Jorge Andrés Gómez - 201618492
Fabian Alvarez - 201516022

Grafos BC - Problema B

1. Algoritmo de Solucion:
   En un principio se considero usar una busqueda por expansion de grafos, de tal manera que cada nodo representara (+/-) un diferencial, y que en la profundidad n la suma de los valores de los nodos de ese camino representara la suma total, buscando la suma menor. Se concluyo que esta opcion era muy ineficiente ($T(n) = \theta(n2^n)$), de modo que recurrimos a esta solucion por programacion dinamica, donde la idea es usar los valores de la suma anterior para poder acotar a un valor especifico, y no ir directamente al minimo, de modo que se pueda ir acotando desde 0 hasta n, ya que al calcular k+1 solo se necesita k. La solucion consta de dos partes:

   a) Calcular las diferencias:
   Precondicion: El grafo es BC.
   Poscondicion: Todos los nodos estan marcados y $|x - y|$ es la diferencia del grafo.

   Esta parte consta de un algoritmo DFS que al marcar los nodos que visita, tambien les asigna un conjunto (x o y), de modo que al final $|x - y|$ sea el valor de la diferencia del grafo. Para asignarle un conjunto a los nodos en tiempo constante, se hace antes de que ingresen a la pila, de modo que si se tienen los sucesores de k, todos perteneceran al conjunto que no pertenece k. Ya que el grafo es BC, partiendo desde cualquier nodo se debe poder llegar por DFS a todo el grafo, y no importa donde se empiece ya que $|x - y| = |y - x|$, en dado caso de que se inviertan los conjuntos al realizar el calculo. Ademas, para calcular $|x - y|$ en tiempo constante se mantienen contadores para sus cardinalidades que se aumentan cada que se le asigna a un nodo su conjunto respectivo.

   //Para los siguientes calculos, V es la cantidad de vertices del grafo con mas vertices, y E la cantidad de arcos del grafo con mas arcos.

   Espacial: $S(n) = \theta(n)$

   La complejida espacial es la misma que la de un DFS normal, ya que las variables x y y son independientes de la entrada.

   Temporal: $T(n) = \theta(n(V + E))$

   La complejidad temporal es la de realizar n veces DFS, ya que las operaciones extra ocurren en tiempo constante.

b) Calcular el minimo valor de la suma alternante de los diferenciales:
Precondicion: todos los valores del arreglo son naturales.
Poscondicion: $distanciaMin(n, 0)$ representa la suma alternante de minimo valor usando todos los diferenciales.

Para esta parte, se usa programacion dinamica con un lenguaje descrito de la siguiente manera:

$distanciaMin(k, x) \equiv$ "distancia minima usando las primeras k diferencias para sumar x"
En otras palabras: $(+/-)\sigma + \ldots +(+/-)\sigma + distanciaMin(k, x) = x$

De esta manera, se tiene que la respuesta seria $distanciaMin(n, 0)$.

Recursion:
Para la recursion se debe tener en cuenta que:
a) $dif[k] \equiv$ "diferencia del grafo k", con $0 \leq k \leq n$.
b) $alpha \equiv (+|\ 0 \leq i \leq n : dif[i])$

A partir de esto, se tiene que:
$distanciaMin(0, \sigma) = |(dif[0]) - \sigma|$, con $0 \leq \sigma \leq \alpha$
$distanciaMin(k + 1, \sigma) =$
$(min|\ 0 \leq \beta \leq \alpha : distanciaMin(k, \beta) + |\beta - \sigma| + (+/-)dif[k + 1])$,
para $0 \leq k$

De esta manera, podemos ver que solo requerimos de 2 arreglos para calcular esta solucion, ya que tenemos que persistir las columnas de k y k+1, intercalando el arreglo sobre el que se calcula y el que se usa para calcular. Con esto, tenemos las siguientes complejidades:

Temporal: $T(n) = \theta(n\alpha^2)$

Se requiere calcular las n columnas, y cada arreglo tiene α posiciones. Ademas, calcular una posicion (excluyendo el caso base) tiene una complejidad de $\theta(\alpha)$ como se puede evidenciar en la recursion.

Espacial: $S(n) = \theta(\alpha + n)$

Se necesitan 2 arreglos de longitud α, y el arreglo por precondicion que contiene las diferencias de los grafos (n grafos).

2. Complejidades
   a) Temporal: $T(n) = \theta(n\alpha^2 + n(V + E))$
   b) Espacial: $S(n) = \theta(\alpha + n)$

   Donde α es el valor de la suma de todas las diferencias entre los conjuntos disyuntos de los grafos, V la cantidad de vertices del grafo con mas vertices, y E la cantidad de arcos del grafo con mas arcos. La justificacion de estas complejidades esta en la primera parte del documento.