UFMG
UNIVERSIDADE FEDERAL
DE MINAS GERAIS

Otimização Aplicada à Engenharia de Processos

Aula 7: Programação não-linear

Felipe Campelo
http://www.cpdee.ufmg.br/~fcampelo

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

Belo Horizonte
Abril de 2013

Programação não-linear

Quando o objetivo ou as restrições do problema precisam ser representados por funções não-lineares, temos um problema de programação não-linear.

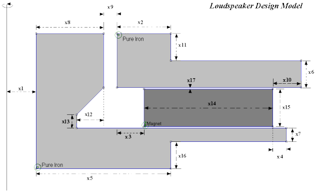
Esta classe de problemas pode conter problemas irrestritos ou, mais frequentemente, problemas com estruturas de restrições.

Técnicas para a solução de problemas com restrições usualmente funcionam através da transformação do problema restrito em um irrestrito - funções de penalização, etc..

Programação não-linear

Alguns exemplos de problemas tratados através de otimização não-linear:

- Otimização de antenas de superfície;
- Maximização de lucros em sistemas de produção;
- Minimização de volume em dispositivos eletromagnéticos;
- Planejamento de *portfolios*;
- Otimização estrutural de aviões;



Considerações iniciais

Nesta primeira parte discutiremos a caracterização das funções objetivo e de restrição em problema de otimização não linear.

$$\mathbf{x}^* = \arg \min_{x} f(\mathbf{x})$$

$$\text{sujeito a: } \begin{cases} g_i(\mathbf{x}) \leq 0; i = 1, \ldots, p \\ h_j(\mathbf{x}) = 0; j = 1, \ldots, q \end{cases}$$

com $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $f(\cdot) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, $g_i(\cdot) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, e $h_j(\cdot) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$.

Considerações iniciais

A escolha de técnicas adequadas para tratar este problema depende da natureza das funções $f(\mathbf{x})$, $g_i(\mathbf{x})$, $h_j(\mathbf{x})$.

Não há uma técnica de otimização que seja universal, no sentido de ser a melhor técnica para otimizar quaisquer funções. A escolha das técnicas frequentemente baseia-se em informações sobre o problema em questão.

Considerações iniciais

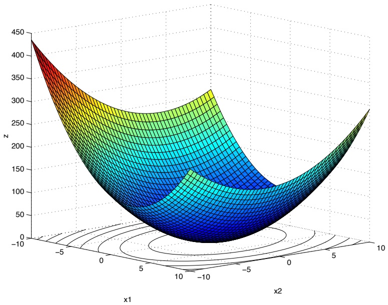
Para nos orientar nessa caracterização, apresentaremos os seguintes pontos, relacionados com a questão de *o quê são* as soluções do problema de programação não-linear:

- Dado o funcional $f(\cdot)$, o que são os pontos de mínimo desse funcional, ou seja, o que são as soluções do problema de otimização?
- O que são os pontos de mínimo local desse funcional, se são dadas também as restrições $g_i(\mathbf{x}) \leq 0$ e $h_j(\mathbf{x}) = 0$?
- Dado um ponto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, que tipo de testes podem ser realizados para determinar se esse ponto é ou não um ponto de mínimo de $f(\cdot)$, nos dois casos anteriores?

Superfície de Nível e Região Subnível

Seja $f(\cdot) : C \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$. A **superfície de nível** $S(f, \alpha)$, associada ao nível α, é definida como:

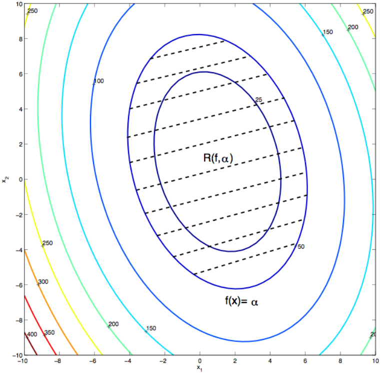
$$S(f, \alpha) = \{\mathbf{x} \in C \mid f(\mathbf{x}) = \alpha\}$$



Superfície de Nível e Região Subnível

A **região subnível** $R(f, \alpha)$, associada ao nível α, é definida como:

$$R(f, \alpha) = \{\mathbf{x} \in C \mid f(\mathbf{x}) \leq \alpha\}$$



Superfície de Nível e Região Subnível

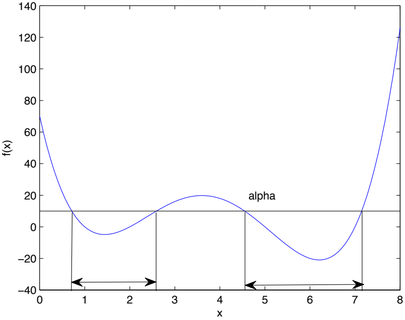
Seja $f(\cdot) : C \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$. As regiões de sub-nível dessa função obedecem a:

$$R(f, \alpha_1) \supset R(f, \alpha_2) \Leftrightarrow \alpha_1 > \alpha_2$$

Pode-se pensar os problemas de otimização como sendo equivalentes a um problema de determinar pontos que estejam sucessivamente no interior de regiões de sub-nível cada vez menores.

Unimodalidade e Multimodalidade

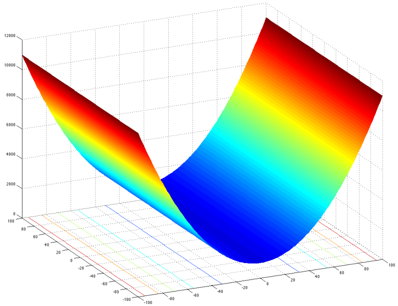
Seja $f(\cdot) : C \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$. Diz-se que $f(\cdot)$ é **unimodal** se $R(f, \alpha)$ é conexo para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, e **multimodal** se existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $R(f, \alpha)$ não é conexo.



Unimodalidade e Multimodalidade

Note-se que uma função unimodal pode possuir múltiplos mínimos, desde que o conjunto deste seja conexo. Por exemplo:

$$f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$



Mínimo Local e Mínimo Global

Mínimo Local: Seja $f(\cdot) : C \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$. Um ponto $\mathbf{x}^*$ é um mínimo local de $f(\cdot)$ sobre C se existe $\epsilon > 0$ tal que

$$f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{x}) \ \ , \ \ \forall\, \mathbf{x} \in V(\mathbf{x}^*, \epsilon) \cap C \qquad (1)$$

onde $V(\mathbf{x}^*, \epsilon) \triangleq \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\| < \epsilon\}$. O ponto $\mathbf{x}^* \in C$ é um mínimo local estrito se vale a desigualdade estrita.

Mínimo global: Se for possível escolher $\epsilon > 0$ tal que $V(\mathbf{x}^*, \epsilon) \cap C = C$, então $\mathbf{x}^*$ é um mínimo global de $f(\cdot)$ sobre C. O mínimo global é ainda estrito se a desigualdade for satisfeita de modo estrito.

Bacias de Atração

Região Conexa de Sub-Nível: Seja $f(\cdot) : C \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, seja a região de sub-nível $R(f, \alpha)$, associada ao nível α, e seja um ponto $\mathbf{x}_0 \in R(f, \alpha)$. A região conexa de sub-nível $R(f, \alpha, \mathbf{x}_0)$ é definida como o maior subconjunto conexo de $R(f, \alpha)$ que contém $\mathbf{x}_0$.

Bacias de Atração

Bacia de Atração: Seja $f(\cdot) : C \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, e seja $\mathbf{x}^* \in C$ um mínimo local de $f(\cdot)$. A bacia de atração de $\mathbf{x}^*$ é definida como a maior região conexa de sub-nível associada a $\mathbf{x}^*$, sendo α^* o nível correspondente, tal que a função restrita a essa região

$$f(\cdot) : \; R_c\left(f, \alpha^*, \mathbf{x}^*\right) \; \mapsto \mathbb{R} \qquad (2)$$

é unimodal. A bacia de atração é dita estrita se nessa região a função é estritamente unimodal.

Continuidade e Diferenciabilidade

Uma **função contínua** é aquela para a qual uma pequena variação na entrada gera uma pequena variação no resultado da função.

Uma função $f(\cdot) : C \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ é contínua se $\forall \mathbf{x}_0 \in C$:

1. $f(\mathbf{x}_0)$ é definido;
2. $\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0)$.

Continuidade e Diferenciabilidade

Função diferenciável: Uma função $f(\cdot) : C \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ é diferenciável se $\forall \mathbf{x}_0 \in C$ existe o vetor gradiente:

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix} \tag{3}$$

Continuidade e Diferenciabilidade

Seja $f(\cdot) : C \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ uma função diferenciável no domínio C, seja $\mathbf{x}_0$ um ponto pertencente à superfície de nível $S(f, \alpha)$, e seja $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ o gradiente de $f(\cdot)$ no ponto $\mathbf{x}_0$. Seja ainda um vetor $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$. Então, se

$$\mathbf{d} \cdot \nabla f(\mathbf{x}_0) < 0 \tag{4}$$

então existe $\epsilon > 0$ tal que:

$$f(\mathbf{x}_0 + \epsilon \mathbf{d}) < f(\mathbf{x}_0) \tag{5}$$

Convexidade e Quasi-Convexidade

Conjunto Convexo: Diz-se que um conjunto $C \in \mathbb{R}^n$ é convexo se para quaisquer $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in C$,

$$\alpha \mathbf{x} + (1 - \alpha)\mathbf{y} \in C \quad (6)$$

para todo $\alpha \in [0, 1]$.

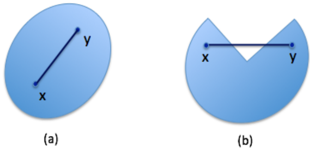


Figure: Representação: (a) Conjunto convexo, (b) Conjunto não convexo

Convexidade e Quasi-Convexidade

Função Convexa: Diz-se que uma função $f(\cdot) : \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ definida sobre um conjunto convexo $\mathcal{X}$ é convexa se para quaisquer $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{X}$,

$$f\left(\alpha \mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{y}\right) \leq \alpha f(\mathbf{x}) + (1-\alpha) f(\mathbf{y}) \tag{7}$$

para todo $\alpha \in [0, 1]$. Se para quaisquer $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{X}$, sendo $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ e $0 < \alpha < 1$, a desigualdade é estrita, então $f(\cdot)$ é estritamente convexa.

Convexidade e Quasi-Convexidade

A convexidade de funções pode ser relacionada com as regiões de sub-nível, superfícies de nível e bacias de atração.

1) Todas as regiões de sub-nível de uma função convexa num domínio convexo são conjuntos convexos.

2) Uma função convexa em um domínio convexo possui uma única bacia de atração, a qual é um conjunto convexo.

Perguntas e comentários?