Otimização Aplicada à Engenharia de Processos

O Método de Duas Fases

Felipe Campelo
http://www.cpdee.ufmg.br/~fcampelo

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

Belo Horizonte
Abril de 2013

Descrição

- **Fase I**: determinação de uma solução básica inicial através da utilização de um problema auxiliar, contendo as variáveis artificiais.

- **Fase II**: utilizando a solução básica viável resultante da fase I, resolve-se o problema original.

Nestes slides todos os passos do método são detalhados.

Lembrando que a primeira fase só é necessária quando não temos uma solução básica viável inicial.

O problema

Suponha o seguinte problema de otimização linear:

$$\begin{aligned} \text{minimize: } & 4x_1 + x_2 + x_3 \\ \text{sujeito a: } & 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ & 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

O quadro Simplex (sem a última linha) é dado por:

x_1	x_2	x_3	**b**
2	1	2	4
3	3	1	3

Fase I

Como não há uma solução básica viável óbvia, utilizaremos o método das duas fases.

Adiciona-se uma variável artificial para cada restrição de igualdade, e monta-se o problema auxiliar de minimização da soma das variáveis artificiais:

$$\begin{aligned} \text{minimize: } & z = x_4 + x_5 \\ \text{sujeito a: } & 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 4 \\ & 3x_1 + 3x_2 + x_3 + x_5 = 3 \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Fase I

O quadro Simplex inicial para este problema auxiliar é dado por:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\mathbf{b}$
	2	1	2	1	0	4
	3	3	1	0	1	3
$\mathbf{c}^T$	0	0	0	1	1	0

A última linha corresponde aos coeficientes de custo da função objetivo artificial. Com isto, temos uma solução básica viável inicial (base: $x_4, \ x_5$).

Fase I

Para iniciar o Simplex precisamos ter a função-objetivo expressa apenas em termos das variáveis não-básicas.

Para isto, zeramos os coeficientes correspondentes a estas variáveis na última linha do quadro através da subtração das linhas relativas às variáveis básicas.

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \mathbf{b} \\
 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 4 \\
 & 3 & 3 & 1 & 0 & 1 & 3 \\
\mathbf{r}^T & -5 & -4 & -3 & 0 & 0 & -7
\end{array}
$$

Fase I

Uma vez que temos o quadro Simplex em sua forma correta, basta pivotar sucessivamente até encontrar uma solução para o problema auxiliar.

1. Selecionar a variável não básica (x_q) cujo coeficiente r possui o *menor valor negativo*, para entrada na base;
2. Dividir a última coluna (y_{i0}) pela coluna relativa à variável selecionada acima (y_{iq}), e selecionar a linha que retornar o *menor valor*:
   - **Atenção**: para este passo apenas os coficientes $y_{iq} > 0$ são considerados;
   - Se não houver $y_{iq} > 0$, o problema possui espaço viável ilimitado.
3. Realizar o pivotamento utilizando como elemento-pivô aquele que for a interseção da linha selecionada com a coluna selecionada.

Fase I

Para o quadro do exemplo:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 4 \\ \mathbf{3} & 3 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ -5 & -4 & -3 & 0 & 0 & -7 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & \mathbf{1.33} & 1 & -0.67 & 2 \\ 1 & 1 & 0.33 & 0 & 0.33 & 1 \\ 0 & 1 & -1.33 & 0 & 1.67 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -0.75 & 1 & 0.75 & -0.5 & 1.5 \\ 1 & 1.25 & 0 & -0.25 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Fase I

$$\begin{vmatrix} 0 & -0.75 & 1 & 0.75 & -0.5 & 1.5 \\ 1 & 1.25 & 0 & -0.25 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Com isto o método converge para o problema auxiliar. O valor da função-objetivo do problema auxiliar torna-se zero (pois as variáveis artificiais foram todas removidas da base), e a solução básica viável é $[x_1, x_2, x_3] = [0.5; 0; 1.5]$.

Fase II

Iniciando a fase II, vemos que o quadro Simplex é dado por (substituindo a última linha pelos coeficientes de custo da função-objetivo original):

$$\begin{array}{ccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & \mathbf{b} \\ & 0 & -0.75 & 1 & 1.5 \\ & 1 & 1.25 & 0 & 0.5 \\ \mathbf{c}^T & 4 & 1 & 1 & 3.5 \end{array}$$

Como nossa base inicial é dada por $x_1,\ x_3$, devemos expressar a função objetivo em termos da variável não-básica x_2.

Isto pode ser feito diretamente através do quadro Simplex, zerando os coeficientes de custo associados a $x_1,\ x_3$.

Fase II

Após a subtração das linhas associadas às variáveis básicas, temos o quadro Simplex com a última linha expressando os coeficientes de custo relativo:

$$\begin{array}{ccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & \mathbf{b} \\ & 0 & -0.75 & 1 & 1.5 \\ & 1 & 1.25 & 0 & 0.5 \\ \mathbf{r}^T & 0 & -3.25 & 0 & -3.5 \end{array}$$

Agora nos resta realizar o pivotamento.

Fase II

$$\begin{vmatrix} 0 & -0.75 & 1 & 1.5 \\ 1 & \mathbf{1.25} & 0 & 0.5 \\ 0 & -3.25 & 0 & -3.5 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0.6 & 0 & 1 & 1.8 \\ 0.8 & 1 & 0 & 0.4 \\ 2.6 & 0 & 0 & -2.2 \end{vmatrix}$$

Como não há mais coeficientes de custo relativo negativos, o método convergiu para a solução:

$$\mathbf{x}^* = [0; 0.4; 1.8] \qquad z^* = 2.2$$

Solução computacional

Verificando nossa solução no Matlab:

$$
\begin{aligned}
\text{minimize: } & 4x_1 + x_2 + x_3 \\
\text{sujeito a: } & 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\
& 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \\
& \mathbf{x} \geq \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

```
>> c = [4,1,1]'
>> Aeq = [2,1,2;3,3,1]
>> beq = [4;3]
>> lb = [0,0]'
>> options = optimset('LargeScale','off','Simplex','on');
>>[X,Z] = linprog(c,[],[],Aeq,beq,lb,[],[],options)

X =   [0, 0.4000, 1.8000]           Z = 2.2000
```