Algorithmen und Datenstrukturen - Übung 1

Anja Birrer, Filipe Bessa Carvalho — G1

25.09.2025

1 Summe von Kubikzahlen

Exercise 1.1 *Sum of Cubes* **(1 point)**.

Prove by mathematical induction that for every positive integer n,

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Es soll bewiesen werden, dass die folgende Formel für alle positiven natürlichen Zahlen gilt:

$$1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \tag{1}$$

Man stellt also den Basisfall $n = 1$ auf:

$$\begin{aligned} 1^3 &= \frac{1^2(1+1)^2}{4} \\ 1 &= \frac{1 \cdot 2^2}{4} \\ &= \frac{1 \cdot 4}{4} \\ &= \frac{4}{4} \\ &= 1 \end{aligned} \tag{2}$$

Damit wurde der Basisfall bewiesen, es gibt also mindestens ein n, für das die Formel stimmt.
Nun wird die Induktionshypothese aufgestellt, in der angenommen wird, dass die Formel für ein beliebiges $n = k$ stimmt.

$$1^3 + 2^3 + ... + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} \tag{3}$$

Also soll nun im Induktionsschritt bewiesen werden, dass die Formel unter dieser Annahme auch für $k+1$ gilt.

$$\begin{aligned}
1^3 + 2^3 + ... + k^3 + (k+1)^3 &= \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 \\
&= \frac{k^2(k+1)^2}{4} + \frac{4(k+1)^3}{4} \\
&= \frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4} \\
&= \frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)(k+1)^2}{4} \\
&= \frac{(k^2+4k+4)(k+1)^2}{4} \\
&= \frac{(k+2)^2(k+1)^2}{4}
\end{aligned} \tag{4}$$

Daraus folgt, dass die Formel, sofern sie für k stimmt, auch auf $k+1$ anwendbar ist. Und da die Formel für $n = 1$ wahr ist, so stimmt sie auch für alle anderen natürlichen Zahlen grösser als 1.

2 Summe von reziproken Wurzeln

Exercise 1.2 *Sum of reciprocals of roots* **(1 point)**.

Consider the following claim:

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \sqrt{n}.$$

A student provides the following induction proof. Is it correct? If not, explain where the mistake is.

Base case: $n = 1$,

$$\frac{1}{\sqrt{1}} \leq 1, \text{ which is true.}$$

Induction hypothesis: Assume the claim holds for $n = k$, i.e.

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}} \leq \sqrt{k}.$$

Induction step: Then, starting from the claim we need to prove for $n = k + 1$ and using logical equivalences:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \leq \sqrt{k+1} &\iff \frac{1}{\sqrt{1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}} \leq \sqrt{k+1} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \\
&\iff \frac{1}{\sqrt{1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}} \leq \frac{k+1}{\sqrt{k+1}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \\
&\iff \frac{1}{\sqrt{1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}} \leq \frac{k}{\sqrt{k+1}} \leq \frac{k}{\sqrt{k}} \leq \sqrt{k},
\end{aligned}$$

which is true, therefore the claim holds by the principle of mathematical induction.

Der Beweis muss falsch sein, denn die Formel ist nicht valide. Das lässt sich einfach an einem Beispiel zeigen - alleine schon $n = 2$ stimmt nicht mehr.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} &\approx 1 + 0.7071 = 1.7071 \\
\sqrt{2} &\approx 1.4142 \\
1.4142 &< 1.7071
\end{aligned} \tag{5}$$

Es stellt sich nun also die Frage, warum das so ist.
Der Basisfall ist korrekt, und an der Induktionshypothese lässt sich auch nichts aussetzen. Es muss also einen Fehler in der Umformung der Ungleichung im Induktionsschritt geben.
Während der Beweis rechnerisch korrekt zu sein scheint, so liegt das Problem darin, dass der Schüler die Ungleichung wie eine Gleichung zu behandeln scheint.

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{k}} \leq \sqrt{k+1} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \tag{6}$$

Dieser Schritt ist korrekt, und auch der nächste (in Gleichung 7) ist mathematisch korrekt.

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{k}} \leq \frac{k+1}{\sqrt{k+1}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \tag{7}$$

Es ist im letzten Schritt, wo sich ein Fehler eingeschlichen hat.

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{k}} \leq \frac{k}{\sqrt{k+1}} \leq \frac{k}{\sqrt{k}} \leq \sqrt{k} \tag{8}$$

Es ist zwar korrekt, dass die linke Seite der Ungleichung kleiner als $\sqrt{k}$ ist (das ist die Induktionshypothese); und es stimmt auch, dass $\frac{k}{\sqrt{k+1}} \leq \sqrt{k}$ ist. Allerdings lässt sich daraus nicht schlussfolgern, dass die linke Seite der Gleichung auch kleiner ist als $\frac{k}{\sqrt{k+1}}$.
Als anschaulicheres Beispiel für das gleiche Problem: $2 < 3$ und $1 < 3$ sind beides korrekte Aussagen. Daraus lässt sich aber nicht einfach so schliessen, dass $2 < 1$ ist, wie es die Reihenfolge zu implizieren scheint.

3 Asymptotisches Wachstum

Exercise 1.3 *Asymptotic growth* **(1 point)**.

Recall the concept of asymptotic growth that we introduced in Exercise sheet 0: If $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ are two functions, then:

- We say that f *grows asymptotically slower than* g if $\lim_{m\to\infty} \frac{f(m)}{g(m)} = 0$. If this is the case, we also say that g *grows asymptotically faster than* f.

Prove or disprove each of the following statements.

(a) $f(m) = 100m^3 + 10m^2 + m$ grows asymptotically slower than $g(m) = 0.001 \cdot m^5$.

(b) $f(m) = \log(m^3)$ grows asymptotically slower than $g(m) = (\log m)^3$.

(c) $f(m) = e^{2m}$ grows asymptotically slower than $g(m) = 2^{3m}$.

Hint: *Recall that for all $n, m \in \mathbb{N}$, we have $n^m = e^{m \ln n}$.*

(d)* If $f(m)$ grows asymptotically slower than $g(m)$, then $\log(f(m))$ grows asymptotically slower than $\log(g(m))$.

(e)* $f(m) = \ln(\sqrt{\ln(m)})$ grows asymptotically slower than $g(m) = \sqrt{\ln(\sqrt{m})}$.

Hint: *You can use L'Hôpital's rule from sheet 0.*

a)

Die folgenden Funktionen sind gegeben:

$$f(m) = 100m^3 + 10m^2 + m \tag{9}$$

$$g(m) = 0.001m^5 \tag{10}$$

Man sagt, dass f langsamer wächst als g, wenn $\lim_{m\to\infty} \frac{f(m)}{g(m)} = 0$.

$$\lim_{m\to\infty} \frac{f(m)}{g(m)} = \lim_{m\to\infty} \frac{100m^3 + 10m^2 + m}{0.001m^5} = \frac{\infty}{\infty} = \infty \tag{11}$$

Noch gibt es keine eindeutige Lösung, also wird L'Hôpitals Regel angewandt, und das wiederholt, bis der Limes nicht mehr ins Unendliche geht.

$$\lim_{m\to\infty} \frac{f'(m)}{g'(m)} = \lim_{m\to\infty} \frac{300m^2 + 20m + 1}{0.005m^4} = \frac{\infty}{\infty} = \infty \tag{12}$$

$$\lim_{m\to\infty} \frac{f''(m)}{g''(m)} = \lim_{m\to\infty} \frac{600m + 20}{0.02m^3} = \frac{\infty}{\infty} = \infty \tag{13}$$

$$\lim_{m\to\infty} \frac{f'''(m)}{g'''(m)} = \lim_{m\to\infty} \frac{600}{0.06m^2} = \frac{600}{\infty} = 0 \tag{14}$$

Wie man in Gleichung 14 sehen kann, geht der Limes nun gegen 0, also wächst $f(m)$ asymptotisch langsamer als $g(m)$.
Alternativ kann man dasselbe Resultat auch wie folgt erreichen:

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty} \frac{f(m)}{g(m)} &= \lim_{m\to\infty} \frac{100m^3 + 10m^2 + m}{0.001m^5} \\ &= \lim_{m\to\infty} \frac{m^5}{m^5} \left(\frac{\frac{100}{m^2} + \frac{10}{m^3} + \frac{1}{m^4}}{0.001} \right) \\ &= \frac{0}{0.001} \\ &= 0\end{aligned} \tag{15}$$

b)

Man geht nach dem gleichen Muster vor wie in Teilaufgabe **a)**, also wird hier (sowie in den folgenden Teilaufgaben) nicht mehr jeder Schritt erklärt, sondern es werden nur noch die Formeln notiert.

$$f(m) = \log(m^3) = 3 \cdot \log(m) \tag{16}$$

$$g(m) = (\log(m))^3 \tag{17}$$

$$\lim_{m\to\infty} \frac{f(m)}{g(m)} = \lim_{m\to\infty} \frac{3 \cdot \log(m)}{(\log(m))^3} = \frac{3}{(\log(m))^2} = 0 \tag{18}$$

$f(m)$ wächst asymptotisch langsamer als $g(m)$.

c)

$$f(m) = e^{2m} \tag{19}$$

$$g(m) = 2^{3m} = 8^m = e^{m \cdot \ln(8)} \tag{20}$$

$$\begin{aligned} \lim_{m\to\infty} \frac{f(m)}{g(m)} &= \lim_{m\to\infty} \frac{e^{2m}}{e^{m \cdot \ln 8}} \\ &= \lim_{m\to\infty} e^{2m - m\cdot\ln(8)} \\ &= \lim_{m\to\infty} e^{m(2-\ln(8))} \\ &= \lim_{m\to\infty} e^{-\infty} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{21}$$

Als Anmerkung: Da $\ln(8) \approx 2.0794 > 2$, ist $2 - \ln(8) < 0$.
$f(m)$ wächst asymptotisch langsamer als $g(m)$.

d)

Die Aussage "$f(m)$ wächst asymptotisch langsamer als $g(m)$." ist gegeben, und nun soll bewiesen werden, dass $\log(f(m))$ ebenfalls langsamer wächst als $\log(g(m))$. Also wird erst einmal der übliche Versuch probiert.

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\log(f(m))}{\log(g(m))} \tag{22}$$

Es kann jedoch nicht auf ein Resultat geschlossen werden, also wird eine andere Anlaufstelle gebraucht. Ein Versuch wird gemacht, unseren bekannten Quotienten $\frac{f(m)}{g(m)}$ in den Logarithmus zu bekommen, und es stellt sich heraus, dass dies folgendermassen möglich ist:

$$\log(f(m)) - \log(g(m)) = \log\left(\frac{f(m)}{g(m)}\right) \tag{23}$$

Das lässt sich umformen zu:

$$\log(f(m)) = \log(g(m)) + \log\left(\frac{f(m)}{g(m)}\right) \tag{24}$$

Nun dividiert man durch $\log(g(m))$.

$$\frac{\log(f(m))}{\log(g(m))} = \frac{\log(g(m))}{\log(g(m))} + \frac{\log\left(\frac{f(m)}{g(m)}\right)}{\log(g(m))} = 1 + \frac{\log\left(\frac{f(m)}{g(m)}\right)}{\log(g(m))} \tag{25}$$

Nun steht links wieder das ursprüngliche Problem, aber rechts steht ein neues Äquivalent, mit welchem man nun den Grenzwert zu berechnen versuchen kann.

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\log(f(m))}{\log(g(m))} = \lim_{m\to\infty} \left(1 + \frac{\log\left(\frac{f(m)}{g(m)}\right)}{\log(g(m))}\right) \tag{26}$$

Es ist schon bekannt, dass der Limes von $\frac{f(m)}{g(m)}$ zu 0 tendiert, also ist $\log\left(\frac{f(m)}{g(m)}\right) = -\infty$. Und der Limes von $\log(g(m))$ geht ganz klassisch zu ∞. Das heisst, der Grenzwert könnte zu 0, zu einer Konstante oder zu ∞ tendieren, je nach Wachstumsgeschwindigkeit von $f(m)$ und $g(m)$. Das ist schon Beweis genug, dass wir nicht einfach darauf schliessen können, dass $\log(f(m))$ ebenfalls asymptotisch langsamer wächst als $\log(g(m))$.

e)

Die folgenden Funktionen sind gegeben:

$$f(m) = \ln\left(\sqrt{\ln(m)}\right) \tag{27}$$

$$g(m) = \sqrt{\ln\left(\sqrt{m}\right)} \tag{28}$$

Man sieht schnell, dass man beide Funktionen umschreiben kann, indem man die Wurzel als Exponenten ausdrückt.

$$\begin{aligned} f(m) &= \ln\left(\sqrt{\ln(m)}\right) \\ &= \ln\left((\ln(m))^{\frac{1}{2}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\ln(\ln(m)) \end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned} g(m) &= \sqrt{\ln\left(\sqrt{m}\right)} \\ &= \sqrt{\ln\left(m^{\frac{1}{2}}\right)} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2}\ln(m)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\ln(m)} \end{aligned} \tag{30}$$

Nun wendet man das gleiche Prinzip an wie in den anderen Teilaufgaben:

$$\begin{aligned} \lim_{m\to\infty} \frac{\frac{1}{2}\ln(\ln(m))}{\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\ln(m)}} &= \lim_{m\to\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{1} \frac{\ln(\ln(m))}{\sqrt{\ln(m)}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\ln(\ln(m))}{\sqrt{\ln(m)}} \end{aligned} \tag{31}$$

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ ist eine von m unberührte Konstante und kann im Grenzwert vernachlässigt werden. Nun betrachtet man den Bruch und sieht schnell, dass $\sqrt{\ln(m)}$ (im Nenner) schneller wächst als $\ln(\ln(m))$ (im Zähler), also tendiert der ganze Grenzwert gegen 0 und die Aussage ist wahr. $f(m)$ wächst asymptotisch langsamer als $g(m)$.