# Un modello matematico per la legge a potenza di Taylor in ecologia

Candidata: Manuela Dei Cas
Relatore: Prof. Francesco Caravenna

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI MILANO BICOCCA

21 luglio 2016

# Piano della presentazione

# La legge osservata empiricamente

- $R$ popolazioni

# La legge osservata empiricamente

- $R$ popolazioni
- $N^{(j)}(t) =$ numero di individui della popolazione $j$-esima al tempo $t$

# La legge osservata empiricamente

- $R$ popolazioni
- $N^{(j)}(t)$ = numero di individui della popolazione $j$-esima al tempo $t$
- possiamo calcolare
  - media campionaria: $\overline{N(t)} = \frac{1}{R} \sum_{j=1}^{R} N^{(j)}(t)$
  - momento campionario secondo: $\overline{N(t)^2} = \frac{1}{R} \sum_{j=1}^{R} (N^{(j)}(t))^2$
  - varianza campionaria: $S_R^2 = \frac{1}{R-1} \sum_{j=1}^{R} \left(N^{(j)}(t) - \overline{N(t)}\right)^2$

# La legge osservata empiricamente

- $R$ popolazioni
- $N^{(j)}(t) =$ numero di individui della popolazione $j$-esima al tempo $t$
- possiamo calcolare
  - media campionaria: $\overline{N(t)} = \frac{1}{R}\sum_{j=1}^{R} N^{(j)}(t)$
  - momento campionario secondo: $\overline{N(t)^2} = \frac{1}{R}\sum_{j=1}^{R}(N^{(j)}(t))^2$
  - varianza campionaria: $S_R^2 = \frac{1}{R-1}\sum_{j=1}^{R}\left(N^{(j)}(t) - \overline{N(t)}\right)^2$

**Legge osservata empiricamente**

$$S_R^2 \underset{t\to\infty}{\sim} a(\overline{N(t)})^b$$

# Dalle osservazioni empiriche al modello matematico

- $N^{(j)} := (N^{(j)}(t))_{t\in\mathbb{N}_0}$ processi stocastici i.i.d. con $N^{(j)} \stackrel{d}{=} (N(t))_{t\in\mathbb{N}_0}$

# Dalle osservazioni empiriche al modello matematico

- $N^{(j)} := (N^{(j)}(t))_{t\in\mathbb{N}_0}$ processi stocastici i.i.d. con $N^{(j)} \stackrel{d}{=} (N(t))_{t\in\mathbb{N}_0}$
- per $t$ fissato

$$\overline{N(t)} \xrightarrow[R\to\infty]{q.c.} E[N(t)]$$

$$\overline{N(t)^2} \xrightarrow[R\to\infty]{q.c.} E[(N(t))^2]$$

# Dalle osservazioni empiriche al modello matematico

- $N^{(j)} := (N^{(j)}(t))_{t\in\mathbb{N}_0}$ processi stocastici i.i.d. con $N^{(j)} \stackrel{d}{=} (N(t))_{t\in\mathbb{N}_0}$
- per $t$ fissato

$$\overline{N(t)} \xrightarrow[R\to\infty]{q.c.} E[N(t)]$$

$$\overline{N(t)^2} \xrightarrow[R\to\infty]{q.c.} E[(N(t))^2]$$

È naturale chiedere che:

**Legge a potenza di Taylor**

$$Var[N(t)] \underset{t\to\infty}{\sim} aE[N(t)]^b$$

# Il modello matematico

## Modello a crescita moltiplicativa

- $N(0) > 0$ è il numero iniziale di individui
- il numero di individui al tempo $t$ è

$$N(t) = A(t-1)A(t-2)\cdots A(0)N(0)$$

# Il modello matematico

## Modello a crescita moltiplicativa

- $N(0) > 0$ è il numero iniziale di individui
- il numero di individui al tempo $t$ è

$$N(t) = A(t-1)A(t-2)\cdots A(0)N(0)$$

Come scegliere gli $\{A(t)\}_{t\in\mathbb{N}_0}$?

# Il modello matematico

**Modello a crescita moltiplicativa**

- $N(0) > 0$ è il numero iniziale di individui
- il numero di individui al tempo $t$ è

$$N(t) = A(t-1)A(t-2)\cdots A(0)N(0)$$

Come scegliere gli $\{A(t)\}_{t\in\mathbb{N}_0}$?

- A valori nell'insieme finito $E = \{d_1, ..., d_s\} \subseteq (0, \infty)$

# Il modello matematico

## Modello a crescita moltiplicativa

- $N(0) > 0$ è il numero iniziale di individui
- il numero di individui al tempo $t$ è

$$N(t) = A(t-1)A(t-2)\cdots A(0)N(0)$$

Come scegliere gli $\{A(t)\}_{t\in\mathbb{N}_0}$?

- A valori nell'insieme finito $E = \{d_1, ..., d_s\} \subseteq (0, \infty)$
- $\{A(t)\}_{t\in\mathbb{N}_0}$ catena di Markov

# Cosa significa che $\{A(t)\}_{t\in\mathbb{N}_0}$ è una catena di Markov?

Matrice di transizione $P = (p_{ij})_{i,j\in\{1,\dots,s\}}$:

- $p_{ij}$ è la probabilità di passare dallo stato $d_i$ allo stato $d_j$

**Esempio**

Siano $E = \{d_1, d_2, d_3\}$ e

$$P = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Allora $P(A(t+1) = d_2 | A(t) = d_1) = \frac{1}{3}$.

# Ulteriori ipotesi su $\{A(t)\}_{t\in\mathbb{N}_0}$

- *aperiodica*
- *irriducibile*: partendo da ogni stato $d_i$ c'è una probabilità maggiore di zero di raggiungere ogni altro stato $d_j$
- *stazionaria*: $P(A(t) = d_i) = \pi_i$, $\forall i \in \{1, ..., s\}$ e $\forall t \in \mathbb{N}_0$

# Legge di Taylor generalizzata

Il modello soddisfa:

## Legge di Taylor generalizzata

$$E[(N(t))^2] \underset{t\to\infty}{\sim} aE[N(t)]^b$$

con

$$b = \frac{\log[r(PD^2)]}{\log[r(PD)]}$$

e

$$a = \frac{\pi^T v(2) w(2)^T \mathbf{1} N(0)^2}{(\pi^T v(1) w(1)^T \mathbf{1} N(0))^b}.$$

dove $D := diag(d_i)$.

# Legge di Taylor generalizzata

Il modello soddisfa:

**Legge di Taylor generalizzata**

$$E[(N(t))^2] \underset{t\to\infty}{\sim} aE[N(t)]^b$$

con

$$b = \frac{\log[r(PD^2)]}{\log[r(PD)]}$$

e

$$a = \frac{\pi^T v(2) w(2)^T \mathbf{1} N(0)^2}{(\pi^T v(1) w(1)^T \mathbf{1} N(0))^b}.$$

dove $D := diag(d_i)$.

*Cenni di dimostrazione:*

- Possiamo ottenere formule esplicite per i momenti:

$$E[(N(t))^p] = \pi^T (PD^p)^t \mathbf{1} (N(0))^p$$

*Cenni di dimostrazione:*

- Possiamo ottenere formule esplicite per i momenti:

$$E[(N(t))^p] = \pi^T (PD^p)^t \mathbf{1} (N(0))^p$$

- Applicando il Teorema di Perron-Frobenius troviamo i vettori $v(p)$ e $w(p)^T$ tali che

$$\lim_{t\to\infty} \frac{(PD^p)^t}{[r(PD^p)]^t} = v(p)w(p)^T$$

*Cenni di dimostrazione:*

- Possiamo ottenere formule esplicite per i momenti:

$$E[(N(t))^p] = \pi^T (PD^p)^t \mathbf{1} (N(0))^p$$

- Applicando il Teorema di Perron-Frobenius troviamo i vettori $v(p)$ e $w(p)^T$ tali che

$$\lim_{t\to\infty} \frac{(PD^p)^t}{[r(PD^p)]^t} = v(p)w(p)^T$$

- Sfruttando le relazioni precedenti otteniamo

$$\lim_{t\to\infty} \{\log E[(N(t))^2] - b \log E[N(t)]\} = \log a$$

# Legge a potenza di Taylor

*Ulteriore ipotesi:*

$$r(PD^2) > [r(PD)]^2$$

# Legge a potenza di Taylor

*Ulteriore ipotesi:*

$$r(PD^2) > [r(PD)]^2$$

**Legge a potenza di Taylor**

$$Var[N(t)] \underset{t\to\infty}{\sim} aE[N(t)]^b,$$

dove $a$ e $b$ sono come nel caso precedente.

# Legge a potenza di Taylor

*Ulteriore ipotesi:*

$$r(PD^2) > [r(PD)]^2$$

## Legge a potenza di Taylor

$$Var[N(t)] \underset{t\to\infty}{\sim} aE[N(t)]^b,$$

dove $a$ e $b$ sono come nel caso precedente.

*Cenni di dimostrazione:*

- $\lim_{t\to\infty}\left\{\left(\frac{E[N(t)]^2}{E[(N(t))^2]}\right)\left(\frac{r(PD^2)}{[r(PD)]^2}\right)^t\right\} = K$, dove $0 < K < \infty$
- $\frac{E[N(t)]^2}{E[(N(t))^2]} \underset{t\to\infty}{\to} 0 \Rightarrow Var[N(t)] \underset{t\to\infty}{\sim} E[(N(t))^2]$

# Un'apparente contraddizione

**Osservazione**

1. *Modello teorico*: grande varietà di valori per l'esponente $b$
2. *Empiricamente*: $b \approx 2$

# Un'apparente contraddizione

**Osservazione**

1. *Modello teorico*: grande varietà di valori per l'esponente $b$
2. *Empiricamente*: $b \approx 2$

Abbiamo sbagliato qualcosa?

# Un'apparente contraddizione

## Osservazione

1. *Modello teorico*: grande varietà di valori per l'esponente $b$
2. *Empiricamente*: $b \approx 2$

Abbiamo sbagliato qualcosa?

1. *Modello teorico:*
   - $R$ sufficientemente grande affinché

$$\overline{N(t)} \approx E[N(t)]$$

$$\overline{N(t)^2} \approx E[(N(t))^2]$$

   - Legge di Taylor per $t \to \infty$

2. *Empiricamente*: $t$ grande, ma $R$ fissato

2. *Empiricamente*: $t$ grande, ma $R$ fissato

Il problema potrebbe essere legato allo scambio dei limiti $R \to \infty$ e $t \to \infty$!

2. *Empiricamente*: $t$ grande, ma $R$ fissato

Il problema potrebbe essere legato allo scambio dei limiti $R \to \infty$ e $t \to \infty$!

**Fatto**

*Per $R$ fissato e $t \to \infty$ si ottiene*

$$\overline{N(t)^2} \underset{t\to\infty}{\sim} a(\overline{N(t)})^2$$

2. *Empiricamente*: $t$ grande, ma $R$ fissato

Il problema potrebbe essere legato allo scambio dei limiti $R \to \infty$ e $t \to \infty$!

**Fatto**

*Per $R$ fissato e $t \to \infty$ si ottiene*

$$\overline{N(t)^2} \underset{t \to \infty}{\sim} a(\overline{N(t)})^2$$

- Stesso risultato se $R = e^{o(t)}$

# Un approccio diverso al calcolo dell'esponente ($R$ fissato)

Poniamo $N(0) = 1$ ed $E = \{r, s\}$.

**Osservazione**

Per calcolare $\overline{N(t)^k}$ basta sapere quante volte la catena assume il valore $r$.

# Un approccio diverso al calcolo dell'esponente ($R$ fissato)

Poniamo $N(0) = 1$ ed $E = \{r, s\}$.

## Osservazione

Per calcolare $\overline{N(t)^k}$ basta sapere quante volte la catena assume il valore $r$.

Per ogni $j \in \{1, ..., R\}$ e $t \geq 1$ fissati, consideriamo la seguente probabilità su $E$:

## Definizione

$$L_t^{(j)}(z) := \frac{1}{t} \sum_{n=1}^{t} \mathbb{1}_{\{A^{(j)}(n-1)=z\}}$$

# Un approccio diverso al calcolo dell'esponente ($R$ fissato)

Poniamo $N(0) = 1$ ed $E = \{r, s\}$.

**Osservazione**

Per calcolare $\overline{N(t)^k}$ basta sapere quante volte la catena assume il valore $r$.

Per ogni $j \in \{1, ..., R\}$ e $t \geq 1$ fissati, consideriamo la seguente probabilità su $E$:

**Definizione**

$$L_t^{(j)}(z) := \frac{1}{t} \sum_{n=1}^{t} \mathbb{1}_{\{A^{(j)}(n-1)=z\}}$$

- $tL_t^{(j)}(r)$ è **il numero di volte**, fino al tempo $t-1$, **in cui viene assunto il valore** $r$

- $\overline{N(t)^k} = \frac{1}{R}\sum_{j=1}^{R} e^{kt[L_t^{(j)}(r)\log r + (1-L_t^{(j)}(r))\log s]}$

- $\overline{N(t)^k} = \frac{1}{R}\sum_{j=1}^{R} e^{kt[L_t^{(j)}(r)\log r + (1-L_t^{(j)}(r))\log s]}$

**Proposizione**

*Per ogni $j$ fissato*

$$L_t^{(j)}(r) \xrightarrow[t\to\infty]{q.c.} \pi_r$$

dove $\pi_r = P(A(t) = r)$ per ogni $t \in \mathbb{N}_0$.

- $\overline{N(t)^k} = \frac{1}{R}\sum_{j=1}^{R} e^{kt[L_t^{(j)}(r)\log r + (1-L_t^{(j)}(r))\log s]}$

**Proposizione**

*Per ogni j fissato*

$$L_t^{(j)}(r) \xrightarrow[t\to\infty]{q.c.} \pi_r$$

dove $\pi_r = P(A(t) = r)$ per ogni $t \in \mathbb{N}_0$.

- $\log \overline{N(t)^k} \underset{t\to\infty}{\sim} kt[\pi_r(\log r - \log s) + \log s]$

- $\overline{N(t)^k} = \frac{1}{R}\sum_{j=1}^{R} e^{kt[L_t^{(j)}(r)\log r + (1-L_t^{(j)}(r))\log s]}$

**Proposizione**

*Per ogni j fissato*

$$L_t^{(j)}(r) \xrightarrow[t\to\infty]{q.c.} \pi_r$$

dove $\pi_r = P(A(t) = r)$ per ogni $t \in \mathbb{N}_0$.

- $\log \overline{N(t)^k} \underset{t\to\infty}{\sim} kt[\pi_r(\log r - \log s) + \log s]$
- $\log \overline{N(t)^2} \underset{t\to\infty}{\sim} 2\log \overline{N(t)}$

- $\overline{N(t)^k} = \frac{1}{R}\sum_{j=1}^{R} e^{kt[L_t^{(j)}(r)\log r + (1-L_t^{(j)}(r))\log s]}$

**Proposizione**

*Per ogni j fissato*

$$L_t^{(j)}(r) \xrightarrow[t\to\infty]{q.c.} \pi_r$$

dove $\pi_r = P(A(t) = r)$ per ogni $t \in \mathbb{N}_0$.

- $\log \overline{N(t)^k} \underset{t\to\infty}{\sim} kt[\pi_r(\log r - \log s) + \log s]$
- $\log \overline{N(t)^2} \underset{t\to\infty}{\sim} 2\log \overline{N(t)}$

$\Rightarrow b \approx 2$

# Grazie per l'attenzione!


- Cohen J.E., *Cauchy inequalities for the spectral radius of product of diagonal and nonnegative matrices*, Proc. Amer. Math. Soc. in press (2014).
- Cohen J.E., *Stochastic population dynamics in a Markovian environment implies Taylor's power law of fluctuation scaling*, Theoretical Population Biology 93 (2014).
- Giometto A., Formentin M., Rinaldo A., Cohen J.E., Maritan A., *Sample and population exponents of generalized Taylor's law*, Proceedings of the National Academy of Science vol.112 no.25 (2015).
- Seneta E., *Non-negative matrices and Markov Chains*, Springer (1981).

# Il Teorema di Perron-Frobenius

## Teorema

*Sia $T \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ non negativa e primitiva. Allora esiste un autovalore $r$ reale tale che:*

1. $r > 0$;
2. *a $r$ possono essere associati un autovettore destro $\boldsymbol{v}$ e un autovettore sinistro $\boldsymbol{w}^T$ strettamente positivi;*
3. $r > |\lambda|$ *per ogni* $\lambda \neq r$ *autovalore di* $T$;
4. *c'è un unico autovettore (a meno di multipli) associato a $r$. Inoltre, $r$ è una radice semplice del polinomio caratteristico di $T$;*
5. *se $0 \leq B \leq T$ (ossia $0 \leq (B)_{ij} \leq (T)_{ij}$ per ogni $i, j$) e $\beta$ è un autovalore di $B$, allora $|\beta| \leq r$. Inoltre, se $|\beta| = r$, allora $B = T$.*

### Teorema

*Sia $T \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ non negativa e primitiva e indichiamo i suoi autovalori distinti con $r, \lambda_2, ..., \lambda_t$, dove $r > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| ... \geq |\lambda_t|$. Indichiamo inoltre con $m_2$ la molteplicità algebrica di $\lambda_2$. Siano $\boldsymbol{w}^T$ e $\boldsymbol{v}$ gli autovettori sinistro e destro associati a $r$, tali che $\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{v} = 1$. Allora:*

1. *Se $\lambda_2 \neq 0$, allora per $k \to \infty$*

$$T^k = r^k \boldsymbol{v}\boldsymbol{w}^T + O(k^{m_2-1}|\lambda_2|^k);$$

2. *Se $\lambda_2 = 0$, allora per $k \geq n-1$*

$$T^k = r^k \boldsymbol{v}\ \boldsymbol{w}^T.$$

# La condizione $r(PD^2) > [r(PD)]^2$

**Osservazione**

Applicando la disuguaglianza di Jensen, si può mostrare che la disuguaglianza debole $r(PD^2) \geq [r(PD)]^2$ è sempre verificata.

Ma quando vale la disuguaglianza stretta?

**Fatto**

*Se la matrice $P$ è due volte irriducibile e $D$ non scalare, allora*

$$r(PD^2) > [r(PD)]^2.$$

- Nelle osservazioni empiriche è verosimile che la matrice $P$ abbia elementi tutti strettamente positivi. Quindi $P$ è due volte irriducibile.