

$$\arccos(\cos(x))$$

$$\cos(2) \approx -0.41$$

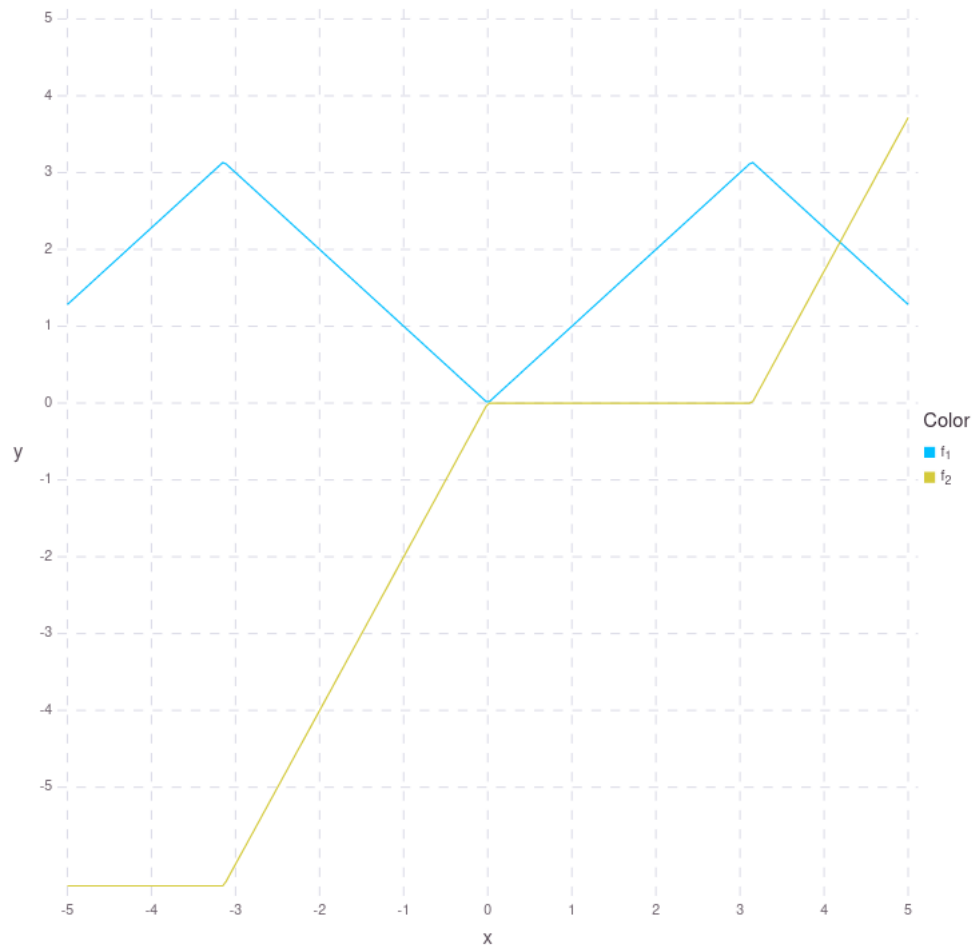
$$\cos(2 + 2\pi) \approx -0.41$$

$$\arccos(-0.41) \approx 2$$

O computador só pode dar um resultado para a função arccos, ele não tem o conceito da função multi-valorada. Normalmente ele define a imagem de arccos para entre 0 e  $\pi$ , inclusivo. Logo, chamar  $\arccos(\cos(x))$  equivale a restringir  $x$  entre 0 e  $\pi$ .

$$f_1(x) = \arccos(\cos(x))$$

$$f_2(x) = x - \arccos(\cos(x))$$

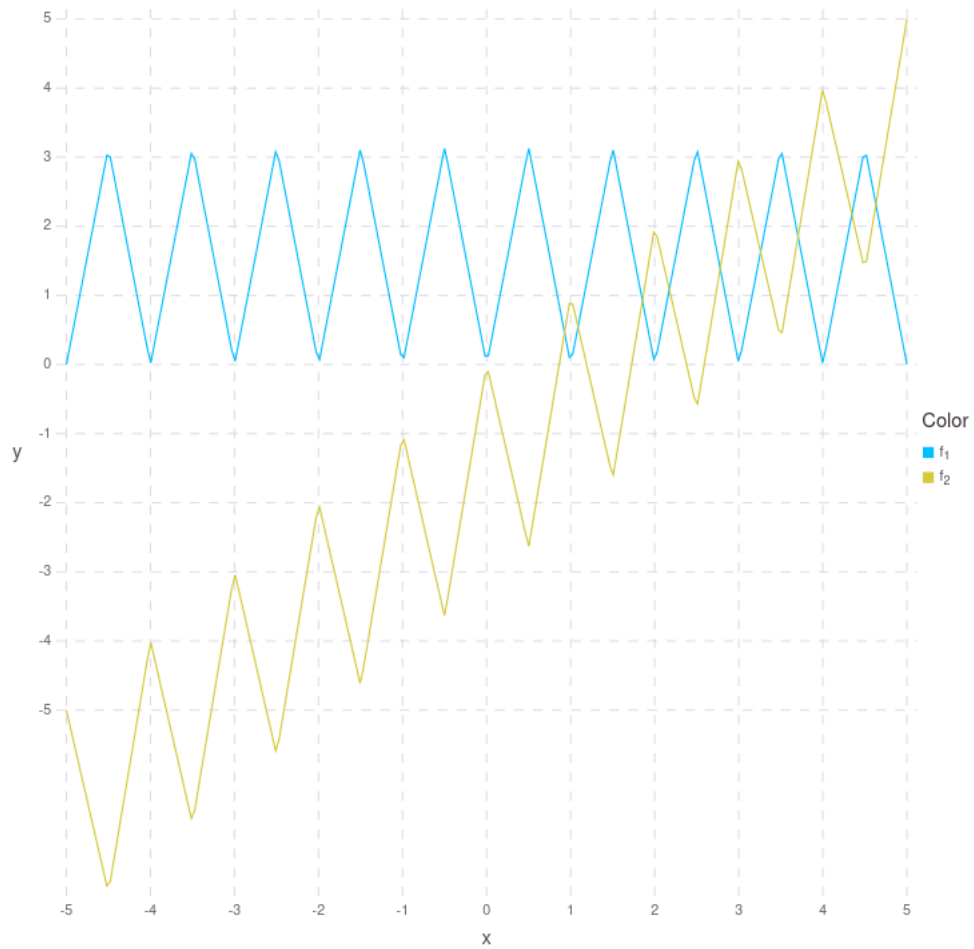


$$\arccos(\cos(2\pi x))$$

Multiplicando o argumento do cosseno por  $2\pi$ , "achatamos" a função horizontalmente, mudando seu período de  $2\pi$  para 1.

$$f_1(x) = \arccos(\cos(2\pi x))$$

$$f_2(x) = x - \arccos(\cos(2\pi x))$$

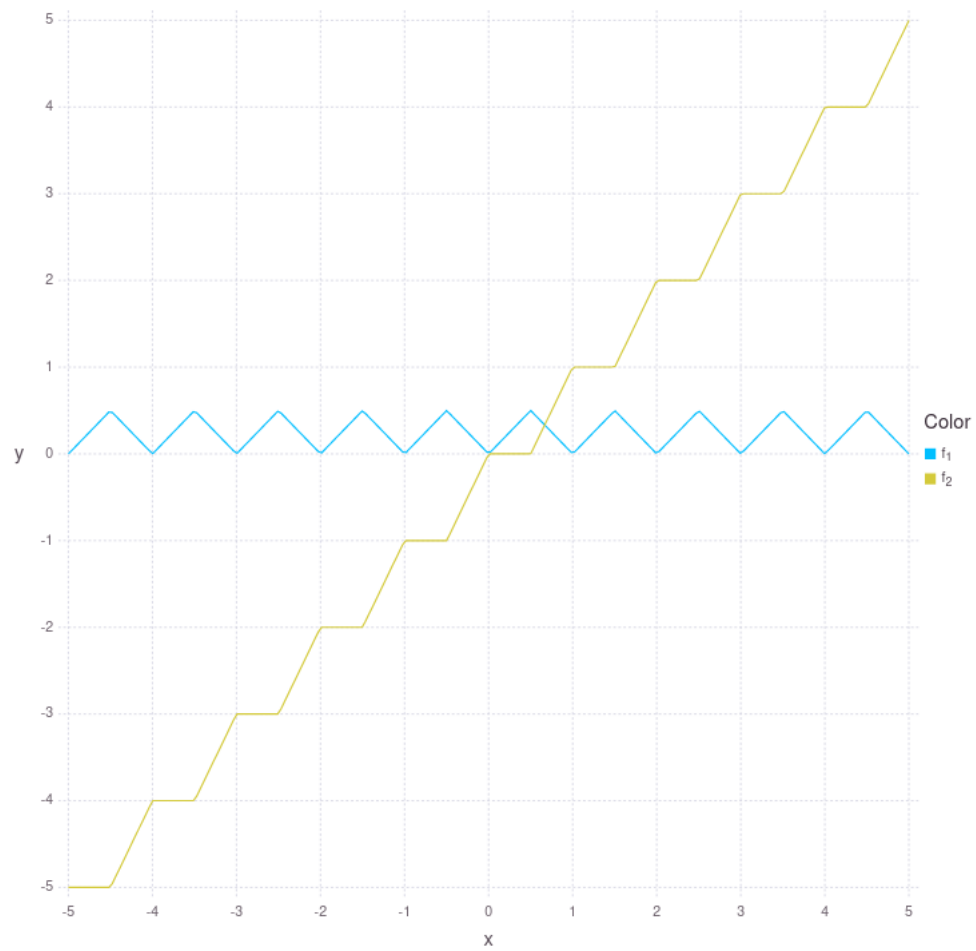


$$\frac{\arccos(\cos(2\pi x))}{2\pi}$$

Dividindo tudo por  $2\pi$ , achatamos a função verticalmente, tornando seu valor máximo  $\frac{1}{2}$ .

$$f_1(x) = \arccos(\cos(2\pi x)) / 2\pi$$

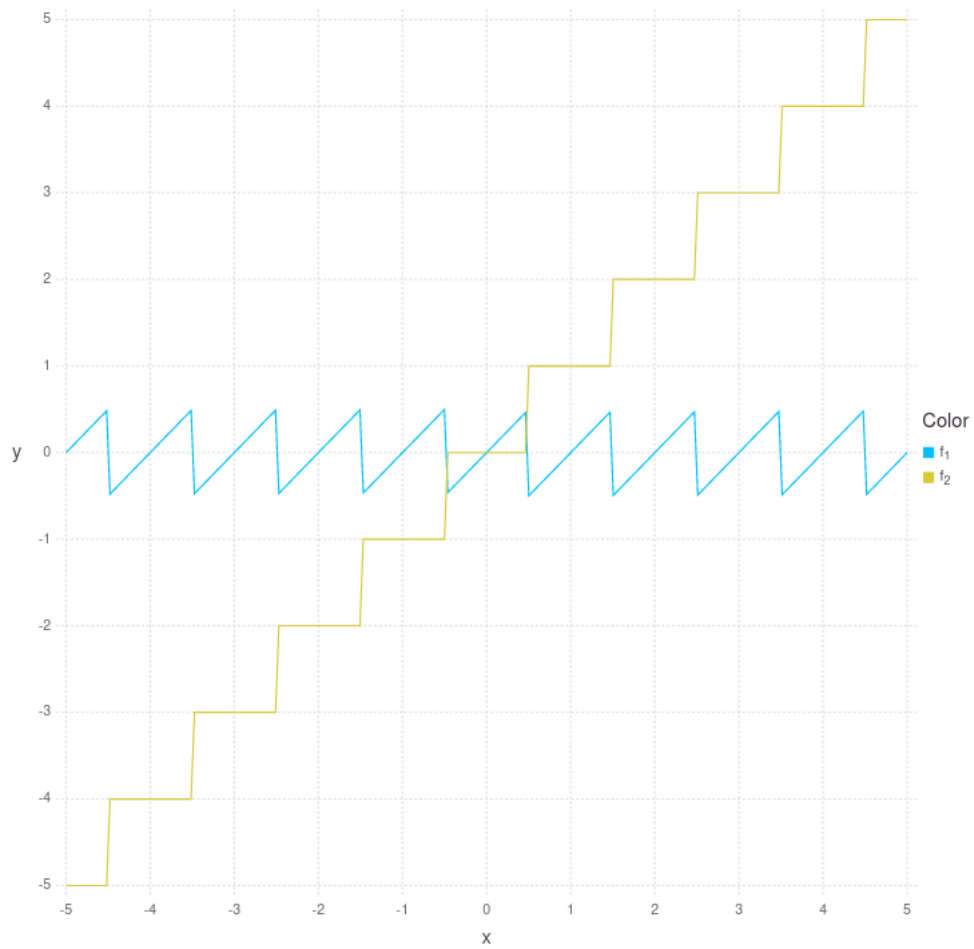
$$f_2(x) = x - f_1(x)$$



$$\text{sgn}(\sin(2\pi x)) \left( \frac{\arccos(\cos(2\pi x))}{2\pi} \right)$$

Multiplicando pelo sinal do seno de  $2\pi x$ , obtemos uma função serrote e uma função escada, os formatos que queremos. Estamos perto, mas em nossa função piso os números estão mudando no meio, e.g.  $\text{piso}(1.4) = 1$  mas  $\text{piso}(1.6) = 2$ .

$f_1(x) = \text{sign}(\sin(2\pi x)) * \arccos(\cos(2\pi x)) / 2\pi$   
 $f_2(x) = x - f_1(x)$

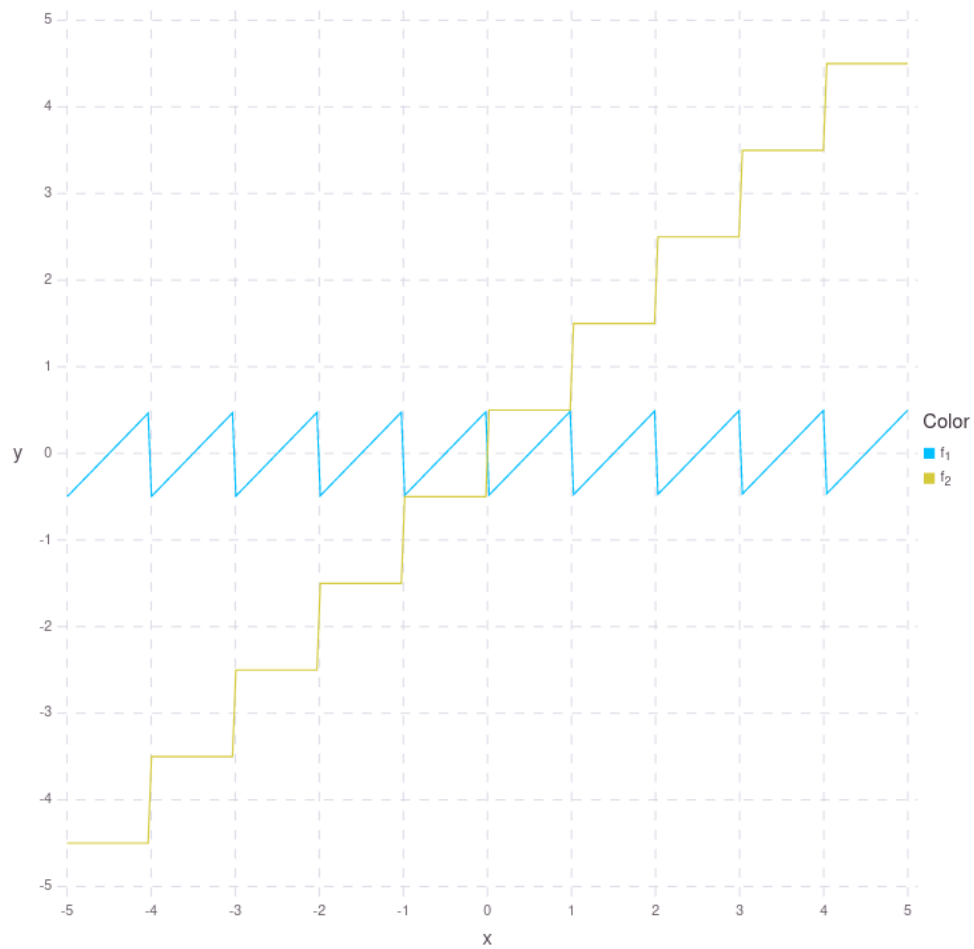


$$\text{sgn}(\sin(2\pi x)) \left( \frac{\arccos(\cos(2\pi x))}{2\pi} - \frac{1}{2} \right)$$

Subtraindo  $\frac{1}{2}$  no ponto apropriado, transladamos a função horizontalmente para que o seu ponto mínimo coincida com os números inteiros. Isso resolve nosso problema anterior, mas agora a função está completamente transladada para cima em  $\frac{1}{2}$  a mais do que deveria.

$$f_1(x) = \text{sign}(\sin(2\pi x)) * (\arccos(\cos(2\pi x))/2\pi - 1/2)$$

$$f_2(x) = x - f_1(x)$$



$$\text{sgn}(\sin(2\pi x)) \left( \frac{\arccos(\cos(2\pi x))}{2\pi} - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2}$$

Somando  $\frac{1}{2}$  resolve nosso ultimo problema, temos agora nossas funções alpha e piso, definidas de método puramente analítico.

$$f_1(x) = \text{sign}(\sin(2\pi x)) * (\arccos(\cos(2\pi x))/2\pi - 1/2) + 1/2$$

$$f_2(x) = x - f_1(x)$$

