

Singularità e Regolarità Aleatorie

Francesco Caravenna

Università degli Studi di Milano-Bicocca

Colloquium di Matematica, Fisica e Informatica

Università di Parma ~ 23 Gennaio 2024

Obiettivo

Raccontare in modo non tecnico un po' di storia e alcuni progressi fondamentali nelle

Equazioni Differenziali Stocastiche $\left\{ \begin{array}{ll} \text{ODE} & \text{Ordinarie} \\ \text{PDE} & \text{alle derivate Parziali} \end{array} \right.$

Raccontare alcune idee profonde alla base di questi progressi alla frontiera tra

Probabilità, Analisi e Fisica Matematica

Interazioni con Algebra, Analisi Numerica, Geometria, ...

Avvertenza: non sono un esperto di equazioni differenziali stocastiche!

Ci sono “andato a sbattere” ...

1. Equazioni Differenziali Stocastiche
2. Singolarità Aleatorie
3. Regolarità Aleatoria per ODE
4. Regolarità Aleatoria per PDE

ODE controllata $\frac{d}{dt}X(t) = \sigma(X(t)) \xi(t)$ $X : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^k$

incognita $X(t)$ assegnati $X(0)$, $\sigma(\cdot)$, $\xi(t)$ $\xi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^d$

$\sigma : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{k \times d}$

PDE controllata $\frac{\partial}{\partial t}u(t, x) = \underbrace{\Delta_x u(t, x)}_{\sum_{i=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u(t, x)} + f(u(t, x), \nabla u(t, x)) + \xi(t, x)$

incognita $u(t, x)$ assegnati $u(0, x)$, $f(\cdot)$, $\xi(t, x)$

$u, \xi : [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$

Che cos'è una equazione differenziale stocastica?

ODE o PDE dove il “controllo” ξ è **stocastico** (aleatorio, random) e **irregolare**:

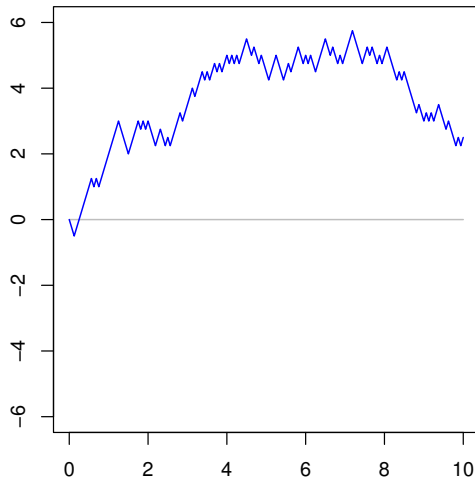
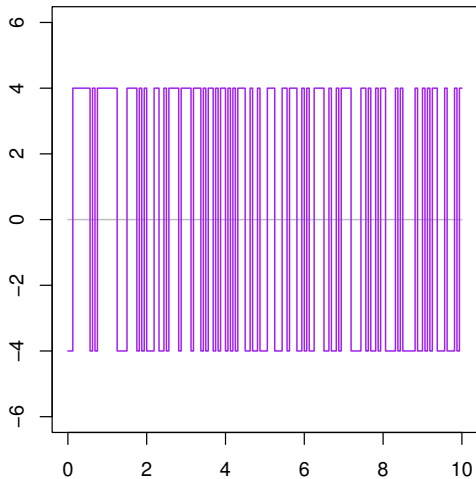
l'equazione non si può formulare in modo puramente analitico

- ▶ $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ spazio di probabilità $\Omega \ni \omega \mapsto \xi^\omega(t, x)$
- ▶ $(t, x) \mapsto \xi^\omega(t, x)$ non è una funzione regolare
ma solo una **distribuzione** (Schwartz)

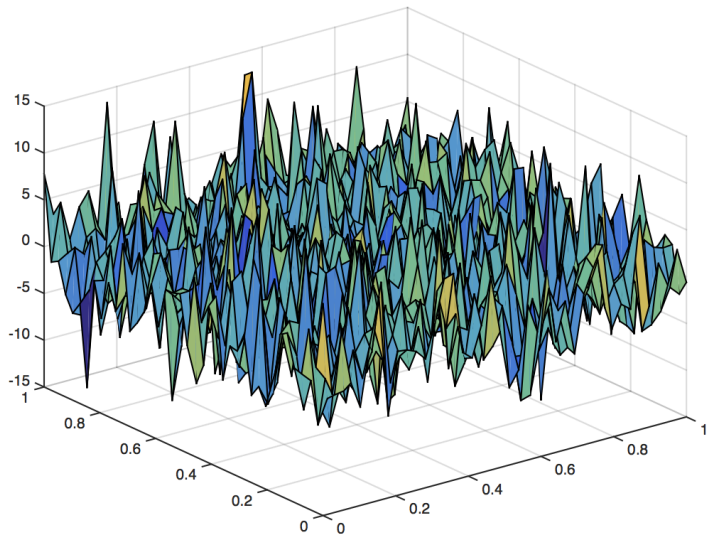
“Perché farsi del male?” Perché ξ **irregolari** emergono nei casi più interessanti (!)

Rumore bianco: “i valori di $\xi(t, x)$ sono indipendenti in ogni punto (t, x) ”

Rumore bianco 1-dim



Rumore bianco 2-dim



ODE stocastiche (SDE): la teoria classica

ODE $\frac{d}{dt}X_t = \sigma(X_t) \xi(t)$ in forma integrale: $[X_t := X(t)]$

$$X_t = X_0 + \int_0^t \sigma(X_s) \xi(s) ds = X_0 + \int_0^t \sigma(X_s) dB_s \quad (*)$$

$B_t := \int_0^t \xi(s) ds$ è il **moto browniano** (funzione continua, non derivabile)

Teorema (Ito 1944)

- ▶ Integrale stocastico $\int_0^t Y_s dB_s$ per un'ampia classe di funzioni **aleatorie** $(Y_s^\omega)_{s \geq 0}$
- ▶ Esistenza e unicità per l'equazione (*) mediante punto fisso $[\sigma(\cdot) \in C^1]$

109. *Stochastic Integral.**

By Kiyosi ITÔ.

Mathematical Institute, Nagoya Imperial University.

(Comm. by S. KAKÉYA, M.I.A., Oct. 12, 1944.)

1. Introduction. Let (\mathcal{Q}, P) be any probability field, and $g(t, \omega)$, $0 \leq t \leq 1$, $\omega \in \mathcal{Q}$, be any *brownian motion*¹⁾ on (\mathcal{Q}, P) i. e. a (real) stochastic differential process with no moving discontinuity such that $\mathcal{E}(g(s, \omega) - g(t, \omega)) = 0$ ²⁾ and $\mathcal{E}(g(s, \omega) - g(t, \omega))^2 = |s - t|$. In this note we shall investigate an integral $\int_0^t f(\tau, \omega) d_g g(\tau, \omega)$ for any element $f(t, \omega)$ in a functional class S^* which will be defined in §2; the particular case in which $f(t, \omega)$ does not depend upon ω has already been treated by Paley and Wiener³⁾.

In §2 we shall give the definition and prove fundamental properties concerning this integral. In §3 we shall establish three theorems which give sufficient conditions for integrability. In §4 we give an example, which will show a somewhat singular property of our integral.

2. Definition and Properties. For brevity we define the classes of measurable functions defined on $[0, 1] \times \mathcal{Q}$: G , $S(t_0, t_1, \dots, t_n)$, S and S^* respectively as the classes of $f(t, \omega)$ satisfying the corresponding conditions, as follows,

G : $f(\tau, \omega)$, $g(\tau, \omega)$, $0 \leq \tau \leq t$, are independent of $g(s, \omega) - g(t, \omega)$, $t \leq s \leq 1$, for any t , $g(\tau, \omega)$ being the above mentioned brownian motion,

DANIEL REVUZ

MARC YOR

Volume 293

Grundlehren
der mathematischen
Wissenschaften

A Series of
Comprehensive Studies
in Mathematics

CONTINUOUS MARTINGALES AND BROWNIAN MOTION

THIRD EDITION

 Springer

PDE stocastiche (SPDE): la teoria classica

PDE $\partial_t u - \Delta_x u = f(u, \nabla u) + \xi$ in forma integrale: [“mild”]

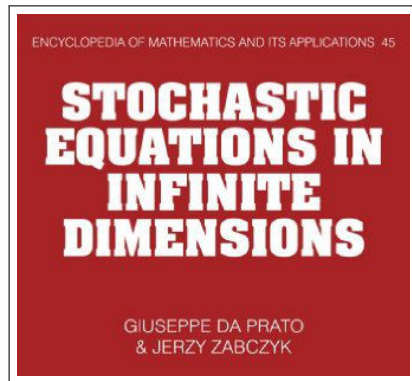
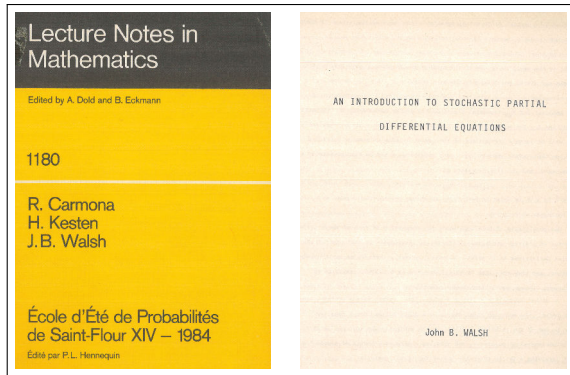
$$u(t, x) = “(\partial_t - \Delta_x)^{-1} \left(f(u, \nabla u) + \xi \right)” \quad [u(0, \cdot) \equiv 0]$$

$$= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{g_{t-s}(x-y)} \left(f(u(s, y), \nabla u(s, y)) + \xi(s, y) \right) ds dy$$

nucleo del calore $\frac{1}{(4\pi(t-s))^{d/2}} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}\right)$

Teorema (AA. VV. '70-'80)

- ▶ Integrale stocastico \rightsquigarrow Esistenza e unicità in bassa dimensione $d < d_0$
- ▶ Alta dimensione $d > d_0$: come definire $f(\cdot)$ non lineare con $u(\cdot)$ distribuzione?



PDE stocastiche singolari

Importanti PDE stocastiche **singolari** sfuggono alla teoria classica

*quando $f(u, \nabla u)$ è **non lineare***

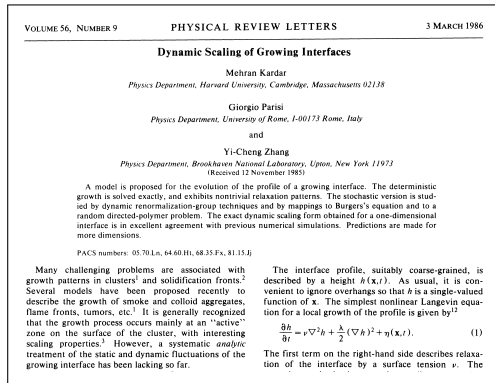
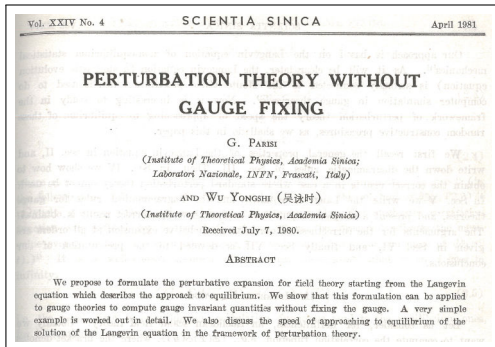
Due esempi fondamentali:

- Quantizzazione stocastica (Φ_d^4) per $d \geq 2$ [Parisi, Wu (1981)]

$$\partial_t u = \Delta_x u - u^3 + \xi$$

- Dinamica di interfacce (KPZ_d) per $d \geq 1$ [Kardar, Parisi, Zhang (1986)]

$$\partial_t u = \Delta_x u + |\nabla u|^2 + \xi$$



PDE stocastiche e distribuzioni

Il rumore bianco $\xi = \xi^\omega$ non è una funzione ma solo una **distribuzione** (aleatoria)

Non è definito puntualmente $\xi(t, x)$ ma solo “integrato” $\xi(A) = \int_A \xi(t, x) dt dx$

- $\xi(A)$ e $\xi(B)$ indipendenti per $A \cap B = \emptyset$
- $\xi(A) \sim \mathcal{N}(0, |A|)$

Non sono ben definite **operazioni non lineari** sulle distribuzioni (ad es. ξ^2, ξ^3)

Ci aspettiamo che la soluzione u sia *più regolare* di ξ ... ma non abbastanza:

- ▶ u distribuzione per $d \geq 2 \rightsquigarrow u^3$ non è definita $\rightsquigarrow \Phi_d^4$ è **singolare**
- ▶ ∇u distribuzione per $d \geq 1 \rightsquigarrow |\nabla u|^2$ non è definita $\rightsquigarrow \text{KPZ}_d$ è **singolare**

Φ_d^4 per $d = 2$: soluzioni deboli e soluzioni forti

Commun. Math. Phys. 101, 409–436 (1985)

Communications in
Mathematical
Physics
© Springer-Verlag 1985

On the Stochastic Quantization of Field Theory

G. Jona-Lasinio^{1,2,*} and P. K. Mitter²

1* Dipartimento di Fisica, Università di Roma “La Sapienza,” Piazzale Aldo Moro 2, I-00185 Roma, Italy

2 Laboratoire de Physique Théorique et Hautes Energies**, Université Pierre et Marie Curie, Paris VI, F-75230 Paris Cedex 05, France

Abstract. We give a rigorous construction of a stochastic continuum $P(\phi)_2$ model in finite Euclidean space-time volume. It is obtained by a weak solution of a non-linear stochastic differential equation in a space of distributions. The resulting Markov process has continuous sample paths, and is ergodic with the finite volume Euclidean $P(\phi)_2$ measure as its unique invariant measure. The procedure may be called stochastic field quantization.

The Annals of Probability
2003, Vol. 31, No. 4, 1900–1916
© Institute of Mathematical Statistics, 2003

STRONG SOLUTIONS TO THE STOCHASTIC QUANTIZATION EQUATIONS

BY GIUSEPPE DA PRATO AND ARNAUD DEBUSSCHE

Scuola Normale Superiore di Pisa and Ecole Normale Supérieure de Cachan

We prove the existence and uniqueness of a strong solution of the stochastic quantization equation in dimension 2 for almost all initial data with respect to the invariant measure. The method is based on a fixed point result in suitable Besov spaces.

1. Introduction. In this article, we consider stochastic quantization equations in space dimension 2 with periodic boundary conditions. These are reaction–diffusion equations driven by a space–time white noise. It is well known that the solution is not expected to be a smooth process and the nonlinear term is modified thanks to a renormalization.

More precisely, let $G = [0, 2\pi]^2$ and $H = L^2(G)$. We are concerned with the equation set

$$(1.1) \quad \begin{aligned} dX &= (AX + :p(X):) dt + dW(t), \\ X(0) &= x, \end{aligned}$$

La mappa soluzione

ODE stocastica (SDE)

B_t = moto browniano in \mathbb{R}^d

$$\frac{d}{dt} X_t = \sigma(X_t) \xi(t) = \sigma(X_t) \frac{d}{dt} B_t$$

Forma integrale

$$X_t = X_0 + \underbrace{\int_0^t \sigma(X_u) dB_u}_{\text{integrale stocastico}}$$

► ($d > 1$) La mappa soluzione $B \mapsto X$ tipicamente è solo misurabile

► ($d = 1$) La mappa soluzione $B \mapsto X$ è continua

Convergenza loc. uniforme

[Doss (1977), Sussmann (1978)]

Uno sviluppo di Taylor aleatorio

$$X_t = X_0 + \underbrace{\int_0^t \sigma(X_u) dB_u}_{\text{integrale stocastico}} \quad (\star)$$

Possiamo caratterizzare le traiettorie della soluzione X $[\sigma(\cdot) \in C^3]$

Teorema (Lyons 1998, Davie 2007)

La soluzione di (\star) è l'unica funzione $X : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^k$ tale che

$$X_t - X_s = \sigma(X_s)(B_t - B_s) + \nabla \sigma(X_s) \sigma(X_s) \int_s^t (B_u - B_s) \otimes dB_u + o(t-s)$$

(loc. unif. per $0 \leq s < t < \infty$)

La ODE stocastica (\star) è equivalente a

$$X_t - X_s = \sigma(X_s) \mathbb{B}_{st}^1 + \nabla \sigma(X_s) \sigma(X_s) \mathbb{B}_{st}^2 + o(t-s) \quad (\tilde{\star})$$

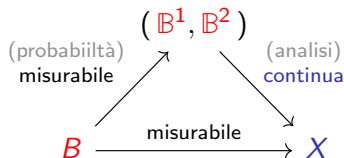
dove

$$\mathbb{B}_{st}^1 := B_t - B_s \quad \mathbb{B}_{st}^2 := \underbrace{\int_s^t (B_u - B_s) \otimes dB_u}_{\text{integrale stocastico}}$$

- ▶ $\mathbb{B}^2 = (\mathbb{B}_{st}^2)$ è un oggetto probabilistico (non canonico: Ito, Stratonovich, ...)
- ▶ Assegnati \mathbb{B}^1 e \mathbb{B}^2 , l'equazione $(\tilde{\star})$ diventa puramente analitica
- ▶ La mappa soluzione $(\mathbb{B}^1, \mathbb{B}^2) \mapsto X$ è continua (topologia Hölder)

Rough paths

Abbiamo **fattorizzato** la mappa soluzione $B \mapsto X$:



La coppia (B^1, B^2) è un esempio di **rough path** (Lyons 1998) (analisi + algebra)

La soluzione X è un esempio di **path controllato** da B (Gubinelli 2004)

$$\begin{array}{ccc} (B_\varepsilon^1, B_\varepsilon^2) \rightarrow (B^1, B^2) & \implies & X_\varepsilon \rightarrow X \\ \text{convergenza del rough path} & & \text{convergenza della soluzione} \end{array}$$

Differential equations driven by rough signals

Terry J. Lyons

1. Preliminaries.

1.1. Introduction.

1.1.1. Inhomogeneous differential equations.

Time inhomogeneous (or non-autonomous) systems of differential equations are often treated rather formally as extensions of the homogeneous (or autonomous) case by adding an extra parameter to the system; however this can be a travesty. Consider an equation of the kind

$$(1.1) \quad dy_t = \sum_i f^i(y_t) dx_t^i,$$



Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE @ DIRECT®

Journal of Functional Analysis 216 (2004) 86–140

<http://www.elsevier.com/locate/jfa>

JOURNAL OF
Functional
Analysis

Controlling rough paths

M. Gubinelli

Dipartimento di Matematica Applicata "U. Dini" Via Bonanno Pisano, 25 BIS-56125, Pisa, Italy

Received 1 October 2003; accepted 23 January 2004

Communicated by D. Stroock

Abstract

We formulate indefinite integration with respect to an irregular function as an algebraic problem which has a unique solution under some analytic constraints. This allows us to define a good notion of integral with respect to irregular paths with Hölder exponent greater than $1/3$ (e.g. samples of Brownian motion) and study the problem of the existence, uniqueness and continuity of solution of differential equations driven by such paths. We recover Young's theory of integration and the main results of Lyons' theory of rough paths in Hölder topology.

Rough paths e PDE singolari

Si possono applicare le tecniche dei **rough paths** alle PDE stocastiche singolari?

Sì : esistenza, unicità, continuità per KPZ_1 (Hairer 2013)

Annals of Mathematics **178** (2013), 559–664
<http://dx.doi.org/10.4007/annals.2013.178.2.4>

Solving the KPZ equation

By MARTIN HAIRER

Abstract

We introduce a new concept of solution to the KPZ equation which is shown to extend the classical Cole-Hopf solution. This notion provides a factorisation of the Cole-Hopf solution map into a “universal” measurable map from the probability space into an explicitly described auxiliary metric space, composed with a new solution map that has very good continuity properties. The advantage of such a formulation is that it essentially provides a pathwise notion of a solution, together with a very detailed approximation theory. In particular, our construction completely bypasses the Cole-Hopf transform, thus laying the groundwork for proving that the KPZ equation describes the fluctuations of systems in the KPZ universality class.

$$(u(t, x))_{(t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^d}$$

↓

$$(U_t)_{t \geq 0} \quad \text{dove} \quad U_t = (u(t, x))_{x \in \mathbb{R}^d}$$

Le Strutture di Regolarità

Teoria genuinamente multi-dimensionale: **Strutture di Regolarità** (Hairer 2014)

Si applica a un'ampia classe di **PDE stocastiche singolari** “**sotto-critiche**”

$$\phi_d^4 \quad d \leq 3 \quad \text{KPZ}_1 \quad \text{e molte altre}$$

Per questi contributi Martin Hairer ha ricevuto la **Medaglia Fields 2014**

Parallelamente sono stati sviluppati approcci alternativi, in particolare (non solo)

► **Calcolo Paracontrollato** (Gubinelli, Imkeller, Perkowski 2015)

Descriverò alcune delle idee cruciali alla base delle Strutture di Regolarità

Invent. math. (2014) 198:269–504
DOI 10.1007/s00222-014-0505-4

A theory of regularity structures

M. Hairer

Received: 1 October 2013 / Accepted: 21 January 2014 / Published online: 14 March 2014
© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2014

Abstract We introduce a new notion of “regularity structure” that provides an algebraic framework allowing to describe functions and/or distributions via a kind of “jet” or local Taylor expansion around each point. The main novel idea is to replace the classical polynomial model which is suitable for describing smooth functions by arbitrary models that are purpose-built for the problem at hand. In particular, this allows to describe the local behaviour not only of functions but also of large classes of distributions. We then build a calculus allowing to perform the various operations (multiplication, composition with smooth functions, integration against singular kernels) necessary to formulate fixed point equations for a very large class of semilinear PDEs driven by some very singular (typically random) input. This allows, for the first time, to give a



Forum of Mathematics, Pi (2015), Vol. 3, e6, 75 pages
doi:10.1017/fmp.2015.2



1

PARACONTROLLED DISTRIBUTIONS AND SINGULAR PDES

MASSIMILIANO GUBINELLI¹, PETER IMKELLER² and
NICOLAS PERKOWSKI³

¹ CEREMADE & CNRS UMR 7534, Université Paris-Dauphine and
Institut Universitaire de France, France;
email: gubinelli@ceremade.dauphine.fr

² Institut für Mathematik, Humboldt-Universität zu Berlin, Germany;
email: imkeller@math.hu-berlin.de

³ CEREMADE & CNRS UMR 7534, Université Paris-Dauphine, France;
email: perkowski@ceremade.dauphine.fr

Received 24 July 2014; accepted 10 April 2015

Abstract

We introduce an approach to study certain singular partial differential equations (PDEs) which is based on techniques from paradiifferential calculus and on ideas from the theory of controlled rough paths. We illustrate its applicability on some model problems such as differential equations driven by fractional Brownian motion, a fractional Burgers-type stochastic PDE (SPDE) driven by space-time white noise, and a nonlinear version of the parabolic Anderson model with a white noise potential.

1. Arricchire il rumore

Messaggio dei **rough paths**: “arricchire il rumore” per guadagnare continuità

$$B \rightsquigarrow \mathbb{B} = \left(\underbrace{\mathbb{B}_{st}^1 = \mathbb{B}_s^1(t)}_{B_t - B_s}, \underbrace{\mathbb{B}_{st}^2 = \mathbb{B}_s^2(t)}_{\int_s^t (B_u - B_s) \otimes dB_u} \right)$$

PDE stocastiche **singolari sotto-critiche**: numero finito di arricchimenti

$$\text{rumore bianco } \xi \rightsquigarrow \text{“modello” } \Xi = \left(\underbrace{\Xi_{(s,y)}^1(\cdot), \Xi_{(s,y)}^2(\cdot), \dots, \Xi_{(s,y)}^M(\cdot)}_{\xi(\cdot)} \right)$$

Le distribuzioni $\Xi_{(s,y)}^i(\cdot)$ descrivono **funzioni non-lineari di $\xi(\cdot)$** in prossimità di (s, y)

[costruzione probabilistica, non banale!]

2. Distribuzioni modellate

Fissiamo il “modello” $\Xi = (\Xi_{(s,y)}^i(\cdot))_{1 \leq i \leq M}$ per la nostra PDE stocastica

Descriviamo la soluzione $u(\cdot)$ con uno “sviluppo di Taylor” rispetto a Ξ

$$u(\cdot) \approx \mathbf{U}_{(s,y)}(\cdot) = \sum_{i=1}^M c_i(s,y) \Xi_{(s,y)}^i(\cdot) + \text{polinomio} \quad \text{vicino a } (s,y)$$

Teorema di Ricostruzione (Hairer 2014)

Imponendo condizioni di “coerenza” sui coefficienti, la famiglia

$$\mathbf{U} = (\mathbf{U}_{(s,y)}(\cdot))_{(s,y)} \quad \text{“distribuzione modellata”}$$

determina un’unica distribuzione $u(\cdot)$ su $[0, \infty) \times \mathbb{R}^d$.

3. Sollevare e risolvere la PDE

Operazioni **non lineari** su ξ (ad es. prodotti) descritte dal modello $\Xi = (\Xi_{(s,y)}^i(\cdot))$

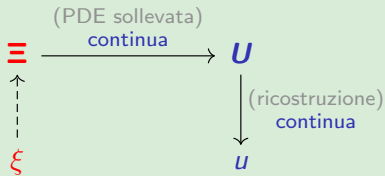
\rightsquigarrow **ben definite** per distribuzioni modellate $U = (U_{(s,y)}(\cdot))$

Stime di Schauder multi-livello (Hairer 2014)

L'integrazione è **ben definita** e **regolarizzante** per distribuzioni modellate U

La **PDE** si “solleva” ed è **ben posta**
in uno spazio di **distribuzioni modellate** U

$$U = \underbrace{\mathcal{K}}_{“(\partial_t - \Delta_x)^{-1}”} \left(f(U, \nabla U) + \Xi^1 \right)$$



4. La rinormalizzazione

La parte **probabilistica** è confinata alla **costruzione del modello** $\Xi = (\Xi_{(s,y)}^i(\cdot))_{1 \leq i \leq M}$

Operazioni non lineari su ξ richiedono spesso forme di **rinormalizzazione**

In concreto: regolarizzando $\xi = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \xi_\varepsilon$ le soluzioni corrispondenti u_ε **non convergono**

Occorre **modificare le equazioni** con opportune **costanti divergenti** $c_\varepsilon, \tilde{c}_\varepsilon \rightarrow \infty$

$$\partial_t u_\varepsilon = \Delta_x u_\varepsilon - u_\varepsilon^3 \boxed{+ c_\varepsilon u_\varepsilon} + \xi_\varepsilon \qquad \partial_t u_\varepsilon = \Delta_x u_\varepsilon + |\nabla u_\varepsilon|^2 \boxed{- \tilde{c}_\varepsilon} + \xi_\varepsilon$$

Solo in questo modo il modello converge: $\Xi_\varepsilon \rightarrow \Xi$

$$\text{ad es. } X_\varepsilon := (\partial_t - \Delta_x)^{-1} \xi_\varepsilon \longrightarrow X := (\partial_t - \Delta_x)^{-1} \xi \in C^{-\kappa}$$

$$X_\varepsilon^2 - c_\varepsilon \longrightarrow X^{\diamond 2} \in C^{-2\kappa}$$

Conclusione

Le **Strutture di Regolarità** permettono di risolvere **PDE stocastiche singolari**

Per **domare le singolarità aleatorie** si definisce una nuova nozione di **regolarità aleatoria**:

sviluppi di Taylor con “monomi aleatori” costruiti sul rumore ξ

La teoria generale, molto bella e complessa, si intreccia con **diverse aree matematiche**
(algebre di Hopf, analisi numerica, ...)

I risultati cruciali (Ricostruzione, Schauder) si possono formulare **indipendentemente**

[C., Zambotti, EMS Survey (2020)]

[Broux, C., Zambotti, preprint (2023)]

Le idee profonde possono essere utili in altri ambiti della matematica

Grazie