

Otimização Aplicada à Engenharia de Processos

Aula 4: Programação Linear

Felipe Campelo

<http://www.cpdee.ufmg.br/~fcampelo>

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

Belo Horizonte
Março de 2013

Soluções Geométricas

- A solução geométrica (ou gráfica) de um problema de programação linear é em geral adequada para problemas pequenos - 2 ou 3 variáveis;
- A vantagem desta ferramenta é a possibilidade de visualizar o problema e sua solução.

Soluções Geométricas

Vamos considerar o seguinte problema, expresso em forma não-padrão:

$$\text{Minimize: } \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

$$\text{Sujeito a: } \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

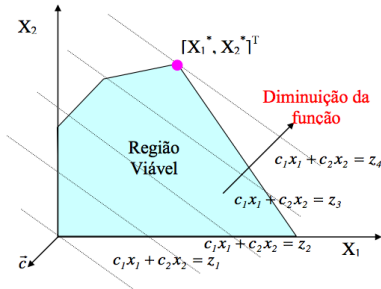
- Observe que a região factível é formada por todos os pontos satisfazendo simultaneamente as restrições $\mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}$ e $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$.
- Dentre estes pontos, buscamos aquele que represente o mínimo valor de $\mathbf{c}^T \mathbf{x}$.

Soluções Geométricas

- Note que pontos cujo valor da função objetivo é z devem, por definição, satisfazer à igualdade $\mathbf{c}^T \mathbf{x} = \sum_{j=1}^n c_j x_j = z$;
- Para minimizar o valor de z dentro do espaço factível, devemos caminhar na direção que nos proporcione o decrescimento deste valor - ou seja, a direção inversa ao gradiente da função:

$$\mathbf{d} = -\nabla (\mathbf{c}^T \mathbf{x}) = -\mathbf{c}$$

Soluções Geométricas



- Esta direção é ortogonal às curvas de nível da função linear, apontando para a região de decrescimento da mesma.

É fácil perceber que o ponto ótimo é um entre os cinco vértices da região factível, os quais são chamados de *pontos extremos*.

Soluções Geométricas - Exemplo

Considere o seguinte problema:

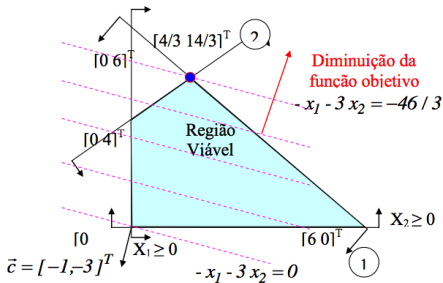
$$\text{Minimize: } z = -x_1 - 3x_2$$

$$\text{Sujeito a: } x_1 + x_2 \leq 6$$

$$-x_1 + 2x_2 \leq 8$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

Soluções Geométricas



- Construção da região factível a partir das restrições.
- Obtenção das curvas de nível da função objetivo

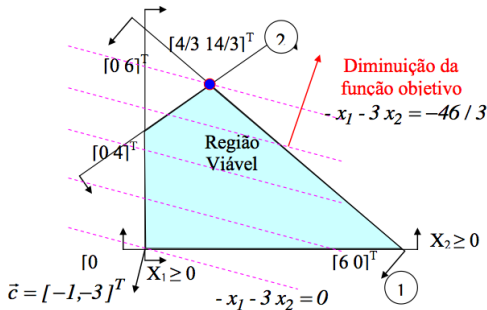
- Determinação da direção de decrescimento.
- Localização do ótimo.

Classificação das Soluções

- O objetivo da PL é determinar, dentre as soluções viáveis, uma que seja a “melhor”, de acordo com a função objetivo definida no modelo.
- Ao solucionar um problema de PL, podemos ter várias situações possíveis, em termos dos tipos de solução encontradas.
 - Solução única ótima finita;
 - Infinitas soluções ótimas finitas;
 - Solução no infinito;
 - Conjunto factível vazio;

Classificação das Soluções

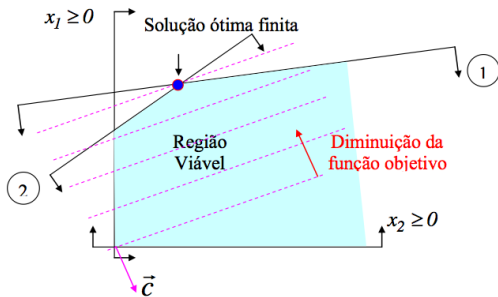
Solução única ótima finita:



- Se a solução é única, ótima e finita, ela ocorre em um ponto extremo.

Classificação das Soluções

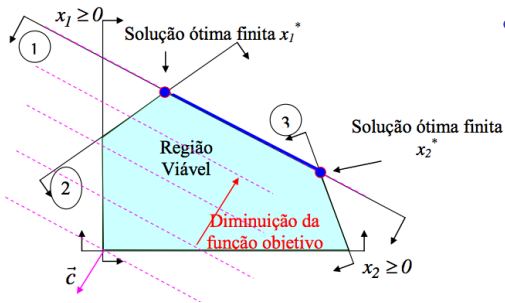
Solução única ótima finita:



- A região factível não precisa ser necessariamente limitada.

Classificação das Soluções

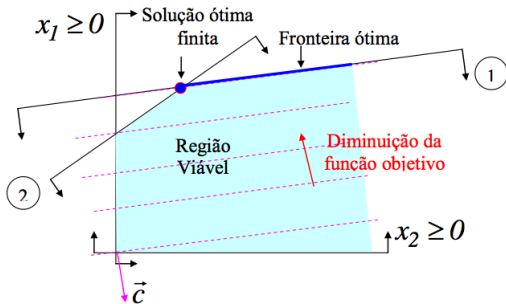
Infinitas soluções ótimas finitas:



- Os dois vértices x_1^* e x_2^* são soluções ótimas, bem como qualquer outro ponto sobre o segmento que os une.

Classificação das Soluções

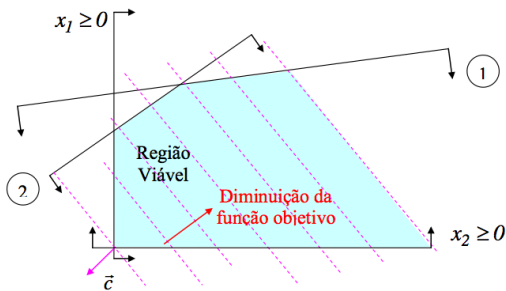
Infinitas soluções ótimas finitas:



- Novamente, a região factível não precisa ser necessariamente limitada.

Classificação das Soluções

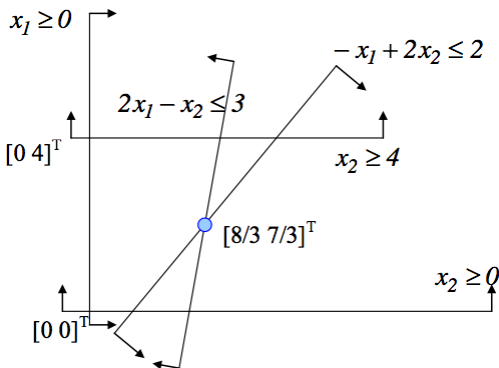
Solução no infinito:



- Não é possível alcançar o ponto de ótimo, o mesmo encontra-se no infinito.

Classificação das Soluções

Conjunto factível vazio:



- Ocorre quando o sistema de equações que define a região viável é inconsistente.

Soluções básicas

Saindo das definições gráficas e retornando às considerações analíticas, é necessário estabelecer algumas definições para a discussão do *teorema central da programação linear*, bem como para a compreensão do método Simplex para PL.

Dentre estas definições, encontramos o conceito de *solução básica*;

Soluções básicas

Seja o sistema linear de igualdades (supondo um problema na forma padrão):

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

onde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, e $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$

Suponha que, das n colunas da matriz \mathbf{A} , nós selecionemos um subconjunto de m colunas *linearmente independentes* - para simplificar, vamos pensar que sejam as primeiras m colunas de \mathbf{A} . A matriz $m \times m$ determinada por estas colunas será chamada de \mathbf{B} ;

Soluções básicas

Se \mathbf{B} foi composta por colunas linearmente independentes, sabe-se que ela será uma matriz não-singular e que será possível resolver o sistema:

$$\mathbf{B}\mathbf{x}_B = \mathbf{b}$$

para o vetor $\mathbf{x}_B \in \mathbb{R}^m$, composto (neste caso) pelas m primeiras variáveis.

Após obter a solução (única) deste sistema, podemos estabelecer $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_B, \mathbf{0}]$ (ou seja, definindo todas as variáveis $x_{m+1}, \dots, x_n = 0$), o que fornece uma solução possível para $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Soluções básicas

A partir do resultado anterior, é possível gerar a seguinte definição:

Dado um sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ composto por m equações lineares de n variáveis, seja \mathbf{B} uma submatriz não-singular $m \times m$ formada por colunas de \mathbf{A} . Se definirmos todas as $n - m$ variáveis de \mathbf{x} não associadas às colunas de \mathbf{B} como sendo iguais a zero, a solução do sistema resultante é chamado de uma solução básica do problema original em relação à base \mathbf{B} . As componentes de \mathbf{x} associadas às colunas de \mathbf{B} são chamadas de variáveis básicas.

Soluções básicas

$$\mathbf{Ax} = \left[\begin{array}{cccc|ccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & a_{1(m+1)} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & a_{2(m+1)} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} & a_{m(m+1)} & \dots & a_{mn} \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \\ \hline x_{m+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$= [\mathbf{B} \mid \mathbf{N}] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_B \\ \hline \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathbf{b}$$

Soluções básicas

Para evitar determinados problemas numéricos, algumas premissas suaves são assumidas para a matriz **A**:

- O número de variáveis é maior que o número de restrições: situação usual;
- As restrições do problema são linearmente independentes: dependências lineares levariam a inconsistências (não-existência de soluções) ou redundâncias (que poderiam ser eliminadas);

Premissa de posto cheio: A matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é tal que $m < n$ e suas m linhas são linearmente independentes.

(Garante que o sistema sempre terá *pelo menos* uma solução básica).

Soluções básicas

As variáveis básicas contidas em $\mathbf{x_B}$ não são necessariamente todas diferentes de zero.

- Uma solução básica onde uma ou mais variáveis básicas sejam iguais a zero é chamada de uma *solução básica degenerada*.

Soluções básicas

Se considerarmos agora as restrições de não-negatividade juntamente com o sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, teremos as restrições de nosso programa linear em sua forma padrão:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

Um vetor \mathbf{x} que satisfaça as restrições acima é dito *factível* para estas restrições. Se \mathbf{x} representar uma solução básica, será chamado de *solução básica viável* ou *factível*, e se for degenerada será dita uma *solução básica viável degenerada*.

Soluções básicas

Na definição anterior, geralmente refere-se a **B** como uma *base*, uma vez que suas colunas podem ser consideradas como a base de um dado espaço E^m .

A solução básica corresponde a uma expressão que expressa o vetor **b** como uma combinação linear desses vetores-base.

Teorema fundamental da programação linear

Seja um programa linear na forma padrão:

$$\text{minimize: } \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

$$\text{sujeito a: } \mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

Uma solução viável que atinja o valor mínimo da função objetivo é chamada de *solução ótima viável*. Se esta solução for básica, ela é dita uma *solução básica ótima viável*.

Teorema fundamental da programação linear

O *teorema fundamental da programação linear* estabelece a importância das soluções básicas viáveis para a solução de programas lineares, e estabelece que é necessário considerar apenas soluções básicas viáveis na busca pelo ponto de ótimo, uma vez que este sempre ocorrerá para uma destas soluções.

Este teorema também estabelece os primeiros passos no desenvolvimento de um método capaz de resolver problemas de programação linear: o método Simplex.

Teorema fundamental da programação linear

Enunciado

Dado um programa linear na forma padrão, para o qual a matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ possui posto m , as seguintes afirmações são verdadeiras:

- Se existe uma solução viável, existe uma solução básica viável;*
- Se existe uma solução ótima viável, existe uma solução básica ótima viável.*

Do teorema fundamental da PL podemos concluir que não é necessário procurar a solução ótima entre todas as soluções viáveis, mas apenas entre as soluções básicas viáveis - que representam os pontos extremos da região definida pelas restrições.

1) Solução gráfica

Resolva graficamente o seguinte programa linear:

$$\text{minimize: } -2x_1 - x_2$$

$$\text{sujeito a: } x_1 + \frac{8}{3}x_2 \leq 4$$

$$x_1 + x_2 \leq 2$$

$$2x_1 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

2) Modelagem

Uma pequena fábrica de peças produz 5 tipos de peças, que precisam passar por processos de fundição e acabamento.

- O lucro resultante de cada uma é de \$30, \$20, \$40, \$25, \$10, respectivamente;
- A capacidade mensal da fundição e do acabamento é de 700 e 1000HH, respectivamente;
- As HH necessárias por lote de cada uma das peças são dadas na tabela abaixo;
- Deseja-se maximizar os lucros;

| Custos (HH) | | | | | |
|-------------|---|---|---|---|---|
| Peça | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Fund. | 2 | 1 | 3 | 3 | 1 |
| Acab. | 3 | 2 | 2 | 1 | 1 |

Perguntas e comentários?