

# **SYSTEM OF OSCILLATORS**



**FABIO CASTELLANOS LENES Y NICOLÁS MANRIQUE VELÁSQUEZ**

**FCASTELLANOS@UNAL.EDU.CO**

**NMANRIQUE@UNAL.EDU.CO**

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA SEDE BOGOTÁ**

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**PROGRAMA DE FÍSICA**

**BOGOTÁ D.C.**

**17 DE DICIEMBRE DE 2019**

## I. Introducción:

Imaginemos una cadena unidimensional de  $n$  esferas de masa  $m$  conectadas por resortes con coeficiente elástico  $k$ . En los extremos, la cadena está atada a paredes por resortes con coeficiente elástico  $K$  (Fig. 1.1).

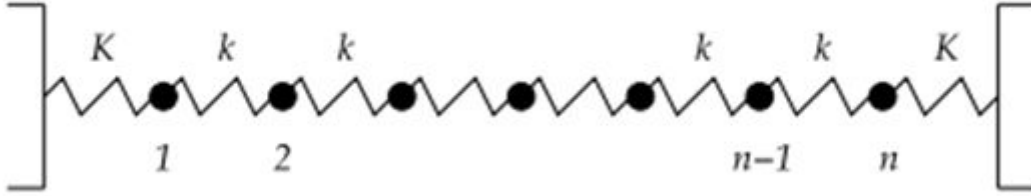


Fig. 1.1

## Objetivo:

Nuestro trabajo será analizar el espectro de oscilaciones de este sistema cuando la razón  $k / K$  cambia, estudiar su comportamiento cuando se acerca al límite termodinámico ( $n \rightarrow \infty$ ) y discutir el espectro en el caso de que una de las masas es más pesada que las otras cuando  $k/K = 1$ .

## Análisis Físico-Matemático:

Para efectos prácticos, enfoquémonos en el caso donde  $n$  es igual a cuatro y supongamos que cada partícula de masa  $m$  se mueve  $x_i$  (Fig. 1.2):

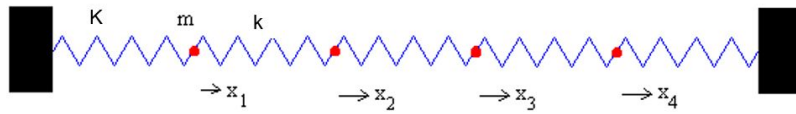


Fig. 1.2

Las ecuaciones diferenciales que rigen este movimiento son :

$$m \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -Kx_1 + k(x_2 - x_1)$$

$$m \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -k(x_2 - x_1) + k(x_3 - x_2)$$

$$m \frac{d^2 x_3}{dt^2} = -k(x_3 - x_2) + k(x_4 - x_3)$$

$$m \frac{d^2 x_4}{dt^2} = -k(x_4 - x_3) - Kx_4$$

Estas ecuaciones diferenciales se pueden representar matricialmente de la siguiente forma (Fig. 1.2):

$$\begin{pmatrix} \frac{K+k}{m} & \frac{-k}{m} & 0 & 0 \\ \frac{-k}{m} & \frac{2 \times k}{m} & \frac{-k}{m} & 0 \\ 0 & \frac{-k}{m} & \frac{2 \times k}{m} & \frac{-k}{m} \\ 0 & 0 & \frac{-k}{m} & \frac{K+k}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d^2 x_1}{dt^2} \\ \frac{d^2 x_2}{dt^2} \\ \frac{d^2 x_3}{dt^2} \\ \frac{d^2 x_4}{dt^2} \end{pmatrix}$$

Fig. 1.2

Posteriormente, podemos hacer uso de la teoría de diagonalización y encontrar los eigenvalores de la matriz para llegar a las distintas soluciones para este caso específico, suponiendo que (Fig. 1.3):

$$\begin{pmatrix} \frac{d^2 x_1}{dt^2} \\ \frac{d^2 x_2}{dt^2} \\ \frac{d^2 x_3}{dt^2} \\ \frac{d^2 x_4}{dt^2} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Fig. 1.3

Los eigenvalores serán las diferentes soluciones para  $\lambda$  que resolverán esta ecuación correspondiente al movimiento armónico simple:  $\omega^2 x = \frac{d^2 x}{dt^2}$ , donde  $\omega^2 = \lambda$ ,  $x$  es el vector columna de las posiciones y  $\omega$  es el valor de las distintas frecuencias de los modos normales de vibración del sistema.

Este procedimiento es análogo para cualquier número  $n$  de partículas, por tanto, vamos a observar su comportamiento cuando se acerca al límite termodinámico dentro de estos casos especiales.

## II. Procedimiento:

Haciendo uso de la librería Eigen, solucionaremos cada caso individualmente. Para esto, entiéndase que  $n = N$ ,  $K = K1$ ,  $k = K2$  y  $m = M$  y que las constantes  $K1 = M = 1$  para efectos de parametrización.

- Variando la razón ( $k/K$ ):

Después de hacer el análisis físico-matemático del sistema, nos damos cuenta que nuestro código tiene como tarea principal hacer una matriz  $N \times N$  con entradas análogas a la de la Fig. 1.2 para luego obtener los valores propios de la misma y la raíz cuadrada de éstos.

Así pues, en primer lugar crearemos una matriz  $N \times N$  rellena con ceros llamada *dif\_eq*, a la cual luego introduciremos en cada entrada su respectivo valor proporcionado por las ecuaciones diferenciales del sistema. De este modo, elegimos rellenar las entradas utilizando un contador *ii* (que va de 0 a  $N - 1$ ) que primero introduce el valor  $2 * K2$  a las entrada de la diagonal principal *dif\_eq(ii, ii)*. Luego verifica si  $ii = 0$  ó  $ii = N - 1$ , para que en tal caso lo sobrescriba como  $K1 + K2$ ; y luego escriba para las entrada de abajo y a la derecha de ésta (*dif\_eq(ii + 1, ii)* y *dif\_eq(ii, ii + 1)*, respectivamente) el valor de  $-K2$ , siempre y cuando éstas existan. Por último, multiplicamos la matriz que tenemos por la constante  $M^{-1}$  tal como nos lo indica el análisis del sistema.

Ya que tenemos nuestra matriz finalizada, lo que queda es obtener sus eigenvalores, los cuales hallaremos haciendo uso de una función de la librería Eigen. Desafortunadamente, estos valores solamente pueden ser guardados en una variable de tipo *vector*, con *dimensión dinámica* y con entradas de tipo *complex*; la cual es perteneciente a esta librería.

Luego, para la impresión de estos valores vamos a imprimir en un archivo su respectivo  $N$ , en otra columna las entradas del *vector* que contiene estos valores propios y en otra columna las raíces cuadrada de éstas. Cabe resaltar que, como éste debe tener entradas de tipo complejo, debimos hacer uso de una función de la librería estándar de C++ que llame a su parte real; pero no hay de qué preocuparse, pues en estos casos comprobamos que sólo tendríamos números reales, puesto que la parte compleja de estas entradas siempre era igual a 0. Otro problema, es que esta función tiene un pequeño margen de error, por lo que los eigenvalores muy parecidos entre sí a veces pueden ser el mismo (ej:  $0 = -5.31e-17$ ).

En este sentido, ya cumplimos con nuestro objetivo principal, pero falta parametrizar  $N$ . La idea es estudiar el comportamiento cuando  $n \rightarrow \infty$ , pero como nuestro computador y nuestro tiempo es limitado, nos conformamos con estudiar una  $N = 2^i$ , siendo  $i = \{1, 2, \dots, 9\}$  para así llegar a  $N = 512$ , un número bastante decente. El problema fundamental de esto es que debido a que la librería Eigen no está lo suficientemente optimizada, toma un tiempo de aproximadamente 4 minutos el hacer este proceso para cada ratio; pero es significativamente mejor que hacer un buscador de eigenvalores manualmente.

Todo este proceso lo introducimos dentro de una función llamada *everything* (Fig. 2.1), la cual es llamada así por antonomasia. Ahora bien, como se debe verificar qué ocurre cuando la razón  $k/K$  va cambiando, esta función *everything* la llamaremos para los casos

donde  $k/K = \{0.1, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0\}$  y creará un archivo de texto para cada valor de la razón y así verificar una tendencia.

```
void everything(double K2, std::string datos)
{
    std::ofstream fout(datos);
    fout.precision(12); fout.setf(std::ios::scientific);
    Eigen::MatrixXcd dif_eq;
    for(int exponent_of_two = 0; exponent_of_two<10;exponent_of_two++) {
        int N = std::pow(2,exponent_of_two);
        dif_eq = Eigen::MatrixXcd::Constant(N, N, 0);
        for(int ii = 0; ii<N ; ii++) {
            dif_eq(ii,ii) = 2*K2;
            if (ii == 0 or ii == N-1) {
                dif_eq(ii,ii) = K1+K2;
            }
            if (ii<N-1) {
                dif_eq(ii,ii+1) = -K2;
                dif_eq(ii+1,ii) = -K2;
            }
        }
        dif_eq = dif_eq*(1/M);
        Eigen::VectorXcd eivals = dif_eq.eigenvalues();
        for(int value = 0; value<N; value++) {
            fout<<N<<"\t";
            fout<<std::real(eivals(value,0))<<"\t";
            fout<<std::pow(std::real(eivals(value,0)), 0.5)<<std::endl;
        }
    }
    fout.close();
}
```

Fig. 2.1

- Masa más pesada ( $M2 > M$ ):

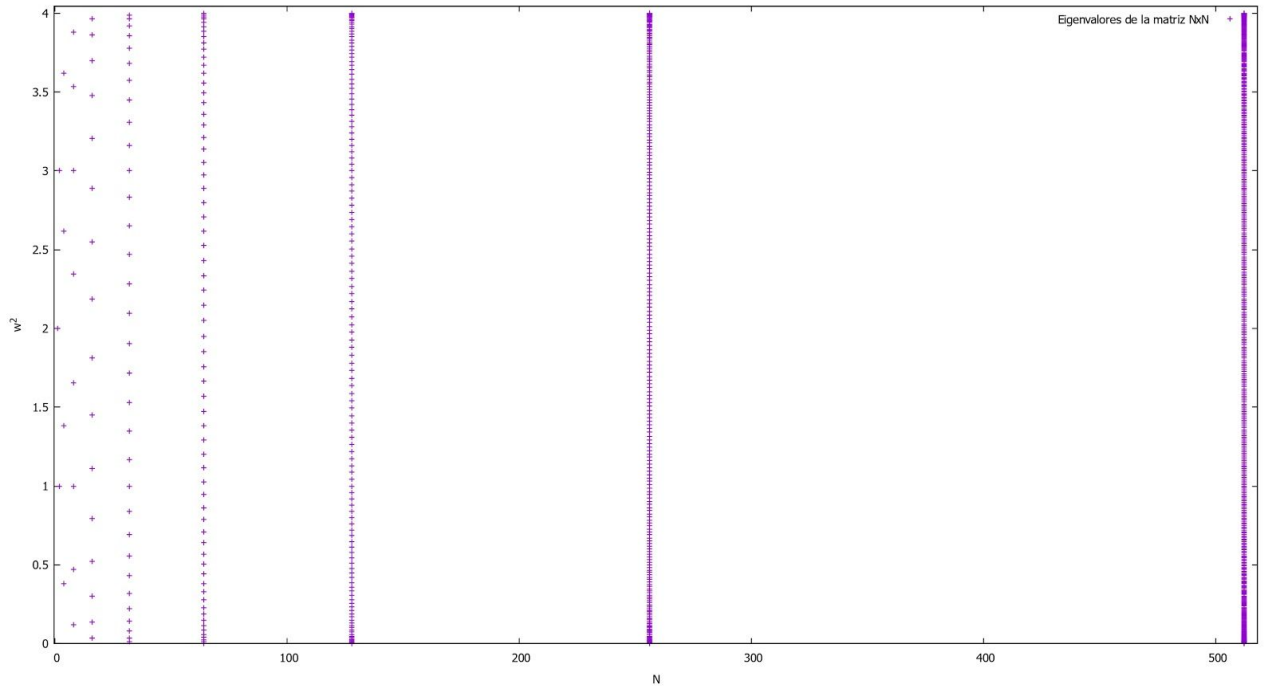
En este caso, estudiaremos si ocurre algún cambio significativo si una de las masas es mayor al resto. La principal diferencia con el código anterior es que aquí estandarizamos la razón  $k/K = 1$ , y lo que variamos es la masa  $M2$  de la partícula  $\frac{N}{2} + 1$  de tal manera que ésta sea 2, 5, 10, 15, 100, 1'000 y hasta 10'000 veces  $M$ . Pero como no hay cambios sustanciales en su proceso, no explicaremos paso a paso este código; cuya razón principal por la que no está en el mismo que el anterior, es por temas de tiempo de ejecución y comodidad y/o comprensión con las variables y constantes globales.

### III. Resultados:

#### Variando $k/K$ :

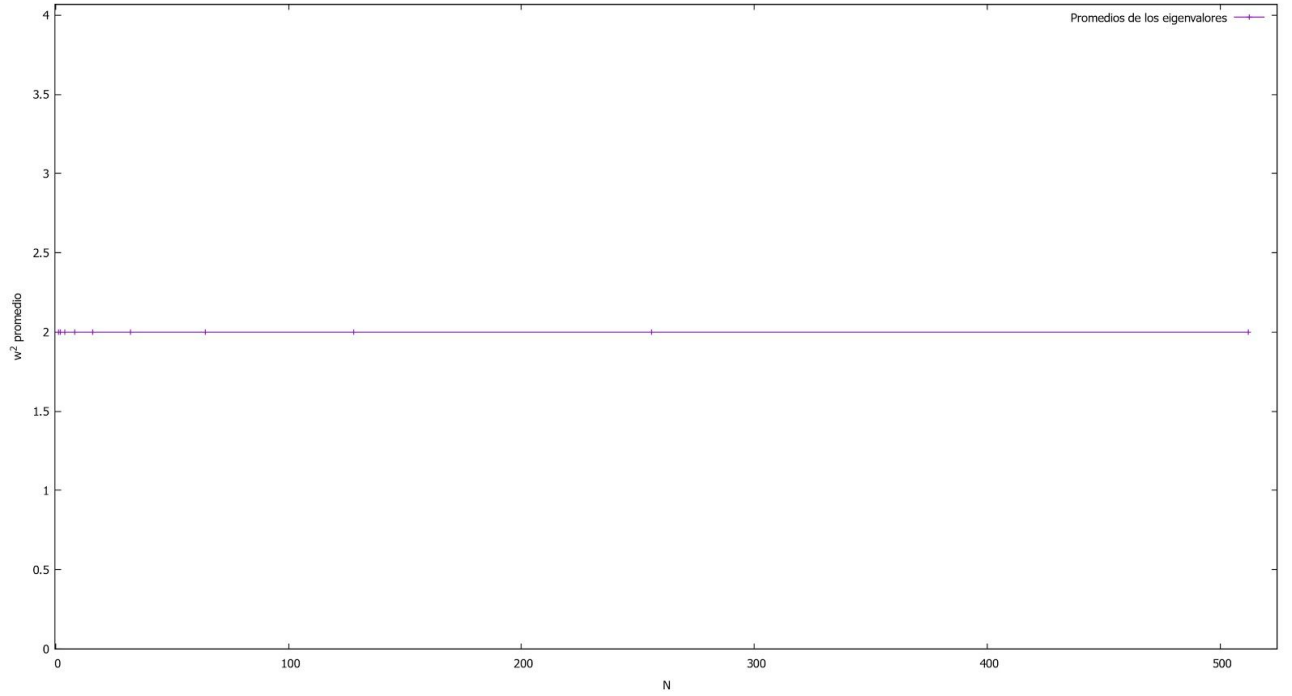
Primero estudiemos lo que ocurre en el caso más general, es decir, cuando la razón vale 1 ( $k = K$ ) y por tanto todos los resortes tienen la misma constante elástica. Cabe resaltar que los

resultados obtenidos aquí (*Fig. 3.1.1*) son valores que, al haber estandarizado nuestras constantes a 1, son múltiplos de la razón  $K/M$  (lo cual es aplicable al resto de resultados, de ahí nuestro deseo de estandarizar las constantes):

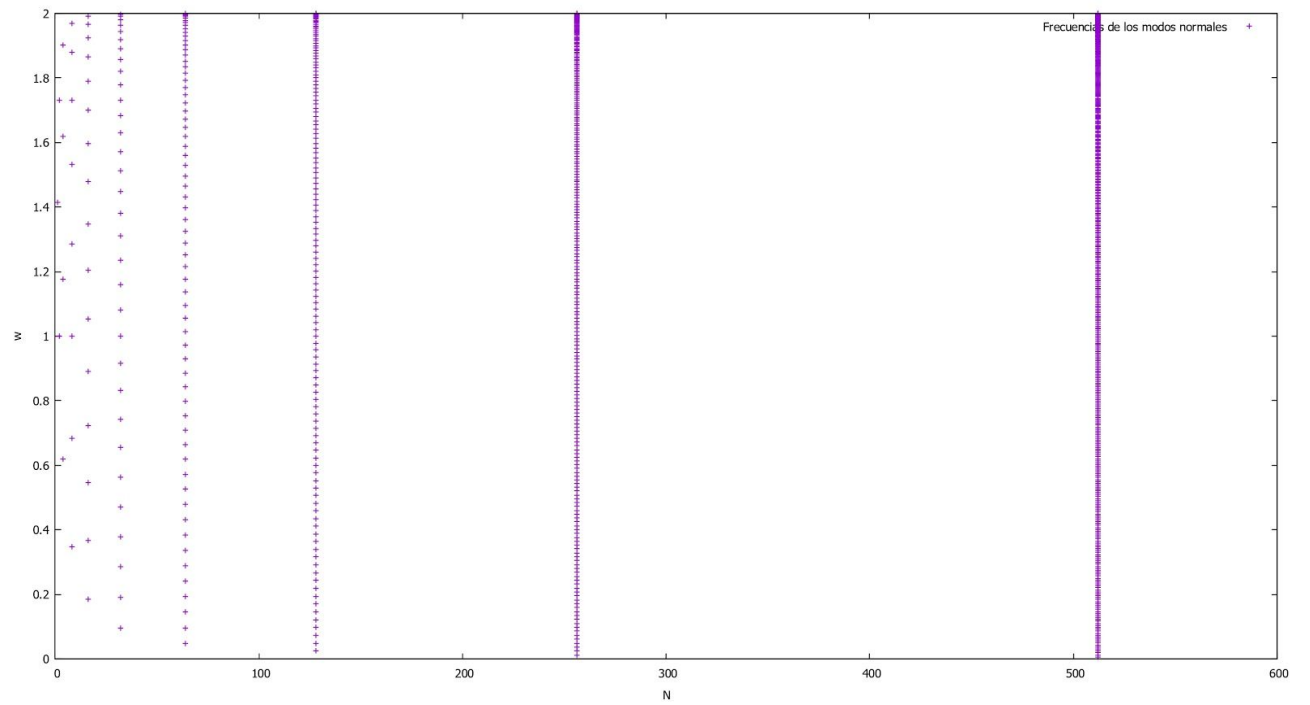


**Fig 3.1.1: Valores de  $\lambda$  para  $k/K = 1$**

Se puede observar cómo, tal cual había de esperarse, a medida que  $N \rightarrow \infty$  el número de eigenvalores crece de la misma forma. A pesar de esto, los valores siempre se encuentran dentro del rango  $0 \leq \lambda \leq 4K$ . Parecen seguir una distribución concentrada en los extremos, por lo que si obtenemos su promedio, se encuentra justo en el centro (*Fig. 3.1.2*). En cuanto a las frecuencias de los modos normales de vibración ( $\omega$ ), al ser las raíces los números  $\lambda$ , se encuentran concentrados en la parte superior del rango  $0 \leq \omega \leq 2\sqrt{K}$  (*Fig. 3.1.3*).

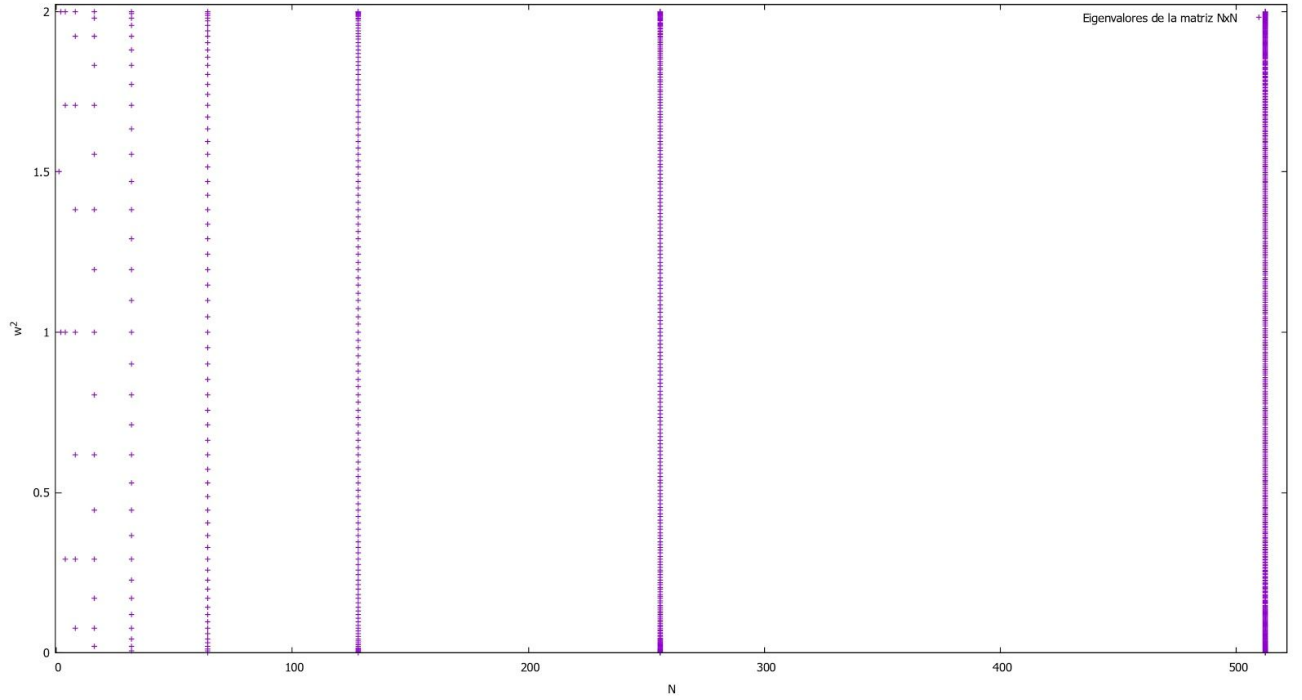


**Fig 3.1.2: Promedios de  $\lambda$  para  $k/K = 1$**

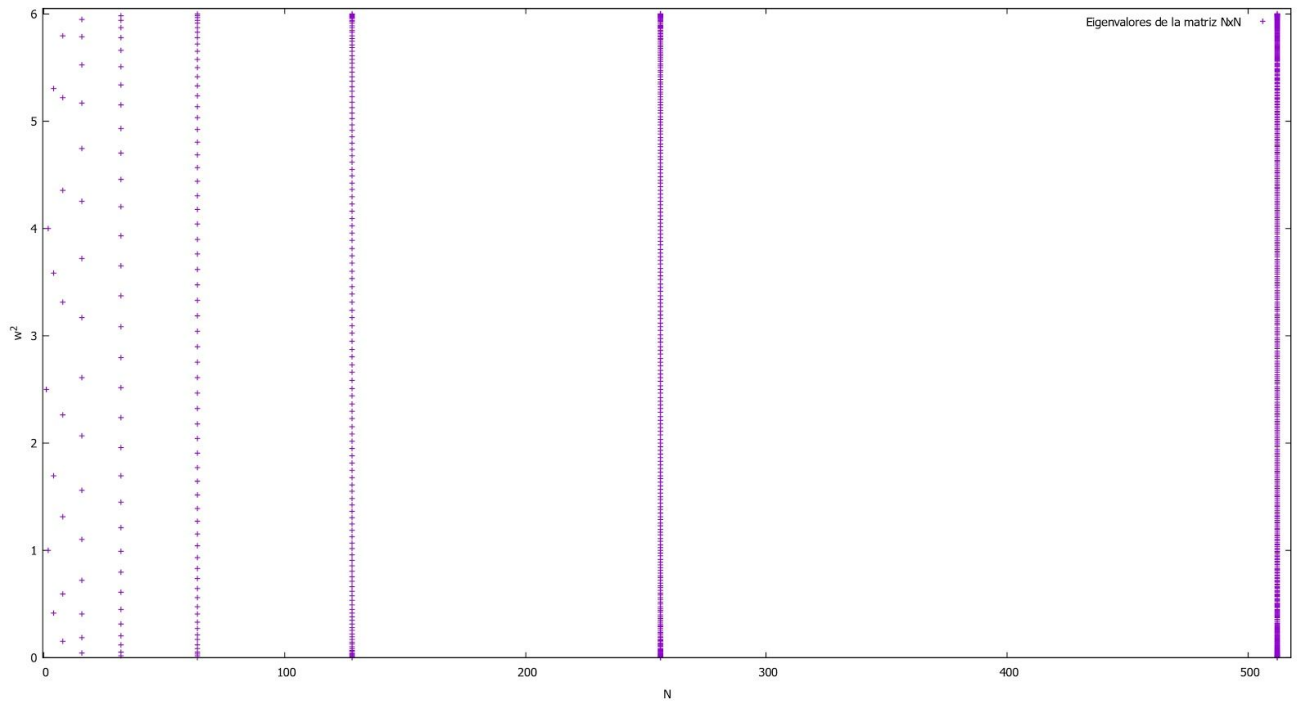


**Fig 3.1.3: Valores de  $\omega$  para  $k/K = 1$**

Ahora bien, para la mayoría de razones  $k/K$  los valores de  $\lambda$  conservan la tendencia a crecer junto a  $N$  y mantener esta distribución especial; pero en estos casos se mantienen dentro del rango de valores  $0 \leq \lambda \leq 4k$ , tal como ocurre en los casos donde  $k/K = 0.5$  (Fig. 3.1.4) y  $k/K = 1.5$  (Fig. 3.1.5):



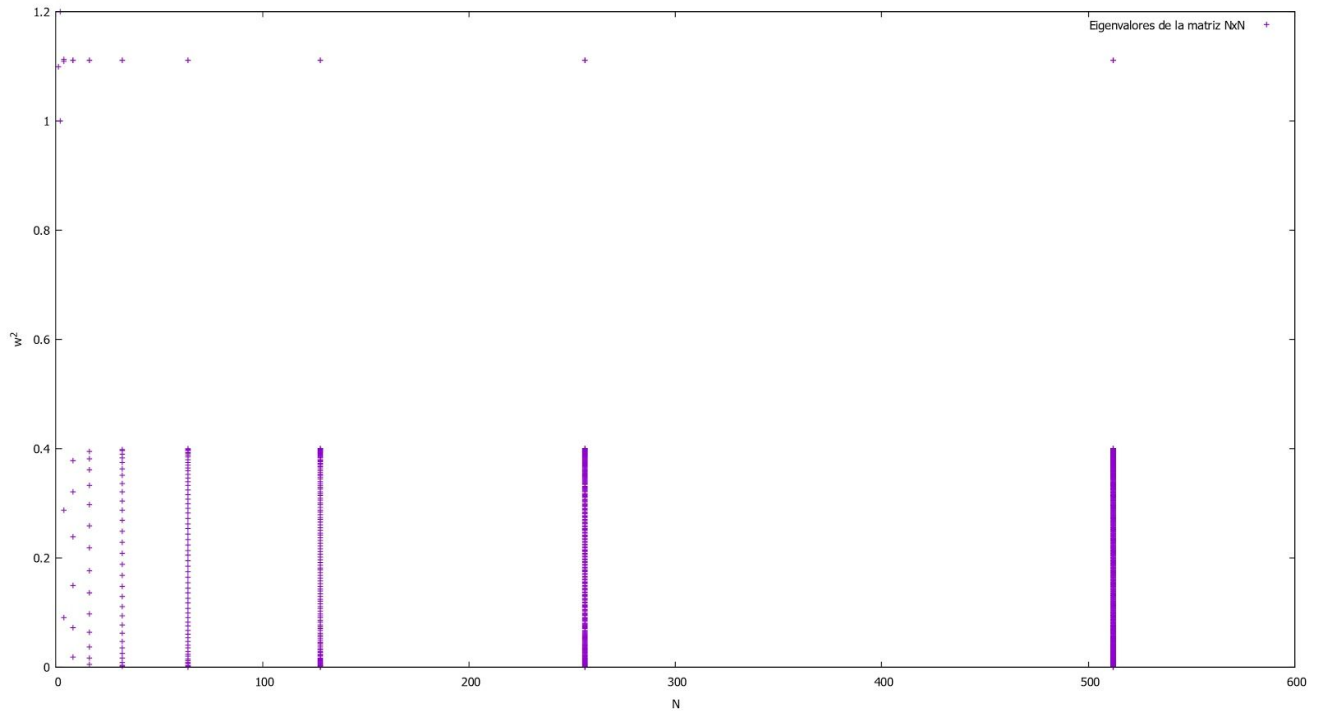
**Fig 3.1.4:** Valores de  $\lambda$  para  $k/K = 0.5$



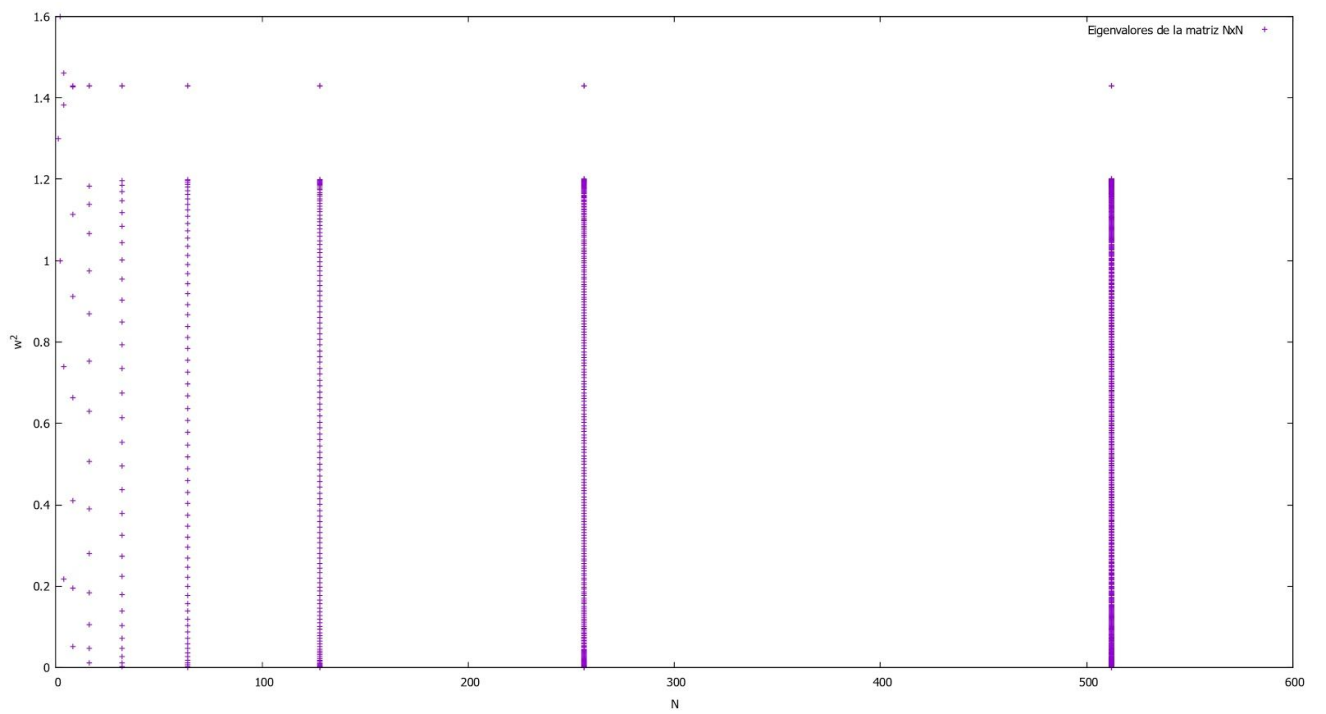
**Fig 3.1.5:** Valores de  $\lambda$  para  $k/K = 1.5$

No obstante, ocurre una excepción en los casos donde  $k/K < 0.5$ , y es que los valores de  $\lambda$  siguen las tendencias ya vistas, pero en algunos casos dan un salto desde su rango  $0 \leq \lambda \leq 4k$  hasta un valor que es *aproximadamente* igual a  $k + K$ , tal como se deja ver en los casos donde  $k/K = 0.1$  (Fig. 3.1.6) y  $k/K = 0.3$  (Fig. 3.1.7):





**Fig 3.1.6: Valores de  $\lambda$  para  $k/K = 0.1$**



**Fig 3.1.7: Valores de  $\lambda$  para  $k/K = 0.3$**

Estos resultados nos dan una buena forma de entender el comportamiento cuando todos los resortes son iguales o parecidos, pero nos hacen percatarnos del desconocimiento de la verdadera forma de comportarse los eigenvalores en los casos donde las constantes  $K_1 \neq K_2 \neq \dots \neq K_n$ .

### Masa más pesada $M2 > M$ :

En este caso, tal como mencionamos anteriormente, tomamos  $k = K$  y nos centramos en estudiar los resultados al aumentar la masa de la partícula  $N/2 + 1$ . A grandes rasgos, los resultados no variaron mucho, pues el número de  $\lambda$  seguía teniendo la tendencia a crecer junto con  $N$ , a estar dentro del rango  $0 \leq \lambda \leq 4K$  y a seguir una distribución concentrada en los extremos; tal como podemos ver en el caso donde  $M2 = 5 * M$  (Fig. 3.2.1):

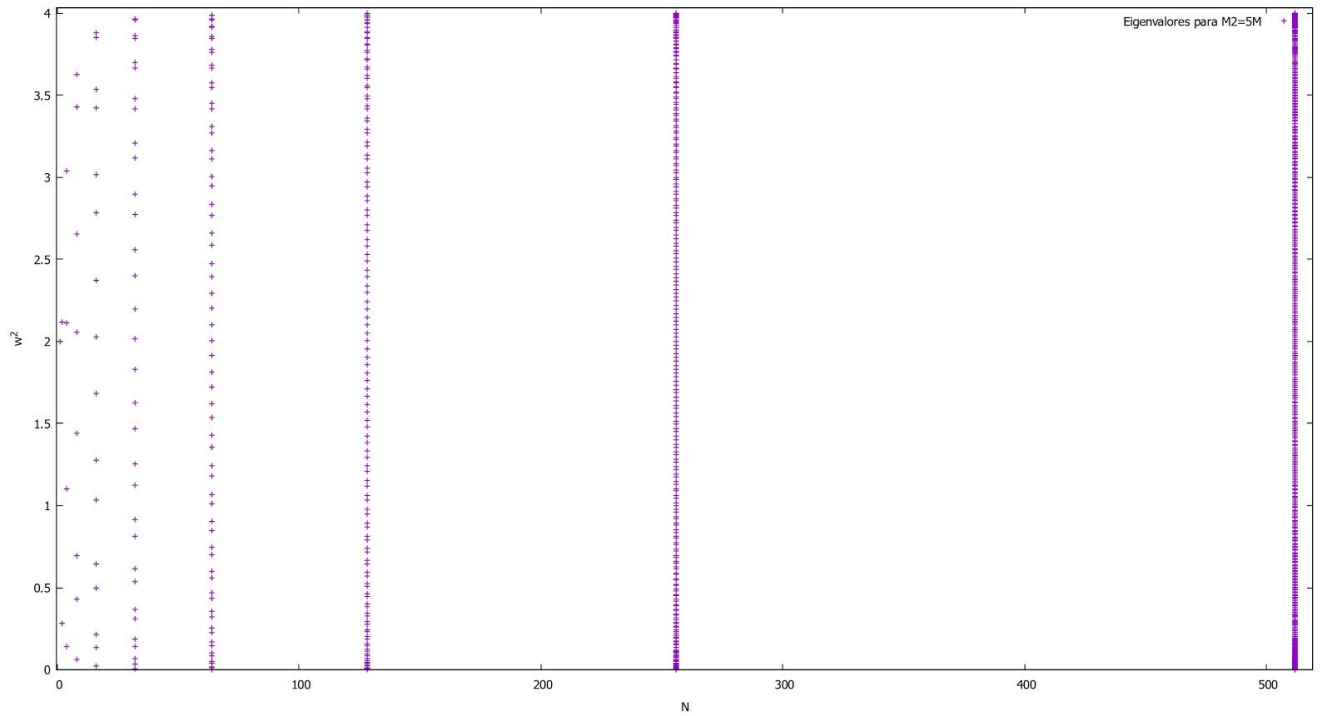
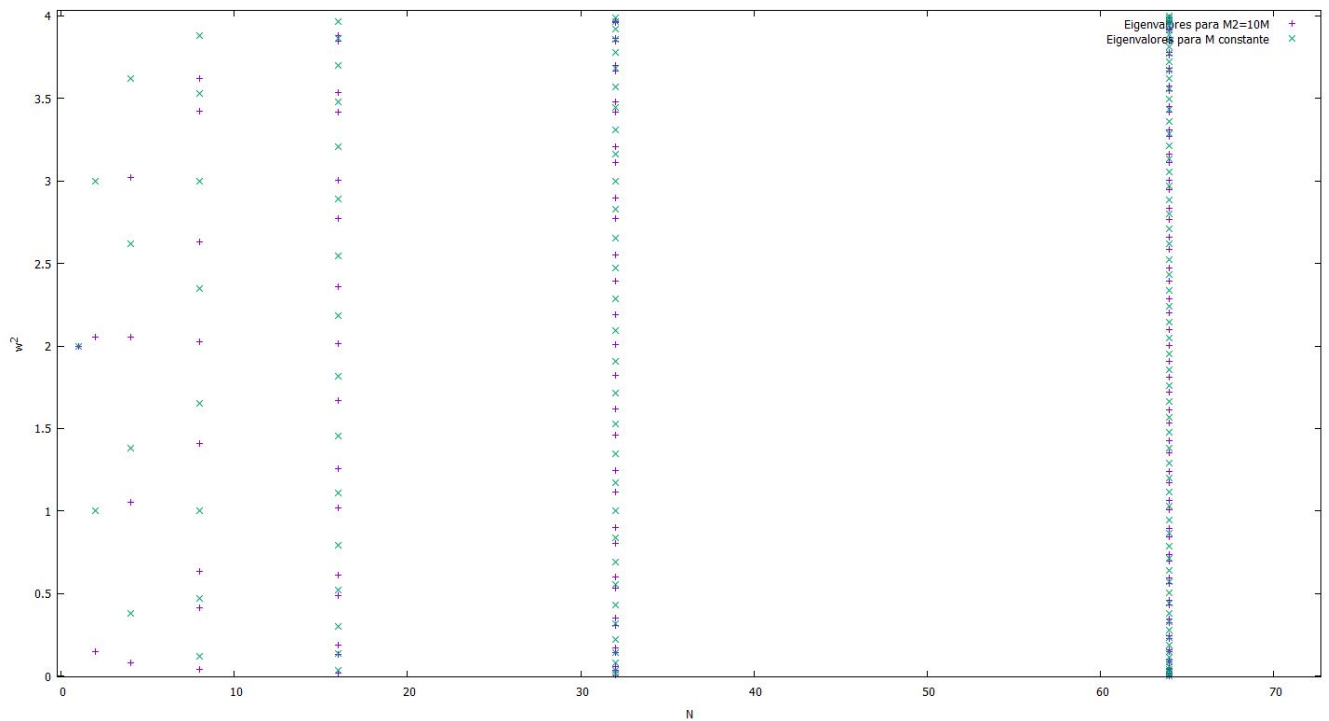


Fig 3.2.1: Valores de  $\lambda$  para  $M2 = 5 * M$

Pero si los comparamos con los valores obtenidos cuando  $M2 = M$  nos damos cuenta de que hay diferencias observables entre sus respectivos valores. Veamos qué ocurre al comparar los datos cuando  $M2 = 10 * M$  y cuando  $M2$  no varía y hagamos zoom a la parte con los  $N$  más pequeños (Fig. 3.2.2), donde se aprecia más la diferencia:



**Fig 3.2.2: Valores de  $\lambda$  para  $M2 = 10 * M$  comparados a  $M2 = M$  en  $N$  pequeños**

Se observa que efectivamente estos  $\lambda$  disminuyen respecto a los del caso inicial, y esta tendencia a disminuir va en aumento a medida que  $M2$  crece respecto a  $M$ . Podemos apreciar mucho mejor la diferencia si vemos el promedio de los datos en estos casos, el cual en un comienzo, debido a su poca cantidad, se ve cómo está muy por debajo de la constante esperada; pero que luego se estabiliza a medida que crece  $N$ . En este sentido, analicemos esto en el caso cuando  $M2 = 10'000 * M$  (Fig. 3.2.3):

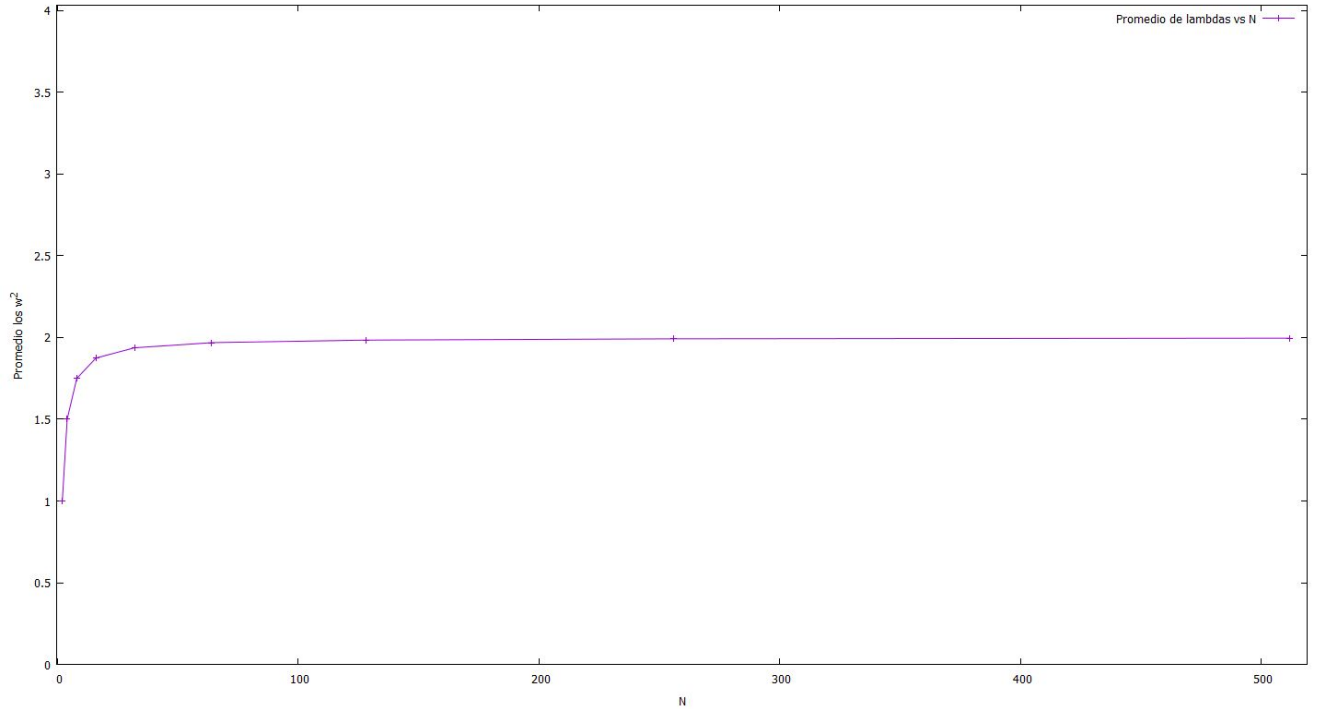


Fig 3.2.3: Promedio de  $\lambda$  para  $M2 = 10000 * M$

### Conclusiones finales:

La variación de los  $\lambda$  cuando  $N \rightarrow \infty$  es un asunto de estudio de mayor profundidad para un futuro. En estos casos especiales, con alteraciones de pocas variables, estamos solamente haciéndonos una idea de cómo se comportan estos eigenvalores, y por tanto sus respectivas frecuencias de los modos normales de vibración; pero hay un campo abierto a todo tipo de posibilidades al ir añadiendo parámetros a este tipo de estudios; pero lamentablemente con nuestros recursos y tiempo actuales no nos ha sido posible. Sin embargo, vale la pena aclarar la productividad y buenos resultados en este proyecto.