Actividad 1

Ejercicio CEF.

a) Si $e = Xu$, donde X y u son independientes $N(0,1)$. Demuestre que, condicional en X, el error tiene distribución $N(0, X^2)$
b) Lo anterior qué significa en terminos de la independencia entre e y X (vea BH, p.24-25). Relacione esto con el concepto de homocedasticidad.
c) Pruebe que: $var[Y] \geq var[Y - [E|X]] \geq var[Y - [E|X_1, X_2]]$ (vea BH 2.33)
d) Pruebe que Q_{XX} es una matriz positiva semidefinida (vea BH p.39)
e) Consider the linear projection:

$$\mathcal{P}[log(wage)|experience] = 0.046experience - 0.07experience^2 + 0.11education + 2.3$$

Formally (using derivatives), what is the effect of one extra year of experience on log(wage)?
f) Consider the linear projection

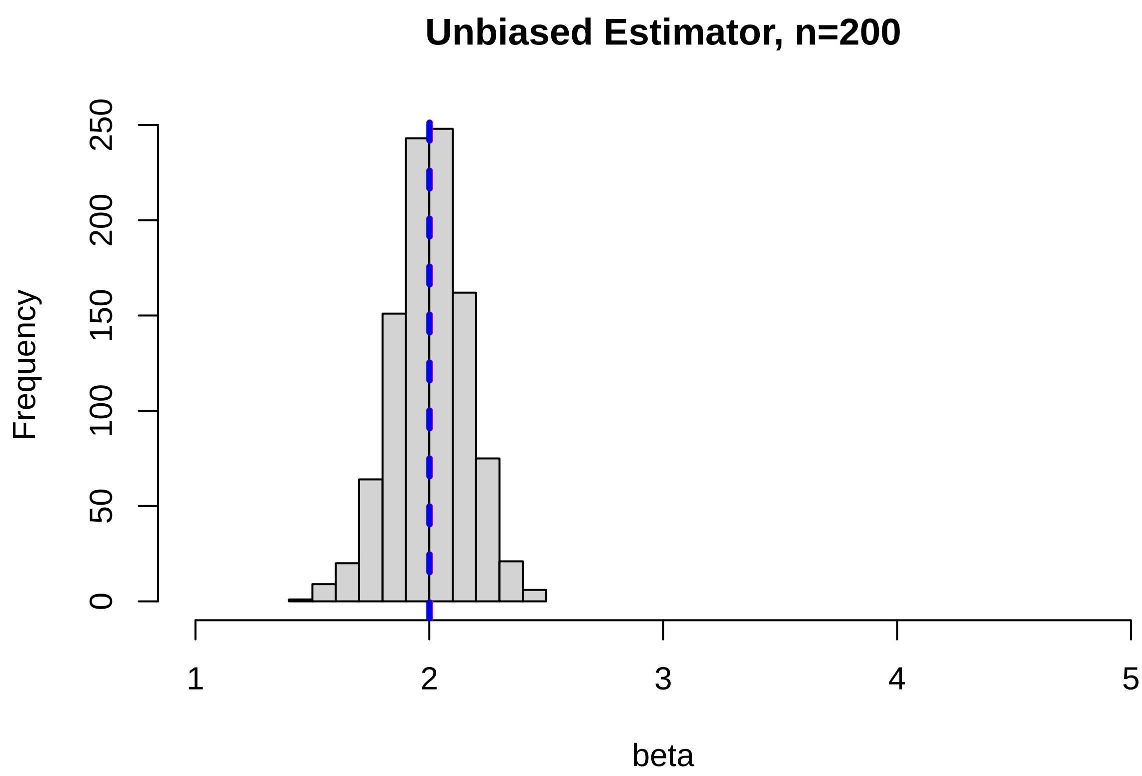
$$\mathcal{P}[log(wage)|experience] = 0.046experience - 0.07experience^2 - 0.09female + 0.11education + 0.07education * female + 1.$$

Formally (using derivatives), what is the return to one extra year of education on log(wage) for males? and for females?
g) Draw a two-dimensional graph showing the linear projections onto education by gender.

h) This is a piece of code simulating an unbiased estimator β_1 and β_2.

```r
repet <- 1000
n <- 200
beta <- NULL

for (i in 1:repet){
  x <- rnorm(n)
  x2 <- rnorm(n)
  u <- rnorm(n,0,1)
  y=2+2*x+2*x2+u
  beta[i] <- lm(y~x)$coef[2] #
}
hist(beta, main="Unbiased Estimator, n=200", xlim = c(1,5) )
abline(v = mean(beta), col="red", lwd=3, lty=2,)
abline(v = 2, col="blue", lwd=3, lty=2)
```



- Modify the code so that it shows a **biased** estimator of β_1.
- While keeping this modification make another modification in the code to make the bias go (see BH 2.24)

i) Give a concrete example of a linear projection on which we most likely suffer from OVB.

Ejercicio LS.

a) Use la base de datos de sueldos provista por Wooldridge:

```
library(wooldridge)
```

```
## Warning: package 'wooldridge' was built under R version 4.3.3
```

```
data("wage1")
```

- Construya los vectores X con educación, experiencia y experiencia al cuadrado, el vector Y es logaritmo del sueldo. Obtenga:

$$\hat{\beta} = \hat{Q}_{XX}^{-1}\hat{Q}_{XY}$$

- Muestre explícitamente el vector $\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i$ y la matriz $(\sum_{i=1}^{n} X_i X_i')^{-1}$
- Interprete β_1 y el efecto de la experiencia en sueldos.
- Son los *residuos* ortogonales a la educación? Explique.
- Demuestre *formalmente* si existe sesgo del estimador β_1.
- Obtenga ESS y TSS así como R^2 e interpretela.

b) Muestre que si $X = [X_1, X_2]$ entonces $PX_1 = X_1 y M X_1 = 0$

c) En R-Studio genere dos parametros x y $residuo$ (n=100, mean=0 y sd=5) donde $y < -15 + (7 * x) + residuo$

- Realice una regresión de x en y.
- Realice un scatterplot de la regresión estimada que muestre cada observación Y_i y la línea LS.
- Obtenga ESS y TSS así como R^2.
- Demuestre, modificando los datos creados en b), que si RSS aumenta R^2 disminuye. Discuta si $\hat{\beta}$ es insesgada.
- Cree una variable x_2 y agreguela a la regresión estimada en b) Qué sucede con ESS, TSS y R^2
- Modifique su código para sesgar $\hat{\beta}_1$ considerablemente y estime de nuevo la misma regresión ¿Cambia esto Rˆ2? Discuta.

e) Considere dos regresiones por LS:

$$Y = X_1\tilde{\beta} + \tilde{e}$$

$$Y = X_1\hat{\beta} + X_2\hat{\beta}_2 + \tilde{e}$$

Donde R_1^2 y R_2^2 corresponden a cada regresión respectivamente. Muestre que $R_1^2 \geq R_2^2$ ¿cuál es el caso en que serían iguales?

f) A dummy variable takes on only the values 0 and 1. It is used for categorical variables. Let D_1 and D_2 be vectors of 1's and 0's, with the $i_t h$ element of D_1 equaling 1 and that of D_2 equaling 0 if the person is a man, and the reverse if the person is a woman. Suppose that there are n_1 men and n_2 women in the sample.

Consider fitting the following equations by OLS:

$$Y = \mu + D_1\alpha_1 + D_1\alpha_2 + e$$

$$Y = D_1\alpha_1 + D_1\alpha_2 + e$$

$$Y = \mu + D_1\phi_1 + e$$

- Can all three equations be estimated by OLS? Explain if not.
- In the OLS regression $Y = D_1\hat{\gamma}_1 + D_2\hat{\gamma}_2 + \hat{u}$ show that $\hat{\gamma}_1$ is the sample mean of the dependent variable among the men of the sample $(\bar{Y}_1)$, and that $D_2\hat{\gamma}_2$ is the sample mean among the women (Y_2).