Lista 7 - Geometria Analítica

2024.1.08.009
Filipe Carvalho

1. Determine as equações paramétricas e na forma simétrica (se existirem) das retas que passam pelos pontos A e B.

a) $A = (3,5,1)$ e $B = (-2,3,2)$

$\vec{AB} = (-5,-2,1)$ equação vetorial: $r: X = (3,5,1) + \lambda(-5,-2,1)$

paramétrica

$$r: \begin{cases} x = 3 - 5\lambda \\ y = 5 - 2\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

simétrica: $\frac{x-3}{-5} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-1}{1}$

b) $A = (0,1,0)$ $B = (1,0,0)$ ① equação vetorial: $X = (0,1,0) + \lambda(1,-1,0)$

$\vec{AB} = (1\ -1\ 0)$ ② paramétrica: $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 0. \end{cases}$

não existe forma simétrica, pois $v_3 = 0$

c) $A = (0,1,1)$, $B = (0,0,0)$ ① $X = (0,1,1) + \lambda(0,-1,-1)$

$\vec{AB} = (0,-1,-1)$ ② $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$ não existe forma simétrica

d) $A = (3,2,1)$, $B = (6,1,4)$ ① $X = (3,2,1) + \lambda(3,-1,3)$

$\vec{AB} = (3,-1,3)$

② $\begin{cases} x = 3 + 3\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 1 + 3\lambda \end{cases}$

③ $\frac{x-3}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{3}$

2. Considere a reta r de equações paramétricas

$$\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 4 + 2\lambda \end{cases}$$

a) Obtenha dois pontos e dois vetores diretores da reta r.

$x = 1 - 1 = 0$
$y = 1 = 1$
$z = 4 + 2 = 6$

$A = (0, 1, 6)$
$B = (-1, 2, 8)$

$\vec{AB} = (-1, 1, 2)$
$\vec{BA} = (1, -1, -2)$

$x = 1 - 2 = -1$
$y = 2 = 2$
$z = 4 + 4 = 8$

b) Verifique se os pontos $P = (1, 3, -3)$ e $Q = (-3, 4, 12)$ pertencem à reta r.

$$\begin{cases} 1 = 1 - \lambda \\ 3 = \lambda \\ -3 = 4 + 2\lambda \end{cases} \quad \begin{matrix} \lambda = 3 \\ \lambda = 0 \\ \lambda = -\frac{7}{2} \end{matrix} \quad P \notin r$$

$$\begin{cases} -3 = 1 - \lambda \\ 4 = \lambda \\ 12 = 4 + 2\lambda \end{cases} \quad \begin{matrix} \lambda = 4 \\ \lambda = 4 \\ \lambda = 4 \end{matrix} \quad Q \in r$$

c) Obtenha equações paramétricas da reta que contém o ponto $(1, 4, -7)$ e é paralela à reta r.

$$\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 4 + \lambda \\ z = -7 + 2\lambda \end{cases}$$

3. Sejam $A = (3, -6, 7)$, $B = (-5, 2, 3)$ e $C = (4, -7, 6)$

a) Mostre que A, B e C são vértices de um triângulo

A, B e C não podem estar alinhados

$\vec{AB}$ e $\vec{AC}$ formam LI

$\vec{AB} = (-8, 8, -4)$
$\vec{AC} = (1, -1, -1)$

$\alpha(-8, 8, -4) + \beta(1, -1, -1) = 0$

$-8\alpha + \beta = 0$
$8\alpha - \beta = 0$
$-4\alpha - \beta = 0$

$\beta = -4\alpha$

$8\alpha + 4\alpha = 0$
$\alpha = 0$
$0 - \beta = 0$
$\beta = 0$

$\boxed{LI}$

b) Escreva uma equação vetorial da reta que contém a mediana relativa ao vértice C

Sai da metade do lado AB $\longrightarrow$ C

$A + \frac{1}{2}\vec{AB} = (3,-6,7) + \frac{1}{2}(-8,8,-4) = (3,-6,7) + (-4,4,-2) = (-1,-2,5)$

$\vec{XC} = (5,-5,1)$

$r: X = (-1,-2,5) + \lambda(5,-5,1)$.

4.

a) São dados os pontos $A=(0,1,8)$ e $B=(-3,0,9)$, e a reta $r: X=(1,2,0)+\lambda(1,1,-3)$. Determine um ponto C de r tal que A, B e C sejam vértices de um triângulo retângulo.

$\vec{AB} = (-3,-1,1)$ $\quad \vec{AB} \cdot \vec{v} = 0$ $\quad (-3,-1,1)\cdot(1+\lambda, 2+\lambda, -3\lambda) = 0$

$(-3-3\lambda)+(-2-\lambda)+(-3\lambda$

$-3-3\lambda-2-\lambda-3\lambda = 0$

$-7\lambda-5=0$

$\lambda = -\frac{5}{7}$

$C = \left(-\frac{5}{7}, -\frac{5}{7}, \frac{15}{7}\right)$ $\cancel{X}$

5. Escreva uma equação vetorial e equações paramétricas do plano π utilizando as informações dadas em cada caso.

a) π contém o ponto $A=(1,2,0)$ e é paralelo aos vetores $\vec{u}=(1,1,0)$ e $\vec{v}=(2,3-1)$

$\alpha(1,1,0)+\beta(2,3,-1)=0$

$\pi: P = (1,2,0) + \alpha(1,1,0) + \beta(2,3,-1)$

$\alpha+2\beta=0$

$\alpha+3\beta=0$

$-\beta=0$

$\beta=0$

$\alpha+0=0$ $\boxed{LI}$

$\alpha=0$

$$\begin{cases} x = 1+\alpha+2\beta \\ y = 2+\alpha+3\beta \\ z = -\beta \end{cases}$$

b) π contém $A=(1,1,0)$ e $B=(1,-1,-1)$ e é paralelo ao vetor

$\vec{v}=(2,1,0)$ $\qquad \alpha(2,1,0)+\beta(0,-2,-1)=0$

$\vec{AB}=(0,-2,-1)$

$$2\alpha=0 \qquad \alpha=0$$
$$\alpha-2\beta=0 \qquad \beta=0 \qquad \boxed{LI}$$
$$-\beta=0$$

$$\begin{cases} x=1+2\alpha \\ y=1+\alpha-2\beta \\ z=-\beta \end{cases}$$

$\pi: P=(1,1,0)+\alpha(2,1,0)+\beta(0,-2,-1)$

c) π contém os pontos $A=(1,0,1)$, $B=(2,1,-2)$ e $C=(1,-1,0)$

$\vec{AB}=(1,1,-3)$

$\vec{AC}=(0,-1,-1)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{matrix} \qquad -2-2-1=5$$

$\boxed{LI}$

$\pi: P=(1,0,1)+\alpha(1,1,-3)+\beta(0,-1,-1)$

$$\begin{cases} x=1+\alpha \\ y=\alpha-\beta \\ z=1-3\alpha-\beta \end{cases}$$

6. Obtenha uma equação geral do plano π descrito em cada caso.

a) π contém o ponto $A=(9,-1,0)$ e é paralelo aos vetores $\vec{u}=(0,1,0)$ e $\vec{v}=(1,1,1)$

$\vec{n}=\vec{u}\times\vec{v}=(1,0,-1)$

$$\begin{bmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \cancel{i\,k} \quad i-k$$

$x-z=d$

$9-0=d$ $\qquad \boxed{x-z=9}$

$d=9$

b) π contém os pontos $A=(1,0,1)$, $B=(-1,0,1)$ e $C=(2,1,2)$

$\vec{AB}=(-2,0,0)$

$\vec{AC}=(1,1,1)$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2j-2k$$

$2y-2z=d$

$2\cdot 0-2\cdot 1=d$ $\qquad 2y-2z=-2$

$d=-2$

c) π contém $A=(1,1,0)$ e $B(1,-1,-1)$ e é paralelo a $\vec{u}=(2,1,0)$

$\vec{AB}=(0,-2,-1)$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -i+2j-4k$$

$\vec{n}=(-1,2,-4)$

$-x+2y-4z=d$

$-1+2+0=d$

$d=1$

$-x+2y-4z=1$

d) π contém $P=(1,-1,1)$ e $r: X=(0,2,2)+\lambda(1,1,-1)$

$\vec{v}=(1,1,-1)$

$A=(0,2,2)$

$\vec{AP}=(1,-3,-1)$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix}$$

$-4i-4k$

$-4y-4z=0$

$-4y-4z=d$

$4-4=d$

$d=0$

* está errado.

7. Dada uma equação geral, obtenha equações paramétricas do plano.

a) $4x+2y-z+5=0$

$-z+5=0$

$-z=-5$

$z=5$

A: $x=0$
$y=0$
$z=5$

B: $x=0$
$y=-\frac{5}{2}$
$z=0$

$2y+5=0$ $\quad 2y=-5$

$y=-\frac{5}{2}$

C: $4x+5=0$
$x=\frac{5}{4}$
$y=0$
$z=0$

$\vec{AB}=(0,-\frac{5}{2},-5)$

$\vec{AC}=(\frac{5}{4},0,-5)$

$\pi: P=(0,0,5)+\alpha(0,-\frac{5}{2},-5)+\beta(\frac{5}{4},0,-5)$

$$\begin{cases} x=\frac{5}{4}\beta \\ y=-\frac{5}{2}\alpha \\ z=5-5\alpha-5\beta \end{cases}$$

b) $5x - y - 1 = 0$

$5x - 0 - 1 = 0$ $\qquad$ $5 \cdot 0 - y - 1 = 0$

$5x = 1$ $\qquad$ $-y = 1$

$\qquad\qquad$ $y = -1$

$A \begin{cases} x = 1/5 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ $\qquad$ $B: \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \\ z = 0 \end{cases}$ $\qquad$ $C: \begin{cases} x = 5 \\ y = 4 \\ z = 0 \end{cases}$

$\pi: \begin{cases} x = \frac{1}{5} - \frac{1}{5}\alpha + \frac{24}{5}\beta \\ y = -\alpha + 4\beta \\ \end{cases}$

$\vec{AB} = (-\frac{1}{5}, -1, 0)$ $\qquad$ $\vec{AC}: (\frac{24}{5}, 4, 0)$

$\pi: P = (\frac{1}{5}, 0, 0) + \alpha(-\frac{1}{5}, -1, 0) + \beta(\frac{24}{5}, 4, 0)$

c) $z - 3 = 0$ $\qquad$ $X = (3, 0, 0) + \alpha(1, 0, 0) + \beta(0, 1, 0)$

$z = 3$
$y = \beta$
$x = \alpha$

d) $y - z - 2 = 0$ $\qquad$ $X = (0, 0, -2) + \alpha(1, 0, 0) + \beta(0, 1, 1)$

$-z = 2 - y$ $\qquad$ $\begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = -2 + \beta \end{cases}$

$z = -2 + y$

8. Dadas equações paramétricas, obtenha uma equação geral do plano.

a) $\begin{cases} x = 1 + \lambda - \mu \\ y = 2\lambda + \mu \\ z = 3 - \mu \end{cases}$ $\qquad$ $P = (1, 0, 3) + \lambda(1, 2, 0) + \mu(-1, 1, -1)$

$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ $\qquad$ $-2i + j + 3k$ $\qquad$ $\vec{n} = (-2, 1, 3)$

$-2x + y + 3z = p$ $\qquad$ $-2 \cdot 1 + y \cdot 0 + 3 \cdot 3 = p$ $\qquad$ $\boxed{-2x + y + 3z - 7 = 0}$

$-2 + 9 = 7$

b) $\begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 2 \\ z = 3-\lambda+\mu \end{cases}$ $\pi: P = (1,2,3) + \lambda(1,0-1) + \mu(0,0,1)$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0i - j + 0k$$

$-y = a$

$-y = -2$

$\boxed{-y+2=0}$

c) $\begin{cases} x = -2+\lambda-\mu \\ y = 2\lambda+2\mu \\ z = \lambda+\mu \end{cases}$ $\pi: P = (0,0,0) + \lambda(-2,2,1) + \mu(-1,2,1)$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad 0i + 1j - 2k$$

$\boxed{y-2z=0}$

9. Verifique se as retas r e s são concorrentes e, se forem, determine o ponto de intersecção e obtenha uma equação geral do plano determinado por elas.

a) $r: \begin{cases} x = 1+2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1+3\lambda \end{cases}$, $s: \begin{cases} x = -1+4\mu \\ y = -1+2\mu \\ z = -2+6\mu \end{cases}$

$r: X = (1,0,1) + \lambda\underbrace{(2,1,3)}_{\vec{v}}$ $s: X = (-1,-1,-2) + \mu\underbrace{(4,2,6)}_{\vec{u}}$

$\vec{v}$ e $\vec{u}$ são paralelos

$\therefore$ r e s não são concorrentes.

b) $r: X = (1,1,0) + \lambda(1,2,3)$, $s: X = (2,3,3) + \mu(3,2,1)$

$\lambda(1,2,3) + \mu(3,2,1) = 0$

$\lambda + 3\mu = 0$
$2\lambda + 2\mu = 0$
$3\lambda + \mu = 0$

$\mu = -3\lambda$

$\lambda - 9\lambda = 0$
$-8\lambda = 0$
$\lambda = 0$

$0 + 2\mu = 0$
$\mu = 0$

LI, não são paralelas

$(1,1,0) + \lambda(1,2,3) = (2,3,3) + \mu(3,2,1)$

$1 + \lambda = 2 + 3\mu$
$1 + 2\lambda = 3 + 2\mu$
$3\lambda = 3 + \mu$
$\mu = 3\lambda - 3$

$1 + \lambda = 2 + 9\lambda - 9$
$1 + \lambda = -7 + 9\lambda$
$8\lambda = 8$
$\lambda = 1$

$2 = 2 + 3\mu$
$3\mu = 0$

$(1,1,0) + (1,2,3) = (2,3,3)$

$(2,3,3)$ é o ponto de intersecção.

$\pi: X = (2,3,3) + \alpha(1,2,3) + \beta(3,2,1)$

c) $r: \begin{cases} x = 2 - 4\lambda \\ y = 4 + 5\lambda \\ z = 11 \end{cases}$ $s: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-2} = z$

$r: X = (2,4,11) + \alpha(-4,5,0)$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$s: X = (0,1,0) + \beta(2,-2,1)$

os dois vetores diretores não são paralelos

$\begin{cases} 2 - 4\alpha = 2\beta \\ 4 + 5\alpha = 1 - 2\beta \\ 11 = 1 + \beta \end{cases}$

$\beta = 10$

$2 - 4\alpha = 20$ $\quad -4\alpha = 18$ $\quad \alpha = -\frac{18}{4} = -\frac{9}{2}$

$4 + 5\alpha = 1 - 20$ $\quad \alpha = -\frac{23}{5}$

não se cruzam (reversas)

$\alpha(-2,-3,-11) + \beta(-4,5,0) + \gamma(2,-2,1) = 0$

$-2\alpha - 4\beta + 2\gamma = 0$
$-3\alpha + 5\beta - 2\gamma = 0$
$-11\alpha + \gamma = 0$

$\begin{matrix} -2 & -4 & 2 \\ -3 & 5 & -2 \\ -11 & 1 & \end{matrix}$

$\begin{vmatrix} -2 & -3 & -11 \\ -4 & 5 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} -2 & -3 \\ -4 & 5 \\ 2 & -2 \end{matrix}$ $= -10 + 0 - 88 + 12 - 0 + 110 \neq$

LI

d) $r: \frac{x-2}{3} = \frac{y+2}{4} = z$, $s: \frac{x}{4} = \frac{y}{2} = \frac{z-3}{2}$

$r: X = (2,-2,0) + \alpha(3,4,1)$ $s: X = (0,0,3) + \beta(4,2,2)$

$\alpha(3,4,1) + \beta(4,2,2) = 0$

$3\alpha + 4\beta = 0$
$4\alpha + 2\beta = 0$
$\alpha + 2\beta = 0$
$3\alpha = 0$

$0 + 2\beta = 0$
$\beta = 0$

$\boxed{LI}$

$2 + 3\alpha = 4\beta$
$-2 + 4\alpha = 2\beta$
$\alpha = 2\beta + 3$
$\alpha = -2 + 4\alpha + 3$
$-3\alpha = 1$ $\alpha = -\frac{1}{3}$

$\beta = -1 + 2\alpha$
$\beta = \frac{4}{3}$

$2 - 1 = \frac{16}{3}$? não são concorrentes

$(-2, 2, 3)$

$$\left|\begin{matrix} -2 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{matrix}\right| \begin{matrix} -2 & 2 \\ 3 & 4 \\ 4 & 2 \end{matrix} =$$

$-16 + 8 + 18 - 12 + 4 - 48$
$-16 - 18 - 48 + 8 + 18 + 4 \neq 0$
$\boxed{LI}$ REVERSAS

10. Dizemos que uma reta está escrita na forma planar quando ela é descrita como a intersecção de dois planos na forma ~~real~~ geral. Obtenha uma equação vetorial da reta r a partir de suas equações planares.

a) $r: \begin{cases} x + 2y + 3z - 1 = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$

$\cancel{-x} + y - 2z = 0$
$\cancel{x} + 2y + 3z = 1$
$3y + z = 1$
$z = 1 - 3y$

$x - y + 2 - 6y = 0$
$x = 7y - 2$

$x = 7y - 2$
$z = 1 - 3y$
$y = y$

$(7y - 2, y, 1 - 3y)$

$\boxed{r: (-2, 0, 1) + y(7, 1, -3)}$

b) $r: \begin{cases} x + y + z - 1 = 0 & ① \\ x + y - z = 0 & ② \end{cases}$

$\cancel{x} + \frac{1}{2} - \cancel{x} + z = 1$
$z = -\frac{1}{2}$

$① + ②: 2x + 2y = 1$
$x + y = \frac{1}{2}$
$y = \frac{1}{2} - x$

$(x, \frac{1}{2} - x, -\frac{1}{2})$

$r: X = (0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) + x(1, -1, 0)$

c) $r: \begin{cases} x=3 \\ 2x-z+1=0 \end{cases}$ $P=(3,0,7)+\lambda(0,1,0)$

$6-z+1=0$

$7-z=0$

$z=7$

$x=3$
$z=7$
$y=\lambda$

d) $y=2$
$z=0$

$x=\lambda$
$y=2$
$z=0$

$P=(0,2,0)+\lambda(1,0,0)$

11. Estude a posição relativa das retas r e s.

a) $r: X=(1,-1,1)+\lambda(-2,1,-1)$, $s: \begin{cases} y+z=3 \\ x+y-z=6 \end{cases}$ $(3+2z,3-z,z)$

$s: X=(3,3,0)+z(2,-1,1)$

$y=3-z$

$x+3-z-z=6$

$x+3-2z=6$

$x=3+2z$

→ As duas retas são paralelas.
↓
paralelas distintas

$3+2z=1$
$3-z=-1$
$0+z=1$

$z=1$

$\boxed{3-1=-1}$

b) $r: \frac{x+1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{2}$, $s: X=(0,0,0)+\lambda(1,2,0)$

$r: X=(-1,0,-1)+\lambda(2,3,2)$

os vetores diretores não são paralelos

→ $\boxed{\text{reversas}}$

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{matrix}$

$0+0+4-0-4-3$

$\boxed{-3}$

c) $r: X=(8,1,9)+\lambda(2,-1,3)$, $X=(3,-4,4)+\mu(1,-2,2)$

$\alpha(2,-1,3)+\beta(1,-2,2)=0$ → não são paralelos

$2\alpha+\beta=0$
$-\alpha-2\beta=0$ $\quad 0+\beta=0$
$3\alpha+2\beta=0$ $\quad \beta=0$

$2\alpha=0 \quad \alpha=0$

$$\left|\begin{matrix}5 & 5 & 5\\ 2 & -1 & 3\\ 1 & -2 & 2\end{matrix}\right| \begin{matrix}5 & 5\\ 2 & -1\\ 1 & -2\end{matrix}$$

$-10+15-20-20+30+5$
$50-50=0$
$\boxed{LI}$ ∴ concorrentes!

d) $r: \dfrac{x+1}{2}=y=z$, $s: x+y-3z=1$
$2x-y-2z=0$

$r: X=(-1,0,0)+\lambda(2,1,1)$ $\quad s: X=(1/3, 2/3, 0)+\lambda(5/3, 4/3, 1)$

$\begin{cases} x=\dfrac{1+5\lambda}{3} \\ y=\dfrac{2+4\lambda}{3} \\ z=\lambda \end{cases}$

$3x-5z=1$
$3x=1+5z$
$x=\dfrac{1+5z}{3}$

$\dfrac{1+5z}{3}+y-3z=1$

$1+5z+3y-9z=3$
$1-4z+3y=3$
$3y=2+4z$
$y=\dfrac{2+4z}{3}$
$z=\lambda$

$\alpha(2,1,1)+\beta(5/3, 4/3, 1)=0$

$2\alpha+\frac{5}{3}\beta=0$
$\alpha+\frac{4}{3}\beta=0$
$\alpha+\beta=0$ $\quad -\beta+\frac{4}{3}\beta=0$
$\alpha=-\beta$ $\quad \frac{1}{3}\beta=0$
$\beta=0 \quad \alpha=0$

$\boxed{LI}$

12. Estude a posição relativa entre r e π e, quando forem transversais, obtenha o ponto de intersecção P.

a) $r: X=(1,1,0)+\lambda(0,1,1)$, $\pi: x-y-z=2$. $\quad \vec{n}=(1,-1,-1)$

$(0,1,1)\cdot(1,-1,-1)=-2$
→ concorrente

$-z=2$
$z=-2$
A: $x=0$, $y=0$, $z=-2$

B: $-y=2$, $y=-2$
$x=0$, $y=-2$, $z=0$

C: $x=2$
$x=2$, $y=0$, $z=0$

$\vec{AB}=(0,-2,2)$ $\quad \pi: X=(0,0,-2)+\alpha(0,-2,2)+\beta(2,0,2)$
$\vec{AC}=(2,0,2)$

$x=1$
$y=1+\lambda$
$z=\lambda$

$x-y-z=2$
$1-(1+\lambda)-\lambda=2$
$\cancel{1}-\cancel{1}-\lambda-\lambda=2$
$-2\lambda=2$
$\lambda=-1$

$x=1$
$y=1-1$
$z=-1$

Ponto Intersecção
$P=(1,0,-1)$

b) $r: \frac{x-1}{2} = y = z$, $\pi: X = (3,0,1) + \alpha(1,0,1) + \beta(2,2,0)$

$r: X = (1,0,0) + \lambda(2,1,1)$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2i + 2j + 2k = (-2,2,2)$$

$(1,0,0) = (3,0,1) + \alpha(1,0,1) + \beta(2,2,0)$

$1 = 3 + \alpha + 2\beta$

$0 = 2\beta$

$0 = 1 + \alpha$

$\alpha = -1$

$\beta = 0$

$(2,1,1) \cdot (-2,2,2) = -4 + 2 + 2 = 0$

$\therefore$ paralelo ao plano

$1 = 3 - 1 + 0$

$1 = 2$ $X \notin \pi$, logo não são coincidentes!

c) $r: \begin{cases} x - y = 1 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$, $\pi: x + y = 2$

$1 + y - 2y = 0$

$1 - y = 0$

$y = 1$

$\begin{cases} x = 1 + y = 2 \\ y = 1 \\ z = \lambda \end{cases}$ $P: (2,1,0) + \lambda(0,0,1)$

$(0,0,1) \cdot (1,1,0) = 0$ $\therefore$ são paralelos

$2 + 1 \neq 2$, não são coincidentes

d) $r: \underbrace{x - 2y = 3 - 2z + y = 2x - z}_{\text{que forma?}}$, $\pi: X = (1,4,0) + \lambda(1,1,1) + \mu(2,1,0)$

B. Considere os exercícios abaixo.

a) Calcule m para que r seja paralela a π, onde $r: X = (1,1,1) + \lambda(2,m,1)$ e $\pi: X = (0,0,0) + \alpha(1,2,0) + \beta(1,0,1)$

$(2,m,1) \cdot (2,-1,-2) = 0$

$4 - m - 2 = 0$

$m = 2$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2i - j - 2k$$

$\vec{\pi} = (2,-1,-2)$

b) Calcule m e n para que r esteja contida em π, sendo $r: X=(n,2,0)+\lambda(2,m,m)$ e $\pi: x-3y+z=1$

$\vec{n} = (1,-3,1)$

$(1,-3,1)\cdot(2,m,m)=0$

$2-3m+m=0$

$2-2m=0 \quad -2m=-2$

$m=\frac{-2}{-2}=1$

$n-3\cdot 2+0=1$

$n-6=1$

$n=7$

c) Para que valores de m a reta $r: \frac{x-1}{m}=\frac{y}{2}=\frac{z}{m}$ é transversal ao plano $\pi: x+my+z=0$

$\vec{n} = (1,m,1)\cdot(m,2,m)\neq 0$

$m+2m+m\neq 0$

transversal ao plano quando $m\neq 0$ ☆

14. Estude a posição relativa dos planos π_1 e π_2. Quando forem transversais, determine uma equação da intersecção na forma vetorial.

$-25+15=10$
$-20 \quad 10=15$

a) $\pi_1: X=(4,2,4)+\lambda(1,1,2)+\mu(3,3,1)$

$\pi_2: X=(3,0,0)+\lambda(1,1,0)+\mu(0,1,4)$

$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ $\quad -5i+5j$

$\vec{n_1} = (-5,5,0)$

$\vec{n_1}$ não é paralelo a $\vec{n_2}$

$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ $\quad 4i-4j+k$

$\vec{n_2} = (4,-4,1)$

$\begin{cases} -5x+5y=10 \\ 4x-4y+z=12 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} -5x+5y-10=0 \\ 4x-4y+z-12=0 \end{matrix}$

$r: \begin{cases} x=\lambda \\ y=2+\lambda \\ z=20 \end{cases} \rightarrow X=(0,2,20)+\lambda(1,1,0)$

$5y=10+5x$

$y=2+x$

$x=\lambda$

$4x-4(2+x)+z-12=0$

$\cancel{4x}-8-\cancel{4x}+z-12=0$

$-8+z-12=0 \quad z=20$

b) $\pi_1: x - y + 0z - 2 = 0$

$\pi_2: X = (0,0,1) + \lambda(1,0,3) + \mu(-1,1,1)$

$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad -3i - 4j + k$

$\vec{n}_1 = (1,-1,2)$

$\vec{n}_2\ (-3,-4,1)$

$\alpha(1,-1,2) + \beta(-3,-4,1) = 0$

$\alpha - 3\beta = 0$

$-\alpha - 4\beta = 0$

$2\alpha + \beta = 0$

$\alpha = -4\beta$

$-4\beta - 3\beta = 0$

$\beta = 0$

$\alpha - 0 = 0$

$\alpha = 0$

$\boxed{LI}$

$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 2 \\ -3 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 7i - 7j - 7k$

$r: X = (0,0,1) + \lambda(7,-7,-7)$

c) $\pi_1: 2x - y + z - 1 = 0 \quad \pi_2: 4x - 2y + 2z - 9 = 0$

$\vec{n}_1 : (2,-1,1) \quad \vec{n}_2 = (4,-2,2)$

$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 8 + 2 + 2 \neq 0$

d)

Digitalizado com CamScanner

15. Resolva os exercícios abaixo

a) Mostre que os planos $\pi_1 \begin{cases} x = -\lambda_1 + 2\mu_1 \\ y = m\lambda_1 \\ z = \lambda_1 + \mu_1 \end{cases}$ e $\pi_2 \begin{cases} x = 1 + m\lambda_2 + \mu_2 \\ y = 2 + \lambda_2 \\ z = 3 + m\mu_2 \end{cases}$

são transversais qualquer que seja o número real m.

$$\boxed{\begin{aligned} \lambda_1 &= \alpha \\ \lambda_2 &= \lambda \\ \mu_1 &= \beta \\ \mu_2 &= \mu \end{aligned}}$$

π_1: $\alpha(-1, m, 1) + \beta(2, 0, 1)$

π_2: $\lambda(m, 1, 0) + \mu(1, 0, m)$

$$\vec{n}_1 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & m & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad mi + 3j - 2mk \quad \vec{n}_1 = (m, 3, -2m)$$

$$\vec{n}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ m & 1 & 0 \\ 1 & 0 & m \end{vmatrix} \quad mi + m^2 j - k \quad \vec{n}_2 = (m, m^2, -1)$$

$$\alpha(m, 3, -2m) + \beta(m, m^2, -1) = 0$$

$$\alpha m + \beta m = 0$$
$$3\alpha + \beta m^2 = 0$$
$$-2\alpha m - \beta = 0 \; \nexists$$

b) Calcule m e n para que os planos $\pi_1 : X = (1, 1, 0) + \lambda(m, 1, 1) + \mu(1, 1, m)$ e $\pi_2 : 2x + 3y + 2z + n = 0$ sejam paralelos distintos.