Examen Parcial 1.
Econometría.
Maestría en Economía.
CIDE.

Primavera 2025

```
Instrucciones: No se pueden utilizar apuntes ni el apoyo de ningún aparato electrónico.
Tiene 1:30 minutos para contestar al examen.
```

Pregunta 1. CEF

a) Considere las proyecciones

$$Y = X_1\gamma_1 + e$$
$$Y = X_1\beta_1 + X_2\beta_2 + \mu$$

¿Bajo qué condiciones $\gamma_1 = \beta_1$?

b) Pruebe que $E(e|X)$=0, $E(e) = 0$ y que para cualquier función $h(x)$ donde $E(h(x)e) < \infty$, entonces $E(h(x)e) = 0$.

- Qué implican de estas condiciones para la CEF de Y dada X. Dé un ejemplo dónde $E(h(x)e) \neq 0$

c) Considere las siguientes proyecciones y suponga que, al estimar la relación entre deuda en la familia f como dependiente de la educación del padre, usted no cuenta con información sobre la cantidad de miembros en el hogar.

$$deuda_f = \beta_0 + \beta_1 educpadre_f + \beta_2 miembros_f + \mu_f(1)$$
$$miembros_f = \delta_0 \pm \delta_1 educpadre_f + \epsilon(2)$$

- obtenga la ecuación que estimaría si omite la cantidad de miembros del hogar. *hint*: considere la ecuación (2).
- suponga que $\delta_1 = 0.1$, $\beta_1 = 2$ y $\beta_2 = 1$ ¿cuál sería el valor de del estimador de β_1 en la ecuación que omite “miembros” como variable explicativa?

Pregunta 2. Propiedades Finitas.

a) Suopnga que $E[e|X] = 0$ y $var[e|X] = \Omega$ pruebe que:

$$E[\hat{\beta}|X] = \beta;$$

$$var[\hat{\beta}|X] = (X'X)^{-1}(X'\Omega X)(X'X)^{-1}$$

b) bajo homoscedasticidad $E[\hat{V}_{\hat{\beta}}^{HC0}|X]$ ¿se encuentra sesgado? Demuestrelo, partiendo de:

$$\hat{V}_{\hat{\beta}}^{HC0} = (X'X)^{-1}(\sum_{i=1}^{n} X_i X_i' \hat{e}_i^2)(X'X)^{-1}$$

- ¿cuál es la solución para el cálculo insesgado de $\hat{V}_{\hat{\beta}}$?

c) Un amigo economista le dice que el supuesto de que las observaciones (Y_i, X_i) son i.i.d. implica que la regresión es homoscedástica. ¿Está de acuerdo con su amigo? ¿cómo probaría su posición (matemáticamente)?

Para responder, considere el siguiente modelo de regresión lineal simple:

$$Y_i = \beta X_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, ..., n$$

Donde:

$X_i \sim$ N$(0, 1)$, i.i.d. $e_i \sim N(0, 1)$, condicionalmente independientes entre sí.

- Luego de su demostración, argumente si parte de un caso de "Heteroscedasticidad Pura" o "Impura" (luego de definirlas).
- Bajo este diseño, ¿el estimador de Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO) es insesgado? ¿Es eficiente? Justifique cada afirmación.

Pregunta 3. MLE

Muestre que dado $\hat{\beta}_{mle}$ y $\hat{\sigma}^2_{mle}$ y

$$l_n(\beta, \sigma^2) = -\frac{n}{2} log(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (Y_i - X_i'\beta)^2$$

a) Se puede obtener la función maximizada de verosimilitud ¿cómo se puede utilizar como una medida de ajuste?

b) Muestre que los estimadores MLE de β y σ^2 son equivalentes a OLS ¿bajo qué condición es esto cierto?

c) Dada la siguiente muestra:

Y_i	X_i
2	1
4	2
6	3

- Suponga que el modelo es $Y_i = \beta X_i + e_i$, donde $e_i \sim N(0, \sigma^2)$.
- Plantee la función de log-verosimilitud y demuestre que $\hat{\beta}_{OLS} = 2$
- Puede suponer que σ^2 es constante y no es necesario encontrar su valor. *hint:* Maximizar la log-verosimilitud es equivalente a minimizar la suma de cuadrados.