Probabilidad I

Semestre 2022-1

Prof. José Antonio Flores Díaz

Ayud. María de los Ángeles Escalante Membrillo

Tarea 1

Camacho Sosa Fernando
Jiménez Martínez Mónica
Mejía Chong Laisiu

1. Considere las secuencias de 10 símbolos dados por un "más" (+) o por un "menos" (-)

   a) ¿Cuántas secuencias distintas son posibles?

   $$A = V{r}_k^n$$

   $$V{r}_k^n = n^k \qquad V{r}_{10}^2 = 2^{10} = 1024$$

   $$A = 1024 \text{ secuencias distintas.}$$

   b) ¿Cuántas de las secuencias en a) tienen al menos ocho símbolos "+" en ellas?

   $$B = C_{10}^{10} + C_9^{10} + C_8^{10}$$

   $$C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

   $$B = \frac{10!}{10!(10-10)!} + \frac{10!}{9!(10-9)!} + \frac{10!}{8!(10-8)!}$$

   $$B = 1 + 10 + 45 = 56$$

   c) ¿Cuántas tienen exactamente cinco "+" y cinco "-"?

   $$C = C_5^5 = 252$$

   d) De las secuencias en c) ¿Cuántas tienen al menos cuatro "+" seguidos?

   $$D = 2^5 + 2^4 = 32 + 16 = 48$$

   e) De las secuencias en c) ¿Cuántas tienen exactamente dos "+" a la izquierda de la mitad de la secuencia?

   $$E = PR_{3,2}^5 = \frac{5!}{3!2!} = 10$$

2. Se lanzan tres dados, ¿Cuántos resultados elementales hay:

   a) En la más detallada clasificación de los resultados?
   $6^3 = 216$ resultados posibles.

   b) Si sólo se está interesado en el número total de puntos?
   Mínimo por tirada: 3. Máximo por tirada: 18
   $3 \leq x \leq 18$

   c) Si se está interesado en las diferentes combinaciones del total de puntos (tales como 2,3,3) pero no en las cuales el dado tiene tal número de puntos (en distinto orden con la misma combinación).

Resultado	Combinaciones posibles
3	1
4	1
5	2
6	3
7	4
8	5
9	6
10	6
11	6
12	6
13	5
14	4
15	3
16	2
17	1
18	1
Total	56

   56 combinaciones diferentes posibles.

3. A lanza seis dados y gana si obtiene al menos un seis. B lanza doce dados y gana si obtiene al menos dos seises. ¿Quién tiene la mayor probabilidad de ganar?

$$P(A) = \frac{C_6^6 + C_5^6 + C_4^6 + C_3^6 + C_2^6 + C_1^6}{6^6} = \frac{1+6+15+20+15+6}{46\,656} = \frac{63}{46\,656} = \frac{7}{5\,184}$$

$$P(B) = \frac{C_{12}^{12} + C_{11}^{12} + C_{10}^{12} + C_9^{12} + C_8^{12} + C_7^{12} + C_6^{12} + C_5^{12} + C_4^{12} + C_3^{12} + C_2^{12}}{6^{12}}$$

$$P(B) = \frac{1+12+66+220+495+792+924+792+495+220+66}{2\,176\,782\,336} = \frac{4080}{2\,176\,782\,336}$$

$$P(B) = \frac{85}{45\,349\,632}$$

Como $P(A) > P(B)$, entonces, A tiene mayor probabilidad de ganar.

4. En un recipiente se encuentran 3 bolas blancas y 8 negras, se saca una bola del recipiente y se registra el color de la misma para posteriormente regresarla al recipiente, dos personas deciden jugar en esta forma y determinan que ganará aquel que saque primero una bola blanca. Especifique la probabilidad de que gane el primer jugador.

$$P(A) = \frac{3}{11}$$

5. Determine la probabilidad de que:

   a) Los cumpleaños de 12 personas caigan en diferentes meses (suponga probabilidades iguales para los doce meses).

   $$P(A) = \frac{12}{12} * \frac{11}{12} * \frac{10}{12} * \frac{9}{12} * \frac{8}{12} * \frac{7}{12} * \frac{6}{12} * \frac{5}{12} * \frac{4}{12} * \frac{3}{12} * \frac{2}{12} * \frac{1}{12} = 0.000053$$

   b) Los cumpleaños de 6 personas caigan exactamente en dos meses.

   $$P(B) = \frac{C_1 2^2 * (2^6 - 2)}{12^6} = \frac{66 * 62}{12^6} = 0.0013$$

6. Pruebe o demuestre lo contrario:

   a) Si $P(A) = P(B) = p$ entonces $P(A \cap B) \leq p^2$
   Como $P(A) = P(B)$, como sabemos que $A \cap A =$ A, entonces $P(A \cap B) = P(A) = p$ y $p \leq p^2$, por lo tanto, la afirmación es correcta.

   b) Si $P(A^c) = \alpha$; $P(B^c) = \beta \Rightarrow P(A \cap B) \leq 1 - \alpha - \beta$
   Por Teorema sabemos que

   $$P(A \cap B) = P(A) - P(A - B)$$

   y sabemos que

   $$P(A) = 1 - P(A^c)$$

   Entonces

   $$P(A \cap B) = 1 - \alpha - P(A - B)$$

   También sabemos por teorema que

   $$P(A - B) = P(A \cap B^C)$$

   Sabemos que $P(A \cap B^C) \in P(B^c)$, es decir, $P(A \cap B^C) \subseteq \beta$, por lo tanto:

   $$P(A \cap B) \leq 1 - \alpha - \beta$$

   c) Si $P(A) = P(B^c) \Rightarrow A^c = B$
   Sabemos por teorema que

   $$P(A) = 1 - P(A^c) \text{ y por consiguiente } P(B^c) = 1 - P(B^{c^c})$$

   Sustituyendo tenemos:

   $$1 - P(A^c) = 1 - P(B)$$

   $$P(A^c) = P(B)$$

   $$\therefore A^c = B$$

7. En un cierto pueblo con 100,000 habitantes hay tres periódicos: I, II y III. La proporción de gente que lee esos periódicos es como sigue:

I: 10 %	I y II: 8 %	I y II y III: 1 %
II: 30 %	I y III: 2 %	
III: 5 %	II y III: 4 %	

a) ¿Cuánta gente lee algún periódico?
Sea A: Lee algún periódico:
$A : P(I \cup II \cup III) - P(I \cap II + I \cap III + II \cap III) + P(I \cap II \cap III)$
$A : (10\,\% + 30\,\% + 5\,\%) - (8\,\% + 2\,\% + 4\,\%) + 1\,\%$
$A : 32\,\% = 32\,000$

b) Encuentre el número de personas que leen solamente un periódico.
Sea B: Sólo lee 1 periódico.
Tenemos que

$$P(B) = P(\text{‘sólo lee I’}) + P(\text{‘sólo lee II’}) + P(\text{‘sólo lee III’}) \tag{1}$$

Para P(‘sólo lee I’) $= P(I \cap II^c \cap III^c)$
Sabemos que $P(I) = P(I \cap II^c \cap III^c) + P(I \cap II \cap III^c) + P(I \cap II^c \cap III) + P(I \cap II \cap III)$
Por lo tanto

$$P(I \cap II^c \cap III^c) = P(I) - P(I \cap II \cap III^c) - P(I \cap II^c \cap III) - P(I \cap II \cap III) \tag{2}$$

$$P(I \cap II^c \cap III^c) = 10\,\% - 1\,\% - P(I \cap II \cap III^c) - P(I \cap II^c \cap III)$$

También sabemos que $P(I \cap II \cap III^c) + P(I \cap II \cap III) = P(I \cap II)$
Es decir, $P(I \cap II \cap III^c) = P(I \cap II) - P(I \cap II \cap III)$
Por lo tanto; $P(I \cap II \cap III^c) = -1\,\% + 8\,\% = 7\,\%$
De modo análogo resolvemos $P(I \cap II^c \cap III)$

$$P(I \cap II^c \cap III) + P(I \cap II \cap III) = P(I \cap III)$$

$$P(I \cap II^c \cap III) + 1\,\% = 2\,\%$$

$$P(I \cap II^c \cap III) = 1\,\%$$

Sustituyendo en (2) tenemos:

$$P(I \cap II^c \cap III^c) = 10\,\% - 1\,\% - 7\,\% - 1\,\% = 1\,\%$$

Siguiendo los mismos pasos para P(‘sólo lee II’) $P(I^c \cap II \cap III^c)$ tenemos:

$$P(I^c \cap II \cap III^c) = P(II) - P(I \cap II \cap III^c) - P(I^c \cap II \cap III) - P(I \cap II \cap III) \tag{3}$$

$$P(I \cap II \cap III^c) = P(I \cap II) - P(I \cap II \cap III) = 8\,\% - 1\,\% = 7\,\%$$

$$P(I^c \cap II \cap III) = P(II \cap III) - P(I \cap II \cap III) = 4\,\% - 1\,\% = 3\,\%$$

Sustituyendo en (3):

$$P(I^c \cap II \cap III^c) = 30\,\% - 7\,\% - 3\,\% - 1\,\% = 19\,\%$$

Para P('sólo lee III'):

$$P(I^c \cap II^c \cap III) = P(III) - P(I \cap II^c \cap III) - P(I^c \cap II \cap III) - P(I \cap II \cap III) \quad (4)$$

$$P(I \cap II^c \cap III) = P(I \cap III) - P(I \cap II \cap III) = 2\,\% - 1\,\% = 1\,\%$$

Sustituyendo en (4):

$$P(I^c \cap II^c \cap III) = 5\,\% - 1\,\% - 3\,\% - 1\,\% = 0\,\%$$

Regresando a (1) tenemos:

$$P(B) = 1\,\% + 19\,\% + 0\,\% = 20\,\%$$

Por lo tanto, el número de personas que sólo leen un periódico es: 20 000

c) ¿Cuánta gente lee al menos dos periódicos?
Sea C: 'Lee al menos dos periódicos'
$P(C) = P(I \cap II) + P(I \cap III) + P(II \cap III) - P(I \cap II \cap III) = 8\,\% + 2\,\% + 4\,\% - 1\,\% = 13\,\%$
Por lo tanto, 13 000 personas leen al menos dos periódicos.

d) Si I y III son periódicos matutinos y II es un periódico vespertino, ¿Cuánta gente lee al menos un periódico matutino y uno vespertino?
Sea D: 'lee al menos un periódico matutino y un vespertino'
E: 'Lee al menos un periódico matutino'
F: 'Lee al menos un periódico vespertino'
$P(D) = P(E \cap F) = P(E) - P(E \cap F^c) = P(E) - P(E - F)$
$P(E) = P(I) \cup P(III) = 10\,\% + 5\,\% - 2\,\% = 13\,\%$
$P(D) = P(E) - P(E - F) = 13\,\% - (13\,\% - 30\,\%) = 30\,\%$
La gente que lee al menos un periódico matutino y uno vespertino son 30 000.

e) ¿Cuánta gente lee solamente un periódico matutino y vespertino?
Sea G: ('Sólo lee un periódico matutino y un vespertino') Sea H: ('Sólo lee un periódico matutino')
$P(G) = P(H) \cap P(F)$ $P(H) = (P(I) \cap P(III^c)) \cup (P(III) \cap P(I^c))$ $P(I) \cap P(III^c) = P(I) - P(I \cap III) = 10\,\% - 2\,\% = 8\,\%$ $P(III) \cap P(I^c) = P(III) - P(I \cap III) = 5\,\% - 2\,\% = 3\,\%$ $P(H) = 8\,\% + 3\,\% = 11\,\%$

8. Sean E, F y G tres eventos. Encuentre expresiones para los eventos tales que:

a) Solamente E ocurra

$$E \cap \bar{F} \cap \bar{G}$$

b) Ambos E y G pero F no ocurra

$$E \cap G \cap \bar{F}$$

c) Al menos uno de los eventos ocurra

$$E \cup F \cup G$$

d) Al menos dos de los eventos ocurran

$$(E \cap F) \cup (E \cap G) \cup (G \cap F)$$

e) Los tres ocurran

$$E \cap F \cap G$$

f) Ninguno de los eventos ocurra

$$\bar{E} \cap \bar{F} \cap \bar{G}$$

g) A lo más uno de ellos ocurra

$$(E \cap \bar{F} \cap \bar{G}) \cup (F \cap \bar{E} \cap \bar{G}) \cup (\bar{E} \cap \bar{F} \cap \bar{G})$$

h) A lo más dos de ellos ocurran

$$(E\cap F\cap \bar{G})\cup(E\cap \bar{F}\cap G)\cup(\bar{E}\cap F\cap G)\cup(E\cap \bar{F}\cap \bar{G})\cup(F\cap \bar{E}\cap \bar{G})\cup(G\cap \bar{E}\cap \bar{F})\cup(\bar{E}\cap \bar{F}\cap \bar{G})$$

i) Exactamente dos de ellos ocurran

$$(E \cap F \cap \bar{G}) \cup (E \cap G \cap \bar{F}) \cup (F \cap G \cap \bar{E})$$

j) A lo más tres de ellos ocurran

$$(E\cap F\cap G)\cup(E\cap F\cap \bar{G})\cup(E\cap \bar{F}\cap G)\cup(\bar{E}\cap F\cap G)\cup(E\cap \bar{F}\cap \bar{G})\cup(F\cap \bar{E}\cap \bar{G})\cup(G\cap \bar{E}\cap \bar{F})\cup(\bar{E}\cap \bar{F}\cap \bar{G})$$

12. Si N personas incluyendo A y B son aleatoriamente sentadas en una línea. ¿Cuál es la probabilidad de que A y B se sienten juntos?

    2!(N-2)!

13. Sean A, B y C eventos arbitrarios. Simplifique la expresión para el evento D definido por:

$$D = [(A \cup B) \cap (A^c \cup B^c)] \cup [(A \cup B^c) \cap (A^c \cup B)]$$

$$D = [(A \cup B) \cap (A^c \cup B^c)] \cup [((A \cup B^c) \cap A) \cup ((A \cup B^c) \cap B)]$$

$$D = [(A \cup B) \cap (A^c \cup B^c)] \cup [((A \cap A^c) \cup (B^c \cap A^c)) \cup ((A \cap B) \cup (B^c \cap B))]$$

$$D = [(A \cup B) \cap (A^c \cup B^c)] \cup [(\varnothing \cup (B^c \cap A^c)) \cup ((A \cap B) \cup \varnothing)]$$

$$D = [((A \cup B) \cap A^c) \cup ((A \cup B) \cap B^c)] \cup [(B^c \cap A^c) \cup (A \cap B)]$$

$$D = [((A \cap A^c) \cup (A^c \cap B)) \cup ((A \cap B^c) \cup (B^c \cap B))] \cup [(B^c \cap A^c) \cup (A \cap B)]$$

$$D = [(\varnothing \cup (A^c \cap B)) \cup ((A \cap B^c) \cup \varnothing)] \cup [(B^c \cap A^c) \cup (A \cap B)]$$

$$D = [(A^c \cap B) \cup (A \cap B^c)] \cup [(B^c \cap A^c) \cup (A \cap B)]$$
$$D = [(A^c \cap B) \cup (A \cap B^c)] \cup [(U \backslash A \cap B) \cup (A \cap B)]$$

$$D = [(A^c \cap B) \cup (A \cap B^c)] \cup [U]$$

$$D = U$$

14. Una urna contiene tres bolas rojas, dos blancas y una azul. Una segunda urna contiene una bola roja, dos blancas y tres azules.

  a) Una bola es seleccionada aleatoriamente de cada urna.

    1) Describa el espacio muestral para este experimento
    Sea S el conjunto de (x, y) que indican x es la bola extraída de la primera urna y y indica la bola extraída de la segunda urna, r = roja, b = blanca, a = azul

    $$S = \{(r,r), (r,b), (r,a), (b,r), (b,b), (b,a), (a,r), (a,b), (a,a)\}$$

    2) Encuentre la probabilidad de que ambas bolas sean del mismo color.
    Primero, calculamos la probabilidad de que ambas sean rojas.

    $$P(R_1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \qquad P(R_2) = \frac{1}{6} \qquad P(R_1 \cap R_2) = \frac{1}{2} * \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

    Probabilidad de que ambas sean blancas

    $$P(B_1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \qquad P(B_2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \qquad P(B_1 \cap B_2) = \frac{1}{3} * \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

    Probabilidad de que ambas sean azules

    $$P(A_1) = \frac{1}{6} \qquad P(A_2) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \qquad P(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{6} * \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$

    Probabilidad de que ambas sean del mismo color

    $$P(R_1 \cap R_2) \cup P(B_1 \cap B_2) \cup P(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{12} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} = \frac{3+4+3}{36} = \frac{10}{30} = \frac{5}{18}$$

    3) Es la probabilidad de que ambas bolas sean rojas más grande que la probabilidad de que ambas sean blancas.
    No, ya que $P(B_1 \cap B_2) = \frac{1}{9} > P(R_1 \cap R_2) = \frac{1}{12}$

  b) Las bolas de las dos urnas son mezcladas juntas en una sola urna y entonces se toma una muestra de 3 bolas. Encuentre la probabilidad de que los tres colores estén representados en la muestra.

1) Con reemplazo.

$$P(R) = \frac{4}{12} * \frac{4}{12} * \frac{4}{12} = \frac{1}{3} * \frac{1}{3} * \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$$

2) Sin reemplazo.

$$P(S) = \frac{\binom{4}{1} * \binom{4}{1} * \binom{4}{1}}{\binom{12}{3}} = \frac{4 * 4 * 4}{\frac{12*11*10}{3*2}} = \frac{4 * 4 * 4 * 3 * 2}{12 * 11 * 10} = \frac{384}{1320} = \frac{96}{330} = \frac{48}{165} = \frac{16}{55}$$