UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

Otimização Aplicada à Engenharia de Processos

Aula 2: Programação Matemática

Felipe Campelo

http://www.cpdee.ufmg.br/~fcampelo

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

Belo Horizonte
Março de 2013

Relembrando

- Problema de otimização: busca por valores de variáveis que resultem na maximização ou minimização de determinadas funções dentro de um determinado domínio;
- Aplicações em diversos campos de engenharia:
  - Projeto de circuitos, antenas, motores elétricos;
  - Ajuste de controles em processos industriais;
  - Estabelecimento de rotas de mínimo custo;
  - Definição de estratégias de tráfego de informação;

Formulação do Problema

Assumindo a convenção de *minimização*, um problema de otimização pode ser definido por:

$$\text{Encontre } \mathbf{x}^* = \arg \min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x})$$

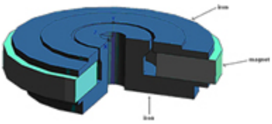
$$\text{sujeito a: } \begin{cases} g_i(\mathbf{x}) \leq 0; i = 1, \ldots, p \\ h_j(\mathbf{x}) = 0; j = 1, \ldots, q \end{cases}$$

Adotaremos a seguinte conveção ao longo do curso: variáveis em negrito indicam grandezas vetoriais, enquanto as outras variáveis significam grandezas escalares.

O Problema de Otimização

Formulação do Problema: exemplo

Seja o problema de otimização da seção magnética de um alto-falante como ilustrado a seguir.



Objetivo:

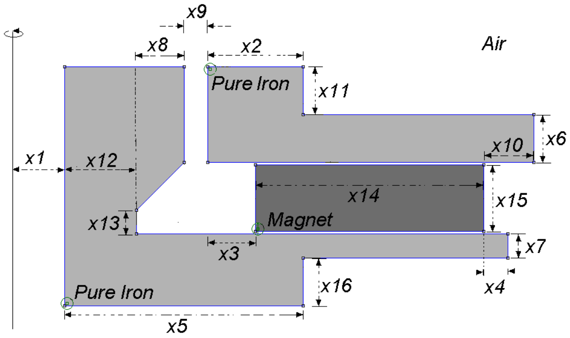
- Minimizar o volume do alto-falante e atender um valor mínimo de densidade de fluxo magnético **B** no *air gap*.

Matematicamente:

$$\begin{cases} \text{min: } f(\mathbf{x}) = \textit{volume} \\ \text{sujeito a: } g_1(\mathbf{x}) : |\mathbf{B}| \geq \mathbf{B}_{min} \end{cases}$$

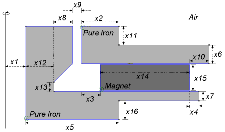
Formulação do Problema: exemplo

Modelo 2D do alto-falante:



Formulação do Problema: exemplo

Modelo 2D do alto-falante:



Questões práticas:

- Como calcular o volume do alto-falante usando $x_2, \ldots, x_{16}$?
- Quais os limites de $x_2, \ldots, x_{16}$?
- Quais materiais serão usados?
- Como calcular **B**?

Formulação do Problema: o vetor de variáveis

O vetor $\mathbf{x}$ é o *vetor de variáveis de otimização*, que representa o conjunto das variáveis cujos valores procuramos especificar através do processo de otimização.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

No caso do problema do alto-falante, todas as variáveis são contínuas, ou seja, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Formulação do Problema: a função-objetivo

A *função objetivo* $f(\cdot)$, ou *função custo*:

- Representa o índice do sistema cujo valor, por convenção, queremos minimizar para alcançarmos o desempenho ótimo;
- Obviamente funções que se deseje maximizar (funções *desempenho*) também podem ser tratadas.

Formulação do Problema: as restrições

As restrições representam o conjunto dos requisitos que o resultado do projeto deve atender para ser admissível enquanto solução.

- Restrições de desigualdade:

$$g_i(\mathbf{x}) \leq 0 \tag{1}$$

- Restrições de igualdade:

$$h_j(\mathbf{x}) = 0 \tag{2}$$

Formulação do Problema: as restrições

Em relação às restrições, definimos ainda a seguinte nomenclatura:

- Região factível: Conjunto dos pontos que satisfazem simultaneamente a todas as restrições. Também conhecida como *conjunto factível* ou *conjunto viável*;
- Região infactível: Conjunto dos pontos que deixam de satisfazer (ou seja, *violam*) pelo menos uma das restrições do problema;
- Ponto factível/infactível : Ponto pertencente à *região factível/infactível*;

Formulação do Problema: a solução ótima

Na solução ótima de um problema de minimização:

> O vetor ótimo $\mathbf{x}^*$ é igual ao **argumento** da função $f(\cdot)$ que faz com que essa função atinja seu **mínimo** valor dentro da região factível.

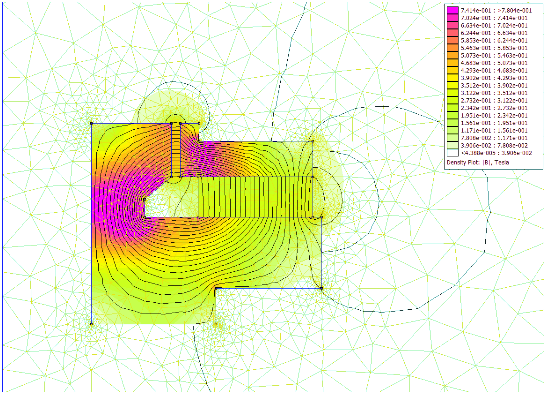
$$\mathbf{x}^* = \arg \min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x})$$

O problema de acesso à informação

- Em muitas aplicações, os problemas apresentam certas restrições de acesso a informações pertinentes para a solução dos mesmos.
- Em particular, expressões matemáticas explícitas que representem a função objetivo $f(\cdot)$ e as funções de restrição $g_i(\cdot)$ e $h_j(\cdot)$ podem não ser conhecidas - p.ex., modelos numéricos ou superfícies de resposta;

O problema de acesso à informação

Este é o caso para o exemplo do alto-falante: modelo de elementos finitos;



O problema de acesso à informação

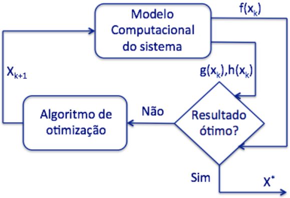
- Nestes casos, as únicas informações disponíveis são os valores de função objetivo e restrições em qualquer ponto do espaço de variáveis de otimização.;
- Devido a esta limitação, métodos utilizados devem ser obrigatoriamente *generalistas* -capazes de buscar por soluções a partir de um mínimo de premissas sobre o problema;
- Em casos onde a estrutura do problema seja conhecida, métodos específicos podem ser aplicados para aproveitar este conhecimento.

O custo da informação

Os métodos de otimização serão comparados entre si de acordo com os critérios:

- Número de avaliações da função objetivo e das funções de restrição que são requeridas para a determinação da solução. Quanto menos avaliações forem necessárias, melhor será considerado o método;
- Tempo computacional necessário para a determinação da solução;
- Precisão e robustez. Quanto mais a solução fornecida pelo método se aproximar da solução exata do problema, melhor será considerado o método.

Diagrama do processo



- Módulo de otimização;
- Módulo de simulação;
- Critérios de parada;

Ideias de problemas utilizáveis

- Esboce rapidamente um possível problema de otimização em sua área de atuação;
- Procure pensar em termos de objetivos e restrições:
  - Objetivo(s): maximização ou minimização?
  - Restrições: desigualdade ou igualdade?

Embora este não seja o foco do curso, problemas podem ter *mais de um objetivo*.

(E há formas de agregá-los em uma única função).