Nichtlineare Funktionalanalysis

Luis Felipe Müller

10. Mai 2011

Kompletter Mitschrieb zur gleichnamigen Vorlesung bei Herrn Dondl
(Sommersemester 2011, Uni Heidelberg)

Organisatorisches

Termine

- Vorlesung: Mo./Mi. 9-11ct. -104 Ang. Math.
- Übungsaufgaben: Mi. - Mi. vor der Vorlesung. Kasten in der Angew.Math
- Übungsgruppe: Fr. 16-18 Angew. Math. -101
- Website zur Vorlesung: http://dondl.org/wiki/Sommersemester_11
- Literatur:
  1. Růžička M: Nichtlineare Funktionalanalysis, Eine Einführung
  2. Aubin-Ekeland: Applied nonlinear Analysis
  3. Deimling: Nonlinear Functional Analysis
  4. Schwartz: Nonlinear Functional Analysis
  5. Zeidler: Nonlinear Functional Analysis and its applications
- Prüfungen: Zulassung mit etwa 50% der Übungsaufgaben-Punkte. Prüfung ist mündlich, beispielsweise am 29. Juli (Fr.)
- Dozent: Patrick Dondl, Sprechstunde Mo./Mi. 11-12 in Raum 130 (Angew. Math.)
- Tutor: Julian Scheuer

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

1.1 Thema der Vorlesung

In der linearen Funktionalanalysis haben wir eine Vielzahl von Methoden kennengelernt um Ergebnisse aus der endlichdimensionalen linearen Algebra auf den unendlichdimensionalen Fall zu verallgemeinern. Ein Hauptaufgabe war dabei, die Lösbarkeit von Gleichungen der Form

$$Ax = y$$

für lineare Operatoren A auf ∞-dimensionalen Banchräumen zu zeigen.

Ein Beispiel:

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, gefüllt mit einer inkompressiblen, riskosen Flüssigkeit. $v_j(x)$ sei die Geschwindigkeit der Flüssigkeit an der Stelle $x \in \Omega$. $p(x)$ ist der Druck an der Stelle x.

Randbedingungen: $v_j(x) = 0 \quad x \in \partial\Omega$

Inkompressibilität: $\partial_j v_j(x) = 0 \quad x \in \Omega$

Bewegungsungleichung: Wir betrachten die Kräfte, die auf einen kleinen Würfel, eingeschlossen durch (x_1, x_2, x_3), $(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3)$. Druck auf eine Oberfläche des Würfels mit Normale x, ist $f_j^p = p \cdot \Delta x_2 \Delta x_3 \cdot \delta_{ij}$ auf die gegenüberliegende Seite wirkt

$$-(p + \partial_i p \Delta x_i)\Delta x_2 \Delta x_3 \delta_{ij}$$

Zusammen ergibt sich

$$f = (\partial_j p)\Delta V$$

Kraft durch Viskosität auf eine Oberfläche mit Normale x_1 ist

$$f_j^{V,x_i} = -2\eta \Delta x_2 \Delta x_3 \partial_1 v_j$$

mit einer Konstante η. Der gleiche Trick wie oben ergibt für die gegenüberliegende Oberfläche

$$\eta \Delta x_2 \Delta x_3 \partial(v_j + \partial v_j \Delta x_1)$$

Zusammen ergibt sich

$$f_j^V = \eta \Delta V \cdot \partial_i \partial_i v_j$$

Newton: $\rho \Delta V \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} v_j(t, x(t)) = \eta \Delta V \partial_i \partial_i v_j - \Delta V(\partial_j p) + \Delta V \kappa_j$ mit einer externen Konstante κ_j, bspw. Gravitation

Teilen durch ΔV und die Kettenregel ergibt

$$\begin{aligned} &\rho \partial_t v_j = \eta \partial_i \partial_i v_j - \rho(v_i \partial_i) - \partial_j p + K_j \quad \text{(Newton)} \\ &d_j v_j = 0 \end{aligned}$$

Naurier-Stokes. Frage: Existiert eine eindeutige Lösung zur sationären Naurier-Stokes-Gleichung:

$$\eta \partial_i \partial_i v_j - (v_i \partial_i) v_j + \partial_j p + K_j = 0 \tag{1}$$

Wir können die Gleichung etwas umschreiben. Sei H ein Hilbertraum

$$H := \overline{\{u \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^3), \text{ so dass } \partial_j v_j = 0\}}^{W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3)}$$

Ein Skalarprodukt auf H ist gegeben durch

$$(u,v)_H := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} (\partial_i u_j)(\partial_i v_j)$$

Ω beschränkt $\Rightarrow (\cdot,\cdot)_H$ ist äquivalent zum üblichen Skalarprodukt (mittels Poincaré). Wir multiplizieren (1) mit $\omega \in H$, integrieren und erhalten

$$\int_\Omega (\eta \partial_i \partial_i v_j - (v, \partial_i) v_j + K_j) \cdot \omega_j = \int_\Omega (\partial_j p) \omega_j = 0, \text{ da } \omega \text{ divergenzfrei.}$$
$$(1) \Rightarrow \eta(v,\omega)_H - a(v,v,w) - \int_\Omega K\omega = 0$$

Ebenso für a:

$$a(u,v,w) := (\underbrace{B(u,v)}_{\text{bilinear.}}, w)_H$$

Also

$$(1) \Rightarrow \ (\eta v - B(u,v)) - \tilde{K}, \omega)_H = 0 \quad \forall \omega \in H$$

somit

$$\eta v - B(v,v) = \tilde{K}$$

Das ist eine Gleichung der Form

$$Fv = \tilde{K}, \quad \text{mit } F \text{ einem Nichtlinearen Operator} \tag{2}$$

Im ersten Teil der Vorlesung beschäftigen wir uns mit der eindeutigen Lösbarkeit von Gleichungen der Form

$$Fx = y, \quad F : X \to Y, \quad X, Y \quad \text{Banachräume}$$

und zum Abschluß zeigen wir mit Hilfe des *Schauder'schen Fixpunktsatzes* die Existenz und finden eine Lösung von (2), also der schwachen Form der stationären Navier-Stokes-Gleichung.

Im zweiten Teil der Vorlesung beschäftigen wir uns mit Variationsrechnung (d.h. dem Finden von Minimierern nichtlinearer Funktionalen)

$$W : X \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad X \quad \text{ein Banachraum}$$

Finde

$$x_0 \in X : \ W(x_0) = \inf_{y \in X} W(y)$$

Insbesonder treffen wir dort auf Probleme in der Elastizitätstheorie.

Aufbau der Vorlesung

- Abbildungsgrad $\to$ Existenz von Lösungen von $Fx = y$
- Monotone Operatoren $\to$ Eindeutigkeit von Lösungen von $Fx = y$; zeitabhängige Probleme.
- Variationsrechnung $\to \inf_{y \in X} W(y)$

1.2 Vorarbeiten

1.2.1 Ableitung in Banachräume und implizite Funktionen

Es seien X und Y Banachräume, $\Omega \subset X$ offen, $F : \Omega \to Y$, $x_0 \in \Omega$

Definition 1.1 (Gâteaux-Ableitung) Die Gâteaux-Ableitung $\mathrm{d}F(x_0, \psi)$ des Operators F im Punkt x_0 in Richtung $\psi \in X$ ist gegeben durch

$$\mathrm{d}F(x_0, \psi) = \lim_{s \to 0} \frac{F(x_0 + s \cdot \psi) - F(x_0)}{s} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} F(x_0 + s\psi)\Big|_{s=0}$$

falls der Limes existiert. Der Operator F heißt in diesem Fall in x_0 Richtung ψ Gâteaux-differenzierbar.

Definition 1.2 (Fréchet-Ableitung) Der Operator F heißt Fréchet-differenzierbar in $x_0 \in \Omega$, falls ein beschränkter, linearer Operator

$$F'(x_0) : X \to Y$$

existiert, so dass

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{\|F(x_0 + h) - F(x_0) - F'(x_0) \cdot h\|}{\|h\|} = 0 \tag{3}$$

$F'(x_0)$ heißt dann Fréchet-Ableitung von F in x_0.

Theorem 1.3 *i) $F'(x_0)$ ist durch (3) eindeutig bestimmt.*

ii) Falls F stetig ist in x_0, so ist jeder lineare Operator, der (3) erfüllt, ebenfalls stetig.

iii) Ist $L : X \to Y$ linear, so gilt

$$L'(x) = L \quad \forall x \in X$$

Beweis: i) Es gelte (3) auch für L. Dann haben wir

$$\|Lh - F'(x_0)h\| \le \varepsilon\|h\| \quad \text{falls} \quad \|h\| < \delta = \delta(\varepsilon, x_0)$$

Für beliebiges h folgt aber

$$\begin{aligned} &\|(L - F'(x_0))(\delta\|h\|^{-1} \cdot h)\| \le \delta\varepsilon \\ &\quad \Rightarrow \|(L - F'(x_0))h\| \le \varepsilon\|h\| \quad \forall\, h \in X, \forall\, \varepsilon > 0 \\ &\Rightarrow \|L - F'(x_0)\|_{\mathscr{L}(X,Y)} = 0 \end{aligned}$$

ii) (3) wird umgeformt zu

$$\|F'(x_0)h\| \le \varepsilon\|h\| + \|F(x_0 + h) - F(x_0)\|$$

Mit $h \to 0$ folgt die Stetigkeit (für $\|h\| \le \delta$) von $F'(x_0)$ an der Stelle 0. Wegen Linearität von $F'(x_0)$ ist $F'(x_0)$ somit stetig.

iii) (3) gilt offensichtlich für $L'(x_0) = L$, mit i) folgt Eindeutigkeit.

□

Proposition 1.4 *Jeder Fréchet-differenzierbare Operator F ist Gâteaux-differenziebar $\forall\, \psi \in X$ und es gilt*

$$F'(x_0)\psi = \mathrm{d}F(x_0, \psi)$$

Beweis: Übungsaufgabe

□

Definition 1.5 F heißt (Fréchet-)differenzierbar auf Ω, falls $\forall\, x \in X$ ein $F'(x)$ existiert, sodass $F'(x)$ stetig ist und (3) erfüllt. F heißt stetig (Fréchet-)differenzierbar in Ω, falls die Abbildung

$$F' : \Omega \to \mathscr{L}(X, Y)$$

stetig ist.

Proposition 1.6 *Existiert die Gâteaux-Ableitung* $\mathrm{d}F(x, \psi)\ \forall x \in \Omega$*, und ist sie linear und stetig in* $\psi\ \forall\, x \in \Omega$*, so ist F Fréchet-differenziebar auf* Ω *und es gilt*

$$F'(x)\psi = \mathrm{d}F(x, \psi)$$

Beweis: Übungsaufgabe

□

Definition 1.7 Sei F auf Ω stetig differenziebar, $x_0 \in \Omega$. Falls ein stetiger linearer Operator

$$F''(x_0) : X \to \mathscr{L}(X, Y)$$

existiert mit

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{\|F'(x_0 + h) - F'(x_0) - F''(x_0)h\|_{\mathscr{L}(X,Y)}}{\|h\|} = 0$$

dann heißt F in x_0 zweimal (Fréchet-)differenzierbar und $F''(x_0)$ heißt zweite Ableitung von F in x_0. Höhere Ableitungen entsprechend.

Bemerkung: Es gilt die Kettenregel: Seien X, Y, Z Banachräume, $\Omega_X \subset X$ offen, $x_0 \in \Omega_X$,

$$F : \Omega_X \to Y, \quad F(x_0) = y_0 \in \Omega_Y \subset Y \quad \text{offen}$$

$$G : \Omega_Y \to Z$$

Falls $F'(x_0)$ und $G'(y_0)$ existiert, so ist

$$(G \circ F)'(x_0) = G'(y_0) \circ F'(x_0)$$

Definition 1.8 (Partielle Ableitung) Seien X, Y, Z Banachräume, $\Omega_X \subset X$ offen, $x_0 \in \Omega_X$, $\Omega_Y \subset Y$ offen, $y_0 \in \Omega_Y$. Der Operator

$$F : \Omega_X \times \Omega_Y \to Z$$

heißt partiell in (x_0, y_0) nach dem zweiten Argument (nach y) differenzierbar, falls die Abbildung

$$F(x_0, \cdot) : \Omega_Y \to Z$$

differenziebar ist. Wir nennen den linearen Operator $F_Y(x_0, y_0) : Y \to Z$, der

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{\|F(x_0, y_0 + h) - F(x_0, y_0) - F_Y(x_0, y_0)h\|}{\|h\|} = 0$$

erfüllt, die partielle Ableitung von F in (x_0, y_0) nach dem zweiten Argument.

Proposition 1.9 *Seien* X, Y *Banachräume,* $\Omega \subset X$ *offen und konvex mit* $x_0, x_1 \in \Omega$*.* $F : \Omega \to Y$ *sei stetig Fréchet-differenzierbar auf* Ω*. Dann gilt*

$$F(x_1) - F(x_0) = \int_0^1 F'(x_0 + t(x_1 - x_0))(x_1 - x_0)\,\mathrm{d}t$$

Das Integral ist als Limes der entsprechenden Riemannsumme zu verstehen und dieser existiert.

Beweis: Übungsaufgabe

□

Ähnlich dem endlichdimensionalen Fall geben uns die Ableitungen im Banachraum hinreichende Bedingungen um Operatoren implizit zu definieren. Die Fragestellung ist die folgende: Seien X, Y, Z Banachräume, U eine Umgebung von $x_0 \in X$. V eine Umgebung von $y_0 \in Y$. Wir suchen zu $F : U \times V \to Z$ einen Operator

$$T : U_0 \subset U \to V,$$

sodass gilt

$$F(x, Tx) = F(x_0, y_0) \quad \forall\, x \in U_0.$$

Durch eine einfache Verschiebung ist es ausreichend, den Fall

$$F(x_0, y_0) = 0$$

zu untersuchen.

Proposition 1.10 *Sei X ein Banachraum,* $\mathrm{Id} : X \to X$, $x \mapsto x$ *die Identität auf X. Es sei*

$$R : B_r(0) \subset X \to X,$$

eine k-Kontraktion mit $k < 1$, d.h. $\|R(x) - R(y)\| \le k\|x - y\|$, und es gelte

$$\|R(0)\| < r(1 - k)$$

Dann existiert genau ein $x \in B_r(0)$ mit

$$(\mathrm{Id} + R)x = 0$$

Beweis: Sei $S = -R$, wir suchen also einen Fixpunkt von S.

1. Eindeutigkeit: Seien $Sx = x$ und $Sx' = x'$, damit gilt

   $$\|x - x'\| = \|Sx - Sx'\| \le k\|x - x'\|.$$

   Mit $k < 1$ folgt $x = x'$.

2. Existenz: Sei $x \in B_r(0)$, es gilt

   $$\|Sx\| \le \|Sx - S(0)\| + \|S(0)\| \le k\|x\| + \|S(0)\| < kr + r(1 - k) = r$$

   Sei $x_p = Sx_{p-1}$, $x_0 = 0$. Es gilt (wie auch im Banach'schen Fixpunktsatz, siehe ÜB 1), dass

   $$\|x_{n+p} - x_n\| \le k^n(1 - k)^{-1}\|x\|,$$

   damit ist $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge und konvergiert gegen $x \in X$. Wir haben weiter, dass

   $$\|x\| \le \underbrace{\|x - x_{p+1}\|}_{\to 0} + \|x_{p+1}\| \quad \text{mit} \quad \|x_{p+1}\| < (1 - k)\|S(0)\| = r \Rightarrow \|x\| < r$$

   Wegen $x_{p+1} = Sx_p$ gilt dass $x = Sx$, somit ist x der gesuchte Fixpunkt.

□

Theorem 1.11 (Satz über implizite Funktion) *Seien X, Y, Z Banachräume, $U \subset X$ Umgebung von $x_0 \in X$, $V \in Y$ Umgebung von $y_0 \in Y$. Sei weiter*

$$F : U \times V \to Z$$

stetig und stetig differenzierbar nach der zweiten Variablen. $F_Y(x_0, y_0)$ sei eine Bijektion von Y nach Z und es gelte

$$F(x_0, y_0) = 0$$

Dann existiert $B_\delta(x_0) \subset U$, $B_r(y_0) \subset V$ und genau ein Operator $T : B_\delta(x_0) \to B_r(y_0)$, so dass $T(x_0) = y_0$ und $F(x, Tx) = 0 \ \forall\, x \in B_\delta(x_0)$. T ist stetig.

Beweis: Ohne Einschränkung sei $x_0 = y_0 = 0$. Sei $L := F_Y(0,0)$, $\mathrm{Id} : Y \to Y$ die Identität auf Y. Es sei $S(x,y) := L^{-1}F(x,y) - y$ für $(x,y) \in U \times V$. Somit gilt

$$F(x,y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y + S(x,y) = 0.$$

S ist stetig differenzierbar nach dem zweiten Argument mit

$$S_Y = L^{-1}F_Y(x,y) - \mathrm{Id}$$

Damit gilt

$$S_Y(0,0) = 0$$

Sei $k \in (0,1)$. Wegen Stetigkeit von S_Y existiert $r > 0$ mit

$$\|S_Y(x,y)\| \le k \quad \forall (x,y) \in B_r(0) \times B_r(0)$$

Sei nun $x \in B_r(0)$, $y, \tilde{y} \in B_r(0)$ Es gilt nach Proposition 1.9, dass

$$\|S(x,y) - S(x,\tilde{y})\| = \left\| \int_0^1 S_Y(x, \tilde{y} + t(y - \tilde{y}))(y - \tilde{y})\,\mathrm{d}t \right\| \le k \cdot \|y - \tilde{y}\|$$

Wegen $S(0,0)$ und Stetigkeit von S existiert $\delta \le r$, so dass

$$\|S(x,0)\| \le r(1-k) \quad \forall\, x \in B_\delta(0)$$

Sei also $x \in B_\delta(0)$. Nach Proposition 1.10 existiert genau ein $y \in B_r(0)$ mit $y + S(x,y) = 0$. Wir setzen

$$Tx = y, \quad T : B_\delta(0) \to B_r(0)$$

Es gilt $T(0) = 0$ wegen $0 + S(0,0) = T(0) + S(0, T(0)) = 0$ und der Eindeutigkeit von T. Es bleibt die Stetigkeit von T zu zeigen: Seien $x, x' \in B_\delta(0)$, damit gilt

$$0 = Tx + S(x, Tx) = T(x' + S(x, Tx'))$$

also

$$\begin{aligned}
\|Tx - Tx'\| &\le \|S(x', Tx') - S(x, Tx')\| + \|S(x, Tx) - S(x, Tx)\| \\
&\le \|S(x', Tx') - S(x, Tx')\| + k\|Tx - Tx'\| \\
&= (1-k)\|Tx - Tx'\| \\
&\le \|S(x', Tx') - S(x, Tx')\| \to 0 \quad \text{für } x \to x'
\end{aligned}$$

Somit ist T stetig.

□

Bemerkung: Ist F r-mal stetig differenziebrar, so gilt das auch für T.

BEWEIS: Übungsaufgabe

□

Theorem 1.12 *Seien X, Y Banachräume, $U \subset X$ eine Umgebung von x_0. Es sei $F : U \to Y$ stetig differenzierbar und $F'(x_0)$ sei eine lineare Bijektion von X nach Y. Dann existiert eine Umgebung $U_0 \subset U$ von x_0, so dass*

$$F|_{U_0} : U_0 \to F(U_0) \ni y_0 - F(x_0)$$

ein Homöomorphismus (bistetige Abbildung) ist.

BEWEIS: Wir wenden Satz 1.11 auf

$$\tilde{F}(x, y) := F(x) - y$$

an.

□

Bemerkung: Ist F r-mal stetig differenzierbar, so gilt das auch für F^{-1} (F ist ein r-Diffeomorphismus).

BEWEIS: Übungsaufgabe

□

Definition 1.13 (Zusammenhände Mengen) - Sei X ein (topologischer metrischer, normierter) Raum. Eine Menge $\Omega \subset X$ heißt zusammenhängend, falls es keine zwei abgeschlossenen (offenen) Ω_1, Ω_2 gibt mit

$$\Omega \subset \Omega_1 \cup \Omega_2, \quad \Omega \cap \Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset, \quad \Omega \cap \Omega_{1,2} \neq \emptyset$$

- Eine Menge $\Omega \subset X$ heißt wegzusammenhängend, falls sich je zwei Punkte in Ω durch eine stetige, in Ω verlaufende Kurve verbinden lassen.

- Eine Menge $\overline{\Omega} \subset \Omega$ heißt Zusammenhangskomponente von Ω, falls $\overline{\Omega} \subset \Omega$ maximal, zusammenhängend.

Bemerkung: Wegzusammenhängend ⇒ Zusammenhängend.
Offen, zusammenhängend ⇒ Wegzusamenhängend

Theorem 1.14 (Mittelwert) *Seien X, Y Banachräume, $F : X \to Y$ stetig differenzierbar.*

i) Falls Ω konvex ist, so gilt

$$\|F(x) - F(y)\| \leq M\|x - y\|,$$

wobei

$$M = \max_{0 \leq t \leq 1} \|F'((1-t)x + ty)\|$$

ii) Umgekehrt gilt: Falls

$$\|F(x) - F(y)\| \leq M\|x - y\| \quad \forall\, x, y \in \Omega$$

Dann gilt

$$\sup_{x \in \Omega} \|F'(x)\| \leq M$$

BEWEIS: Sei $f(t) := F((1-t)x + ty)$, $0 \leq t \leq 1$. Nach Kettenregel gilt

$$f'(t) = F'((1-t)x + ty)(x - y)$$

$$\Rightarrow \ \|f'(x)\| \leq \tilde{M} := M\|x - y\|$$

i) Sei $\phi(t) := \|f(t)\|$ für $\delta > 0$. Wir wollen zeigen, dass $\phi(t) \leq 0 \; \forall \, \delta > 0, \; 0 \leq t \leq 1$. Sei also (zum Widerspruch)

$$t_0 := \max\{t \in [0,1] \,|\, \phi(s) \leq 0 \; \forall \, s \leq t\}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\phi(t_0 + \varepsilon) &= \|f(t_0 + \varepsilon) - f(t_0) + f(t_0) - f(0)\| - (\tilde{M} + \delta)t \\
&\leq \|f(t_0 + \varepsilon) - f(t_0)\| - (\tilde{M} + \delta) - \phi(t_0) \\
&\leq \|f'(t_0)\varepsilon + (1)\| - (\tilde{M} + \delta)\varepsilon \\
&\leq (-\delta + (1))\varepsilon
\end{aligned}$$

ii) Angenommen, es existiert x_0 mit $\|F'(x_0)\| \geq M + 2\delta$, $\delta > 0$. Dann existiert $e \in X$, $\|e\| = 1$, $\|F'(x_0)e\| \geq M + \delta$. Somit gilt

$$\begin{aligned}
M\varepsilon \geq \|F(x_0 + \varepsilon e) - F(x_0)\| &= \|F'(x_0)(\varepsilon e) + (\varepsilon)\| \\
&\geq (M + \delta)\varepsilon - (\varepsilon) > M\varepsilon
\end{aligned}$$

Das ist ein Widerspruch.

□

Corollar 1.15 *Sei $\Omega \subset X$ offen, (weg-)zusammenhängend, F stetig differenzierbar auf Ω. Es gilt*

$$F = \text{Const} \quad \Leftrightarrow \quad F' = 0$$

Bemerkung: Wir schreiben wie im endl. dim. $C(\Omega) = C^0(\Omega)$, $C^1(\Omega) \ldots$

Anwendungen: Lokale Existenz und Eindeutigkeit Banachraum-wertiger Differenztialgleichunegen. Sei X Banachraum, $\Omega \subset X$ offen, $I \subset \mathbb{R}$ kompaktes Intervall. Es sei $C_b(I, \Omega)$ der Banachraum der beschränkten, stetigen Abbildungen von I nach Ω, versehen mit der sup-Norm.

Lemma 1.16 *Sei Y ein Banachraum, $f \in C(\Omega, Y)$ und sei die Funktion*

$$f_\star : C_b(I, \Omega) \to C_b(I, Y)$$

definiert als

$$(f_\star x)(t) = f(x(t))$$

Es gilt $f_\star \in C^r$

Beweis: $r = 0$: Sei $x_0 \in C_b(I, \Omega)$, $\varepsilon > 0 \; \forall \, t \in I$ existiert $\delta(t) > 0$, so dass

$$\|f(\xi) - f(x_0(t))\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall \, \xi \in B_{2\delta(t)}(x_0(t))$$

Die offenen Kugeln

$$\{B_{\delta(t)}(x_0(t))\}_{t \in I}$$

sind eine offene Überdeckung vom $\{x_0(t)\}_{t \in I}$. Diese Menge ist als stetiges Bild einer kompakten Menge kompakt, und somit existiert endliche Teilüberdeckung

$$\{B_{\delta(t_j)}(x_0(t_j))\}_{1 \leq j \leq N}$$

Sei nun $x \in C_b(I, \Omega)$ mit

$$\|x - x_0\| \leq \delta := \min_{1 \leq j \leq N} \delta(t_j)$$

Somit existiert $\forall\, t \in I$ ein t_j, so dass $\|x_0(t) - x_0(t_j)\| < \delta(t_j)$, und deshalb gilt

$$\|f(x(t)) - f(x_0(t))\| \le \underbrace{\|f(x(t)) - f(x_0(t_j))\|}_{\le 2\delta} + \underbrace{\|f(x_0(t_j)) - f(x_0(t))\|}_{\le \delta},$$

denn

$$\|x(t) - x_0(t_j)\| \le \|x(t) - x_0(t)\| + \|x_0(t) - x_0(t_j)\| \le 2\delta(t_j).$$

Somit folgt die Steigkeit. . . . . .

$r = 1$: Wir müssen zeigen, dass

$$\sup_{t\in I} \|f(x_0(t) + x(t)) - f(x_0(t)) - f'(x_0(t))x(t)\| \le \varepsilon \sup_{t \in I} \|x(t)\|$$

denn

$$(f'_\star(x_0)x)(t) = f'(x_0(t))x(t)$$

Übungsaufgabe. Folgt wie Stetigkeit durch Kompaktheit von I.

$\square$

2 Der Broawer'sche Abbildungsgrad

Motivation

Ziel: $f(x) = 0$ zu lösen für $f : U \subset X \to X$, X Banachraum.

Frage: Existenz/Anzahl der Lösungen

Rückblick auf Funktionentheorie: Sei $z_0 \in \mathbb{C}$

$$n(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z - z_0}\, \mathrm{d}z$$

$\rightsquigarrow$ Verallg.: $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. $0 \notin f(\gamma)$

$$n(f(\gamma), 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'}{f}\, \mathrm{d}z = \sum_k n(\gamma, z_k)\alpha_k$$

wobei $f(z_n) = 0$, α_k Vielfachheiten.
Ziel: Verallg. des Begriffs „Umlaufzahl“ für Abb. $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

2.1 Die Determinantenformel

2.1.1 Notation

$U \subset\subset R^n$ offen,

$$\begin{aligned}
J_f(x) &= \det \partial f(x) \\
RV(f) &= \{y \in \mathbb{R}^n \mid \forall\, x \in f^{-1}(y),\ J_f(x) \neq 0\} \\
CV(f) &= \mathbb{R}^n \setminus RV(f) \\
D^r_y(\overline{U}, \mathbb{R}^n) &:= \{f \in C^k(\overline{U}, \mathbb{R}^n) \mid y \notin f(\partial U)\} \\
D_y(\overline{u}, \mathbb{R}^n) &:= D^0_y(\overline{U}, \mathbb{R}^n)
\end{aligned}$$

$\tau(R^n)$ bezeichne die Topologie auf $\mathbb{R}^n$.

Definition 2.1 Eine Abbildung

$$\deg : \bigcup_{U\in\tau(\mathbb{R}^n),\, y\in\mathbb{R}^n} (D_y(\overline{U},\mathbb{R}^n) \times \{U\} \times \{y\} \to \mathbb{R},$$

d.h.

$$\deg = \deg(f,U,y)$$

heißt Gradabbildung, falls

D1 $\deg(f,U,y) = \deg(f-y,U,0)$

D2 $\deg(\mathrm{Id},U,y) = 1 \quad \forall y \in U$

D3 Seien $U_1, U_2 \subset U$ offen und disjunkt, sodass $y \notin f(\overline{U} \,|\, (U_1 \cup U_2))$, dann gelte

$$\deg(f,U,y) = \deg(f,U_1,y) + \deg(f,U_2,y)$$

D4 $H(t) = (1-t)f + tg \in D_y(\overline{U},\mathbb{R}^n) \quad \forall\, t \in [0,1] \;\Rightarrow\; \deg(f,U,y) = \deg(g,U,y)$ (Homotopieinvarianz)

Theorem 2.2 *Sei* deg *eine Gradabbildung. Dann gilt*

i) $\deg(f,\varnothing,y) = 0$ *und*

$$\deg(f,U,y) = \sum_{i=1}^{N} \deg(f,U_i,y)$$

falls $y \notin f(\overline{U} \setminus \bigcup_{i=1}^{N} U_i)$, $U_i \subset U$ *offen und disjunkt.*

ii) $y \notin f(U) \;\Rightarrow\; \deg(f,U,y) = 0$

iii) $|f(x) - g(x)| < \mathrm{dist}(y, f(\partial U)) \quad \forall\, x \in \partial U \quad \to \quad \deg(f,u,y) = \deg(g,U,y)$

Beweis: i) Sei $U_1 = U$, $U_2 = \varnothing$, einsetzen in (**D3**)

$$\Rightarrow\; \deg(f,\varnothing,y) = 0$$

$i = 1$: $U_2 = \varnothing$

$$\Rightarrow\; \deg(f,U,y) = \deg(f,U_1,y)$$

□

$i > 1$: Induktion mittels (**D3**)

ii)

$$y \notin f(U) \to y \notin = (\overline{U}) \;\Rightarrow\; y \notin f(\overline{U} \setminus \varnothing)$$
$$\overset{(i)}{\Rightarrow}\; \deg(f,U,y) = 0 \quad (i = 1, U_1 = \varnothing)$$

iii) Sei $H(t,x) := (1-t)f(x) + tg(x)$ und sei $x \in \partial U$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\; |H(t,x) - y| &= |f(x) - y + t(g(x) - f(x))| \\
&\geq |f(x) - y| - |g(x) - f(x)| \\
&\geq \mathrm{dist}(y, f(\partial U)) - |g(x) - f(x)| > 0 \\
\Rightarrow\; y \notin H(t,\partial U) \quad \forall\, t &\;\Rightarrow\; H(t) \in D_y(\overline{U},\mathbb{R}^n) \\
&\overset{\textbf{(D4)}}{\Rightarrow}\; \text{Behauptung.}
\end{aligned}$$

Theorem 2.3 *i)* $\deg(\cdot,U,y)$ *ist lokal konstant in* $D_y(\overline{U},\mathbb{R}^n)$

ii) $\deg(f, U, \cdot)$ *ist lokal konstant in* $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial U)$

iii) Seien $H : [0,1] \times \overline{U} \to \mathbb{R}^n$ *und* $y : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ *stetig (d.h. H ist eine Homotopie zwischen* $H(0) = H(0,\cdot)$ *und* $H(1)$*), so gilt*

$$\deg(H(0), U, y(0)) = \deg(H(1), U, y(1)),$$

falls $H(t) \in D_{y(t)}(\overline{U}, \mathbb{R}^n)$ $\forall t \in [0,1]$

Beweis: Beachte: $D_y(\overline{U}, \mathbb{R}^n)$ ist offen in $C^0(\overline{U}, \mathbb{R}^n)$

i) $\|f - g\|_{C^0,\overline{U}} < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - g(x)| < \varepsilon \,\forall\, x, \partial U$ mit

$$\varepsilon := \mathrm{dist}(y, f(\partial U)) \Rightarrow \deg(f, U, y) = \deg(g, U, y)$$

ii) Sei $y_0 \notin f(\partial U)$ und $y \in B_{\mathrm{dist}(y_0, f(\partial U))}(y_0 \subset \mathbb{R}^n \setminus f(\partial U))$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \|(f-y) - f\| &&< \mathrm{dist}(y_0, f(\partial U)) \\ &\overset{i)}{\Rightarrow} \deg(f - y, U, y_0) &&= \deg(f, U, y_0) \\ &\overset{\textbf{D1}}{\Rightarrow} \deg(f, U, y_0 + y) &&= \deg(f, U, y_0) \end{aligned}$$

iii) H ist gleichmäßig stetig

$$\Rightarrow H : [0,1] \to C^0(\overline{U}, \mathbb{R}^n) \quad t \mapsto H(t,\cdot)$$

ist auch stetig. H ist ein stetiger Weg in $D_y(\overline{U}, \mathbb{R}^n)$. Sei y fest

$$\Rightarrow \deg(H(t, U, y)) = \text{Const}$$

□

weil $\deg(\cdot, U, y)$ konst. auf Zsh-Komponenten ist. Für $y = y(t)$:

$$\underset{=}{\deg(H(0), U, y(0))} = \deg(H(0) - y(0), U, 0) = \deg(H(t) - y(t), U, 0) \quad \forall t$$

Lemma 2.4 *Zwei Matrizen* $M_1, M_2 \in \mathrm{Gl}(n)$ *sind genau dann homotop in* $\mathrm{Gl}(n)$*, falls*

$$\mathrm{sign}\det M_1 = \mathrm{sign}\det M_2$$

Beweis: „⇒“ Sei $M \in \mathrm{Gl}(n)$. Wegen der Linearität von det in Zeilen können elementare Zeilenumformungen mit Hilfe stetiger Deformationen in $\mathrm{Gl}(n)$ erzeugt werden.

$$M \rightsquigarrow \mathrm{diag}(m_1, \ldots, m_m), \quad \text{mit} \quad |m_i| = 1$$

weil $\mathrm{sign}\det M_1 = \mathrm{sign}\det M_2$.

$$H(t) := \begin{pmatrix} \pm\cos(\pi t) & \mp\sin(\pi t) \\ \sin(\pi t) & \cos(\pi t) \end{pmatrix}$$

ist eine Homotopie in $\mathrm{Gl}(n)$ von $\mathrm{diag}(\pm 1, 1)$ nach $\mathrm{diag}(\mp 1, -1)$. $i = n$ transformiere $\mathrm{diag}(\mp 1, -1)$.

$i = n$ transformiere $\mathrm{diag}(m_i, \ldots, m_i)$ nach $\mathrm{diag}(\pm 1, 1)$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} \mathrm{sign}\det M & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

□

Theorem 2.5 *Sei* $f \in D^1_y(\overline{U}, \mathbb{R}^n)$, $y \notin CV(f)$ *und* deg *eine Gradabbildung. Dann gilt*

$$\deg(f, U, y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \operatorname{sign} J_f(x),$$

wobei die Summe endlich ist.

Beweis: O.B.d.A. y_0 (**D1**). Alle $x \in f^{-1}(0)$ sind isolierte Punkte in U (Homöomorphiesatz). $f^{-1}(y)$ hat höchstens am Rand einen Häufungspunkt, aber $0 \notin f(\partial U)$.

$$\Rightarrow \ f^{-1}(0) = \{x^i\}_{i=1}^N$$

Wähle $\delta > 0$ so klein, dass $B_\delta(x^i)$ paarw. disjunkt.

$$\deg(f, U, 0) = \sum_{i=1}^N \deg(f, B_\delta(x^i), 0)$$

beachte $0 \notin f(\overline{U}, \setminus \bigcup_{i=1}^N B_\delta(x^i))$.

$$\underset{=}{f(x)} = \partial f(x)(x - x') + |x - x^i| r(x - x') \quad \text{mit} \quad r \in C^0(B_\delta(x^i), \mathbb{R}^n), \quad r(0) = 0)$$

Zeige $0 \notin H(t, \partial B_\delta(x^i))$.

$$J_f(x^i) \neq 0 \ \Rightarrow \ \exists\, \lambda > 0 : |\partial f(x^i)(x - x^i)| \geq \lambda |x - x^i|$$

O.B.d.A. sei δ so klein, dass $|r(x - x^i)| < \lambda$ in $B_\delta(x^i)$.

$$\Rightarrow \ |H(t, x)| > |\partial f(x^i)(x - x^i)| - (1 - t)(x - x^i) r(x - x^i) \geq \lambda\delta - \delta|r| > 0 \quad \forall\, x \in \partial B_\delta(x^i)$$

$$\overset{\textbf{(D4)}}{\Rightarrow} \ \deg(f, U, 0) = \sum_{i=1}^N \deg(\partial f(x^i)(\cdot - x^i), B_\delta(x^i), 0$$

Lemma 2.4

$$\Rightarrow \ \deg(\partial f(x^i)(\cdot - x^i), B_\delta(x^i), 0) = \deg(\operatorname{diag}(\operatorname{sign} J_f(x^i), 1, \ldots, 1), B_\delta(x^i), 0)$$

Falls $J_f(x^i) > 0 \overset{\textbf{D2}}{\Rightarrow} \deg(I(\cdot - x^i), B_\delta(x^i), 0) = 1$. Es genügt also, $\deg(M(\cdot - x^i), B_1(x^i), 0)$. Zu berechnen, wobei $M = \operatorname{diag}(-1, 1, \ldots, 1)$ ist.

$$\begin{aligned}
U_1 &:= B_1(x^i) = \{\max_{1 \leq k \leq n} |x_k - x_k^i| < 1\} \\
U_2 &:= U_1 + (2, 0, \cdot, 0) \\
g(r) &= 2 - |r - 1|,\ h(r) = 1 - r^2 \\
f_1(x) &:= (1 - g(x_1 - x_1^i) h(x_2 - x_2^(i)) \ldots h(x_n - x_n^{(i)}), \ldots, 1) \\
f_2(x) &:= (1, x_2 - x_2^{(i)}, \ldots, x_n - x_n^{(i)}) \\
f_1^{-1}(0) &= \{y, z\} \quad y = x^i, z = x^i + (2, 0, \ldots, 0) \\
f_1|_{\partial U} &= f_2|_{\partial U} \quad \Rightarrow \quad \deg(f_1, U_2, 0) = 0 \\
\Rightarrow \ \deg(f_1, U, 0) &= \deg(f_1, U_1, 0) + \deg(f_2, U_2, 0) \quad (\star) \\
\Rightarrow \ \deg(M, B_1(x^i), 0) &= \deg(\partial f_1(y), B_1(x^i), 0) \\
&= \deg(f_1, U_1, 0) \overset{(\star)}{=} -\deg(f_1, U_2, 0) \\
&= -\deg(\partial f_1(z), U_2, 0) = \deg(\operatorname{Id}, U_2, 0) = 1
\end{aligned}$$

□

2.2 Verallgemeinerung der Determinantenformel

Wir haben einen Kandidaten für deg identifiziert; für $f \in D'_Y(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, $y \in \mathbb{R}^n \cap RV(f)$ gilt

$$\deg(f, \Omega, g) = \sum_{x_j \in f^{-1}(y)} \operatorname{sign} J_f(x_j).$$

Problem: Nur für glatte f, und reguläre Punkte zu definieren. Programm zum Existenzbeweis: Verallgemeinerung der Determinanten-Formel auf

- kirtische Werte y.

- nur stetige Funktionen f.

Drei Beispiele zur Illustration:

1. $f(x) = x^2$, $U = (-1, 1)$
2. $f(x) = x^2$, $U = (-1, 2)$
3. $f(x) = x + 2\sin(x)$, $U = (-10, 10)$

Wie aus dem Beispielen ersichtlich ist, haben wir noch (kleine) Schwierigkeiten, den Abbildungsgrad an kritischen Werten von f zu definieren. Stetige Fortsetzungen liegt aber nahe. Das funktioniert aber nur falls es von diesen nicht „zu viele“ gibt.

Schritt 1:

Kritische Werte von f:

Lemma 2.6 (Sard) *Es sei $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ist offen und beschränkt. Dann ist $CV(f)$ eine Lebesgue-Nullmenge.*

Beweis: Klar, falls f eine affine Abbildung ist. (Dimension des Bildraumes der (konstanten) Ableitung!) Wir linearisieren.
Es sei $CP(f) := \{x \in \Omega \,|\, J_f(x) = 0\}$ die Menge der kritischen Punkte von f. Sei $\{Q_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ eine abzählbare, offen Überdeckung von Ω bestehend aus Würfeln, so dass

$$\overline{\Omega_i} \subset \Omega,\ i \in \mathbb{N}.$$

Es gilt

$$CV(f) = f(\mathrm{CP}(f)) = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} f(\mathrm{CP}(f) \cap Q_j)$$

Es reicht also zu zeigen, dass

$$|f(\mathrm{CP}(f) \cap Q_j)|$$

für alle $j \in \mathbb{N}$ verschwindet. Sei nun Q ein solcher Würfel, ρ dessen Kantenlänge. Sei $\varepsilon > 0$, und sei Q unterteilt in N^n Würfel Q^i der Seitenlänge $frac\rho N$, so dass

$$|f(x) - f(\tilde{x}) - f'(\tilde{x})(x - \tilde{x})| \leq \int_0^1 |f'(\tilde{x} + t(x - \tilde{x})) - f'(\tilde{x})| \cdot |x - \tilde{x}| \,\mathrm{d}x \leq \frac{\varepsilon\rho}{N} \quad \text{für alle} \quad x, \tilde{x} \in Q^i \tag{4}$$

So ein N existiert, nachdem f' auf Q gleichmäßig stetig ist. Nun enthalte Q^i einen kirtischen Punkt $\tilde{x}_i \in \mathrm{CP}(f)$, ohne Einschränkung sei $\tilde{x}_i = 0$, $f(\tilde{x}_i) = 0$, und $M = f'(\tilde{x}_i)$. Wegen $\det M = 0$ existiert eine ONB $\{b^j\}_{j=1}^n$ mit

$$b^n \perp R(M)$$

Weiter gilt

$$Q^i \subset \left\{ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j b^j \,\middle|\, \|\lambda\|_2 \le \sqrt{n}\frac{\rho}{N} \right\} \subset \left\{ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j b^j \,\middle|\, |\lambda_j| \le \sqrt{n}\frac{\rho}{M}\ \forall 1 \le j \le n \right\}$$

Damit existiert $C > 0$, (unabhängig von i), so dass

$$MQ^i \subset \left\{ \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j b^j \,\middle|\, |\lambda_j| \le C \cdot \frac{\rho}{N} \right\}$$

mit $C = \sqrt{n} \max_{x \in \overline{Q}} |f'(x)|$. Damit gilt nach (4) sogar, dass

$$f(Q^i) \subset \left\{ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j b^j \,\middle|\, |\lambda_j| \le (C+\varepsilon)\frac{\rho}{N}\ \forall 1 \le j \le n-1,\ |\lambda_n| \le \frac{\varepsilon\rho}{N} \right\}$$

Es folgt

$$|f(Q^i)| \le \frac{\tilde{C}\varepsilon}{N^n},$$

falls in Q^i ein kritischer Punkt liegt. Es gibt maximal N^n Unterwürfel Q^i mit kritischen Punkten. Somit gilt

$$|f(Q \cap \mathrm{CP}(f))| \le C \cdot \varepsilon \qquad \square$$

Dank Lemma 2.6 ist $\mathbb{R}^n \setminus \mathrm{CV}(f)$ dicht in $\mathbb{R}^n$. Das reicht leider (?) noch nicht.
Wir brauchen $d_1 = d_2$, um den Abbildungsgrad sinnvoll durch die Determinanten-Formel definieren zu können. (denn deg soll konstant sein auf Zusammenhangskomponenten, unabhängig von krit. Werten.)

Idee: Umschreiben der Determinantenformel als *Integral*. Es sei im Weiteren η_ε ein Standard-Mollifier (Standard-Dirarcfolge), d. h.

$$\eta_\varepsilon \in C_c^\infty(B_\varepsilon(0) \subset \mathbb{R}^n), \quad \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon = 1, \quad \eta_e ps \ge 0$$

Lemma 2.7 *Sei $f \in D_y^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, $y \notin \mathrm{CV}(F)$. Dann gilt*

$$\begin{aligned} \deg(f, \Omega, y) &= \textstyle\sum_{x_j \in f^{-1}(y)} \operatorname{sign} J_f(x_j) && (5)\\ &= \textstyle\int_\Omega \eta_\varepsilon(f(x) - y) J_f(x)\,\mathrm{d}x && (6) \end{aligned}$$

für alle ε hinreichend klein, d. h.

$$\varepsilon_0 > \varepsilon > 0, \quad \textit{mit} \quad \varepsilon_0 = \varepsilon_0(f, y)$$

Es gilt $\operatorname{supp}(\eta_\varepsilon(f(\cdot) - y)) \subset \Omega$ *für* $\varepsilon < \operatorname{dist}(y, f(\partial\Omega))$

Beweis: 1) Falls $f^{-1}(y) = \varnothing$, dann sei $\varepsilon_0 = \operatorname{dist}(y, f(\partial\Omega))$

2) Falls $f^{-1}(y) := \{x^i\}_{1 \le i \le N}$, sei $\varepsilon_0 > 0$, so dass

$$f^{-1}(B_{\varepsilon_0}(y)) = \bigcup_{i=1}^{N} U_i$$

mit $U_i \cap U_j = \varnothing$ für $i \ne j$. Aus dem *Satz über die imliziete Funktion* (war ja klar, dass wir den mal brauchen) folgt für evtl. noch kleiners ε_0, dass

$$f\big|_{U_i(x_i)} \text{ bijektiv}, \quad J_f(x) \ne 0 \quad \forall x \in U_i(x_i).$$

Wieder gilt $\eta_\varepsilon(f(x) - y) = 0$ für

$$x \in \overline{\Omega} \setminus \bigcap_{i=1}^{N} U_i(x^i)$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}\int_\Omega \eta_\varepsilon(f(x) - y) J_f(x)\,\mathrm{d}x &= \sum_{i=1}^{N} \operatorname{sign} J_f(x^i) \cdot \int_{B_{\varepsilon_0(x)}} \eta_\varepsilon(\tilde{x})\,\mathrm{d}\tilde{x} \\ &= \sum_{x^i \in f^{-1}(y)} \operatorname{sign} J_f(x^i)\end{aligned}$$

mit $f(x) = \tilde{x}$.

□

Die Inegraldarstellung ergibt auch für kritische Punkte Sinn. Aber: Wegen Abhängigkeit von ε_0 von f, y ist. Auch der Wert des Integrals nicht a priori stetig in f, y, denn ε_0 hängt ab von f und y.

Dieses Problem können wir beseitigen, wenn wir $f \in C^2$ fördern. Wir brauchen zunächst einen Hilfssatz.

Proposition 2.8 *a) Sei $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp} u \subset K$, K kompakt. Sei $\varphi = \operatorname{div} u$. Dann gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

b) Sei $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\varphi \in C^1$, und sei $z \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$\varphi(x + z) - \varphi(x) = \operatorname{div}\left(z \cdot \int_0^1 \varphi(z + tz)\,\mathrm{d}t\right)$$

c) Seien x, K, φ wie in a), $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt. Sei $f \in C^2(\overline{\Omega})$, sei $K \cap f(\partial\Omega) = \varnothing$. Dann existiert $v \in C^1(\overline{\Omega})$, mit $\operatorname{supp} v \subset \Omega$, so dass

$$\varphi(f(x)) J_f(x) = \operatorname{div} v(x) \quad \textit{auf} \quad \Omega$$

Beweis: a) Klar!

b) Sei

$$\eta(x) := \int_0^1 \varphi(x - sz)\,\mathrm{d}s.$$

$$\begin{aligned}(z \cdot \eta(x)) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\eta(x + tz)\Big|_{t=0} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(x + sz + tz)\Big|_{t=0}\,\mathrm{d}s \\ &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(x + sz)\,\mathrm{d}s = \varphi(x - z) - \varphi(x)\end{aligned}$$

c) Es sei d_{ij} der (i, j)- Eintrag der Kofaktormatrix von $(f')_{ij} = \partial_i f_j(x)$. Es sei $v_j(x) = \sum_{j=1}^{n} u_j(f(x))\,\mathrm{d}_{ij}(x), i = 1, \ldots, n$. Es gilt $K \cap f(\partial\Omega) = \Phi$, $f \in C(\overline{\Omega})$, damit existiert $\delta > 0$ mit $\operatorname{dist}(K, f(\overline{\Omega} \setminus f(\Omega_\delta))) > 0$. Somit gilt $\operatorname{supp} v \subset \Omega_\delta \subset \Omega$. Wir rechnen:

$$\partial_i v_i = \sum_{\mathrm{d}_{ij}(x)\partial_k u_j(f(x))} \partial_i f_k. + \sum_{j=1}^{n} u_j(f(x))\partial_i\,\mathrm{d}_{ij} x$$

Behauptung 1:

$$\sum_{i=1}^{n} \partial_i\,\mathrm{d}_{ij}(x) = 0$$

Behauptung 2:

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}_{ij}(x)\partial_i f_k(x) = \delta_{ij} \cdot J_f(x)$$

Somit gilt:

$$\operatorname{div} u(x) = \sum_{k,j} \partial_k u_j(f(x)) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}_{ij}(x)\partial f_k(x) \right) + \sum_{i=1}^{n} u_j(f(x)) \left(\sum \partial_i \, \mathrm{d}ij(x) \right) = \sum_{k,j} \partial_k u_j(f(x))\delta_{jk} J_f(x) = \varphi(f(x))J_f(x)$$

Behauptungen: Siehe Übungsblatt 2. Wir wollen nun zeigen, dass der über die Determinantenformel definierte Abbildungsgrad konstant ist auf Zusammenhangskomponente. Zu zeigen: $\deg(f, \Omega, y_1) = \deg(f, \Omega, y_2)$.

Lemma 2.9 *Sei $f \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, $y_0 \notin f(\partial\Omega)$,*

$$\rho := \operatorname{dist}(y_0, f(\partial\Omega))$$

Dann ist $\deg(f, \Omega, \cdot)$ (Definiert durch die Determinantenformel) konstant auf

$$B_\delta(y_0) \cap \mathrm{RV}(f)$$

Beweis: Sei $y^j \in B_\delta(y_0) \cap \mathrm{RV}(f)$, $j = 1, 2$, sei $\delta := \rho - \max_{j=1,2} \|y^j - y_0\|$. Sei $\varepsilon > 0$, so dass

$$\deg(f, \Omega, y^j) = \int \eta_\varepsilon(f(x) - y^j) J_f(x) \,\mathrm{d}x \quad \text{(nach Lemma 2.7)}$$

mit Proposition 2.8 b) gilt

$$\begin{aligned} \eta_\varepsilon(x - y^2) - \eta_\varepsilon(x - y^1) &= \eta_\varepsilon(x - y^1 + (y^1 - y^2)) - \eta_\varepsilon(x - y^1) \\ &= \operatorname{div} w(x) \quad \text{mit} \\ w(x) &= (y^1 - y^2) \int_0^1 \eta_\varepsilon(x - y^1 + t(y^1 - y^2)) \,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Behauptung: Es gilt $\operatorname{supp} w \subset B_\delta(y_0)$

Beweis: Sei $x \in \operatorname{supp} w$. Damit existert $t \in [0, 1]$ mit $|x - y^1 + t(y^1 - y^2)| < \varepsilon$

$$\Rightarrow \; |x - y_0| \leq \varepsilon + |y^1 - t(y^1 - y^2) - y_0| \leq \varepsilon + |(1 - t)(y^1 - y_0) + t(y^2 - y_0)|$$

$$\varepsilon + \rho - \delta < \rho$$

Damit gilt aber, dass $f(\partial\Omega) \cap \operatorname{supp} w = \varnothing$. Mit Proposition 2.8 e) existiert

$$v \in C^1(\Omega), \; \operatorname{supp} v \subset \Omega.$$

und

$$\left(\eta_\varepsilon(f(x) - y^2) - \eta_\varepsilon(f(x) - y^1) \right) J_f(x) = \operatorname{div} v(x)$$

Mit der Proposition 2.8 a) folgt die Behauptung.

□

Definition 2.10 Sei $f \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, $y \in f(\partial\Omega)$. Wir setzen

$$\deg(f, \Omega, y) = \deg(f, \Omega, \tilde{y}) = \sum_{x \in f^{-1}(\tilde{y})} \operatorname{sign} J_f(x),$$

wobei $\tilde{y} \in \mathrm{RV}(f)$ mit

$$|\tilde{y} - y| < \operatorname{dist}(y, f(\partial\Omega))$$

Behauptung: deg ist somit nach dem vorherstehenden Überlegungen wohldefiniert.

2. Schritt: Nur stetige Funktionen f

Auch hier die Idee: Sei $f \in D_y(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$. Wir schuen $\tilde{f} \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ hinreichend nahe an f (in derselben Zushgs-komponente von $D_y(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$) und übertragen den Wert von $\deg(\cdot, \Omega, y)$ von $\tilde{f}$ auf f. Es bleibt zu zeigen, dass die so definierte Funktion stetig ist.

Lemma 2.11 *Sei $f \in D_y^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, sei $g \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$. Dann existiert $\varepsilon > 0$, so dass*

$$\deg(f + tg, \Omega, y) = \deg(f, \Omega, y) \quad \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$$

Beweis: 1) $f(y) = \varnothing \Rightarrow (f + tg)^{-1} = \varnothing$ für $|t| < \frac{\operatorname{dist}(y, f(\overline{\Omega}))}{\|g\|_\infty}$

2) $y \in \mathrm{RV}(f) \Rightarrow f^{-1}(y) = \{x\}_{i=1}^N$. Mithilfe des *Satzes über die implizite Funktion* finden wir

$$U^i(x^i)$$

disjunkte Umegbungen, so dass eindeutige Lösungen $x^i(t)$ existieren von

$$(f + tg)(x) = y \quad \forall |t| < \varepsilon$$

Wir können (zumindest auf evtl. noch kleineren $U^i(x^i)$) annehmen, dass das Vorzeichen von $J_f + tg$ konstant ist auf $U^i(x^i)$. Sei

$$\varepsilon_2 = \frac{\operatorname{dist}(y, f(\Omega \setminus \bigcup_{i=1}^N U^i(x^i)))}{\|g\|_\infty}.$$

Dann gilt $\operatorname{dist}(y, (f + tg)(\partial\Omega)) > 0 \ \forall |t| < \varepsilon_2$. Das Lemma gilt somit für $\varepsilon = \min(\varepsilon, \varepsilon_2)$

3) $y \in \mathrm{CV}(f)$. Sei dann $\tilde{y} \in \mathrm{RV}(f)$.

$$|y - \tilde{y}| < \frac{\rho}{3} = \frac{1}{3}\operatorname{dist}(y, f(\partial\Omega)).$$

Nach Definition 2.10 gilt

$$\deg(f, \Omega, y) = \deg(f, \Omega, \tilde{y}).$$

Sei $\tilde{\varepsilon} > 0$ mit $\deg(f, \Omega, \tilde{y}) = \deg(f + tg, \Omega, \tilde{y})$ für $|t| < \tilde{\varepsilon}$ (Nach Schritt 2). Mit $\varepsilon = \min(\tilde{\varepsilon}, \frac{\rho}{3\|g\|_\infty})$ gilt:

$$|\tilde{y} - (f + tg)(x)| \geq \frac{\rho}{3} \quad \forall x \in \partial\Omega$$

Somit gilt

$$|\tilde{y} - y| < \operatorname{dist}(\tilde{y}, (f + tg)(\partial\Omega))$$

also

$$\deg(f + tg, \Omega, \tilde{y}) = \deg(f + tg, \Omega, y)$$

Es folgt

$$\deg(f, \Omega, y) = \deg(f + tg, \Omega, y)$$

□

Theorem 2.12 (Existenz und Eindeutigkeit des Brower'schen Abbildungsgrades) *Es existiert eine eindeutige Abbildung*

$$\deg(f, \Omega, y)$$

*mit den Eigenschaften **(D1-D4)**. Weiter gilt*

$$\deg(\cdot, \Omega, y) : D_y(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n) \to \mathbb{Z}$$

ist konstant auf Zusammenhangskomponente von $D_y(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$. Für $f \in D_y(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ ist $\deg(f, \Omega, y)$ gegeben durch

$$\deg(f, \Omega, y) = \sum_{x \in \tilde{f}^{-1}(y)} \operatorname{sign} J_{\tilde{f}}(x)$$

wobei

$$\tilde{f} \in D_y^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$$

beliebig aus derselben Komponente von $D_y(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ wie f gewählt werden kann mit $y \in \mathrm{RV}(\tilde{f})$

Beweis: Aus Lemma 2.9 und 2.11 folgt, dass deg wohldefiniert ist und lokal konstant mit Werten in $\mathbb{Z}$. Die Abbildung deg auf Zusammenhangskomponenten.

(D2) $\rightarrow$ klar.

(D1) gilt nachdem diese Bedingung per Konstruktion für die Determinatenformel gilt.

(D3) Wir wählen $\|f - \tilde{f}\|_\infty < \operatorname{dist}(y, f(\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cap \Omega_2)))$. **D3** gilt per Konstruktion für $\tilde{f}$, sonst für f.

(D4) folgt aus der Konstruktion von f auf Zusammenhangskomponente.

$\square$

Beispiele:

1) Sei

$$f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 + \cos(x_1 + x_2) \\ x_2 + 2x_1 + \sin(x_1 + x_2) \end{pmatrix}$$

und

$$g(x_1, x_2) := \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 \\ x_2 + 2x_1 \end{pmatrix}$$

Es gilt $|g(x)| = \sqrt{5}|x|$ und $|f(x) - g(x)| = \sqrt{\sin^2(x_1 + x_2) + \cos^2(x_1 + x_2)} = 1$. Sei $h(t) = (1-t)g + tf = g + t(f - g)$.

$$|h(t)| \geq |g| - t|f - g| > 0 \quad \text{für} \quad |x| > \frac{1}{\sqrt{5}}$$
$$\Rightarrow \deg(f, B_r(0), 0) = \deg(g, B_r(0), 0) = 1 \quad \text{für} \quad r > \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Somit existiert eine Lösung $x : f(x) = 0$.

2)

Theorem 2.13 *Ein stetiges Vektorfeld im $\mathbb{R}^n$, das auf einer Kugeloberfläche überall nach außen zeigt, muss auf einem Punkt im Innern der Kugel verschwinden.*

Anders formuliert, sei $f : \overline{B_R(0)} \to \mathbb{R}^n$ stetig, so dass $f(x) \cdot x > 0 \; \forall |x| = R$. Dann existiert ein $x_0 \in B_R(0)$ mit $f(x_0) = 0$.

Beweis: Wir haben $\deg(\mathrm{Id}, B_R(0), y) = 1$ für $y \in B_R(0)$. Angenommen, $f(x) \neq 0$ für alle $x \in B_R(0)$. Dann gilt $f^{-1}(0) \cap B_R(0) = \varnothing$.

$$\Rightarrow \deg(f, B_R(0), 0) = 0$$

Sei $H(t) = (1-t)\mathrm{Id} + tf$.

$$\deg(H(0), B_R(0), 0) = 1$$
$$\deg(H(1), B_R(0), 0) = 0.$$

Es existiert ein $t_0 \in (0,1)$, so dass $H(t_0) \notin D_0(\overline{B_R(0)}, \mathbb{R}^n)$.

$$\exists x_0 \in \partial B_R(0) \cdot (H(t_0))(x_0) = 0.$$

$$\begin{aligned} & 0 = H(t_0)(x_0) \\ \Rightarrow\ & 0 = H(t_0)(x_0)\cdot x_0 = \underbrace{(1-t_0)R^n}_{>0} + \underbrace{t_0 f(x_0) x_0}_{>0} > 0 \end{aligned}$$

Widerspruch!

□

2.3 Der Brouwer'sche Fixpunktsatz

Der *Brouwer'sche Fixpunktsatz* ist eine Folgerung aus den Eigenschaften des Abbildungsgrades. Er besagt, dass stetige Abblidungen, die kompakte, konvexe Mengen im $\mathbb{R}^n$ (oder Mengen, die dazu homöomorph sind) in sich selbst abbilden,einen Fixpunkt besitzen.

Theorem 2.14 (Fortsetzung stetiger Funktionen) *Sei X ein metrischer Raum, Y normierter Raum. Sei $K \subset X$ abgeschlossen. Sei $F \in C(K, Y)$. Dann besizt F eine stetige Fortsetzung Fortsetzung $G : X \to Y$, so dass*

$$G(x) \subset \operatorname{conv} F(K)$$

Beweis: Wir betrachten die offene Überdeckung

$$\left\{B_{\rho(x)}(x)\right\}_{x\in X\setminus K} \quad \text{von} \quad X \setminus K$$

mit $\rho(x) = \frac{1}{2}\mathrm{dist}(x, K)$. Wir wählen nun eine lokal endliche Zerlegung der Eins $\{\varphi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, welche der offenen Überdeckung untergeordnet ist.

Einschub:

Zerlegung der Eins: Sei $\{U_i\}_{i\in I}$ eine Überdeckung von X, topologischer Raum. $\{\varphi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ ist eine $\{U_i\}_{i\in I}$ untergeordnete lokal endliche Zerlegung der Eins, falls gilt

- $\forall \lambda \in \Lambda\ \exists\, i \in I :\ \operatorname{supp}\varphi_\lambda \subset U_i$
- $\sum_{\lambda\in\Lambda} \varphi_\lambda = 1$
- $\forall x \in X\ \exists\, U(x)$ Umgebung von x, so dass nur *endlich viele* $\lambda \in \Lambda$ existieren, mit $U(x) \cap \operatorname{supp}\varphi_\lambda \neq \emptyset$ (lokal endlich).
- $\varphi_\lambda \in C(U, [0,1])\ \forall \lambda$.

Konstruktion aus einer lokal endlichen Überdeckung $(v_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ($\forall x \in X\ \exists\, U(x)$ Umgebung: $U(x) \cap V_\lambda \neq \emptyset$ nur für endlich viele $\lambda \in \Lambda$.) in metrischen Räumen (X, d).

- Sei $\alpha(x) = \sum_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{dist}(x, X \setminus V_\lambda) > 0\ \forall x \in X$, mit $\mathrm{dist}(x, \emptyset) := 1$.
- $\varphi_\lambda(x) := \frac{1}{\alpha(x)} d(x, X \setminus V_\lambda) \in [0,1]$, $\varphi_\lambda = 0$ für $x \notin V_\lambda$.

„Konstruktion“ einer lokal endlichen Überdeckung $\{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, die eine offen Überdeckung $\{U_i\}_{i\in I}$ verfeinert (d.h. $\forall\,\lambda\in\Lambda\,\exists i\in I,\ V_\lambda\subset U_i$).

Die Existenz einer solchen lokal endlichen verfeinernde Überdeckung zu jeder offenen Überdeckung ist die Definition der *Parakompaktheit*.

Theorem 2.15 *Jeder metrische Raum ist parakompakt.*

Beweisidee: Angenommen $I=\mathbb{N}$ also wohlgeordnet. (jede Teilmenge besitzt ein eindeutiges kleinstes Element.) Wir setzen für $i\in I$, $n\in\mathbb{N}$.

$$D_{in}=\bigcup_{x\in\Phi(i,n)}B_{2^{-n}}(x)$$

$$\Phi(i,n):=\left\{x\in X\,\middle|\,\text{mit}\begin{cases}i \text{ ist die kleinste Zahl, so dass } x\in U_i\\ x\notin D_{jm} \text{ für } m<n\\ B_{3\cdot 2^{-n}}\subset U_i\end{cases}\right\}$$

klar: $\{D_{in}\}$ verfeinert $\{U_i\}$

Überdeckung: Klar, denn für jedes $x\in X$ finden in ein kleinstes $i\in I=\mathbb{N}$ und ein n hinreichend groß.

lokale Endlichkeit (s.Artikel). Ist I nun eine beliebige Indexmenge, so läßt sich diese wohlordnen (*Zorn'sches Lemma*), und die Wohlordnung ist die einzige Eigenschaft von I, die wir benutzt haben.

Einschub Ende, weiter im Beweis.

Sei

$$G(x):=\begin{cases}F(x) & \text{für}\quad x\in K\\ \sum_{\lambda\in\Lambda}\varphi_\lambda(x)\cdot F(x_\lambda) & \text{für}\quad x\in X\setminus K\end{cases},$$

wobei x_λ beliebig in K so gewählt ist, dass

$$\operatorname{dist}(x_\lambda,\operatorname{supp}\varphi_\lambda)\le 2\cdot\operatorname{dist}(K,\operatorname{supp}\varphi_\lambda).$$

G ist offensichtlich stetig auf $X\setminus\partial K$. G ist offensichtlich stetig auf $X\setminus\partial K$ und

$$G(X)\subset\operatorname{conv}G(K).$$

Sei also $x_0\partial K$ und sei $\varepsilon>0$. Wir wählen $\delta>0$, so dass

$$\|F(x)-F(x_0)\le\varepsilon\quad\forall x\in K\quad\text{mit}\quad d(x,x_0)\le 9\delta.$$

Es bleibt zu zeigen, dass

$$\|G(x)-F(x_0)\|\le\varepsilon\quad\forall x\in X\setminus K\quad\text{mit}\quad d(x,x_0)\le\delta$$

Sei also $x\notin K$, dann gilt

$$\|F(x)-F(x_0)\|\le\sum_{\lambda\in\Lambda}\varphi_\lambda(x)\|F(x_\lambda)-F(x_0)\|$$

Nach Konstruktion liegt x_λ nicht weit von x entfernt, damit nicht weit von x_0, falls $x\in\operatorname{supp}\varphi_\lambda$. In der Tat gilt für $x\in\operatorname{supp}\varphi_\lambda$:

$$\begin{aligned}d(x,x_\lambda)&\le\operatorname{dist}(x_\lambda,\operatorname{supp}\varphi_\lambda)+\underbrace{\operatorname{diam}(\operatorname{supp}\varphi_\lambda)}_{=\sup_{x,y\in\operatorname{supp}\varphi_\lambda}d(x,y)}\\&\le 2\operatorname{dist}(K,\operatorname{supp}\varphi_\lambda)+\operatorname{diam}(\operatorname{supp}\varphi_\lambda)\end{aligned}$$

Nachdem $\{\varphi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ der Überdeckung $\{B_{\rho(x)}\}_{x\in X\setminus K}$ untergeordnet ist, existiert $\tilde{x}\in X\setminus K$, so dass

$$\operatorname{supp}\varphi_\lambda\subset B_{\rho(\tilde{x})}(\tilde{x})$$

$$\Rightarrow \operatorname{diam}(\operatorname{supp} \varphi_\lambda) \le 2\rho(\tilde{x}) = \operatorname{dist}(\tilde{x}, K) \le 2\operatorname{dist}(K, B_{\rho(\tilde{x})}(\tilde{x})) \le 2\operatorname{dist}(K, \operatorname{supp} \varphi_\lambda)$$

$$\Rightarrow d(x_0, x_\lambda) \le 4\operatorname{dist}(K, \operatorname{supp} \varphi_\lambda).$$

Und es folgt

$$\begin{aligned} d(x_0, x_\lambda) &\le d(x_0, x) + d(x, x_\lambda) \\ &\le d(x_0, x) + 4\operatorname{dist}(K, \operatorname{supp} \varphi_\lambda) \\ &\le d(x_0, x) + 8\operatorname{dist}(K, \operatorname{supp} \varphi_\lambda) \\ &\le d(x_0, x) + 8d(x_0, x) = 9d(x_0, x) \le \delta. \end{aligned}$$

Nach Wahl von δ gilt

$$\|F(x_\lambda) - F(x_0)\| \le \varepsilon \quad \forall \lambda \in \Lambda : \varphi_\lambda(x) \ne 0.$$

Somit gilt

$$\|G(x) - G(x_0)\| \le \varepsilon \quad \text{für} \quad d(x, x_0) \le \delta.$$

□

Bemerkung: Mit Hilfe dieses Satzes und dem Abbildungsgrad lässt sich der sog. „Igelsatz" zeigen, der besagt, dass man einen Igel nicht stetig kämmen kann. Übungsaufgabe.

Theorem 2.16 (Brouwerscher Fixpunktsatz) *Sei K ein topologischer Raum, der zu einer kompakten konvexen Teilmenge des R^n homöomorph ist. Sei $f \in C(K, K)$. Dann besitzt f einen Fixpunkt.*

Beweis: 1. $K = \overline{B_r(0)} \subset \mathbb{R}^n$. Falls ein Fixpunkt auf dem Rand existiert, dann sind wir fertig. Ansonsten gilt für $H(t) = \mathrm{Id} - tf$, dass $0 \notin H(t)(\partial B_r(0))$, nachdem

$$|H(t)(x)| \ge |x| - t|f(x)| \ge (1-t)r > 0 \quad \text{für} \quad 0 \le t < 1, \quad x \in \partial B_r(0).$$

Nach der Annahme der Nichtexistenz eines Fixpunktes auf $\partial B_r(0)$ ist auch $H(1)(x) \ne 0 \ \forall x \in \partial B_r(0)$.

$$\Rightarrow \deg(\mathrm{Id} - f, B_r(0), 0) = \deg(\mathrm{Id}, B_r(0), 0) = 1.$$

Somit existiert $x \in B_r(0)$ mit $x = f(x)$.

2. Sei nun $K \subset \mathbb{R}^n$ konvex, kompakt. Für ein $\rho > 0$ gilt $K \subset B_\rho(0)$ und gemäß Satz können wir f stetig durch g auf $\overline{B_\rho(0)}$ fortsetzen mit

$$g\left(\overline{B_\rho(0)}\right) \subset \operatorname{conv} K = K.$$

Nach 1. finden wir $x \in \overline{B_\rho(x)}$ mit $x = g(x)$. Es gilt $g(x) \in K$, somit folgt $x \in K$ und wir haben $x \in K$ mit $f(x) = x$.

3. Sei K homöomorph zu $K^\star \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, konvex. Sei h die entsprechende Homöomorphie. nach 2. besitzt $h \circ f \circ h^{-1}$ einen Fixpunkt $x^\star \in K^\star$. Damit ist aber $x = h^{-1}(x^\star) \in K$ ein Fixpunkt von f.

□

Bemerkung: 1. Die Bedingungen sind tatsächlich notwendig. Gegenbeispiele siehe Übung.

2. Es existiert auch eine stetige Abbildung $f \in C(\overline{B_1(0)}, \overline{B_1(0)})$, $B_1 \subset X$ separabler ∞-dimensionaler Hilbertraum ohne Fixpunkt.

   → Beispiel von Kakutani später.

   → *Schauderscher Fixpunktsatz.*

3. Im eindimensionalen Fall ist 2.16 nichts anderes als der Zwischenwertsatz angewendet auf $x - f(x)$.

4. Vergleich mit dem *Banach'schen Fixpunktsatz*: Wesentlich geringere Anforderungen an den Operator (nur Stetigkeit), dafür hohe Anforderungen an den Raum (endlichdim., kompakt, konvex). Wir bekommen keine Eindeutigkeitsaussage.

Ein Anwendugsbeispiel

Existenz positiver (bzw. nichtnegativer) Eigenwerte und Eigenfunktionen. Sei $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ eine Matrix und sei $a_{ij} \geq 0\ \forall (i,j)$. Dann existiert $\lambda \geq 0$, $x = (x_i)_{i=1}^n$, $x_i \geq 0\ \forall i$ mit

$$Ax = \lambda x \tag{7}$$

Beweis: Sei

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \geq 0, \sum_i x_i = 1\}$$

kompakt und konvex.

1) Falls $Ax = 0$ für ein $x \in K$, gilt 7 mit $\lambda = 0$.

2) Sei $Ax \neq 0\ \forall x \in K$. Dann existiert $\alpha > 0$ mit

$$\sum_i (Ax)_i \geq \alpha \quad \forall x \in K.$$

Es sei also

$$f : x \mapsto \frac{Ax}{\sum_i (Ax)_i}; \quad (f(x))_i \geq 0 \quad \forall i$$

und es gilt

$$\sum_i (f(x))_i = 1 \quad \forall x \in K.$$

Dann ist $f(K) \subset K$ und nach Satz 2.16 existiert ein Fixpunkt $x \in K$ mit $x = f(x)$, d.h.

$$Ax = \lambda x \quad \text{mit} \quad \lambda = \sum_i (Ax)_i > 0$$

□

2.4 Weitere Eigenschaften des Abbildungsgrades

Sei $m < n$, wir identifizieren im Folgenden den $\mathbb{R}^m$ mit dem Unterraum

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid xm + n = \ldots = x_n = 0\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Theorem 2.17 (Reduktionseigenschaften des Abbildungsgrades) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $\Omega \cap \mathbb{R}^m \neq \emptyset$ und sei*

$$f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^m \textit{ stetig}, \quad g = \mathrm{Id} - f$$

Sei $y \in \mathbb{R}^m$, $y \notin g(\partial\Omega)$. Dann gilt

$$\deg(g, \Omega, y) = \deg(g|_{\overline{Omega} \cap \mathbb{R}^m}, \Omega|_{R^m}, y).$$

Beweis: Sei $\Omega_m = \Omega \cap \mathbb{R}^m \neq \emptyset$ offen, beschränkt im R^m, und $g_m := g|_{\overline{Omega_m}}$. Es gilt

$$\partial\Omega_m = \partial\Omega \cap \mathbb{R}^m.$$

und

$$g_m(\overline{\Omega_m}) \subset \mathbb{R}^m,\ y \notin g_m(\partial\Omega_m).$$

$\Rightarrow \deg(g_m, \Omega_m, y)$ ist definiert (als Abbildungsgrad im $\mathbb{R}^m$).

1) Sei $g \in C^1(\overline{\Omega})$ und $y \in \mathrm{RV}(g)$ und $x \in \Omega$, $g(x) = y$.

$$\Rightarrow\; x = y = f(x) \in \mathbb{R}^m \quad \Rightarrow \quad x \in \Omega_m.$$

Somit haben wir

$$g^{-1}(y) = g_m^{-1}(y).$$

Nach der Determinantenformel genögt es nun zu zeigen, dass

$$J_{g_m}(x) = J_g(x) \quad \text{für} \quad x \in \Omega_m.$$

Es sei Id_k die $k \times k$-Einheitsmatrix. Es gilt

$$\begin{aligned} J_{g_m}(x) &= \det(\mathrm{Id}_m - f'(x)) \quad (f|'_{\Omega_m}) \\ J_g(x) &= \det \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_m - (\partial_j f_i(x)) & -\partial_j f_i \\ 0 & \mathrm{Id}_{n-m} \end{pmatrix} \quad \text{wegen } f(\overline{\Omega}) \subset \mathbb{R}^m. \end{aligned}$$

Die gewünschte Aussage folgt sofort durch Entwicklung der Determinante nach den letzten $n - m$ Zeilen.

2) Der allgemeine Fall folgt durch Wahl von $\tilde{g} = \mathrm{Id} - \tilde{f}$ hinreichend nah an g, so dass $\tilde{g}$ die in 1. geforderten Eigenschaften besitzt.

□