Percolazione

Michele Gay

Dipartimento di Matematica
Tesi di Laurea Triennale

29 Novembre 2016

Modello

Modello

- Consideriamo il reticolo intero d-dimensionale $\mathbb{Z}^d$

Modello

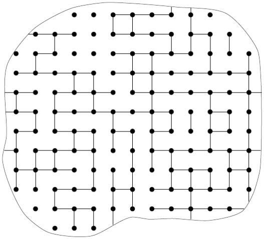
- Consideriamo il reticolo intero d-dimensionale $\mathbb{Z}^d$
- Fissiamo $p \in [0, 1]$ e dichiariamo indipendentemente ogni tratto
  - Aperto, con probabilità p
  - Chiuso, con probabilità $1 - p$

Modello

- Consideriamo il reticolo intero d-dimensionale $\mathbb{Z}^d$
- Fissiamo $p \in [0, 1]$ e dichiariamo indipendentemente ogni tratto
  - Aperto, con probabilità p
  - Chiuso, con probabilità $1 - p$
- Otteniamo un sottografo aleatorio composto dai punti di $\mathbb{Z}^d$ e dai tratti aperti e ne studiamo la struttura

Modello

- Consideriamo il reticolo intero d-dimensionale $\mathbb{Z}^d$
- Fissiamo $p \in [0,1]$ e dichiariamo indipendentemente ogni tratto
  - Aperto, con probabilità p
  - Chiuso, con probabilità $1-p$
- Otteniamo un sottografo aleatorio composto dai punti di $\mathbb{Z}^d$ e dai tratti aperti e ne studiamo la struttura



Domande Importanti

Domande Importanti

- Un cluster è un sottografo connesso composto da tratti aperti. Il cluster passante per l'origine si denota con C_0

Domande Importanti

- Un cluster è un sottografo connesso composto da tratti aperti. Il cluster passante per l'origine si denota con C_0

Domanda

Qual è la probabilità che il cluster per l'origine sia infinito?

Domande Importanti

- Un cluster è un sottografo connesso composto da tratti aperti. Il cluster passante per l'origine si denota con C_0

Domanda

Qual è la probabilità che il cluster per l'origine sia infinito?

funzione di percolazione: $\theta(p) = P_p(|C_0| = \infty)$

Domande Importanti

- Un cluster è un sottografo connesso composto da tratti aperti. Il cluster passante per l'origine si denota con C_0

Domanda

Qual è la probabilità che il cluster per l'origine sia infinito?

funzione di percolazione: $\theta(p) = P_p(|C_0| = \infty)$

Domanda

Qual'è la probabilità che vi sia un cluster infinito nel grafo, non necessariamente passante per l'origine?

Domande Importanti

- Un cluster è un sottografo connesso composto da tratti aperti. Il cluster passante per l'origine si denota con C_0

Domanda

Qual è la probabilità che il cluster per l'origine sia infinito?

funzione di percolazione: $\theta(p) = P_p(|C_0| = \infty)$

Domanda

Qual'è la probabilità che vi sia un cluster infinito nel grafo, non necessariamente passante per l'origine?

- $\theta(p) > 0 \Leftrightarrow P_p(\exists \text{ un cluster infinito}) = 1$

Valore Critico

Valore Critico

- $\theta(p) = P_p(|C_0| = \infty) = P_p$ (il cluster per l'origine è infinito)

Valore Critico

- $\theta(p) = P_p(|C_0| = \infty) = P_p$ (il cluster per l'origine è infinito)

$\theta(p)$ è non decrescente in p e $\exists$ p_c valore critico tale che:

- $\theta(p) = 0$ per $p < p_c$
- $\theta(p) > 0$ per $p > p_c$

Valore Critico

- $\theta(p) = P_p(|C_0| = \infty) = P_p$ (il cluster per l'origine è infinito)

$\theta(p)$ è non decrescente in p e $\exists\ p_c$ valore critico tale che:

- $\theta(p) = 0$ per $p < p_c$
- $\theta(p) > 0$ per $p > p_c$

- In $d = 1$, cioè nel grafo unidimensionale, si ha $p_c = 1$

Valore Critico

- $\theta(p) = P_p(|C_0| = \infty) = P_p$ (il cluster per l'origine è infinito)

$\theta(p)$ è non decrescente in p e $\exists\ p_c$ valore critico tale che:

- $\theta(p) = 0$ per $p < p_c$
- $\theta(p) > 0$ per $p > p_c$

- In $d = 1$, cioè nel grafo unidimensionale, si ha $p_c = 1$
- In $d \geq 2$ dimensioni si ha $0 < p_c < 1$

Valore Critico

- $\theta(p) = P_p(|C_0| = \infty) = P_p$ (il cluster per l'origine è infinito)

$\theta(p)$ è non decrescente in p e $\exists\ p_c$ valore critico tale che:

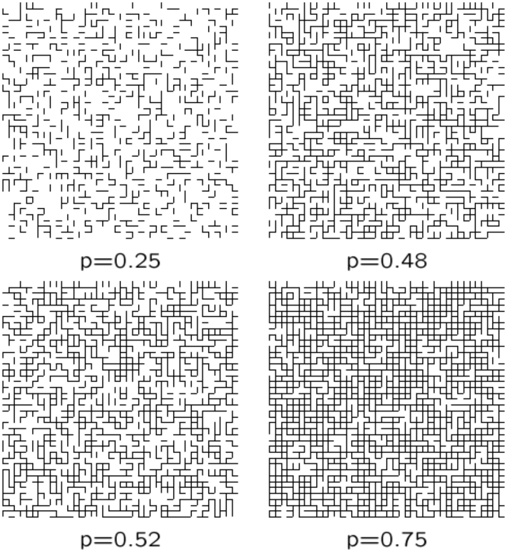
- $\theta(p) = 0$ per $p < p_c$
- $\theta(p) > 0$ per $p > p_c$

- In $d = 1$, cioè nel grafo unidimensionale, si ha $p_c = 1$
- In $d \geq 2$ dimensioni si ha $0 < p_c < 1$

Teorema

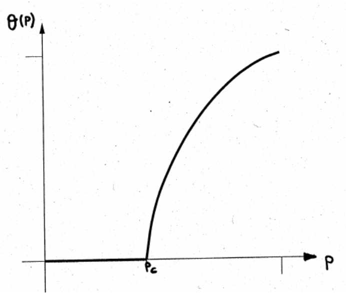
In $\mathbb{Z}^2$ il valore critico è $p_c = \frac{1}{2}$

Realizzazioni di percolazione in $\mathbb{Z}^2$ al variare di p

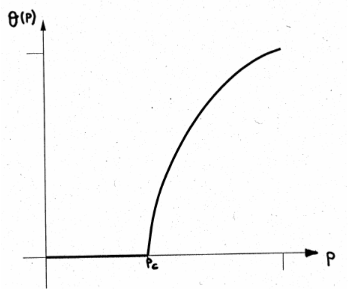


Funzione di Percolazione

Funzione di Percolazione

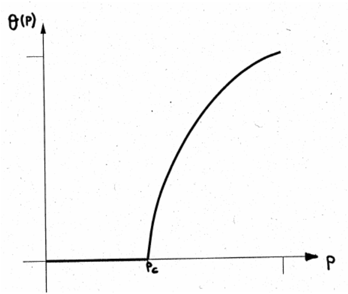


Funzione di Percolazione

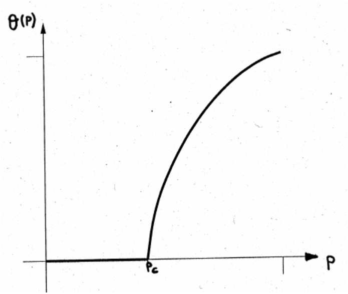


- Il valore della funzione di percolazione al valore critico è uno studio in materia molto interessante

Funzione di Percolazione



- Il valore della funzione di percolazione al valore critico è uno studio in materia molto interessante
- Si è mostrato che per $d = 2$ e $d \geq 19$ si ha $\theta(p_c) = 0$



- Il valore della funzione di percolazione al valore critico è uno studio in materia molto interessante
- Si è mostrato che per $d = 2$ e $d \geq 19$ si ha $\theta(p_c) = 0$
- Per valori intermedi di d è uno studio ancora aperto

Due risultati fondamentali

Due risultati fondamentali

Teorema

La funzione di percolazione $\theta(p)$ è:

- *continua da destra in* $[0, 1]$
- *continua in* $(p_c, 1]$

Due risultati fondamentali

Teorema

La funzione di percolazione $\theta(p)$ *è:*

- *continua da destra in* $[0, 1]$
- *continua in* $(p_c, 1]$

Teorema

Con probabilità 1, *se esiste un cluster infinito allora esso è unico.*

Due risultati fondamentali

Teorema

La funzione di percolazione $\theta(p)$ è:

- *continua da destra in* $[0, 1]$
- *continua in* $(p_c, 1]$

Teorema

Con probabilità 1*, se esiste un cluster infinito allora esso è unico.*

- Entrambi questi risultati valgono in $\mathbb{Z}^d$ per ogni d

Cenni di Dimostrazione

Cenni di Dimostrazione

- In $\mathbb{Z}^2$ vi sono anche stime del valore critico più immediate e rapide da dimostrare:

Cenni di Dimostrazione

- In $\mathbb{Z}^2$ vi sono anche stime del valore critico più immediate e rapide da dimostrare:

Se $p < \frac{1}{3}$ abbiamo $\theta(p) = 0$

Se $p > \frac{2}{3}$ abbiamo $\theta(p) > 0$

Se $p < \frac{1}{3}$ abbiamo $\theta(p) = 0$

Se $p < \frac{1}{3}$ abbiamo $\theta(p) = 0$

- Sia N il numero di cammini autoevitanti passanti per l'origine lunghi n composti solo da tratti aperti

Se $p < \frac{1}{3}$ abbiamo $\theta(p) = 0$

- Sia N il numero di cammini autoevitanti passanti per l'origine lunghi n composti solo da tratti aperti

- $E[N] \leq 4 \cdot 3^{n-1} p^n = \dfrac{4}{3}(3p)^n$

Se $p < \frac{1}{3}$ abbiamo $\theta(p) = 0$

- Sia N il numero di cammini autoevitanti passanti per l'origine lunghi n composti solo da tratti aperti
- $E[N] \leq 4 \cdot 3^{n-1} p^n = \dfrac{4}{3}(3p)^n$
- Sia $F_n = \{N \geq 1\}$

Se $p < \frac{1}{3}$ abbiamo $\theta(p) = 0$

- Sia N il numero di cammini autoevitanti passanti per l'origine lunghi n composti solo da tratti aperti

- $E[N] \leq 4 \cdot 3^{n-1} p^n = \dfrac{4}{3}(3p)^n$

- Sia $F_n = \{N \geq 1\}$

- $P_p(F_n) = P_p(N \geq 1) \leq E[N] = \dfrac{4}{3}(3p)^n$

Se $p < \frac{1}{3}$ abbiamo $\theta(p) = 0$

- Sia N il numero di cammini autoevitanti passanti per l'origine lunghi n composti solo da tratti aperti
- $E[N] \leq 4 \cdot 3^{n-1} p^n = \frac{4}{3}(3p)^n$
- Sia $F_n = \{N \geq 1\}$
- $P_p(F_n) = P_p(N \geq 1) \leq E[N] = \frac{4}{3}(3p)^n$
- Se $p < \frac{1}{3}$ avrò $P_p(F_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Se $p < \frac{1}{3}$ abbiamo $\theta(p) = 0$

- Sia N il numero di cammini autoevitanti passanti per l'origine lunghi n composti solo da tratti aperti
- $E[N] \leq 4 \cdot 3^{n-1} p^n = \dfrac{4}{3}(3p)^n$
- Sia $F_n = \{N \geq 1\}$
- $P_p(F_n) = P_p(N \geq 1) \leq E[N] = \dfrac{4}{3}(3p)^n$
- Se $p < \dfrac{1}{3}$ avrò $P_p(F_n) \xrightarrow{n \to \infty} 0$
- Siccome $\{|C_0| = \infty\} \subseteq F_n \; \forall n$, avrò che $\theta(p) = P_p(|C_0| = \infty) = 0$

Grafo Duale

Grafo Duale

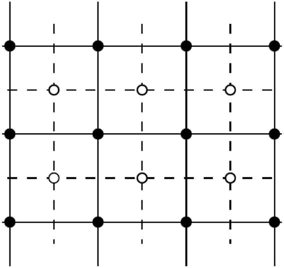
- Il grafo duale è $(\mathbb{Z}^2)^* = \mathbb{Z}^2 + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

Grafo Duale

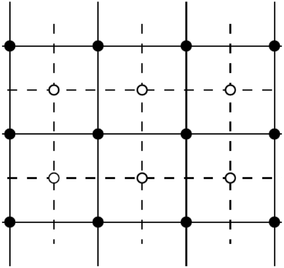
- Il grafo duale è $(\mathbb{Z}^2)^* = \mathbb{Z}^2 + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
- Un tratto in $(\mathbb{Z}^2)^*$ è aperto se il corrispondente in $\mathbb{Z}^2$ è aperto

Grafo Duale

- Il grafo duale è $(\mathbb{Z}^2)^* = \mathbb{Z}^2 + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
- Un tratto in $(\mathbb{Z}^2)^*$ è aperto se il corrispondente in $\mathbb{Z}^2$ è aperto



- Il grafo duale è $(\mathbb{Z}^2)^* = \mathbb{Z}^2 + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
- Un tratto in $(\mathbb{Z}^2)^*$ è aperto se il corrispondente in $\mathbb{Z}^2$ è aperto

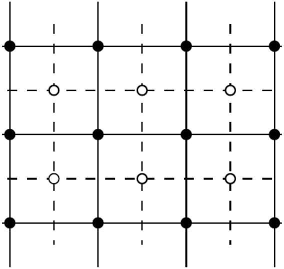


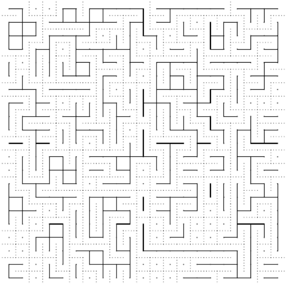
Lemma

$|C_0| < \infty \Leftrightarrow \exists$ un circuito in $(\mathbb{Z}^2)^*$ che circonda 0 composto solo da tratti chiusi

Grafo Duale

- Il grafo duale è $(\mathbb{Z}^2)^* = \mathbb{Z}^2 + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
- Un tratto in $(\mathbb{Z}^2)^*$ è aperto se il corrispondente in $\mathbb{Z}^2$ è aperto





Lemma

$|C_0| < \infty \Leftrightarrow \exists$ un circuito in $(\mathbb{Z}^2)^*$ che circonda 0 composto solo da tratti chiusi

Se $p > \frac{2}{3}$ abbiamo $\theta(p) > 0$

Se $p > \frac{2}{3}$ abbiamo $\theta(p) > 0$

- Sia N il numero di circuiti in $(\mathbb{Z}^2)^*$ lunghi n che circondano 0 composti da tratti chiusi

Se $p > \frac{2}{3}$ abbiamo $\theta(p) > 0$

- Sia N il numero di circuiti in $(\mathbb{Z}^2)^*$ lunghi n che circondano 0 composti da tratti chiusi
- $E[N] \leq n \cdot 4 \cdot 3^{n-2} \cdot (1-p)^n$

Se $p > \frac{2}{3}$ abbiamo $\theta(p) > 0$

- Sia N il numero di circuiti in $(\mathbb{Z}^2)^*$ lunghi n che circondano 0 composti da tratti chiusi
- $E[N] \leq n \cdot 4 \cdot 3^{n-2} \cdot (1-p)^n$
- Sia $F_n = \{N \geq 1\}$

Se $p > \frac{2}{3}$ abbiamo $\theta(p) > 0$

- Sia N il numero di circuiti in $(\mathbb{Z}^2)^*$ lunghi n che circondano 0 composti da tratti chiusi
- $E[N] \leq n \cdot 4 \cdot 3^{n-2} \cdot (1-p)^n$
- Sia $F_n = \{N \geq 1\}$
- $P_p(|C_0| < \infty) = P_p(\bigcup_{n=4}^{\infty} F_n) \leq \sum_{n=4}^{\infty} P_p(N \geq 1) \leq \sum_{n=4}^{\infty} E[N]$

Se $p > \frac{2}{3}$ abbiamo $\theta(p) > 0$

- Sia N il numero di circuiti in $(\mathbb{Z}^2)^*$ lunghi n che circondano 0 composti da tratti chiusi
- $E[N] \leq n \cdot 4 \cdot 3^{n-2} \cdot (1-p)^n$
- Sia $F_n = \{N \geq 1\}$
- $P_p(|C_0| < \infty) = P_p(\bigcup_{n=4}^{\infty} F_n) \leq \sum_{n=4}^{\infty} P_p(N \geq 1) \leq \sum_{n=4}^{\infty} E[N]$
- $\sum_{n=4}^{\infty} E[N] \leq \sum_{n=4}^{\infty} n \cdot 4 \cdot 3^{n-2} \cdot (1-p)^n = \frac{4}{9} \sum_{n=4}^{\infty} n \cdot (3(1-p))^n$

Se $p > \frac{2}{3}$ abbiamo $\theta(p) > 0$

- Sia N il numero di circuiti in $(\mathbb{Z}^2)^*$ lunghi n che circondano 0 composti da tratti chiusi
- $E[N] \leq n \cdot 4 \cdot 3^{n-2} \cdot (1-p)^n$
- Sia $F_n = \{N \geq 1\}$
- $P_p(|C_0| < \infty) = P_p(\bigcup_{n=4}^{\infty} F_n) \leq \sum_{n=4}^{\infty} P_p(N \geq 1) \leq \sum_{n=4}^{\infty} E[N]$
- $\sum_{n=4}^{\infty} E[N] \leq \sum_{n=4}^{\infty} n \cdot 4 \cdot 3^{n-2} \cdot (1-p)^n = \frac{4}{9} \sum_{n=4}^{\infty} n \cdot (3(1-p))^n$
- Dunque per p vicino a 1 la sommatoria è < 1 e quindi $\theta(p) = P_p(|C_0| = \infty) > 0$

Unicità del Cluster Infinito

Unicità del Cluster Infinito

Lemma

Se un evento è invariante per traslazione allora la sua probabilità è 0 o 1

Unicità del Cluster Infinito

Lemma

Se un evento è invariante per traslazione allora la sua probabilità è 0 o 1

- Supponiamo esista almeno un cluster infinito (cioè $\theta(p) > 0$) e definiamo $\forall k \in \mathbb{N}$ l'evento $E_k =$ "Il numero di clusters infiniti è esattamente k"

Unicità del Cluster Infinito

Lemma

Se un evento è invariante per traslazione allora la sua probabilità è 0 o 1

- Supponiamo esista almeno un cluster infinito (cioè $\theta(p) > 0$) e definiamo $\forall k \in \mathbb{N}$ l'evento E_k = "Il numero di clusters infiniti è esattamente k"
- Gli E_k sono invarianti per traslazione quindi $\forall k$ $P_p(E_k) = 0$ o $P_p(E_k) = 1$

Unicità del Cluster Infinito

Lemma

Se un evento è invariante per traslazione allora la sua probabilità è 0 o 1

- Supponiamo esista almeno un cluster infinito (cioè $\theta(p) > 0$) e definiamo $\forall k \in \mathbb{N}$ l'evento $E_k =$ "Il numero di clusters infiniti è esattamente k"
- Gli E_k sono invarianti per traslazione quindi $\forall k$ $P_p(E_k) = 0$ o $P_p(E_k) = 1$
- In particolare gli E_k sono disgiunti e la loro unione dà l'intero spazio di probabilità

Unicità del Cluster Infinito

Lemma

Se un evento è invariante per traslazione allora la sua probabilità è 0 o 1

- Supponiamo esista almeno un cluster infinito (cioè $\theta(p) > 0$) e definiamo $\forall k \in \mathbb{N}$ l'evento $E_k =$ "Il numero di clusters infiniti è esattamente k"
- Gli E_k sono invarianti per traslazione quindi $\forall k$ $P_p(E_k) = 0$ o $P_p(E_k) = 1$
- In particolare gli E_k sono disgiunti e la loro unione dà l'intero spazio di probabilità
- Quindi $\exists k$ tale che $P_p(E_k) = 1$

Unicità del Cluster Infinito

Unicità del Cluster Infinito

- Fissiamo arbitrariamente $k = 3$ e supponiamo $P_p(E_3) = 1$

- Fissiamo arbitrariamente $k = 3$ e supponiamo $P_p(E_3) = 1$
- Definiamo F_M l'evento: "Ci sono 3 clusters infiniti e ognuno interseca $[-M, M] \times [-M, M]$"

Unicità del Cluster Infinito

- Fissiamo arbitrariamente $k = 3$ e supponiamo $P_p(E_3) = 1$
- Definiamo F_M l'evento: "Ci sono 3 clusters infiniti e ognuno interseca $[-M, M] \times [-M, M]$"
- $F_1 \subseteq F_2 \subseteq F_3 \subseteq ...$ e $\bigcup_i F_i = E_3$; quindi $P_p(F_i) \xrightarrow{i \to \infty} 1$.

Unicità del Cluster Infinito

- Fissiamo arbitrariamente $k = 3$ e supponiamo $P_p(E_3) = 1$
- Definiamo F_M l'evento: "Ci sono 3 clusters infiniti e ognuno interseca $[-M, M] \times [-M, M]$"
- $F_1 \subseteq F_2 \subseteq F_3 \subseteq \ldots$ e $\bigcup_i F_i = E_3$; quindi $P_p(F_i) \xrightarrow{i \to \infty} 1$.
- Possiamo dunque scegliere M tale che $P_p(F_M) > 0$

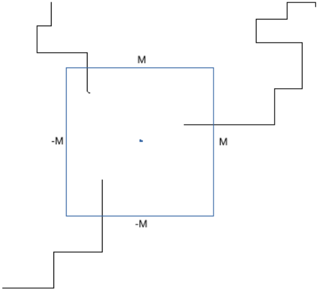
Unicità del Cluster Infinito

Unicità del Cluster Infinito

- Ricordiamo che $E_k =$ “Il numero di clusters infiniti è esattamente k”

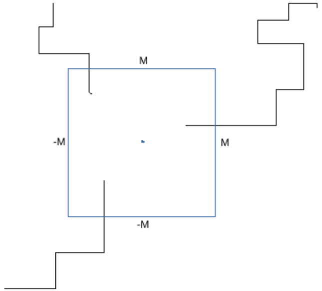
Unicità del Cluster Infinito

- Ricordiamo che E_k = "Il numero di clusters infiniti è esattamente k"



Unicità del Cluster Infinito

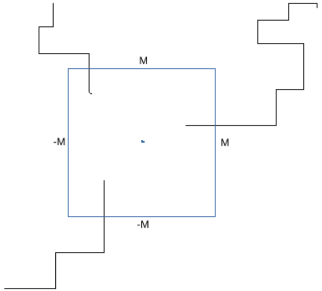
- Ricordiamo che E_k = "Il numero di clusters infiniti è esattamente k"



- $P_p(E_1) > 0 \longrightarrow$ assurdo!

Unicità del Cluster Infinito

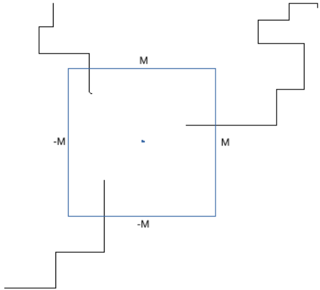
- Ricordiamo che E_k = "Il numero di clusters infiniti è esattamente k"



- $P_p(E_1) > 0 \longrightarrow$ assurdo!

Non ci può essere un numero finito >1 di clusters infiniti

- Ricordiamo che $E_k =$ "Il numero di clusters infiniti è esattamente k"



- $P_p(E_1) > 0 \longrightarrow$ assurdo!

Non ci può essere un numero finito >1 di clusters infiniti

- Prima di concludere che vi è esattamente 1 cluster infinito bisognerebbe escludere che ve ne siano infiniti

GRAZIE PER L'ATTENZIONE