Lezione 3

- Operatori di Malliavin in dimensione uno
- Applicazioni:
  - disuguaglianze di Poincaré

Il tema principale della 1ª parte del corso e' l'approssimazione Gaussiana.

Data $N \sim \mathcal{N}(0,1)$ e F una s.a.,
siamo interessati a stimare questa quantita'

$$d_{\mathcal{H}}(F,N) := \sup_{h \in \mathcal{H}} \left| \mathbb{E}[h(F)] - \mathbb{E}[h(N)] \right| \quad (*)$$

dove $\mathcal{H}$ e' una classe separante.

Nella Lezione 2 abbiamo parlato del metodo di Stein che ci permette di stimare $(*)$ per mezzo di operatori differenziali

$$d_{\mathcal{H}}(F,N) \leq \sup_{g \in \mathcal{Y}_{\mathcal{H}}} \left| \mathbb{E}[g'(F) - Fg(F)] \right|$$

Nel caso di classi separanti "speciali" $(\mathcal{H}_{Kol}, \mathcal{H}_{TV}, \mathcal{H}_{W}, \ldots)$ abbiamo specificato chi e' $\mathcal{Y}_{\mathcal{H}}$. In genere, e' un insieme di funzioni sufficientemente regolari t.c. $\|g\|_\infty \leq c_{\mathcal{H}}$, $\|g'\|_\infty \leq c'_{\mathcal{H}}$ con $c_{\mathcal{H}}, c'_{\mathcal{H}} \in (0,+\infty)$.

2

Focalizziamoci ora sul caso $F=f(N)$, con f una funzione deterministica sufficientemente regolare. Perché?

1. Nelle applicazioni si incontrano spesso "oggetti" di questo tipo;

2. Aggiungendo "più struttura" abbiamo "più strumenti" per lavorare al problema e quindi si possono ottenere "più risultati".

Gli "strumenti" accennati al punto 2. sono gli operatori di Malliavin (che agiscono su v.a. del tipo $f(N)$, con f sufficientemente regolare deterministica).

Vediamo che risultati otteniamo per l'approssimaz. Gaussiana unendo metodo di Stein e il calcolo di Malliavin.

$$d_{\mathcal{H}}(f(N),N) \leq \sup_{g\in \mathcal{G}_{\mathcal{H}}} \left| \mathbb{E}\left[g'(f(N)) - f(N)g(f(N))\right]\right|$$

$\leq$?

La connessione esplicita tra metodo di Stein e calcolo di Malliavin fu stabilita da I. Nourdin e G. Peccati (PTRF, 2009)

Operatori di Malliavin in dim 1

Sono operatori che agiscono su v.a. della forma $f(N)$, con $N \sim N(0,1)$ e f deterministica sufficientemente regolare.

Idea Definiremo gli operatori su una "classe semplice" di v.a. e poi li estenderemo.
Per "classe semplice" intendo v.a. del tipo $f(N)$ con f un polinomio o, più in generale, una fnz regolare che "all'infinito si comporta come un polinomio".

Sia γ la densità Gaussiana standard.

Proposizione Il sottospazio lineare generato dai monomi

$$M := \text{span}\{x^n,\ n \geq 0\}$$

è denso in $L^q(\gamma)$ $\forall q \in [1, +\infty)$.

Teorema di Hahn-Banach

Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno sp. normato e $M \subset X$ sottospazio.
Sia $f : M \to \mathbb{R}$ un funzionale lineare e continuo su M, allora $\exists$ un funzionale $F \in X^*$ t.c.

$$\begin{cases} F|_M = f \\ \|F\| = \|f\| \end{cases}$$

Corollario Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno sp. normato e $M \subset X$ un sottospazio chiuso. Sia $x_0 \notin M$. Allora $\exists$ $F \in X^*$ t.c.

$$\begin{cases} F(x_0) = 1 \\ F|_M = 0 \\ \|F\| = 1/d_M(x_0) := \inf_{y \in M} \|x_0 - y\| \end{cases}$$

Dunque un sottospazio $M \subset X$ e' denso se e solo $\forall F \in X^*$ t.c. $F|_M = 0 \Rightarrow F$ e' il funzionale nullo

Sia $(A, \mathcal{A}, \mu)$ uno sp di misura σ-finito.

Teorema di rappresentazione di Riesz

Siano $q \in [1, +\infty)$ e $p \in (1, +\infty]$ t.c. $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$.
Allora

$$L^q(\mu)^* \simeq L^p(\mu) \quad \text{(isometricamente isomorfo)}$$

L'isometria è: $g \in L^p(\mu)$, considero il funzionale

5

$$T_g : L^q(\mu) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f \mapsto \int_A fg \, d\mu .$$

Osservazione Il duale di $L^\infty(\mu)$ non è $\simeq L^1(\mu)$.

Ora possiamo dimostrare che $\forall q \in [1, +\infty)$

$$\overline{M}^{\|\cdot\|_{L^q(\gamma)}} = \overline{\text{span}\{x^n, n \geq 0\}}^{\|\cdot\|_{L^q(\gamma)}} = L^q(\gamma) .$$

dimostrazione Basta dimostrare che $\forall F \in L^q(\gamma)^* \simeq L^p(\gamma)$ con $p \in (1, +\infty]$ t.c. $F|_M = 0 \Rightarrow F = 0$.

Ossia basta dimostrare che $\forall \eta \in (1, +\infty]$, $\forall g \in L^\eta(\gamma)$ t.c. $\int_{\mathbb{R}} g(x) x^n \, d\gamma(x) = 0 \Rightarrow g = 0$ γ-q.o.

Dimostriamo che $\int_{\mathbb{R}} g(x) e^{itx} \, d\gamma(x) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

quindi per l'iniettività della trasformata di Fourier si ha che $g = 0$ q.o.

Scriviamo $e^{itx} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(itx)^k}{k!}$; se potessimo scambiare limite e integrale avremmo

$$\forall t \in \mathbb{R}, \int_{\mathbb{R}} g(x) e^{itx} \, d\gamma(x) = \lim_{m \to +\infty} \sum_{k=0}^{m} \frac{(it)^k}{k!} \overbrace{\int_{\mathbb{R}} g(x) x^k \, d\gamma(x)}^{0 \ \forall k \geq 0}$$
$$= 0$$

Possiamo davvero scambiare limite e integrale, infatti

$\forall t \in \mathbb{R}$
$\forall x \in \mathbb{R}$
$\forall m \geq 0$

$$\left| g(x) \sum_{k=0}^{m} \frac{(itx)^k}{k!} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \right| \leq |g(x)| \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{m} \frac{|tx|^k}{k!}$$

$$= |g(x)| \frac{e^{-x^2/2 + |tx|}}{\sqrt{2\pi}} \in L^1(\mathbb{R})$$

- $$\int_{\mathbb{R}} |g(x)| \frac{e^{-x^2/2 + |tx|}}{\sqrt{2\pi}} dx = \int_{\mathbb{R}} |g(x)| e^{|tx|} d\gamma(x)$$

$$\underset{\text{Hölder}}{\leq} \|g\|_{L^\eta(\gamma)} \left\| e^{|t\cdot|} \right\|_{L^{\eta/\eta-1}(\gamma)} < +\infty, \text{ con}$$

la convenzione che se $\eta = \infty$, allora $\frac{\infty}{\infty - 1} = 1$

Applichiamo dunque il teorema della convergenza dominata. □

6

Funzioni regolari

$\mathcal{S} := \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ C^\infty$ t.c. f e ogni sua derivata abbia crescita al più polinomiale $\}$

Ovviamente $\text{span}\{ x^n, n \geq 0 \} \subset \mathcal{S} \Rightarrow$
$\mathcal{S}$ e' denso in $L^q(\gamma) \ \forall q \in [1, +\infty)$.

Derivate di Malliavin

Sia $p = 1, 2, \ldots$ Data $f \in \mathcal{S}$ una funzione regolare, definiamo la derivata p-esima di Malliavin di f come

$$D^p f := f^{(p)} \text{ la } p\text{-esima derivata}$$

di f in senso usuale. Ovviamente $D^p f \in \mathcal{S}$ $\forall f \in \mathcal{S}$.

Lemma L'operatore $D^p: \mathcal{S} \subset L^q(\gamma) \longrightarrow L^q(\gamma)$ e' chiudibile $\forall q \in [1,+\infty)$ e $\forall p = 1, 2, \dots$

Osservazioni · D^p e' un operatore lineare su $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}$ e' denso in $L^q(\gamma)$. Se D^p fosse limitato su $\mathcal{S}$ allora si estenderebbe in modo unico a un operatore lineare e limitato su $L^q(\gamma)$.

· D^p non e' limitato su $\mathcal{S} \subset L^q(\gamma)$. Ad esempio per $q=2$ e $p=1$. Prendiamo $f_n(x) := x^n$, $n \geq 1$. Si ha

$$\frac{\|Df_n\|_{L^2(\gamma)}}{\|f_n\|_{L^2(\gamma)}} \xrightarrow[m \to +\infty]{} +\infty$$

infatti $\|f_m\|^2_{L^2(\gamma)} = \int_{\mathbb{R}} x^{2m} \, d\gamma(x) = (2m-1)!!$

e $\|Df_m\|^2_{L^2(\gamma)} = \int_{\mathbb{R}} m^2 x^{2(m-1)} \, d\gamma(x) = m^2 (2m-3)!!$

dunque $$\frac{\|Df_n\|_{L^2(\gamma)}}{\|f_n\|_{L^2(\gamma)}} = \sqrt{\frac{m^2 (2m-3)!!}{(2m-1)!!}} = \sqrt{\frac{m^2}{2m-1}} \xrightarrow[m \to +\infty]{} +\infty$$

Operatori chiusi | chiudibili

X, Y sp. di Banach

$T : D(T) \subset X \to Y$ con $D(T) \equiv$ dominio di T

T operatore lineare (T e' detto unbounded operator)

Se · T e' limitato su $D(T)$

· $D(T)$ e' denso in X

allora T si estende in modo unico a un funzionale lineare e limitato su X.

Se T non e' limitat su $D(T)$, tale estensione non esiste.

Un'altra proprieta' importante e' quella di essere chiusi | chiudibili.

Definizione $T : D(T) \subset X \to Y$ lineare e' un operatore chiuso se $\forall \, (x_n)_n \subset D(T)$

t.c. $\quad x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{X} x \quad$ e $\quad Tx_n \xrightarrow[n]{Y} y$

si ha

- $x \in D(T)$
- $Tx = y$

Definizione $T : D(T) \subset X \to Y$ operatore lineare.
T è **chiudibile** se esiste un'estensione chiusa

Osservazione Se T è limitato, allora è chiudibile.
Se T non è limitato su $D(T)$, non è detto.

Criterio $T : D(T) \subset X \to Y$ lineare, è chiudibile se e solo se $\forall (x_n)_n \subset D(T)$: $x_n \xrightarrow[n]{X} 0$ e $Tx_n \xrightarrow[n]{Y} y$ si ha $y = 0$.

Osservazioni 1. Se metto su $D(T)$ la norma del grafico, **T è chiuso se e solo se $D(T)$ è completo rispetto alla norma del grafico**

2. Se T è chiudibile, il dominio dell'estensione chiusa $\overline{T}$

$$D(\overline{T}) = \{ x \in X : \exists (x_n)_n \subset D(T) \text{ con } x_n \xrightarrow[n]{X} x \text{ e } (Tx_n)_n \text{ converge} \}$$

e si pone $\overline{T}x := \lim_n Tx_n$.

Possiamo ora dimostrare che

$$D^p : S \subset L^q(\gamma) \to L^q(\gamma) \text{ è chiudibile}$$

$\forall q \in [1, +\infty)$, $p = 1, 2, \dots$

dimostrazione • Supponiamo $q \in (1, +\infty)$. Dobbiamo dimostrare che se $(f_n)_n \subset \mathcal{S}$: (i) $f_m \xrightarrow[m]{L^q(\gamma)} 0$ e

(ii) $D^p f_m \xrightarrow[m]{L^q(\gamma)} \eta$

allora $\eta = 0$ γ-q.o.

Vedo $\eta \in L^q(\gamma)$ come un elemento di $L^{\tilde{q}}(\gamma)^*$ con $\tilde{q} \in (1, +\infty)$ t.c. $\frac{1}{\tilde{q}} + \frac{1}{q} = 1$.

Dato che $\mathcal{S}$ e' denso in $L(\gamma)$, basta dimostrare che

$$\forall g \in \mathcal{S}, \int_{\mathbb{R}} \eta(x)\, g(x)\, d\gamma(x) = 0$$

per dedurre che $\eta = 0$ γ-q.o.

Sia $g \in \mathcal{S}$, definiamo $\delta^p g$ iterativamente così:

$$\delta^1 g(x) = \delta g(x) := x g(x) - g'(x)$$ δ è legato al lemma di Stein

e $\delta^r g := \delta^1 \delta^{r-1} g = \delta^{r-1} \delta^1 g$, $r = 2, \ldots, p$

Ora scriviamo $\left(\eta \in L^q(\gamma),\ q \in (1, +\infty),\ g \in \mathcal{S}\right)$

$$\int_{\mathbb{R}} \eta(x)\, g(x)\, d\gamma(x) = \lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} D^p f_n(x)\, g(x)\, d\gamma(x)$$

Infatti: $\left| \int_{\mathbb{R}} (D^p f_n - \eta)\, g\, d\gamma \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |D^p f_n - \eta|\, |g|\, d\gamma$

$$\underset{\text{Hölder}}{\leq} \underbrace{\| D^p f_m - \eta \|_{L^q(\gamma)}}_{\to 0 \ m \to +\infty} \underbrace{\| g \|_{L^{\frac{q}{q-1}}(\gamma)}}_{< +\infty \text{ perché } g \in \mathcal{S}} \quad (q \in (1, +\infty))$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} (D^{p-1} f_n)' g \, d\gamma$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left[\int_{\mathbb{R}} (D^{p-1} f_n \cdot g)' \, d\gamma - \int_{\mathbb{R}} D^{p-1} f_n \cdot g' \, d\gamma \right]$$

$$\overset{\text{lemma di Stein}}{=} \lim_{n\to+\infty} \left[\int_{\mathbb{R}} x \, D^{p-1} f_n(x) \, g(x) \, d\gamma(x) - \int_{\mathbb{R}} D^{p-1} f_n \cdot g' \, d\gamma \right]$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} D^{p-1} f_n(x) \, \delta g(x) \, d\gamma(x)$$

$$= \dots \text{ (iterando) } = \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \, \delta^p g \, d\gamma$$

$$= 0$$

Infatti: $\left| \int_{\mathbb{R}} f_n \, \delta^p g \, d\gamma \right| \underset{\text{Hölder}}{\leq} \underbrace{\| f_n \|_{L^q(\gamma)}}_{\xrightarrow{n\to+\infty} 0} \underbrace{\| \delta^p g \|_{L^{q/q-1}(\gamma)}}_{<+\infty \text{ perché } \delta^p g \in \mathcal{S}}$

Esercizio

Dimostrare che $D^p : \mathcal{S} \subset L^1(\gamma) \to L^1(\gamma)$ è chiudibile.

$\square$

Estensione chiusa

Abbiamo dimostrato che $\forall q \in [1,+\infty)$, $\forall p = 1, 2, \dots$

$$D^p : S \subset L^q(\gamma) \longrightarrow L^q(\gamma)$$

e' chiudibile.

Consideriamo su S la norma

$$\|f\|_{\mathbb{D}^{p,q}} := \left(\int |f|^q d\gamma + \int |f'|^q d\gamma + \dots + \int |f^{(p)}|^q d\gamma \right)^{1/q}$$

e lo spazio

$$\mathbb{D}^{p,q} := \overline{S}^{\|\cdot\|_{\mathbb{D}^{p,q}}}$$

$\mathbb{D}^{p,q}$ e' il dominio della derivata p-esima di Malliavin associata alla norma $L^q(\gamma)$.

Osservazioni 1. $f \in \mathbb{D}^{p,q}$ se e solo se $\exists (f_n)_n \subset S$ t.c.

- $f_m \xrightarrow[m]{} f$ in $L^q(\gamma)$
- $(f_m^{(j)})_m$ e' di Cauchy $\forall j = 1, \dots, p$

Si pone, per $j = 1, \dots, p$,

$$D^j f := \lim_m f_m^{(j)} \quad \text{in } L^q(\gamma).$$

2. Si ha $\quad \mathbb{D}^{p+m,\, q+\varepsilon} \subseteq \mathbb{D}^{p,q} \quad \forall\, \varepsilon, m \geq 0$

Poniamo $\quad \mathbb{D}^{\infty,q} := \bigcap_{p \geq 1} \mathbb{D}^{p,q}$

13

Definizione $q \in [1, +\infty)$, $p = 1, 2, \dots$

$D^p : \mathbb{D}^{p,q} \longrightarrow L^q(\gamma)$ è la derivata p-esima di Malliavin associata alla norma $L^q(\gamma)$.

Si può far vedere che su $\mathbb{D}^{p,q}$ la norma $\|\cdot\|_{\mathbb{D}^{p,q}}$ e la norma $\|\cdot\|_{p,q}$ definita da

$$\|f\|_{p,q} := \|f\|_{L^q(\gamma)} + \|f^{(p)}\|_{L^q(\gamma)}$$

sono equivalenti (Hooton, JMAA 1981 ⊕ argomenti di compattezza simili a quelli su Adams, 1975).

Quindi $D^p : \mathbb{D}^{p,q} \longrightarrow L^q(\gamma)$ è un'estensione chiusa di $D^p : \mathcal{S} \subset L^q(\gamma) \to L^q(\gamma)$. (la minimale)

Osservazioni 1. $\mathbb{D}^{p,q}$ è di Banach
2. $\mathbb{D}^{p,2}$ è di Hilbert

Operatori aggiunti X, Y sp di Hilbert

$T : D(T) \subset X \to Y$ lineare densamente definito

Definizione Il dominio $\mathrm{dom}(T^*)$ dell'operatore aggiunto T^* è dato da

$$\mathrm{dom}(T^*) = \{ y \in Y \text{ t.c. } \exists\, c \in [0,+\infty) : |\langle Tx, y\rangle| \leq c\|x\|_X \ \forall x \in D(T) \}$$ 14

Osservazione Se $y \in \mathrm{dom}(T^*)$, la mappa

$$D(T) \ni x \longmapsto \langle Tx, y\rangle$$

e' lineare e limitata su $D(T)$ (che e' denso in X), dunque si estende in modo unico a un funzionale lineare e continuo su X, dunque $\exists!$ elemento in X, che chiamo T^*y t.c.

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle \quad \forall x \in D(T).$$

Definizione L'aggiunto T^* di T e'

$$T^* : \mathrm{dom}(T^*) \subset Y \longrightarrow X$$
$$y \longmapsto T^*y$$

dove T^*y e' l'unico elemento di X t.c.

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle \quad \forall x \in D(T).$$

Operatore di derivata

Abbiamo, per $q=2$, $\mathbb{D}^{p,q}$ uno sp di Hilbert e

$$D^p : \mathcal{S} \subset \mathbb{D}^{p,2} \subset L^2(\gamma) \longrightarrow L^2(\gamma)$$ Hilbert

un operatore lineare densamente definito.

Possiamo definire l'operatore divergenza δ^p.

Si ha: $\mathrm{dom}(\delta^p) := \Big\{ g \in L^2(\gamma) \text{ t.c. } \exists\, c \in [0,+\infty) :$

$$\left| \int_{\mathbb{R}} D^p f \cdot g \, d\gamma \right| \le c \, \|f\|_{L^2(\gamma)} \quad \underbrace{\forall f \in \mathcal{S}}_{\text{equivalentemente, } \forall f \in \mathbb{D}^{p,2}} \Big\}$$

Definizione L'operatore divergenza δ^p e'

$$\delta^p : \mathrm{dom}(\delta^p) \subset L^2(\gamma) \longrightarrow L^2(\gamma)$$
$$g \longmapsto \delta^p g$$

dove $\delta^p g$ e' l'unico elemento di $L^2(\gamma)$ t.c.

$$(*) \quad \int_{\mathbb{R}} D^p f \cdot g \, d\gamma = \int f \cdot \delta^p g \, d\gamma \quad \forall f \in \mathcal{S}$$

formula della dualita'

(equivalentemente $\forall f \in \mathbb{D}^{p,2}$)

Osservazioni 1. f costante ($f \in \mathcal{S}$), allora $\forall p = 1, 2, \dots$

da $(*)$ $\quad \int_{\mathbb{R}} \delta^p g \, d\gamma = 0 \quad \forall g \in \mathrm{dom}(\delta^p)$

2. δ^p e' chiuso perche' e' l'aggiunto di $D^p : \mathbb{D}^{p,2} \to L^2(\gamma)$

densamente definito ($\overline{\mathcal{S}} = \mathbb{D}^{p,2}$)

Esercizio Dimostrare che

$$\delta^p g = \delta(\delta^{p-1} g) = \delta^{p-1}(\delta g)$$

e $\delta^{p-1} g \in \mathrm{dom}(\delta)$, $\delta g \in \mathrm{dom}(\delta^{p-1})$

Osservazione Dal lemma di Stein, $\forall f, g \in \mathcal{S}$

$$\int_{\mathbb{R}} f' \cdot g \, d\gamma = \int_{\mathbb{R}} (f \cdot g)' \, d\gamma - \int_{\mathbb{R}} f \cdot g' \, d\gamma$$

$$= \int_{\mathbb{R}} x f(x) g(x) \, d\gamma - \int_{\mathbb{R}} f \cdot g' \, d\gamma$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(x) \left(x g(x) - g'(x) \right) d\gamma .$$

$\Rightarrow$ 1. $\mathcal{S} \subset \mathrm{dom}(\delta)$ perché data $g \in \mathcal{S}$, $\exists \, c \in [0, +\infty)$

$: \left| \int_{\mathbb{R}} f' \cdot g \, d\gamma \right| \leq c \, \|f\|_{L^2(\gamma)}$.

Basta prendere $c = \|\tilde{g}\|_{L^2(\gamma)}$, con $\tilde{g}(x) := x g(x) - g'(x)$

Sicuramente $\tilde{g} \in \mathcal{S} \Rightarrow \|\tilde{g}\|_{L^2(\gamma)} < +\infty$.

2. per $g \in \mathcal{S}$, $\delta g(x) = x g(x) - g'(x)$

3. per approssimazione, $\mathbb{D}^{1,2} \subset \mathrm{dom}(\delta)$

e $\delta g(x) = x g(x) - D g(x) \quad \forall g \in \mathbb{D}^{1,2}$

Più in generale $\mathbb{D}^{p,2} \subset \mathrm{dom}(\delta^p)$, $p = 1, 2, \ldots$

Operatore di Ornstein-Uhlenbeck

Definizione Il semigruppo di Ornstein-Uhlenbeck $(P_t)_{t \geq 0}$

è definito come segue: per $f \in \mathcal{S}$ e $t \geq 0$

$$P_t f(x) := \int_{\mathbb{R}} f\left(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}\, y\right) d\gamma(y), \quad x \in \mathbb{R}$$

$$= \mathbb{E}\left[f\left(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}\, N'\right)\right] \text{ con } N' \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Osservazioni: · Per $t=0$ e $f \in \mathcal{S}$ abbiamo

$$P_0 f(x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

· Per $t \to +\infty$ e $f \in \mathcal{S}$ abbiamo, dal teorema della CD,

$$P_\infty f(x) := \lim_{t \to +\infty} P_t f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)\, d\gamma(y) = \mathbb{E}[f(N')]$$

con $N' \sim \mathcal{N}(0,1)$.

· Per $q \in [1,+\infty)$, $f \in \mathcal{S}$, $t \geq 0$

$$\int_{\mathbb{R}} |P_t f(x)|^q \, d\gamma(x) = \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} f\left(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}\, y\right) d\gamma(y) \right|^q d\gamma(x)$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^2} \left| f\left(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}\, y\right) \right|^q d\gamma(x)\, d\gamma(y)$$

Jensen

$$= \int_{\mathbb{R}} |f(y)|^q \, d\gamma(y) < +\infty \text{ perché } f \in \mathcal{S}.$$

$\forall t \geq 0$, $e^{-t} N + \sqrt{1-e^{-2t}}\, N'$ con N, N' iid $\mathcal{N}(0,1)$

$\overset{d}{=} N$

Sia $q \in [1,+\infty)$.

Proposizione $\forall t \geq 0$, $P_t : \mathcal{S} \subset L^q(\gamma) \longrightarrow L^q(\gamma)$ si estende a un operatore di contrazione su $L^q(\gamma)$. 18

Infatti, sia $f \in L^q(\gamma)$, allora $\exists (f_n)_n \subset \mathcal{S}$: $f_m \xrightarrow[m]{} f$ in $L^q(\gamma) \Rightarrow (P_t f_n)_n \subset L^q(\gamma)$ e' di Cauchy. Pongo $P_t f := \lim_m P_t f_n$ in $L^q(\gamma)$ e ottengo $\|P_t f\|_{L^q(\gamma)} \leq \|f\|_{L^q(\gamma)}$

Proposizione $\forall s, t \geq 0$ si ha $P_t P_s = P_{t+s}$ su $L^1(\gamma)$

dimostrazione Per $f \in L^1(\gamma)$ si ha

$$P_t \underbrace{P_s f}_{\in L^1(\gamma)}(x) = \int_{\mathbb{R}^2} f\left(e^{-t-s}x + e^{-s}\sqrt{1-e^{-2t}}\,y + \sqrt{1-e^{-2s}}\,z\right) d\gamma(y)\, d\gamma(z)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f\left(e^{-s-t}x + \sqrt{1-e^{-2s-2t}}\,y\right) d\gamma(y)$$

$$= P_{t+s} f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Se N, N' sono iid $\sim N(0,1)$,

$$e^{-s}\sqrt{1-e^{-2t}}\,N + \sqrt{1-e^{-2s}}\,N' \overset{d}{=} \sqrt{1-e^{-2(s+t)}}\,N$$

Esercizio (Processo di O-U)

Sia $B = (B_t)_{t \geq 0}$ un moto Browniano.

Consideriamo l' EDS

$$\begin{cases} dX_t^x = \sqrt{2}\, dB_t - X_t^x\, dt, & t>0 \\ X_0^x = x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

La soluzione e' chiamata processo di O-U.

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, mostra che

$$X_t^x = e^{-t} x + \sqrt{2}\int_0^t e^{-(t-s)}\, dB_s, \quad t \geq 0$$

2. Per $f \in \mathcal{S}$, $x \in \mathbb{R}$, mostra che

$$P_t f(x) = \mathbb{E}[f(X_t^x)]$$

Ora vediamo come interagiscono P_t e D.

Proposizione Sia $f \in \mathbb{D}^{1,2}$ e $t \geq 0$. Allora $P_t f \in \mathbb{D}^{1,2}$ e $D P_t f = e^{-t} P_t D f$.

dimostrazione Supponiamo $f \in \mathbb{D}^{1,2}$, allora

$\exists (f_n)_n \subset \mathcal{S}$: $\quad f_n \xrightarrow[n]{} f$ in $L^2(\gamma)$

$(f_n')_n$ e' di Cauchy in $L^2(\gamma)$.

Allora $\quad P_t f_n \longrightarrow P_t f$ in $L^2(\gamma)$ e

$(e^{-t} P_t f_n')_n$ e' di Cauchy in $L^2(\gamma)$

dunque $P_t f \in \mathbb{D}^{1,2}$.

Sia ora $f \in \mathcal{S}$. Si ha

$$DP_t f(x) = e^{-t} \int_{\mathbb{R}} f'(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}\, y)\, d\gamma(y)$$

$$= e^{-t} P_t Df(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Con un argomento di approssimazione, dimostro che $DP_t f = e^{-t} P_t Df \quad \forall f \in \mathbb{D}^{1,2}$. $\square$

Generatore infinitesimale di $(P_t)_{t \geq 0}$ su $L^2(\gamma)$

Sia L il generatore infinitesimale di $(P_t)_{t \geq 0}$ su $L^2(\gamma)$.

desso l'avevo con l'aggiunto

Definizione Il dominio di L, dom L, e' definito come la collezione delle $f \in L^2(\gamma)$ per cui esiste

$$\lim_{h \to 0} \frac{P_h f - f}{h} \quad \text{in } L^2(\gamma).$$

Si pone, per $f \in \mathrm{dom}(L)$,

$$Lf := \lim_{h \to 0} \frac{P_h f - f}{h} \quad \text{in } L^2(\gamma).$$

Faremo vedere che $\mathcal{S} \subset \mathrm{dom}(L)$.

Osservazioni 1. Su $\mathcal{S}$ abbiamo, per $t \geq 0$,

$$\frac{d}{dt} P_t = \lim_{h \to 0} \frac{P_{t+h} - P_t}{h} = \lim_{h \to 0} P_t \frac{P_h - Id}{h} =$$

$$= P_t \lim_{h\to 0} \frac{P_h - Id}{h} = P_t L$$

e analogamente $\frac{d}{dt} P_t = L P_t$ su $\mathcal{S}$.

2. Per $f \in \mathcal{S}$, $x \in \mathbb{R}$ abbiamo ($f \in \mathcal{S} \Rightarrow$ possiamo scambiare tutto)

$$\frac{d}{dt} P_t f(x) = -x e^{-t} \int_{\mathbb{R}} f'(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}\, y)\, d\gamma(y)$$

$$+ \frac{e^{-2t}}{\sqrt{1-e^{-2t}}} \int_{\mathbb{R}} \overbrace{f'(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}\, y)}^{\text{fnz di } y}\, y\, d\gamma(y)$$

Lemma di Stein

$$= -x e^{-t} \int_{\mathbb{R}} f'(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}\, y)\, d\gamma(y)$$

$$+ e^{-2t} \int_{\mathbb{R}} f''(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}\, y)\, d\gamma(y)$$

In particolare, per $t=0$, $f \in \mathcal{S}$

$$L f = -x f'(x) + f''(x)$$

$\Rightarrow$ 1. $\mathcal{S} \subset \mathrm{dom}(L)$

2. su $\mathcal{S}$, $L = -\delta D$

Proposizione Per $f \in \mathcal{S}$,

$$L f = -\delta D f$$

Osservazione Processo di O-U

soluzione dell' EDS

$$\begin{cases} dX_t^x = \sqrt{2}\, dB_t - X_t^x\, dt & t>0 \\ X_0^x = x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Generatore infinitesimale

$$Lf(x) := \lim_{h\to 0} \frac{\mathbb{E}[f(X_h^x)] - f(x)}{h}$$

per le fnz f per cui il limite esiste $\forall x \in \mathbb{R}$.

Si può dim che $I := \{$ fnz C^2 a supporto compatto $\} \subset \operatorname{dom} L$

e per $f \in I$, $Lf(x) = -x f'(x) + \frac{1}{2} \cdot 2 f''(x)$

$$= -x f'(x) + f''(x)$$

Il fatto che, per $f \in S$ si ha $Lf = -\delta D f$ sembra innocuo ma porta a dimostrare la disuguaglianza di Poincaré (al I ordine).

Proposizione Sia $N \sim N(0,1)$ e $f \in \mathbb{D}^{1,2}$, allora

$$\operatorname{Var}(f(N)) \le \mathbb{E}[f'(N)^2]$$

Curiosità La disuguaglianza di Poincaré fu dimostrata nel 1956 da Nash e riscoperta da Chernoff nel 1981 (entrambe le dim usano i polin di Hermite).
La versione infinito-dimensionale fu dimostrata da Houdré e Pérez-Abreu nel 1995.
(la dim usa la decomp. caotica)
Nota anche agli analisti - sp di Sobolev pesati

dimostrazione Sia $f \in \mathcal{S}$.

$$\mathrm{Var}(f(N)) = \mathbb{E}\left[f(N)\left(f(N) - \mathbb{E}[f(N)]\right)\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[f(N)\left(P_0 f(N) - P_\infty f(N)\right)\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[f(N)\left(-\int_0^{+\infty}\left(\frac{d}{dt}P_t f\right)(N)\,dt\right)\right]$$

su $\mathcal{S}$ $\frac{d}{dt}P_t = LP_t = -\delta D P_t$

$$= -\int_0^{+\infty}\mathbb{E}\left[f(N)\left(\frac{d}{dt}P_t f\right)(N)\right]dt$$

$$= \int_0^{+\infty}\mathbb{E}\left[f(N)\left(\delta D P_t f\right)(N)\right]dt$$

$\mathbb{D}^{1,2} \subset \mathrm{dom}(\delta)$

$$= \int_0^{+\infty}\mathbb{E}\left[Df(N)\cdot DP_t f(N)\right]dt$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathbb{E}\left[Df(N)\,P_t Df(N)\right]dt$$

positiva perché parto da Var

$$\overset{C-S}{\leq} \int_0^{+\infty} e^{-t} \sqrt{\mathbb{E}[Df(N)^2]\,\mathbb{E}[P_t Df(N)^2]}\, dt$$

$$\overset{\text{contrazione}}{\leq} \int_0^{+\infty} e^{-t} \sqrt{\mathbb{E}[Df(N)^2]\,\mathbb{E}[Df(N)^2]}\, dt$$

$$= \mathbb{E}[Df(N)^2] \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt}_{=1} .$$

Per $f \in \mathbb{D}^{1,2}$, il risultato segue da un argomento di approssimazione.

Esercizio Dimostrare che per $f \in \mathcal{S}$

1. $(D\delta - \delta D) f = f$ (usa def di D e δ)

2. $\forall p \geq 2$ intero,

$$(D\delta^p - \delta^p D) f = p\, \delta^{p-1} f$$ (pto 1. + induzione)

Applicazione

Disuguaglianza di Poincaré al II ordine

Primo passo verso l'unione del metodo di Stein e il calcolo di Malliavin.

Motivazione So dalla disuguaglianza di Poincaré al I ordine che "se $f'(N)$ e' piccola allora $f(N)$ e' vicina alla sua media". Posso dire che "$f(N)$ e' vicina a N in legge se studio $f''(N)$"?

Proposizione Sia $N \sim N(0,1)$ e $f \in \mathbb{D}^{2,4}$.
Supp che $\mathbb{E}[f(N)] = 0$ e $Var(f(N)) = 1$.
Allora

$$d_W(f(N), N) \le \frac{3}{\sqrt{2\pi}} \|D^2 f\|_{L^4(\gamma)} \|Df\|_{L^4(\gamma)}$$

(Se $D^2 f$ e' "piccola", f e' "lineare" quindi $f(N)$ Gaussiana)

Curiosità 1. La prima versione di una disug. di Poincaré al II ordine nella d_{TV} risale a Chatterjee nel 2009 (per $d_{TV}(f(N), Z)$ con $N \sim N(0, Id)$ e $Z \sim N(0,1)$)
(La dim usa una versione adeguata del metodo di Stein e la disug di Poincaré al I ordine)

2. Nell' articolo di Nourdin-Peccati-Reinert del 2009 si dimostra una disuguaglianza di Poincaré al II ordine per funzionali di processi Gaussiani in d_W (e in d_{TV} se la legge di $f(N)$ e' a.c. rispetto alla misura di Lebesgue).
(La dim usa il metodo di Stein e il calcolo di Malliavin, ispirandosi all' articolo

di Nourdin-Peccati del 2008).

3. Articolo del 2019 di Vidotto in cui questa stima viene migliorata.

dimostrazione Vogliamo usare il metodo di Stein.

Ricordiamo che per $N \sim \mathcal{N}(0,1)$ e $F \in L^1(\Omega)$

$$d_W(F,N) \leq \sup_{\phi \in C^1 \cap Lip\left(\sqrt{2/\pi}\right)} \left| \mathbb{E}\left[F\phi(F) - \phi'(F)\right]\right|$$

Nel nostro caso: $F = f(N)$, $f \in \mathbb{D}^{2,4}$

$$\mathbb{E}[f(N)] = 0, \quad Var(f(N)) = 1$$

Sia $f \in \mathcal{S}$, e $\phi \in C^1$ con derivata ϕ' limitata.

Abbiamo

$$\mathbb{E}[f(N)] = P_\infty f(N) = 0$$

$$\mathbb{E}\left[f(N)\phi(f(N))\right] = \mathbb{E}\left[\left(P_0 f(N) - P_\infty f(N)\right)\phi(f(N))\right]$$

$$= -\int_0^{+\infty} \mathbb{E}\left[\frac{d}{dt}P_t f(N)\,\phi(f(N))\right]dt \qquad \frac{d}{dt}P_t = LP_t = -\delta D P_t$$

$$= \int_0^{+\infty} \mathbb{E}\left[\delta D P_t f(N)\,\phi(f(N))\right]dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \mathbb{E}\left[D P_t f(N)\,\phi'(f(N))\,Df(N)\right]dt$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-t}\, \mathbb{E}\left[P_t Df(N)\,\phi'(f(N))\,Df(N)\right]dt$$

$$= \mathbb{E}\left[\phi'(f(N))\, Df(N) \int_0^{+\infty} e^{-t} P_t Df(N)\, dt\right]$$ 27

Per $\phi(x) = x$, abbiamo

$$1 = \mathbb{E}[f(N)^2] = \mathbb{E}\left[Df(N) \int_0^{+\infty} e^{-t} P_t Df(N)\, dt\right]$$

Ora prendiamo $\phi \in C^1 \cap \mathrm{Lip}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)$, allora

$$\left| \mathbb{E}[f(N)\phi(f(N)) - \phi'(f(N))] \right| =$$

$$= \left| \mathbb{E}\left[\phi'(f(N))\left(Df(N)\int_0^{+\infty} e^{-t} P_t Df(N)\, dt - 1\right)\right] \right|$$

$$\overset{\|\phi'\|_\infty \le \sqrt{\frac{2}{\pi}}}{\le} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\mathrm{Var}\left(Df(N)\int_0^{+\infty} e^{-t} P_t Df(N)\, dt\right)}.$$

Ora usiamo la disuguaglianza di Poincaré

$$\sqrt{\mathrm{Var}\left(Df(N)\int_0^{+\infty} e^{-t} P_t D f(N)\, dt\right)} \le$$

$$\le \sqrt{\mathbb{E}\left[\left(\left(Df(N)\int_0^{+\infty} e^{-t} P_t Df(N)\, dt\right)'\right)^2\right]}$$

disug. triang

$$\le \sqrt{\mathbb{E}\left[\left(D^2 f(N)\int_0^{+\infty} e^{-t} P_t Df(N)\, dt\right)^2\right]} +$$

$$+ \sqrt{\mathbb{E}\left[(Df(N))^2\left(\int_0^{+\infty} e^{-2t} P_t D^2 f(N)\, dt\right)^2\right]} \quad (*)$$

Applicando C-S, Jensen e la proprietà di contrazione di P_t in $L^4(\gamma)$

$$(*) \leq \frac{3}{2} \| D^2 f \|_{L^4(\gamma)} \| D f \|_{L^4(\gamma)} .$$

Mettendo insieme: per $f \in S$ normalizzata

$$d_W(f(N), N) \leq \sup_{\phi \in C^1 \cap Lip(\sqrt{2/\pi})} \left| \mathbb{E}\left[f(N) \phi(f(N)) - \phi'(f(N)) \right] \right|$$

$$\leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{3}{2} \| D^2 f \|_{L^4(\gamma)} \| D f \|_{L^4(\gamma)}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{2\pi}} \| D^2 f \|_{L^4(\gamma)} \| D f \|_{L^4(\gamma)}$$

Per $f \in \mathbb{D}^{2,4}$, la disuguaglianza continua a valere per approssimazione.

$\square$