es sei

$$X = \{v \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^3) \mid \operatorname{div} v = 0, v\big|_{\partial\Omega} = 0\}$$

und es sei

$$\mathscr{H} := \overline{X}^{H^1(\Omega)} = \{v \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3) \mid \operatorname{div} v = 0\}$$

Wir betrachten $\mathscr{H}$ als Hilbertraum mit dem Skalarprodukt

$$(u, v)_{\mathscr{H}} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x = \int_\Omega \sum_{k,j=1}^{3} \partial_j u_k \partial_k v_j$$

Dieses ist mittels *Poincaré* äquivalent zum üblichen Skalarprodukt auf H^1:
Wir multiplizieren nun die Navier-Stokes-Gleichung (4.2) mit $w \in X$ und erhalten

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Omega (\eta \Delta v - v \nabla v + K) w = \int_\Omega \nabla \rho \cdot w \\ \Leftrightarrow \ 0 &= \int_\Omega (\eta \underbrace{\nabla v \cdot \nabla w}_{=\sum_{k,j=1}^3 \partial_j v_k \partial_k w_j} - \underbrace{v \cdot v \cdot \nabla w}_{=\sum_{k,j=1}^3 v_k v_j (\partial_k w_j)} - K \cdot w) \end{aligned}$$

mit

$$a(u, v, w) := \int_\Omega u \cdot (v \cdot \nabla w)$$

folgt u Lösung von Navier-Stokes

$$\Rightarrow \eta \cdot (v, w)_{\mathscr{H}} - a(v, v, w) - \int_\Omega K w = 0 \quad \forall x \in \mathscr{H} \tag{4.3}$$

Lösungen von (4.3) heißen schwache Lösungen der Navier-Stokes-Gleichung.

Bemerkung: Es gilt

$$a(v, v, v) = \int_\Omega v(v \cdot \nabla v) = \frac{1}{2} \int_\Omega \sum_{k,j} v_k \partial_k (v_j, v_j) = -\frac{1}{2} \int_\Omega \sum (v_j, v_j) \partial_k v_k = 0 \quad \text{für } v \in \mathscr{H}$$

Für $K \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ ist $\int_\Omega K\cdot$ ein stetiges Funktional auf $\mathscr{H}$, somit existiert nach *Riesz* ein $\tilde{K} \in \mathscr{H}$, so dass

$$\int K \cdot w = (\tilde{K}, w) \quad \forall w \in \mathscr{H}$$

Dies gilt auch für $a(u, v, \cdot)$ mit $u, v \in \mathscr{H}$, somit existiert $B(u, v) \in \mathscr{H}$ mit

$$a(u, v, w) = (B(u, v), w)_{\mathscr{H}}.$$

Es folgt, dass

$$\begin{aligned}(4.3) \;&\Leftrightarrow\; (\eta v - B(v, v) - \tilde{K}, w)_{\mathscr{H}} = 0 \quad \forall w \in \mathscr{H}\\ &\Leftrightarrow\; \eta v - B(u, v) = \tilde{K}.\end{aligned}$$

Es sei nun $Y = L^4(\Omega, \mathbb{R}^3)$. Dank *Ladyzhenshaya-Ungleichung* ist die Einbettung

$$\mathscr{H} \hookrightarrow Y$$

kompakt und es gilt mit zweimaliger Anwendung der *Cauchy-Schwarz-Ungleichung*:

$$|a(u, v, w)| \leq \|u\|_{L^4}\|v\|_{L^4}\|w\|_{H^1}$$

Theorem 3.21 (Existenz schwacher Lösungen) *Sei $\mathscr{H}$ ein Hilbertraum, Y ein Banachraum und es sei die Einbettung $\mathscr{H} \hookrightarrow Y$ kompakt. Insbesondere sei*

$$\|u\|_Y \leq \beta\|u\|_{\mathscr{H}} \quad \forall u \in \mathscr{H}$$

Es sei $a : \mathscr{H}^3 \to \mathbb{R}$ eine Multilinearform, so dass

$$|a(u, v, w)| \leq \|u\|_Y\|v\|_Y\|w\|_{\mathscr{H}} \tag{4.4}$$

und $a(v, v, v) = 0$ für alle $v \in \mathscr{H}$. Es sei $\tilde{K} \in \mathscr{H}$, $\eta > 0$. Dann existiert $v \in \mathscr{H}$ mit

$$\eta(v, w) - a(v, v, w) = (\tilde{K}, w)_{\mathscr{H}} \forall w \in \mathscr{H}$$

Beweis: o.E. sei $\eta = 1$. Wir suchen eine Lösung zu $v - B(v, v) + \tilde{K} = 0$. Es gilt

$$\|B(v, v)\|_{\mathscr{H}} \leq \alpha\|u\|_Y\|v\|_Y \leq \alpha\beta^2\|u\|_{\mathscr{H}}\|v\|_{\mathscr{H}}$$

Es sei $F(v) = B(v, v)$. F ist lokal Lipschitz, denn für $\|u\|_Y < \rho$, $\|v\|_Y < \rho$ gilt

$$\begin{aligned}\|F(u) - F(v)\|_{\mathscr{H}} = \|B(u - v, u) - B(v, u - v)\|_{\mathscr{H}} &\leq 2\alpha\rho^2\|u - v\|_Y\\ &\leq 2\alpha\beta\rho^2\|u - v\|_{\mathscr{H}}.\end{aligned}$$

Sei $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt in $\mathscr{H}$. Nach Wahl einer Teilfolge ist v_n eine Cauchyfolge in Y. $\Rightarrow F(v_n)$ ist eine Cauchyfolge in $\mathscr{H}$, da gilt

$$\|F(u) - F(v)\|_{\mathscr{H}} \leq 2\alpha\rho\|u - v\|_Y$$

Damit ist $F \in \mathscr{C}(\mathscr{H}, \mathscr{H})$.
Nehmen wir nun an, dass v eine Lösung ist von

$$v = tF(v) - t\tilde{K} \quad \text{für } t \in [0, 1]$$

Damit gilt

$$(v, v)_{\mathscr{H}} = t\underbrace{a(v, v, v)}_{=0} + t(\tilde{K}, v)_{\mathscr{H}} \;\Rightarrow\; \|v\|_{\mathscr{H}} \leq \|\tilde{K}\|_{\mathscr{H}}.$$

Die beiden Voraussetzungen des *Leray-Schauder-Prinzips* sind damit erfüllt, somit existiert ein Fixpunkt v, der $v = F(v) - \tilde{K}$ erfüllt.

□

Kapitel 4

Monotone Operatoren

Man möchte folgendes Prinzip auf Banachräume verallgemeinern: $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ genüge

(a) monoton

(b) stetig

(c) F ist koerziv, d.h. $\lim_{v \to \pm\infty} F(v) = \pm\infty$

Dann

$$\forall b \in \mathbb{R}\, \exists! v \in \mathbb{R} : \ F(v) = b$$

Definition 4.1 Sei X ein reflexiver Banachraum und

$$A : X \to X^\star$$

ein Operator. A heißt

(i) monoton, falls für alle $u, v \in X$ gilt

$$\langle Au - Av, u - v \rangle \geq 0$$

(ii) strikt monoton, falls für alle $u, v \in X$ $u \neq v$ gilt

$$\langle Au - Av, u - v \rangle > 0$$

(iii) stark monoton, falls es ein $c > 0$ gibt, sodass für alle $u, v \in X$ gilt

$$\langle Au - Av, u - v \rangle \geq c \|u - v\|^2$$

(iv) koerziv, falls

$$\lim_{\|u\| \to \infty} \frac{\langle Au, u \rangle}{\|u\|} = \infty$$

Bemerkung: A stark monoton $\Rightarrow$ A koerziv.

Beweis:

$$\frac{\langle Av, v \rangle}{\|v\|} = \frac{\langle Au - A(0), v \rangle + \langle A(0), v \rangle}{\|v\|} \geq \frac{c\|v\|^2 - \|A(0)\|\|v\|}{\|v\|} = c\|v\| - \|A(0)\| \to \infty \quad (\|v\| \to \infty) \qquad \square$$

Beispiele:

1. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Das Dualitätsproblem in $\mathbb{R}$ ist die Multiplikation. Im Spezialfall $X = \mathbb{R} = X^\star$ stimmen die Monotoniebegriffe reeller Funktionen und für Operatoren überein, da

$$\langle f(u) - f(v), u - v\rangle = (f(v) - f(u)) \cdot (u - v) \geq 0$$

f ist außerdem genau dann koerziv, d.h.

$$\lim_{v \to \pm\infty} \frac{f(u) \cdot u}{|u|} = \pm\infty \Leftrightarrow f(v) \to \pm\infty \quad (v \to \pm\infty)$$

2. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$g(u) := \begin{cases} |u|^{p-2}u, & u \neq 0 \\ 0, & u = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$

(i) $p > 1 \Rightarrow g$ strikt monoton.

(ii) $p \geq 2 \Rightarrow \langle g(u) - g(v), u - v\rangle \geq c|u - v|^p$

(iii) $p = 2 \Rightarrow g$ stark monoton

Beweis: Übungsaufgabe.

□

Definition 4.2 Sei X reflexiver Banachraum und $A : X \to X^\star$ ein Operator. A heißt

(i) *demistetig* $\Leftrightarrow (u_n \to u \Rightarrow Au_n \rightharpoonup Au)$

(ii) *hemistetig* $\Leftrightarrow \forall u, v, w \in X : t \mapsto \langle A(u + tv), w\rangle$ ist stetig.

(iii) *stark stetig* $\Leftrightarrow (u_n \rightharpoonup u \Rightarrow Au_n \to Au)$

(iv) *beschränkt* $\Leftrightarrow A(V)$ beschränkt, falls V beschränkt ist.

Bemerkung: stark stetig $\Rightarrow$ stetig $\Rightarrow$ demistetig $\overset{(\star)}{\Rightarrow}$ hemistetig

Beweis: Zu $(\star)$. Seien $u, v, w \in X$, $t \to t_0$

$$\Rightarrow u + tv \to u + t_0 v$$

$$\overset{\text{demistetig}}{\Rightarrow} A(u + tv) \rightharpoonup A(u + t_0 v)$$

$$\Leftrightarrow \langle A(u + tv), w\rangle \to \langle A(u + t_0 v), w\rangle$$

□

Lemma 4.3 *X reflexiver Banachraum, $A : X \to X^\star$. Dann gelten*

(i) A stark stetig $\Rightarrow$ A kompakt.

(ii) A demistetig $\Rightarrow$ A lokal beschränkt.

(iii) A monoton $\Rightarrow$ A lokal beschränkt.

(iv) A monoton und hemistetig $\Rightarrow$ A demistetig.

Beweis: (i) Sei $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ beschränkt, da X reflexiv folgt:

$$\exists u_{m_k} \rightharpoonup u \in X \overset{\text{stark stetig}}{\Rightarrow} A(u_{m_k}) \to A(u)$$

$\Rightarrow A$ kompakt.

(ii) Wäre A nicht lokal beschränkt, so existiert $v \in X$, $v_m \to v$, sodass

$$\|Av_m\| \to \infty \lightning \quad Av_m \rightharpoonup Av$$

(iii) Angenommen $u_m \to u: \ \|Au_m\| \to \infty$

$$a_n := (1 + \|Au_n\|\|u_n - u\|)^{-1} \quad ((a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ beschränkt duch } 1)$$

A monoton

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow\ 0 \le \langle Au_n - Av, u_n - v\rangle = \langle Au_n - Av, (u_n - u) + (u - v)\rangle \\
\Rightarrow\ a_n\langle Au_n, v-u\rangle &\le a_n(\langle Au_n, u_n - v\rangle - \langle Av, u_n - v\rangle) \\
&\le 1 + c(u,v) \quad \forall v \in X
\end{aligned}$$

Einsetze $v \rightsquigarrow 2u - v$

$$\begin{aligned}
-a_n\langle Au_n, v-u\rangle &\le 1 + \tilde{c}(u,v) \quad \forall v \in X \\
\Rightarrow\ |\langle a_nAu_n, v-u\rangle| &\le 1 + c(u,v)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow\ (a_nAu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist punktweise beschränkt. Mit *Banach-Steinhaus*

$$\sup_n \|a_nAu_n\|_{X^\star} \le c(u)$$

$$\Rightarrow\ \|Au_n\| \le \frac{c(u)}{a_n} = c(u)(1 + \|Au_n\|\|u_n - v\|)$$

Für

$$\|u_n - u\|c(u) = \lambda < 1: \ \|Au_n\| \le \frac{c(u)}{1-\lambda} < \infty$$

Ein Widerspruch zu $\|Au_n\| \to \infty$.

(iv) Gelte $u_n \to u$. A monoton $\Rightarrow (Au_n)$ beschränkt. $X^\star$ reflexiv

$$\Rightarrow\ Au_{n_k} \rightharpoonup b \in X^\star$$

$$\Rightarrow\ Au = b \quad \text{(siehe nachfolgendes Lemma)}$$

Dies gilt für jede Teilfolge von $u_n, \Rightarrow Au_n \rightharpoonup b$.

□

Lemma 4.4 (Minty) *Sei X ein refelexiver Banachraum und $A: X \to X^\star$, hemistetig und monoton. Dann gelten*

(i) A maximal monoton, d.h.

$$u \in X,\ b \in X^\star,\ \textit{und}\ \langle b - Av, u - v\rangle \ge 0 \quad \forall v \in X\ \Rightarrow\ b = Au$$

(ii) A genügt der Bedingung (M), d.h.

$$\left.\begin{array}{l} v_n \rightharpoonup v \\ Av_n \rightharpoonup b \\ \langle Av_n, v_n\rangle \to \langle b, v\rangle \end{array}\right\} \Rightarrow Av = b \tag{0.1}$$

(iii)

$$u_n \rightharpoonup u,\ Au_n \to b \ \Rightarrow\ Au = b$$

$$u_n \to u \wedge Au_n \rightharpoonup b \ \Rightarrow\ Au = b$$

Beweis: (i) Sei $w \in X$ und $v = v - tw$, $t > 0$.

$$\Rightarrow\ \langle b - A(u - tw), w\rangle \geq 0$$

$$\Rightarrow\ \langle b - Au, w\rangle \geq 0 \quad w \in X$$

$$\Rightarrow\ \langle b - Av, w\rangle = 0 \forall w$$

$$b = Aw$$

□

(ii) A ist monoton.

$$\begin{aligned} \Rightarrow\ 0 \leq \langle Au_n - Av, u_n - v\rangle &= \langle Au_n, u_n\rangle - \langle Av, u_n\rangle - \langle Au_n, Av, v\rangle \\ &\to \langle b, v\rangle - \langle Av, u\rangle - \langle b - Av, v\rangle \end{aligned}$$

Theorem 4.5 (Brouder, Minty) *Sei X ein separabeler, reflexiver Banachraum mit Basis $(w_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Sei $A : X \to X^\star$ monoton, koerziv und hemistetig. Dann existiert für alle $b \in X^\star$ eine Lösung $u \in X$ von*

$$Au = b$$

$\{A = b\}$ ist abgeschlossen, beschränkt, und konvex. Falls A strikt monoton ist, ist die Lösung eindeutig.

Beweisidee: Der Beweis erfolgt per *Galerkin-Approximation*.

1. X separabel, d.h.
$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X^n, \quad X_n = \operatorname{span}(w_1, \ldots, w_n)$$
   Approximiere „die Gleichung“ $Au = b$ durch „endlichdimensionale“ Probleme der Form
$$(Au, z^n) = (b, z^n) \forall z^n \in X_n$$

2. *A-priori*-Abschätzung für Lösungen: Wir zeigen, dass die Folge $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Lösungen dieser Probleme beschränkt ist (mit Hilfe der Koerzivität).

3. Schwache Konvergenz X reflexiv $\Rightarrow$ $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat eine schwach konvergente Teilfolge
$$u_{n_k} \rightharpoonup u \in X$$

4. Lemma von Minty $\Rightarrow$ Au=b.

□

BEWEIS: (i) Der Beweis erfolgt per *Galerkin-Approximation*

$$X_n = \operatorname{span}(w_1, \dots, w_n)$$

Betrachte

$$(Au^n - b, w_k) = 0 \quad \forall k = 1, \dots, n \tag{0.2}$$

Definiere

$$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n; \quad g_k(c^n) := (A(\sum_m c_m^n w_m) - b, w_k)$$

$$0.2 \Rightarrow g(c^n) = 0 \quad \text{für ein } c^n \in \mathbb{R}^n$$

O.B.d.A sei $|c^n| := \| \sum_{k=1}^n c_k^n w_k \|_X$ als Norm auf $\mathbb{R}^n$. Aus Lemma 4.3 folgt, dass A demistetig. Außerdem gilt

$$\sum_{k=1}^n g_k(c^n) c_k^n = (Au^n, u^n) - (b, u^n), \quad \text{wobei } u^n = \sum_k g_k(c^n) w_k^n$$

A ist koerziv

$$\Rightarrow R_0 > 0 \quad \forall \|u\| \geq R_0 > 0 : \quad (Au, u) \geq (1 + \|b\|) \|v\| = 0$$

$$\Rightarrow g(c^n) \cdot c^n = \sum_{k=1}^n g_k(c^n) \cdot c_k^n \geq (1 + \|b\|) \|u^n\| - \|b\| \|u^n\| = \|u^n\| > 0 \quad \forall c^n \text{ mit } \|u^n\| \geq R_0$$

Mit *Brouwer* folgt (beachte: $| \cdot |_{\mathbb{R}^n} = \| \|_X$)

$$\exists u^n \in X_n : g(c^n) = 0,$$

d.h. 0.2 gilt für u^n.

$$\Rightarrow \|u^n\| \geq R_0$$

(ii) A monoton $\Rightarrow A$ lokal becshränkt

$$\Rightarrow \exists r, \delta > 0 : \|u\| \leq r \Rightarrow \|Au\| \leq \delta$$

und

$$\langle Au^n - A^v, u^n - v \rangle \geq 0 \quad \forall v \in X$$

Wegen $u^n \in X_n$ und 0.2 gilt

$$\langle Au^n, u^n \rangle = \langle b, u^n \rangle \Rightarrow |\langle Au^n, u^n \rangle| = \|b\| R_0$$

$$\|Au^n\| = \sup_{v \in X, \|v\| = r} \frac{1}{r} \langle Au^n, v \rangle \overset{\text{Monotonie}}{\leq} \sup_{v \in X, \|v\| = 5} \frac{1}{r} (\langle Av, v \rangle + \langle Au^n, u^n \rangle - \langle Av, u^n \rangle) \leq \frac{1}{r} (\delta r + \|b\| R_0 + \delta R_0)$$

$\Rightarrow (Au^n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist beschränkt.

(iii) Konvergenz des Galerkin-Verfahrens; $\|u^n\| \leq R_0$ und X reflexiv.

$$\Rightarrow \exists \text{ Teilfolge } u^n \rightharpoonup u \in X$$

Sei

$$w \in \bigcup_{m=1}^{\infty} X_m \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : w \in X_n \quad n \geq n_0$$

$$\Rightarrow\ \forall n \geq n_0 :\ \langle Au^n, w\rangle = (b, w)$$

$$\Rightarrow\ \lim_{n\to\infty} \langle Au^n, w\rangle = \langle b, w\rangle \quad w \in \bigcup_{m=1}^{\infty} X_m$$

$X^\star$ reflexiv und (Au^n) beschränkt

$$\exists Au^{n_m} \rightharpoonup c \in X^\star$$
$$\Rightarrow\ \forall w \in X :\ \langle Au^{n_k}, w\rangle \to (c, w)$$
$$\Rightarrow\ b = c, \quad \text{weil } \overline{\bigcup_{m=1}^{\infty} X_m} = X \quad (X \text{ separabel})$$
$$\Rightarrow Au^{n_m} \rightharpoonup b$$

Wiederhole dieses Argument für jede Teilfolge von Au^n.

$$\Rightarrow\ Au^n \rightharpoonup b$$
$$\Rightarrow\ \langle Au^n, u^n\rangle = \langle b, u^n\rangle \to \langle b, u\rangle$$
$$\lim_{n\to\infty} \langle Au^n, u^n\rangle = \langle b, u\rangle$$

Mit Lemma 4.4 (ii) erhalten wir

$$Au = b$$

(iv) Eigenschaften der Lösungsmenge $S = \{A = b\}$:

(a) Beschränktheit:

$$\exists\, R_0 > 0\, \forall \|V\| \geq R_0 > 0 :\ \langle Au, u\rangle \geq (1 + \|b\|)\|u\|$$

Sei u eine Lösung mit $\|u\| \geq R$

$$\Rightarrow\ 0 = \langle Au, u\rangle - \langle b, u\rangle \geq \|u\| > 0 \lightning$$
$$\Rightarrow\ S \subset B_{R_0}(0)$$

(b) Konvexität: Seien $u_1, u_2 \in S$, $w = tu_1 + (1-t)u_2$, $v \in X$.

$$\begin{aligned}
\langle b - Av, w - v\rangle &= \langle b - Av, t(u_1 - v)\rangle + \langle b - Av, (1-t)(u_2 - v)\rangle \\
&= t\langle Au_1 - Av, u_1 - v\rangle + (1-t)\langle Au_2 - Av, u_2 - v\rangle \\
&\geq 0 \quad \forall v \in X
\end{aligned}$$

$$\overset{\text{Lem. 4.4}}{\Rightarrow}\ b = Aw\ \Rightarrow\ w \in S$$

□

Bemerkung: Der Satz gilt auch, falls X nicht separabel ist (ohne Beweis).

Corollar 4.6 *Sei X separabel, refl. $\mathbb{R}$-Banachraum und $A : X \to X^\star$ strikt monoton, koerziv, hemistetig. Dann existiert*

$$A^{-1} : X^\star \to X$$

und A^{-1} ist strikt monoton und demistetig.

Beweis: Übungsaufgabe.

□

4.1 Der Nemyckii-Operator

Definition 4.7 Sei $G \subset \mathbb{R}^n$, $f : G \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$. Durch Anwendung auf $u : G \to \mathbb{R}^n$ definieren wir den Operator F als

$$(Fu)(x) = f(x, u(x)), \quad x \in G \tag{1.1}$$

Lemma 4.8 *Die Funktion f erfülle*

1. *Carathéodory-Bedingung:*

$$f(\cdot, \eta) : x \to f(x, \eta) \quad \textit{messbar } \forall \eta \in \mathbb{R}^n$$
$$f(x, \cdot) : \eta \to f(x, \eta) \quad \textit{stetig f.f.a. } x \in G$$

2. *Wachstums-Bedingung:*

$$|f^j(x, \eta)| \le |a(x)| + b \sum_{i=1}^{n} |\eta^i|^{p_i/q}$$

mit $b > 0$, $a \in L^q(G)$ und $1 \le p_i,\ q < \infty$, $i = 1, \dots, n$.

Dann ist F aus Definition 4.7 ein Operator der Form

$$F : \prod_{i=1}^{n} L^{p_i}(G) \to (L^q(G))^k$$

und F ist stetig sowie beschränkt. Es gilt

$$\|Fu\|_{L^q} \le c \left(\|a\|_{L^q} + \sum_{i=1}^{n} \|u^i\|_{L^{p_i}}^{p_i/q} \right)$$

F heißt in diesem Fall Nemyckii-Operator.

Beweis: (nur für $n = 1$, $k = 1$, $p = p_1$, $u = u^1$)

1. Messbarkeit von Fu: Es sei $u \in L^p$, also messbar. Wir approximieren u durch $(u_j)_{j=1}^n$, so dass

$$u_j \to u \text{ auf } G,\ u_j = \sum_{i=1}^{N_j} c_i^j \chi_{G_i^j}$$

Es gilt

$$(Fu)(x) = \lim_{j \to \infty} f(x, u_j(x)) \text{für fast alle } x$$

wegen Stetigkeit von in der 2. Variablen. Weiter gilt

$$f(x, u_j(x)) = \sum_{i=1}^{N_j} f(x, c_i^j) \chi_{G_i^j(x)}$$

Damit ist $f(x, u_j(x))$ messbar für alle $j \in \mathbb{N}$ als Produkt von messbaren Funktionen. Somit ist $f(x, u(x))$ auch messbar als punktweiser Limes von messbaren Funktionen.

2. Beschränktheit von F:

$$\|Fu\|_{L^q}^q = \int_G |f(x, u(x))|^q = \int (|a(x)| + b|u(x)|^{p/q})$$
$$\le C\,(\|a(x)\|_{L^q}^q + \|u\|_{L^p}) \quad \text{nach Young.}$$

3. Stetigkeit von F:

$$\begin{aligned} u_j \to u \quad &\text{in } L^p \\ \Rightarrow\ \exists \text{ Teilfolge} : u_{j_k} \to u \quad &\text{f.ü.} \\ \Rightarrow\ (Fu_{j_k})(x) \to (Fu)(x) \quad &\text{f.f.a. } x \in G \text{ (wegen Stetigkeit)} \end{aligned}$$

Aber es gilt zudem, dass

$$\int_G |f(x, u_{j_k}(x)) - f(x, u(x))|^q \leq C \underbrace{(\|u\|_{L^q}^q + \|u_{j_k}\|_{L^p}^q + \|u\|_{L^p}^q)}_{\text{beschränkt.}}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} |f(x, u_{j_k}(x)) - f(x, u(x))|^q &\leq C(|f(x, u_{j_k}(x))| + |f(x, u(x))|^q) \\ &\leq C(|a(x)|^q + b^q |u_{j_k}|^q + |f(x, u(x))|^q) =: h_{j_k}(x) \end{aligned}$$

Es folgt

$$\|Fu_{j_k} - Fu\|_{L^q}^q \leq \int_G h_{j_k}$$

mit

$$h_{j_k} \to h \quad \text{in } G; \quad \int_G h_{j_k} \to \int_G h,$$

denn $\|u_{j_k}\|_{L^p} \to \|u\|_{L^p}$. Jetzt folgt mit majorisierter Konvergenz, dass

$$F(u_{j_k})(x) \to (Fu)(x) \text{ in } L^p$$

Die selbe Rechnung mit gleichem Limes folgt allerdings auch unter vorheriger Auswahl einer Teilfolge von u_j, somit gilt auch für die gesamte Folge, dass

$$\|Fu_j - Fu\| \to 0 \quad (j \to \infty)$$

□

Anwendung: p-Laplace

Wir betrachten das Randwertproblem:

$$\begin{aligned} -\text{div}\left(|\nabla u|^{p-2} \nabla u\right) + su = f \quad &\text{auf } \Omega \\ u = 0 \quad &\text{auf } \partial\Omega \end{aligned} \tag{1.2}$$

für $1 < p < \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt, $s \geq 0$, $u = 0$ auf $\partial\Omega$.
Schwache Formulierung: Es sei $f \in L^p(\Omega)$
Wir suchen $u \in X = W_0^{1,p}(\Omega)$, so dass

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \varphi + s \int_\Omega u\varphi = \int f\varphi \quad \forall \varphi \in X \tag{1.3}$$

Wir definieren einen Operator A durch

$$\langle Au, \varphi \rangle = (Au)(\varphi) := \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \varphi + \int su\varphi \quad \forall u, \varphi \in X$$

und ein Funktional b durch

$$\langle b, \varphi \rangle = \int_\Omega f \cdot \varphi$$

Lemma 4.9 *Es sei $p \geq \frac{2n}{n+2}$ $f \in L^{p'}$, dann gilt*

$$A : X \to X'$$

beschränkt und $b \in X'$. Weiter gilt, dass (1.3) äquivalent ist zu

$$Au = b$$

Beweis: Wir benutzen $\|u\|_X = \|\nabla u\|_{L^p}$ als äquivalente Norm auf X mittels *Poincaré*.

1) Es gilt

$$\begin{aligned} |\langle Au, \varphi\rangle| &\leq \int_\Omega |\nabla u|^{p-1}|\nabla\varphi| + s\int_\Omega |u\varphi| \\ &\overset{\text{Hölder}}{\leq} \left(\int_\Omega |\nabla u|^{(p-1)p'}\right)^{1/p'} \cdot \left(\int_\Omega |\nabla\varphi|^p\right)^{1/p} + s\|u\|_{L^2}\|\varphi\|_{L^2} \\ &\overset{p'=\frac{p}{p-1}}{=} \|\nabla u\|_{L^p}^{p-1}\|\nabla\varphi\|_{L^p} + s\|u\|_{L^2}\|\varphi\|_{L^2} = \ldots\ldots \end{aligned}$$

Für $p \geq \frac{2n}{n+2}$ bettet $W^{1,p}$ genau stetig in L^2 ein. Es gilt somit, dass

$$\ldots\ldots \leq C(\|\nabla u\|_{L^p}^{p-1} + s\|\nabla u\|_{L^p})\|\nabla\varphi\|_{L^p}$$

$$\Rightarrow Au \in X'$$

und

$$\|Au\|_{X'} \leq \sup_{\|\varphi\|_X \leq 1} |\langle Au, \varphi\rangle| \leq C\|\nabla u\|_{L^p}^{p-1} = C\|\nabla u\|_X^{p-1}$$

2) Gleichermaßen gilt

$$\|b\|_{X'} \leq C\|f\|_{L^{p'}}$$

3) Es folgt, dass

$$(1.3) \Leftrightarrow \langle Au, \varphi\rangle = \langle b, \varphi\rangle \quad \varphi \in X$$

Das ist nichts anderes als

$$Au = b$$

□

Lemma 4.10 *Es seien die Voraussetzungen von Lemma 4.9 gegeben, A definiert nach (1.3). Dann sind die Voraussetzungen von Theorem 4.5 gegeben.*

Beweis: 1. Monotonie: Es sei $g = (g^1, \ldots, g^n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und

$$g : \xi \mapsto |\xi|^{p-2}\xi, \quad g(0) = 0$$

Damit folgt, dass

$$\frac{\partial g^i}{\partial \xi^j}(\xi) = |\xi|^{p-2}\delta_i^j + (p-2)|\xi|^{p-4}\xi_i\xi_j \quad i, j = 1, \ldots, n \quad \xi \neq 0.$$

Somit gilt aber, dass

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial q^i}{\partial \xi_j}(\xi)\eta^i\eta^j = |\xi|^{p-2}\left(|\eta|^2 + (p-2)\frac{(\xi\eta)^2}{|\xi|^2}\right) \geq \min(1, p-1)|\xi|^{p-2}|\eta|^2$$

Nun sei $u \neq v \in X$. es folgt, dass

$$\begin{aligned} \langle Au - Av, u - v \rangle &= \int_\Omega (g(\nabla u) - g(\nabla v))(\nabla u - \nabla v) + s \int_\Omega |u - v|^2 \\ &\geq \int_\Omega \underbrace{\int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} g(\nabla v + \tau(\nabla u - \nabla v))\, \mathrm{d}\tau \cdot (\nabla u - \nabla v)}_{:=I}\, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} I &\geq \int_0^1 \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial g^i}{\partial \xi_j} (\nabla v + \tau(\nabla u - \nabla v)) \cdot (\partial_j u - \partial_j v)(\partial_i u - \partial_i v)\, \mathrm{d}\tau \\ &\geq c|\nabla u - \nabla v|^2 \underbrace{\int_0^1 |\nabla v + \tau(\nabla u - \nabla v)|^{p-2}\, \mathrm{d}\tau}_{<\infty \text{ für } p>1} > 0, \end{aligned}$$

denn $|\nabla v + \tau(\nabla u - \nabla v)|^{p-2} > 0$ außer für max. 1 Punkt $\tau_0(x)$. Somit gilt aber

$$\langle Au - Av, u - v \rangle > 0 \quad \Rightarrow A \text{ strikt monoton.}$$

2. Koerzitivität: Es sei $u \in X$. Es gilt

$$\langle Av, u \rangle = \int_\Omega |\nabla u|^p + s|u|^2 \geq \int_\Omega |\nabla u|^p$$

$$\frac{\langle Au, u \rangle}{\|u\|_X} \geq \|\nabla u\|_{L^p}^{p-1} \to \infty \quad \text{für } \|u\|_X \to \infty \text{ und } p > 1.$$

3. Stetigkeit: Für die Funktion g aus 1. gilt

$$|g^i(\xi)| \leq c|\xi|^{p-1} = c|\xi|^{p/q} \quad \text{für } q = \frac{p}{p-1}$$

und g ist stetig. Somit ist

$$F : (L^p)^n \to (L^{p'})^n, \quad F : \nabla u \mapsto g(\nabla u)$$

ein n-dimenisonaler *Nemyckii-Operator*. Die Stetigkeit von A ist gegeben durch

$$\langle Au, \varphi \rangle = \int_\Omega \underbrace{F(\nabla u)}_{\in L^{p'}} \cdot \underbrace{\nabla \varphi}_{\in L^p} + \underbrace{s \int_\Omega u\varphi}_{\text{beschränkt.}}$$

folgt durch Normabschätzung. Damit ist A stetig und somit hemistetig.

4. $W_0^{1,p}$ ist separabler Banachraum, somit sind alle Voraussetzungen von 4.5 erfüllt

□

Wir haben gezeigt, dass A alle Voraussetzung von Satz 4.5 erfüllet, somit folgt sofort:

Theorem 4.11 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt, $s \geq 0$. Es sei $p \geq \frac{2n}{n+2}$, $p > 1$. Dann existiert zu jedem $f \in L^{p'}$ genau eine schwache Lösung des p-Laplace-Randwertproblems (1.2).*

BEWEIS: Lemma 4.9, 4.10, Satz 4.5.

□

Bemerkung: 1) Der Satz 4.11 gilt auch für Gleichungen der Form

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}\big(A,(x,\nabla u)\big) &= f \quad \text{in } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

falls A die folgenden Bedingungen erfüllt

- *Carathéodory* (Stetigkeit im 2. Argument, messbar im 1. Argument)
- $|A(x,\eta)| \leq C \cdot (g(x) + |\eta|^{p-1})$ $g \in L^{p'}(\Omega)$ (Wachstumsbedingung)
- $(A(x,\eta) - A(x,\xi)) \cdot (\eta - \xi) > 0$ f.f.a. x, $\eta \neq \xi$
- $A(x,\eta) \cdot \eta \geq c|\eta|^p - h(x)$ $h \in L^1(\Omega)$ (Koerzitivität)

2) Man kann f auch beliebig aus $(W_0^{1,p}(\Omega))'$ wählen. Das ist eine etwas größere Menge als $L^{p'}$.

3) Aber was ist mit $s < 0$?

4.2 Pseudomonotone Operatoren

In diesem Abschnitt wird die Theorie monotoner Operatoren und die Theorie kompakter Operatoren vereint. Ein typischer pseudomonotoner Operator ist von der Form

$$A = A_1 + A_2,$$

$$A_1 : X \to X' \quad \text{monoton, hemistetig.}$$

$$A_2 : X \to X' \quad \text{strak stetig (d.h. kompakt in separablen, reflexiven Räumen } X\text{).}$$

Beispiel

$$\langle A_1 u, \varphi \rangle = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi \quad \text{monoton, hemistetig.}$$

$\langle A_2 u, \varphi \rangle = \int_\Omega su \cdot \varphi$ kompakt als Abbildung von $X = W_0^{1,p}$ nach X' für vernünftige p, auch für $s < 0$.

Definition 4.12 Wir sagen A genüge Bedingung (M), falls gilt

$$\left.\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u \quad \text{in } X \\ Au_n &\rightharpoonup b \quad \text{in } X \\ \limsup_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n \rangle &\leq \langle b, u \rangle \end{aligned}\right\} \Rightarrow Au = b \tag{2.1}$$

Lemma 4.13 *Es sei X ein reflexiver, reeller Banachraum,*

$$A : X \to X', \quad B : X \to X'$$

seien Operatoren. Es gilt

1) A monoton, hemistetig ⇒ A genügt (M) (2.1)

2) A genügt (M) (2.1), B stark stetig ⇒ A + B genügt (M) (2.1).

Beweis: 1) (siehe *Minty-Lemma* 4.4) Es gilt $\forall v \in X$, dass

$$0 \leq \langle Au_n - Av, u_n - v\rangle = \underbrace{\langle Au_n, u_n\rangle}_{\leq \langle b,u\rangle - \langle Au_n - Av, v\rangle} - \langle Av, u_n\rangle$$

$$\Rightarrow\ 0 \leq \langle b, u\rangle - \langle Av, u\rangle - \langle b - Av, v\rangle = \langle b - Av, u - v\rangle$$

Sei $w \in X$, $v = u - tw$.

$$\Rightarrow\ 0 \leq \langle b - Av, u - v\rangle = \langle b - A(u - tw), tw\rangle \quad t \to 0 \quad \text{(Hemistetigkeit)}$$

$$\Rightarrow\ \langle b - Av, w\rangle \geq 0 \quad \forall w$$

$$\langle b - Av, w\rangle \leq 0 \quad \text{(durch Einsetzen von } w,\ tw - w \text{ oben)}$$

$$\Rightarrow\ Av = b.$$

2) Es gelte $u_n \rightharpoonup u$ in X.

$$Au_n + Bu_n \rightharpoonup b \quad \text{in } X'$$

$$\limsup_{n\to\infty} \langle Au_n + Bu_n, u\rangle \leq \langle b, u\rangle$$

Es gilt wegen starker Stetigkeit von B , dass

$$Bu_n \to Bu \quad \text{in } X'$$

somit folgt dass

$$\limsup_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n\rangle \leq \langle b - Bu, u\rangle$$

$$\Rightarrow\ Au = b - Bu$$

$$\Rightarrow\ Au + Bu = b.$$

A erfüllt (M) 2.1.

□

Definition 4.14 (Pseudomonotonie) Es sei X ein reflexiver, reeller Banachraum

$$A : X \to X' \quad \text{ein Operator}$$

A heißt *pseudomonoton*, falls gilt

$$\left.\begin{array}{l} u_n \rightharpoonup u \quad \text{in } X \\ \limsup \langle Au_n, u_n - u\rangle \leq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \langle Au, u - w\rangle \leq \liminf \langle Au_n, u_n - w\rangle \quad w \in X$$

Lemma 4.15 *Sei X ein reflexiver, reeller Banachraum, $A, B : X \to X'$ zwei Operatoren*

(i) A monoton, hemistetig $\Rightarrow$ A pseudomonoton.

(ii) A stark stetig $\Rightarrow$ $A + B$ pseudomonoton.

(iii) A, B beide pseudomonoton $\Rightarrow$ $A + B$ pseudomonoton.

(iv) A pseudomonoton $\Rightarrow$ A erfüllt (M) (2.1)

(v) A pseudomonoton, lokal beschränkt $\Rightarrow$ A demistetig.

Beweis: 1) Sei

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{in } X$$

$$\limsup \langle Au_n, u_n - u \rangle \leq 0.$$

A monoton

$$\begin{aligned} &\langle Au_n - Au, u_n - u \rangle \geq 0 \\ \Rightarrow\ &\liminf \langle Au_n, u_n - u \rangle \geq \liminf \langle Au, u_n - u \rangle = 0, \end{aligned}$$

wegen schwacher Konvergenz von u_n.

$$\lim \langle Au_n, u_n - u \rangle = 0$$

Es sei $w \in X$, $z = u + t(w - u)$, $t > 0$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow\ &\langle Au_n - Az, u_n - z \rangle = \langle Au_n - Az, u_n - (u + t(w - u)) \rangle \geq 0 \\ \Rightarrow\ &t\langle Au_n, u - w \rangle \geq \underbrace{-\langle Au_n, u_n - u \rangle + \langle Az, u_n - u \rangle}_{\to 0} + t\langle Az, u - w \rangle \\ \Rightarrow\ &\liminf \langle Au_n, u_n - w \rangle \geq \liminf \langle Au_n, u - w \rangle \geq \langle Au, v - w \rangle \end{aligned}$$

und die Behauptung folgt.

2)

$$\begin{aligned} &u_n \rightharpoonup u \quad \text{in } X \\ \Rightarrow\ &Au_n \to Au \quad A \text{ stark stetig} \\ \Rightarrow\ &\langle Au, u - w \rangle = \lim \langle Au_n, u_n - w \rangle, \end{aligned}$$

womit die Behauptung folgt.

3) Es sei $u_n \rightharpoonup u$ Folge in X mit

$$\limsup \langle Au_n + Bu_n, u_n - u \rangle \leq 0$$

Wir zeigen, dass dann gilt

$$\limsup \langle Au_n, u_n - u \rangle \leq 0$$

und

$$\langle Bu_n, u_n - u \rangle \leq 0$$

Daraus folgt die Behauptung durch Addition der beiden Ungleichungen der Pseudomonotonität für A und B separat.

Angenommen (zum Widerspruchsbeweis), dass

$$\begin{aligned} &\limsup \langle Au_n, u_n - u \rangle > 0 \\ \Rightarrow\ &\text{Teilfolge } u_{n_k} : \lim \langle Au_{n_k}, u_{n_k} - u \rangle = a \\ \Rightarrow\ &\limsup \langle Bu_{n_k}, u_{n_k - u} = \limsup \langle (B + A)u_{n_k} - Au_{n_k}, u_{n_k} - u \rangle \\ &\leq \underbrace{\limsup \langle (B + A)u_{n_k}, u_{n_k} - u \rangle}_{\leq 0} + \underbrace{\lim \langle -Au_{n_k}, u_{n_k} - u \rangle}_{= -a} \leq -a \\ \Rightarrow\ &0 = \langle Bu, u - u \rangle \leq \liminf \langle Bu_{n_k}, u_{n_k} - u \rangle \\ &\leq \limsup \langle Bu_{n_k}, u_{n_k} - u \rangle \leq -a < 0 \quad ↯, \end{aligned}$$

womit die Behauptung folgt.

4) Es sei $u_n \rightharpoonup u$ Folge in X, so dass

$$Au_n \rightharpoonup b$$

und

$$\begin{aligned}
&\limsup \langle Au_n, u_n \rangle \leq \langle b, u \rangle \\
\Rightarrow\ &\limsup \langle Au_n, u_n - u \rangle \leq \limsup \langle Au_n, u_n \rangle - \underbrace{\lim \langle Au_n, u \rangle}_{=\langle b,u \rangle} \\
&\leq \langle b, u \rangle - \langle b, u \rangle = 0.
\end{aligned}$$

Damit gilt wegen der Pseudomonotonietät für alle $w \in X$:

$$\langle Au, u - w \rangle \leq \liminf \langle Au_n, u_n - w \rangle \leq \langle b, u \rangle - \langle b, w \rangle = \langle b, u - w \rangle$$

mit $w' = 2u - w$ folgt die umgekehrte Ungleichung, somit gilt

$$\langle Au, u - w \rangle = \langle b, u - w \rangle \quad w \in X \ \Rightarrow \ Au = b$$

und damit die Behauptung.

5) Es gelte $u_n \to u$ in X.

$$\Rightarrow \ (Au_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ beschränkt in } X', \text{ da } A \text{ lokal bechränkt.}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \ \exists \text{ Teilfolge: } Au_{n_k} \rightharpoonup b \\
&\Rightarrow \ \lim \langle Au_{n_k}, u_{n_k} - u \rangle = 0
\end{aligned}$$

Aus der Pseudomonotonität folgt

$$\begin{aligned}
\langle Au, u - w \rangle &\leq \liminf \langle Au_{n_k}, u_{n_k} - w \rangle \quad \forall w \in X \\
&= \langle b, u - w \rangle \quad u_n \text{ stark-schwach konvergent.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\overset{\text{wie in 4)}}{\Rightarrow} Au = b. \\
&\Rightarrow Au_{n_k} \rightharpoonup Au.
\end{aligned}$$

Dieses Argument gilt auch bei vorheriger Auswahl einer weiteren Teilfolge, somit folgt die Behauptung, da A demistetig.

□

Theorem 4.16 (Brezis) *Es sei $A : X \to X'$ ein pseudomonotoner, beschränkter koerzitiver Operator, X ein separabler, reflexiver reeller Banachraum. Dann existiert für alle $b \in X'$ eine Lösung $u \in X$ von*

$$Au = b$$

Beweis: Nach Lemma 4.16 ist A demistetig und genüge Bedingung (M). Es sei $(w_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine abzählbare Teilmenge von X, so dass $\operatorname{span}\{w_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ dicht liegt in X und w_n linear unabhängig von $\{w_j\}_{j=1}^{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist.
Wie im Beweis von *Browder-Minty* suchen wir approximative Lösungen $u^n \in \operatorname{span}\{w_j\}_{j=1}^{n} =: X^n$

$$u_n = \sum_{j=1}^{n} c_j^n w_j$$

das „Galerkin-Systems“

$$g_k(c^n) = g_k(u_n) := \langle Au_n - b, w_k \rangle = 0 \quad \forall k = 1, \dots, n. \tag{2.2}$$

Auf $\mathbb{R}^n$ betrachten wir die Norm $\|c^n\|_X = \|u_n\|_X$ mit

$$u_n = \sum_{j=1}^{n} c_j^n w_j$$

Es gilt

- g_k $(k = 1, \dots, n)$ stetig in $\mathbb{R}^n$, da A demistetig

$$\Rightarrow \langle Au^j - b, w_n \rangle \to \langle Au - b, w_k \rangle$$

- $\exists R_0 > 0 : \sum_{k=1}^n g_k(\tilde{c}^n) \cdot \tilde{c}_k^n > 0$, falls $\|\tilde{u}_n\| = R_0$ mit $\tilde{u}_n = \sum_{j=1}^n \tilde{c}_j^n w_j$. (Koerzitivität von A)

Aus den Eigenschaften des *Brouwer'schen Abbildungsgrades* folgt die Existenz einer Lösung $u_n \in X_n$ von 2.2 für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $\|u_n\|_X \leq R_0$. (Das war Theorem 2.13: Ein stetiges Vektorfeld, das auf einer Kugeloberfläche in jdm. Punkt nach außen zeigt muss an einem Punkt im Innern verschwinden.) Wegen der Beschränktheit von $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Lösungen von (2.2) existiert eine (schwach) konvergente Teilfolge $u_{n_j} \rightharpoonup u$ in X. Wir zeigen, dass u die gesuchte Lösung ist. Wegen Beschränktheit von A und der schwachen Konvergenz von u_{n_j} existiert eine weitere Teilfolge (wieder mit n_j indiziert), so dass

$$Au_{n_j} \rightharpoonup c \quad \text{in } X$$

Weiter gilt aber

$$\langle Au_{n+k}, w \rangle = \langle b, w \rangle \quad \forall w \in \bigcup_{j=1}^{n} X_j \quad k \geq 0.$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \langle Au_n, w \rangle = \langle b, w \rangle \quad \forall w \in \bigcup_{j=1}^{\infty} X_j$$

Es folgt wie in *Browder-Minty*, dass $c = b$, denn für alle $w \in \bigcup_{j=1}^{\infty} X_j$ gilt

$$\langle c - b, w \rangle = 0$$

und $\bigcup_{j=1}^{\infty} X_j$ liegt dicht in X.
Somit folgt aber, dass

$$\langle Au_{n_j}, u_{n_j} \rangle = \langle b, u_{n_j} \rangle \to \langle b, u \rangle$$

Von oben wissen wir noch dass $u_n \rightharpoonup u$ und $Au_{n_j} \rightharpoonup b$. Aufgrund von (M) folgt sofort, dass

$$Au = b$$

□

Anwendung: *p*-Laplace (Redux)

Wir suchen $u : \Omega \to \mathbb{R}$, so dass

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2} \nabla u\right) + g(u) &= f \quad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt, $p > 1$. Wir betrachten wieder $x = W_0^{1,p}(\Omega)$ und die Operatoren A_1, A_2 definiert durch

$$\langle A_1 u, \varphi\rangle := \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi$$
$$\langle A_2 u, \varphi\rangle := \int_\Omega g(u) \cdot \varphi$$

und

$$\langle b, \varphi\rangle := \int_\Omega f\varphi.$$

Der Operator A_1 und das Funktional b wurden bereits in p-Laplace Teil 1 behandelt. Zu A_2:

Lemma 4.17 *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, offen, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, so dass*

$$|g(y)| \leq c \cdot (1 + |y|^{r-1})$$

für $1 < r < \infty$. Falls $1 \leq p < n$ und $r \leq \frac{np}{n-p}$, dann ist $A_2 : X \to X'$ beschränkt. Für $r < \frac{np}{n-p}$ ist A_2 stark stetig. Falls $p \geq n$, so gilt das für alle $r \in (1, \infty)$.

Beweis: siehe Übungsblatt, folgt aus Sobolev-Einbettung.

□

Koezitivität: Achtung, beispielsweise für $g(y) = -sy$, s hinreichend groß ist $A = A_1 + A_2$ unter Umständen nicht koerzitiv. Es existiert dann auch nicht immer eine Lösung.

Beispiel:

$$\Delta u - \lambda u = 0$$

besitzt nichttriviale Lösungen u für λ Eigenwert von Δ. $\mapsto$ Fredholm-Alternative: Nichtexistenz von Lösungen von $\Delta u - \lambda u = \alpha u$ $\alpha > 0$.
Wir rechnen

$$\begin{aligned}
\frac{\langle A_1 u + A_2 u, u\rangle}{\|u\|_X} &= \frac{\|\nabla u\|_{L^p}^p + \int g(u)u}{\|\nabla u\|_{L^p}} \\
&\geq \|\nabla u\|_{L^p}^p - \|A_2 u\|_{X'} \\
\text{mit} \quad \|A_2 u\|_{X'} &= \sup_{\varphi \in X} \langle A_2 u, \varphi\rangle \geq \frac{\langle A_2 u, u\rangle}{\|\nabla u\|_{L^p}}
\end{aligned}$$

Beispiel:

$$g(u) = -su, \quad s > 0$$

Es gilt $\|u\|_{L^2} \leq C\|\nabla u\|_{L^p}$ mit C der Sobolev-Konstante.

$$\Rightarrow \frac{-\int su^2}{\|\nabla u\|_{L^p}} \geq -sC^2 \cdot \|\nabla u\|_{L^p}$$

und es folgt die Koerzitivität von $A = A_2 + A_1$ für $p > 2$ und jedes $s > 0$, (dann gewinnt $\|\nabla u\|_{L^p}^{p-1}$ immer) oder in der linearen Gleichung ($p = 2$) für $s \cdot C^2 < 1$.

Beispiel: Falls

$$\inf_{y \in \mathbb{R}} g(y)y > -\infty, \tag{2.3}$$

dann ist $A = A_1 + A_2$ immer koerzitiv, falls $p > 1$.

Theorem 4.18 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt, $p > 1$. Die Funktion g erfülle die Voraussetzungen von Lemma 4.17. Weiter sei der Operator $A = A_1 + A_2$ koerzitiv, also sei z.B. (2.4) erfüllt. Dann existiert für alle $f \in L^{p'}(\Omega)$ ein $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, so dass gilt*

$$(A_1 + A_2)u = b$$

(u ist schwache Lösung von

$$\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + g(u) = f$$

mit Nullrandbedingung.)

Beweis: Folgt aus dem *Satz von Brezis* 4.16.

□

4.2.1 Evolutionsprobleme

Es wird notwendig sein, Funktionen der Art

$$f : S \to X$$

mit $S \subset \mathbb{R}$ und X ein reflexiver reeller Banachraum und insbesondere deren Integrale zu betrachten. Deshalb ein

Einschub: Das Bochner-Integral

Definition 4.19 (Treppenfunktion) Eine Funktion $f : S \to X$ heißt *Treppenfunktion*, falls gilt

$$f(s) = \sum_{j=1}^{n} \chi_{B_j}(s)x_j$$

mit $x_j \in X$, $j = 1, \ldots, n$; $B_j \subset S \subset \mathbb{R}$ Lebesgue-messbare Mengen mit $|B_i| \leq \infty$ und $B_i \cap B_j = \varnothing$ für $i \neq j$ Maß von B_i. χ_{B_i} ist die charakteristische Funktion von B_i.

Definition 4.20 (Bochner-Integral) Für eine Treppenfunktion f definieren wir das *Bochner-Integral*

$$\int_S f(s)\,\mathrm{d}s := \sum_{j=1}^{n} |B_j| \cdot x_j$$

Bemerkung: Es gilt natürlich

$$\int_S f(s)\,\mathrm{d}s \in X$$

Bemerkung: Verallgemeinerung auf andere Maßräume (z.B. Teilmengen des $\mathbb{R}^n$) ebenfalls möglich.

Definition 4.21 (Bochner-messbar, Bochner-integrierbar) Eine Funktion $f : S \to X$ heißt *Bochner-messbar*, falls eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen $f_n : S \to X$ existiert, so dass für fast alle $s \in S$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n(s) - f(s)\|_X = 0.$$

Falls f in eine solche Folge approximierbar ist und zudem gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_S \|f_n(s) - f(s)\|_X\,\mathrm{d}s = 0,$$

so heißt f *Bochner-integrierbar* und wir schreiben

$$\int_S f(s)\,\mathrm{d}s = \lim_{n\to\infty} \int_S f_n(s)\,\mathrm{d}s \tag{2.4}$$

Proposition 4.22 *1) Falls $f : S \to X$ Bochner-messbar ist, so ist die Funktion $\|f(\cdot)\| : S \to \mathbb{R}$ Lebesgue-messbar.*

2) Der Grenzwert in (2.4) existiert für Bochner-integrable Funktionen f.

3) Der Grenzwert in (2.4) ist unabhängig von der Wahl der Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

BEWEIS: 1) Es sei f Bochner-messbar, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Treppenfunktionen, so dass $\lim_{n\to\infty} \|f_n(s) - f(s)\|_X = 0$ f.f.a. $s \in S$. Dann ist $\|f_n(\cdot)\| : S \to \mathbb{R}$ eine (reelle) Treppenfunktion. Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n(s)\| = \|f(s)\| \quad \text{ffa } s \in S$$

Damit folgt, dass $\|f(\cdot)\|$ Lebesgue-messbar ist als punktweiser Limes messbarer Funktionen.

2) Es gilt für $n, k \in \mathbb{N}$, dass

$$\begin{aligned}\left\| \int_S f_n \, ds - \int_S f_k(s) \, ds \right\|_X = \left\| \int_S f_n(s) - f_k(s) \, ds \right\|_X &\leq \int_S \|f_n(s) - f_k(s)\|_X \, ds \\ &\leq \int_S \|f_n - f\|_X + \|f_k - f\|_X \, ds \to 0 \quad (n, k \to \infty)\end{aligned}$$

Damit ist $\int_S f_n(s) \, ds$ eine Cauchy-Folge und besitzt einen Grenzwert im Banachraum X.

3) Es sei $(\tilde{f}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine andere Folge von Treppenfunktionen, für die gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_S \|\tilde{f}_n(s) - f(s)\|_Y \, ds = 0$$

Wir wählen

$$\hat{f}_n = \begin{cases} \tilde{f}_{n/2} & n \text{ gerade.} \\ f_{(n+1)/2} & n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Es gilt $\lim_{n\to\infty} \int_S \hat{f}_n(s)$ existiert wegen 2) somit auch für Teilfolgen. Somit ist gezeigt dass das Bochner-Integral für Bochner-integrierbare Funktionen definiert ist.

□

Theorem 4.23 (Pettis) *Es sei X ein separabler Banachraum. Dann ist $f : S \to X$ genau dann Bochner-messbar, wenn für alle $\varphi \in X'$ die Funktion*

$$\langle \varphi, f(\cdot) \rangle_X : S \to \mathbb{R}$$

Lebesgue-messbar ist.

BEWEIS: a) Sei f Bochner-messbar, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die entsprechende Folge von Treppenfunktionen, sei $\varphi \in X'$. Es folgt f.f.a. $s \in S$, dass

$$\underbrace{\langle \varphi, f_n(s) \rangle}_{\text{Treppenfunktionen in } \mathbb{R}} \to \langle \varphi, f(s) \rangle$$

Somit ist $\langle \varphi, f(\cdot) \rangle$ als punktweiser Limes von reellwertiger Treppenfunktionen Lebesgue-messbar.

Wir zeigen zunächst dass $\|f(\cdot)\|_X : S \to \mathbb{R}$ Lebesgue-messbar ist.

Lemma 4.24 *Sei X ein separabler Banachraum. Dann existiert $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X' mit $\|\varphi_n\|_{X'} \leq 1$, so dass $\forall \varphi_0 \in X'$, $\|\varphi_0\| \leq 1$ eine Teilfolge $(\varphi_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ existiert, mit $\lim_{n\to\infty} \varphi_{n_k}(f) = \varphi_0(f)$ für alle $f \in X$.*

(Lemma nötig, weil X' nicht unbedingt separabel ist nicht nötig für reflexiven Fall)

Es sei $a \in \mathbb{R}$ und definieren

$$A := \{s : \|f(s)\|_X \leq a\},$$

sowie

$$A_\varphi := \{s : |\varphi(f(s))| \leq a\} \quad \text{für } \varphi \in X'$$

Falls gilt $A = \bigcap_{j=1}^{\infty} A_{\varphi_j}$, wobei φ_j die Folge aus dem Lemma oben ist, so ist A als abzählbare Schnittmenge messbarer Mengen messbar und a) bewiesen. Es gilt natürlich, dass

$$A \subset \bigcap_{\|\varphi\|_{X'} \leq 1} A_\varphi,$$

aber wir wissen auch, dass für festes s ein $\varphi_0 \in X'$ existiert mit $\|\varphi_0\|_{X'} = 1$ und $\varphi_0(f(s)) = \|f(s)\|_X$ nach *Hahn-Banach*. Damit gilt auch

$$A \supset \bigcap_{\|\varphi\|_{X'} \leq 1} A_\varphi,$$

somit folgt

$$A = \bigcap_{\|\varphi\|_{X'} = 1} A_\varphi$$

Mit dem Lemma oben folgt aber dass gilt

$$\bigcap_{\|\varphi\|_{X'} \leq 1} A_\varphi = \bigcap_{j=1}^{\infty} A_{\varphi_j} \quad (\varphi_j \text{ aus dem Lemma})$$

somit folgt $A = \bigcap_{j=1}^{\infty} A_{\varphi_j}$ und a) ist bewiesen.

b) Nachdem X separabel ist, können wir für alle $n \in \mathbb{N}$ die Menge X mit eine abzählbaren Menge offener Kugeln $\{S_{j,n}\}_{j \in \mathbb{N}}$,

$$S_{j,n} = B_{1/n}(f_{j,n})$$

mit Radius $\frac{1}{n}$ überdecken. Nach Teil a) gilt, dass

$$\|f(\cdot) - f_{j,n}\| : S \to \mathbb{R}$$

Lebesgue-Messbar ist für alle $j, n \in \mathbb{N}$. Damit ist aber auch die Menge

$$B_{j,n} := \{s \in S : f(s) \in S_{j,n}\}$$

Lebesgue-messbar. Es gilt $S = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_{j,n}$. Wir setzen

$$f_n(s) = f_{j,n} \quad \text{für } s \in B'_{j,n} := B_{j,n} \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} B_{i,n}.$$

Es folgt, dass $\|f(s) - f_n(s)\|_X \leq \frac{1}{n}$ für alle $s \in S$. Nachdem $B'_{j,n}$ Lebesgue-messbar ist für alle $j, n \in \mathbb{N}$ ist $f_n(\cdot)$ aber Bochner-messbar, denn auf dem endlichen Maßraum kann man f_n durch endliche Treppenfunktionen approximieren, und damit ist auch f Bochner-messbar.

□

Bemerkung: Zur Approximation f_n abzählbarer Treppenfunktionen durch endliche Treppenfunktionen: Wir nehmen für festes $n \in \mathbb{N}$

$$(f_{n,k})_{k \in \mathbb{N}} := \left(\sum_{j=1}^{k} f_{j,n} \cdot \chi_{B'_{j,n}} \right)$$

und für alle $s \in S$ gilt:

$$f_{n,k}(s) \to f_n(s) \quad (k \to \infty)$$

Damit ist f_n Bochner-messbar.

Nun beweisen wir das Lemma 4.24:

Beweis: es sei $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dicht in X. Wir betrachten

$$\eta_n \cdot \varphi \to \eta_n(\varphi) = \begin{pmatrix}\varphi(f_1) & \varphi(f_2) & \cdots & \varphi(f_n)\end{pmatrix}.$$

für $\varphi \in S' = \{\varphi \in X' : \|\varphi\|_{X'} = 1\}$. Der Zielraum ist endlichdimensional, also separabel. Somit existiert für festes n eine Folge $\{\varphi_{n,k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ in S', so dass $\{\eta_n(\varphi_{n,k})\}_{k\in\mathbb{N}}$ dicht liegt in im Bild $\eta_n(S')$ von S'. Es folgt nun, dass für jedes $\varphi_0 \in S'$ eine Teilfolge $(\varphi_{n,m_n})_{n\in\mathbb{N}}$ existiert, so dass

$$|\varphi_{n,m_n}(f_i) - \varphi_0(f_i)| < \frac{1}{n} \quad \text{für alle } i \in \{1,\ldots,n\}.$$

damit gilt aber, dass

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{n,m_n}(f_i) = \varphi_0(f_i) \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Wegen der Dichtheit der $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ und der gleichmäßigen Beschränktheit der $\varphi_{n,k}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{n,m_n}(f) = \varphi_0(f) \quad \forall f \in X.$$

□

Corollar 4.25 *Sei X ein separabler Banachraum, $f : S \to X$. Es seien $f_n : S \to \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$ Bochner-messbare Funktionen, so dass f.f.a. $s \in S$ gilt*

$$f_n(s) \rightharpoonup f(s)$$

Dann ist f Bochner-messbar.

Beweis: Sei $F \in X'$. Es gilt $\langle F, f_n(\cdot)\rangle$ ist Lebesgue messbar, wegen Theorem 4.23 ($\Rightarrow$). und es gilt, dass

$$\langle F, f_n(\cdot)\rangle \to \langle F, f(\cdot)\rangle \quad \text{f.ü. auf } S$$

Damit ist $\langle F, f(\cdot)\rangle$ Lebesgue-messbar, und wegen Theorem 4.23 ($\Rightarrow$) ist f Bochner-messbar.

□

Theorem 4.26 *[Satz von Bochner] Eine Bochner-messbare Funktion $f : S \to X$ ist genau dann Bochner-integrierbar, wenn die Funktion*

$$\|f(\cdot)\|_X : S \to \mathbb{R}$$

Lebesgue-integrierbar ist.

Beweis: 1) Sei $f : S \to X$ Bochner-integrierbar, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Folge von Treppenfunktionen, so dass f.f.a. $s \in S$ gilt $f_n(s) \to f(s)$ in X. Es folgt sofort, dass $\|f(\cdot)\|$ Lebegue-messbar ist. Punktweise gilt

$$\|f(s)\| \leq \|f_n(s)\| + \|f(s) - f_n(s)\|$$

und somit

$$\int_S \|f(s)\|\,\mathrm{d}s \leq \underbrace{\int_S \|f_n(s)\|}_{\text{Treppenfunktion}} + \underbrace{\int_S \|f(s) - f_n(s)\|}_{\text{Grenzwert existiert}} < \infty$$

$\Rightarrow \|f(\cdot)\|$ Lebesgue-integrierbar.

2) Sei f Bochner-messbar und sei $\|f(\cdot)\| : S \to \mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar. Es existiert eine Folge von Treppenfunktionen, so dass

$$f_n(s) \to f(s) \quad \text{f.f.a. } s \in S.$$

Es sei

$$g_n(s) := \begin{cases} f_n(s) & \text{falls } \|f_n(s)\| \leq 3/2\|f(s)\| \\ 0 & \text{falls } \|f_n(s)\| > 3/2\|f(s)\| \end{cases}$$

Es gilt immer noch: g_n Treppenfunktion und

$$g_n(s) \to f(s) \quad \text{f.f.a. } s \in S$$

Gleichzeitig gilt aber, dass

$$\|g_n(s) - f(s)\| \leq \|g_n(s)\| + \|f(s)\| \leq \frac{5}{2}\|f(s)\|$$

Mit dem *Lebesgue'schen Konvergenzsatz* folgt, dass

$$\lim_{n\to\infty} \int_S \|g_n(s) - f(s)\| = 0,$$

womit f Bochner-integrierbar ist.

□

Corollar 4.27 *Es sei $f : S \to X$ Bochner-integrierbar. Dann gilt*

$$\left\| \int_S f(s)\,\mathrm{d}s \right\|_X \leq \int_S \|f(s)\|_X\,\mathrm{d}s \quad \textit{und } \forall \varphi \in X' \textit{ gilt} \quad \left\langle \varphi, \int f(s)\,\mathrm{d}s \right\rangle_X = \int_S \langle \varphi, f(s) \rangle_X \,\mathrm{d}s$$

Beweis: 1) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge von Treppenfunktionen, die f punktweise f.ü. in S approximieren. Es folgt, dass

$$\begin{aligned} \left\| \int_S f(s)\,\mathrm{d}s \right\| &= \lim_{n\to\infty} \left\| \int_S f_n(s)\,\mathrm{d}s \right\| \leq \lim_{n\to\infty} \int_S \|f_n(s)\|\,\mathrm{d}s \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \int_S \|f_n(s) - f(s)\| + \|f(s)\|\,\mathrm{d}s = \int_S \|f(s)\|\,\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

2) Wir können wie im Beweis von Theorem 4.26 annehmen, dass

$$\|f_n(s)\|_X \leq \frac{3}{2}\|f(s)\|.$$

Damit gilt für $\varphi \in X'$, dass

$$\left\langle \varphi, \int_S f(s)\,\mathrm{d}s \right\rangle = \lim_{n\to\infty} \left\langle \varphi, \int_S f_n(s)\,\mathrm{d}s \right\rangle \underset{\text{endl. Summe}}{=} \lim_{n\to\infty} \int_S \langle \varphi, f_n(s) \rangle\,\mathrm{d}s \underset{\text{Lebesgue}}{=} \int_S \langle \varphi, f(s) \rangle\,\mathrm{d}s$$

□

Bemerkung: Es sei I ein beschränktes Intervall, $f \in C(\overline{I}, X)$. Man kann in diesem Fall zeigen, dass Bochner- und Riemann-Integral von f über I übereinstimmen.

L^p-Räume mit Werten in Banachräumen

Es ist weiterhin X ein separabler Banachraum, $S \subset \mathbb{R}$ offen.

Definition 4.28 Wir bezeichnen mit $L^p(S;X)$ $1 \leq p < \infty$ die Menge aller Bochner-messbaren Funktionen $f : S \to X$, für die gilt

$$\int_S \|f(s)\|^p \,\mathrm{d}s < \infty$$

Die Menge aller Bochner-messbaren Funktionen, für die ein $M > 0$ existiert mit $\|f(s)\|_X \leq M$ f.f.a. $s \in S$ bezeichnen wir mit $L^\infty(S;X)$.

Theorem 4.29 *Die Menge $L^p(S;X)$ $1 \leq p \leq \infty$ bildet einen Banachraum bzgl. der Norm*

$$\|f\|_{L^p(S;X)} = \left(\int_S \|f(s)\|_X^p \,\mathrm{d}s\right)^{1/p} \quad \textit{für } 1 \leq p < \infty$$

bzw.

$$\|f\|_{L^\infty(S;X)} = \operatorname{ess\,sup}_{s\in S} \|f(s)\|_X$$

Beweis: Die Eigenschaften der Norm sind evident.

Vollständigkeit: Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $L^p(S;X)$, also

$$\|f_n(s) - f_k(s)\|_{L^p(S;X)} = \left(\int_S \|f_k(s) - f_n(s)\|_X^p\right)^{1/p} \to 0 \quad (n,k \to \infty)$$

Mit der Dreiecksungleichung in X und dem Satz von Bochner folgt, dass $\|f_n(\cdot)\|_X$ eine Cauchy-Folge in $L^p(S;\mathbb{R})$ ist, der Rest des Beweises folgt dann von reellen L^p-Räumen.

□

Lemma 4.30 *Die Menge der Treppenfunktionen ist dicht in $L^p(S;X)$ $1 \leq p < \infty$.*

Beweis: $p = 1$: Siehe Beweis des Satzes von Bochner.
$p > 1$: Analog zu reellwertigen L^p.

□

Theorem 4.31 (Hölder-Ungleichung) *Sei $f \in L^p(S;X)$, $g \in L^{p'}(S;X')$ (X' Dualraum von X, $1/p + 1/p' = 1$, $1 \leq p \leq \infty$). Dann ist*

$$\langle g(\cdot), f(\cdot)\rangle_X \in L^1(S;\mathbb{R})$$

und es gilt

$$\left|\int_S \langle g(s), f(s)\rangle_X \,\mathrm{d}s\right| \leq \|g\|_{L^{p'}(S;X')} \|f\|_{L^p(S;X)}$$

Beweis: Übungsaufgabe.

□

Theorem 4.32 (Darstellungssatz) *Es sei X ein separabler, reflexiver Banachraum, $1 < p < \infty$. Dann besitzt jedes Funktional*

$$\varphi \in (L^p(S;X))'$$

eine eindeutige Darstellung der Form:

$$\varphi(u) = \int_S \langle v(s), u(s)\rangle_X \,\mathrm{d}s \quad \forall u \in L^p(S;X)$$

mit $v \in L^{p'}(S;X')$ ($1/p + 1/p' = 1$).

Beweis: *4 Schritte:*

1. Sei $t_0 \in S$. Für $t \in S$, $x \in X$ setzen wir

$$u_{t,x}(s) := \begin{cases} x & \text{falls } t_0 \le t \text{ und } t_0 \le s \le t \\ -x & \text{falls } t_0 > t \text{ und } t \le s \le t_0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow\ u_{t,x} \in L^p(S;X)$$

Es sei $\varphi \in (L^p(S;X))'$. Damit ist $\varphi(u_{t,x})$ linear in X und es gilt

$$|\varphi(u_{t,x})| \le \|\varphi\|_{(L^p(S;X))'} \cdot \|u_{t,x}\|_{L^p(S;X)} \le \|\varphi\|_{(L^p(S;X))'} \cdot \|x\| \cdot (t-t_0)^{1/p}.$$

$\varphi(u_{t,x})$ ist also ein stetiges lineares Funktional auf X. Somit existiert für jedes $t \in S$ eine Darstellung

$$\varphi(u_{t,x}) = \langle g(t), x\rangle_X \quad \text{mit } g(t) \in X'$$

Es gilt $g(t_0) = 0$.

2. Es seien $\{S_1, \dots, S_m\}$ nichtleere, disjunkte Teilintervalle der Form $S_L = [t_i, t_i+h_i] \subset S$ $i = 1, \dots, m$. Für $x \in X$ gilt dann

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \langle g(t_i+h_i), x\rangle - \langle g(t_i), x\rangle\right| = \left|\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} (u_{t_i+h_i,x} - u_{t_i,x})\right)\right|$$
$$\le \|\varphi\|_{L^{p'}(S;X')} \cdot \|x\| \cdot \left(\sum_{i=1}^{m} h_i\right)^{1/p}.$$

Wir setzen $z_i := \frac{1}{n_i}(g(t_i+h_i) - g(t_i))$. Es existieren (wegen der Reflexivität von X), $y_i \in X$ mit $\|y_i\|_X = 1$, $\langle z_i, y_i\rangle = \|z_i\|_{X'}$. Wir wählen $x_i = \|z_i\|^{p'-1} y_i$ und es folgt

$$\langle z_i, x_i\rangle = \|z_i\|_{X'}^{p'}$$

Nun sei

$$u(t) := \begin{cases} x_i & \text{für } t \in S_i,\ i = 1, \dots, m \\ 0 & \text{für } t \in S \setminus \bigcup_{i=1}^m S_i \end{cases}$$

Dann gilt

$$u = \sum_{i=1} (u_{t_i+h_i,x_i} - u_{t_i,x_i})$$

Es folgt, dass

$$\|u\|_{L^p(S;X)}^p = \sum_{n=1}^{m} \|x_i\|_X^p h_i = \sum_{i=1}^{m} \|z_i\|_{X'}^{p'} h_i \quad (p(p'-1) = p')$$

Somit folgt

$$\|\varphi\|_{(L^p(S;X))'} \cdot \|u\|_{L^p(S;X)} \ge \varphi(u) = \sum_{i=1}^{m} \langle g(t_i+h_i) - g(t_i), x_i\rangle = \sum_{i=1}^{m} \langle z_i, x_i\rangle\, h_i \ge \sum_{i=1}^{m} \|z_i\|_{X'}^{p'} \cdot h_i$$

Also gilt

$$\|\varphi\|_{(L^p(S;X))'} \ge \left(\sum_{i=1}^{m} \|z_i\|_{X'}^{p'} h_i\right)^{1/p'}$$

und es folgt, dass

$$\|\varphi\|_{(L^p(S;X))'} \geq \sup_{\text{Intervallteilung}} \left(\sum_{i=1}^{m} \underbrace{\left\| \frac{1}{n_i} \big(g(t_i + h_i) - g(t_i)\big) \right\|_X^{p'}}_{z_i} \cdot h_i \right)^{1/p'} \tag{2.5}$$

3. Wir suchen $v \in L^{p'}(S;X')$, so dass

$$g(t) = \int_{t_0}^{t} v(\tau)\, \mathrm{d}\tau$$

Wir können S bis auf eine Nullmenge als Vereinigung abgeschlossener Intervalle darstellen, somit genügt es, die Aussage für $S = [t_0, t_1]$ zu beweisen. Es sei $T = t_1 - t_0$ und wir setzen

$$g_{n,i} = g\big(\underbrace{t_0 + 2^{-n} T\, i}_{(**)}\big) \quad \text{für } i = 0, 1, \ldots, 2^n\ n \in \mathbb{N},$$

und

$$u_n(t) = \frac{1}{2^{-n}T} (g_{n,i+1} - g_{n,i}) \quad \text{für } 2^{-n} T i \leq t - t_0 < 2^{-n} T (i+1)$$

Es gilt wegen (2.5), dass $2^n - 1$

$$\|v_n\|_{L^{p'}(S;X')} = \left(\sum_{i=0}^{2^n - 1} \left\| \frac{1}{2^{-n}T} (g_{n,i+1} - g_{n,i}) \right\|_{X'}^{p'} \cdot 2^{-n} T \right)^{1/p'} \overset{(2.5)}{\leq} \|\varphi\|_{(L^p(S,X))'} \tag{2.6}$$

Wir zeigen nun, dass f.f.a. $t \in S$ die Folge

$$(\|u_n(t)\|_{X'})_{n \in \mathbb{N}}$$

beschränkt bleibt. Es sei $N_0 := \{t \in S : \sup_n \|u_n(t)\|_{X'} = \infty\}$ und

$$S_{r,K} := \{t \in S : \sup_{n \leq r} \|u_n(t)\|_{X'} \geq K\} \quad r, K \in \mathbb{N}.$$

Es gilt $S_{r,K} \subset S_{p,K}$ für $p \geq r$ und

$$N_0 = \bigcap_{K=1}^{\infty} \bigcup_{r=1}^{\infty} S_{r,K}$$

Nachdem u_n sthw. konstant ist, besteht $S_{r,k}$ aus disjunkten Intervallen der For $[t_i, t_i{+}n_i)$ $i = 1, \ldots, m$. Es gilt

$$K^{p'} |S_{r,K}| \leq \sum_{i=1}^{m} \left(\left\| \frac{g(t_i + h_i) - g(t_i)}{h_i} \right\|_X^{p'} h_i \right) \overset{(2.5)}{\leq} \|\varphi\|$$

Nachdem $S_{r,K}$ in r wächst folgt

$$K^{p'} \left| \bigcup_r S_{r,K} \right| \leq \|\varphi\|_{L^p(S;X)'}$$

$$\Rightarrow |N_0| = \left| \bigcap_K \bigcup_r S_{r,K} \right| \leq \inf_K \left| \bigcup_r S_{r,K} \right| = 0$$

Nun sei $\{z_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ dicht in X und wir definieren

$$a_j(t) = \langle g(t), z_j \rangle \quad t \in S$$

$$b_{j,u}(t) = \langle u_n(t), z_j \rangle \quad t \in S$$

Es gilt $b_{j,n} \in L^{p'}(S;\mathbb{R})$ mit gleichmäßiger beschränkter Norm.

$$\|b_j^n\|_{L^{p'}(S;\mathbb{R})}^{p'} = \int_S |\langle u_n(\tau), z_j \rangle|^{p'} \leq \int_S \|u_n\|_X^{p'} \cdot \|z_j\|_X^{p'} \leq \|z_j\|_X^{p'} \|u_n\|_{L^{p'}(S;X')}$$

Wir können somit sukzessive eine Teilfolge auswählen, so dass für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt

$$b_j^n \rightharpoonup b_j \in L^{p'}(S;\mathbb{R}).$$

Behauptung 1: $\forall t \in S$ gilt

$$\int_{t_0}^t b_j(\tau)\,\mathrm{d}\tau = a_j(t).$$

Beweis: Es sei $\{\tilde{S}_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{t_{n,i}\}_{n\in\mathbb{N}}$, $i \in \{0,\ldots,2^n\}$, die Menge aller Punkte, welche durch die Intevallteilung $(**)$ erreicht werden. Offensichtlich liegt $\{\tilde{S}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dicht in S. Nun sei $\tilde{t} \in S_n$, damit gilt $\tilde{t} \in S_m$ $\forall m \geq n$. Es gilt für $m \geq n$

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{\tilde{t}} b_{m,j}(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_{t_0}^{\tilde{t}} \langle u_m, z_j \rangle &= \sum_{i=1}^{2^m \frac{\tilde{t}}{T}} \frac{1}{2^{-m}T} \langle g_{m,i+1} - g_{m,i}, z_j \rangle \cdot 2^{-m}T \\
&= \left\langle g_{m,2^m \frac{\tilde{t}}{T}}, z_j \right\rangle = \langle g(t_0 + \tilde{t}), z_j \rangle = a_j(\tilde{t})
\end{aligned}$$

Aber wegen $b_n^j \rightharpoonup b_j$ weil $\chi_{(0,\tilde{t})}$ eine Testfunktion in $L^p(S;\mathbb{R})$ ist, gilt

$$\int_{t_0}^{\tilde{t}} b_j(\tau)\,\mathrm{d}\tau = a_j(\tau)$$

Mit Stetigkeit von $a_j(t)$ und von $\int_{t_0}^t b_j(\tau)\,\mathrm{d}\tau$ folgt die Behauptung.

□

Behauptung 2: Es gilt in diesem Fall (d.h. $a_j(t) = \int_{t_0}^t b_j(\tau)\,\mathrm{d}\tau$ f.f.a $t \in S$, und $b_j \in L^1([t_0, t_1);\mathbb{R})$) dass a_j fast überall differenzierbar ist und

$$b_j(t) = a_j'(t) \quad \forall t \in S \setminus N_j,\ |N_j| = 0.$$

Beweis: Übungsaufgabe.

□

Nun sei $t \in S \setminus \bigcup_{j=0}^\infty N_j$ und $i_n \in \mathbb{N}$ sei für $n \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass gilt $2^{-n}T i_n \leq t - t_0 < 2^{-n}T(i_n + 1)$. Dann folgt:

$$\lim_{n\to\infty} b_{j,n} = \lim_{n\to\infty} \langle u_n(t), z_j \rangle = \lim_{n\to\infty} \left\langle \frac{1}{2^{-m}T}(g_{n,i_n+1} - g_{n,i_n}), z_j \right\rangle = a_j'(t).$$

Damit folgt aber, dass $\forall t \in S \setminus \bigcup_{j=0}^\infty N_j$ gilt

$$u_n(t) \rightharpoonup v(t) \quad \text{in } X'.$$

Für $t \in \underbrace{\bigcup_{i=0}^\infty N_j}_{\text{Nullmenge}}$ setzen wir $v(t) = 0$. Die so definierte Funktion $v : S \to X'$ ist Bochner-messbar (als Limes von Treppenfunktionen) und es gilt für $t \in S$, dass

$$\|u(t)\|_{W'} \leq \liminf_{n\to\infty} \|v_n(t)\|_{X'}$$

Daraus und aus (2.6) folgt mit Fatou, dass

$$\|u\|_{L^{p'}(S;X')}^{p'} \leq \liminf \int_S \|u_n(t)\|_{X'}^{p'} \leq \|\varphi\|_{(L^p(S;X))'} \tag{2.7}$$

Also ist $u \in L^{p'}(S;X')$. Wegen Behauptung 1 gilt für alle $j \in \mathbb{N}$, dass

$$\langle g(t), z_j\rangle = a_j(t) = \int_{t_0}^t a_j'(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_{t_0}^t \lim_{n\to\infty} \langle u_n(\tau), z_j\rangle\,\mathrm{d}\tau = \int_{t_0}^t \langle u(\tau), z_j\rangle\,\mathrm{d}\tau = \left\langle \int_{t_0}^t u_(\tau)\,\mathrm{d}\tau, z_j\right\rangle.$$

Also ist

$$g(t) = \int_{t_0}^t u(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

4. Es sei nun u eine Treppenfunktion aus $L^p(S;X)$ auf einer endlichen Menge von Intevallen, also

$$u(t) = \begin{cases} x_i & \text{für } s_i < t \leq t_i,\ i = 1,\dots,m \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Damit folgt sofort

$$\begin{aligned}\varphi(u) &= \varphi\left(\sum_{i=1}^m (u_{t_i,x_i} - u_{s_i,x_i})\right) = \sum_{i=1}^m \langle g(t_i) - g(s_i), x_i\rangle \\ &= \sum_{i=1}^m \left\langle \int_{s_i}^{t_i} u(t)\,\mathrm{d}t, x_i\right\rangle = \sum_{i=1}^m \int_{s_i}^{t_i} \langle v(t), u(t)\rangle\end{aligned}$$

Nachdem diese Treppenfunktionen dicht liegen in $L^p(S;X)$ und dank *Hölder'scher Ungleichung* die Abbildung

$$u \mapsto \int_S \langle v(t), u(t)\rangle\,\mathrm{d}t$$

stetig ist bzgl. $u \in L^p(S;X)$ gilt

$$\varphi(u) = \int_S \langle v(t), u(t)\rangle\,\mathrm{d}t \quad \forall u \in L^p(S;X)$$

Wegen *Hölder* gilt ebenfalls, dass

$$\|\varphi\|_{(L^p(S;X))'} \leq \|v\|_{L^{p'}(S;X')}.$$

Mit (2.7) folgt also

$$\|\varphi\|_{(L^p(S;X))'} = \|v\|_{L^{p'}(S;X')}.$$

Eindeutigkeit der Darstellung folgt dann daraus, dass wegen Normgleichheit das Nullfunktional $\varphi = 0$ nur durch die Nullfunktion $v = 0$ dargestellt werden kann.

□

Bemerkung: Die Zuordnung $T : \varphi \mapsto v$.

$$T : (L^p(S;X))' \to L^{p'}(S;X')$$

ist eine lineare, surjektive Isometrie.

Bemerkung: Mit einigen kleinen Änderungen funktioniert der Beweis auch für X nur separabel. Mit weiteren kleinen Änderungen funktioniert der Beweis auch für

$$\varphi \in (L^1(S;X))'.$$

Die Funktion v ist dann in $L^\infty(S;X)$.

Bemerkung: Der Satz gilt auch für X nur reflexiv. Der Beweis ist dann aufwendiger. Im Allgemeinen gilt der Satz, wenn X die sog. *Radon-Nilkodyn Eigenschaft* besitzt.

Bemerkung: $C_c^\infty((0,T);X)$ liegen dicht in $L^p((0,T);X)$ für $1 \leq p < \infty$. Siehe Übungsaufgabe.

Gelfand-Tripel

Wir betrachten als Beispiel zunächst die Wäremleitungsgleichung auf $I \times \Omega$, $I = (0,T)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt. Sei u also eine glatte Lösung von

$$\begin{aligned} \partial_t u - \Delta u &= f \quad \text{in } I \times \Omega \\ u &= 0 \quad \text{auf } I \times \partial\Omega \\ u(0) &= u_0 \quad \text{in } \Omega \end{aligned}$$

Die Funktion u erfüllt dann auch die schwache Formulierung, d.h. für alle $\varphi \in L^2(F; W_0^{1,2}(\Omega))$ gilt:

$$\iint_{I,\Omega} \partial_t u\varphi + \iint_{I,\Omega} \nabla u \cdot \nabla\varphi = \iint_{I,\Omega} f \cdot \varphi \tag{2.8}$$

Mit der Wahl $\varphi = u$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \iint_{I,\Omega} \frac{\partial}{\partial t}\frac{u^2}{2} + \underbrace{\|u\|^2_{L^2(I;W_0^{1,2}(\Omega))}}_{=\iint_{I,\Omega}|\nabla u|^2} &\le \|f\|_{L^2(I;L^2(\Omega))} \cdot \|u\|_{L^2(I;L^2(\Omega))} \\ &\le \frac{1}{2}\|f\|^2_{L^2(I;L^2(\Omega))} + \frac{1}{2}\|u\|^2_{L^2(I;L^2(\Omega))} \\ \Rightarrow \int_I \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\|u\|^2_{L^2}}{2} + \|u\|^2_{L^2(I,W_0^{1,2}(\Omega))} &\le \frac{1}{2}\left(\|f\|^2_{L^2(I;L^2(\Omega))} + \|u\|^2_{L^2(I,L^2(\Omega))}\right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|u\|^2_{L^\infty(I,L^2(\Omega))} + 2\|u\|_{L^2(I;W_0^{1,2}(\Omega))} \le \left(\|f\|^2_{L^2(I;L^2(\Omega))} + \|u_0\|^2_{L^2(I;L^2(\Omega))}\right) \tag{2.9}$$

Mit (2.8) folgt aber auch, dass

$$\iint_{I,\Omega} u_t \cdot \varphi = \int_I -(u,\varphi)_{W_0^{1,2}} + \int_I (f,\varphi)_{L^2}$$

Das heißt, dass u_t kanonisch mit einem Element von $(W_0^{1,2}(\Omega))'$ identifiziert werden kann. Die Abschätzung ergibt mit Hilfe von (2.9), dass

$$\|u_t\|_{L^2(I;W_0^{1,2}(\Omega)')} \le \tilde{c}(\|f\|^2_{L^2(I;L^2(\Omega))} + \|u_0\|^2_{L^2(I;L^2(\Omega))})$$

Wir schreiben damit dass $u_t = \Delta u + f \in (W_0^{1,2}(\Omega))' =: W_0^{-1,2}(\Omega)$ (punktweise f.ü.). Aber: u_t ist als Funktion *nicht* durch Anfangswert und f in $W_0^{1,2}(\Omega)$ beschränkt. Es ist in diesem Fall günstig, die sog. *Gelfand-Tripel* einzuführen.
Es sei V ein reflexiver, separabler Banachraum, dicht und stetig eingebettet in einen Hilbertraum H. Damit ist durch jedes stetige Funktional $f \in H'$ ein stetiges Funktional auf V definiert:

$$\langle f, v\rangle_V := (f,v)_H$$

Damit gilt $H' \hookrightarrow V'$ stetig. Mittels dem *Riesz'schen Darstellungssatz* identifizieren wir nun H' mit H und erhalten

$$V \hookrightarrow H \hookrightarrow V'$$

stetig.
$\rightsquigarrow$ Definiert einen Operator $T : H' \to V'$, einfach als Einschränkung der Funktionale aus H'. Es gilt:

i) $\|T\varphi\|_{V'} \le C\|\varphi\|_{H'}$

ii) T ist injektiv.

iii) $T(H)$ liegt dicht in V', da V reflexiv ist.

Die Skalarprodukte $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ und $(\cdot, \cdot)_H$ sitmmen überein, falls beide Sinn ergeben, d.h.

$$\langle f, v \rangle_V = (f, v)_H \quad \forall f \in H, \forall v \in V,$$

wobei wir von nun an Tf mit f identifizieren. Falls nun V ebenfalls ein Hilbertraum ist, ergibt es keinen Sinn, V mit V' zu identifizieren. Dazu ein einfaches

Beispiel: Es sei

$$H = l^2 = \left\{ u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} : \sum_{i=1}^{\infty} a_i < \infty \right\}$$

mit Skalarprodukt

$$(u, v)_H = \sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n \quad \forall u, v \in l^2$$

und sei

$$V := \left\{ u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} n^2 u_n^2 < \infty \right\}$$

mit Skalarprodukt

$$((u, v))_V := \sum_{n=1}^{\infty} n^2 u_n v_n.$$

Es gilt $V \hookrightarrow H$ stetig, dicht. Wir identifizieren, H und H', und identifizieren damit aber V' mit dem Raum

$$V' = \left\{ f = (f_n)_{n \in \mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} f_n^2 < \infty \right\}$$

Das Dualitätsprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ ist damit gegeben durch

$$\langle f, v \rangle_V = \sum_{n=1}^{\infty} f_n v_n.$$

Der Isomorphismus $T : V \to V'$ ist damit gegeben durch die Abbildung

$$u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto Tu = (n^2 u_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

Die verallgemeinerte Zeitableitung und ihre Eigenschaften

(siehe *Zeidler, Nonlinear Funktional Analysis and its Applications II A*)

Wir erinnern uns: $C^1(I; X)$, $I = [0, T]$ ist der Raum der stetigen Fréchet-differenzierbaren Abbildungen $u : I \to X$, X ein Banachraum. Die Ableitung $u' : I \to \mathscr{L}(\mathbb{R}, X)$ identifizieren wir für jedes $t \in I$ mit einem Element in X.

Definition 4.33 (Verallgemeinerte Zeitableitung) Es sei $u \in L^p(I, V)$, $1 < p < \infty$ und (V, H, V') ein Gelfand-Triplet. Eine Funktion

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \in L^{p'}(I; V')$$

heißt *verallgemeinerte Zeitableitung* von u, falls gilt

$$\int_0^T \left\langle \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t), v \right\rangle_V \varphi(t) \, \mathrm{d}t = -\int_0^T (u(t), v)_H \varphi'(t) \, \mathrm{d}t \quad \forall v \in V, \ \forall \varphi \in C_c^{\infty}(I, \mathbb{R}).$$

Bemerkung: Im Allgemeinen ist die verallgemeinerte Zeitableitung nicht mit der schwachen Zeitableitung einer Funktion $u : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ überein. Identität gilt jedoch durchaus, falls $C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ dicht in V liegt.

Bemerkung: Für $u \in C^1([0,T], X)$ stimmen starke und verallgemeinerte Zeitableitung überein.

Notation: Im Folgenden bezeichnen wir mit W den Raum:

$$W := \left\{ u \in L^p(I, V) : \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \in L^{p'}(I; V') \right\}$$

mit

$$\|u\|_W := \|u\|_{L^p(I;V)} + \left\| \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \right\|_{L^{p'}(I;V)}$$

Proposition 4.34 *W ist ein Banachraum.*

Beweis: Alle Eigenschaften außer der Vollständigkeit sind klar. Diese folgt mit:

Proposition 4.35 *Es sei (V, H, V') ein Gelfand-Tripel und*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_k = v_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

mit

$$\begin{aligned} u_k &\rightharpoonup u \quad L^p(I;V) \quad (k \to \infty) \\ v_k &\rightharpoonup v \quad L^{p'}(I;V') \quad (k \to \infty) \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u = v,$$

wobei $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u$ die verallgemeinerte Zeitableitung bezeichne.

Beweis: Falls A, B Banachräume, $A \hookrightarrow B$ stetig, so gilt

$$a_k \rightharpoonup a \text{ in } A \quad \Rightarrow \quad a_k \rightharpoonup a \text{ in } B.$$

Es folgt in unserem Fall, dass

$$u_k \rightharpoonup u, \quad v_k \rightharpoonup v \quad \text{in } L^1(I;V').$$

Offensichtlich ist aber $\varphi \cdot v$, $\varphi \in C_c^\infty(I;\mathbb{R})$ $v \in V$ eine geeignete Testfunktion in $L^1(I, V')$. Im Limes folgt die Behauptung.

□

□

Proposition 4.36 *Der Raum $C^1(\bar{I}; V)$ liegt dicht in W.*

Beweis: Folgt wie globale Approximation von Sobolev-Funktionen. Es sei

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} u(t) & t \in I \\ u(-t) & t \in (-\tau, 0) \\ u(T-t) & t \in (T, T+\tau) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und es sei $\eta_n(t)$ eine Standard-Diracfolge. Wir betrachten

$$u_n(t) = \int_{\mathbb{R}} \eta_n(t-s)\tilde{u}(s)\,\mathrm{d}s.$$

Es gilt $u_n(t) \in C^1(\bar{I};V)$ und es gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tilde{u}_n = \int_{\mathbb{R}} \eta_n'(t-s)\tilde{u}(s)\,\mathrm{d}s = \int_{\mathbb{R}} \eta_n(t-s)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(s)\,\mathrm{d}s \quad \forall t \in I$$

Die Konvergenz von $u_n \to u$ in $L^p(I;V)$ und von $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_n := v_n \to v$ in $L^{p'}(I;V')$ folgt wie im skalarwertigen Fall. Mit Benutzung von Proposition 4.35 folgt $v = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u$ und somit die Behauptung.

□

Proposition 4.37 *Es gilt*

$$W \hookrightarrow C(\bar{I};V')$$

stetig.

Beweis: Es sei $u \in W$. Damit ist $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u \in L^{p'}(I;V')$ eine lokal integrierbare Funktion. Wir definieren

$$v(t) = \int_0^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(\tau)\,\mathrm{d}\tau,$$

mit $\|v(t)-v(s)\|_{V'} \le \int_0^t \|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(\tau)\|_{V'}$. Somit ist $v(t) \in C(\bar{I};V')$. Wie im skalaren Fall folgt, dass

$$v(t) = u(t) + c \quad \text{mit}\, c \in V' \text{ f.f.a. } t \in I.$$

Damit ist auch u stetig. Mit Hölder folgt

$$\|v(t)\| \le T^{1/p}\left\|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u\right\|_{L^{p'}(I;V')}$$
$$\|c\|_{V'} \le T^{-1/p}\|u-v\|_{L^p(I;V)}$$

Damit gilt aber

$$\max \|u(t)\|_{V'} \le C\cdot\left(\|u'\|_{L^{p'}(I;V)} + \|u-v\|_{L^{p'}(I;V)}\right) \le \tilde{C}\|u\|_W$$ □

Es folgt das wichtige Einbettungslemma

Lemma 4.38 *Es sei (V,H,V') ein Gelfand-Tripel, W der Funktionenraum wie oben. Dann gilt*

$$W \hookrightarrow C(\overline{C};H)$$

und für alle $u,v \in W$, $s.t \in \bar{I}$ gilt

$$\int_s^t \langle\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(\tau),v(t)\rangle_V + \langle\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(\tau),u(\tau)\rangle_V\,\mathrm{d}\tau = (u(t),v(t))_H - (u(s),v(s))_H \tag{2.10}$$

Beweis: 1) Es seies zunächst $u,v \in C(\bar{I};V)$. Es gilt

$$(u(t),v(t))_H' = (u'(t),v(t))_H + (u(t),v'(t))_H$$
$$\Rightarrow\ (u(t),v(t))_H - (u(s),v(s))_H = \int_s^t (u',v)_H + (u,v')_H \overset{\text{Gelfand-Tri.}}{=} \int_s^t \langle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u,v\rangle_V + \langle u,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v\rangle_V$$

2) Es sei nun $\varphi \in C^1(\bar{I}, \mathbb{R})$, mit $\varphi(a) = 0$, $\varphi(b) = 1$ mit $0 < a < b < T$ und $u \in C^1(\bar{I}; V)$. Wir setzen $v = \varphi u$, $w = u - \varphi u$. Es gilt

$$\begin{aligned} v' &= \varphi' u + \varphi u' \\ w' &= u' - \varphi' u - \varphi u' \end{aligned}$$

Nachdem 2.10 bereits für $u, v, w \in C^1(\bar{I}; V)$ gilt, (Schritt 1) folgt

$$\begin{aligned} (v(t), u(t))_H &= \int_a^t \{\varphi'(s)(u(s), u(s))_H + 2\varphi\langle u'(s), u(s)\rangle_V\} \,\mathrm{d}s \\ (-w(t), u(t))_H &= \int_t^b \{-\varphi(s)(u(s), u(s))_H + 2(1-\varphi(s))\langle u'(s), u(s)\rangle\} \,\mathrm{d}s \end{aligned}$$

Durch Subtraktion der beiden Gleichungen erhalten wir

$$\|u(t)\|_H^2 = \int_a^b \{\varphi'(s)(u(s), u(s)) + 2\varphi(s)\langle u'(s), u(s)\rangle_V\} \,\mathrm{d}s = 2\int_a^b \langle u'(s), u(s)\rangle_V \,\mathrm{d}s.$$

Somit folgt

$$\|u(t)\|_H^2 \le K\left(\|u\|_{C(\bar{I};V)} \cdot \|u\|_{L^p(I;V)} + \left\|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u\right\|_{L^{p'}(I;V')} \cdot \|u\|_{L^p(I;V)}\right) \le K\|u\|_W^2,$$

wegen stetiger Einbettung von W in $C(\bar{I}; V')$.

3) Nun sei u_n eine Cauchy-Folge in $C(I, V)$, diegegen $u \in W$ konvergiert. Es gilt

$$\|u_n - u_k\|_{C(\bar{I};H)} \le K\|u_n - u_k\|_W \quad \text{(Schritt 2)}$$

Damit konvergiert die Folge auch in $C(\bar{I}; H)$ gegen u. Die Normabschätzung bleibt im Limes erhalten, ebenso die Formel für die prtielle Integration 2.10.

□

Bemerkung: i) 2.10 ist analog zur reellwertigen partiellen Integrartion, $u, v : I \to \mathbb{R}$,

$$\int_s^t u'(\tau)v(\tau) + u(\tau)v'(\tau) \,\mathrm{d}\tau = u(t)v(t) - u(s)v(s)$$

ii) Für $u = v \in W$ folgt

$$\int_s^t \langle \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(\tau), u(\tau)\rangle_V \,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}\|u(t)\|_H^2 - \frac{1}{2}\|u(s)\|_H^2$$

Das Anfangswertproblem, Existenz

Wir betrachten das Problem

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + Au &= b \\ u(0) &= u_0 \end{aligned}$$

und wollen eine Variante des *Satzes von Brézis* beweisen.
Es sei also $A : V \to V'$ ein Operator auf einen separablen, reflexiven Banachraum V. Es sei $u \in L^p(I; V)$, $1 < p < \infty$, $I = (0, T)$, $T < \infty$. Wir betrachten den induzierten Operator

$$(\tilde{A}u)(t) := A(u(t)), \quad t \in I.$$

Unter bestimmeten Voraussetzungen gilt für den induzierten Operator, dass

$$\tilde{A} : L^p(I;V) \to L^{p'}(I;V') = (L^p(I;V))'$$

ist. In diesem Fall identifizieren wir A mit $\tilde{A}$. Im Folgenden sei nun $X := L^p(I;V)$, $I = (0,T)$, $T < \infty$, $1 < p < \infty$, $W' = L^{p'}(I;V) = (L^p(I;V))'$, (V,H,V') sei ein Gelfand-Tripel.

Theorem 4.39 *[Existenz von Lösungen für das Cauchy-Problem] Es sei $A : V \to V'$ ein Operator, so dass der induzierte Operator $A : X \to X'$ pseudomonoton und beschränkt ist, sowie der Koerzitivitätsbedingung*

$$\langle Au, u\rangle_X \geq C_0 \cdot \|u\|_x^p$$

genügt. Dann existiert für alle $u_0 \in H$, $b \in X'$ eine Lösung $u \in W$ von

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + Au = b$$

Bemerkung: Die Anfangswertbedingug ergibt wegen der Einbettung

$$W \hookrightarrow C(\bar{I};H)$$

Sinn.

Beweis: Dieser Beweis verläuft ähnlich dem Existenzbeweis für schwache Lösungen der Wärmeleitungsgleichung. Siehe z.B. *Evans: Partial Differential Equations, Chapter 7*.
Wir benutzen wieder das Galerkin-Verfahren. Es sei also $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset V$, so dass $\{w_i\}_{i=1}^n$ linear unabhängig sind und $\operatorname{span}\{w_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ dicht liegt in V. Wir setzen $V_n = \operatorname{span}\{w_i\}_{i=1}^n$ und suchen eine Lösung u_n der Form

$$u_n(t) = \sum_{k=1}^n C_k^n(t) w_k,$$

die für alle $t \in [0,T]$ das Galerkin-System.

$$\left.\begin{aligned} \left\langle \tfrac{\mathrm{d}u_n}{\mathrm{d}t}(t), w_j \right\rangle_V + \langle Au_n(t), w_j\rangle_V &= \langle b_n(t), w_j\rangle \\ u_n(0) &= u_0^n \end{aligned}\right\} \tag{2.11}$$

für alle $j = 1,\dots,n$ löst. Hier ist

$$\begin{cases} b_n & \in C(\bar{I};V') \\ b_n \to b & \text{in } X' \end{cases}$$

Eine solche Folge existiert wegen Dichtheit von $C_c^\infty(\bar{I};V')$ und

$$u_0^n = \sum_{k=1}^n C_{0k}^n w_i \in V_n,$$

so dass $u_0^n \to u_0$ in H.

1) Lösbarkeit des Galerkin-Systems. Aufgrund der linearen Unabhängigkeit der $\{w_i\}_{i=1}^n$ ist die Matrix $D = (d_{ij})_{i,j=1}^n = ((w_i,w_j)_H)_{i,j=1}^n$ invertierbar. Somit können wir 2.11 schreiben als System gewöhnlicher Differentialgleichungen für die Funktion

$$\begin{aligned} t \mapsto C^n(t) &= \begin{pmatrix} C_1^n(t) & \cdots & C_n^n(t) \end{pmatrix} \\ \frac{\mathrm{d}C^n(t)}{\mathrm{d}t} &= f^n(t, C^n(t)) \\ C^n(0) &= C_0^n \end{aligned}$$

Wobei

$$f_j^n(t,C) = \sum_{k=1}^n d_{jk}^{-1}(\langle b_n(t), w_k\rangle_V - \langle A(\sum_{l=1}^n C_l^n w_l), w_k\rangle_V)$$

für $j = 1,\dots,n$ und $C_0^n = (C_{01}^n,\dots,C_{0n}^n)$ Nun ist A demistetig (als Operator $A : V \to V$), da A pseudomonoton und beschränkt (Lemma 4.16), $b \in C(\bar{I}; V')$. Damit ist $f^n : \bar{I}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Abbildung. Nun die Lösbarkeit von (2.11) auf $[0,T]$ zu zeigen, benötigen wir noch eine *a priori* Abschätzung:

Behauptung:

$$\left.\begin{array}{lrl} i) & \|u_n\|_{C(\bar{I};H)}^2 + \|u_n\|_X^p & \le c(b,u_0) \\ ii) & \|Au_n\|_{X'} & \le c(b,u_0) \end{array}\right\} \tag{2.12}$$

unabhängig von n.

Beweis: Sei also $u_n \in C^1(\bar{I}; V_n)$ eine Lösung von 2.11. Wir multiplizieren die j-te Gleichung in (2.11) mit $C_j^n(t)$, summieren über j, und integriere von 0 bis $t \le T$. Mit (2.10) folgt

$$\frac{1}{2}\|u_n(t)\|_H^2 - \cancel{\frac{1}{2}\|u_0^n\|_H^2} + c_0\int_0^t \|u_n(s)\|_V^p\,\mathrm{d}s \le \int_b^t \|b_n(s)\|_{V'}\|u_n(s)\|_V\,\mathrm{d}s + \frac{1}{2}\|u_0\|_H^2$$

$$\overset{\text{Young}}{\le} \frac{1}{2}\|u_0^n\|_H^2 + c(u_0,p)\int_0^T \|b_n\|_{V'}^p\,\mathrm{d}s + \frac{c_0}{2}\int_0^t \|u_n(s)\|_V^p\,\mathrm{d}s$$

Es gilt aber $u_0^n \to u_0$ in H, $b_n \to b_0$ in X', somit folgt (2.12 i). Wegen der Beschränktheit. Wegen der Beschränktheit von A folgt auch (2.12 ii). Damit ist die Behauptung bewiesen.

□

Aus (2.12 i) folgt, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ eine Konstante $c_1(b,u_0,u)$ existiert mit

$$|c^n(t)| \le c_1 \quad \forall t \in \bar{I}$$

Wir setzen

$$K := \sup_{\bar{I}\times B_{2c_1}(0)} |f^n|$$

und erhalten mit Hilfe des *Satzes von Peano* die Lösbarkeit des Galerkin-Systems auf dem Intervall $[0, \min(T, \frac{2c_1}{K})]$. Diese Lösung lässt sich auf ganz I fortsetzen, da das Existenzintervall nur von n, b,u_0 abhängt. Damit ist das Galerkin-System für alle n auf ganz I (modulo „Klebepunkte" der lokalen Lösung) lösbar, und u_n erfüllt die *a priori* Abschätzung (2.12 i).

2) Konvergenz des Galerkin-Verfahrens: Aus (2.12 i) folgt für Teilfolgen von u_n, dass

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u && \text{in } X \\ Au_n &\rightharpoonup \xi && \text{in } X' \\ u_n(T) &\rightharpoonup u^* && \text{in } H \end{aligned}$$

Es sei nun $w \in \bigcup_{k=1}^\infty V_k$, somit $w \in V_{k_0}$. Aus der Galerkin-Gleichung erhalten wir für alle $n \ge n_0$

$$\left\langle \frac{d - u_n(t)}{\mathrm{d}t}, w \right\rangle_V + \langle Au_n(t), w\rangle = \langle b_n(t), w\rangle_V$$

Wir multiplizieren mit $\varphi \in C^1(\bar{I},\mathbb{R})$ und integrieren in der Zeit. Es folgt mit (2.11), dass

$$-\int_0^T (u_n(t),w)_H\varphi'(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^T \langle Au_n, w\rangle_V\varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T \langle b_n(t), w\rangle_V\varphi(t)\,\mathrm{d}t - (u_n(T),w)_H\varphi(T) + (u_0^n,w)_H\varphi(0).$$

Wegen schwacher Konvergenz von u_n, Au_n, $u_n(T)$ und starker Konvergenz von u_0^n, b_n folgt

$$-\int_0^T (u(t),w)_H\varphi'(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^T \langle\xi,w\rangle_V\varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T \langle b(t),w\rangle_V\varphi(t)\,\mathrm{d}t - (u^*,w)_H\varphi(T) + (u_0,w)_H\varphi(0). \tag{2.13}$$

Wegen Dichtheit von $\bigcup_{k=1}^\infty V_k$ in V gilt (2.13) auch für *alle* $w \in V$ und für alle $\varphi \in C^1(\bar{I}.\mathbb{R})$, also insbesondere auch für $\varphi \in C_c^\infty(I,\mathbb{R})$. Nach der Definintion der verallgemeinerten Zeitableitung gilt damit

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = b - \xi \in X' \tag{2.14}$$

und somit $u \in W$. Aus (2.10) und (2.14) folgt mit $v(t) = \varphi(t)w$, dass

$$\int_0^T (u(t),w)_H\varphi' + \langle b-\xi,w\rangle_V\varphi(t)\,\mathrm{d}t = (u(T),w)_H\varphi(T) - (u(0),w)_H\varphi(0)$$

Wir ziehen diese Gleichung von (2.13) ab und erhalten

$$(u(T),w)_H\varphi(T) - (u(0),w)_H\varphi(0) = (u^*,w)_H\varphi(T) - (u_0,w)_H\varphi(0),$$

also folgt $u(T) = u^*$, $u(0) = u_0$. Es bleibt noch zu zeigen, dass $Au = \xi$. Wir multiplizieren nun die j-te Gleichung im Galerkin-System mit C_j^m und summieren. Dann integrieren wir die Gleichung über I. Mit (2.10) folgt

$$\int_0^T \langle Au_n,u_n\rangle\,\mathrm{d}t = \int_0^T \langle b_n,u_n\rangle\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\|u_n(T)\|_H^2$$

Es gilt $b_n \to b$ in X', $u_n(T) \rightharpoonup u(T)$ und $u_n(0) \rightharpoonup u_0$. Mit der schwachen Unterhalbstetigkeit von Normen folgt, dass

$$\limsup_{n\to\infty}\int_0^T \langle Au_n,u_n\rangle\,\mathrm{d}t \le \int_0^T \langle b,u\rangle\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\|u(T)\|_H^2 + \frac{1}{2}\|u(0)\|_H^2$$

Ebenfalls gilt, dass

$$-\frac{1}{2}\|u(T)\|_H^2 + \frac{1}{2}\|u(0)\|_H^2 \overset{(2.10)}{=} -\int_0^T \left\langle \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t},u\right\rangle\,\mathrm{d}t \overset{(2.14)}{=} \int_0^T \langle\xi-b,u\rangle\,\mathrm{d}t.$$

Somit folgt, dass

$$\limsup_{n\to\infty}\int_0^T \langle Au_n,u_n\rangle\,\mathrm{d}t \le \int_0^T \langle\xi,u\rangle\,\mathrm{d}t.$$

Nachdem A pseudomonoton ist und somit der Bedingung (M) genügt, folgt

$$Au = \xi.$$

Damit ist u eine Lösung der Evolutionsgleichung.

□

Lemma 4.40 *Es sei V ein separabler Banachraum $A : V \to V'$ ein demistetiger Operator, welcher der Wachstumsbedingung $\|Au\|_{V'} \le c\|u\|_V^{p-1}$ für $p > 1$ genügt. Der induzierte Operator $\tilde{A}$, definiert durch*

$$(\tilde{A}u)(t) = A(u(t))$$

bildet dann den Raum $L^p(I;V)$ in den Dualraum $L^{p'}(I;V')$ ab und ist beschränkt und demistetig.

Beweis: 1) Messbarkeit von $\tilde{A}u$. Wir approximieren u durch f.ü. stark konvergente Treppenfunktionen $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Damit konvergiert $\tilde{A}u_n$ wegen Demistetigkeit von A schwach gegen $\tilde{A}u$ f.f.a. $t \in I$. Bochner-Messbarkeit von $\tilde{A}u$ folgt mit Korollar 4.25 (zum *Satz von Pettis*).

2) $\tilde{A} : L^p(I;V) \to L^{p'}(I;V')$ ist beschränkt. Sei $u \in L^p(I;V)$. Die Funktion

$$t \mapsto \|(\tilde{A}u)(t)\|_{V'}$$

ist Lebesgue-messbar und es gilt wegen der Wachstumsbedingung $\|(\tilde{A}u)(t)\|_{V'}^{p'} \le c\|u(t)\|_V^p$. Es folgt, dass $\|\tilde{A}u\|_{L^{p'}(I;V)} \le c\|u\|_{L^p(I;V)}^{p-1}$.

3) Die Demistetigkeit: Es sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $L^p(I;V)$, die stark konvergiert, so dass

$$\int_I \|u_n - u\|_V^p \,\mathrm{d}t \to 0 \quad (n \to \infty)$$

Damit existiert eine f.ü. konvergente Teilfolge (wieder mit n indiziert). Für fast alle $t \in I$ gilt somit $\tilde{A}u_n(t) \rightharpoonup \tilde{A}u(t)$. Sei dann $\varphi L^p(I;V) = (L^{p'}(I;V'))'$, dann gilt f.f.a. $t \in I$

$$\langle \tilde{A}u_n(t), \varphi(t)\rangle_V \to \langle \tilde{A}u(t), \varphi(t)\rangle_V$$

Mit der Wachstumsbedingung und der *Young'schen Ungleichung* folgt, dass

$$|\langle \tilde{A}u_n(t), \varphi(t)\rangle_V| \le c\left(\|u_n(t)\| + \|\varphi(t)\|_V^p\right)$$

wobei die rechte Seite punktweise f.ü. konvergiert und in $L^1(I)$ gegen $c(\|u\|_V^p + \|\varphi\|_V^p)$. Mit majorisierter Konvergenz folgt

$$\int_I \langle \tilde{A}u_k(t), \varphi(t)\rangle \,\mathrm{d}t \to \int_I \langle \tilde{A}u(t), \varphi(t)\rangle_V \,\mathrm{d}t \quad \forall \varphi \in L^p(I;V)$$

Damit konvergiert $\tilde{A}u_n$ schwach gegen $\tilde{A}u$, zunächst nun für eine Teilfolge. Die Konvergenz für die Originalfolge folgt mit dem üblichen Teilfolgen von Teilfolgen Argument.

□

Beispiel: Quasilineare parabolische Gleichung, die p-Laplace Evolutionsgleichung.

Wir betrachten die

$$\begin{aligned} \partial_t u - \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right) + su = f \quad &\text{in } I \times \Omega \\ u = 0 \quad & I \times \partial\Omega \\ u(0) = u_0 \quad & \Omega \end{aligned}$$

$1 < p < \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt, $I = (0,T)$ endliche Zeitintervall, $s \ge 0$. Wir setzen $V := W_0^{1,p}(\Omega)$ mit $\|u\|_V = \int_\Omega |\nabla u|^p$, $H = L^2(\Omega)$. Damit ist (V, H, V') ein Gelfand-Tripel für $p \ge \frac{2n}{n+2}$. Wir betrachten den Operator

$$\langle Au, u\rangle_V = \int \Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla v + suv \,\mathrm{d}x \tag{2.15}$$

Dieser Operator ist für $p \ge \frac{2n}{n+2}$ beschränkt, koerziv, stetig und strikt monoton.

Lemma 4.41 *Dies gilt auch für den induzierten Operator $\tilde{A}u(t) := A(u(t))$.*

Beweis: Übungsaufgabe.

□

Theorem 4.42 *Es sei $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ offen, $I = (0,T)$ ein endliches Zeitintervall. Es sei $p \geq \frac{2n}{n+2}$, $s \geq 0$, und $V = W_0^{1,p}(\Omega)$, $H = L^2(\Omega)$, $X = L^p(I;V)$. Dann existiert für alle $u_0 \in H$ und für alle $f \in L^{p'}(I;L^{p'}(\Omega;\mathbb{R}))$ eine Lösung $u \in W$ der Operatorgleichung*

$$\left.\begin{array}{rcl} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u - Au & = & f \\ u(0) & = & u_0 \end{array}\right\} in X'$$

Beweis: Übungsaufgabe.

□

Bemerkung: 1) Wie zu Anfang des Beweises von Satz 4.39 bereits angemerkt, sind dies auch die Standardmethoden, um Existenz linearer Evolutionsgleichungen zu zeigen ($\rightsquigarrow$ *Evans, Partial Differential Equations, Chapter 7*)

2) Wir haben bei der Behandlung des p-Laplace Evolutionsproblems nicht das ganze Potential von Satz 4.39 ausgenutzt, den $A : X \to X'$ ist in diesem Fall sogar strikt monoton. (Es folgt damit sogar Eindeutigkeit der Lösung wie bei *Brouder-Minty*). Aber Vorsicht! Eine Verallgemeinerung durch Addition von

$$\langle A_2 u, v\rangle_X = \iint_{I,\Omega} g(u)v \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$

ist möglich, aber sehr technisch, denn die einfache Einbettung

$$L^p(I;W_0^{1,p}(\Omega)) \hookrightarrow L^{p'}(I;L^4(\Omega))$$

ist auch für $q < \frac{np}{n-p}$ *nicht* kompakt (für $p > 2$ ist sie nicht notwendigerweise stetig.) Es gilt jedoch für

$$W_0 := \left\{u \in L^{p_0}(I;B_0) : \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u \in L^{p_1}(I;B_1)\right\}, \quad 1 < p_0, p_1 < \infty$$

mit Norm

$$\|u\|_{W_0} := \|u\|_{L^{p_0}(I;B_0)} + \left\|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u\right\|_{L^{p_1}(I;B_1)}$$

und $B_0 \overset{\text{kompakt}}{\hookrightarrow} B \hookrightarrow B_1$.

Lemma 4.43 (Aubin-Lions) *Die Einbettung $W_0 \hookrightarrow L^{p_0}(I;B)$ ist kompakt.*

Zum Beweis siehe *Růžička* oder *Zeidler*. Damit lässt sich auch Existenz von Lösungen des Problems

$$u_t - \Delta_p u + g(u) = f$$

für geeignete Funktionen g zeigen.

Bemerkung: Sehr wichtig in der Anwendug ist die Theorie der maximal monotoer Operatoren. Diese sind definiert durch

Definition 4.44 Es sei V ein reflexiver, reeller Banachraum, $M \subset X$, $A : M \to 2^{X'}$ heißt

i) *monoton*, falls $\forall (u,u'), (v,v') \in G(A) := \{(x,y) : y \in A(x)\}$ gilt

$$\langle u' - v', u - v\rangle_X \geq 0$$

ii) *maximal monoton*, falls A monoton ist und aus

$$(u,u') \in M \times X' \quad \text{sowie} \quad \langle u' - v', u - v\rangle_X \geq 0 \quad \forall (v,v') \in G(A)$$

folgt, dass $u, u' \in G(A)$.

Existenz von Lösungen $x \in M$ von $y \in A(x)$ $\forall y \in X'$ ist garantiert für maximal monotone Operatoren (unter Koerzitivitäts-Annahmen). Beweise ähnlich derer für pseudomonotoner Operatoren. Wichtig sind die maximal monotonen Operatoren beispielsweise für Variationsungleichungen, i.e.

$$\langle b - Au, u - v\rangle \geq 0 \quad C \subset X,\, A : C \to X',\, \forall v \in C.$$

Kapitel 5

Variationsrechnung

Wir schreiben eine partielle Differentialgleichung in einem Banachraum X, z.B.

$$\Delta u = f \quad \text{in } W_0^{1,2}(\Omega)$$

abstrakt als $Au = 0$. Falls der Operator A die Fréchet-Ableitung eines Funktionals $I : X \to \mathbb{R}$ ist, d.h. $A = I'$, reduzierte sich das Problem darauf, kritische Punkte, (insbesondere als z.B. Minima) von I zu finden. Dies ist häufig deutlich einfacher als die direkte Lösung von $Au = 0$.
In diesem Kapitel betrachten wir konkret $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ offen,

$$L : \mathbb{R}^{n\times m} \times \mathbb{R}^m \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$$

glatt, L heißt *Lagrangian* und wir schreiben $L = L(p, z, x)$mit den entsprechenden partiellen Ableitungen $\partial_p L$, $\partial_z L$, $\partial_x L$. Das Funktional I hat die Form

$$I(u) = \int_\Omega L(\nabla u, u, x)\,\mathrm{d}x$$

für $u : \Omega \to \mathbb{R}^n$ mit Randwert $u = g$ auf $\partial\Omega$.

Theorem 5.1 *Die Funktion L erfülle die Wachstumsbedingung*

i)

$$|L(p, z, x)| \leq C \cdot (|p|^q + |z|^q + 1)$$

ii)

$$\begin{cases} |\partial_p L(p, z, x)| & \leq \quad C \cdot (|p|^{q-1} + |z|^{q-1} + 1) \\ |\partial_z L(p, z, x)| & \leq \quad C \cdot (|p|^{q-1} + |z|^{q-1} + 1) \end{cases}$$

und $u \in W_0^{1,q}(\Omega; R^m)$ *erfülle* $I(u) = \min_{w\in W_0^{1,q}(\Omega)} I(w)$

Dann erfüllt u die schwache Form der Euler-Lagrange-Gleichung, d.h.

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m L_{p_{i_k}}(\nabla u, u, x) \cdot v_{x_i}^k + \sum_{k=1}^m L_{z_k}(\nabla u, u, x) \cdot v^k = 0 \quad \forall v \in W_0^{1,4}(\Omega; \mathbb{R}^m)$$

Beweis: (für m=1...)......

□

Konvexe Funktionale

Theorem 5.2 (Unterhalbstetigkeit konvexer Funktionale) *Es sei $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ eine glatte, von unten beschränkte Funktion. Weiter sei die Abbidung*

$$p \mapsto L(p, z, x)$$

konvex $\forall z \in \mathbb{R}$, $x \in \Omega$. Dann ist

$$I(u) = \int_\Omega L(\nabla u, u, x)\, \mathrm{d}x$$

im $W^{1,q}(\Omega)$ schwach folgenunterhalbstetig für $1 < q < \infty$, d.h.

$$(u_j \rightharpoonup u \quad in\ W^{1,p}) \Rightarrow \liminf I(u_j) \geq I(u)$$

Beweis: (Skizze, siehe auch lineare Funktionalanalysis) Wir nehmen an, dass $L \geq 0$. Wir setzen

$$l := \liminf I(u_j) = \lim I(u_{j_k}) \quad \text{nach übergang zu einer Teilfolge}$$

Es bleibt zu zeigen, dass $I(u) \leq l$. Dazu wählen wir $u_j \to u$ in L^1 (kompakte Einbettung), $u_j \to u$ fast überall. Mit Egoroff existiert für alle $\varepsilon > 0$ ein $F_\varepsilon \subset \Omega$, $|\Omega \setminus F_\varepsilon| \leq \varepsilon$. Wähle

$$G_\varepsilon := \{x \in \Omega : |u| + |\nabla u| < \frac{1}{\varepsilon}\}$$

und $E_\varepsilon = G_\varepsilon \cap F_\varepsilon$, es gilt, dass $|\Omega \subset F_\varepsilon| \to 0$ für $\varepsilon \to 0$. Auf der Menge E_ε können wir in der Variablen L zum Limes übergehen

$$\lim_{i \to \infty} \int_{G_\varepsilon} L(\nabla u, u_h, x)\, \mathrm{d}x = \int_{G_\varepsilon} L(\nabla u, u, x) \to 0 \quad \text{(schawache Konvergenz)}$$

und wegen Konvexität gilt

$$I(u_n) \geq \int_{G_\varepsilon} L(\nabla u_h, u_h, x) \geq (*)$$

Mit monotoner Konvergenz und $\varepsilon \to 0$ folgt die Behauptung.

□

Bemerkung: (1) Den ausführlichen Beweis findet man im Skript zur linearen Funktionalanalysis.

(2) Für $L = f(\nabla u) + g(u, x)$ folgt der Beweis einfach durch schwache Unterhalbstetigkeit von $\int f$ und starker Unterhalbstetigkeit von $\int g$.

Theorem 5.3 (Existenz von Minimierern) *Es sei L wie im Satz 5.2 und zusätzlich gelte*

$$L(p, z, x) \to |p|^q - \beta$$

für ein $q > 1$, $\beta \in \mathbb{R}$ und für alle $x \in \Omega$. Dann existiert ein Minimierer u von L in $W_0^{1,q}(\Omega)$

Beweis: Es sei u_j eine Folge, so dass

$$I(u_j) \to \inf_{v \in W_0^{1,q}(\Omega)} I(v) \quad \text{(Minimalfolge)}$$

Wegen der Koerzitivität von I gilt

$$\|u_j\|_{W^{1,q}(\Omega)} \overset{\text{Poincaré}}{\leq} \int_\Omega |\nabla u|^q \overset{\text{koerziv}}{\leq} C$$

Somit existiert eine Teilfolge mit $u_j \rightharpoonup u$ in $W^{1,q}(\Omega)$ und mit Satz 5.2 folgt die Behauptung.

□

Theorem 5.4 (Eindeutigkeit von Minimierern) *Es gelte*

i) $L = L(p,x)$ *ist unabhängig von z.*

ii) $\exists \Theta > 0$, *so dass*

$$\sum_{i,j=1}^{n} \partial_{p_j}\partial_{p_i} L(p,x) \cdot \xi_i \xi_j \geq \Theta |\xi|^2 \quad \forall p, \xi \in \mathbb{R}^n, \ \forall x \in \Omega.$$

(oder eine äquivalente Tensorformulierung im Fall von vektorwertigen u.) Dann ist der Minimierer $u \in W_0^{1,q}(\Omega)$ *eindeutig.*

Beweis: Angenommen $u, \tilde{u} \in W_0^{1,q}(\Omega)$ minimieren beide das Funktional I, dann ist

$$v := \frac{u + \tilde{u}}{2} \in W_0^{1,q}(\Omega)$$

Behauptung: $I(v) \in \frac{I(u)+I(\tilde{u})}{2}$, mit strikter Ungleichung, falls nicht gilt, dass $u = \tilde{u}$ f.ü. in Ω.

Beweis: Es gilt wegen der gleichmäßigen Konvexität von L, dass

$$L(p,x) \geq L(q,x) + \partial_p L(q,x)|p-q| + \frac{\Theta}{2}|p-q|^2.$$

Wir setzen $q = \frac{\nabla u + \nabla \tilde{u}}{2}$, $p = \nabla u$. Es folgt, dass

$$I(v) + \int_\Omega \partial_p L\left(\frac{\nabla u + \nabla \tilde{u}}{2}, x\right) \cdot \left(\frac{\nabla u - \nabla \tilde{u}}{2}\right) \mathrm{d}x + \frac{\Theta}{8} \int_\Omega |\nabla u - \nabla \tilde{u}|^2 \,\mathrm{d}x \leq I(u).$$

Ähnlich folgt aber, dass

$$I(v) + \int_\Omega \partial_p L\left(\frac{\nabla u + \nabla \tilde{u}}{2}, x\right) \left(\frac{\nabla \tilde{u} - \nabla u}{2}\right) \mathrm{d}x + \frac{\Theta}{8} \int_\Omega |\nabla u - \nabla \tilde{u}|^2 \,\mathrm{d}x \leq I(u).$$

Somit gilt, dass

$$\begin{aligned} I(v) &\leq \frac{I(u) + I(\tilde{u})}{2} - \frac{\Theta}{8} \int_\Omega |\nabla u - \nabla \tilde{u}|^2 \,\mathrm{d}x \\ \Rightarrow\ \nabla u - \nabla \tilde{u} &= 0 \quad \text{f.ü. auf } \Omega \\ &\Rightarrow\ u = \tilde{u} \quad \text{f.ü. auf } \Omega, \text{ da } u, \tilde{u} \in W_0^{1,q}(\Omega). \end{aligned}$$

Und die Behauptung folgt.

□

□

Wir können für Ω mit hinreichend glatten Rand Minimierer auch in der Klasse der Funktionen

$$\mathscr{A} := \{u \in W^{1,q} : u = g \text{ auf } \partial\Omega\}$$

suchen, wobei die Randwerte im Spursinne gegeben sind
→ siehe *Evans, Partial Differential Equations, Chapter 5*
Alternativ sei $g \in C^1(\overline{\Omega})$, dann können wir statt L den Lagrangen $\tilde{L} := L(\nabla u - \nabla g, u - g, x) \ldots\ldots$ Die Konvexitäts- und Koerzitivitätseigenschaften übertragen sich von L auf $\tilde{L}$, Sätze 5.1 bis 5.4 sind aber auch auf $\tilde{L}$ anwendbar. Die Klasse von Randwerten, die sich so behandeln lassen sind aber *kleiner* als die der Randwerte im Spursinne.

Beispiel:

$$L(p,z,x) = \frac{|p|^q}{q} + \frac{sz^2}{2} - f(x)z$$

Die schwache Euler-Lagrange-Gleichung zu L lautet:

$$-\int_\Omega |\nabla u|^{q-2}\nabla u \cdot \nabla v + suv\,\mathrm{d}x = \int_\Omega fv\,\mathrm{d}x \quad \forall v \in W_0^{1,q}(\Omega)$$

$\rightsquigarrow$ q-Laplace.

Bemerkung: Es sei V ein Banachraum, $I : V \to \mathbb{R}$ ein (strikt-) konvexes Funktional, das $\forall u \in V$ Fréchet-differenzierbar ist. Es gilt

$$I' : V \to \mathscr{L}(V,\mathbb{R}) = V'$$

und $A := I'$ ist (strikt-) monoton.

Beweis: Sei $u, v \in V$, es gilt

$$\begin{aligned} I(tu + (1-t)v) &\le tI(u) + (1-t)I(v) \\ \Rightarrow\ I(v) &\ge \underbrace{\langle Au, v-u\rangle}_{=I'} + I(u) \\ I(u) &\ge \langle Av, u-v\rangle + I(v) \\ \Rightarrow\ 0 &\le \langle Au - Av, u-v\rangle \ \Rightarrow\ A \text{ monoton,} \end{aligned}$$

strikte Monotonität ebenso.

□

Für allgemeine (unterhalbstetige) Funktionale $I : V \to \mathbb{R}$ existiert das sogenannte Subdifferential ∂I, definiert als

$$\{A \in V' : I(v) \le \langle A, v-u\rangle + I(u)\ \forall u \in V\}$$

und das Subdifferential ist ein maximal monotoner Operator. (*Satz von Rockefellar*)

Nichtkonvexe Funktionale, ein Beispiel aus der nichtlinearen Elastizitätstheorie

Motivation eines nichtkonvexen Funktionals

Wir betrachten einen Festkörper in einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Dieser besteht aus Atomen mit Gittervektoren e_1, e_2, e_3.
Energiefunktion(Lagrangian):

$$L = L(e_1, e_2, e_3).$$

Annahme (Cauchy-Born-Hypothese) Affine Randbedingung für Atome $\Rightarrow$ Im Inneren affine Anordnung. Verformung des Körpers durch eine glatte Funktion

$$y : \Omega \to \mathbb{R}^3$$

gegeben ist. Aus *Cauchy-Born-Hypothese* folgt, dass

$$(e_1, e_2, e_3) = (\nabla y)(\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3) \quad \text{(undeformiert)}$$

$\rightsquigarrow L = L(\nabla y)$

Beispiel: (Nichtlineare Elastizitätstheorie)

$$F := \nabla y \in \mathbb{M}^{3\times 3} \quad \text{Deformationsgradient}$$

Annahme: Lagrangian hängt ab von F (evtl. auch auf x, y)

$$I(y) = \int_\Omega L(\nabla y(x), y(x), x)\,\mathrm{d}x$$

Rahmeninvarianz

Starkörperbewegung sollten Energieänderung bewirken

$$\tilde{y}(x) = a + Qy(x), \quad a \in \mathbb{R}^3$$

Wir haben

$$\nabla\tilde{y} = Q\nabla y.$$
$$\Rightarrow L(QF,\cdot,\cdot) = L(F,\cdot,\cdot) \quad \forall Q \in \mathrm{SO}(3),\ F \in \mathbb{M}^{3\times 3}$$

Diese Invarianz kollidiert aber leider mit der Konvexitätsannahme. Normieren:

$$L(\mathrm{Id}) = 0 \quad \min(L)$$
$$L(Q) = 0, \quad \text{(Rahmeninvarianz)}$$

$$\Rightarrow L\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix} = L\begin{pmatrix}-1&&\\&-1&\\&&1\end{pmatrix} = L\begin{pmatrix}-1&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix} = L\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&-1\end{pmatrix} = 0$$

Aus der Konvexität von L würde nun folgen, dass

$$L\left(\frac{1}{4}\left[\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1&&\\&-1&\\&&1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&-1\end{pmatrix}\right]\right) = L\left(\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right) = 0$$

Das ist aber die Deformation, die den Körper auf einen Punkt schrumpfen lässt diese sollte hohe Energie besitzen. Konvexitätsannahme und Rahmeninvarianz ergben physökalisch unsinnige Energien. Viel besser wäre eine Energie der Form

$$\left.\begin{aligned} L(P,r,z,x) &= L(F,\det F,z,x) && \det F \text{ Volumenänderung der Deformation.}\\ (P,r) &\mapsto L(P,r,z,x) && \text{konvex für alle } z,\ x.\end{aligned}\right\} \tag{0.1}$$

$$\rightsquigarrow\ y:\Omega\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3; \quad I(y) = \int \Omega L(\nabla y(x),\det\nabla y(x),y(x),x)\,\mathrm{d}x.$$

Bemerkung:

$$\det QF = \det F, \quad Q \in \mathrm{SO}(3)$$

Eine Energie der Form (0.1), beispielsweise

$$L(F,\det F,z,x) = \tilde{L}(F) + (\det F - 1)^2$$

mit $\tilde{L}(F) = \tilde{L}(QF)$ konvex. Existieren Minimierer von Funktionalen der Form (0.1)? Unsere „üblichen“ Sätze sind nicht anwendbar.

Funktionale der Form (0.1) nennt man polykonvexe Funktionale. Wir zeigen im Folgenden die Existenz von Minimierern polykonvexer (und koerziver) Funktionale. Dazu betrachten wir zunächst bestimmte Lagrangians, deren Euler-Lagrange-Gleichungen von *jeder* glatten Funktion erfüllt wird.

Definition 5.5 (Null-Lagrangefunktion) Eine Funktion $L:\mathbb{R}^{n\times m}\times\mathbb{R}^m\times\overline{\Omega}$ heißt *Null-Lagrangefunktion*, falls das System der (starken) Euler-Lagrange-Gleichungen

$$-\sum_{i=1}^{n}\partial_{x_i}(L_{p_{ki}}(\nabla u,u,x) + L_{z_i}(\nabla u,u,x)) = 0 \quad (k = 1,\ldots,n)$$

automatisch von jeder glatten Funktion $u:\Omega\to\mathbb{R}^m$ erfüllt wird.

Bemerkung: Für $m = 1$ sind die Null-Lagrangians langweilig, sie sind nur für die Funktionen, die affin in der Ableitung von u sind (i.e. $L_p(u') = \text{const} \Rightarrow \partial_x L_p(u') = 0$)

Theorem 5.6 (Null-Lagrangian und Randwerte) *Es sei L ein Null-Lagrangian, und es seien $u, \tilde{u} \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$ mit $u = \tilde{u}$ auf $\partial\Omega$. Dann gilt $I(u) = I(\tilde{u})$*

$$I(v) = \int_\Omega L(\nabla v(x), v(x), x)\,\mathrm{d}x.$$

Beweis: Wir definieren $i(\tau) := I(\tau u + (1-\tau)\tilde{u})$ und leiten ab:

$$i'(\tau) = \int_\Omega \left[\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m L_{p_{k_i}}(\tau\nabla u + (1-\tau)\nabla\tilde{u}, \tau u + (1-\tau)\tilde{u}, x) \cdot (\partial_{x_i} u_k - \partial_{x_i}\tilde{u}_k) + \sum_{k=1} L^{z_k}(-,-,-) \cdot (u_k - \tilde{u}_k) \right] \mathrm{d}x$$

$$\overset{\text{part. int}}{=} \sum_{k=1}^m \int_\Omega \left[-\sum_{i=1} \partial_{x_i} L_{p_{k_i}}(-,-,-) + L_{z_k}(-,-,-) \right] (u_k - \tilde{u}_k)\,\mathrm{d}x = 0,$$

da $\tau u + (1-\tau)\tilde{u} \in L^2(\overline{\Omega})$ die Euler-Lagrange-Gl. erfüllt. Die Randterme fallen weg, da $u_k = \tilde{u}_k$ auf $\partial\Omega$. Die Behauptung folgt.

□

Notation: Es sei A eine $n \times n$-Matrix. Mit $\operatorname{cof} A$ bezeichnen wir die Kofaktor-Matrix von A, d.h.

$$(\operatorname{cof} A)_{ki} = (-1)^{i+k} d(A)_{ki}$$

mit $d(A)_{ki}$ = Determinante der $(n-1) \times (n-1)$-Matrix, die aus A durch Löschen der k-ten Reihe und der i-ten Spalte entsteht.

Lemma 5.7 (Divergenzfreiheit der Reihen der Kofaktormatrix) *Es sei $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ glatt. Dann gilt*

$$\sum_{i=1}^n \partial_{x_i} (\operatorname{cof} \nabla u(x))_{ki} = 0$$

Beweis: Das war Übungsaufgabe 8. Im Wesentlichen:

$$(\det P) \cdot \mathrm{Id} = P^T (\operatorname{cof} P)$$

Das leiten wir ab.

□

Theorem 5.8 (Determinanten sind Null-Lagrange-Funktionen) *Die Determinantenfunktion*

$$L(P) = \det P$$

ist ein Null-Lagrangian.

Beweis: Es sei zu zeigen, dass für jede Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}^n$ gilt

$$\sum_{i=1}^n \partial_{x_i} (L_{p_{k_i}}(\nabla u(x))) = 0$$

Es gilt $L^{p_{ki}} = (\operatorname{cof} P)_{ki}$, $i, k = 1, \ldots, n$, also nach Lemma 5.7:

$$\sum_{i=1}^n \partial_{x_i} (L_{p_{ki}}(\nabla u(x))) = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} (\operatorname{cof} \nabla u)_{ki} = 0$$

□

Bemerkung: Eine Anwendung des Satzes 5.8 ist ein einfacher Beweis des *Brouwer'schen Fixpunktsatzes* , siehe *Evans: PDE, THEOREM 8.3*

Theorem 5.9 (Determinanten sind schwach stetige Funktionen) *Es sei $n < q < \infty$ und $u_k \rightharpoonup u$ in $W^{1,q}(\Omega;\mathbb{R}^n)$, $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann gilt*

$$\det \nabla u_k \rightharpoonup \det \nabla u \quad \textit{schwach in } L^{q/_1}(\Omega)$$

Beweis: 1) Wieder benutzen wir die Matirx-Identität

$$(\det P)\mathrm{Id} = P(\operatorname{cof} P)^T$$

bzw. Laplace'scher Entwicklungssatz!

$$\Rightarrow \det P = \sum_{k=1}^n P_{kj}(\operatorname{cof} P)_{kj}$$

Sei nun $w \in C^\infty(\Omega;\mathbb{R}^n)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\det \nabla w &= \sum_{k=1}^n (\partial_{x_k w_j})(\operatorname{cof} \nabla u)_{kj} \quad (j = 1,\dots,n)\\ &= \underbrace{\sum_{k=1}^n -w_j \cdot (\partial_{x_k}(\operatorname{cof} \nabla w)_{kj})}_{=0,\text{ wegen Lemma 5.7}} + \sum_{k=1}^n \partial_{x_k}(w_j \cdot (\operatorname{cof} \nabla w)_{kj})\end{aligned}$$

Somit ist die Determinante der Jakobimatrix eine Divergenz. (Das haben wir bereits einmal gesehen, siehe Proposition 2.9) Es sei nun $v \in C_c^\infty(\Omega)$, damit folgt

$$\int_\Omega v \det \nabla w = -\sum_{k=1}^n \int_\Omega (\partial_{x_n} v) \cdot w_j (\operatorname{cof} \nabla w)_{ik}$$

Mittels einer Standardapproximation folgt auch

$$\int_\Omega v \det \nabla u_l = -\sum_{k=1}^n \int_\Omega (\partial_{x_k} v)(u_l)_j (\operatorname{cof} \nabla u_l)_{jk}$$

Für $n < q < \infty$ und $u_k \rightharpoonup u$ in $W^{1,q(\Omega;\mathbb{R}^n)}$ folgt mit dem *Morrey'schen Einbettungssatz* (und *Arzelá-Ascoli*), dass $u_k \to u$ gleichmäßig in Ω.
Behauptung: Es gilt

$$\lim_{l\to\infty} \int_\Omega \varphi(\operatorname{cof} \nabla u_l)_{jk} = \int_\Omega \varphi(\operatorname{cof} \nabla u)_j k \quad \forall \varphi \in C_c^\infty, \ (j,k = 1,\dots,n)$$

□