Material Adicional

- **Matriz de transformación**: elemento del álgebra que representa transformaciones entre espacios vectoriales.

- **Matriz de transformación homogénea**: instrumento que amplía el concepto de transformaciones para incluir a las traslaciones dentro de las transformaciones lineales. De esta forma, tanto traslaciones como rotaciones (transformaciones usadas en robótica) son líneas y pueden componerse.

- **Representación de vectores en coordenadas homogéneas**: los vectores de 2D y 3D deben tener una dimensión más, con valor unitario siempre, para estar en coordenadas homogéneas. Por lo tanto, el vector $(1 \quad 0{,}5)$ pasa a ser $(1 \quad 0{,}5 \quad 1)$, y el $(-1 \quad 0 \quad 1)$ pasa a ser $(-1 \quad 0 \quad 1 \quad 1)$, etc. Esto permitirá el cálculo con matrices homogéneas, ya que éstas también tienen una dimensión más (en 3D son 4x4 y en 2D son 3x3).

- **Representación de transformaciones en coordenadas homogéneas:** las matrices de transformación homogénea utilizadas en robótica son las de traslación y las de rotación, y sus posibles combinaciones. Las representamos con:
$$T = \begin{bmatrix} R_{3x3} & T_{3x1} \\ 0\,0\,0 & 1 \end{bmatrix}$$
Donde R_{3x3} es una matriz de rotación (puede ser 2x2 en 2D), y T_{3x1} es un vector de traslación (puede ser 2x1 en 2D). La última fila corresponde a perspectivas y escalados, transformaciones no utilizadas en Robótica.

- **Inversa de una matriz homogénea**: Una de las ventajas de usar matrices homogéneas, además de poder convertir la traslación en una transformación lineal y poder combinarla con la rotación, es la simplicidad del cálculo de su inversa, que siempre existe:
$$T^{-1} = \begin{bmatrix} (R_{3x3})' & -(R_{3x3})'.T_{3x1} \\ 0\,0\,0 & 1 \end{bmatrix}$$
Donde $(R_{3x3})'$ corresponde a la transpuesta de R_{3x3} (inversa de una matriz ortonormal), y $-(R_{3x3})'.T_{3x1}$ es el producto de dicha matriz por el vector T_{3x1} de la matriz original, negado.

- **Propiedades y particularidades de las matrices de transformaciones homogéneas:**
  - Las transformaciones homogéneas se pueden componer mediante la multiplicación de matrices, pero como es de esperarse, no es una operación conmutativa. Por lo tanto, trasladar un objeto respecto de algún sistema de referencia, y luego rotarlo, puede no ser lo mismo que primero rotarlo, y luego trasladarlo.
  - Si una matriz homogénea T representa alguna transformación respecto de un sistema de referencia $\{O\}$, entonces dicha matriz T nos da la posición y

orientación de un sistema de referencia $\{M\}$ que originalmente coincidía con $\{O\}$ pero sufrió las transformaciones que representa T.
En tal circunstancia, el sistema $\{M\}$ tiene el origen en el punto T_{3x1} de T, respecto del sistema $\{O\}$, el vector X_M está dado por la primera columna de R_{3x3}, el vector Y_M está dado por la segunda, y el vector Z_M por la tercera, todos respecto de $\{O\}$. Por lo tanto, conociendo T se puede conocer (y graficar) completamente el sistema $\{M\}$.

- Una matriz T dada por $T_1.T_2.T_3$, es decir, por la composición de otras tres transformaciones, representa un sistema $\{M\}$ que sufrió una transformación T_1 respecto del origen, dando lugar al sistema $\{M_1\}$, luego una transformación T_2 respecto de $\{M_1\}$, y finalmente una transformación T_3 respecto de $\{M_2\}$. Por lo tanto:
  - T_1 da lugar a un sistema $\{M_1\}$ respecto de $\{O\}$
  - T_2 da lugar a un sistema $\{M_2\}$ respecto de $\{M_1\}$
  - T_3 da lugar a un sistema $\{M_3\}$ respecto de $\{M_2\}$
  - $T_1.T_2$ da lugar a un sistema $\{M_2\}$ respecto de $\{O\}$, que llamaremos $\{^OM_2\}$ para indicar respecto de qué sistema está expresado.
  - $T_1.T_2.T_3$ da lugar a un sistema $\{M_3\}$ respecto de $\{O\}$, que llamaremos $\{^OM_3\}$, y que podríamos adoptar como $\{M\}$ para simplificar, por ser el último de la cadena.
- Por convención adoptaremos el superíndice izquierdo para indicar la referencia de una matriz o vector, por lo tanto:
  - ^OT_n es una matriz de transformación homogénea que representa el sistema $\{n\}$ respecto de $\{O\}$, es decir, las transformaciones que dieron lugar al cálculo de T son las que sufrió un sistema $\{n\}$ que originalmente coincidía con $\{O\}$.
  - ^Op es punto o vector en el espacio, que tiene sus coordenadas respecto del sistema $\{O\}$.
- Nótese que un sistema de referencia o un vector pueden estar fijos en el espacio, y tener representaciones completamente diferentes, dependiendo del sistema en el que se expresen, por lo tanto, la indicación del superíndice izquierdo es muy importante.

- **Aplicación de la inversa de una Matriz de transformación homogénea**: ya se vio que el cálculo de la inversa de estas matrices es muy simple y siempre existe. En la práctica, si una matriz representa la posición y orientación de un sistema de referencia $\{M\}$ respecto de $\{O\}$, entonces, la inversa de dicha matriz representará al sistema $\{O\}$ respecto de $\{M\}$, situación que puede ser muy útil, sobre todo cuando se trabaje con varios sistemas y no haya una jerarquía específica entre ellos, simplemente se necesite referenciar adecuadamente las cosas. En resumen:
$$(^OT_n)^{-1} = {}^nT_0$$

- **Cálculos con matrices de transformación homogénea**: los cálculos más comunes con estas matrices son entre ellas, para lograr composición de transformaciones y, por lo tanto, para lograr nuevos sistemas de referencia respeto de alguno inicial. Esto ya se vio en los puntos anteriores. El otro cálculo importante que haremos es el producto de matriz por vector, y de esta forma podremos cambiar la referencia de un mismo vector.

Un vector expresado en $\{M\}$, sistema dado por ${}^{O}T_{M}$, puede expresarse en $\{O\}$ con el producto siguiente:

$${}^{O}v = {}^{O}T_{M}.{}^{M}v$$

En caso de un vector expresado $\{O\}$ que se desea tener en $\{M\}$, lo que se debería hacer es:

$${}^{M}v = ({}^{O}T_{M})^{-1}.{}^{O}v = {}^{M}T_{O}.{}^{O}v$$

Observación 1: note que, utilizando el superíndice izquierdo para las referencias, y el subíndice derecho para el sistema representado (en matrices), los cálculos, tanto entre matrices como entre matrices y vectores, se pueden ordenar adecuadamente si en la expresión se coloca un subíndice derecho coincidente con el superíndice izquierdo. Es decir, la siguiente expresión es correcta para nosotros:

$${}^{\boldsymbol{A}}v = {}^{A}T_{\boldsymbol{B}}.{}^{\boldsymbol{B}}T_{\boldsymbol{C}}.{}^{\boldsymbol{C}}T_{\boldsymbol{D}}.{}^{\boldsymbol{D}}v$$

Mientras que la siguiente no:

$${}^{O}v = {}^{M}T_{\cancel{O}}.{}^{\cancel{M}}v$$

Observación 2: el álgebra lineal que nosotros utilizamos en robótica es una mínima parte de todo lo que se puede hacer con matrices homogéneas, vectores y sistemas de referencia. En distintos contextos y aplicaciones se pueden realizar productos con otros órdenes, incluir otras transformaciones, representar otros elementos del álgebra, realizar distintos tipos de gráficos, etc. En este curso hacemos una simplificación de este contenido, que ha sido resumido en este documento.