

# NICHTLINEARE FUNKTIONALANALYSIS

Luis Felipe Müller

7. Juni 2011

---

KOMPLETTER MITSCHRIEB ZUR GLEICHNAMIGEN VORLESUNG BEI HERRN DONDL

(SOMMERSEMESTER 2011, UNI HEIDELBERG)

---

Dieser Mitschrieb steht unter der freien CC-BY-SA-DE 3.0 Lizenz.



Für weitere Informationen besuchen Sie

<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/deed.de>

# Organisatorisches

## Termine

- Vorlesung: Mo./Mi. 9-11ct. -104 Ang. Math.
- Übungsaufgaben: Mi. - Mi. vor der Vorlesung. Kasten in der Angew.Math
- Übungsgruppe: Fr. 16-18 Angew. Math. -101
- Website zur Vorlesung: [http://dondl.org/wiki/Sommersemester\\_11](http://dondl.org/wiki/Sommersemester_11)
- Literatur:
  1. Růžička M: Nichtlineare Funktionalanalysis, Eine Einführung
  2. Aubin-Ekeland: Applied nonlinear Analysis
  3. Deimling: Nonlinear Functional Analysis
  4. Schwartz: Nonlinear Functional Analysis
  5. Zeidler: Nonlinear Functional Analysis and its applications
- Prüfungen: Zulassung mit etwa 50% der Übungsaufgaben-Punkte. Prüfung ist mündlich, beispielsweise am 29. Juli (Fr.)
- Dozent: Patrick Dondl, Sprechstunde Mo./Mi. 11-12 in Raum 130 (Angew. Math.)
- Tutor: Julian Scheuer

# Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung . . . . .	1
1.1	Thema der Vorlesung . . . . .	1
1.2	Vorarbeiten . . . . .	3
1.2.1	Ableitung in Banachräume und implizite Funktionen . . . . .	3
2	Der Brouwer'sche Abbildungsgrad . . . . .	9
2.1	Die Determinantenformel . . . . .	9
2.1.1	Notation . . . . .	9
2.2	Verallgemeinerung der Determinantenformel . . . . .	13
2.3	Der Brouwer'sche Fixpunktsatz . . . . .	19
2.3.1	Einschub: . . . . .	20
2.4	Weitere Eigenschaften des Abbildungsgrades . . . . .	23
2.5	Der Fixpunktsatz von Kakutani und eine Anwendung in der Spieltheorie . . . . .	25
3	Der Leray-Schauder Grad und der Schauder'sche Fixpunktsatz . . . . .	27
3.1	Der Abbildungsgrad auf endlichen Banachräumen. . . . .	28
3.2	Kompakte Operatoren . . . . .	29
3.3	Der Leray-Schauder Grad . . . . .	31
3.4	Das Leray-Schauder-Prinzip und der Schauder'sche Fixpunktsatz . . . . .	33
4	Monotone Operatoren . . . . .	38
4.1	Der Nemichii-Operator . . . . .	44

# 1 Einleitung

## 1.1 Thema der Vorlesung

In der linearen Funktionalanalysis haben wir eine Vielzahl von Methoden kennengelernt um Ergebnisse aus der endlichdimensionalen linearen Algebra auf den unendlichdimensionalen Fall zu verallgemeinern. Ein Hauptaufgabe war dabei, die Lösbarkeit von Gleichungen der Form

$$Ax = y$$

für lineare Operatoren  $A$  auf  $\infty$ -dimensionalen Banchräumen zu zeigen.

Ein Beispiel:

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ , gefüllt mit einer inkompressiblen, riskosen Flüssigkeit.  $v_j(x)$  sei die Geschwindigkeit der Flüssigkeit an der Stelle  $x \in \Omega$ .  $p(x)$  ist der Druck an der Stelle  $x$ .

Randbedingungen:  $v_j(x) = 0 \quad x \in \partial\Omega$

Inkompressibilität:  $\partial_j v_j(x) = 0 \quad x \in \Omega$

Bewegungsungleichung: Wir betrachten die Kräfte, die auf einen kleinen Würfel, eingeschlossen durch  $(x_1, x_2, x_3)$ ,  $(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3)$ . Druck auf eine Oberfläche des Würfels mit Normale  $x$ , ist  $f_j^p = p \cdot \Delta x_2 \Delta x_3 \cdot \delta_{ij}$  auf die gegenüberliegende Seite wirkt

$$-(p + \partial_i p \Delta x_i) \Delta x_2 \Delta x_3 \delta_{ij}$$

Zusammen ergibt sich

$$f = (\partial_j p) \Delta V$$

Kraft durch Viskosität auf eine Oberfläche mit Normale  $x_1$  ist

$$f_j^{V, x_1} = -2\eta \Delta x_2 \Delta x_3 \partial_1 v_j$$

mit einer Konstante  $\eta$ . Der gleiche Trick wie oben ergibt für die gegenüberliegende Oberfläche

$$\eta \Delta x_2 \Delta x_3 \partial_1 (v_j + \partial_j v_1 \Delta x_1)$$

Zusammen ergibt sich

$$f_j^V = \eta \Delta V \cdot \partial_i \partial_i v_j$$

Newton:  $\rho \Delta V \frac{d}{dt} v_j(t, x(t)) = \eta \Delta V \partial_i \partial_i v_j - \Delta V (\partial_j p) + \Delta V \kappa_j$  mit einer externen Konstante  $\kappa_j$ , bspw. Gravitation

Teilen durch  $\Delta V$  und die Kettenregel ergibt

$$\begin{aligned} \rho \partial_i v_j &= \eta \partial_i \partial_i v_j - \rho (v_i \partial_i) - \partial_j p + K_j \quad (\text{Newton}) \\ d_j v_j &= 0 \end{aligned}$$

Naurier-Stokes. Frage: Existiert eine eindeutige Lösung zur sationären Naurier-Stokes-Gleichung:

$$\eta \partial_i \partial_i v_j - (v_i \partial_i) v_j + \partial_j p + K_j = 0 \quad (1)$$

Wir können die Gleichung etwas umschreiben. Sei  $H$  ein Hilbertraum

$$H := \overline{\{u \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^3), \text{ so dass } \partial_j v_j = 0\}}^{W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3)}$$

Ein Skalarprodukt auf  $H$  ist gegeben durch

$$(u, v)_H := \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 (\partial_i u_j)(\partial_i v_j)$$

$\Omega$  beschränkt  $\Rightarrow (\cdot, \cdot)_H$  ist äquivalent zum üblichen Skalarprodukt (mittels Poincaré). Wir multiplizieren (1) mit  $\omega \in H$ , integrieren und erhalten

$$\int_{\Omega} (\eta \partial_i \partial_i v_j - (v, \partial_i) v_j + K_j) \cdot \omega_j = \int_{\Omega} (\partial_j p) \omega_j = 0, \text{ da } \omega \text{ divergenzfrei.}$$

$$(1) \Rightarrow \eta(v, \omega)_H - a(v, v, \omega) - \int_{\Omega} K \omega = 0$$

Ebenso für  $a$ :

$$a(u, v, w) := \underbrace{(B(u, v), w)}_{\text{bilinear}}_H$$

Also

$$(1) \Rightarrow (\eta v - B(u, v)) - \tilde{K}, \omega)_H = 0 \quad \forall \omega \in H$$

somit

$$\eta v - B(v, v) = \tilde{K}$$

Das ist eine Gleichung der Form

$$Fv = \tilde{K}, \quad \text{mit } F \text{ einem Nichtlinearen Operator} \quad (2)$$

Im ersten Teil der Vorlesung beschäftigen wir uns mit der eindeutigen Lösbarkeit von Gleichungen der Form

$$Fx = y, \quad F : X \rightarrow Y, \quad X, Y \text{ Banachräume}$$

und zum Abschluß zeigen wir mit Hilfe des *Schauder'schen Fixpunktsatzes* die Existenz und finden eine Lösung von (2), also der schwachen Form der stationären Navier-Stokes-Gleichung.

Im zweiten Teil der Vorlesung beschäftigen wir uns mit Variationsrechnung (d.h. dem Finden von Minimierern nichtlinearer Funktionalen)

$$W : X \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit } X \text{ ein Banachraum}$$

Finde

$$x_0 \in X : W(x_0) = \inf_{y \in X} W(y)$$

Insbesondere treffen wir dort auf Probleme in der Elastizitätstheorie.

## Aufbau der Vorlesung

- Abbildungsgrad  $\rightarrow$  Existenz von Lösungen von  $Fx = y$
- Monotone Operatoren  $\rightarrow$  Eindeutigkeit von Lösungen von  $Fx = y$ ; zeitabhängige Probleme.
- Variationsrechnung  $\rightarrow \inf_{y \in X} W(y)$

## 1.2 Vorarbeiten

### 1.2.1 Ableitung in Banachräumen und implizite Funktionen

Es seien  $X$  und  $Y$  Banachräume,  $\Omega \subset X$  offen,  $F : \Omega \rightarrow Y$ ,  $x_0 \in \Omega$

**Definition 1.1 (Gâteaux-Ableitung)** Die Gâteaux-Ableitung  $dF(x_0, \psi)$  des Operators  $F$  im Punkt  $x_0$  in Richtung  $\psi \in X$  ist gegeben durch

$$dF(x_0, \psi) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + s \cdot \psi) - F(x_0)}{s} = \left. \frac{d}{ds} F(x_0 + s\psi) \right|_{s=0}$$

falls der Limes existiert. Der Operator  $F$  heißt in diesem Fall in  $x_0$  Richtung  $\psi$  Gâteaux-differenzierbar.

**Definition 1.2 (Fréchet-Ableitung)** Der Operator  $F$  heißt Fréchet-differenzierbar in  $x_0 \in \Omega$ , falls ein beschränkter, linearer Operator

$$F'(x_0) : X \rightarrow Y$$

existiert, so dass

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\|F(x_0 + h) - F(x_0) - F'(x_0) \cdot h\|}{\|h\|} = 0 \quad (3)$$

$F'(x_0)$  heißt dann Fréchet-Ableitung von  $F$  in  $x_0$ .

**Theorem 1.3** i)  $F'(x_0)$  ist durch (3) eindeutig bestimmt.

ii) Falls  $F$  stetig ist in  $x_0$ , so ist jeder lineare Operator, der (3) erfüllt, ebenfalls stetig.

iii) Ist  $L : X \rightarrow Y$  linear, so gilt

$$L'(x) = L \quad \forall x \in X$$

BEWEIS: i) Es gelte (3) auch für  $L$ . Dann haben wir

$$\|Lh - F'(x_0)h\| \leq \varepsilon \|h\| \quad \text{falls} \quad \|h\| < \delta = \delta(\varepsilon, x_0)$$

Für beliebiges  $h$  folgt aber

$$\begin{aligned} \|(L - F'(x_0))(\delta \|h\|^{-1} \cdot h)\| &\leq \delta \varepsilon \\ \Rightarrow \|(L - F'(x_0))h\| &\leq \varepsilon \|h\| \quad \forall h \in X, \forall \varepsilon > 0 \\ \Rightarrow \|L - F'(x_0)\|_{\mathcal{L}(X,Y)} &= 0 \end{aligned}$$

ii) (3) wird umgeformt zu

$$\|F'(x_0)h\| \leq \varepsilon \|h\| + \|F(x_0 + h) - F(x_0)\|$$

Mit  $h \rightarrow 0$  folgt die Stetigkeit (für  $\|h\| \leq \delta$ ) von  $F'(x_0)$  an der Stelle 0. Wegen Linearität von  $F'(x_0)$  ist  $F'(x_0)$  somit stetig.

iii) (3) gilt offensichtlich für  $L'(x_0) = L$ , mit i) folgt Eindeutigkeit.

□

**Proposition 1.4** Jeder Fréchet-differenzierbare Operator  $F$  ist Gâteaux-differenzierbar  $\forall \psi \in X$  und es gilt

$$F'(x_0)\psi = dF(x_0, \psi)$$

BEWEIS: Übungsaufgabe

□

**Definition 1.5**  $F$  heißt (Fréchet-)differenzierbar auf  $\Omega$ , falls  $\forall x \in X$  ein  $F'(x)$  existiert, sodass  $F'(x)$  stetig ist und (3) erfüllt.  $F$  heißt stetig (Fréchet-)differenzierbar in  $\Omega$ , falls die Abbildung

$$F' : \Omega \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$$

stetig ist.

**Proposition 1.6** Existiert die Gâteaux-Ableitung  $dF(x, \psi) \forall x \in \Omega$ , und ist sie linear und stetig in  $\psi \forall x \in \Omega$ , so ist  $F$  Fréchet-differenzierbar auf  $\Omega$  und es gilt

$$F'(x)\psi = dF(x, \psi)$$

BEWEIS: Übungsaufgabe

□

**Definition 1.7** Sei  $F$  auf  $\Omega$  stetig differenzierbar,  $x_0 \in \Omega$ . Falls ein stetiger linearer Operator

$$F''(x_0) : X \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$$

existiert mit

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\|F'(x_0 + h) - F'(x_0) - F''(x_0)h\|_{\mathcal{L}(X, Y)}}{\|h\|} = 0$$

dann heißt  $F$  in  $x_0$  zweimal (Fréchet-)differenzierbar und  $F''(x_0)$  heißt zweite Ableitung von  $F$  in  $x_0$ . Höhere Ableitungen entsprechend.

**Bemerkung:** Es gilt die Kettenregel: Seien  $X, Y, Z$  Banachräume,  $\Omega_X \subset X$  offen,  $x_0 \in \Omega_X$ ,

$$F : \Omega_X \rightarrow Y, \quad F(x_0) = y_0 \in \Omega_Y \subset Y \text{ offen}$$

$$G : \Omega_Y \rightarrow Z$$

Falls  $F'(x_0)$  und  $G'(y_0)$  existiert, so ist

$$(G \circ F)'(x_0) = G'(y_0) \circ F'(x_0)$$

**Definition 1.8 (Partielle Ableitung)** Seien  $X, Y, Z$  Banachräume,  $\Omega_X \subset X$  offen,  $x_0 \in \Omega_X$ ,  $\Omega_Y \subset Y$  offen,  $y_0 \in \Omega_Y$ . Der Operator

$$F : \Omega_X \times \Omega_Y \rightarrow Z$$

heißt partiell in  $(x_0, y_0)$  nach dem zweiten Argument (nach  $y$ ) differenzierbar, falls die Abbildung

$$F(x_0, \cdot) : \Omega_Y \rightarrow Z$$

differenzierbar ist. Wir nennen den linearen Operator  $F_Y(x_0, y_0) : Y \rightarrow Z$ , der

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\|F(x_0, y_0 + h) - F(x_0, y_0) - F_Y(x_0, y_0)h\|}{\|h\|} = 0$$

erfüllt, die partielle Ableitung von  $F$  in  $(x_0, y_0)$  nach dem zweiten Argument.

**Proposition 1.9** Seien  $X, Y$  Banachräume,  $\Omega \subset X$  offen und konvex mit  $x_0, x_1 \in \Omega$ .  $F : \Omega \rightarrow Y$  sei stetig Fréchet-differenzierbar auf  $\Omega$ . Dann gilt

$$F(x_1) - F(x_0) = \int_0^1 F'(x_0 + t(x_1 - x_0))(x_1 - x_0) dt$$

Das Integral ist als Limes der entsprechenden Riemannsumme zu verstehen und dieser existiert.

Ähnlich dem endlichdimensionalen Fall geben uns die Ableitungen im Banachraum hinreichende Bedingungen um Operatoren implizit zu definieren. Die Fragestellung ist die folgende: Seien  $X, Y, Z$  Banachräume,  $U$  eine Umgebung von  $x_0 \in X$ .  $V$  eine Umgebung von  $y_0 \in Y$ . Wir suchen zu  $F : U \times V \rightarrow Z$  einen Operator

$$T : U_0 \subset U \rightarrow V,$$

sodass gilt

$$F(x, Tx) = F(x_0, y_0) \quad \forall x \in U_0.$$

Durch eine einfache Verschiebung ist es ausreichend, den Fall

$$F(x_0, y_0) = 0$$

zu untersuchen.

**Proposition 1.10** Sei  $X$  ein Banachraum,  $\text{Id} : X \rightarrow X$ ,  $x \mapsto x$  die Identität auf  $X$ . Es sei

$$R : B_r(0) \subset X \rightarrow X,$$

eine  $k$ -Kontraktion mit  $k < 1$ , d.h.  $\|R(x) - R(y)\| \leq k\|x - y\|$ , und es gelte

$$\|R(0)\| < r(1 - k)$$

Dann existiert genau ein  $x \in B_r(0)$  mit

$$(\text{Id} + R)x = 0$$

BEWEIS: Sei  $S = -R$ , wir suchen also einen Fixpunkt von  $S$ .

1. Eindeutigkeit: Seien  $Sx = x$  und  $Sx' = x'$ , damit gilt

$$\|x - x'\| = \|Sx - Sx'\| \leq k\|x - x'\|.$$

Mit  $k < 1$  folgt  $x = x'$ .

2. Existenz: Sei  $x \in B_r(0)$ , es gilt

$$\|Sx\| \leq \|Sx - S(0)\| + \|S(0)\| \leq k\|x\| + \|S(0)\| < kr + r(1 - k) = r$$

Sei  $x_p = Sx_{p-1}$ ,  $x_0 = 0$ . Es gilt (wie auch im Banach'schen Fixpunktsatz, siehe ÜB 1), dass

$$\|x_{n+p} - x_n\| \leq k^n(1 - k)^{-1}\|x\|,$$

damit ist  $(x_p)_{p \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge und konvergiert gegen  $x \in X$ . Wir haben weiter, dass

$$\|x\| \leq \underbrace{\|x - x_{p+1}\|}_{\rightarrow 0} + \|x_{p+1}\| \quad \text{mit} \quad \|x_{p+1}\| < (1 - k)\|S(0)\| = r \Rightarrow \|x\| < r$$

Wegen  $x_{p+1} = Sx_p$  gilt dass  $x = Sx$ , somit ist  $x$  der gesuchte Fixpunkt.



**Theorem 1.11 (Satz über implizite Funktion)** Seien  $X, Y, Z$  Banachräume,  $U \subset X$  Umgebung von  $x_0 \in X$ ,  $V \in Y$  Umgebung von  $y_0 \in Y$ . Sei weiter

$$F : U \times V \rightarrow Z$$

stetig und stetig differenzierbar nach der zweiten Variablen.  $F_Y(x_0, y_0)$  sei eine Bijektion von  $Y$  nach  $Z$  und es gelte

$$F(x_0, y_0) = 0$$

Dann existiert  $B_\delta(x_0) \subset U$ ,  $B_r(y_0) \subset V$  und genau ein Operator  $T : B_\delta(x_0) \rightarrow B_r(y_0)$ , so dass  $T(x_0) = y_0$  und  $F(x, Tx) = 0 \forall x \in B_\delta(x_0)$ .  $T$  ist stetig.

BEWEIS: Ohne Einschränkung sei  $x_0 = y_0 = 0$ . Sei  $L := F_Y(0, 0)$ ,  $\text{Id} : Y \rightarrow Y$  die Identität auf  $Y$ . Es sei  $S(x, y) := L^{-1}F(x, y) - y$  für  $(x, y) \in U \times V$ . Somit gilt

$$F(x, y) = 0 \iff y + S(x, y) = 0.$$

$S$  ist stetig differenzierbar nach dem zweiten Argument mit

$$S_Y = L^{-1}F_Y(x, y) - \text{Id}$$

Damit gilt

$$S_Y(0, 0) = 0$$

Sei  $k \in (0, 1)$ . Wegen Stetigkeit von  $S_Y$  existiert  $r > 0$  mit

$$\|S_Y(x, y)\| \leq k \quad \forall (x, y) \in B_r(0) \times B_r(0)$$

Sei nun  $x \in B_r(0)$ ,  $y, \tilde{y} \in B_r(0)$  Es gilt nach Proposition 1.9, dass

$$\|S(x, y) - S(x, \tilde{y})\| = \left\| \int_0^1 S_Y(x, \tilde{y} + t(y - \tilde{y}))(y - \tilde{y}) dt \right\| \leq k \cdot \|y - \tilde{y}\|$$

Wegen  $S(0, 0)$  und Stetigkeit von  $S$  existiert  $\delta \leq r$ , so dass

$$\|S(x, 0)\| \leq r(1 - k) \quad \forall x \in B_\delta(0)$$

Sei also  $x \in B_\delta(0)$ . Nach Proposition 1.10 existiert genau ein  $y \in B_r(0)$  mit  $y + S(x, y) = 0$ . Wir setzen

$$Tx = y, \quad T : B_\delta(0) \rightarrow B_r(0)$$

Es gilt  $T(0) = 0$  wegen  $0 + S(0, 0) = T(0) + S(0, T(0)) = 0$  und der Eindeutigkeit von  $T$ . Es bleibt die Stetigkeit von  $T$  zu zeigen: Seien  $x, x' \in B_\delta(0)$ , damit gilt

$$0 = Tx + S(x, Tx) = T(x' + S(x, Tx'))$$

also

$$\begin{aligned} \|Tx - Tx'\| &\leq \|S(x', Tx') - S(x, Tx')\| + \|S(x, Tx) - S(x, Tx')\| \\ &\leq \|S(x', Tx') - S(x, Tx')\| + k\|Tx - Tx'\| \\ &= (1 - k)\|Tx - Tx'\| \\ &\leq \|S(x', Tx') - S(x, Tx')\| \rightarrow 0 \quad \text{für } x \rightarrow x' \end{aligned}$$

Somit ist  $T$  stetig.

□

**Bemerkung:** Ist  $F$   $r$ -mal stetig differenzierbar, so gilt das auch für  $T$ .

BEWEIS: Übungsaufgabe

□

**Theorem 1.12** Seien  $X, Y$  Banachräume,  $U \subset X$  eine Umgebung von  $x_0$ . Es sei  $F : U \rightarrow Y$  stetig differenzierbar und  $F'(x_0)$  sei eine lineare Bijektion von  $X$  nach  $Y$ . Dann existiert eine Umgebung  $U_0 \subset U$  von  $x_0$ , so dass

$$F|_{U_0} : U_0 \rightarrow F(U_0) \ni y_0 - F(x_0)$$

ein Homöomorphismus (bistetige Abbildung) ist.

BEWEIS: Wir wenden Satz 1.11 auf

$$\tilde{F}(x, y) := F(x) - y$$

an.

□

**Bemerkung:** Ist  $F$   $r$ -mal stetig differenzierbar, so gilt das auch für  $F^{-1}$  ( $F$  ist ein  $r$ -Diffeomorphismus).

BEWEIS: Übungsaufgabe

□

**Definition 1.13 (Zusammenhängende Mengen)** - Sei  $X$  ein (topologischer metrischer, normierter) Raum. Eine Menge  $\Omega \subset X$  heißt zusammenhängend, falls es keine zwei abgeschlossenen (offenen)  $\Omega_1, \Omega_2$  gibt mit

$$\Omega \subset \Omega_1 \cup \Omega_2, \quad \Omega \cap \Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset, \quad \Omega \cap \Omega_{1,2} \neq \emptyset$$

- Eine Menge  $\Omega \subset X$  heißt wegzusammenhängend, falls sich je zwei Punkte in  $\Omega$  durch eine stetige, in  $\Omega$  verlaufende Kurve verbinden lassen.
- Eine Menge  $\bar{\Omega} \subset \Omega$  heißt Zusammenhangskomponente von  $\Omega$ , falls  $\bar{\Omega} \subset \Omega$  maximal, zusammenhängend.

**Bemerkung:** Wgzusammenhängend  $\Rightarrow$  Zusammenhängend.

Offen, zusammenhängend  $\Rightarrow$  Wgzusammenhängend

**Theorem 1.14 (Mittelwert)** Seien  $X, Y$  Banachräume,  $F : X \rightarrow Y$  stetig differenzierbar.

i) Falls  $\Omega$  konvex ist, so gilt

$$\|F(x) - F(y)\| \leq M \|x - y\|,$$

wobei

$$M = \max_{0 \leq t \leq 1} \|F'((1-t)x + ty)\|$$

ii) Umgekehrt gilt: Falls

$$\|F(x) - F(y)\| \leq M \|x - y\| \quad \forall x, y \in \Omega$$

Dann gilt

$$\sup_{x \in \Omega} \|F'(x)\| \leq M$$

BEWEIS: Sei  $f(t) := F((1-t)x + ty)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ . Nach Kettenregel gilt

$$f'(t) = F'((1-t)x + ty)(x - y)$$

$$\Rightarrow \|f'(t)\| \leq \tilde{M} := M \|x - y\|$$

i) Sei  $\phi(t) := \|f(t)\|$  für  $\delta > 0$ . Wir wollen zeigen, dass  $\phi(t) \leq 0 \forall \delta > 0, 0 \leq t \leq 1$ . Sei also (zum Widerspruch)

$$t_0 := \max\{t \in [0, 1] \mid \phi(s) \leq 0 \forall s \leq t\}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \phi(t_0 + \varepsilon) &= \|f(t_0 + \varepsilon) - f(t_0) + f(t_0) - f(0)\| - (\tilde{M} + \delta)t \\ &\leq \|f(t_0 + \varepsilon) - f(t_0)\| - (\tilde{M} + \delta) - \phi(t_0) \\ &\leq \|f'(t_0)\varepsilon + (1)\| - (\tilde{M} + \delta)\varepsilon \\ &\leq (-\delta + (1))\varepsilon \end{aligned}$$

ii) Angenommen, es existiert  $x_0$  mit  $\|F'(x_0)\| \geq M + 2\delta, \delta > 0$ . Dann existiert  $e \in X, \|e\| = 1, \|F'(x_0)e\| \geq M + \delta$ .  
Somit gilt

$$\begin{aligned} M\varepsilon &\geq \|F(x_0 + \varepsilon e) - F(x_0)\| = \|F'(x_0)(\varepsilon e) + (\varepsilon)\| \\ &\geq (M + \delta)\varepsilon - (\varepsilon) > M\varepsilon \end{aligned}$$

Das ist ein Widerspruch.

□

**Corollar 1.15** Sei  $\Omega \subset X$  offen, (weg-)zusammenhängend,  $F$  stetig differenzierbar auf  $\Omega$ . Es gilt

$$F = \text{Const} \iff F' = 0$$

**Bemerkung:** Wir schreiben wie im endl. dim.  $C(\Omega) = C^0(\Omega), C^1(\Omega) \dots$

**Anwendungen:** Lokale Existenz und Eindeutigkeit Banachraum-wertiger Differenzialgleichungen. Sei  $X$  Banachraum,  $\Omega \subset X$  offen,  $I \subset \mathbb{R}$  kompaktes Intervall. Es sei  $C_b(I, \Omega)$  der Banachraum der beschränkten, stetigen Abbildungen von  $I$  nach  $\Omega$ , versehen mit der sup-Norm.

**Lemma 1.16** Sei  $Y$  ein Banachraum,  $f \in C(\Omega, Y)$  und sei die Funktion

$$f_\star : C_b(I, \Omega) \rightarrow C_b(I, Y)$$

definiert als

$$(f_\star x)(t) = f(x(t))$$

Es gilt  $f_\star \in C^r$

**BEWEIS:**  $r = 0$ : Sei  $x_0 \in C_b(I, \Omega)$ ,  $\varepsilon > 0 \forall t \in I$  existiert  $\delta(t) > 0$ , so dass

$$\|f(\xi) - f(x_0(t))\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall \xi \in B_{2\delta(t)}(x_0(t))$$

Die offenen Kugeln

$$\{B_{\delta(t)}(x_0(t))\}_{t \in I}$$

sind eine offene Überdeckung vom  $\{x_0(t)\}_{t \in I}$ . Diese Menge ist als stetiges Bild einer kompakten Menge kompakt, und somit existiert endliche Teilüberdeckung

$$\{B_{\delta(t_j)}(x_0(t_j))\}_{1 \leq j \leq N}$$

Sei nun  $x \in C_b(I, \Omega)$  mit

$$\|x - x_0\| \leq \delta := \min_{1 \leq j \leq N} \delta(t_j)$$

Somit existiert  $\forall t \in I$  ein  $t_j$ , so dass  $\|x_0(t) - x_0(t_j)\| < \delta(t_j)$ , und deshalb gilt

$$\|f(x(t)) - f(x_0(t))\| \leq \underbrace{\|f(x(t)) - f(x_0(t_j))\|}_{\leq 2\delta} + \underbrace{\|f(x_0(t_j)) - f(x_0(t))\|}_{\leq \delta},$$

denn

$$\|x(t) - x_0(t_j)\| \leq \|x(t) - x_0(t)\| + \|x_0(t) - x_0(t_j)\| \leq 2\delta(t_j).$$

Somit folgt die Steigkeits. . . . .

$r = 1$ : Wir müssen zeigen, dass

$$\sup_{t \in I} \|f(x_0(t) + x(t)) - f(x_0(t)) - f'(x_0(t))x(t)\| \leq \varepsilon \sup_{t \in I} \|x(t)\|$$

denn

$$(f'_\star(x_0)x)(t) = f'(x_0(t))x(t)$$

Übungsaufgabe. Folgt wie Stetigkeit durch Kompaktheit von  $I$ .

□

## 2 Der Brouwer'sche Abbildungsgrad

### Motivation

**Ziel:**  $f(x) = 0$  zu lösen für  $f : U \subset X \rightarrow X$ ,  $X$  Banachraum.

**Frage:** Existenz/Anzahl der Lösungen

**Rückblick auf Funktionentheorie:** Sei  $z_0 \in \mathbb{C}$

$$n(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} dz$$

$\leadsto$  Verallg.:  $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ .  $0 \notin f(\gamma)$

$$n(f(\gamma), 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'}{f} dz = \sum_k n(\gamma, z_k) \alpha_k$$

wobei  $f(z_k) = 0$ ,  $\alpha_k$  Vielfachheiten.

Ziel: Verallg. des Begriffs „Umlaufzahl“ für Abb.  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

### 2.1 Die Determinantenformel

#### 2.1.1 Notation

$U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$

$$J_f(x) := \det df(x)$$

$$RV(f) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid \forall x \in f^{-1}(y), J_f(x) \neq 0\}$$

$$CV(f) := \mathbb{R}^n \setminus RV(f)$$

$$D_y^r(\overline{U}, \mathbb{R}^n) := \{f \in C^k(\overline{U}, \mathbb{R}^n) \mid y \notin f(\partial U)\}$$

$$D_y(\overline{U}, \mathbb{R}^n) := D_y^0(\overline{U}, \mathbb{R}^n)$$

$\tau(\mathbb{R}^n)$  bezeichne die Topologie auf  $\mathbb{R}^n$ .

**Definition 2.1** Eine Abbildung

$$\deg : \bigcup_{U \in \tau(\mathbb{R}^n), y \in \mathbb{R}^n} (D_y(\overline{U}, \mathbb{R}^n) \times \{U\} \times \{y\}) \rightarrow \mathbb{R},$$

d.h.

$$\deg = \deg(f, U, y)$$

heißt Gradabbildung, falls

**(D1)** Translationsinvarianz:

$$\deg(f, U, y) = \deg(f - y, U, 0)$$

**(D2)** Normalisation:

$$\deg(\text{Id}, U, y) = 1 \quad \forall y \in U$$

**(D3)** Additivität: Seien  $U_1, U_2 \subset U$  offen und disjunkt, sodass

$$y \notin f(\overline{U} \setminus (U_1 \cup U_2)),$$

dann gelte

$$\deg(f, U, y) = \deg(f, U_1, y) + \deg(f, U_2, y)$$

**(D4)** Homotopieinvarianz:

$$H(t) = (1-t)f + tg \in D_y(\overline{U}, \mathbb{R}^n) \quad \forall t \in [0, 1] \Rightarrow \deg(f, U, y) = \deg(g, U, y)$$

**Theorem 2.2** Sei  $\deg$  eine Gradabbildung. Dann gilt

(i)  $\deg(f, \emptyset, y) = 0$  und

$$\deg(f, U, y) = \sum_{i=1}^N \deg(f, U_i, y)$$

falls

$$y \notin f(\overline{U} \setminus \bigcup_{i=1}^N U_i),$$

wobei  $U_i \subset U$  offen und disjunkt für  $1 \leq i \leq N$ .

(ii)  $y \notin f(U) \Rightarrow \deg(f, U, y) = 0$

(iii)  $|f(x) - g(x)| < \text{dist}(y, f(\partial U)) \quad \forall x \in \partial U \Rightarrow \deg(f, U, y) = \deg(g, U, y)$

**BEWEIS:** (i) Sei  $U_1 = U, U_2 = \emptyset$ , einsetzen in **(D3)**

$$\Rightarrow \deg(f, \emptyset, y) = 0$$

$$i = 1: U_2 = \emptyset$$

$$\Rightarrow \deg(f, U, y) = \deg(f, U_1, y)$$

$i > 1$  : Induktion mittels **(D3)**

(ii)

$$y \notin f(U) \Rightarrow y \notin f(\overline{U}) \Rightarrow y \notin f(\overline{U} \setminus \emptyset)$$

$$\stackrel{(i)}{\Rightarrow} \deg(f, U, y) = 0 \quad (i = 1, U_1 = \emptyset)$$

(iii) Sei  $H(t, x) := (1 - t)f(x) + tg(x)$  und sei  $x \in \partial U$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow |H(t, x) - y| &= |f(x) - y + t(g(x) - f(x))| \\
&\geq |f(x) - y| - |g(x) - f(x)| \\
&\geq \text{dist}(y, f(\partial U)) - |g(x) - f(x)| > 0 \\
\Rightarrow y \notin H(t, \partial U) \quad \forall t &\Rightarrow H(t) \in D_y(\overline{U}, \mathbb{R}^n) \\
&\stackrel{(D4)}{\Rightarrow} \text{Behauptung.}
\end{aligned}$$

□

**Theorem 2.3** i)  $\deg(\cdot, U, y)$  ist lokal konstant in  $D_y(\overline{U}, \mathbb{R}^n)$

ii)  $\deg(f, U, \cdot)$  ist lokal konstant in  $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial U)$

iii) Seien  $H : [0, 1] \times \overline{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $y : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig (d.h.  $H$  ist eine Homotopie zwischen  $H(0) = H(0, \cdot)$  und  $H(1)$ ), so gilt

$$\deg(H(0), U, y(0)) = \deg(H(1), U, y(1)),$$

falls  $H(t) \in D_{y(t)}(\overline{U}, \mathbb{R}^n) \quad \forall t \in [0, 1]$

BEWEIS: Beachte:  $D_y(\overline{U}, \mathbb{R}^n)$  ist offen in  $C^0(\overline{U}, \mathbb{R}^n)$

i)  $\|f - g\|_{C^0, \overline{U}} < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - g(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in \partial U$  mit

$$\varepsilon := \text{dist}(y, f(\partial U)) \Rightarrow \deg(f, U, y) = \deg(g, U, y)$$

ii) Sei  $y_0 \notin f(\partial U)$  und  $y \in B_{\text{dist}(y_0, f(\partial U))}(y_0) \subset \mathbb{R}^n \setminus f(\partial U)$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \|(f - y) - f\| < \text{dist}(y_0, f(\partial U)) \\
&\stackrel{i)}{\Rightarrow} \deg(f - y, U, y_0) = \deg(f, U, y_0) \\
&\stackrel{(D1)}{\Rightarrow} \deg(f, U, y_0 + y) = \deg(f, U, y_0)
\end{aligned}$$

iii)  $H$  ist gleichmäßig stetig

$$\Rightarrow H : [0, 1] \rightarrow C^0(\overline{U}, \mathbb{R}^n) \quad t \mapsto H(t, \cdot)$$

ist auch stetig.  $H$  ist ein stetiger Weg in  $D_y(\overline{U}, \mathbb{R}^n)$ . Sei  $y$  fest

$$\Rightarrow \deg(H(t, U, y)) = \text{Const}$$

weil  $\deg(\cdot, U, y)$  konst. auf Zsh-Komponenten ist. Für  $y = y(t) :$

$$\begin{aligned}
\deg(H(0), U, y(0)) &= \deg(H(0) - y(0), U, 0) = \deg(H(t) - y(t), U, 0) \quad \forall t \in [0, 1] \\
&= \deg(H(1), U, y(1)).
\end{aligned}$$

□

**Lemma 2.4** Zwei nichtsinguläre Matrizen  $M_1, M_2 \in \text{Gl}(n)$  sind genau dann homotop in  $\text{Gl}(n)$ , falls

$$\text{sign det } M_1 = \text{sign det } M_2$$

BEWEIS: „ $\Rightarrow$ “ Sei  $M \in \text{Gl}(n)$ . Wegen der Linearität von  $\det$  in Zeilen können elementare Zeilenumformungen mit Hilfe stetiger Deformationen in  $\text{Gl}(n)$  erzeugt werden.

$$M \rightsquigarrow \text{diag}(m_1, \dots, m_m), \quad \text{mit } |m_i| = 1$$

weil  $\text{sign } \det M_1 = \text{sign } \det M_2$ .

$$H(t) := \begin{pmatrix} \pm \cos(\pi t) & \mp \sin(\pi t) \\ \sin(\pi t) & \cos(\pi t) \end{pmatrix}$$

ist eine Homotopie in  $\text{Gl}(n)$  von  $\text{diag}(\pm 1, 1)$  nach  $\text{diag}(\mp 1, -1)$ .  $i = n$  transformiere  $\text{diag}(\mp 1, -1)$ .

$i = n$  transformiere  $\text{diag}(m_i, \dots, m_i)$  nach  $\text{diag}(\pm 1, 1)$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} \text{sign } \det M & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

□

**Theorem 2.5** Sei  $f \in D_y^1(\overline{U}, \mathbb{R}^n)$ ,  $y \notin \text{CV}(f)$  und  $\deg$  eine Gradabbildung. Dann gilt

$$\deg(f, U, y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{sign } J_f(x),$$

wobei die Summe endlich ist.

BEWEIS: O.B.d.A.  $y = 0$  (nach **D1**). Alle  $x \in f^{-1}(0)$  sind isolierte Punkte in  $U$  (Homöomorphiesatz).  $f^{-1}(y)$  hat höchstens am Rand einen Häufungspunkt, aber  $0 \notin f(\partial U)$ .

$$\Rightarrow f^{-1}(0) = \{x^i\}_{i=1}^N$$

Wähle  $\delta > 0$  so klein, dass  $B_\delta(x^i)$  paarw. disjunkt.

$$\Rightarrow \deg(f, U, 0) = \sum_{i=1}^N \deg(f, B_\delta(x^i), 0)$$

beachte  $0 \notin f(\overline{U} \setminus \bigcup_{i=1}^N B_\delta(x^i))$ .

$$f \in C^1 \Rightarrow f(x) = df(x)(x - x^i) + |x - x^i|r(x - x^i) \quad \text{mit } r \in C^0(B_\delta(x^i), \mathbb{R}^n), \quad r(0) = 0.$$

$$H(t, x) := df(x^i)(x - x^i) + (1 - t)(x - x^i) + (x - x^i)$$

Zeige  $0 \notin H(t, \partial B_\delta(x^i))$ , für alle  $t \in [0, 1]$ .

$$J_f(x^i) \neq 0 \Rightarrow \exists \lambda > 0 : |df(x^i)(x - x^i)| \geq \lambda |x - x^i|$$

O.B.d.A. sei  $\delta$  so klein, dass  $|r(x - x^i)| < \lambda$  in  $B_\delta(x^i)$ .

$$\Rightarrow |H(t, x)| > |df(x^i)(x - x^i)| - (1 - t)|x - x^i|r(x - x^i) \geq \lambda \delta - \delta |r| > 0 \quad \forall x \in \partial B_\delta(x^i)$$

$$\stackrel{\text{(D4)}}{\Rightarrow} \deg(f, U, 0) = \sum_{i=1}^N \deg(df(x^i)(\cdot - x^i), B_\delta(x^i), 0)$$

Lemma 2.4

$$\Rightarrow \deg(df(x^i)(\cdot - x^i), B_\delta(x^i), 0) = \deg(\text{diag}(\text{sign } J_f(x^i), 1, \dots, 1), B_\delta(x^i), 0)$$

Falls  $J_f(x^i) > 0 \stackrel{(D2)}{\Rightarrow} \deg(I(\cdot - x^i), B_\delta(x^i), 0) = 1$ . Es genügt also,  $\deg(M(\cdot - x^i), B_1(x^i), 0)$  zu berechnen, wobei  $M = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$  ist.

$$\begin{aligned}
U_1 &:= B_1(x^i) = \{ \max_{1 \leq k \leq n} |x_k - x_k^i| < 1 \} \\
U_2 &:= U_1 + (2, 0, \dots, 0) \\
g(r) &= 2 - |r - 1|, \quad h(r) = 1 - r^2 \\
f_1(x) &:= (1 - g(x_1 - x_1^i)h(x_2 - x_2^i)) \dots h(x_n - x_n^i), \dots, 1) \\
f_2(x) &:= (1, x_2 - x_2^i, \dots, x_n - x_n^i) \\
f_1^{-1}(0) &= \{y, z\} \quad y = x^i, z = x^i + (2, 0, \dots, 0) \\
f_1|_{\partial U} &= f_2|_{\partial U} \Rightarrow \deg(f_1, U_2, 0) = 0 \\
\Rightarrow \deg(f_1, U, 0) &= \deg(f_1, U_1, 0) + \deg(f_2, U_2, 0) \quad (\star) \\
\Rightarrow \deg(M, B_1(x^i), 0) &= \deg(\partial f_1(y), B_1(x^i), 0) \\
&= \deg(f_1, U_1, 0) \stackrel{(\star)}{=} -\deg(f_1, U_2, 0) \\
&= -\deg(\partial f_1(z), U_2, 0) = \deg(\text{Id}, U_2, 0) = -1
\end{aligned}$$

□

## 2.2 Verallgemeinerung der Determinantenformel

Wir haben einen Kandidaten für  $\deg$  identifiziert; für  $f \in D'_Y(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ ,  $y \in \mathbb{R}^n \cap \text{RV}(f)$  gilt

$$\deg(f, \Omega, g) = \sum_{x_j \in f^{-1}(y)} \text{sign } J_f(x_j).$$

**Problem:** Nur für glatte  $f$ , und reguläre Punkte zu definieren. Programm zum Existenzbeweis: Verallgemeinerung der Determinanten-Formel auf

- kritische Werte  $y$ .
- nur stetige Funktionen  $f$ .

Drei Beispiele zur Illustration:

1.  $f(x) = x^2$ ,  $U = (-1, 1)$
2.  $f(x) = x^2$ ,  $U = (-1, 2)$
3.  $f(x) = x + 2 \sin(x)$ ,  $U = (-10, 10)$

Wie aus den Beispielen ersichtlich ist, haben wir noch (kleine) Schwierigkeiten, den Abbildungsgrad an kritischen Werten von  $f$  zu definieren. Stetige Fortsetzungen liegt aber nahe. Das funktioniert aber nur falls es von diesen nicht „zu viele“ gibt.

### Schritt 1:

Kritische Werte von  $f$ :

**Lemma 2.6 (Sard)** Es sei  $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  sei offen und beschränkt. Dann ist  $\text{CV}(f)$  eine Lebesgue-Nullmenge.



BEWEIS: Klar, falls  $f$  eine affine Abbildung ist. (Dimension des Bildraumes der (konstanten) Ableitung!) Wir linearisieren.

Es sei  $\text{CP}(f) := \{x \in \Omega \mid J_f(x) = 0\}$  die Menge der kritischen Punkte von  $f$ . Sei  $\{Q_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  eine abzählbare, offene Überdeckung von  $\Omega$  bestehend aus Würfeln, so dass

$$\overline{Q_i} \subset \Omega, i \in \mathbb{N}.$$

Es gilt

$$\text{CV}(f) = f(\text{CP}(f)) = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} f(\text{CP}(f) \cap Q_j)$$

Es reicht also zu zeigen, dass

$$|f(\text{CP}(f) \cap Q_j)|$$

für alle  $j \in \mathbb{N}$  verschwindet. Sei nun  $Q$  ein solcher Würfel,  $\rho$  dessen Kantenlänge. Sei  $\varepsilon > 0$ , und sei  $Q$  unterteilt in  $N^n$  Würfel  $Q^i$  der Seitenlänge  $\frac{\rho}{N}$ , so dass

$$|f(x) - f(\tilde{x}) - f'(\tilde{x})(x - \tilde{x})| \leq \int_0^1 |f'(\tilde{x} + t(x - \tilde{x})) - f'(\tilde{x})| \cdot |x - \tilde{x}| dt \leq \frac{\varepsilon \rho}{N} \quad \text{für alle } x, \tilde{x} \in Q^i \quad (4)$$

So ein  $N$  existiert, nachdem  $f'$  auf  $Q$  gleichmäßig stetig ist. Nun enthalte  $Q^i$  einen kritischen Punkt  $\tilde{x}_i \in \text{CP}(f)$ , ohne Einschränkung sei  $\tilde{x}_i = 0$ ,  $f(\tilde{x}_i) = 0$ , und setzen  $M = f'(\tilde{x}_i)$ . Wegen  $\det M = 0$  existiert eine ONB  $\{b^j\}_{j=1}^n$  mit

$$b^n \perp \text{Bild}(M)$$

Weiter gilt

$$Q^i \subset \left\{ \sum_{j=1}^n \lambda_j b^j \mid \|\lambda\|_2 \leq \sqrt{n} \frac{\rho}{N} \right\} \subset \left\{ \sum_{j=1}^n \lambda_j b^j \mid |\lambda_j| \leq \sqrt{n} \frac{\rho}{N} \forall 1 \leq j \leq n \right\}$$

Damit existiert  $C > 0$ , (unabhängig von  $i$ ), so dass

$$MQ^i \subset \left\{ \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j b^j \mid |\lambda_j| \leq C \cdot \frac{\rho}{N} \right\}$$

mit  $C = \sqrt{n} \max_{x \in \overline{Q}} |f'(x)|$ . Damit gilt nach (4) sogar, dass

$$f(Q^i) \subset \left\{ \sum_{j=1}^n \lambda_j b^j \mid |\lambda_j| \leq (C + \varepsilon) \frac{\rho}{N} \forall 1 \leq j \leq n-1, |\lambda_n| \leq \frac{\varepsilon \rho}{N} \right\}$$

Es folgt

$$|f(Q^i)| \leq \frac{\tilde{C} \varepsilon}{N^n},$$

falls in  $Q^i$  ein kritischer Punkt liegt. Es gibt maximal  $N^n$  Unterwürfel  $Q^i$  mit kritischen Punkten. Somit gilt

$$|f(Q \cap \text{CP}(f))| \leq C \cdot \varepsilon \quad \square$$

Dank Lemma 2.6 ist  $\mathbb{R}^n \setminus \text{CV}(f)$  dicht in  $\mathbb{R}^n$ . Das reicht leider (?) noch nicht.

Wir brauchen  $d_1 = d_2$ , um den Abbildungsgrad sinnvoll durch die Determinanten-Formel definieren zu können. (denn deg soll konstant sein auf Zusammenhangskomponenten, unabhängig von krit. Werten.)

**Idee:** Umschreiben der Determinantenformel als *Integral*. Es sei im Weiteren  $\eta_\varepsilon$  ein Standard-Mollifier (Standard-Diracfolge), d. h.

$$\eta_\varepsilon \in C_c^\infty(B_\varepsilon(0) \subset \mathbb{R}^n), \quad \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon = 1, \quad \eta_\varepsilon \geq 0$$

**Lemma 2.7** Sei  $f \in D_y^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ ,  $y \notin \text{CV}(F)$ . Dann gilt

$$\deg(f, \Omega, y) = \sum_{x_j \in f^{-1}(y)} \text{sign } J_f(x_j) = \int_{\Omega} \eta_{\varepsilon}(f(x) - y) J_f(x) \, dx \quad (5)$$

für alle  $\varepsilon$  hinreichend klein, d. h.

$$\varepsilon_0 > \varepsilon > 0, \quad \text{mit } \varepsilon_0 = \varepsilon_0(f, y)$$

Es gilt  $\text{supp}(\eta_{\varepsilon}(f(\cdot) - y)) \subset \Omega$  für  $\varepsilon < \text{dist}(y, f(\partial\Omega))$

BEWEIS: 1) Falls  $f^{-1}(y) = \emptyset$ , dann sei  $\varepsilon_0 = \text{dist}(y, f(\partial\Omega))$

2) Falls  $f^{-1}(y) := \{x^i\}_{1 \leq i \leq N}$ , sei  $\varepsilon_0 > 0$ , so dass

$$f^{-1}(B_{\varepsilon_0}(y)) = \bigcup_{i=1}^N U(x_i) =: \bigcup_{i=1}^N U_i$$

mit  $U_i \cap U_j = \emptyset$  für  $i \neq j$ . Aus dem Satz über die implizite Funktion (war ja klar, dass wir den mal brauchen) folgt für evtl. noch kleineres  $\varepsilon_0$ , dass

$$f|_{U_i} \text{ bijektiv, } J_f(x) \neq 0 \quad \forall x \in U_i.$$

Wieder gilt  $\eta_{\varepsilon}(f(x) - y) = 0$  für

$$x \in \overline{\Omega} \setminus \bigcup_{i=1}^N U_i$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \eta_{\varepsilon}(f(x) - y) J_f(x) \, dx &= \sum_{i=1}^N \text{sign } J_f(x^i) \cdot \int_{B_{\varepsilon_0}(x)} \eta_{\varepsilon}(\tilde{x}) \, d\tilde{x} \\ &= \sum_{x^i \in f^{-1}(y)} \text{sign } J_f(x^i) \end{aligned}$$

mit  $f(x) = \tilde{x}$ .

□

Die Integraldarstellung ergibt auch für kritische Punkte Sinn. Aber: Wegen der Abhängigkeit von  $\varepsilon_0$  von  $f$  und  $y$  ist auch der Wert des Integrals nicht *a priori* stetig in  $f, y$ , denn  $\varepsilon_0$  hängt ab von  $f$  und  $y$ .

Dieses Problem können wir beseitigen, wenn wir  $f \in C^2$  fördern. Wir brauchen zunächst einen Hilfssatz.

**Proposition 2.8** a) Sei  $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$ ,  $\text{supp } u \subset K$ ,  $K$  kompakt. Sei  $\varphi = \text{div } u$ . Dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \, dx = 0$$

b) Sei  $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^n)$ , und sei  $z \in \mathbb{R}^n$ . Dann gilt

$$\varphi(x+z) - \varphi(x) = \text{div} \left( z \cdot \int_0^1 \varphi(z+tz) \, dt \right)$$

c) Seien  $u, K, \varphi$  wie in a),  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen, beschränkt. Sei  $f \in C^2(\overline{\Omega})$  mit  $K \cap f(\partial\Omega) = \emptyset$ . Dann existiert  $v \in C^1(\overline{\Omega})$ , mit  $\text{supp } v \subset \Omega$ , so dass

$$\varphi(f(x)) J_f(x) = \text{div } v(x) \quad \text{auf } \Omega$$

BEWEIS: a) Klar!

b) Sei

$$\eta(x) := \int_0^1 \varphi(x - sz) \, ds.$$

$$\begin{aligned} (z \cdot \eta(x)) &= \frac{d}{dt} \eta(x + tz) \Big|_{t=0} = \int_0^1 \frac{d}{dt} \varphi(x + sz + tz) \Big|_{t=0} \, ds \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt} \varphi(x + sz) \, ds = \varphi(x + z) - \varphi(x) \end{aligned}$$

c) Es sei  $d_{ij}$  der  $(i, j)$ -Eintrag der Kofaktormatrix von  $(f')_{ij} = \partial_i f_j(x)$ . Es sei  $v_j(x) = \sum_{j=1}^n u_j(f(x)) d_{ij}(x)$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Es gilt  $K \cap f(\partial\Omega) = \emptyset$ ,  $f \in C(\overline{\Omega})$ , damit existiert  $\delta > 0$  mit  $\text{dist}(K, f(\overline{\Omega} \setminus f(\Omega_\delta))) > 0$ . Somit gilt  $\text{supp } v \subset \Omega_\delta \subset \Omega$ . Wir rechnen:

$$\partial_i v_i = \sum_{d_{ij}(x) \partial_k u_j(f(x))} \partial_i f_k + \sum_{j=1}^n u_j(f(x)) \partial_i d_{ij}(x)$$

*Behauptung 1:*

$$\sum_{i=1}^n \partial_i d_{ij}(x) = 0$$

*Behauptung 2:*

$$\sum_{i=1}^n d_{ij}(x) \partial_i f_k(x) = \delta_{ij} \cdot J_f(x)$$

Somit gilt:

$$\begin{aligned} \text{div } u(x) &= \sum_{k,j} \partial_k u_j(f(x)) \cdot \left( \sum_{i=1}^n d_{ij}(x) \partial_i f_k(x) \right) + \sum_{i=1}^n u_j(f(x)) \left( \sum \partial_i d_{ij}(x) \right) \\ &= \sum_{k,j} \partial_k u_j(f(x)) \delta_{jk} J_f(x) = \varphi(f(x)) J_f(x) \end{aligned}$$

Behauptungen: Siehe Übungsblatt 2. Wir wollen nun zeigen, dass der über die Determinantenformel definierte Abbildungsgrad konstant ist auf Zusammenhangskomponente. Zu zeigen:  $\deg(f, \Omega, y_1) = \deg(f, \Omega, y_2)$ .

**Lemma 2.9** Sei  $f \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ ,  $y_0 \notin f(\partial\Omega)$ ,

$$\rho := \text{dist}(y_0, f(\partial\Omega))$$

Dann ist  $\deg(f, \Omega, \cdot)$  (Definiert durch die Determinantenformel) konstant auf

$$B_\delta(y_0) \cap \text{RV}(f)$$

BEWEIS: Sei  $y^j \in B_\delta(y_0) \cap \text{RV}(f)$ ,  $j = 1, 2$ , sei  $\delta := \rho - \max_{j=1,2} \|y^j - y_0\|$ . Sei  $\varepsilon > 0$ , so dass

$$\deg(f, \Omega, y^j) = \int \eta_\varepsilon(f(x) - y^j) J_f(x) \, dx \quad (\text{nach Lemma 2.7})$$

mit Proposition 2.8 b) gilt

$$\begin{aligned} \eta_\varepsilon(x - y^2) - \eta_\varepsilon(x - y^1) &= \eta_\varepsilon(x - y^1 + (y^1 - y^2)) - \eta_\varepsilon(x - y^1) \\ &= \text{div } w(x) \quad \text{mit} \\ w(x) &= (y^1 - y^2) \int_0^1 \eta_\varepsilon(x - y^1 + t(y^1 - y^2)) \, dt \end{aligned}$$

*Behauptung:* Es gilt  $\text{supp } w \subset B_\delta(y_0)$

BEWEIS: Sei  $x \in \text{supp } w$ . Damit existiert  $t \in [0, 1]$  mit  $|x - y^1 + t(y^1 - y^2)| < \varepsilon$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |x - y_0| &\leq \varepsilon + |y^1 - t(y^1 - y^2) - y_0| \leq \varepsilon + |(1-t)(y^1 - y_0) + t(y^2 - y_0)| \\ &\varepsilon + \rho - \delta < \rho \end{aligned}$$

Damit gilt aber, dass  $f(\partial\Omega) \cap \text{supp } w = \emptyset$ . Mit Proposition 2.8 e) existiert

$$v \in C^1(\Omega), \text{supp } v \subset \Omega.$$

und

$$(\eta_\varepsilon(f(x) - y^2) - \eta_\varepsilon(f(x) - y^1)) J_f(x) = \text{div } v(x)$$

Mit der Proposition 2.8 a) folgt die Behauptung.

□

**Definition 2.10** Sei  $f \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ ,  $y \in f(\partial\Omega)$ . Wir setzen

$$\deg(f, \Omega, y) = \deg(f, \Omega, \tilde{y}) = \sum_{x \in f^{-1}(\tilde{y})} \text{sign } J_f(x),$$

wobei  $\tilde{y} \in \text{RV}(f)$  mit

$$|\tilde{y} - y| < \text{dist}(y, f(\partial\Omega))$$

*Behauptung:*  $\deg$  ist somit nach den vorherstehenden Überlegungen wohldefiniert.

## 2. Schritt: Nur stetige Funktionen $f$

Auch hier die Idee: Sei  $f \in D_y(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ . Wir suchen  $\tilde{f} \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$  hinreichend nahe an  $f$  (in derselben Zushgskomponente von  $D_y(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ ) und übertragen den Wert von  $\deg(\cdot, \Omega, y)$  von  $\tilde{f}$  auf  $f$ . Es bleibt zu zeigen, dass die so definierte Funktion stetig ist.

**Lemma 2.11** Sei  $f \in D_y^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ , sei  $g \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ . Dann existiert  $\varepsilon > 0$ , so dass

$$\deg(f + tg, \Omega, y) = \deg(f, \Omega, y) \quad \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$$

BEWEIS: 1)  $f(y) = \emptyset \Rightarrow (f + tg)^{-1}(y) = \emptyset$  falls

$$|t| < \frac{\text{dist}(y, f(\overline{\Omega}))}{\|g\|_\infty}$$

2)  $y \in \text{RV}(f) \Rightarrow f^{-1}(y) = \{x\}_{i=1}^N$ . Mithilfe des Satzes über die implizite Funktion finden wir

$$U(x^i) =: U^i$$

disjunkte Umgebungen, so dass eindeutige Lösungen  $x^i(t) \in U^i$  existieren von

$$(f + tg)(x) = y \quad \forall |t| < \varepsilon$$

Wir können (zumindest auf evtl. noch kleineren  $U^i$ ) annehmen, dass das Vorzeichen von  $J_{f+tg}$  konstant ist auf  $U^i$ . Sei

$$\varepsilon_2 = \frac{\text{dist}(y, f(\Omega \setminus \bigcup_{i=1}^N U^i))}{\|g\|_\infty}.$$

Dann gilt  $\text{dist}(y, (f + tg)(\partial\Omega)) > 0 \quad \forall |t| < \varepsilon_2$ . Das Lemma gilt somit für  $\varepsilon = \min(\varepsilon, \varepsilon_2)$

3)  $y \in \text{CV}(f)$ . Sei dann  $\tilde{y} \in \text{RV}(f)$ .

$$|y - \tilde{y}| < \frac{\rho}{3} = \frac{1}{3} \text{dist}(y, f(\partial\Omega)).$$

Nach Definition 2.10 gilt

$$\deg(f, \Omega, y) = \deg(f, \Omega, \tilde{y}).$$

Sei  $\tilde{\varepsilon} > 0$  mit  $\deg(f, \Omega, \tilde{y}) = \deg(f + tg, \Omega, \tilde{y})$  für  $|t| < \tilde{\varepsilon}$  (Nach Schritt 2). Mit  $\varepsilon = \min(\tilde{\varepsilon}, \frac{\rho}{3\|g\|_\infty})$  gilt:

$$|\tilde{y} - (f + tg)(x)| \geq \frac{\rho}{3} \quad \forall x \in \partial\Omega$$

Somit gilt

$$|\tilde{y} - y| < \text{dist}(\tilde{y}, (f + tg)(\partial\Omega))$$

also

$$\deg(f + tg, \Omega, \tilde{y}) = \deg(f + tg, \Omega, y)$$

Es folgt

$$\deg(f, \Omega, y) = \deg(f + tg, \Omega, y)$$

□

**Theorem 2.12 (Existenz und Eindeutigkeit des Brower'schen Abbildungsgrades)** *Es existiert eine eindeutige Abbildung*

$$\deg(f, \Omega, y)$$

mit den Eigenschaften **(D1)**–**(D4)**. Weiter gilt

$$\deg(\cdot, \Omega, y) : D_y(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{Z}$$

ist konstant auf Zusammenhangskomponente von  $D_y(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ . Für  $f \in D_y(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$  ist  $\deg(f, \Omega, y)$  gegeben durch

$$\deg(f, \Omega, y) = \sum_{x \in \tilde{f}^{-1}(y)} \text{sign } J_{\tilde{f}}(x)$$

wobei

$$\tilde{f} \in D_y^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$$

beliebig aus derselben Komponente von  $D_y(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$  wie  $f$  gewählt werden kann mit  $y \in \text{RV}(\tilde{f})$

**BEWEIS:** Aus Lemma 2.9 und 2.11 folgt, dass  $\deg$  wohldefiniert ist und lokal konstant mit Werten in  $\mathbb{Z}$ . Die Abbildung  $\deg$  auf Zusammenhangskomponenten.

**(D2)** → klar.

**(D1)** gilt nachdem diese Bedingung per Konstruktion für die Determinatenformel gilt.

**(D3)** Wir wählen  $\|f - \tilde{f}\|_\infty < \text{dist}(y, f(\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cap \Omega_2)))$ . **D3** gilt per Konstruktion für  $\tilde{f}$ , sonst für  $f$ .

**(D4)** folgt aus der Konstruktion von  $f$  auf Zusammenhangskomponente.

□

### Beispiele:

1) Sei

$$f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 + \cos(x_1 + x_2) \\ x_2 + 2x_1 + \sin(x_1 + x_2) \end{pmatrix}$$

und

$$g(x_1, x_2) := \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 \\ x_2 + 2x_1 \end{pmatrix}$$

Es gilt  $|g(x)| = \sqrt{5}|x|$  und  $|f(x) - g(x)| = \sqrt{\sin^2(x_1 + x_2) + \cos^2(x_1 + x_2)} = 1$ . Sei  $h(t) = (1-t)g + tf = g + t(f - g)$ .

$$|h(t)| \geq |g| - t|f - g| > 0 \quad \text{für } |x| > \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow \deg(f, B_r(0), 0) = \deg(g, B_r(0), 0) = 1 \quad \text{für } r > \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Somit existiert eine Lösung  $x : f(x) = 0$ .

2)

**Theorem 2.13** Ein stetiges Vektorfeld im  $\mathbb{R}^n$ , das auf einer Kugeloberfläche überall nach außen zeigt, muss auf einem Punkt im Innern der Kugel verschwinden.

Anders formuliert, sei  $f : \overline{B_R(0)} \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig, so dass  $f(x) \cdot x > 0 \quad \forall |x| = R$ . Dann existiert ein  $x_0 \in B_R(0)$  mit  $f(x_0) = 0$ .

BEWEIS: Wir haben  $\deg(\text{Id}, B_R(0), y) = 1$  für  $y \in B_R(0)$ . Angenommen,  $f(x) \neq 0$  für alle  $x \in B_R(0)$ . Dann gilt  $f^{-1}(0) \cap B_R(0) = \emptyset$ .

$$\Rightarrow \deg(f, B_R(0), 0) = 0$$

Sei  $H(t) = (1-t)\text{Id} + tf$ .

$$\deg(H(0), B_R(0), 0) = 1$$

$$\deg(H(1), B_R(0), 0) = 0.$$

Es existiert ein  $t_0 \in (0, 1)$ , so dass  $H(t_0) \notin D_0(\overline{B_R(0)}, \mathbb{R}^n)$ .

$$\exists x_0 \in \partial B_R(0) \cdot (H(t_0))(x_0) = 0.$$

$$\begin{aligned} 0 &= H(t_0)(x_0) \\ \Rightarrow 0 &= H(t_0)(x_0) \cdot x_0 = \underbrace{(1-t_0)R^n}_{>0} + \underbrace{t_0 f(x_0)x_0}_{>0} > 0 \end{aligned}$$

Widerspruch!

□

## 2.3 Der Brouwer'sche Fixpunktsatz

Der Brouwer'sche Fixpunktsatz ist eine Folgerung aus den Eigenschaften des Abbildungsgrades. Er besagt, dass stetige Abbildungen, die kompakte, konvexe Mengen im  $\mathbb{R}^n$  (oder Mengen, die dazu homöomorph sind) in sich selbst abbilden, einen Fixpunkt besitzen.

### 2.3.1 Einschub:

**Zerlegung der Eins:** Sei  $\{U_i\}_{i \in I}$  eine Überdeckung von  $X$ ,  $X$  ein topologischer Raum.  $\{\varphi_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  ist eine  $\{U_i\}_{i \in I}$  untergeordnete lokal endliche Zerlegung der Eins, falls gilt

- $\varphi_\lambda \in C(U, [0, 1]) \forall \lambda$ .
- $\forall \lambda \in \Lambda \exists i \in I : \text{supp } \varphi_\lambda \subset U_i$
- $\sum_{\lambda \in \Lambda} \varphi_\lambda = 1$
- $\forall x \in X \exists U(x)$  Umgebung von  $x$ , so dass nur *endlich viele*  $\lambda \in \Lambda$  existieren, mit  $U(x) \cap \text{supp } \varphi_\lambda \neq \emptyset$  (lokal endlich).

**Konstruktion** aus einer lokal endlichen Überdeckung  $(V_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  ( $\forall x \in X \exists U(x)$  Umgebung:  $U(x) \cap V_\lambda \neq \emptyset$  für endlich viele  $\lambda \in \Lambda$ .) in metrischen Räumen  $(X, d)$ .

- Sei  $\alpha(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \text{dist}(x, X \setminus V_\lambda) > 0 \forall x \in X$ , mit  $\text{dist}(x, \emptyset) := 1$ .
- $\varphi_\lambda(x) := \frac{1}{\alpha(x)} \text{dist}(x, X \setminus V_\lambda) \in [0, 1]$ ,  $\varphi_\lambda = 0$  für  $x \notin V_\lambda$ .

**„Konstruktion“** einer lokal endlichen Überdeckung  $\{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ , die eine offen Überdeckung  $\{U_i\}_{i \in I}$  verfeinert (d.h.  $\forall \lambda \in \Lambda \exists i \in I, V_\lambda \subset U_i$ ).

Die Existenz einer solchen lokal endlichen verfeinernde Überdeckung zu jeder offenen Überdeckung ist die Definition der *Parakompaktheit*.

**Theorem 2.14** Jeder metrische Raum ist parakompakt.

BEWEISIDEE: Angenommen  $I = \mathbb{N}$  also wohlgeordnet. (jede Teilmenge besitzt ein eindeutiges kleinstes Element.) Wir setzen für  $i \in I, n \in \mathbb{N}$ .

$$D_{in} = \bigcup_{x \in \Phi(i,n)} B_{2^{-n}}(x)$$

$$\Phi(i,n) := \left\{ x \in X \mid \text{mit} \begin{cases} i \text{ ist die kleinste Zahl, so dass } x \in U_i \\ x \notin D_{jm} \text{ für } m < n \\ B_{3 \cdot 2^{-n}} \subset U_i \end{cases} \right\}$$

klar:  $\{D_{in}\}$  verfeinert  $\{U_i\}$

**Überdeckung:** Klar, denn für jedes  $x \in X$  finden in ein kleinstes  $i \in I = \mathbb{N}$  und ein  $n$  hinreichend groß.

**lokale Endlichkeit:** (s.Artikel). Ist  $I$  nun eine beliebige Indexmenge, so lässt sich diese wohlordnen (*Zorn'sches Lemma*), und die Wohlordnung ist die einzige Eigenschaft von  $I$ , die wir benutzt haben.

□

**Theorem 2.15 (Fortsetzung stetiger Funktionen)** Sei  $X$  ein metrischer Raum,  $Y$  normierter Raum. Sei  $K \subset X$  abgeschlossen. Sei  $F \in C(K, Y)$ . Dann besitzt  $F$  eine stetige Fortsetzung  $G : X \rightarrow Y$ , so dass

$$G(X) \subset \text{conv } F(K)$$

BEWEIS: Wir betrachten die offene Überdeckung

$$\{B_{\rho(x)}(x)\}_{x \in X \setminus K} \text{ von } X \setminus K$$

mit  $\rho(x) = \frac{1}{2} \text{dist}(x, K)$ . Wir wählen nun eine lokal endliche Zerlegung der Eins  $\{\varphi_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ , welche der offenen Überdeckung untergeordnet ist. Sei

$$G(x) := \begin{cases} F(x) & \text{für } x \in K \\ \sum_{\lambda \in \Lambda} \varphi_\lambda(x) \cdot F(x_\lambda) & \text{für } x \in X \setminus K \end{cases},$$

wobei  $x_\lambda$  beliebig in  $K$  so gewählt ist, dass

$$\text{dist}(x_\lambda, \text{supp } \varphi_\lambda) \leq 2 \cdot \text{dist}(K, \text{supp } \varphi_\lambda).$$

$G$  ist offensichtlich stetig auf  $X \setminus \partial K$  und

$$G(X) \subset \text{conv } G(K).$$

Sei also  $x_0 \in \partial K$  und sei  $\varepsilon > 0$ . Wir wählen  $\delta > 0$ , so dass

$$\|F(x) - F(x_0)\| \leq \varepsilon \quad \forall x \in K \quad \text{mit} \quad d(x, x_0) \leq 9\delta.$$

Es bleibt zu zeigen, dass

$$\|G(x) - F(x_0)\| \leq \varepsilon \quad \forall x \in X \setminus K \quad \text{mit} \quad d(x, x_0) \leq \delta$$

a Sei also  $x \notin K$ , dann gilt

$$\|G(x) - F(x_0)\| \leq \sum_{\lambda \in \Lambda} \varphi_\lambda(x) \|F(x_\lambda) - F(x_0)\|$$

Nach Konstruktion liegt  $x_\lambda$  nicht weit von  $x$  entfernt, damit nicht weit von  $x_0$ , falls  $x \in \text{supp } \varphi_\lambda$ . In der Tat gilt für  $x \in \text{supp } \varphi_\lambda$ :

$$\begin{aligned} d(x, x_\lambda) &\leq \text{dist}(x_\lambda, \text{supp } \varphi_\lambda) + \underbrace{\text{diam}(\text{supp } \varphi_\lambda)}_{=\sup_{x,y \in \text{supp } \varphi_\lambda} d(x,y)} \\ &\leq 2\text{dist}(K, \text{supp } \varphi_\lambda) + \text{diam}(\text{supp } \varphi_\lambda) \end{aligned}$$

Nachdem  $\{\varphi_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  der Überdeckung  $\{B_{\rho(x)}\}_{x \in X \setminus K}$  untergeordnet ist, existiert  $\tilde{x} \in X \setminus K$ , so dass

$$\text{supp } \varphi_\lambda \subset B_{\rho(\tilde{x})}(\tilde{x})$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{diam}(\text{supp } \varphi_\lambda) &\leq 2\rho(\tilde{x}) = \text{dist}(\tilde{x}, K) \leq 2\text{dist}(K, B_{\rho(\tilde{x})}(\tilde{x})) \leq 2\text{dist}(K, \text{supp } \varphi_\lambda) \\ \Rightarrow d(x_0, x_\lambda) &\leq 4\text{dist}(K, \text{supp } \varphi_\lambda). \end{aligned}$$

Und es folgt

$$\begin{aligned} d(x_0, x_\lambda) &\leq d(x_0, x) + d(x, x_\lambda) \\ &\leq d(x_0, x) + 4\text{dist}(K, \text{supp } \varphi_\lambda) \\ &\leq d(x_0, x) + 8\text{dist}(K, \text{supp } \varphi_\lambda) \\ &\leq d(x_0, x) + 8d(x_0, x) = 9d(x_0, x) \leq \delta. \end{aligned}$$

Nach Wahl von  $\delta$  gilt

$$\|F(x_\lambda) - F(x_0)\| \leq \varepsilon \quad \forall \lambda \in \Lambda : \varphi_\lambda(x) \neq 0.$$

Somit gilt

$$\|G(x) - G(x_0)\| \leq \varepsilon \quad \text{für} \quad d(x, x_0) \leq \delta. \quad \square$$

**Bemerkung:** Mit Hilfe dieses Satzes und dem Abbildungsgrad lässt sich der sog. „Igelsatz“ zeigen, der besagt, dass man einen Igel nicht stetig kämmen kann. Übungsaufgabe.

**Theorem 2.16 (Brouwer'scher Fixpunktsatz)** Sei  $K$  ein topologischer Raum, der zu einer kompakten konvexen Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  homöomorph ist. Sei  $f \in C(K, K)$ . Dann besitzt  $f$  einen Fixpunkt.

sss



BEWEIS: 1.  $K = \overline{B_r(0)} \subset \mathbb{R}^n$ . Falls für  $f$  ein Fixpunkt auf dem Rand existiert, dann sind wir fertig. Ansonsten gilt für  $H(t) = \text{Id} - tf$ , dass  $0 \notin H(t)(\partial B_r(0))$ , nachdem

$$|H(t)(x)| \geq |x| - t|f(x)| \geq (1-t)r > 0 \quad \text{für } 0 \leq t < 1, \quad x \in \partial B_r(0).$$

Nach der Annahme der Nichtexistenz eines Fixpunktes auf  $\partial B_r(0)$  ist auch  $H(1)(x) \neq 0 \quad \forall x \in \partial B_r(0)$ .

$$\Rightarrow \deg(\text{Id} - f, B_r(0), 0) = \deg(\text{Id}, B_r(0), 0) = 1.$$

Somit existiert  $x \in B_r(0)$  mit  $x = f(x)$ .

2. Sei nun  $K \subset \mathbb{R}^n$  konvex, kompakt. Für ein  $\rho > 0$  gilt  $K \subset B_\rho(0)$  und gemäß Satz 2.15 können wir  $f$  stetig durch  $g$  auf  $\overline{B_\rho(0)}$  fortsetzen mit

$$g(\overline{B_\rho(0)}) \subset \text{conv } K = K.$$

Nach 1. finden wir  $x \in \overline{B_\rho(x)}$  mit  $x = g(x)$ . Es gilt  $g(x) \in K$ , somit folgt  $x \in K$  und wir haben  $x \in K$  mit  $f(x) = x$ .

3. Sei  $K$  homöomorph zu  $K^* \subset \mathbb{R}^n$  kompakt, konvex. Sei  $h$  die entsprechende Homöomorphie. nach 2. besitzt  $h \circ f \circ h^{-1}$  einen Fixpunkt  $x^* \in K^*$ . Damit ist aber  $x = h^{-1}(x^*) \in K$  ein Fixpunkt von  $f$ .

□

**Bemerkung:** 1. Die Bedingungen sind tatsächlich notwendig. Gegenbeispiele siehe Übung.

2. Es existiert auch eine stetige Abbildung  $f \in C(\overline{B_1(0)}, \overline{B_1(0)})$ ,  $B_1 \subset X$  separabler  $\infty$ -dimensionaler Hilbertraum ohne Fixpunkt.

→ Beispiel von Kakutani später.

→ Schauder'scher Fixpunktsatz.

3. Im eindimensionalen Fall ist 2.16 nichts anderes als der Zwischenwertsatz angewendet auf  $x - f(x)$ .

4. Vergleich mit dem Banach'schen Fixpunktsatz: Wesentlich geringere Anforderungen an den Operator (nur Stetigkeit), dafür hohe Anforderungen an den Raum (endlichdim., kompakt, konvex). Wir bekommen keine Eindeutigkeitsaussage.

### Ein Anwendungsbeispiel

Existenz positiver (bzw. nichtnegativer) Eigenwerte und Eigenfunktionen. Sei  $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$  eine Matrix und sei  $a_{ij} \geq 0 \quad \forall (i, j)$ . Dann existiert  $\lambda \geq 0$ ,  $x = (x_i)_{i=1}^n$ ,  $x_i \geq 0 \quad \forall i$  mit

$$Ax = \lambda x \tag{6}$$

BEWEIS: Sei

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_j \geq 0, \sum_i x_i = 1\}$$

kompakt und konvex.

- 1) Falls  $Ax = 0$  für ein  $x \in K$ , gilt (6) mit  $\lambda = 0$ .

2) Sei  $Ax \neq 0 \ \forall x \in K$ . Dann existiert  $\alpha > 0$  mit

$$\sum_i (Ax)_i \geq \alpha \quad \forall x \in K.$$

Es sei also

$$f: x \mapsto \frac{Ax}{\sum_i (Ax)_i}; \quad (f(x))_i \geq 0 \quad \forall i$$

und es gilt

$$\sum_i (f(x))_i = 1 \quad \forall x \in K.$$

Dann ist  $f(K) \subset K$  und nach Satz 2.16 existiert ein Fixpunkt  $x \in K$  mit  $x = f(x)$ , d.h.

$$Ax = \lambda x \quad \text{mit} \quad \lambda = \sum_i (Ax)_i > 0$$

□

## 2.4 Weitere Eigenschaften des Abbildungsgrades

Sei  $m < n$ , wir identifizieren im Folgenden den  $\mathbb{R}^m$  mit dem Unterraum

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_{m+1} = \dots = x_n = 0\} \subset \mathbb{R}^n.$$

**Theorem 2.17 (Reduktionseigenschaften des Abbildungsgrades)** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und beschränkt,  $\Omega \cap \mathbb{R}^m \neq \emptyset$  und sei

$$f: \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ stetig, } g = \text{Id} - f$$

Sei  $y \in \mathbb{R}^m$ ,  $y \notin g(\partial\Omega)$ . Dann gilt

$$\deg(g, \Omega, y) = \deg(g|_{\overline{\Omega} \cap \mathbb{R}^m}, \Omega|_{\mathbb{R}^m}, y).$$

BEWEIS: Sei  $\Omega_m = \Omega \cap \mathbb{R}^m \neq \emptyset$  offen, beschränkt im  $\mathbb{R}^m$ , und  $g_m := g|_{\overline{\Omega}_m}$ . Es gilt

$$\partial\Omega_m = \partial\Omega \cap \mathbb{R}^m.$$

und

$$g_m(\overline{\Omega}_m) \subset \mathbb{R}^m, \quad y \notin g_m(\partial\Omega_m).$$

$\Rightarrow \deg(g_m, \Omega_m, y)$  ist definiert (als Abbildungsgrad im  $\mathbb{R}^m$ ).

1) Sei  $g \in C^1(\overline{\Omega})$  und  $y \in \text{RV}(g)$  und  $x \in \Omega$ ,  $g(x) = y$ .

$$\Rightarrow x = y = f(x) \in \mathbb{R}^m \Rightarrow x \in \Omega_m.$$

Somit haben wir

$$g^{-1}(y) = g_m^{-1}(y).$$

Nach der Determinantenformel genügt es nun zu zeigen, dass

$$J_{g_m}(x) = J_g(x) \quad \text{für } x \in \Omega_m.$$

Es sei  $\text{Id}_k$  die  $k \times k$ -Einheitsmatrix. Es gilt

$$\begin{aligned} J_{g_m}(x) &= \det(\text{Id}_m - f'(x)) \quad (f'|_{\Omega_m}) \\ J_g(x) &= \det \begin{pmatrix} \text{Id}_m - (\partial_j f_i(x)) & -\partial_j f_i \\ 0 & \text{Id}_{n-m} \end{pmatrix} \quad \text{wegen } f(\overline{\Omega}) \subset \mathbb{R}^m. \end{aligned}$$

Die gewünschte Aussage folgt sofort durch Entwicklung der Determinante nach den letzten  $n - m$  Zeilen.

- 2) Der allgemeine Fall folgt durch Wahl von  $\tilde{g} = \text{Id} - \tilde{f}$  hinreichend nah an  $g$ , so dass  $\tilde{g}$  die in 1. geforderten Eigenschaften besitzt.

□

Es sei nun wieder  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen, beschränkt,  $f \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ . Nach Satz 2.3 gilt, dass  $\deg(f, \Omega, \cdot)$  konstant ist auf Zusammenhangskomponenten von  $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$ . Wir bezeichnen diese Zusammenhangskomponenten mit  $\{G_j\}_{j \in I}$  und schreiben  $\deg(f, \Omega, y) = \deg(f, \Omega, G_j)$  für  $y \in G_j$

**Theorem 2.18 (Produktregel)** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen, beschränkt. Seien  $G_j$  die Zusammenhangskomponenten von  $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$  für  $f \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$  und sei

$$g \circ f \in D_y(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n), \quad y \in \mathbb{R}^n$$

Dann gilt

$$\deg(g \circ f, \Omega, y) = \sum_j \deg(f, \Omega, G_j) \cdot \deg(g, G_j, y) \quad (7)$$

**BEWEIS:** (Endlichkeit der Summe) Es gilt  $f(\overline{\Omega})$  ist kompakt, somit existiert  $r > 0$  mit  $f(\overline{\Omega}) \subset B_r(0)$ . Nachdem  $g^{-1}(y)$  abgeschlossen ist, gilt  $g^{-1}(y) \cap B_r(0)$  kompakt ist.  $\{G_j\}_{j \in I}$  ist eine offene Überdeckung dieser Menge, es genügen somit endlich viele  $\{G_j\}_{j=1}^N$  um  $g^{-1}(y) \cap B_r(0)$  zu überdecken.

- 1) Wir nehmen an, dass  $f \circ g \in C^1(\overline{\Omega})$ ,  $y \in \text{RV}(g \circ f)$ . Es gilt nach der Kettenregel, dass

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \circ f'(x)$$

Die Behauptung folgt dann durch eine längere Rechnung.

$$\begin{aligned} \deg(g \circ f, \Omega, y) &= \sum_{x \in (g \circ f)^{-1}(y)} \text{sign } J_{g \circ f}(x) = \sum_{x \in (g \circ f)^{-1}(y)} (\text{sign } J_g(f(x))) \cdot (\text{sign } J_f(x)) \\ &= \sum_{z \in g^{-1}(y)} \text{sign } J_g(z) \cdot \sum_{x \in f^{-1}(z)} \text{sign } J_f(x) = \sum_{z \in g^{-1}(y)} \text{sign } J_g(z) \cdot \deg(f, \Omega, z) \end{aligned}$$

Mit der Überdeckung  $\{G_j\}_{j \in I}$  von  $g^{-1}(y)$  gilt

$$\begin{aligned} \deg(g \circ f, \Omega, y) &= \sum_{j=1}^m \sum_{z \in g^{-1}(y) \cap G_j} \text{sign } J_g(z) \cdot \deg(f, \Omega, z) = \sum_{j=1}^N \deg(f, \Omega, G_j) \cdot \sum_{z \in g^{-1}(y) \cap G_j} \text{sign } J_g(z) \\ &= \sum_{j=1}^N \deg(f, \Omega, G_j) \cdot \deg(g, G_j, y) \end{aligned}$$

Diese Formel gilt nun natürlich auch für  $y \in \text{CV}(g \circ f)$  und für  $g$  nur stetig. Etwas problematischer ist der Fall, dass  $f$  nur stetig ist, da sich bei der Modifikation von  $f$  die Mengen  $G_j$  ändern.

Es sei

$$L_l = \{z \in \mathbb{R}^n \setminus (\partial\Omega) \mid \deg(f, \Omega, z) = l\}$$

Für  $l \neq 0$  gilt, dass  $L_l$  aus einer Vereinigung von Mengen  $G_j$  bestehen muss. Sei nun  $\tilde{f} \in C^1(\overline{\Omega})$ , so dass  $|f(x) - \tilde{f}(x)| < \frac{1}{2} \text{dist}(g^{-1}(y), f(\partial\Omega))$  für  $x \in \overline{\Omega}$ . Wir definieren  $\tilde{G}_j$  und  $\tilde{L}_l$  entsprechend für die Funktion  $\tilde{f}$ . Es gilt

$$L_l \cap g^{-1}(y) = \tilde{L}_l \cap g^{-1}(y). \quad \square$$

nach Satz 2.2 (iii). ( $\|f(x) - \tilde{f}(x)\| < \text{dist}(y, f(\partial\Omega)) \quad \forall x \in \partial\Omega \Rightarrow \deg(f, \Omega, y) = \deg(\tilde{f}, \Omega, y)$ .) Es gilt somit

$$\begin{aligned} \deg(g \circ f, \Omega, y) &= \deg(g \circ \tilde{f}, \Omega, y) \\ &= \sum_j \deg(f, \Omega, \tilde{G}_j) \cdot \deg(g, \tilde{G}_j, y) = \sum_{l \neq 0} l \cdot \deg(g, \tilde{L}_l, y) = \sum_{l \neq 0} l \cdot \deg(g, L_l, y) \\ &= \sum_j \deg(f, \Omega, G_j) \cdot \deg(g, G_j, y) \end{aligned}$$

Eine wichtige Anwendung der Produktformel ist das folgende

**Theorem 2.19 (Jordanische Kurvensatz)** Es seien  $C_1$  und  $C_2$  zwei kompakte, zueinander homöomorphe Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$ . Dann besitzen  $\mathbb{R}^n \setminus C_1$  und  $\mathbb{R}^n \setminus C_2$  die selbe Anzahl von Zusammenhangskomponenten.

## 2.5 Der Fixpunktsatz von Kakutani und eine Anwendung in der Spieltheorie

Im Folgenden beweisen wir die sogenannten *Nash-Gleichgewichte* in  $n$ -Personen. Als Vorbereitung ist es notwendig, den *Brouwer'schen Fixpunktsatz* auf mengenwertige Funktionen zu verallgemeinern.

Für  $K \subset \mathbb{R}^n$  konvex, kompakt, bezeichnen wir mit  $CS(K)$  die Menge der konvexen (Teil-)Mengen von  $K$ .

**Theorem 2.20 (Kakutani)** Sei  $K \subset \mathbb{R}^n$  kompakt, konvex  $f : K \rightarrow CS(K)$ . Falls die Menge

$$\Gamma := \{(x, y) \in K \times K \mid y \in f(x)\}$$

in  $K \times K$  abgeschlossen ist, dann existiert  $x \in K$  mit  $x \in f(x)$ .

BEWEIS: In einer Dimension:  $K = [v_1, v_2]$ , wir wählen  $y_j \in f(v_j)$  und definieren

$$f^1(x) = \sum_{j=1}^2 \lambda_j(x) y_j,$$

wobei  $\lambda_j(x)$  die baryzentrischen Koordinaten von  $x$  bezeichne, d.h.

$$\lambda_j(x) \geq 0, \quad \sum_{i=1}^2 \lambda_i(x) = 1, \quad x = \sum_{j=1}^2 \lambda_j(x) v_j$$

Nach Konstruktion ist  $f^1 : K \rightarrow K$  stetig, besitzt mit Brouwer also einen Fixpunkt. Das hilft noch nicht viel. Wir betrachten die  $k-1$ -te baryzentrische Unterteilung der Menge  $K$  gegeben durch die Vertices

$$\{v_i\}_{i=1}^{2^{k-1}+1}$$

Wir wählen wieder  $y_j \in f(v_j)$  und definieren  $f^k(v_j) = g_j$  interpolieren auf den unterteilten Intervallen wie gehabt durch baryzentrische Koordinaten. Es gilt

$$f^k : K \rightarrow K$$

ist stetig, also mit Fixpunkt

$$x^k = \sum_{i=1}^2 \lambda_i^k v_i^k = \sum_{i=1}^2 \lambda_i^k y_i^k \quad \text{mit} \quad y_i^k = f^k(v_i^k) \quad (8)$$

in einem Teilintervall (in einem Simplex der  $k$ -fachen baryzentrischen Koordinaten). Es gilt:

$$(x^k, \lambda_1^k, \lambda_2^k, y_1^k, y_2^k) \in K \times [0, 1]^2 \times K^2$$

Somit konvergiert eine Teilfolge in  $K$  gegen

$$(x^0, \lambda_1^0, \lambda_2^0, y_1^0, y_2^0)$$

Nachdem die Teilintervalle zu Punkten degenerieren gilt:

$$v_i^k \rightarrow x^0 \quad i = 1, 2$$

Wir haben

$$(v_i^k, y_i^k) \in \Gamma \rightarrow (v_i^0, y_i^0) \in \Gamma \quad \text{wegen Abgeschlossenheit von } \Gamma$$

Somit gilt  $y_i^0 \in f(x^0)$ ,  $i = 1, 2$ . Mit (8) folgt

$$x_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^2 \lambda_i^k y_i^k = \sum_{i=1}^2 \lambda_i^0 y_i^0 \in f(x^0),$$

$f(x^0)$  ist konvex.

In  $n$  Dimensionen nehmen wir zunächst an, dass  $K$  ein Simplex (Konvexe Hülle von  $n + 1$  nichtdegenerierten Vertices) ist. Wir wenden wiederholt die Baryzentrische Unterteilung an, der Durchmesser der Simplizes schrumpft mit einem Faktor  $\frac{n}{n+1}$ . Zur  $k$ -ten baryzentrischen Unterteilung mit Vertices  $\{v_j\}_{j=1}^{N_k}$ . Wählen wir wieder  $y_j \in f(v_j)$  mit  $f^k(x)$  durch Interpolation mittels baryzentrischen Koordinaten in jdn. Unter-Simplex. Wir erhalten wieder Fixpunkte  $x^k$ , und eine Teilfolge von

$$(x^k, \lambda_1^k, \dots, \lambda_{n+1}^k, y_1^k, \dots, y_{n+1}^k)$$

konvergiert im „richtigen“ Unter-Simplex. Der Rest des Beweises folgt exakt wie im eindimensionalen Fall. Ist  $K$  kein Simplex, so können wir  $f^k$  jeweils auf einen Simplex  $\tilde{K} \supset K$  stetig fortsetzen und verfahren wie im Beweis des *Brouwer'schen Fixpunktsatzes*. □

### Spieltheorie:

Ein  $n$ -Personen Spiel besteht aus  $n$  Spielern, wobei der  $i$ -te Spieler  $m_i$  mögliche Aktionen ausführen kann. Die Menge der möglichen Aktionen des  $i$ -ten Spielers bezeichnen wir mit  $\Phi_i = \{1, \dots, m_i\}$ . Nachdem jeder Spieler eine Aktion ausgeführt hat, wird abgerechnet. Der  $i$ -te Spieler bekommt den Payoff

$$R_i(\varphi), \quad \varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in \Phi = \prod_{j=1}^n \Phi_j$$

Wir betrachten den Fall, dass das Spiel häufig ausgeführt wird, und jeder Spieler seine Aktion nach einer Wahrscheinlichkeitsverteilung (einer Strategie) auf  $\Phi_i$  wählt. Diese bezeichnen wir mit

$$S_i = \{s_i^1, \dots, s_i^{m_i}\}, \quad s_i^k \geq 0, \quad \sum_{k=1}^{m_i} s_i^k = 1 \quad \forall i$$

Die Menge aller möglichen Strategien für den  $i$ -ten Spieler nennen wir  $S_i$ .  $S_i^k$  ist die Wahrscheinlichkeit, dass der  $i$ -te Spieler die Aktion  $k$  wählt. Die Wahrscheinlichkeit, dass jeder Spieler eine bestimmte Aktion  $s_i^k$  wählt ist

$$S(\varphi) = \prod_{i=1}^n s_i(\varphi), \quad s_i(\varphi) = s_i^{k_i}$$

mit  $\varphi = (k_1, \dots, k_n) \in \Phi$ . Wir nehmen hier an, dass die Spieler ihre Aktionen unabhängig voneinander wählen. Der mittlere Payoff für Spieler  $i$  ist dann der Erwartungswert für  $R_i(\varphi)$ . Wir nennen diesen  $R_i(s)$  und erhalten

$$R_i(s) = \sum_{\varphi \in \Phi} s(\varphi) R_i(\varphi)$$

Nach Konstruktion ist

$$R_i(s)$$

stetig in  $s$ . Was ist nun die optimale Strategie für Spiel  $i$ ? Falls alle anderen Spieler nach einer bekannten Strategie handeln, ist es optimal  $\bar{s}_i$  so zu wählen, dass

$$R_i(s \setminus \bar{s}_i) = \max_{\tilde{s}_i \in S_i} R_i(s \setminus \tilde{s}_i) \quad (9)$$

$s \setminus \tilde{s}_i$ : Strategiekomination, die sich ergibt, wenn man  $s_i$  durch  $\tilde{s}_i$  ersetzt. Wir bezeichnen mit  $B_i(s)$  die Menge aller Strategien  $\bar{s}_i \in S_i$ , die (9) erfüllen. Insbesondere gilt  $\bar{s}_i \in B_i(s)$  genau dann wenn  $\bar{s}_i^k = 0$  falls

$$R_i(s \setminus (0, \dots, 1, \dots)) < \max_{1 \leq l \leq m_i} R_i(s \setminus (0, \dots, 1, \dots)) \quad \text{mit der 1 als } l\text{-ter Eintrag}$$

Insbesondere existiert immer eine reine (immer die selbe Aktion wird gewählt) optimale Strategie zu gegebenem  $S$ . Weiter sieht man, dass  $B_i(s)$  konvex ist und nicht leer. Es seien nun  $s, \bar{s} \in S$ . Wir nennen  $\bar{s}$  die optimale Antwort gegen  $s$ , falls  $\bar{s}_i \in B_i(s)$   $i = 1, \dots, n$ . Es sei  $B(s)$  die Menge aller optimalen Antworten gegen  $s$ , wir haben

$$B(s) = \prod_{i=1}^n B_i(s).$$

**Definition 2.21 (Nash-Gleichgewicht)** Eine Strategiekombination  $\bar{s} \in S$  heißt Nash-Gleichgewicht, falls gilt

$$\bar{s} \in B(\bar{s})$$

d.h.  $\bar{s}$  ist eine optimale Antwort gegen sich selbst. Anders gesagt,  $\bar{s}$  ist ein Nash-Gleichgewicht, falls kein Spieler durch eigene Änderung seiner Strategie seinen Payoff erhöhen kann.

**Beispiele:**

**Das Gefangenendilemma:** Zwei Gefangene können entweder schweigen, oder mit der Polizei kooperieren, das heißt den jeweils anderen belasten.

$R_1$	$k_2$	$s_2$	$R_2$	$k_2$	$s_2$
$k_1$	0	2	$k_1$	0	-1
$s_1$	-1	1	$s_1$	2	1

**Theorem 2.22** Jedes  $n$ -Personen Spiel besitzt ein Nash-Gleichgewicht.

BEWEIS: Wir betrachten  $s \mapsto B(s)$ ,  $S$  ist kompakt, konvex,  $B(s) \subset S$  ist nicht leer, konvex für alle  $s$ . Abgeschlossenheit des Graphen folgt mit Folgenkompaktheit.

$$s^n \in S, \quad \bar{s}^m \in B(s^m), \quad s^m \rightarrow s, \quad \bar{s}^k \rightarrow \bar{s}$$

Wir haben  $R_i(s^m \setminus \tilde{s}_i) \leq R_i(s^m \setminus \bar{s}_m)$  für alle  $\tilde{s}_i \in S_i$  mit Stetigkeit von  $R_i$  folgt sofort

$$R_i(s \setminus \tilde{s}_i) \leq R_i(s \setminus \bar{s}) \quad \forall s_i \in S_i$$

Somit ist  $\bar{s} \in B(s)$  und  $\Gamma = \{(s, B(s)) \subset S^2\}$  ist abgeschlossen. Der Fixpunktsatz von Kakutani garantiert Existenz von

$$\bar{s} \in S \quad \text{mit} \quad \bar{s} \in B(\bar{s}).$$

□

### 3 Der Leray-Schauder Grad und der Schauder'sche Fixpunktsatz

Das Ziel ist es, den Fixpunktsatz von Brouwer auf  $\infty$ -dimensionale Räume zu verallgemeinern. So einfach ist das nicht.

**Theorem 3.1 (Kakutani)** Sei  $H$  ein  $\infty$ -dimensionaler separabler Hilbertraum. Dann existiert eine stetige Abbildung

$$f : H \rightarrow H,$$

welche die Einheitskugel in sich selbst abbildet und die keinen Fixpunkt besitzt.

BEWEIS: Sei  $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  eine Orthonormalbasis von  $H$ . Für  $x = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \alpha_j e_j$  definieren wir

$$U(x) := \sum_{j=-\infty}^{\infty} \alpha_j e_{j+1}; \quad f(x) := \frac{1}{2}(1 - \|x\|)e_0 + U(x)$$

Zu zeigen:

- $U$  ist stetig.
- $\|U(x)\| < 1$  für  $\|x\| < 1$
- $f$  besitzt keinen Fixpunkt in  $\overline{B_1(0)}$ 
  - bei  $x = 0$ .
  - auf dem Rand.
  - im Innern.

□

### 3.1 Der Abbildungsgrad auf endlichen Banachräumen

**Definition 3.2** Sei  $X$  ein (reeller) Banachraum von Dimension  $n$ , und sei  $\Phi$  ein Isomorphismus von  $X$  nach  $\mathbb{R}^n$ . Für  $f \in D_y(\Omega, X)$ ,  $\Omega \subset X$  offen, beschränkt,  $y \in X$  definieren wir

$$\deg(f, \Omega, y) = \deg(\Phi \circ f \circ \Phi^{-1}, \Phi(\Omega), \Phi(y))$$

**Proposition 3.3** Der in Definition 3.2 definierte Abbildungsgrad ist unabhängig von der Wahl von  $\Phi$ .

BEWEIS: Sei  $\Psi$  ein zweiter Isomorphismus. Es gilt  $A = \Psi \circ \Phi^{-1} \in \text{Gl}(n)$ . Wir schreiben

$$f^* := \Phi \circ f \circ \Phi^{-1}, \quad y^* \in \text{RV}(f^*)$$

und wählen wie üblich  $\tilde{f}^* \in D^1(\Phi(\overline{\Omega}), \mathbb{R}^n)$  aus derselben Komponente von  $D_y(\Phi(\overline{\Omega}), \mathbb{R}^n)$  wie  $f^*$ , so dass  $y^* \in \text{RV}(\tilde{f}^*)$ . Dann ist auch

$$A \circ \tilde{f}^* \circ A^{-1} \in D^1(\Psi(\overline{\Omega}), \mathbb{R}^n)$$

in derselben Komponente von  $D_y(\Psi(\overline{\Omega}), \mathbb{R}^n)$  wie  $A \circ f^* \circ A^{-1} = \Psi \circ f \circ \Psi^{-1}$ . Nach der Kettenregel gilt

$$J_{A \circ \tilde{f}^* \circ A^{-1}}(Ay^*) = \det(A) J_{\tilde{f}^*}(y^*) \det(A^{-1}) = J_{\tilde{f}^*}(y^*).$$

Und es folgt

$$\deg(\Psi \circ f \circ \Psi^{-1}, \Psi(\Omega), \Psi(y)) = \deg(\Phi \circ f \circ \Phi^{-1}, \Phi(\Omega), \Phi(y))$$

□

Die Eigenschaften des Abbildungsgrades im  $\mathbb{R}^n$  übertragen sich mit Definition 3.2 auf den Abbildungsgrad in endlichdimensionalen Banachräumen. Das gilt ebenfalls für die Reduktionseigenschaft aus Satz 2.17, nachdem  $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  so gewählt werden kann, dass  $\Phi(X_1) = \mathbb{R}^n$ , wobei  $X_1$  ein  $m$ -dimensionaler Untervektorraum von  $X$  ist.

### 3.2 Kompakte Operatoren

Es seien  $X$  und  $Y$  Banachräume,  $\Omega \subset X$  (nicht unbedingt offen).

**Definition 3.4** Ein stetiger Operator  $F : \Omega \rightarrow Y$  heißt

- *endlichdimensional*, falls ein endlichdimensionaler Untervektorraum  $Y_1 \subset Y$  existiert, sodass  $F(\Omega) \subset Y_1$ .
- *kompakt*, falls  $F$  beschränkte Teilmenge von  $\Omega$  auf relativ kompakte Teilmengen von  $Y$  abbildet.

Wir bezeichnen die Menge der endlichdimensionalen Operatoren von  $\Omega$  nach  $Y$  mit

$$\mathcal{F}(\Omega, Y)$$

und die kompakten mit

$$\mathcal{C}(\Omega, Y)$$

**Bemerkung:** 1) Es gilt

$$\mathcal{F}(\Omega, Y) \subset \mathcal{C}(\Omega, Y) \subset C(\Omega, Y)$$

2) Falls  $\Omega$  kompakt ist, so gilt

$$\mathcal{C}(\Omega, Y) \subset C(\Omega, Y)$$

3) Falls  $\dim(Y) < \infty$ , so gilt

$$\mathcal{F}(\Omega, Y) = (\Omega, Y)$$

4) Falls  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  beschränkt, so gilt

$$\mathcal{F}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n) = \mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n) = C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$$

#### Korrekturen

Bei Satz 2.18. Vorsicht vor der unbeschränkten Komponente  $K_\infty$  von  $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$ ! Diese taucht jedoch in der Produktformel ausschließend nicht auf, denn

$$f(\overline{\Omega}) \subset B_r(0), \text{ mit } f(\overline{\Omega}) \text{ kompakt}$$

$$\Rightarrow \deg(f, \Omega, K_\infty \cap B_{2r}(0)) = 0 \quad \text{und} \quad f(\overline{\Omega}) \cap (\mathbb{R}^n \setminus B_{2r}(0)) = \emptyset$$

somit können wir vereinfacht schreiben

$$\deg(f, \Omega, K_\infty) = 0$$

Der in der Produktformel auftauchende Term

$$\deg(f, \Omega, K_\infty) \cdot \deg(g, K_\infty, y)$$

ist also unproblematisch, da er verschwindet.

**Lemma 3.5** Sei  $K \subset X$  kompakt,  $\varepsilon > 0$ . Dann existiert ein endlichdimensionaler Untervektorraum  $X_\varepsilon \subset X$  und eine stetige Abbildung

$$P_\varepsilon : K \rightarrow X_\varepsilon,$$

so dass

$$\|P_\varepsilon(x) - x\| \leq \varepsilon \quad \forall x \in K$$



BEWEIS: Es sei  $\{x_j\}_{j=1}^N \subset K$ , so dass  $\bigcup_{j=1}^N B_\varepsilon(x_j)$  eine Überdeckung von  $K$  darstellt. Sei  $\{\Phi_j\}_{j=1}^N$  eine Zerlegung der Eins, welche  $\{B_\varepsilon(x_j)\}_{j=1}^N$  untergeordnet ist. Wir definieren

$$P_\varepsilon(x) := \sum_{j=1}^N \Phi_j(x) x_j$$

Damit gilt

$$\|P_\varepsilon(x) - x\| = \left\| \sum_{j=1}^N \Phi_j(x) x_j - \sum_{j=1}^N \Phi_j(x) x \right\| \leq \sum_{j=1}^N \Phi_j(x) \|x - x_j\| \leq \varepsilon$$

Es ist nämlich  $\|x - x_j\| < \varepsilon$  für alle  $x \in B_\varepsilon(x_j)$ , aber für  $\|x - x_j\| > \varepsilon$  ist  $\Phi_j(x) = 0$ .

□

**Theorem 3.6**  *$X, Y$  Banachräume. Sei  $\Omega \subset X$  beschränkt. Dann gilt*

$$\overline{\mathcal{F}(\Omega, Y)}^{C(\Omega, Y)} = \mathcal{C}(\Omega, Y)$$

(D.h. der Abschluss von  $\mathcal{F}(\Omega, Y)$  bzgl. der Norm der gleichmäßigen Konvergenz ist der Raum der kompakten Operatoren  $\mathcal{C}(\Omega, Y)$ .)

BEWEIS: Es sei  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathcal{C}(\Omega, Y)$ , sodass  $F_n \rightarrow F$ . Wir nehmen an, dass  $F \notin \mathcal{C}(\Omega, Y)$ . Dann existiert eine (beschränkte) Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , so dass

$$\|F(x_k) - F(x_l)\| \geq \rho > 0 \quad \text{für } k \neq l$$

Es sei  $n$  so groß, dass

$$\|F_n - F\|_{C(\Omega, Y)} < \frac{\rho}{4}$$

Damit gilt

$$\|F_n(x_k) - F_n(x_l)\| \geq \frac{\rho}{2}.$$

Das ist ein Widerspruch zur Annahme, dass  $F_n \in \mathcal{C}(\Omega, Y)$ . Somit gilt auch

$$\overline{\mathcal{F}(\Omega, Y)}^{C(\Omega, Y)} \subset \mathcal{C}(\Omega, Y)$$

Sei andererseits  $F \in \mathcal{C}(\Omega, Y)$ , und sei  $K = \overline{F(\Omega)}$  kompakt. Sei  $P_\varepsilon$  gewählt wie in Lemma 3.5. Es gilt

$$F_\varepsilon = P_\varepsilon \circ F \in \mathcal{F}(\Omega, Y) \quad \text{und} \quad F_\varepsilon \rightarrow F$$

□

Zur Definition des Abbildungsgrades auf unendlichdimensionalen Räumen betrachten wir insbesondere kompakte Störungen der Identität (d.h. Operatoren der Form  $\text{Id} + F$ ,  $F \in \mathcal{C}$ ). Wir bezeichnen deshalb zunächst einige interessante Eigenschaften von  $\text{Id} + F$ .

**Lemma 3.7** *Sei  $X$  ein Banachraum und  $\Omega \subset X$  beschränkt und abgeschlossen,  $F \in \mathcal{C}(\Omega, X)$ . Dann ist  $\text{Id} + F$  eine eigentliche Abbildung (d.h.  $(\text{Id} + F)^{-1}(K)$  ist kompakt für  $K \subset X$  kompakt), die abgeschlossene Teilmengen von  $\Omega$  auf abgeschlossene Teilmengen von  $X$  abbildet.*

BEWEIS: Sei  $A \subset \Omega$  abgeschlossen, und sei

$$y_n = (\text{Id} + F)(x_n), \quad \text{mit } x_n \in A,$$

so dass  $y_n \rightarrow y$  in  $X$ . Zu zeigen ist, dass  $y \in (\text{Id} + F)(A)$ . Es gilt

$$y_n - x_n = F(x_n),$$

somit folgt  $y_n - x_n \rightarrow z$  in  $X$ , nach Extraktion einer Teilfolge (da  $F$  kompakt,  $(x_n)$  beschränkt in  $\Omega$ ). Es folgt  $x_n \rightarrow x \in A$ , da  $A$  abgeschlossen und  $y_n$  konvergent nach Annahme. Wir haben aber  $x = y - z \in A$ . Nachdem aber  $y = x + F(x) \in (\text{Id} + F)(A)$  folgt die Behauptung mit  $F(x) = z$

Sei nun  $\Omega$  abgeschlossen und  $K \subset X$  kompakt. Sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $(\text{Id} + F)^{-1}(K)$ . Wir können wieder eine Teilfolge

$$K \ni y_n = x_n + F(x_n)$$

wählen, so dass  $y_n \rightarrow y$ . Wie im vorhergehenden Teil folgt, folgt dass  $x_n \rightarrow x \in K$ , somit ist  $(\text{Id} + F)^{-1}(K)$  kompakt. □

### 3.3 Der Leray-Schauder Grad

Sei  $\Omega \subset X$ ,  $X$  ein Banachraum. Wir setzen

$$\mathcal{D}_y(\overline{\Omega}, X) = \{F \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}, X) \mid y \notin (\text{Id} + F)(\partial\Omega)\}$$

und

$$\mathcal{G}_y(\overline{\Omega}, X) := \{F \in \mathcal{F}(\overline{\Omega}, X) \mid y \notin (\text{Id} + F)(\partial\Omega)\}$$

Es gilt für  $F \in \mathcal{D}_y(\overline{\Omega}, X)$ , dass  $\text{dist}(y, (\text{Id} + F)(\partial\Omega)) > 0$ , da  $\text{Id} + F$  abgeschlossene Mengen auf abgeschlossene Mengen abbildet.

**Definition 3.8** Sei  $\Omega \subset X$  offen, beschränkt,  $y \in X$ ,  $F \in \mathcal{D}_y(\overline{\Omega}, X)$ . Sei  $\rho := \text{dist}(y, (\text{Id} + F)(\partial\Omega))$  und sei

$$F_1 \in \mathcal{F}(\overline{\Omega}, X),$$

sodass

$$\|F - F_1\| < \rho. \quad (\Rightarrow F_1 \in \mathcal{G}_y(\overline{\Omega}, X))$$

Nun sei  $X_1 \subset X$  ein endlichdimensionaler Untervektorraum, so dass

$$F_1(\Omega) \subset X_1, y \in X_1$$

und sei  $\Omega_1 = \Omega \cap X_1$ . Damit ist  $F_1 \in \mathcal{G}_y(\overline{\Omega}_1, X_1)$  und wir definieren

$$\deg(\text{Id} + F, \Omega, y) := \deg(\text{Id} + F_1, \Omega_1, y)$$

**Proposition 3.9** Die obige Definition ist unabhängig von der Wahl von  $F_1$  und  $X_1$ .

BEWEIS: Sei  $F_2 \in \mathcal{F}(\overline{\Omega}, X)$ ,  $\|F_2 - F\| < S$ ,  $X_2$  entsprechend endlichdim UVR von  $X$ . Es sei  $X_0 = X_1 + X_2$ ,  $\Omega_0 = \Omega \cap X_0$ . Dann gilt

$$F_i \in \mathcal{F}_y(\overline{\Omega}_0, X_0) \quad i = 1, 2$$

und es folgt wegen der Reduktionseigenschaft des endlichdimensionalen Abbildungsgrades, dass

$$\deg(\text{Id} + F_i, \Omega_0, y) = \deg(\text{Id} + F_i, \Omega_i, y) \quad i = 1, 2$$

Sei  $H(t) = \text{Id} + (1 - t)F_1 + tF_2$ . Es folgt, dass

$$H(t) \in \mathcal{D}_y(\overline{\Omega}_0, X_0) \quad t \in [0, 1],$$

nachdem gilt  $\|H(t) - (\text{Id} + F)\| < \rho \quad \forall t \in [0, 1]$ .

$$\Rightarrow \deg(\text{Id} + F_1, \Omega_0, y) = \deg(\text{Id} + F_2, \Omega_0, y)$$

□

**Theorem 3.10** Sei  $\Omega \subset X$  beschränkt und offen und sei  $F \in \mathcal{D}_y(\overline{\Omega}, X)$ ,  $y \in X$ . Dann gilt

i)  $\deg(\text{Id} + F, \Omega, y) = \deg(\text{Id} + F - y, \Omega, 0)$

ii)  $\deg(\text{Id}, \Omega, y) = 1$ , falls  $y \in \Omega$ .

iii) Falls  $\Omega_1, \Omega_2$  offene, disjunkte Teilmengen von  $X$  sind, so dass  $y \notin (\text{Id} + F)(\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2))$ , dann gilt

$$\deg(\text{Id} + F, \Omega, y) = \deg(\text{Id} + F, \Omega_1, y) + \deg(\text{Id} + F, \Omega_2, y).$$

iv) Falls  $H : [0, 1] \times \overline{\Omega} \rightarrow X$  stetig, so dass  $\forall t_0, \forall \varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  gibt mit

$$\|H(t_0) - H(t)\| \leq \varepsilon, \text{ falls } |t - t_0| < \delta, \quad y[0, 1] \rightarrow X \text{ stetig,}$$

und sei  $H(t) \in \mathcal{D}_{y(t)}(\overline{\Omega}, X) \quad \forall t \in [0, 1]$ . Dann gilt

$$\deg(\text{Id} + H(0), \Omega, y(0)) = \deg(\text{Id} + H(1), \Omega, y(1))$$

BEWEIS: i)-iii) folgen sofort aus der Definition und den entsprechenden Eigenschaften des endlichdimensionalen Abbildungsgrades.

iv) O.E. sei  $y(t) = 0$  ( $\tilde{H}(t)(x) = H(t)(x) - y(t)$ ).

**Behauptung:**  $H \in \mathcal{C}([0, T] \times \overline{\Omega}, X)$

BEWEIS: Sei  $\varepsilon > 0$ ,  $\forall t \in [0, 1]$  sei  $H_\varepsilon^t$  eine endlichdimensionale Approximation von  $H(t)$ , so dass

$$\|H_\varepsilon^t - H(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{4} \quad \forall t \quad \text{nach Satz 3.6}$$

Nun sei  $\{t_j\}_{j=1}^N$ , so dass  $\bigcup_{j=1}^N B_{j_j}(t_j) \supset [0, 1]$  mit  $\delta_j$ , so dass  $\|H(t_j) - H(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{4}$  für  $t \in B_{j_j}(t_j)$ . Nun sei  $F_\varepsilon$  die stückweise affine Interpolation von  $H_\varepsilon^{t_j}$ . Damit ist  $F_\varepsilon$  endlichdimensional und  $\|F_\varepsilon(t) - H(t)\| < \varepsilon$ . Somit ist nach Satz 3.6  $H \in \mathcal{C}([0, 1] \times \overline{\Omega}, X)$ . □

Mit dem selben Argument, das in Satz 3.7 benutzt wird gilt, dass

$$A := \bigcup_{t \in [0, 1]} (\text{Id} + H(t))(\partial\Omega)$$

ist abgeschlossen als Bild einer abgeschlossenen Menge, somit gilt

$$\text{dist}(A, y) = \rho > 0$$

Jetzt benutzen wir einfach die bereits vorher konstruierte endlichdimensionale Approximation  $F_{\frac{\rho}{2}}$  von  $H$  und wenden die Homotopieinvarianz im endlichdimensionalen Fall an. □

Auch die anderen Aussagen über den endlichdimensionalen Abbildungsgrad übertragen sich. Die Beweise bleiben gleich.

**Theorem 3.11** Seien  $F, G \in \mathcal{D}_y(\overline{\Omega}, X)$ . Es gilt

i)  $\deg(\text{Id} + F, \emptyset, y) = 0$ . Weiter gilt, falls  $\Omega_i$ ,  $1 \leq i \leq N$  offen, disjunkt, so dass

$$y \in (\text{Id} + F)(\overline{\Omega} \setminus \bigcup_{i=1}^N \Omega_i),$$

folgt dass  $\deg(\text{Id} + F, \Omega, y) = \sum_{i=1}^N \deg(\text{Id} + F, \Omega_i, y)$

ii) Falls  $y \notin (\text{Id} + F)(\Omega)$ , dann gilt

$$\deg(\text{Id} + F, \Omega, y) = 0$$

(die Umkehrung gilt nicht notwendigerweise!)

Äquivalent dazu gilt

$$\deg(\text{Id} + F, \Omega, y) \neq 0 \Rightarrow y \in (\text{Id} + F)(\Omega)$$

iii) Falls  $\|F(x) - G(x)\| < \text{dist}(y, (\text{Id} + F)(\partial\Omega)) \forall x \in \partial\Omega$ , so gilt

$$\deg(\text{Id} + F, \Omega, y) = \deg(\text{Id} + G, \Omega, y).$$

Insbesondere gilt das auch für den Fall, dass

$$F = G \text{ auf } \partial\Omega$$

iv)  $\deg(\text{Id} + \cdot, \Omega, y)$  ist konstant auf Zusammenhangskomponenten von  $D_y(\overline{\Omega}, X)$ .

v)  $\deg(\text{Id} + F, \Omega, \cdot)$  ist konstant auf Zusammenhangskomponenten von  $X \setminus (\text{Id} + F)(\partial\Omega)$ .

### 3.4 Das Leray-Schauder-Prinzip und der Schauder'sche Fixpunktsatz

Fixpunktsätze in schneller Folge!

**Theorem 3.12 (Leray-Schauder-Prinzip)** Es sei  $F \in \mathcal{C}(X, X)$  und es existiere  $M > 0$ , so dass jede Lösung  $x$  von

$$x = tF(x) \quad t \in [0, 1]$$

die *a priori* Abschätzung

$$\|x\| \leq M$$

erfüllt. Dann besitzt  $F$  einen Fixpunkt.

BEWEIS: Sei  $\rho > M$ . Es gilt

$$\deg(\text{Id} - F, B_\rho(0), 0) = \deg(\text{Id}, B_\rho(0), 0) = 1$$

Aus der *a priori* Abschätzung folgt

$$H(t) \in \mathcal{D}_0(B_\rho(0), X) \quad \forall t \in [0, 1]$$

Somit existiert eine Lösung von  $x - F(x) = 0$ .

□

**Theorem 3.13 (Schauder'sche Fixpunktsatz)** Sei  $K$  ein abgeschlossene, konvexe, beschränkte Teilmenge von  $X$ , ein Banachraum. Sei  $F \in \mathcal{C}(K, K)$ . Dann besitzt  $F$  einen Fixpunkt.

BEWEIS:  $K$  beschränkt, also sei  $\rho > 0$  mit  $K \subset B_\rho(0)$ . Es sei  $R$  die stetige Fortsetzung von  $\text{Id} : K \rightarrow K$  auf  $X$  nach Satz 2.15. Es gilt  $R : X \rightarrow K$ ,  $R(x) = x$  für  $x \in K$ .

Anmerkung: So eine Abbildung heißt „Retraktion“,  $K$  ist dann ein Retrakt von  $X$ .

Wir betrachten  $\tilde{F} = F \circ R \in \mathcal{C}(B_\rho(0), B_\rho(0))$ . Mit  $H(t) = t\tilde{F}$  folgt

$$\deg(\text{Id} - \tilde{F}, B_\rho(0), 0) = \deg(\text{Id}, B_\rho(0), 0) = 1$$

Somit existiert  $x_0 = \tilde{F}(x_0) \in K \Rightarrow \tilde{F}(x_0) = F(x_0) = x_0$ .

□

**Bemerkung:** Existenz eines Fixpunktes gilt natürlich auch für  $F : G \rightarrow G$ , wobei  $G$  nur homöomorph zu einer konvexen, abgeschlossen, beschränkten Teilmenge eines Banachraumes  $X$  ist.

**Theorem 3.14** Sei  $\Omega \subset X$  offen und beschränkt,  $F \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}, X)$ . Angenommen, es existiert ein  $x_0 \in \Omega$ , so dass

$$F(x) - x_0 \neq \alpha \quad \forall x \in \partial\Omega, \forall \alpha \in (1, \infty)$$

Dann besitzt  $F$  einen Fixpunkt.

BEWEIS: Sei  $H(t)(x) = x - x_0 - t(F(x) - x_0)$ . Dann gilt aber

$$H(t) \neq 0 \quad \forall x \in \partial\Omega, t \in [0, 1)$$

Falls  $H(1)(x) = 0$  für ein  $x \in \partial\Omega$ , dann ist  $x$  ein Fixpunkt von  $F$  und wir sind fertig. Ansonsten gilt allerdings

$$\deg(\text{Id} - F, \Omega, 0) = \deg(\text{Id} - x_0, \Omega, 0) = \deg(\text{Id}, \Omega, x_0) = 1$$

und es existiert wieder ein Fixpunkt von  $F$ . □

**Corollar 3.15** Sei  $\Omega \subset X$  offen und beschränkt,  $F \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}, X)$ . Dann besitzt  $F$  einen Fixpunkt falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

- i)  $\Omega = B_\rho(0)$ ,  $F(\partial\Omega) \subset \overline{\Omega}$  (Rohte)
- ii)  $\Omega = B_\rho(0)$ ,  $\|F(x) - x\|^2 \geq \|F(x)\|^2 - \|x\|^2 \quad \forall x \in \partial\Omega$  (Altmann)
- iii)  $X$  ist ein Hilbertraum,  $\Omega = B_\rho(0)$ ,  $(F(x), x) \leq \|x\|^2 \quad \forall x \in \partial\Omega$  (Krasnosel'shii).

BEWEIS: Übungsaufgabe. □

### Beispiele:

1. nichtlineares 2-Punkt Randwertsproblem: Wir betrachten auf  $[0, T]$  das Randwertsproblem

$$\begin{aligned} u''(t) &= g(t, u(t), u'(t)) \quad 0 \leq t \leq T \\ u(0) &= u(1) = 0 \end{aligned} \tag{10}$$

Es sei  $C_0^2 = \{u \in C^2 \mid u(0) = u(T) = 0\}$

**Behauptung:**  $L$  ist bistetig.

BEWEIS: Injektivität: klar.

Surjektivität: Beispielsweise mittels *Green'scher Funktion*:

$$\begin{aligned} K(s, t) &= 2T \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^2 n^2} \sin \frac{n\pi s}{T} \sin \frac{n\pi t}{T} \\ u(s) &= L^{-1}(f)(s) = - \int_0^T K(s, t) f(t) dt \end{aligned}$$

Stetigkeit: klar.

Stetigkeit: Satz über die offene Abbildung. □

**Theorem 3.16** Sei  $g : [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetig beschränkte Funktion. Dann besitzt (10) eine Lösung  $u \in C_0^2$ .

BEWEIS: Es sei  $G : C^1([0, 1]) \rightarrow C([0, 1])$  definiert durch  $G(u)(t) = g(t, u(t), u'(t))$  und es sei

$$J : C_0^2 \rightarrow C^1([0, T])$$

die Einbettung. Dann ist (10) äquivalent zu

$$L(u) = GJ(u) \Leftrightarrow u = GJL^{-1}(u).$$

Es gilt  $JL^{-1}$  ist kompakt, das folgt aus *Arzelá-Ascoli*.  $G$  ist ein beschränkter Operator, denn  $g$  ist stetig und beschränkt, somit ist  $GJL^{-1}$  kompakt und es existiert  $\rho > 0$  mit  $GJL^{-1}(B_\rho(0)) \subset B_\rho(0)$ . Damit besitzt  $GJL^{-1}$  einen Fixpunkt. □

**2. Existenz von Lösungen der stationären Navier-Stokes-Gleichung** Es sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  offen, zusammenhängend und beschränkt, und es sei  $K : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine gegebene Funktion. Wir suchen eine Lösung  $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  zum Problem

$$\begin{cases} 0 = \eta \Delta v - v \cdot \nabla v - \nabla p + K & \text{in } \Omega \\ 0 = \operatorname{div} v & \text{in } \Omega \\ 0 = v & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

mit hinreichend glatten  $v, p$ .

Eine sehr schöne Herleitung der Gleichung findet man in einem Vortrag auf der Website des Clay Mathematics Institute → Link sehe Vorlesungsseite.

### Einschub: Sobolev-Räume

Wir betrachten die Menge  $C^1(\Omega, \mathbb{R})$  und das darauf definierte Skalarprodukt

$$(u, v)_{H^1} = \int_{\Omega} u(x)v(x) \, dx + \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) \, dx.$$

Der normierte Vektorraum  $(C^1(\Omega, \mathbb{R}), \sqrt{(\cdot, \cdot)_{H^1}})$  ist nicht vollständig. Die Vervollständigung bezeichnen wir mit  $H^1(\Omega, \mathbb{R})$ . Die Vervollständigung von  $C^1(\Omega, \mathbb{R})$  bezüglich der  $H^1$ -Norm bezeichnen wir mit  $H_0^1(\Omega, \mathbb{R})$ . Die Räume  $H^1, H_0^1$  heißen Sobolev-Räume und sind (separable) Hilberträume.

Wir benötigen den folgenden wichtigen Satz aus der linearen Funktionalanalysis:

**Theorem 3.17 (Rellich)** Die Einbettung

$$H_0^1(\Omega, \mathbb{R}) \hookrightarrow L^2(\Omega, \mathbb{R})$$

ist kompakt.

Weiter gilt die Abschätzung

**Lemma 3.18 (Poincaré-Friedrichs)** Sei  $u \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R})$ . Es gilt

$$\int_{\Omega} u^2 \leq (d_j)^2 \int_{\Omega} (\partial_j u)^2,$$

wobei  $d_j = \sup\{|x_j - y_j| \mid (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in \Omega\}$ , bzw. gilt

$$\|u\|_{L^2} \leq \frac{\operatorname{diam} \Omega}{\sqrt{n}} \|u\|_{H^1}$$

BEWEIS: Übungsaufgabe.

□

Wir verfeinern nun das Einbettungsergebnis von Rellich. Dazu benötigen wir das folgende

**Lemma 3.19 (Ladyzhenskaya)** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ . Für  $u \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R})$  gilt

$$\|u\|_{L^4} \leq \sqrt[4]{8} \|u\|_{L^2}^{1/4} \|\nabla u\|_{L^2}^{3/4}$$

BEWEIS: Wir betrachten zuerst den Fall, dass

$$u^2(x_1, x_2, x_3) = \int_{-\infty}^{x_1} \partial_1 u^2(\xi, x_2, x_3) d\xi \leq 2 \int_{-\infty}^{\infty} |u(\xi, x_2, x_3) \partial_1 u(\xi, x_2, x_3)| d\xi.$$

Es folgt

$$\max_{x_1 \in \Omega} u^2(x_1, x_2, x_3) \leq 2 \int_{-\infty}^{\infty} |u \cdot \partial_1 u| dx_1$$

Nun lassen wir  $x_3$  fest und integrieren über  $x_1$  und  $x_2$ :

$$\begin{aligned} \iint u^4(x_1, x_2, x_3) &\leq \int \max_{x_1} u^2(x_1, x_2, x_3) dx_2 \cdot \int \max_{x_2} u^2(x_1, x_2, x_3) dx_1 \\ &\leq 4 \iint |u \partial_1 u| dx_1 dx_2 \cdot \iint |u \partial_2 u| dx_1 dx_2 \\ &\leq 4 \left( \iint u^2 dx_1 dx_2 \right)^{2/2} \cdot \left( \iint (\partial_1 u)^2 dx_1 dx_2 \right)^{1/2} \cdot \left( \iint (\partial_2 u)^2 dx_1 dx_2 \right)^{1/2} \quad (\text{nach Cauchy-Schwarz}) \end{aligned}$$

Jetzt integrieren wir über  $x_3$  und bekommen

$$\begin{aligned} \iiint u^4 dx_1 dx_2 dx_3 &\leq 4 \int dx_3 \left( \iint u^2 dx_1 dx_2 \right) \left( \iint (\partial_1 u)^2 + (\partial_2 u)^2 dx_1 dx_2 \right) \\ &\leq 4 \left( \iint \max_{x_3} u^2(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 \right) \left( \iiint (\partial_1 u)^2 + (\partial_2 u)^2 dx_1 dx_2 dx_3 \right) \\ &\leq 8 \iiint |u \partial_3 u| dx_1 dx_2 dx_3 \cdot \left( \iiint (\partial_1 u)^2 + (\partial_2 u)^2 dx_1 dx_2 dx_3 \right) \\ &\leq 8 \cdot \left( \iiint u^2 \right)^{1/2} \cdot \left( \iiint (\partial_3 u)^2 \right)^{1/2} \cdot ((\partial_1 u)^2 + (\partial_2 u)^2)^{2/2} \\ &\leq 8 \|u\|_{L^2} \cdot \|\nabla u\|_{L^2}^3 \end{aligned}$$

Sei nun  $u \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R})$ . Wir wählen  $(u_j)_{j=1}^{\infty}$  eine Folge in  $C_0^1(\Omega, \mathbb{R})$ , so dass

$$u_j \rightarrow u \begin{cases} \text{in } H_0^1 \\ \text{in } L^2 \end{cases}.$$

Dies ist wegen der Ladyzhenskaya-Ungleichung eine Cauchy-Folge in  $L^4$  und konvergiert somit gegen  $v \in L^4$ . Mit Hölder gilt  $u = v$  und wir können den Limes in der Ungleichung bilden.

□

Mit *Poincaré-Friedrichs* und *Ladyzhenskaya* folgt sofort, dass

$$\|u\|_{L^4} \leq \left( \frac{8 \text{diam } \Omega}{\sqrt{n}} \right)^{1/4} \cdot \|u\|_{H^1}$$

für alle  $u \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R})$  und damit auch

**Corollar 3.20** Die Einbettung

$$H_0^1(\Omega, \mathbb{R}) \hookrightarrow L^4(\Omega, \mathbb{R})$$

ist kompakt.

Zurück zu Navier-Stokes:

Es sei

$$X = \{v \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^3) \mid \operatorname{div} v = 0, v|_{\partial\Omega} = 0\}$$

und es sei

$$\mathcal{H} := \overline{X}_1^H = \{v \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3) \mid \operatorname{div} v = 0\}$$

Wir betrachten  $\mathcal{H}$  als Hilbertraum mit dem Skalarprodukt

$$(u, v)_{\mathcal{H}} = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx$$

Dieses ist mittels *Poincaré* äquivalent zum üblichen Skalarprodukt auf  $H^1$ :

Wir multiplizieren nun die Navier-Stokes-Gleichung ?? mit  $w \in X$  und erhalten

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\eta \Delta v - v \nabla v + K) w &= \int_{\Omega} \nabla \varphi \cdot w = 0 \\ \Leftrightarrow \int_{\Omega} \left( \eta \underbrace{\nabla v \cdot \nabla w}_{=\sum_{k,j=1}^3 \partial_j v_k \partial_k w_j} - \underbrace{v \cdot v \cdot \nabla w}_{=\sum_{k,j=1}^3 v_k v_j (\partial_k w_j)} - K \cdot w \right) &= 0 \end{aligned}$$

mit

$$a(u, v, w) := \int_{\Omega} u \cdot (v \cdot \nabla w)$$

folgt  $u$  Lösung von Navier-Stokes

$$\Rightarrow \eta \cdot (v, w)_{\mathcal{H}} - a(v, v, w) - \int_{\Omega} K w = 0 \quad \forall w \in \mathcal{H} \quad (11)$$

Lösungen von (11) heißen schwache Lösungen der Navier-Stokes-Gleichung.

**Bemerkung:** Es gilt

$$a(v, v, v) = \int_{\Omega} v \cdot \nabla v = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{k,j} v_k \partial_k (v_j, v_j) = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum (v_j, v_j) \partial_k v_k = 0 \quad \text{für } v \in \mathcal{H}$$

Für  $K \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$  ist  $\int_{\Omega} K \cdot$  ein stetiges Funktional auf  $\mathcal{H}$ , somit existiert nach *Riesz* ein  $\tilde{K} \in \mathcal{H}$ , so dass

$$\int_{\Omega} K \cdot w = (\tilde{K}, w) \quad \forall w \in \mathcal{H}$$

Dies gilt auch für  $a(u, v, \cdot)$  mit  $u, v \in \mathcal{H}$ , somit existiert  $B(u, v) \in \mathcal{H}$  mit

$$a(u, v, w) = (B(u, v), w)_{\mathcal{H}}.$$

Es folgt, dass

$$\begin{aligned} (11) &\Leftrightarrow (\eta v - B(v, v) - \tilde{K}, w)_{\mathcal{H}} = 0 \quad \forall w \in \mathcal{H} \\ &\Leftrightarrow \eta v - B(u, v) = \tilde{K}. \end{aligned}$$

Es sei nun  $Y = L^4(\Omega, \mathbb{R}^3)$ . Dank *Ladyzhenskaya-Ungleichung* ist die Einbettung

$$\mathcal{H} \hookrightarrow Y$$

kompakt und es gilt mit zweimaliger Anwendung der *Cauchy-Schwarz-Ungleichung*:

$$|a(u, v, w)| \leq \|u\|_{L^4} \|v\|_{L^4} \|w\|_{H^1}$$



**Theorem 3.21 (Existenz schwacher Lösungen)** Sei  $\mathcal{H}$  ein Hilbertraum,  $Y$  ein Banachraum und es sei die Einbettung  $\mathcal{H} \hookrightarrow Y$  kompakt. Insbesondere sei

$$\|u\|_Y \leq \beta \|u\|_{\mathcal{H}} \quad \forall u \in \mathcal{H}$$

Es sei  $a : \mathcal{H}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  eine Multilinearform, so dass

$$|a(u, v, w)| \leq \|u\|_Y \|v\|_Y \|w\|_{\mathcal{H}}$$

und  $a(v, v, v) = 0$  für alle  $v \in \mathcal{H}$ . Es sei  $\tilde{K} \in \mathcal{H}$ ,  $\eta > 0$ . Dann existiert  $v \in \mathcal{H}$  mit

$$\eta(v, w) - a(v, v, w) = (\tilde{K}, w)_{\mathcal{H}} \quad \forall w \in \mathcal{H}$$

BEWEIS: o.E. sei  $\eta = 1$ . Wir suchen eine Lösung zu  $v - B(v, v) + \tilde{K} = 0$ . Es gilt

$$\|B(v, v)\|_{\mathcal{H}} \leq \alpha \|u\|_Y \|v\|_Y \leq \alpha \beta^2 \|u\|_{\mathcal{H}} \|v\|_{\mathcal{H}}$$

Es sei  $F(v) = B(v, v)$ .  $F$  ist lokal Lipschitz, denn für  $\|u\|_Y < \rho$ ,  $\|v\|_Y < \rho$  gilt

$$\begin{aligned} \|F(u) - F(v)\|_{\mathcal{H}} &= \|B(u - v, u) - B(v, u - v)\|_{\mathcal{H}} \leq 2\alpha\rho \|u - v\|_Y \\ &\leq 2\alpha\beta^2\rho \|u - v\|_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

Sei  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  beschränkt in  $\mathcal{H}$ . Nach Wahl einer Teilfolge ist  $v_n$  eine Cauchyfolge in  $Y$ .  $\Rightarrow F(v_n)$  ist eine Cauchyfolge in  $\mathcal{H}$ , da gilt

$$\|F(u) - F(v)\|_{\mathcal{H}} \leq 2\alpha\rho \|u - v\|_Y$$

Damit ist  $F \in \mathcal{C}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ .

Nehmen wir nun an, dass  $v$  eine Lösung ist von

$$v = tF(v) - t\tilde{K} \quad \text{für } t \in [0, 1]$$

Damit gilt

$$(v, v)_{\mathcal{H}} = t \underbrace{a(v, v, v)}_{=0} + t(\tilde{K}, v)_{\mathcal{H}} \Rightarrow \|v\|_{\mathcal{H}} \leq \|\tilde{K}\|_{\mathcal{H}}.$$

Die beiden Voraussetzungen des *Leray-Schauder-Prinzips* sind damit erfüllt, somit existiert ein Fixpunkt  $v$ , der  $v = F(v) - \tilde{K}$  erfüllt. □

## 4 Monotone Operatoren

Man möchte folgendes Prinzip auf Banachräume verallgemeinern  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  genüge

- (a) monoton
- (b) stetig
- (c)  $F$  ist koerziv, d.h.  $\lim_{v \rightarrow \pm\infty} F(v) = \pm\infty$

Dann

$$\forall b \in \mathbb{R} \exists! v \in \mathbb{R} : F(v) = b$$

**Definition 4.1** Sei  $X$  ein reflexiver Banachraum und

$$A : X \rightarrow X^*$$

ein Operator.  $A$  heißt

(i) monoton  $\Rightarrow \forall u, v \in X : (Au - Av, u - v) \geq 0$

(ii) strikt monoton  $\Rightarrow \forall u \neq v \in X : (Au - Av, u - v) > 0$

(iii) stark monoton

$$\Rightarrow \exists c > 0 \forall u, v \in X : (Au - Av, u - v) \geq c \|u - v\|^2$$

(iv) koerziv

$$\Rightarrow \lim_{\|u\| \rightarrow \infty} \frac{(Au, u)}{\|u\|} = \infty$$

**Bemerkung:**  $A$  stark monoton  $\Rightarrow A$  koerziv.

BEWEIS:

$$\frac{(Av, v)}{\|v\|} = \frac{(Au - A(0), v) + (A(0), v)}{\|v\|} \geq c \|v\| - \|A(0)\|$$

□

**Beispiele:**

1. Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Das Dualitätsproblem in  $\mathbb{R}$  ist die Multiplikation. Im Spezialfall  $X = \mathbb{R} = X^*$  stimmen die Monotoniebegriffe reeller Funktionen und für Operatoren überein, da

$$(f(u) - f(v), u - v) = (f(v) - f(u)) \cdot (u - v) \geq 0$$

$f$  ist außerdem genau dann koerziv, d.h.

$$\lim_{v \rightarrow \pm \infty} \frac{f(u) \cdot u}{|u|} = \infty \Leftrightarrow f(v) \rightarrow \pm \infty \quad (v \rightarrow \pm \infty)$$

2.  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$g(u) := \begin{cases} |u|^{p-2}u, & u \neq 0 \\ 0, & v = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$

(i)  $p > 1 \Rightarrow g$  strikt monoton.

(ii)  $p \geq 2 \Rightarrow (g(u) - g(v), u - v) \geq c |u - v|^p$

(iii)  $p = 2 \Rightarrow g$  stark monoton

BEWEIS: Übungsaufgabe.

□

**Definition 4.2** Sei  $X$  reflexiver Banachraum und  $A : X \rightarrow X^*$  ein Operator  $A$  heißt

(i)

**Bemerkung:** stark stetig  $\Rightarrow$  stetig  $\Rightarrow$  demistetig  $(\star)$  hemistetig

BEWEIS: Zu  $(\star)$ . Seien  $u, v, w \in X, t \rightarrow t_0 \Rightarrow u + tv \rightarrow u + t_0v$

$$\xrightarrow{\text{demistetig}} A(u + tv) \rightarrow A(u + t_0v)$$

$$(A(u + tv), w) \rightarrow (A(u + t_0v), w)$$

□

**Lemma 4.3**  $X$  reflexiver Banachraum,  $A : X \rightarrow X^*$ . Dann gelten

(i)  $A$  stark stetig  $\Rightarrow A$  kompakt.

(ii)  $A$  demistetig  $\Rightarrow A$  lokal beschränkt.

(iii)  $A$  monoton  $\Rightarrow A$  lokal beschränkt.

iv  $A$  monoton und hemistetig  $\Rightarrow A$  demistetig.

BEWEIS: (i) Sei  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$  beschränkt, da  $X$  reflexiv folgt:

$$\exists v^{m_k} \rightarrow v \in X \xrightarrow{\text{stark stetig}} A(v_{m_k}) \rightarrow A(v)$$

$\Rightarrow A$  kompakt.

(ii) Wäre  $A$  nicht lokal beschränkt, so existiert  $v \in X$ ,  $v_m \rightarrow v$ , sodass

$$\|Av_m\| \rightarrow \infty \not\Rightarrow Av_m \rightarrow Av$$

(iii) Angenommen,  $v_m \rightarrow v : \|Av_m\| \rightarrow \infty$

$$a_n := (1 + \|Av_n\| \|v_n - v\|)^{-1}$$

$A$  monoton

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 &\leq (Au_n - Av, u_n - v) = (Au_n - Av, (u_n - v) + (u - v)) \\ a_n(Au_n, v - u) &\leq a_n((Au_n, u_n - v) - (Av, u_n - v)) \\ &\leq 1 + c(u, v) \quad \forall v \in X \end{aligned}$$

Einsetze  $v \rightsquigarrow 2u - v$

$$\begin{aligned} -a_n(Au_n, v - u) &\leq 1 + c(u, v) \quad \forall v \in X \\ \Rightarrow |(a_n Au_n, v - u)| &\leq 1 + c(u, v) \end{aligned}$$

$\Rightarrow (a_n Au_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist punktweise beschränkt.

$$\Rightarrow \sup_n \|a_n Au_n\|_{X^*} \leq c(u)$$

$$\Rightarrow \|Au_n\| \leq \frac{c(u)}{a_n} = c(u)(1 + \|Au_n\| \|u_n - v\|)$$

Für

$$\|u_n - u\| c(u) = \lambda < 1 : \|Au_n\| \leq \frac{c(u)}{1 - \lambda} < \infty$$

(iv) Gelte  $u_n \rightarrow u$ .  $A$  monoton  $\Rightarrow (Au_n)$  beschränkt.  $X^*$  reflexiv

$$Au_{n_k} \rightharpoonup b \in X^*$$

$$Au = b$$

Dies gilt für jede Teilfolge von  $u_n$ ,  $\Rightarrow Au_n \rightharpoonup b$

□

**Lemma 4.4 (Minty)** Sei  $X$  ein reflexiver Banachraum und  $A : X \rightarrow X^*$ , hemistetig und monoton. Dann gelten

(i)  $A$  maximal monoton, d.h.

$$v \in X, b \in X^*, (b - Av, u - v) \geq 0 \quad \forall v \in X \\ \Rightarrow b = Au$$

(ii)  $A$  genügt der Bedingung (M), d.h.

$$Au = b \Leftarrow \begin{cases} v_n \rightharpoonup v \\ Av_n \rightharpoonup b \\ (Av_n, v_n) \rightarrow (b, v) \end{cases}$$

(iii)

$$u_n \rightharpoonup u, Au_n \rightarrow b \Rightarrow Au = b$$

$$u_n \rightarrow u \wedge Au_n \rightharpoonup b \Rightarrow Au = b$$

BEWEIS: (i) Sei  $w \in X$  und  $v = v - tw, t > 0$ .

$$\Rightarrow (b - A(u - tw), w) \geq 0$$

$$\Rightarrow (b - Au, w) \geq 0 \quad w \in X$$

$$\Rightarrow (b - Av, w) = 0 \quad \forall w$$

$$b = Aw$$

□

(ii)  $A$  ist monoton.

$$\Rightarrow 0 \leq (Au_n - Av, u_n - v) = (Au_n, u_n) - (Av, u_n) - (Au_n, Av, v) \\ \rightarrow (b, v) - (Av, u) - (b - Av, v)$$

**Theorem 4.5 (Brouder, Minty)** Sei  $X$  ein separabler, reflexiver Banachraum mit Basis  $(w_i)_{i \in \mathbb{N}}$ . Sei  $A : X \rightarrow X^*$  monoton, koerziv und hemistetig. Dann existiert für alle  $b \in X^*$  eine Lösung  $u \in X$  von

$$Au = b$$

$\{A = b\}$  ist abgeschlossen, beschränkt, und konvex. Falls  $A$  strikt monoton ist, ist die Lösung eindeutig.

BEWEISIDEE: Der Beweis erfolgt per Galerkin-Approximation.

1.  $X$  separabel, d.h.

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X^n, \quad X_n = \text{span}(w_1, \dots, w_n)$$

Approximiere „die Gleichung“  $Au = b$  durch „endlichdimensionale“ Probleme der Form

$$(Au, z^n) = (b, z^n) \quad \forall z^n \in X_n$$

2. *A-priori*-Abschätzung für Lösungen: Wir zeigen, dass die Folge  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  der Lösungen dieser Probleme beschränkt ist (mit Hilfe der Koerzivität).

3. Schwache Konvergenz  $X$  reflexiv  $\Rightarrow (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  hat eine schwach konvergente Teilfolge

$$u_{n_k} \rightharpoonup u \in X$$

4. Lemma von Minty  $\Rightarrow Au=b$ .

BEWEIS: (i) Der Beweis erfolgt per *Galerkin-Approximation*

$$X_n = \text{span}(w_1, \dots, w_n)$$

Betrachte

$$(Au^n - b, w_k) = 0 \quad \forall k = 1, \dots, n \quad (12)$$

Definiere

$$g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n; \quad g_k(c^n) := (A(\sum_m c_m^n w_m) - b, w_k)$$

$$13 \Rightarrow g(c^n) = 0 \quad \text{für ein } c^n \in \mathbb{R}^n$$

O.B.d.A sei  $|c^n| := \|\sum_{k=1}^n c_k^n w_k\|_X$  als norm auf  $\mathbb{R}^n$ . Aus Lemma 4.3 folgt, dass  $A$  demistetig.

Außerdem gilt

$$\sum_{k=1}^n g_k(c^n) c_k^n = (Au^n, u^n) - (b, u^n), \quad \text{wobei } u^n = \sum_k g_k(c^n) w_k^n$$

$A$  ist koerziv

$$\Rightarrow R_0 > 0 \quad \forall \|u\| \geq R_0 > 0 : (Au, u) \geq (1 + \|b\|)\|u\| = 0$$

$$\Rightarrow g(c^n) \cdot c^n = \sum_{k=1}^n g_k(c^n) \cdot c_k^n \geq (1 + \|b\|)\|u^n\| - \|b\|\|u^n\| = \|u^n\| > 0 \quad \forall c^n \text{ mit } \|u^n\| \geq R_0$$

Mit *Brouwer* folgt (beachte:  $|\cdot|_{\mathbb{R}^n} = \|\cdot\|_X$ )

$$\exists u^n \in X_n : g(c^n) = 0,$$

d.h. 13 gilt für  $u^n$ .

$$\Rightarrow \|u^n\| \geq R_0$$

(ii)  $A$  monoton  $\Rightarrow A$  lokal beschränkt

$$\Rightarrow \exists r, \delta > 0 : \|u\| \leq r \Rightarrow \|Au\| \leq \delta$$

und

$$(Au^n - Av, u^n - v) \geq 0 \quad \forall v \in X$$

Wegen  $u^n \in X_n$  und 13 gilt

$$(Au^n, u^n) = (b, u^n) \Rightarrow |(Au^n, u^n)| = \|b\|R_0$$

$$\|Au^n\| = \sup_{v \in X, \|v\|=r} \frac{1}{r} (Au^n, v) \stackrel{\text{Monotonie}}{\leq} \sup_{v \in X, \|v\|=5} \frac{1}{r} ((Av, v) + (Au^n, u^n) - (Av, u^n)) \leq \frac{1}{r} (\delta r + \|b\|R_0 + \delta R_0)$$

$\Rightarrow (Au^n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist beschränkt.

(iii) Konvergenz des Galerkin-Verfahrens;  $\|u^n\| \leq R_0$  und  $X$  reflexiv.

$$\Rightarrow \exists \text{ Teilfolge } u^n \rightharpoonup u \in X$$

Sei

$$w \in \bigcup_{m=1}^{\infty} X_m \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : w \in X_n \quad n \geq n_0$$

$$\Rightarrow \forall n \geq n_0 : (Au^n, w) = (b, w)$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (Au^n, w) = (b, w) \quad w \in \bigcup_{m=1}^{\infty} X_m$$

$X^*$  reflexiv und  $(Au^n)$  beschränkt

$$\begin{aligned} & \exists Au^{n_m} \rightharpoonup c \in X^* \\ \Rightarrow & \forall w \in X: (Au^{n_k}, w) \rightarrow (c, w) \\ \Rightarrow & b = c, \quad \text{weil } \overline{\bigcup_{m=1}^{\infty} X_m} = X \quad (X \text{ separabel}) \\ & \Rightarrow Au^{n_m} \rightharpoonup b \end{aligned}$$

Wiederhole dieses Argument für jede Teilfolge von  $Au^n$ .

$$\Rightarrow Au^n \rightharpoonup b$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow & (Au^n, u^n) = (b, u^n) \rightarrow (b, u) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} & (Au^n, u^n) = (b, u) \end{aligned}$$

Mit Lemma 4.4 (ii) erhalten wir

$$Au = b$$

(iv) Eigenschaften der Lösungsmenge  $S = \{A = b\}$ :

(a) Beschränktheit:

$$\exists R_0 > 0 \forall \|v\| \geq R_0 > 0: (Au, u) \geq (1 + \|b\|)\|u\|$$

Sei  $u$  eine Lösung mit  $\|u\| \geq R$

$$\begin{aligned} \Rightarrow & 0 = (Au, u) - (b, u) \geq \|u\| > 0 \quad \text{!} \\ \Rightarrow & S \subset B_{R_0}(0) \end{aligned}$$

(b) Konvexität: Seien  $u_1, u_2 \in S$ ,  $w = tu_1 + (1-t)u_2$ ,  $v \in X$ .

$$\begin{aligned} (b - Av, w - v) &= (b - Av, t(u_1 - v)) + (b - Av, (1-t)(u_2 - v)) \\ &= t(Au_1 - Av, u_1 - v) + (1-t)(Au_2 - Av, u_2 - v) \\ &\geq 0 \quad \forall v \in X \end{aligned}$$

$$\stackrel{\text{Lem. 4.4}}{\Rightarrow} b = Aw \Rightarrow w \in S$$

□

**Bemerkung:** Der Satz gilt auch, falls  $X$  nicht separabel ist (ohne Beweis).

**Corollar 4.6** Sei  $X$  separabel, refl.  $\mathbb{R}$ -Banachraum und  $A : X \rightarrow X^*$  strikt monoton, koerziv, hemstetig. Dann existiert

$$A^{-1} : X^* \rightarrow X$$

und  $A^{-1}$  ist strikt monoton und demistetig.

BEWEIS: Übung.

□

## 4.1 Der Nemychii-Operator

**Definition 4.7** Sei  $G \subset \mathbb{R}^n$ ,  $f : G \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ . Durch Anwendung auf  $u : G \rightarrow \mathbb{R}^n$  definieren wir den Operator  $F$  als

$$(Fu)(x) = f(x, u(x)), \quad x \in G \quad (13)$$

**Lemma 4.8** Die Funktion  $f$  erfülle

1. Carathéodory-Bedingung:

$$f(\cdot, \eta) : x \rightarrow f(x, \eta) \text{ messbar } \forall \eta \in \mathbb{R}^n$$

$$f(x, \cdot) : \eta \rightarrow f(x, \eta) \text{ stetig f.f.a. } x \in G$$

2. Wachstums-Bedingung:

$$|f^j(x, \eta)| \leq |a(x)| + b \sum_{i=1}^n |\eta^i|^{p_i/q}$$

mit  $b > 0$ ,  $a \in L^q(G)$  und  $1 \leq p_i$ ,  $q < \infty$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Dann ist  $F$  aus Definition 4.7 ein Operator der Form

$$F : \prod_{i=1}^n L^{p_i}(G) \rightarrow (L^q(G))^k$$

und  $F$  ist stetig sowie beschränkt. Es gilt

$$\|Fu\|_{L^q} \leq c \left( \|a\|_{L^q} + \sum_{i=1}^n \|u^i\|_{L^{p_i}}^{p_i/q} \right)$$

$F$  heißt in diesem Fall Nemychii-Operator.

BEWEIS: (nur für  $n = 1$ ,  $k = 1$ ,  $p = p_1$ ,  $u = u^1$ )

1. Messbarkeit von  $Fu$ : Es sei  $u \in L^p$ , also messbar. Wir approximieren  $u$  durch  $(u_j)_{j=1}^n$ , so dass

$$u_j \rightarrow u \text{ für auf } G, \quad u_j = \sum_{i=1}^{N_j} c_i^j \chi_{G_i^j}$$

Es gilt

$$(Fu)(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} f(x, u_j(x)) \text{ für fast alle } x$$

wegen Stetigkeit von in der 2. Variablen. Weiter gilt

$$f(x, u_j(x)) = \sum_{i=1}^{N_j} f(x, c_i^j) \chi_{G_i^j}(x)$$

Damit ist  $f(x, u_j(x))$  messbar für alle  $j \in \mathbb{N}$  als Produkt von messbaren Funktionen. Somit ist  $f(x, u(x))$  auch messbar als punktwaiser Limes von messbaren Funktionen.

2. Beschränktheit von  $F$ :

$$\begin{aligned} \|Fu\|_{L^q}^q &= \int_G |f(x, u(x))|^q = \int_G (|a(x)| + b|u(x)|^{p/q})^q \\ &\leq C (\|a(x)\|_{L^q}^q + \|u\|_{L^p}^p) \quad \text{nach Young.} \end{aligned}$$

3. Stetigkeit von  $F$ :

$$\begin{aligned} u_j &\rightarrow u \quad \text{in } L^p \\ \Rightarrow \exists \text{ Teilfolge } : u_{j_k} &\rightarrow u \quad \text{f.ü.} \\ \Rightarrow (Fu_{j_k})(x) &\rightarrow (Fu)(x) \quad \text{f.f.a. } x \in G \text{ (wegen Stetigkeit)} \end{aligned}$$

Aber es gilt zudem, dass

$$\int_G |f(x, u_{j_k}(x)) - f(x, u(x))|^q \leq C \underbrace{(\|u\|_{L^q}^q + \|u_{j_k}\|_{L^p}^q + \|u\|_{L^p}^q)}_{\text{beschränkt.}}$$

Mit dem Satz über domenierte Konvergenz folgt

$$\|Fu_{j_k} - Fu\|_{L^p} \rightarrow 0.$$

$$\begin{aligned} |f(x, u_{j_k}(x)) - f(x, u(x))|^q &\leq C(|f(x, u_{j_k}(x))| + |f(x, u(x))|)^q \\ &\leq C(|a(x)|^q + b^q |u_{j_k}|^q + |f(x, u(x))|^q) =: h_{j_k}(x) \end{aligned}$$

Es folgt

$$\|Fu_{j_k} - Fu\|_{L^q}^q \leq \int_G h_{j_k}$$

mit

$$h_{j_k} \rightarrow h \quad \text{in } G; \quad \int_G h_{j_k} \rightarrow \int_G h,$$

denn  $\|u_{j_k}\|_{L^p} \rightarrow \|u\|_{L^p}$ . Jetzt folgt mit majorisierter Konvergenz, dass

$$F(u_{j_k})(x) \rightarrow (Fu)(x) \quad \text{in } L^p$$

Die selbe Rechnung mit gleichem Limes folgt allerdings auch unter vorheriger Auswahl einer Teilfolge von  $u_j$ , somit gilt auch für die gesamte Folge, dass

$$\|Fu_j - Fu\| \rightarrow 0 \quad (j \rightarrow \infty)$$

□

### Anwendung: $p$ -Laplace

Wir betrachten das Randwertproblem:

$$-\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) + su = f \quad \text{auf } \Omega$$

für  $1 < p < \infty$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen, beschränkt,  $s \geq 0$ ,  $u = 0$  auf  $\partial\Omega$ .

Schwache Formulierung: Es sei  $f \in L^p(\Omega)$

Wir suchen  $u \in X = W_0^{1,p}(\Omega)$ , so dass

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \varphi + s \int_\Omega u \varphi = \int_\Omega f \varphi \quad \forall \varphi \in X \quad (14)$$

Wir definieren einen Operator  $A$  durch

$$\langle Au, \varphi \rangle = (Au)(\varphi) := \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \varphi + \int_\Omega su \varphi \quad \forall u, \varphi \in X$$

und ein Funktional  $b$  durch

$$\langle b, \varphi \rangle = \int_\Omega f \cdot \varphi$$



**Lemma 4.9** Es sei  $p \geq \frac{2n}{n-2}$ ,  $f \in L^{p'}$ , dann gilt

$$A : X \rightarrow X'$$

beschränkt und  $b \in X'$ . Weiter gilt, dass (14) äquivalent ist zu

$$Au = b$$

BEWEIS: Wir benutzen  $\|u\|_X = \|\nabla u\|_{L^p}$  als äquivalente Norm auf  $X$  mittels *Poincaré*.

1) Es gilt

$$\begin{aligned} |\langle Au, \varphi \rangle| &\leq \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-1} |\nabla \varphi| + s \int_{\Omega} |u \varphi| \\ &\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \left( \int_{\Omega} |\nabla u|_{(p-1)p'}^{p'} \right)^{1/p'} \cdot \left( \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^p \right)^{1/p} + s \|u\|_{L^2} \|\varphi\|_{L^2} \\ &\stackrel{p' = \frac{p}{p-1}}{=} \|\nabla u\|_{L^p}^{p-1} \|\nabla \varphi\|_{L^p} + s \|u\|_{L^2} \|\varphi\|_{L^2} = \dots \end{aligned}$$

Für  $p \geq \frac{2n}{n-2}$  bettet  $W^{1,p}$  genau stetig in  $L^2$  ein. Es gilt somit, dass

$$\begin{aligned} \dots &\leq C(\|\nabla u\|_{L^p}^{p-1} + s \|\nabla u\|_{L^p}) \|\nabla \varphi\|_{L^p} \\ &\Rightarrow Au \in X' \end{aligned}$$

und

$$\|Au\|_{X'} \leq \sup_{\|\varphi\|_X \leq 1} |\langle Au, \varphi \rangle| \leq C \|\nabla u\|_{L^p}^{p-1} = C \|\nabla u\|_X^{p-1}$$

2) Gleichermaßen gilt

$$\|b\|_{X'}' \leq C \|f\|_{L^{p'}}$$

3) Es folgt, dass

$$(14) \Leftrightarrow \langle Au, \varphi \rangle = \langle b, \varphi \rangle \quad \varphi \in X$$

Das ist nichts anderes als

$$Au = b$$

□

**Lemma 4.10** Es seien die Voraussetzungen von Lemma 4.9 gegeben,  $A$  definiert nach (14). Dann sind die Voraussetzungen von Theorem 4.5 gegeben.

BEWEIS: 1. Monotonie: Es sei  $g = (g^1, \dots, g^n) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  und

$$g : \xi \mapsto |\xi|^{p-2} \xi, \quad g(0) = 0$$

Damit folgt, dass

$$\frac{\partial g^i}{\partial \xi^j}(\xi) = |\xi|^{p-2} \delta_i^j + (p-2) |\xi|^{p-4} \xi_i \xi_j \quad i, j = 1, \dots, n \quad \xi \neq 0.$$

Somit gilt aber, dass

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial q^i}{\partial \xi^j}(\xi) \eta^j \eta^i = |\xi|^{p-2} \left( |\eta|^2 + (p-2) \frac{(\xi \eta)^2}{|\xi|^2} \right) \geq \min(1, p-1) |\xi|^{p-2} |\eta|^2$$

Nun sei  $u \neq v \in X$ . es folgt, dass

$$\begin{aligned}\langle Au - Av, u - v \rangle &= \int_{\Omega} (g(\nabla u) - g(\nabla v))(\nabla u - \nabla v) + s \int_{\Omega} |u - v|^2 \\ &\geq \underbrace{\int_{\Omega} \int_0^1 \frac{d}{d\tau} g(\nabla v + \tau(\nabla u - \nabla v)) d\tau \cdot (\nabla u - \nabla v) dx}_{:=I}\end{aligned}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}I &\geq \int_0^1 \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial g^i}{\partial \xi_j}(\nabla v + \tau(\nabla u - \nabla v)) \cdot (\partial_j u - \partial_j v)(\partial_i u - \partial_i v) d\tau \\ &\geq c |\nabla u - \nabla v|^2 \underbrace{\int_0^1 |\nabla v + \tau(\nabla u - \nabla v)|^{p-2} d\tau}_{< \infty \text{ für } p > 1} > 0,\end{aligned}$$

denn  $|\nabla v + \tau(\nabla u - \nabla v)|^{p-2} > 0$  außer für max. 1 Punkt  $\tau_0(x)$ . Somit gilt aber

$$\langle Au - Av, u - v \rangle > 0 \Rightarrow A \text{ strikt monoton.}$$

2. Koerzitivität: Es sei  $u \in X$ . Es gilt

$$\begin{aligned}\langle Av, u \rangle &= \int_{\Omega} |\nabla u|^p + s|u|^2 \geq \int_{\Omega} |\nabla u|^p \\ \frac{\langle Au, u \rangle}{\|u\|_X} &\geq \|\nabla u\|_{L^p}^{p-1} \rightarrow \infty \text{ für } \|u\|_X \rightarrow \infty \text{ und } p > 1.\end{aligned}$$

3. Stetigkeit: Für die Funktion  $g$  aus 1. gilt

$$|g^i(\xi)| \leq c|\xi|^{p-1} = c|\xi|^{p/q} \text{ für } q = \frac{p}{p-1}$$

und  $g$  ist stetig. Somit ist

$$f : (L^p)^n \rightarrow (L^p)^n, \quad F : \nabla u \mapsto g(\nabla u)$$

ein  $n$ -dimensionaler *Nemychii-Operator*. Die Stetigkeit von  $A$  ist gegeben durch

$$\langle Au, \varphi \rangle = \int_{\Omega} \underbrace{F(\nabla u)}_{\in L^{p'}} \cdot \underbrace{\nabla \varphi}_{\in L^p} + s \underbrace{\int_{\Omega} u \varphi}_{\text{beschränkt.}}$$

folgt durch Normabschätzung. Damit ist  $A$  stetig und somit hemistetig.

4.  $W_0^{1,p}$  ist separabler Banachraum, somit sind alle Voraussetzungen von 4.5 erfüllt

□