UFMG
UNIVERSIDADE FEDERAL
DE MINAS GERAIS

Otimização Aplicada à Engenharia de Processos

Aula 6: Métodos de Programação Linear

Felipe Campelo
http://www.cpdee.ufmg.br/~fcampelo

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

Belo Horizonte
Abril de 2013

Recapitulação

- Método que permite resolver problemas de programação linear;
- Funciona através do pivotamento monotonicamente decrescente entre soluções básicas viáveis;
- Determinação de variáveis para pivotamento utilizando linha auxiliar no quadro Simplex.

Recapitulação

Dado um problema em sua forma padrão:

1. Montar o quadro Simplex correspondente a uma solução básica viável. Se todos os $r_j \geq 0$, PARAR (o ponto atual já é ótimo);
2. Selecionar q como a variável não-básica de menor valor de $r_j < 0$, para se tornar básica;
3. Se todos os $y_{iq} \leq 0$, PARAR (o problema tem solução no infinito). Caso contrário, selecionar p como o índice i de menor valor de y_{i0}/y_{iq}.
4. Realizar o pivotamento com o elemento-pivô pq, atualizando todas as linhas. Retornar ao passo 1.

Determinação da solução básica viável inicial

Vimos anteriormente que em diversos casos a solução básica viável inicial é de fácil obtenção, particularmente em casos onde o problema é inicialmente descrito na forma canônica (ou seja, com restrições de desigualdade $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$ e $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$) e variáveis de folga são adicionadas.

Entretanto, em muitos casos a solução básica viável inicial pode não ser tão simples de determinar.

Nestes casos, é possível construir um programa linear auxiliar que auxilia na geração desta solução inicial.

Variáveis artificiais

Sejam as restrições de um programa linear na forma padrão:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

com $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$. Para encontrarmos uma solução para as restrições acima, podemos considerar o problema auxiliar de minimização:

$$\begin{aligned} \text{minimize: } & \sum_{i=1}^{m} y_i \\ \text{sujeito a: } & \mathbf{Ax} + \mathbf{y} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \\ & \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Variáveis artificiais

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{minimize:} \quad & \sum_{i=1}^{m} y_i \\ \text{sujeito a:} \quad & \mathbf{Ax} + \mathbf{y} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \\ & \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

O vetor $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \ldots, y_m]$ é um vetor de *variáveis artificiais*. Observe que se o problema original (esquerda) tiver solução factível, o problema auxiliar terá um valor mínimo de zero em $\mathbf{y} = \mathbf{0}$. Se, por outro lado, o problema original não tiver solução factível, isto implicará em um valor mínimo maior que zero para o problema auxiliar.

Variáveis artificiais

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{minimize: } & \sum_{i=1}^{m} y_i \\ \text{sujeito a: } & \mathbf{Ax} + \mathbf{y} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \\ & \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Observe também que o problema auxiliar representa um programa linear nas variáveis $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, e que este sistema já está em sua forma padrão com solução básica factível $\mathbf{y} = \mathbf{b}$.

Variáveis artificiais

$$\begin{aligned} \text{minimize:} \quad & \sum_{i=1}^{m} y_i \\ \text{sujeito a:} \quad & \mathbf{Ax} + \mathbf{y} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \\ & \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

- Se resolvermos este problema utilizando o Simplex, temos a garantia de soluções básicas viáveis a cada passo do método.

- Se a solução encontrada for zero, sabemos que $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ e que (a menos de degeneração) a solução não terá nenhuma variável básica y_i.
- Mesmo que a solução seja degenerada, é possível pivotar (a custo zero) e remover os y_i, o que fornece uma solução básica contendo apenas as variáveis x.

Variáveis artificiais

Exemplo: encontrar uma solução básica viável para:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 4 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 &= 3 \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Introduzindo as variáveis artificiais $x_4 \geq 0,\; x_5 \geq 0$ e a função-objetivo $x_4 + x_5$, temos o problema auxiliar:

$$\begin{aligned} \text{minimize: } & z = x_4 + x_5 \\ \text{sujeito a: } & 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 4 \\ & 3x_1 + 3x_2 + x_3 + x_5 = 3 \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Variáveis artificiais

O quadro Simplex inicial para este problema auxiliar é dado por:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\mathbf{b}$
	2	1	2	1	0	4
	3	3	1	0	1	3
$\mathbf{c}^T$	0	0	0	1	1	0

Para iniciar o procedimento do Simplex precisamos ter a função-objetivo expressa apenas em termos das variáveis não-básicas.

Variáveis artificiais

Para tal, vemos que nossas duas restrições dizem que:

$$
\begin{aligned}
x_4 &= 4 - 2x_1 - x_2 - 2x_3 \\
x_5 &= 3 - 3x_1 - 3x_2 - x_3
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
z = 7 - 5x_1 - 4x_2 - 3x_3 &= 0 \\
-5x_1 - 4x_2 - 3x_3 &= -7
\end{aligned}
$$

O resultado acima nos fornece os coeficientes de custo relativo r_j.

Variáveis artificiais

O quadro Simplex se torna:

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \mathbf{b} \\
 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 4 \\
 & 3 & 3 & 1 & 0 & 1 & 3 \\
\mathbf{r}^T & -5 & -4 & -3 & 0 & 0 & -7
\end{array}
$$

O menor valor negativo de r_j é -5, correspondente à entrada da variável x_1 na base. O elemento-pivô neste caso é o b_{21}, correspondente à saída da variável x_5 da base.

Variáveis artificiais

Após o pivotamento, temos:

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 4/3 & 1 & -2/3 & 2 \\ 1 & 1 & 1/3 & 0 & 1/3 & 1 \\ 0 & 1 & -4/3 & 0 & 5/3 & -2 \end{vmatrix}$$

O novo elemento-pivô é o b_{13}, correspondente à entrada de x_3 e à saída de x_4 da base. Após o pivotamento:

$$\begin{vmatrix} 0 & -3/4 & 1 & 3/4 & -1/2 & 3/2 \\ 1 & 5/4 & 0 & -1/4 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Variáveis artificiais

$$\begin{vmatrix} 0 & -3/4 & 1 & 3/4 & -1/2 & 3/2 \\ 1 & 5/4 & 0 & -1/4 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Ambas as variáveis artificiais foram removidas da base, reduzindo o valor da função-objetivo do problema auxiliar para zero. Com isto, temos uma solução básica viável inicial para o problema original,

$$x_1 = 1/2, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 3/2$$

Método de duas fases

A utilização de variáveis artificiais leva à soluçao do programa linear através de uma técnica chamado de *método de duas fases*:

- **Fase I**: determinação de uma solução básica inicial através da utilização de um problema auxiliar, contendo as variáveis artificiais.

- **Fase II**: utilizando a solução básica viável resultante da fase I, resolve-se o problema original.

Observe que as variáveis artificiais só precisam ser introduzidas para as equações que não contenham variáveis de folga.

Exemplo 1

$$
\begin{aligned}
\text{minimize: } & 4x_1 + x_2 + x_3 \\
\text{sujeito a: } & 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\
& 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \\
& \mathbf{x} \geq \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

Como não há solução básica viável óbvia, usaremos o método das duas fases.

A primeira fase foi resolvida no exemplo anterior, e é reproduzida novamente a seguir.

Exemplo 1

$$\begin{aligned}
\text{minimize: } & 4x_1 + x_2 + x_3 \\
\text{sujeito a: } & 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\
& 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \\
& \mathbf{x} \geq \mathbf{0}
\end{aligned}$$

Adicionando as variáveis artificiais $x_4,\ x_5$ e montando o problema auxiliar:

$$\begin{aligned}
\text{minimize: } & z = x_4 + x_5 \\
\text{sujeito a: } & 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 4 \\
& 3x_1 + 3x_2 + x_3 + x_5 = 3 \\
& \mathbf{x} \geq \mathbf{0}
\end{aligned}$$

Exemplo 1

O quadro Simplex inicial para este problema auxiliar é dado por:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\mathbf{b}$
	2	1	2	1	0	4
	3	3	1	0	1	3
$\mathbf{c}^T$	0	0	0	1	1	0

Para iniciar o procedimento do Simplex precisamos ter a função-objetivo expressa apenas em termos das variáveis não-básicas.

$$x_4 = 4 - 2x_1 - x_2 - 2x_3$$
$$x_5 = 3 - 3x_1 - 3x_2 - x_3$$

Exemplo 1

Logo,

$$z = 7 - 5x_1 - 4x_2 - 3x_3 = 0$$
$$-5x_1 - 4x_2 - 3x_3 = -7$$

O resultado acima nos fornece os coeficientes de custo relativo r_j, e o quadro Simplex se torna:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\mathbf{b}$
	2	1	2	1	0	4
	3	3	1	0	1	3
$\mathbf{r}^T$	-5	-4	-3	0	0	-7

Exemplo 1

Pivotando sucessivamente:

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 4/3 & 1 & -2/3 & 2 \\ 1 & 1 & 1/3 & 0 & 1/3 & 1 \\ 0 & 1 & -4/3 & 0 & 5/3 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -3/4 & 1 & 3/4 & -1/2 & 3/2 \\ 1 & 5/4 & 0 & -1/4 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Oo valor da função-objetivo do problema auxiliar torna-se zero, para a solução básica viável $[x_1, x_2, x_3] = [0.5; 0; 1.5]$.

Exemplo 1

Iniciando a fase II, vemos que o quadro Simplex é dado por (substituindo a última linha pelos coeficientes de custo da função-objetivo original):

	x_1	x_2	x_3	$\mathbf{b}$
	0	-0.75	1	1.5
	1	1.25	0	0.5
$\mathbf{c}^T$	4	1	1	3.5

Como nossa base inicial é dada por $x_1,\ x_3$, devemos expressar a função objetivo em termos da variável não-básica x_2.

Exemplo 1

Manipulando as restrições, temos:

$$
\begin{aligned}
x_3 &= 1.5 + 0.75x_2 \\
x_1 &= 0.5 - 1.25x_2
\end{aligned}
$$

Expressando z em termos de x_2:

$$
\begin{aligned}
z &= 4x_1 + x_2 + x_3 \\
&= 2 - 5x_2 + x_2 + 1.5 + 0.75x_2 \\
&= -3.25x_2 + 3.5
\end{aligned}
$$

Exemplo 1

Com isto, temos o quadro Simplex com a última linha expressando os coeficientes de custo relativo:

$$
\begin{array}{ccccc}
 & x_1 & x_2 & x_3 & \mathbf{b} \\
 & 0 & -0.75 & 1 & 1.5 \\
 & 1 & 1.25 & 0 & 0.5 \\
\mathbf{r}^T & 0 & -3.25 & 0 & -3.5
\end{array}
$$

Agora nos resta realizar o pivotamento:

Exemplo 1

$$\begin{vmatrix} 0 & -0.75 & 1 & 1.5 \\ 1 & 1.25 & 0 & 0.5 \\ 0 & -3.25 & 0 & -3.5 \end{vmatrix} \rightarrowtail \begin{vmatrix} 0 & -0.75 & 1 & 1.5 \\ 0.8 & 1 & 0 & 0.4 \\ 0 & -3.25 & 0 & -3.5 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0.6 & 0 & 1 & 1.8 \\ 0.8 & 1 & 0 & 0.4 \\ 2.6 & 0 & 0 & -2.2 \end{vmatrix}$$

Como não há mais coeficientes de custo relativo negativos, o método encontrou a solução:

$$\mathbf{x}^* = [0; 1.8; 0.4] \qquad z^* = 2.2$$

Exemplo 2

$$
\begin{aligned}
\text{minimize: } & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\
\text{sujeito a: } & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\
& x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\mathbf{c}^T = [-2; 4; 7; 1; 5]
$$

$$
\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
\mathbf{b} = [7; 6; 4]^T
$$

Exemplo 2

$$\begin{aligned} \text{minimize: } & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{sujeito a: } & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

Como a variável x_1 é livre, a mesma pode ser eliminada juntamente com uma restrição. Esta eliminação pode ser facilmente obtida através do próprio quadro Simplex.

Exemplo 2

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \mathbf{b} \\
 & -1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 7 \\
 & -1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 6 \\
 & -1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 4 \\
\mathbf{c}^T & -2 & 4 & 7 & 1 & 5 & 0
\end{array}
$$

Seleciona-se qualquer elemento não-zero da coluna 1 para pivotamento:

$$
\begin{array}{c|ccccc}
1 & -1 & -2 & -1 & -2 & -7 \\
\hline
0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\
0 & 0 & -1 & 1 & -1 & -3 \\
0 & 2 & 3 & -1 & 1 & 1
\end{array}
$$

Exemplo 2

A primeira linha é armazenada para futuras referências, pois implica em:

$$x_1 = -7 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5$$

Esta operação simples de pivotamento efetivamente remove a variável x_1 do problema, bem como a primeira restrição.

Como não há solução básica viável óbvia na formulação do problema, introduzimos agora as variáveis artificiais $x_6,\ x_7$ e a função-objetivo auxiliar $x_6 + x_7$.

Exemplo 2

	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\mathbf{b}$
	-1	-1	0	1	1	0	1
	0	1	-1	1	0	1	3
$\mathbf{c}^T$	0	0	0	0	1	1	0

Transformando a última linha de forma que apenas variáveis não-básicas tenham coeficientes diferentes de zero, temos:

	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\mathbf{b}$
	-1	-1	0	1	1	0	1
	0	1	-1	1	0	1	3
$\mathbf{r}^T$	1	0	1	-2	0	0	-4

Exemplo 2

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & \mathbf{b} \\
 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 3 \\
\mathbf{r}^T & 1 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & -4
\end{array}
$$

Elemento-pivô: b_{14}

$$
\left|\begin{array}{ccccccc}
-1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 2 & -1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\
-1 & -2 & 1 & 0 & 2 & 0 & -2
\end{array}\right|
$$

Exemplo 2

Elemento-pivô: b_{22}

$$\left|\begin{array}{ccccccc} -0.5 & 0 & -0.5 & 1 & 0.5 & 0.5 & 2 \\ 0.5 & 1 & -0.5 & 0 & -0.5 & 0.5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right|$$

Com isto eliminamos as variáveis artificiais e encontramos uma solução básica viável inicial. Voltando para o problema reduzido equivalente:

$$\begin{array}{cccccc} & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \mathbf{b} \\ & -0.5 & 0 & -0.5 & 1 & 2 \\ & 0.5 & 1 & -0.5 & 0 & 1 \\ \mathbf{c}^T & 2 & 3 & -1 & 1 & -14 \end{array}$$

Exemplo 2

Transformando a última linha para os coeficientes de custo relativo:

$$\begin{vmatrix} -0.5 & 0 & -0.5 & 1 & 2 \\ 0.5 & 1 & -0.5 & 0 & 1 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 1 & -11 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -0.5 & 0 & -0.5 & 1 & 2 \\ 0.5 & 1 & -0.5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -9 \end{vmatrix}$$

Exemplo 2

$$
\begin{array}{cccccc}
 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \mathbf{b} \\
 & -0.5 & 0 & -0.5 & 1 & 2 \\
 & 0.5 & 1 & -0.5 & 0 & 1 \\
\mathbf{c}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & -9
\end{array}
$$

Como não há coeficientes negativos na linha de custo relativo, vemos que o método já convergiu para a solução do problema, $[x_2, x_3, x_4, x_5] = [0; 1; 0; 2]$.

Exemplo 2

Utilizando a linha armazenada, temos ainda:

$$x_1 = -7 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 = -1$$

o que fornece:

$$\mathbf{x}^* = [-1; 0; 1; 0; 2]^T$$

$$z^* = \mathbf{c}^T\mathbf{x} = [-2; 4; 7; 1; 5] \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = 19$$

Perguntas e comentários?