

Калукова Ольга Макаровна
Кошелева Наталья Николаевна
Никитина Марина Геннадьевна
Павлова Елена Сергеевна

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

часть 1

Курс лекций по высшей математике

Подписано в печать 8.09.2005. Формат 60×84/16
Печать оперативная. Усл. п.л. 1,5. Уч.-изд. л. 1,4
Тираж экз.

Тольяттинский государственный университет
Тольятти, Белорусская, 14

Содержание

Лекция 1. Матрицы. Основные понятия	5
1. Матрицы	5
2. Действия над матрицами	6
2.1. Равенство матриц	7
2.2. Сложение матриц	8
2.3. Умножение матрицы на число	8
2.4. Вычитание матриц	8
2.5. Произведение двух матриц	9
Лекция 2. Определители и их свойства	10
1. Понятия определителя	12
2. Определение минора	12
3. Вычисление определителей	13
4. Свойства определителей	13
Лекция 3. Обратная матрица. Решение систем линейных уравнений	15
1. Обратная матрица	15
2. Решение систем линейных уравнений	16
2.1 Система линейных уравнений	16
2.2 Решение систем линейных уравнений матричным методом	17
2.3 Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера	17
Ранг матрицы	18
Лекция 4. Исследование систем линейных уравнений	20
1. Теорема Кронекера – Капели (условие совместности системы)	20
2. Метод Гаусса	22
Решение однородных систем	22
Лекция 5. Основные понятия векторной алгебры	25
1. Свойства векторов	25
2. Линейная зависимость векторов	26
Декартова система координат	26
Лекция 6. Скалярное произведение векторов	28
Лекция 7. Векторное и смешанное произведение векторов	29
1. Векторное произведение	29
2. Смешанное произведение векторов	30
Лекция 8. Понятие линии на плоскости	32
1. Уравнение линии на плоскости	32
2. Уравнение прямой на плоскости	32
3. Уравнение прямой по точке и вектору нормали	32
4. Уравнение прямой, проходящей через две точки	32
5. Уравнение прямой по точке и угловому коэффициенту	33
6. Уравнение прямой по точке и направляющему вектору	33
7. Уравнение прямой в отрезках	33
8. Нормальное уравнение прямой	33
9. Угол между прямыми на плоскости	34
10. Расстояние от точки до прямой	34
Лекция 9. Плоскость и прямая в пространстве	35
1. Общее уравнение плоскости	35
2. Уравнение поверхности в пространстве	35
3. Уравнение плоскости, проходящей через три точки	35
4. Уравнение плоскости по двум точкам и вектору, коллинеарному плоскости	36

5. Уравнение плоскости по одной точке и двум векторам, коллинеарным плоскости	36
6. Уравнение плоскости по точке и вектору нормали	36
7. Уравнение плоскости в отрезках	36
8. Уравнение плоскости в векторной форме	36
9. Расстояние от точки до плоскости	37
10. Уравнение линии в пространстве	37
11. Уравнение прямой в пространстве по точке и направляющему вектору	37
12. Уравнение прямой в пространстве, проходящей через две точки	38
13. Общие уравнения прямой в пространстве	39
14. Угол между плоскостями	40
15. Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей	40
16. Угол между прямыми в пространстве	41
17. Условия параллельности и перпендикулярности прямых в пространстве	41
18. Угол между прямой и плоскостью	41
19. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости в пространстве	42
Лекция 10. Кривые второго порядка	43
1. Окружность	43
2. Эллипс	43
3. Гипербола	44
4. Парабола	45
Лекция 11. Поверхности второго порядка	46
1. Цилиндрические поверхности	46
2. Поверхности вращения	47
Лекция 12. Введение в анализ	52
1. Числовая последовательность	52
2. Ограниченные и неограниченные последовательности	52
3. Монотонные последовательности	53
4. Предел функции в точке	53
5. Предел функции при стремлении аргумента к бесконечности	54
6. Основные теоремы о пределах	55
Лекция 13. Бесконечно-малые и бесконечно-большие функции	57
1. Бесконечно малые функции	57
2. Свойства бесконечно малых функций	57
3. Бесконечно большие функции и их связь с бесконечно малыми	57
4. Сравнение бесконечно малых функций	58
5. Свойства эквивалентных бесконечно малых	58
6. Некоторые замечательные пределы	59
Лекция 14. Непрерывность функции	61
1. Непрерывность функции в точке	61
2. Свойства непрерывных функций	61
3. Непрерывность некоторых элементарных функций	61
4. Непрерывность функции на интервале и на отрезке	62
5. Свойства функций, непрерывных на отрезке	62
Точки разрыва	63
Приложения	65
Полярная система координат	65
Комплексные числа	65
Тригонометрическая форма числа	65
Действия с комплексными числами	66
Показательная форма комплексного числа	67
Элементы комбинаторики	67

Бином Ньютона (полиномиальная формула).....	68
Элементы математической логики	68
Булевы функции	70
Исчисление предикатов	71
Дискретная математика	72
Конечные графы и сети.....	72
Матрицы графов	72
Достижимость и связность	73
Эйлеровы и гамильтоновы графы.....	73
Деревья и циклы	74
Квадратичные формы.....	75
Приведение квадратичных форм к каноническому виду.....	75
Собственные значения и собственные вектора	76
Элементы топологии	78
Метрическое пространство.....	78
Открытые и замкнутые множества	79
Непрерывные отображения	79
Топологические произведения	80
Связность	80
Компактность.....	80

Лекция 1. Матрицы. Основные понятия

1. Матрицы

Основные понятия

1⁰. Матрицей размером $m \times n$ называется множество чисел, расположенных в виде прямоугольной таблицы, состоящей из m -строк n -столбцов.

Матрица обозначается заглавными буквами латинского алфавита A, B, C, \dots

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & a_{ij} & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \text{ или } A = \left[a_{ij} \right]_{m \times n}.$$

Здесь a_{ij} - элементы матрицы. Каждый элемент имеет два индекса, первый обозначает номер строки, а второй номер столбца.

Если $m = n$, то матрица квадратная порядка n , $m \neq n$, то прямоугольная.

2⁰. Матрица состоящая из одной строки называется строчной

$$B = (b_{11} \quad b_{12} \quad \dots \quad b_{1n})$$

3⁰. Матрица, состоящая из одного столбца, называется столбцовой

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \dots \\ c_{m1} \end{pmatrix}$$

4⁰. Квадратная матрица, у которой все элементы нестоящие на главной диагонали равны 0, называется диагональной

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{nn} \end{pmatrix}.$$

5⁰. Диагональная матрица, у которой все элементы равны 1, называется единичной

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

6⁰. Если в матрице A поменять местами строки и столбцы то полученная матрица называется транспонированной A^t .

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ то } A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{m1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

2. Действия над матрицами

Равенство матриц

Две матрицы A и B равны между собой, если они одинакового размера и их соответствующие элементы равны, т.е.

$$A = B, \text{ если } a_{ij} = b_{ij} \ (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n).$$

Сложение матриц

Складывать можно только матрицы одинакового размера по правилу

$$A = \{a_{ij}\}_{m \times n}, B = \{b_{ij}\}_{m \times n}, C = \{c_{ij}\}_{m \times n}, \\ C = A + B = \{a_{ij} + b_{ij}\}_{m \times n}.$$

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 11 \\ 10 & 0 & 4 \end{pmatrix}. \quad C = A + B = \begin{pmatrix} 1+1 & 2+3 & 3+0 \\ 0+0 & 2-2 & 1+11 \\ 1+10 & 2+0 & 4+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 12 \\ 11 & 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Свойства сложения матриц

$$A + B = B + A;$$

$$A + (B + C) = (A + B) + C = A + B + C.$$

Умножение матрицы на число

Чтобы умножить матрицу на число α надо умножить на это число каждый элемент матрицы.

$$A = \{a_{ij}\}_{m \times n}, \quad B = \alpha \cdot A, \quad B = \{b_{ij}\}_{m \times n} = \{\alpha \cdot a_{ij}\}.$$

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = 3 \cdot A = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot 2 & 3 \cdot 4 \\ 3 \cdot 0 & 3 \cdot 2 & 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot 1 & 3 \cdot 2 & 3 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 12 \\ 0 & 6 & 3 \\ 3 & 6 & 12 \end{pmatrix}.$$

Свойства умножения матриц

$$\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B,$$

$$(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A,$$

$$(\alpha \cdot \beta) \cdot A = \alpha \cdot (\beta \cdot A).$$

Вычитание матриц

$$A - B = A + (-1) \cdot B$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 11 \\ 10 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$C = A - B = \begin{pmatrix} 1-1 & 2-3 & 3-0 \\ 0-0 & 2+2 & 1-11 \\ 1-10 & 2-0 & 4-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -10 \\ -9 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Произведение двух матриц

Умножать можно только те матрицы, для которых число столбцов в первой матрицы равно числу строк во второй матрицы. Произведением двух матриц

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nj} & \dots & b_{np} \end{bmatrix}_{n \times p}$$

называется матрица

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2p} \\ \dots & \dots & c_{ij} & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mp} \end{bmatrix}_{m \times p},$$

у которой элемент c_{ij} находится по формуле

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} * b_{kj} = a_{i1} * b_{1j} + \dots + a_{in} * b_{nj}, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, p,$$

т.е. элемент матрицы c_{ij} , стоящий на пересечении i – строки и j -столбца равен сумме произведений элементов i – строки матрицы A на соответствующие элементы j -столбца матрицы B . В результате умножения матрицы A на матрицу B получится матрица C число строк, которой равно числу строк матрицы A , а число столбцов равно числу столбцов матрицы B .

Пример: Перемножить матрицы A и B .

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}_{2 \times 2}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}_{2 \times 3}.$$

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 3 \cdot 4 & 2 \cdot 2 + 3 \cdot 5 & 2 \cdot 3 + 3 \cdot 6 \\ 1 \cdot 1 + 4 \cdot 4 & 1 \cdot 2 + 4 \cdot 5 & 1 \cdot 3 + 4 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 19 & 24 \\ 17 & 22 & 27 \end{pmatrix}.$$

Если $A \cdot B = B \cdot A$, то матрицы коммутативная.

2.1. Равенство матриц

Две матрицы A и B равны между собой, если они одинакового размера и их соответствующие элементы равны, т.е.

$$A = B, \text{ если } a_{ij} = b_{ij} \ (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n).$$

2.2. Сложение матриц

Складывать можно только матрицы одинакового размера по правилу

$$A = \{a_{ij}\}_{m \times n}, B = \{b_{ij}\}_{m \times n}, C = \{c_{ij}\}_{m \times n},$$

$$C = A + B = \{a_{ij} + b_{ij}\}_{m \times n}.$$

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 11 \\ 10 & 0 & 4 \end{pmatrix}. \quad C = A + B = \begin{pmatrix} 1+1 & 2+3 & 3+0 \\ 0+0 & 2-2 & 1+11 \\ 1+10 & 2+0 & 4+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 12 \\ 11 & 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Свойства сложения матриц

$$A + B = B + A;$$

$$A + (B + C) = (A + B) + C = A + B + C.$$

2.3. Умножение матрицы на число

Чтобы умножить матрицу на число α надо умножить на это число каждый элемент матрицы.

$$A = \{a_{ij}\}_{m \times n}, \quad B = \alpha \cdot A, \quad B = \{b_{ij}\}_{m \times n} = \{\alpha \cdot a_{ij}\}.$$

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = 3 \cdot A = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot 2 & 3 \cdot 4 \\ 3 \cdot 0 & 3 \cdot 2 & 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot 1 & 3 \cdot 2 & 3 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 12 \\ 0 & 6 & 3 \\ 3 & 6 & 12 \end{pmatrix}.$$

Свойства умножения матриц

$$\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B,$$

$$(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A,$$

$$(\alpha \cdot \beta) \cdot A = \alpha \cdot (\beta \cdot A).$$

2.4. Вычитание матриц

$$A - B = A + (-1) \cdot B$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 11 \\ 10 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$C = A - B = \begin{pmatrix} 1-1 & 2-3 & 3-0 \\ 0-0 & 2+2 & 1-11 \\ 1-10 & 2-0 & 4-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -10 \\ -9 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.5. Произведение двух матриц

Умножать можно только те матрицы, для которых число столбцов в первой матрицы равно числу строк во второй матрицы. Произведением двух матриц

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nj} & \dots & b_{np} \end{bmatrix}_{n \times p}$$

называется матрица

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mp} \end{bmatrix}_{m \times p},$$

у которой элемент c_{ij} находится по формуле

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj} = a_{i1} \cdot b_{1j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj}, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, p,$$

т.е. элемент матрицы c_{ij} , стоящий на пересечении i – строки и j -столбца равен сумме произведений элементов i – строки матрицы A на соответствующие элементы j -столбца матрицы B . В результате умножения матрицы A на матрицу B получится матрица C число строк, которой равно числу строк матрицы A , а число столбцов равно числу столбцов матрицы B .

Пример: Перемножить матрицы A и B .

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}_{2 \times 2}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}_{2 \times 3}.$$

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 3 \cdot 4 & 2 \cdot 2 + 3 \cdot 5 & 2 \cdot 3 + 3 \cdot 6 \\ 1 \cdot 1 + 4 \cdot 4 & 1 \cdot 2 + 4 \cdot 5 & 1 \cdot 3 + 4 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 19 & 24 \\ 17 & 22 & 27 \end{pmatrix}.$$

Если $A \cdot B = B \cdot A$, то матрицы коммутативная.

Лекция 2. Определители и их свойства

Понятия определителя

Определителем квадратной матрицы или просто определителем (детерминант) называется число, которое ставится в соответствие матрице и может быть вычислено по её элементам.

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

- Квадратная матрица первого порядка состоит из одного элемента поэтому её определитель равен самому элементу $\Delta = |a_{11}| = a_{11}$
- Определитель второго порядка вычисляется по формуле:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

- Определитель третьего порядка вычисляется по правилу треугольника:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33}$$

Определение минора

Дополнительным минором M_{ij} к элементу a_{ij} квадратной матрицы A называется определитель $(n-1)$ -го порядка полученный из исходного вычеркиванием i -ой строки и j -ого столбца на пересечении которых данный элемент находится.

Алгебраическое дополнение (адьюнкт)

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}.$$

Вычисление определителей

Теорема (без доказательств) о разложении определителя по элементам строки (столбца). Для каждой квадратной матрицы A порядка n имеет место формула

$$\Delta = \det A = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot A_{ik} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}, \text{ где } i = \overline{1, n};$$

$$\Delta = \det A = \sum_{k=1}^n a_{kj} \cdot A_{kj} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}, \text{ где } j = \overline{1, n}.$$

$$|a_{11}| = a_{11},$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} = \langle A_{11} = (+)a_{22}; A_{12} = (-)a_{21} \rangle = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Пример:
$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} =$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33}$$

Свойства определителей

При транспонировании величина определителя не меняется.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc; \quad \Delta = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Строки и столбцы определителя эквиваленты.

Если в определителе поменять местами какие-либо две строки (столбца) местами, то определитель меняет знак.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc; \quad \Delta = \begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} = bc - ad.$$

Определитель с двумя одинаковыми столбцами (строками) равен 0.

При умножении элементов какого-либо столбца (строки) на число α , определитель умножается на это число.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc; \quad \begin{vmatrix} \alpha \cdot a & b \\ \alpha \cdot c & d \end{vmatrix} = \alpha \cdot ad - \alpha \cdot bc = \alpha \cdot \Delta.$$

Если все элементы какого-либо столбца (строки) равны 0, то определитель равен 0.

Если элементы двух строк (столбцов) пропорциональны, то определитель равен 0.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & \beta a \\ c & \beta c \end{vmatrix} = \beta \begin{vmatrix} a & a \\ c & c \end{vmatrix} = \beta(ac - ac) = 0.$$

Пусть каждый элемент какого-либо столбца (строки) определителя равен сумме двух слагаемых, тогда этот определитель равен сумме двух определителей, причём в первом из них соответствующий столбец (строка) состоит из первых слагаемых, а во втором - из вторых слагаемых.

$$\begin{vmatrix} a' + a'' & b \\ c' + c'' & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a' & b \\ c' & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'' & b \\ c'' & d \end{vmatrix}.$$

Определитель не изменится, если к элементам какого-либо столбца (строки) прибавить соответствующие элементы другого столбца умноженного на одно и тоже число.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a + \alpha b & b \\ c + \alpha d & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha b & b \\ \alpha d & d \end{vmatrix} = 0.$$

Сумма произведений элементов какого-либо столбца определителя на алгебраического дополнения к элементам другого столбца равна 0.

Пример: Вычислить определитель

1. По правилу треугольника

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 10 \end{vmatrix} = 40 + 36 + 40 - 30 - 64 - 30 = -8;$$

2. Разложение по первой строке

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 10 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 10 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-12) - 3 \cdot (-2) + 5 \cdot 2 = -8;$$

3. Преобразование первого столбца

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 10 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 8 & 10 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{I \times (-2) + II \\ I \times (-3) + III}} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (2 + 6) = 8;$$

1. Понятия определителя

Определителем квадратной матрицы или просто определителем (детерминант) называется число, которое ставится в соответствие матрице и может быть вычислено по её элементам.

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{vmatrix}$$

- Квадратная матрица первого порядка состоит из одного элемента поэтому её определитель равен самому элементу $\Delta = |a_{11}| = a_{11}$
- Определитель второго порядка вычисляется по формуле:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

- Определитель третьего порядка вычисляется по правилу треугольника:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33}$$

2. Определение минора

Дополнительным минором M_{ij} к элементу a_{ij} квадратной матрицы A называется определитель $(n-1)$ -го порядка полученный из исходного вычеркиванием i -ой строки и j -ого столбца на пересечении которых данный элемент находится.

Алгебраическое дополнение (адьюнкт)

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}.$$

3. Вычисление определителей

Теорема (без доказательств) о разложении определителя по элементам строки (столбца). Для каждой квадратной матрицы A порядка n имеет место формула

$$\Delta = \det A = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot A_{ik} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}, \text{ если } i = \overline{1, n};$$

$$\Delta = \det A = \sum_{k=1}^n a_{kj} \cdot A_{kj} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}, \text{ если } j = \overline{1, n}.$$

Пример:

$$|a_{11}| = a_{11},$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} = \langle A_{11} = (+)a_{22}; A_{12} = (-)a_{21} \rangle = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} =$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

4. Свойства определителей

1. При транспонировании величина определителя не меняется.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc; \quad \Delta = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Строки и столбцы определителя эквивалентны.

2. Если в определителе поменять местами какие-либо две строки (столбца) местами, то определитель меняет знак.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc; \quad \Delta = \begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} = bc - ad.$$

3. Определитель с двумя одинаковыми столбцами (строками) равен 0.
4. При умножении элементов какого-либо столбца (строки) на число α , определитель умножается на это число.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc; \quad \begin{vmatrix} \alpha \cdot a & b \\ \alpha \cdot c & d \end{vmatrix} = \alpha \cdot ad - \alpha \cdot bc = \alpha \cdot \Delta.$$

5. Если все элементы какого-либо столбца (строки) равны 0, то определитель равен 0.
6. Если элементы двух строк (столбцов) пропорциональны, то определитель равен 0.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & \beta a \\ c & \beta c \end{vmatrix} = \beta \begin{vmatrix} a & a \\ c & c \end{vmatrix} = \beta(ac - ac) = 0.$$

7. Пусть каждый элемент какого-либо столбца (строки) определителя равен сумме двух слагаемых, тогда этот определитель равен сумме двух определителей, причём в первом из них соответствующий столбец (строка) состоит из первых слагаемых, а во втором - из вторых слагаемых.

$$\begin{vmatrix} a' + a'' & b \\ c' + c'' & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a' & b \\ c' & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'' & b \\ c'' & d \end{vmatrix}.$$

8. Определитель не изменится, если к элементам какого-либо столбца (строки) прибавить соответствующие элементы другого столбца умноженного на одно и тоже число.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a + \alpha b & b \\ c + \alpha d & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha b & b \\ \alpha d & d \end{vmatrix} = 0.$$

9. Сумма произведений элементов какого-либо столбца определителя на алгебраического дополнения к элементам другого столбца равна 0.

Пример: Вычислить определитель

1. По правилу треугольника

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 10 \end{vmatrix} = 40 + 36 + 40 - 30 - 64 - 30 = -8;$$

2. Разложение по первой строке

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 10 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 10 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-12) - 3 \cdot (-2) + 5 \cdot 2 = -8;$$

3. Преобразование первого столбца

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 10 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 8 & 10 \end{vmatrix} \begin{matrix} I \times (-2) + II \\ I \times (-3) + III \end{matrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (2 + 6) = 8;$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 10 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 8 & 10 \end{vmatrix} \begin{matrix} I \cdot (-2) + II \\ I \cdot (-3) + III \end{matrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (2 + 6) = -8;$$

Лекция 3. Обратная матрица. Решение систем линейных уравнений

1. Обратная матрица

Рассмотрим квадратную матрицу

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

- Если определитель квадратной матрицы A равен нулю, то матрица называется особенной или вырожденной.
- Если определитель квадратной матрицы A не равен нулю, то матрица называется неособенной или невырожденной.
- Матрица A^{-1} называется обратной для квадратной невырожденной матрицы A , если произведение $A \cdot A^{-1} = E$ или $A^{-1} \cdot A = E$, где E - единичная матрица.

Найдем конкретный вид обратной матрицы:

1. Заменим в квадратной невырожденной матрице A каждый элемент его алгебраическим дополнением $a_{ij} \rightarrow A_{ij}$.
2. Протранспонируем полученную матрицу $A_{ij} \rightarrow A_{ji} \rightarrow A_c \rightarrow \bar{A}$.

Матрица \bar{A} называется союзной (присоединенной) для матрицы A .

3. Разделим полученную союзную матрицу на определитель

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \bar{A}.$$

$$A = [a_{ij}] \rightarrow [A_{ij}] \rightarrow [A_{ji}] \rightarrow \frac{1}{\Delta} [A_{ji}] \rightarrow \frac{1}{\Delta} \bar{A} = A^{-1}.$$

Докажем, что формула $A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \bar{A}$ дает нам обратную матрицу. Для этого составим

произведение $A \cdot A^{-1} = C$. $C = E$.

$$A = [a_{i1} \quad a_{i2} \quad \dots \quad a_{in}], \quad A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} A_{j1} \\ A_{j2} \\ \dots \\ A_{jn} \end{bmatrix}, \quad C_{ij} = \sum a_{ik} \frac{1}{\Delta} A_{jk} = 0, \text{ еѐѐѐ } i \neq j;$$
$$\frac{1}{\Delta} \Delta = 1, \text{ еѐѐѐ } i = j.$$

Пример:

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix},$$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E$$

где a_{11}, \dots, a_{mn} - коэффициенты системы - a_{ij} ,

b_1, \dots, b_m - свободные члены- b_i .

Система, имеющая решения называется совместной, не имеющая решения называется несовместной.

Обозначим: $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ - матрицей системы,

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}_{m \times 1} \quad - \text{матрица сводных членов}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}_{n \times 1} \quad - \text{матрица неизвестных}.$$

Тогда, пользуясь правилами умножения матриц, система записывается в матричном виде:

$$A \cdot X = B \quad (2)$$

2.2 Решение систем линейных уравнений матричным методом

Рассмотрим случай, когда $m \neq n$, т.е. число уравнений равно числу неизвестных.

Предположим, что матрица A несобственная, т.е. $\det A = \Delta \neq 0$, значит она имеет обратную A^{-1} . Тогда умножив равенство (2) на A^{-1} слева получим: $A^{-1} \cdot A = A^{-1} \cdot B$.

Учитывая, что $A^{-1} \cdot A = E$, $E \cdot X = X$, будем иметь $X = A^{-1} \cdot B$ (3). Равенство (3) представляет собой матричную запись решения системы (1).

Матричный метод применим к решению систем уравнений, где число уравнений равно числу неизвестных. Метод удобен для решения систем невысокого порядка.

Метод основан на применении свойств умножения матриц.

2.3 Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера

Данный метод также применим только в случае систем линейных уравнений, где число переменных совпадает с числом уравнений. Кроме того, необходимо ввести ограничения на коэффициенты системы. Необходимо, чтобы все уравнения были линейно независимы, т.е. ни одно уравнение не являлось бы линейной комбинацией остальных.

Для этого необходимо, чтобы определитель матрицы системы не равнялся 0. Действительно, если какое-либо уравнение системы есть линейная комбинация остальных, то если к элементам какой-либо строки прибавить элементы другой, умноженные на какое-либо число, с помощью линейных преобразований можно получить нулевую строку. Определитель в этом случае будет равен нулю.

Используя, вид матриц A^{-1}, A, X, B распишем выражение $X = A^{-1} \cdot B$ в следующем виде:

$$x_i = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} [A_{1i} \quad A_{2i} \quad \dots \quad A_{ni}] \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^n A_{ki} b_k = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad (4), \text{ где } \Delta = \det A.$$

Значит $x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$, $i = 1, \dots, n$ (5), где $\Delta_i (i = 1, 2, \dots, n)$ - определитель, полученный

из Δ заменой i -ого столбца свободными членами

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & b_2 & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & b_n & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Формулы (5) называют формулами Крамера.

Пример. Решите систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5; \\ 3x_2 + x_3 = 9; \\ x_2 + 2x_3 = 8. \end{cases}$$

- Метод обратной матрицы.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \\ 8 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -4/5 & 2/5 \\ 0 & 2/5 & -1/5 \\ 0 & -1/5 & 3/5 \end{bmatrix}.$$

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & -4/5 & 2/5 \\ 0 & 2/5 & -1/5 \\ 0 & -1/5 & 3/5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

- Формулы Крамера.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 9 & 3 & 1 \\ 8 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot 5 - 2 \cdot 10 = 5, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 9 & 1 \\ 0 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 10 = 10,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 15, \quad x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{5}{5} = 1, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{10}{5} = 2, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{15}{5} = 3.$$

Ранг матрицы

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}, \quad t \leq \min(m, n).$$

Выделим произвольно t -строк и t -столбцов. Определитель порядка t , составленный из элементов стоящих на пересечении выделенных t -строк и t -столбцов называется порожденным матрицей A .

Пример:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 8 & 7 & 6 \end{bmatrix}_{3 \times 4}, \quad t \leq \min(3, 4) = 3, \quad C_3^2 \cdot C_4^2 = 3 \cdot 4 = 12.$$

Рангом матрицы называется натуральное число равное наибольшему из порядков определителей отличных от нуля среди порожденных данной матрицей.

Если $RgA = r$, значит

1. Существует определитель порядка $r \neq 0$;

2. Все определители порядка больше чем n обращаются в нуль.

Теорема о ранге матрицы.

Ранг матрицы A не изменится, если:

1. Строки заменить столбцами (транспонировать);
2. Поменять местами два столбца (строки);
3. Умножить каждый элемент столбца на одно и то же число отличное от нуля.
4. Сложить два столбца (строки).

Доказательство теоремы полностью основывается на свойствах определителей.

Вычисление ранга матрицы.

Преобразование матрицы в трапециевидную.

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots \end{bmatrix} \\
 RgA = Rg \begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 & 2 \\ 9 & 4 & 1 & 7 \end{bmatrix}_{3 \times 4} &= Rg \begin{bmatrix} 1 & 7 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & 3 \\ 7 & 4 & 1 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{III}-7(\text{I})]{\text{II}-2(\text{I})} Rg \begin{bmatrix} 1 & 7 & 3 & 2 \\ 0 & -9 & -4 & -1 \\ 0 & -45 & -20 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{II}*(-1)} = \\
 &= Rg \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & 9 \\ 0 & -5 & -20 & -45 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{II}*5+\text{III}} Rg \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2
 \end{aligned}$$

Лекция 4. Исследование систем линейных уравнений

Определение. Система m уравнений с n неизвестными в общем виде записывается следующим образом:

[illegible]

где a_{ij} – коэффициенты, а b_i – постоянные. Решения системы являются n чисел, которые при подстановке в систему превращают каждое ее уравнение в тождество.

Определение. Система называется определенной, если она имеет только одно решение и не определенной, если более одного.

Определение. Для системы линейных уравнений матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ называется матрицей системы, а матрица}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \text{ называется расширенной матрицей системы}$$

К элементарным преобразованиям относятся:

- 1) Прибавление к обеим частям одного уравнения соответствующих частей другого, умноженных на одно и то же число, не равное нулю.
- 2) Перестановка уравнений местами.
- 3) Удаление из системы уравнений, являющихся тождествами для всех

1. Теорема Кронекера – Капели (условие совместности системы)

Для того чтобы система линейных уравнений была совместна необходимо и достаточно чтобы ранг её матрицы был равен рангу расширенной матрицы системы $RgA = RgA_n$.

Если ранг матрицы A равен рангу расширенной матрицы и равен n числу неизвестных, то система имеет единственное решение.

Если ранг матрицы A равен рангу расширенной матрицы, но меньше n числа неизвестных, то система имеет бесконечное число решений.

Если ранг матрицы A меньше ранга расширенной матрицы и равен n числу неизвестных, то система не имеет решения.

$$RgA = RgA_n = r < n.$$

Решаем данную систему так:

1. Выделим любые r уравнений и r неизвестных, но так чтобы определитель был отличен от нуля.

x_1, x_2, \dots, x_r - основные (базисные) переменные;

$x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ - свободные переменные.

2. Перенесем слагаемые со свободными неизвестными в правую часть.
3. Решим полученную систему относительно основных переменных, предавая свободным переменным произвольные значения, получим для основных переменных бесконечное множество решений.

Пример. Определить совместность системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 2 \\ 2x_1 + 11x_2 + 12x_3 + 25x_4 + 22x_5 = 4 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 3 & 9 & 15 & 21 & 27 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} = 11 - 6 = 5 \neq 0 \cdot RgA = 2$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & 2 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{pmatrix} \cdot RgA^* = 3$$

Система несовместна.

Пример: Исследовать и решить систему уравнений.

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6; \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4; \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2. \end{cases}$$

$$RgA_p = Rg \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 4 \\ 9 & 4 & 1 & 7 & 2 \end{array} \right] = Rg \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 7 & 3 & 2 & 6 \\ 2 & 5 & 2 & 3 & 4 \\ 7 & 4 & 1 & 9 & 2 \end{array} \right] = Rg \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & -9 & -4 & -1 & -8 \\ 0 & -45 & -20 & -5 & -40 \end{array} \right] \cdot (-5) =$$

$$= Rg \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 7 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & -9 & -4 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$RgA = RgA_p = 2 < 4$ - система имеет бесчисленное множество решений.

$x_1; x_2$ - основные переменные, $\Delta r \neq 0$ (первые два уравнения);

$x_3; x_4$ - свободные переменные.

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 = 6 - 3x_3 - x_4; \\ 3x_1 + 5x_2 = 4 - 2x_3 - 2x_4. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= \begin{vmatrix} 6-3x_3-x_4 & 7 \\ 4-2x_3-2x_4 & 5 \end{vmatrix} = 2-x_3+9x_4; & x_1 &= \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{1}{11}(-2+x_3+9x_4); \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} 2 & 6-3x_3-x_4 \\ 3 & 4-2x_3-2x_4 \end{vmatrix} = -10+5x_3-x_4; & x_2 &= \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{1}{10}(10-5x_3+x_4); \\ & & x_3 &= x_3, x_4 = x_4.\end{aligned}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{11}(-2 + \alpha - 9\beta), \\ x_2 = \frac{1}{11}(10 - 5\alpha + \beta), \\ x_3 = \alpha, \\ x_4 = \beta. \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{array} \right.$$

Теорема: Если ранг матрица A равен числу неизвестных, то система имеет единственное тривиальное (нулевое) решение ($x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$).

Если ранг матрицы A меньше числа неизвестных, то система имеет бесчисленное множество решений. $RgA = r$, то r – переменных основных, а

$(r - n)$ - СВОБОДНЫХ.

Пример:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0, \\ x + 2y + z = 0, \\ 2x - y + 3z = 0. \end{cases}$$

$$RgA = Rg \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} = Rg \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -5 & 1 \end{bmatrix} = Rg \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = 3 = n \text{ - то уравнение имеет}$$

решение $x = y = z = 0$.

Пример:

$$\begin{cases} 5x_1 - 5x_2 + 10x_3 - x_4 = 0; \\ 3x_1 + x_2 + 7x_3 + x_4 = 0; \\ x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$$

$$RgA = Rg \begin{bmatrix} 5 & -5 & 10 & -1 \\ 3 & 1 & 7 & 1 \\ 1 & 7 & 4 & 3 \end{bmatrix} = Rg \begin{bmatrix} 1 & 7 & 4 & 3 \\ 0 & -20 & -5 & -8 \\ 0 & -40 & -10 & -16 \end{bmatrix} = Rg \begin{bmatrix} 1 & 7 & 4 & 3 \\ 0 & -20 & -5 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2 < 4$$

x_1, x_2 - основные переменные, $\Delta r \neq 0$ (первые два уравнения);

x_3, x_4 - свободные переменные.

$$\begin{cases} 5x_1 - 5x_2 = -10x_3 + x_4, \\ 3x_1 + x_2 = -7x_3 - x_4. \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 20 \neq 0;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -10x_3 + x_4 & -5 \\ -7x_3 + x_4 & 1 \end{vmatrix} = -45x_3 + 6x_4; \quad x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{1}{20}(-45x_3 + 6x_4);$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & -10x_3 + x_4 \\ 3 & -7x_3 + x_4 \end{vmatrix} = -5x_3 + 2x_4; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{1}{20}(-5x_3 + 2x_4);$$

$$x_3 = x_3, x_4 = x_4.$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{20}(-45\alpha + 6\beta), \\ x_2 = \frac{1}{20}(5\alpha + 2\beta), \\ x_3 = \alpha, \\ x_4 = \beta. \end{cases}$$

Лекция 5. Основные понятия векторной алгебры

Определение. Вектором называется направленный отрезок (упорядоченная пара точек). К векторам относится также и нулевой вектор, начало и конец которого совпадают.

Определение. Длиной (модулем) вектора называется расстояние между началом и концом вектора. $|\vec{AB}| = |\vec{a}|$

Определение. Векторы называются коллинеарными, если они расположены на одной или параллельных прямых. Нулевой вектор коллинеарен любому вектору.

Определение. Векторы называются компланарными, если существует плоскость, которой они параллельны.

Коллинеарные векторы всегда компланарны, но не все компланарные векторы коллинеарны.

Определение. Векторы называются равными, если они коллинеарны, одинаково направлены и имеют одинаковые модули.

Всякие векторы можно привести к общему началу, т.е. построить векторы, соответственно равные данным и имеющие общее начало. Из определения равенства векторов следует, что любой вектор имеет бесконечно много векторов, равных ему.

Определение. Линейными операциями над векторами называется сложение и умножение на число.

Суммой векторов является вектор - $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

Произведение - $\vec{b} = \alpha \vec{a}$; $|\vec{b}| = \alpha |\vec{a}|$, при этом \vec{a} коллинеарен \vec{b} .

Вектор \vec{a} сонаправлен с вектором $\vec{b} (\vec{a} \uparrow \vec{b})$, если $\alpha > 0$.

Вектор \vec{a} противоположно направлен с вектором $\vec{b} (\vec{a} \updownarrow \vec{b})$, если $\alpha < 0$.

1. Свойства векторов

1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ - коммутативность.

2) $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{b} + \vec{a}) + \vec{c}$

3) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$

4) $\vec{a} + (-1)\vec{a} = \vec{0}$

5) $(\alpha\beta)\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a})$ - ассоциативность

6) $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$ - дистрибутивность

7) $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$

8) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$

Определение.

1) Базисом в пространстве называются любые 3 некопланарных вектора, взятые в определенном порядке.

2) Базисом на плоскости называются любые 2 неколлинеарные векторы, взятые в определенном порядке.

3) Базисом на прямой называется любой ненулевой вектор.

Определение. Если $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ - базис в пространстве и $\vec{a} = \alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2 + \gamma\vec{e}_3$, то числа α, β, γ - называются компонентами или координатами вектора \vec{a} в этом базисе.

В связи с этим можно записать следующие свойства:

- равные векторы имеют одинаковые координаты,
- при умножении вектора на число его компоненты тоже умножаются на это число,

$$\lambda \vec{a} = \lambda (\alpha \vec{e}_1 + \beta \vec{e}_2 + \gamma \vec{e}_3) = (\lambda \alpha) \vec{e}_1 + (\lambda \beta) \vec{e}_2 + (\lambda \gamma) \vec{e}_3$$

- при сложении векторов складываются их соответствующие компоненты.

$$\vec{a} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \alpha_3 \vec{e}_3; \quad \vec{b} = \beta_1 \vec{e}_1 + \beta_2 \vec{e}_2 + \beta_3 \vec{e}_3;$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (\alpha_1 + \beta_1) \vec{e}_1 + (\alpha_2 + \beta_2) \vec{e}_2 + (\alpha_3 + \beta_3) \vec{e}_3.$$

2. Линейная зависимость векторов

Определение. Векторы $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ называются линейно зависимыми, если существует такая линейная комбинация $\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n = 0$, при не равных нулю одновременно α_i , т.е. $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2 \neq 0$. Если же только при $\alpha_i = 0$ выполняется $\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n = 0$, то векторы называются линейно независимыми.

Свойство 1. Если среди векторов \vec{a}_i есть нулевой вектор, то эти векторы линейно зависимы.

Свойство 2. Если к системе линейно зависимых векторов добавить один или несколько векторов, то полученная система тоже будет линейно зависима.

Свойство 3. Система векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда один из векторов раскладывается в линейную комбинацию остальных векторов.

Свойство 4. Любые 2 коллинеарных вектора линейно зависимы и, наоборот, любые 2 линейно зависимые векторы коллинеарны.

Свойство 5. Любые 3 компланарных вектора линейно зависимы и, наоборот, любые 3 линейно зависимые векторы компланарны.

Свойство 6. Любые 4 вектора линейно зависимы.

Декартова система координат

Зафиксируем в пространстве точку О и рассмотрим произвольную точку М. Вектор \vec{OM} назовем радиус- вектором точки М. Если в пространстве задать некоторый базис, то точке М можно сопоставить некоторую тройку чисел – компоненты ее радиус- вектора.

Определение. Декартовой системой координат в пространстве называется совокупность точки и базиса. Точка называется началом координат. Прямые, проходящие через начало координат называются осями координат.

1-я ось – ось абсцисс, 2-я ось – ось ординат, 3-я ось – ось аппликат

Чтобы найти компоненты вектора нужно из координат его конца вычесть координаты начала

Если заданы точки $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$, то $\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

Определение. Базис называется ортонормированным, если его векторы попарно ортогональны и равны единице.

Определение. Декартова система координат, базис которой ортонормирован называется декартовой прямоугольной системой координат.

Длина вектора в координатах определяется как расстояние между точками начала и конца вектора. Если заданы две точки в пространстве

$$A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2), \text{ то } |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Если точка $M(x, y, z)$ делит отрезок AB в соотношении λ/μ , считая от A , то координаты этой точки определяются как:

$$x = \frac{\mu x_1 + \lambda x_2}{\mu + \lambda}; y = \frac{\mu y_1 + \lambda y_2}{\mu + \lambda}; z = \frac{\mu z_1 + \lambda z_2}{\mu + \lambda}.$$

В частном случае координаты середины отрезка находятся как:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; y = \frac{y_1 + y_2}{2}; z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Линейные операции над векторами в координатах.

Пусть заданы векторы в прямоугольной системе координат

$\vec{a}(x_A, y_A, z_A); \vec{b}(x_B, y_B, z_B)$ тогда линейные операции над ними в координатах имеют вид:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}(x_A + x_B; y_A + y_B; z_A + z_B); \alpha \vec{a}(\alpha x_A, \alpha y_A, \alpha z_A)$$

Лекция 6. Скалярное произведение векторов

Определение. Скалярным произведением векторов \vec{a} и \vec{b} называется число, равное произведению длин этих сторон на косинус угла между ними. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi$

Свойства скалярного произведения:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2;$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0, \text{ í ñěč } \vec{a} \perp \vec{b} \text{ čěč } \vec{a} = 0 \text{ čěč } \vec{b} = 0.$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a};$$

$$\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

$$(m\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (m\vec{b}) = m(\vec{a} \cdot \vec{b}); m = const$$

Если рассматривать векторы $\vec{a}(x_a, y_a, z_a); \vec{b}(x_b, y_b, z_b)$ в декартовой прямоугольной системе координат, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b + z_a \cdot z_b$;

Используя полученные равенства, получаем формулу для вычисления угла между векторами: $\cos \varphi = \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

Пр и м е р . Найти $(5\vec{a} + 3\vec{b})(2\vec{a} - \vec{b})$, если $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3, \vec{a} \perp \vec{b}$.

$$10\vec{a} \cdot \vec{a} - 5\vec{a} \cdot \vec{b} + 6\vec{a} \cdot \vec{b} - 3\vec{b} \cdot \vec{b} = 10|\vec{a}|^2 - 3|\vec{b}|^2 = 40 - 27 = 13,$$

$$\text{т.к. } \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 = 4, \vec{b} \cdot \vec{b} = |\vec{b}|^2 = 9, \vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$$

Пр и м е р . Найти угол между векторами \vec{a} и \vec{b} , если $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = 6\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$.

Т.е.

$$\vec{a} = (1, 2, 3), \vec{b} = (6, 4, -2). \vec{a} \cdot \vec{b} = 6 + 8 - 6 = 8:$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}; |\vec{b}| = \sqrt{36+16+4} = \sqrt{56}.$$

$$\cos \varphi = \frac{8}{\sqrt{14}\sqrt{56}} = \frac{8}{2\sqrt{14}\sqrt{14}} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}; \varphi = \arccos \frac{2}{7}.$$

Лекция 7. Векторное и смешанное произведение векторов

1. Векторное произведение

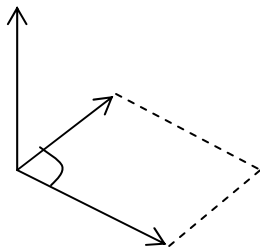
Определение. Векторным произведением векторов \vec{a} и \vec{b} называется вектор \vec{c} , удовлетворяющий следующим условиям:

1) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \varphi$, где φ - угол между векторами \vec{a} и \vec{b} ,
 $\sin \varphi \geq 0; 0 \leq \varphi \leq \pi$.

2) вектор \vec{c} ортогонален векторам \vec{a} и \vec{b}

3) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют правую тройку векторов.

Обозначается: $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ или $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$.



Свойства векторного произведения векторов:

1) $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$;

2) $\vec{a} \times \vec{b} = 0$, если $\vec{a} \parallel \vec{b}$ или $\vec{a} = 0$ или $\vec{b} = 0$;

3) $(m\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (m\vec{b}) = m(\vec{a} \times \vec{b})$;

4) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$;

5) Если заданы векторы $\vec{a}(x_a, y_a, z_a)$ и $\vec{b}(x_b, y_b, z_b)$ в декартовой прямоугольной системе

координат с единичными векторами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, то $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix}$;

6) Геометрическим смыслом векторного произведения векторов является площадь параллелограмма, построенного на векторах \vec{a} и \vec{b} .

Пример. Найти векторное произведение векторов $\vec{a} = 2\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$.

$$\vec{a} = (2, 5, 1), \vec{b} = (1, 2, -3)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -17\vec{i} + 7\vec{j} - \vec{k}$$

2. Смешанное произведение векторов

Определение. Смешанным произведением векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется число, равное скалярному произведению вектора \vec{a} на вектор, равный векторному произведению векторов \vec{b}, \vec{c} .

Обозначается $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$ или $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

Смешанное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$ по модулю равно объему параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Свойства смешанного произведения:

1) Смешанное произведение равно нулю, если:

- а) хоть один из векторов равен нулю;
- б) два из векторов коллинеарны;
- в) векторы компланарны.

$$2) (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

$$3) (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) = -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) = -(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}) = -(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b})$$

$$4) (\lambda \vec{a}_1 + \mu \vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c}) = \lambda (\vec{a}_1, \vec{b}, \vec{c}) + \mu (\vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c})$$

5) Объем треугольной пирамиды, образованной векторами $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, равен $\frac{1}{6}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$

$$6) \text{Если } \vec{a} = (x_1, y_1, z_1), \vec{b} = (x_2, y_2, z_2), \vec{c} = (x_3, y_3, z_3), \text{ то } (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Пример. Доказать, что точки $A(5, 7, 2), B(3, 1, -1), C(9, 4, -4), D(1, 5, 0)$ лежат в одной плоскости.

$$\overrightarrow{AB} = (-2; -6; 1)$$

Найдем координаты векторов: $\overrightarrow{AC} = (4; -3; -2)$

$$\overrightarrow{AD} = (-4; -2; 2)$$

Найдем смешанное произведение полученных векторов:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} -2 & -6 & 1 \\ 4 & -3 & -2 \\ -4 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -6 & 1 \\ 0 & -15 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -6 & 1 \\ 0 & -15 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Таким образом, полученные выше векторы компланарны, следовательно точки А, В, С и D лежат в одной плоскости.

Пример. Найти объем пирамиды и длину высоты, опущенной на грань BCD, если вершины имеют координаты $A(0; 0; 1), B(2; 3; 5), C(6; 2; 3), D(3; 7; 2)$.

$$\overrightarrow{BA} = (-2, -3, -4)$$

Найдем координаты векторов: $\overrightarrow{BD} = (1; 4; -3)$

$$\overrightarrow{BC} = (4; -1; -2)$$

Объем пирамиды

$$\begin{aligned} V = \frac{1}{6} &= \frac{1}{6} \begin{vmatrix} -2 & -3 & -4 \\ 1 & 4 & -3 \\ 4 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} (-2(-8-3) + 3(-2+12) - 4(-1-16)) = \\ &= \frac{1}{6} (22 + 30 + 68) = 20(e\partial^3) \end{aligned}$$

Для нахождения длины высоты пирамиды найдем сначала площадь основания BCD.

$$\overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 4 & -3 \\ 4 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i}(-8-3) - \vec{j}(-2+12) + \vec{k}(-1-16) = -11\vec{i} - 10\vec{j} - 17\vec{k}.$$

$$|\overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{BC}| = \sqrt{11^2 + 10^2 + 17^2} = \sqrt{121 + 100 + 289} = \sqrt{510}$$

$$S_{осн} = \sqrt{510} / 2(e\partial^2)$$

$$T.к. \quad V = \frac{S_{осн} \cdot h}{3}; h = \frac{3V}{S_{осн}} = \frac{120}{\sqrt{510}} = \frac{4\sqrt{510}}{17}(e\partial).$$

Лекция 8. Понятие линии на плоскости

1. Уравнение линии на плоскости

Как известно, любая точка на плоскости определяется двумя координатами в какой-либо системе координат. Системы координат могут быть различными в зависимости от выбора базиса и начала координат.

Определение. Уравнением линии называется соотношение $y = f(x)$ между координатами точек, составляющих эту линию.

Отметим, что уравнение линии может быть выражено параметрическим способом, то есть каждая координата каждой точки выражается через некоторый независимый параметр t . Характерный пример – траектория движущейся точки. В этом случае роль параметра играет время.

2. Уравнение прямой на плоскости

Определение. Любая прямая на плоскости может быть задана уравнением первого порядка $Ax + By + C = 0$, причем постоянные A, B не равны нулю одновременно, т.е.

$A^2 + B^2 \neq 0$. Это уравнение первого порядка называют общим уравнением прямой.

В зависимости от значений постоянных A, B и C возможны следующие частные случаи:

- – прямая проходит через начало координат
- $C = 0, A \neq 0, B \neq 0 \{By + C = 0\}$ – прямая параллельна оси Ox
- $B = 0, A \neq 0, C \neq 0 \{Ax + C = 0\}$ – прямая параллельна оси Oy
- $B = C = 0, A \neq 0$ – прямая совпадает с осью Oy
- $A = C = 0, B \neq 0$ – прямая совпадает с осью Ox

Уравнение прямой может быть представлено в различном виде в зависимости от каких-либо заданных начальных условий.

3. Уравнение прямой по точке и вектору нормали

Определение. В декартовой прямоугольной системе координат вектор с компонентами (A, B) перпендикулярен прямой, заданной уравнением

$$Ax + By + C = 0.$$

Пример. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(1, 2)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}(3, -1)$.

Составим при $A=3$ и $B=-1$ уравнение прямой: $3x - y + C = 0$. Для нахождения коэффициента C подставим в полученное выражение координаты заданной точки A . Получаем: $3 - 2 + C = 0$, следовательно $C = -1$.

Итого: искомое уравнение: $3x - y - 1 = 0$.

4. Уравнение прямой, проходящей через две точки

Пусть в пространстве заданы две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, тогда уравнение прямой,

проходящей через эти точки:
$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

Если какой-либо из знаменателей равен нулю, следует приравнять нулю соответствующий числитель.

На плоскости записанное выше уравнение прямой упрощается: $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$, если

$x_1 \neq x_2$ и $x = x_1$, если $x_1 = x_2$.

Дробь $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = k$ называется угловым коэффициентом прямой.

5. Уравнение прямой по точке и угловому коэффициенту

Если общее уравнение прямой $Ax + By + C = 0$ привести к виду:

$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$ и обозначить $-\frac{A}{B} = k$; $-\frac{C}{B} = b$; т.е. $y = kx + b$, то полученное уравнение

называется уравнением прямой с угловым коэффициентом k .

6. Уравнение прямой по точке и направляющему вектору

По аналогии с пунктом, рассматривающим уравнение прямой через вектор нормали можно ввести задание прямой через точку и направляющий вектор прямой.

Определение. Каждый ненулевой вектор $\vec{a}(\alpha_1, \alpha_2)$, компоненты которого удовлетворяют условию $A\alpha_1 + B\alpha_2 = 0$ называется направляющим вектором прямой $Ax + By + C = 0$.

Пример. Найти уравнение прямой с направляющим вектором $\vec{a}(1, -1)$ и проходящей через точку $A(1, 2)$.

Уравнение искомой прямой будем искать в виде: $Ax + By + C = 0$. В соответствии с определением, коэффициенты должны удовлетворять условиям: $1A + (-1)B = 0$, т.е. $A = B$. Тогда уравнение прямой имеет вид: $Ax + Ay + C = 0$, или $x + y + C/A = 0$. при $x=1, y=2$ получаем $C/A = -3$, т.е. искомое уравнение: $x + y - 3 = 0$

7. Уравнение прямой в отрезках

Если в общем уравнении прямой $Ax + By + C = 0, C \neq 0$, то, разделив на $-C$, получим: $-\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y = 1$ или $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, где $a = -\frac{C}{A}$; $b = -\frac{C}{B}$

Геометрический смысл коэффициентов в том, что коэффициент a является координатой точки пересечения прямой с осью Ox , а b – координатой точки пересечения прямой с осью Oy .

8. Нормальное уравнение прямой

Если обе части уравнения $Ax + By + C = 0$ разделить на число $\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, которое называется нормирующим множителем, то получим

$x \cos \varphi + y \sin \varphi - p = 0$ – нормальное уравнение прямой.

Знак \pm нормирующего множителя надо выбирать так, чтобы $\mu C < 0$.

p – длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую, а φ – угол, образованный этим перпендикуляром с положительным направлением оси Ox

9. Угол между прямыми на плоскости

Определение. Если заданы две прямые $y = k_1x + b_1$, $y = k_2x + b_2$, то острый угол между этими прямыми будет определяться как $\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|$.

Две прямые параллельны, если $k_1 = k_2$. Две прямые перпендикулярны, если $k_1 = -1/k_2$.

Уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данной прямой

Определение. Прямая, проходящая через точку $M_1(x_1, y_1)$ и перпендикулярная к прямой $y = kx + b$ представляется уравнением:

$$y - y_1 = -\frac{1}{k}(x - x_1)$$

10. Расстояние от точки до прямой

Теорема. Если задана точка $M(x_0, y_0)$, то расстояние до прямой $Ax + By + C = 0$ определяется как $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

Пример. Определить угол между прямыми: $y = -3x + 7$, $y = 2x + 1$.

$$k_1 = -3, k_2 = 2 \operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{2 - (-3)}{1 - (-3)2} \right| = 1; \varphi = \pi/4.$$

Пример. Показать, что прямые $3x - 5y + 7 = 0$ и $10x + 6y - 3 = 0$ перпендикулярны.

Находим: $k_1 = 3/5, k_2 = -5/3, k_1 k_2 = -1$, следовательно, прямые перпендикулярны.

Пример. Даны вершины треугольника $A(0; 1)$, $B(6; 5)$, $C(12; -1)$. Найти уравнение высоты, проведенной из вершины C .

Находим уравнение стороны AB : $\frac{x-0}{6-0} = \frac{y-1}{5-1}$; $\frac{x}{6} = \frac{y-1}{4}$; $4x = 6y - 6$;

$$2x - 3y + 3 = 0; y = \frac{2}{3}x + 1.$$

Искомое уравнение высоты имеет вид: $Ax + By + C = 0$ или $y = kx + b, k = -\frac{3}{2}$ Тогда

$y = -\frac{3}{2}x + b$. Т.к. высота проходит через точку C , то ее координаты удовлетворяют данному

уравнению: $-1 = -\frac{3}{2}12 + b$, откуда $b = 17$. Итого: $y = -\frac{3}{2}x + 17$.

Ответ: $3x + 2y - 34 = 0$.

Лекция 9. Плоскость и прямая в пространстве

1. Общее уравнение плоскости

Определение. Плоскостью называется поверхность, все точки которой удовлетворяют общему уравнению: $Ax + By + Cz + D = 0$, где A, B, C – координаты вектора $\vec{N} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$ – вектор нормали к плоскости.

Возможны следующие частные случаи:

$A = 0$ – плоскость параллельна оси Ox

$B = 0$ – плоскость параллельна оси Oy

$C = 0$ – плоскость параллельна оси Oz

$D = 0$ – плоскость проходит через начало координат

$A = B = 0$ – плоскость параллельна плоскости xOy

$A = C = 0$ – плоскость параллельна плоскости xOz

$B = C = 0$ – плоскость параллельна плоскости yOz

$A = D = 0$ – плоскость проходит через ось Ox

$B = D = 0$ – плоскость проходит через ось Oy

$C = D = 0$ – плоскость проходит через ось Oz

$A = B = D = 0$ – плоскость совпадает с плоскостью xOy

$A = C = D = 0$ – плоскость совпадает с плоскостью xOz

$B = C = D = 0$ – плоскость совпадает с плоскостью yOz

2. Уравнение поверхности в пространстве

Определение. Любое уравнение, связывающее координаты x, y, z любой точки поверхности является уравнением этой поверхности.

3. Уравнение плоскости, проходящей через три точки

Для того, чтобы через три какие-либо точки пространства можно было провести единственную плоскость, необходимо, чтобы эти точки не лежали на одной прямой.

Рассмотрим точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ в общей декартовой системе координат.

Для того, чтобы произвольная точка $M(x, y, z)$ лежала в одной плоскости с точками

M_1, M_2, M_3 необходимо, чтобы векторы $\vec{M_1M_2}, \vec{M_1M_3}, \vec{M_1M}$ были компланарны, т.е

$$\vec{M_1M} = \{x - x_1; y - y_1; z - z_1\}$$

$(\vec{M_1M_2}, \vec{M_1M_3}, \vec{M_1M}) = 0$. Таким образом, $\vec{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$

$$\vec{M_1M_3} = \{x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1\}$$

Уравнение плоскости, проходящей через три точки:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

4. Уравнение плоскости по двум точкам и вектору, коллинеарному плоскости

Пусть заданы точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и вектор $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$.

Составим уравнение плоскости, проходящей через данные точки M_1 и M_2 и произвольную точку $M(x, y, z)$ параллельно вектору \vec{a} .

Векторы $\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1; y - y_1; z - z_1\}$ и вектор $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ должны быть
 $\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$

компланарны, т.е. $(\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \vec{a}) = 0$. Уравнение плоскости:
$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 0$$

5. Уравнение плоскости по одной точке и двум векторам, коллинеарным плоскости

Пусть заданы два вектора $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, коллинеарные плоскости. Тогда для произвольной точки $M(x, y, z)$, принадлежащей плоскости, векторы $\vec{a}, \vec{b}, \overrightarrow{MM_1}$ должны быть компланарны.

Уравнение плоскости:
$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

6. Уравнение плоскости по точке и вектору нормали

Теорема. Если в пространстве задана точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, то уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 перпендикулярно вектору нормали $\vec{N}(A, B, C)$ имеет вид: $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$.

7. Уравнение плоскости в отрезках

Если в общем уравнении $Ax + By + Cz + D = 0$ поделить обе части на $(-D)$

$-\frac{A}{D}x - \frac{B}{D}y - \frac{C}{D}z - 1 = 0$, заменив $-\frac{D}{A} = a$, $-\frac{D}{B} = b$, $-\frac{D}{C} = c$, получим уравнение плоскости

в отрезках: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$. Числа a, b, c являются точками пересечения плоскости соответственно с осями x, y, z .

8. Уравнение плоскости в векторной форме

$\vec{r} \cdot \vec{n} = p$, где $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ - радиус-вектор текущей точки $M(x, y, z)$,

$\vec{n} = \vec{i} \cos \alpha + \vec{j} \cos \beta + \vec{k} \cos \gamma$ - единичный вектор, имеющий направление, перпендикулярно, опущенного на плоскость из начала координат. α, β и γ - углы, образованные этим вектором с осями x, y, z . p - длина этого перпендикуляра. В координатах это уравнение имеет вид:

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0$$

9. Расстояние от точки до плоскости

Расстояние от произвольной точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ равно:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Пример. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки $A(2, -1, 4)$ и $B(3, 2, -1)$ перпендикулярно плоскости $x + y + 2z - 3 = 0$.

Искомое уравнение плоскости имеет вид: $Ax + By + Cz + D = 0$, вектор нормали к этой плоскости $\vec{n}_1(A, B, C)$. Вектор $\vec{AB}(1, 3, -5)$ принадлежит плоскости. Заданная нам плоскость, перпендикулярная искомой имеет вектор нормали $\vec{n}_2(1, 1, 2)$. Т.к. точки A и B принадлежат обеим плоскостям, а плоскости взаимно перпендикулярны, то

$$\vec{n}_1 = \vec{AB} \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 11\vec{i} - 7\vec{j} - 2\vec{k}.$$

Таким образом, вектор нормали $\vec{n}_1(11, -7, -2)$. Т.к. точка A принадлежит искомой плоскости, то ее координаты должны удовлетворять уравнению этой плоскости, т.е. $11 \cdot 2 + 7 \cdot (-1) - 2 \cdot 4 + D = 0$; $D = -21$. Итого, получаем уравнение плоскости: $11x - 7y - 2z - 21 = 0$

10. Уравнение линии в пространстве

Как на плоскости, так и в пространстве, любая линия может быть определена как совокупность точек, координаты которых в некоторой выбранной в пространстве системе координат удовлетворяют уравнению:

$F(x, y, z) = 0$. Это уравнение называется уравнением линии в пространстве.

Кроме того, линия в пространстве может быть определена и иначе. Ее можно рассматривать как линию пересечения двух поверхностей, каждая из которых задана каким-либо уравнением.

Пусть $F(x, y, z) = 0$ и $\Phi(x, y, z) = 0$ – уравнения поверхностей, пересекающихся по линии L .

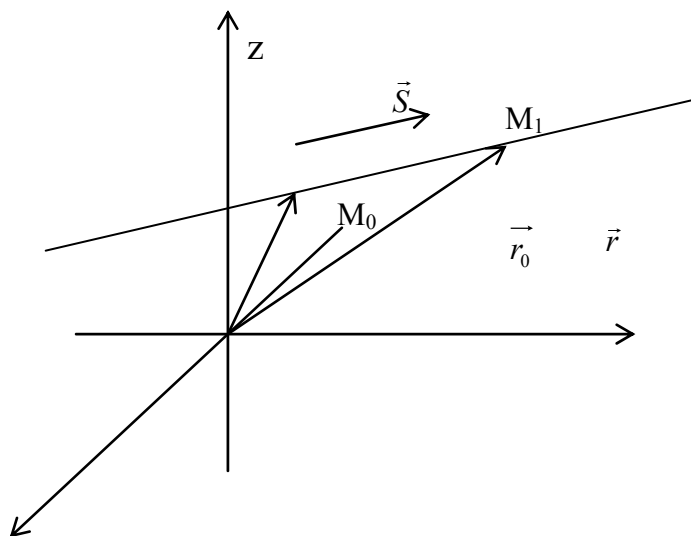
Тогда пару уравнений $\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ \Phi(x, y, z) = 0 \end{cases}$ назовем уравнением линии в пространстве.

11. Уравнение прямой в пространстве по точке и направляющему вектору

Возьмем произвольную прямую и вектор $\vec{S}(m, n, p)$, параллельный данной прямой. Вектор \vec{S} называется направляющим вектором прямой.

На прямой возьмем две произвольные точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и $M(x, y, z)$.

z



Обозначим радиус- векторы этих точек как \vec{r}_0 и \vec{r} , очевидно, что

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = \overline{M_0M}.$$

Т.к. векторы $\overline{M_0M}$ и \vec{S} коллинеарны, то верно соотношение $\overline{M_0M} = \vec{S}t$, где t – некоторый параметр. Итого, можно записать: $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{S}t$.

Т.к. этому уравнению удовлетворяют координаты любой точки прямой, то полученное уравнение – параметрическое уравнение прямой.

Это векторное уравнение может быть представлено в координатной форме:
$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$$

Преобразовав эту систему и приравняв значения параметра t , получаем канонические уравнения прямой в пространстве: $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$.

Определение. Направляющими косинусами прямой называются направляющие косинусы вектора \vec{S} , которые могут быть вычислены по формулам:

$$\cos \alpha = \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}; \cos \beta = \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}; \cos \gamma = \frac{p}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

Отсюда получим: $m : n : p = \cos \alpha : \cos \beta : \cos \gamma$.

Числа m , n , p называются угловыми коэффициентами прямой. Т.к. \vec{S} - ненулевой вектор, то m , n и p не могут равняться нулю одновременно, но одно или два из этих чисел могут равняться нулю. В этом случае в уравнении прямой следует приравнять нулю соответствующие числители.

12. Уравнение прямой в пространстве, проходящей через две точки

Если на прямой в пространстве отметить две произвольные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то координаты этих точек должны удовлетворять полученному выше уравнению прямой:

$$\frac{x_2 - x_1}{m} = \frac{y_2 - y_1}{n} = \frac{z_2 - z_1}{p}.$$

Кроме того, для точки M_1 можно записать:

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p}.$$

Решая совместно эти уравнения, получим:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Это уравнение прямой, проходящей через две точки в пространстве.

13. Общие уравнения прямой в пространстве

Уравнение прямой может быть рассмотрено как уравнение линии пересечения двух плоскостей. Как было рассмотрено выше, плоскость в векторной форме может быть задана уравнением:

$$\vec{N}\vec{r} + D = 0, \text{ где}$$

\vec{N} - нормаль плоскости; \vec{r} - радиус- вектор произвольной точки плоскости.

Пусть в пространстве заданы две плоскости: $\vec{N}_1\vec{r} + D_1 = 0$ и $\vec{N}_2\vec{r} + D_2 = 0$, векторы нормали имеют координаты: $\vec{N}_1 (A_1, B_1, C_1)$, $\vec{N}_2 (A_2, B_2, C_2)$; $\vec{r} (x, y, z)$.

Тогда общие уравнения прямой в векторной форме:

$$\begin{cases} \vec{N}_1 \cdot \vec{r} + D_1 = 0 \\ \vec{N}_2 \cdot \vec{r} + D_2 = 0 \end{cases}$$

Общие уравнения прямой в координатной форме:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Практическая задача часто состоит в приведении уравнений прямых в общем виде к каноническому виду.

Для этого надо найти произвольную точку прямой и числа m , n , p .

При этом направляющий вектор прямой может быть найден как векторное произведение векторов нормали к заданным плоскостям.

$$\vec{S} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \vec{i}m + \vec{j}n + \vec{k}p.$$

Пример. Найти каноническое уравнение, если прямая задана в виде:

$$\begin{cases} 2x - y + 3z - 1 = 0 \\ 5x + 4y - z - 7 = 0 \end{cases}$$

Для нахождения произвольной точки прямой, примем ее координату $x = 0$, а затем подставим это значение в заданную систему уравнений.

$$\begin{cases} y = 3z - 1 \\ 4y - z - 7 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 3z - 1 \\ 12z - 4 - z - 7 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 3z - 1 \\ z = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2 \\ z = 1 \end{cases}, \text{ т.е. } A(0, 2, 1).$$

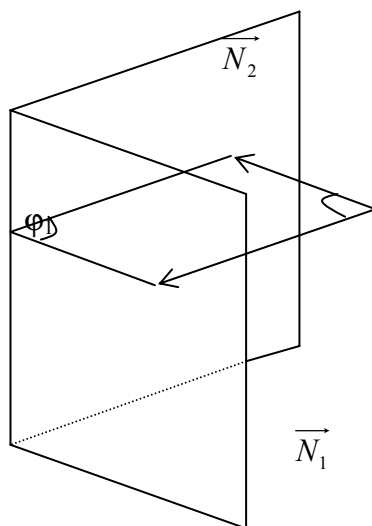
Находим компоненты направляющего вектора прямой.

$$m = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -11; \quad n = -\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 17; \quad p = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 13.$$

Тогда канонические уравнения прямой:

$$-\frac{x}{11} = \frac{y-2}{17} = \frac{z-1}{13}.$$

14. Угол между плоскостями



Угол между двумя плоскостями в пространстве φ связан с углом между нормальными к этим плоскостям φ_1 соотношением: $\varphi = \varphi_1$ или $\varphi = 180 - \varphi_1$, т.е.

$$\cos \varphi = \pm \cos \varphi_1.$$

Определим угол φ_1 . Известно, что плоскости могут быть заданы соотношениями:

$$\begin{cases} \vec{N}_1 \cdot \vec{r} + D_1 = 0 \\ \vec{N}_2 \cdot \vec{r} + D_2 = 0 \end{cases}, \text{ где } \vec{N}_1 (A_1, B_1, C_1), \vec{N}_2 (A_2, B_2, C_2). \text{ Угол между векторами нормали найдем из их}$$

скалярного произведения: $\cos \varphi_1 = \frac{\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2}{|\vec{N}_1| |\vec{N}_2|}$. Таким образом, угол между плоскостями находится

$$\text{по формуле: } \cos \varphi = \pm \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

Выбор знака косинуса зависит от того, какой угол между плоскостями следует найти – острый, или смежный с ним тупой.

15. Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей

На основе полученной выше формулы для нахождения угла между плоскостями можно найти условия параллельности и перпендикулярности плоскостей. Для того, чтобы плоскости были перпендикулярны необходимо и достаточно, чтобы косинус угла между плоскостями равнялся нулю. Это условие выполняется, если:

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0.$$

Параллельны, векторы нормалей коллинеарны: $\vec{N}_1 \parallel \vec{N}_2$. Это условие выполняется

Плоскости, если: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$.

16. Угол между прямыми в пространстве

Пусть в пространстве заданы две прямые. Их параметрические уравнения:

$$l_1: \vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{S}_1 t$$

$$l_2: \vec{r} = \vec{r}_2 + \vec{S}_2 t$$

$$\vec{r} = (x, y, z); \quad \vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1); \quad \vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2); \quad \vec{S}_1 = (m_1, n_1, p_1); \quad \vec{S}_2 = (m_2, n_2, p_2).$$

Угол между прямыми φ и угол между направляющими векторами φ этих прямых связаны соотношением: $\varphi = \varphi_1$ или $\varphi = 180 - \varphi_1$. Угол между направляющими векторами находится из скалярного произведения. Таким образом:

$$\cos \varphi = \pm \frac{\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2}{|\vec{S}_1| |\vec{S}_2|} = \pm \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$$

17. Условия параллельности и перпендикулярности прямых в пространстве

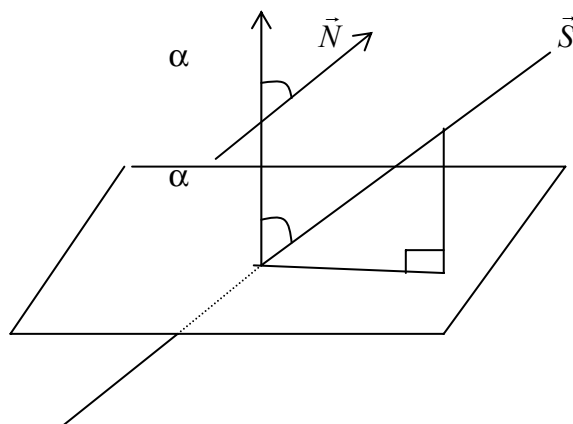
Чтобы две прямые были параллельны необходимо и достаточно, чтобы направляющие векторы этих прямых были коллинеарны, т.е. их соответствующие координаты были

пропорциональны. $\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$

Чтобы две прямые были перпендикулярны необходимо и достаточно, чтобы направляющие векторы этих прямых были перпендикулярны, т.е. косинус угла между ними равен нулю. $m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$

18. Угол между прямой и плоскостью

Определение. Углом между прямой и плоскостью называется любой угол между прямой и ее проекцией на эту плоскость.



Пусть плоскость задана уравнением $\vec{N} \cdot \vec{r} + D = 0$, а прямая - $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{S} t$. Из геометрических соображений (см. рис.) видно, что искомый угол $\alpha = 90^\circ - \varphi$, где φ - угол между векторами \vec{N} и \vec{S} . Этот угол может быть найден по формуле:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{N} \cdot \vec{S}}{|\vec{N}| |\vec{S}|} \quad \sin \varphi = \pm \cos \alpha = \pm \frac{\vec{N} \cdot \vec{S}}{|\vec{N}| |\vec{S}|}.$$

В координатной форме:

$$\sin \varphi = \pm \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$$

19. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости в пространстве

Для того, чтобы прямая и плоскость были параллельны, необходимо и достаточно, чтобы вектор нормали к плоскости и направляющий вектор прямой были перпендикулярны. Для этого необходимо, чтобы их скалярное произведение было равно нулю.

$$\vec{N} \perp \vec{S}, \quad \vec{N} \cdot \vec{S} = 0, \quad \sin \varphi = 0, \quad Am + Bn + Cp = 0.$$

Для того, чтобы прямая и плоскость были перпендикулярны, необходимо и достаточно, чтобы вектор нормали к плоскости и направляющий вектор прямой были коллинеарны. Это условие выполняется, если векторное произведение этих векторов было равно нулю.

$$\vec{N} \times \vec{S} = 0; \quad \frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$$

Лекция 10. Кривые второго порядка

Кривая второго порядка может быть задана уравнением

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Существует система координат (не обязательно декартова прямоугольная), в которой данное уравнение может быть представлено в одном из видов, приведенных ниже.

1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ - уравнение эллипса.
2. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ - уравнение “мнимого” эллипса.
3. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ - уравнение гиперболы.
4. $a^2x^2 - c^2y^2 = 0$ – уравнение двух пересекающихся прямых.
5. $y^2 = 2px$ – уравнение параболы.
6. $y^2 - a^2 = 0$ – уравнение двух параллельных прямых.
7. $y^2 + a^2 = 0$ – уравнение двух “мнимых” параллельных прямых.
8. $y^2 = 0$ – пара совпадающих прямых.
9. $(x-a)^2 - (y-b)^2 = R^2$ – уравнение окружности.

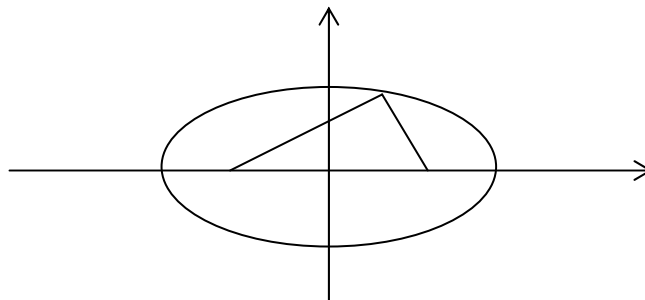
1. Окружность

В окружности $(x-a)^2 - (y-b)^2 = R^2$ центр имеет координаты (a; b).

2. Эллипс

Определение. Эллипсом называется кривая, заданная уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Определение. Фокусами называются такие две точки, сумма расстояний от которых до любой точки эллипса есть постоянная величина.



F_1, F_2 – фокусы. $F_1 = (c; 0); F_2 = (-c; 0)$ $a^2 = b^2 + c^2$.

c – половина расстояния между фокусами;

a – большая полуось;

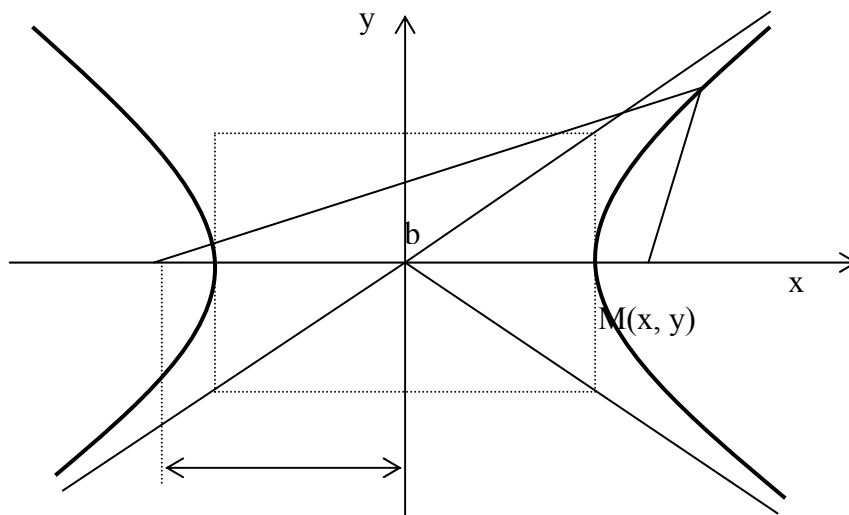
b – малая полуось.

Определение. Форма эллипса определяется характеристикой, которая является отношением фокусного расстояния к большей оси и называется эксцентриситетом. $e = c/a$. Т.к. $c < a$, то $e < 1$.

С эллипсом связаны две прямые, называемые директрисами. Их уравнения:
 $x = a/e$; $x = -a/e$.

3. Гипербола

Определение. Гиперболой называется множество точек плоскости, для которых модуль разности расстояний от двух данных точек, называемых фокусами есть величина постоянная, меньшая расстояния между фокусами



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{Получили каноническое уравнение гиперболы.}$$

Гипербола симметрична относительно середины отрезка, соединяющего фокусы и относительно осей координат.

Ось $2a$ называется действительной осью гиперболы.

Ось $2b$ называется мнимой осью гиперболы.

Гипербола имеет две асимптоты, уравнения которых $y = \pm \frac{b}{a}x$.

Определение. Отношение $e = \frac{c}{a} > 1$ называется эксцентриситетом гиперболы, где c – половина расстояния между фокусами, a – действительная полуось. С учетом того, что $c^2 - a^2 = b^2$:

$$e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2}$$

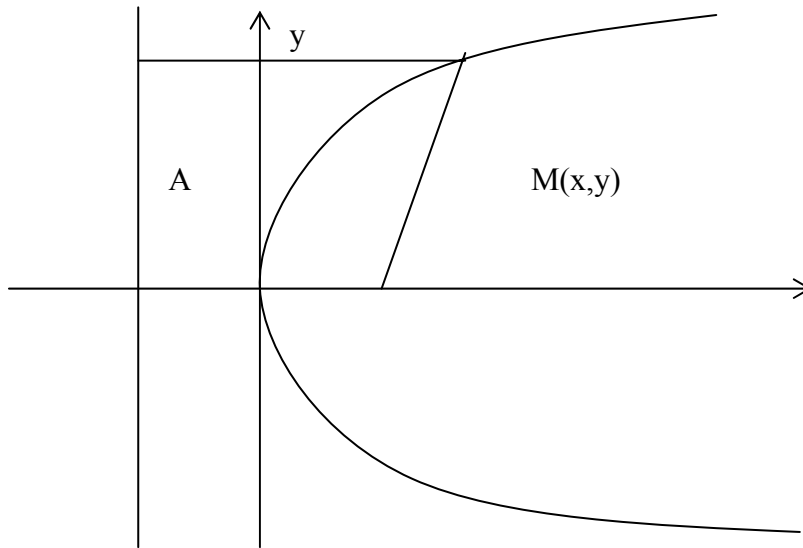
$$\frac{b}{a} = \sqrt{e^2 - 1}$$

Определение. Две прямые, перпендикулярные действительной оси гиперболы и расположенные симметрично относительно центра на расстоянии a/e от него, называются директрисами гиперболы. Их уравнения: $x = \pm \frac{a}{e}$.

4. Парабола

Определение. Параболой называется множество точек плоскости, каждая из которых находится на одинаковом расстоянии от данной точки, называемой фокусом, и от данной прямой, называемой директрисой и не проходящей через фокус.

Расположим начало координат посередине между фокусом и директрисой.



Величина p (расстояние от фокуса до директрисы) называется п а р а м е т р о м параболы.

$y^2 = 2px$ - каноническое уравнение параболы.

Уравнение директрисы: $x = p/2$.

Лекция 11. Поверхности второго порядка

Определение. Поверхности второго порядка - это поверхности, уравнения которых в прямоугольной системе координат являются уравнениями второго порядка.

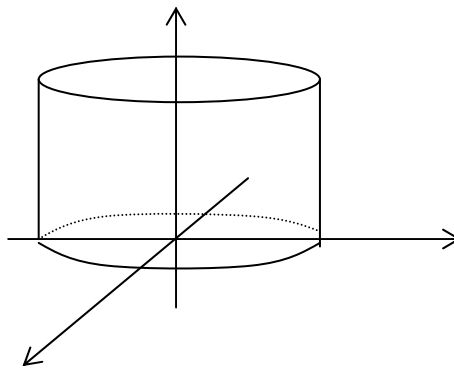
1. Цилиндрические поверхности

Определение. Цилиндрическими поверхностями называются поверхности, образованные линиями, параллельными какой-либо фиксированной прямой.

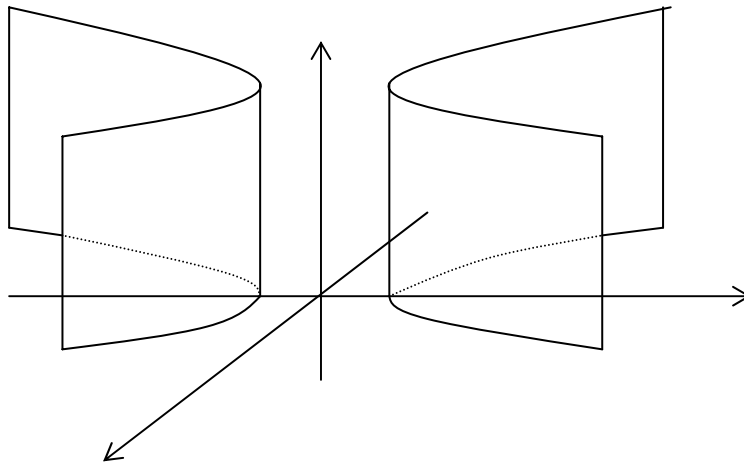
Рассмотрим поверхности, в уравнении которых отсутствует составляющая z , т.е. направляющие параллельны оси Oz . Тип линии на плоскости XOY (эта линия называется направляющей поверхности) определяет характер цилиндрической поверхности.

Рассмотрим некоторые частные случаи в зависимости от уравнения направляющих:

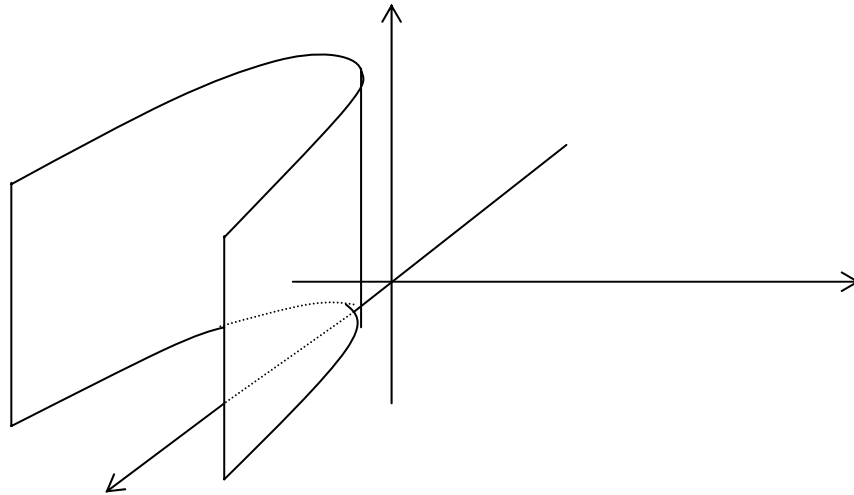
1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ - эллиптический цилиндр.



2. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ - гиперболический цилиндр.



3. $x^2 = 2py$ - параболический цилиндр.



2. Поверхности вращения

Определение. Поверхность, описываемая некоторой линией, вращающейся вокруг неподвижной прямой d , называется поверхностью вращения с осью вращения d .

Если уравнение поверхности в прямоугольной системе координат имеет вид: $F(x_2 + y_2, z) = 0$, то эта поверхность - поверхность вращения с осью вращения Oz .

Аналогично: $F(x_2 + z_2, y) = 0$ - поверхность вращения с осью вращения Oy ,

$F(z_2 + y_2, x) = 0$ - поверхность вращения с осью вращения Ox .

Запишем уравнения поверхностей вращения для некоторых частных случаев:

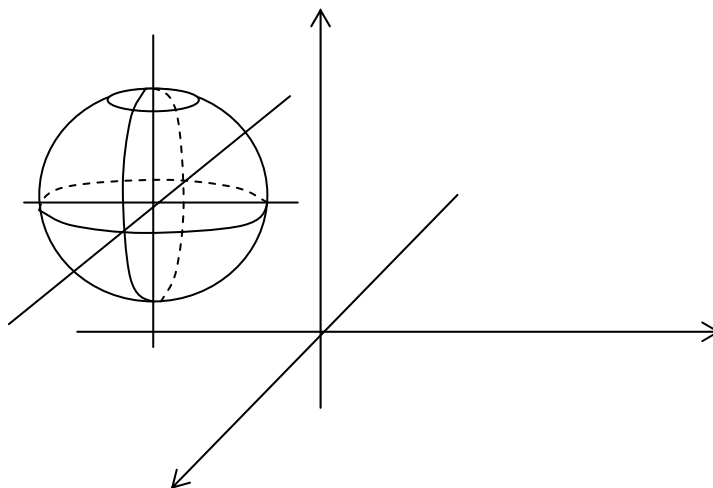
1. $\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ - эллипсоид вращения
2. $\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ - однополостный гиперболоид вращения
3. $\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ - двуполостный гиперболоид вращения
4. $\frac{x^2 + y^2}{a^2} = 2z$ - параболоид вращения

Аналогично могут быть записаны уравнения для рассмотренных выше поверхностей вращения, если осью вращения являются оси Ox или Oy .

Однако, перечисленные выше поверхности являются всего лишь частными случаями поверхностей второго порядка общего вида, некоторые типы которых рассмотрены ниже:

Сфера

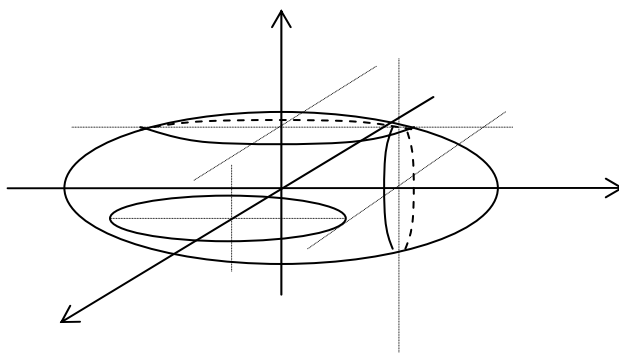
$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$$



Трехосный эллипсоид:

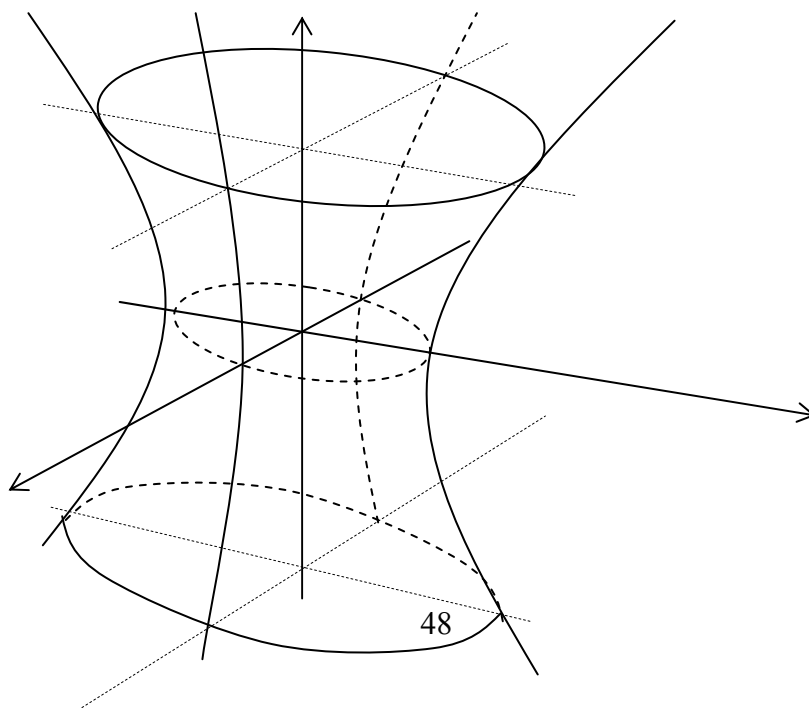
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

В сечении эллипсоида плоскостями, параллельными координатным плоскостям, получаются эллипсы с различными осями.



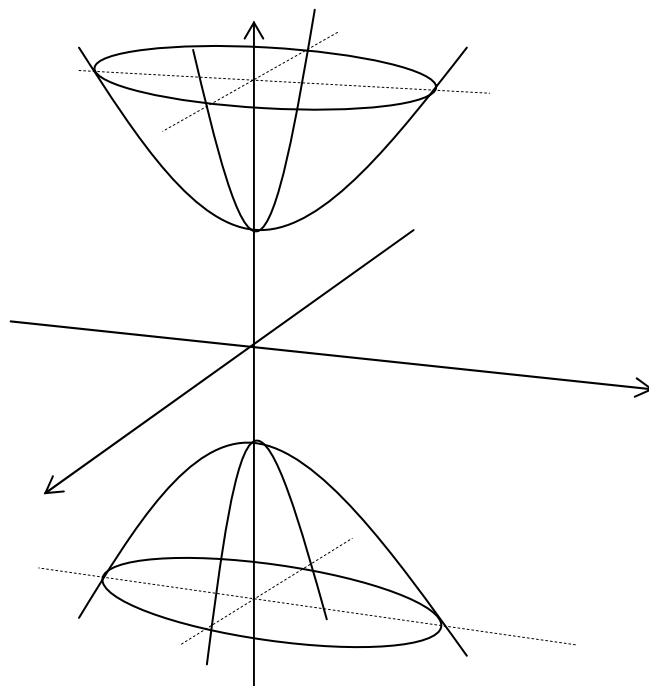
Однополостный гиперболоид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$



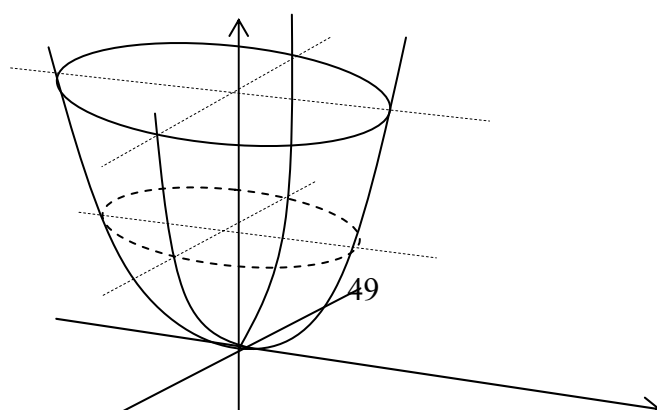
Двуполостный гиперболоид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$



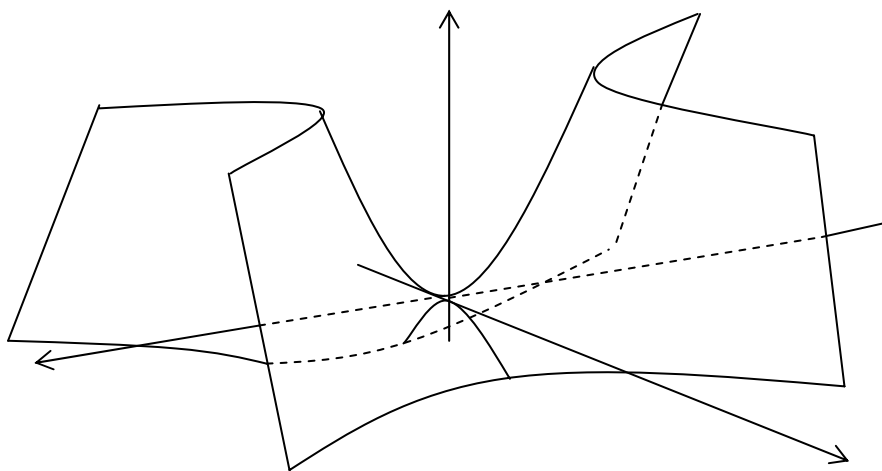
Эллиптический параболоид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z, \text{ где } p > 0, q > 0$$



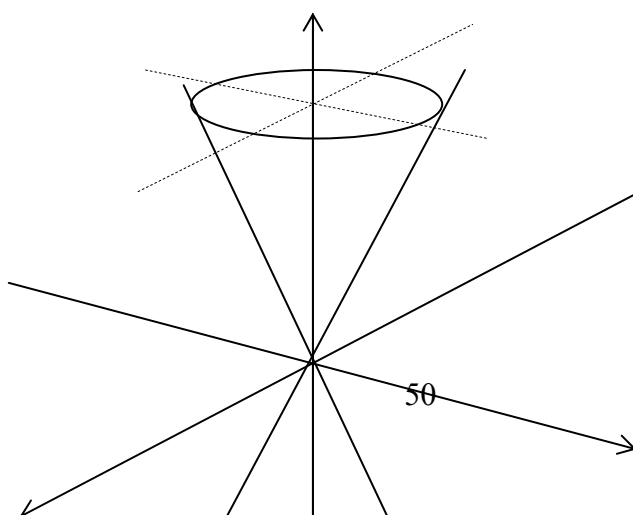
Гиперболический параболоид:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$$



Конус второго порядка:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$



Лекция 12. Введение в анализ

1. Числовая последовательность

Определение. Если каждому натуральному числу n поставлено в соответствие число x_n , то говорят, что задана последовательность $x_1, x_2, \dots, x_n = \{x_n\}$.

Общий элемент последовательности является функцией от n $x_n = f(n)$.

Таким образом последовательность может рассматриваться как функция порядкового номера элемента. Задать последовательность можно различными способами - главное, чтобы был указан способ получения любого члена последовательности.

Пример. $\{x_n\} = \{(-1)^n\}$ или $\{x_n\} = -1; 1; -1; 1; \dots$

$\{x_n\} = \{\sin \pi n / 2\}$ или $\{x_n\} = 1; 0; 1; 0; \dots$

Для последовательностей можно определить следующие операции:

1. Умножение последовательности на число m :

$$m\{x_n\} = \{mx_n\}, \text{ т.е. } mx_1, mx_2, \dots$$

2. Сложение (вычитание) последовательностей:

$$\{x_n\} + \{y_n\} = \{x_n + y_n\}.$$

3. Произведение последовательностей:

$$\{x_n\} \cdot \{y_n\} = \{x_n \cdot y_n\}.$$

4. Частное последовательностей:

$$\frac{\{x_n\}}{\{y_n\}} = \left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\} \text{ при } \{y_n\} \neq 0.$$

2. Ограниченные и неограниченные последовательности

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной, если существует такое число $M > 0$, что для любого n верно неравенство: $|x_n| < M$ т.е. все члены последовательности принадлежат промежутку $(-M; M)$.

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной сверху, если для любого x_n существует такое число M , что $x_n \leq M$.

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной снизу, если для любого n существует такое число M , что $x_n \geq M$.

Пример. $\{x_n\} = n$ - ограничена снизу $\{1, 2, 3, \dots\}$.

Определение. Число называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любого положительного $\varepsilon > 0$ существует такой номер N , что для всех $n > N$ выполняется условие:

$$|a - x_n| < \varepsilon$$

Это записывается: $\lim x_n = a$.

В этом случае говорят, что последовательность $\{x_n\}$ сходится к a при $n \rightarrow \infty$.

Свойство: Если отбросить какое-либо число членов последовательности, то получаются новые последовательности, при этом если сходится одна из них, то сходится и другая.

Пример. Доказать, что предел последовательности $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$.

Пусть при $n > N$ верно $\left| 0 - \frac{(-1)^n}{n} \right| < \varepsilon$, т.е. $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Это верно при $n > \frac{1}{\varepsilon}$, таким образом, если за N взять целую часть от $\frac{1}{\varepsilon}$, то утверждение, приведенное выше, выполняется.

Теорема. Если $x_n \rightarrow a$, то $|x_n| \rightarrow |a|$.

Доказательство. Из $x_n \rightarrow a$ следует, что $|x_n - a| < \varepsilon$. В то же время: $||x_n| - |a|| \leq |x_n - a|$, т.е. $||x_n| - |a|| < \varepsilon$, т.е. $|x_n| \rightarrow |a|$. Теорема доказана.

Теорема. Если $x_n \rightarrow a$, то последовательность $\{x_n\}$ ограничена.

Следует отметить, что обратное утверждение неверно, т.е. из ограниченности последовательности не следует ее сходимости.

Например, последовательность $x_n = \begin{cases} 1 + \frac{1}{n}, & \text{при четном } n \\ 2 - \frac{1}{n}, & \text{при нечетном } n \end{cases}$ не имеет предела, хотя

$$|x_n| \leq 2$$

3. Монотонные последовательности

Определение.

- 1) Если $x_{n+1} > x_n$ для всех n , то последовательность возрастающая
- 2) Если $x_{n+1} \geq x_n$ для всех n , то последовательность неубывающая.
- 3) Если $x_{n+1} < x_n$ для всех n , то последовательность убывающая
- 4) Если $x_{n+1} \leq x_n$ для всех n , то последовательность не возрастающая

Все эти последовательности называются монотонными. Возрастающие и убывающие последовательности называются строго монотонными.

Пример. Выяснить является возрастающей или убывающей последовательность $\{x_n\} = \frac{n}{5^n}$.

Найдем $x_{n+1} = \frac{n+1}{5^{n+1}}$. Найдем разность $x_{n+1} - x_n = \frac{n+1}{5 \cdot 5^n} - \frac{n}{5^n} = \frac{n+1-5n}{5 \cdot 5^n} = \frac{1-4n}{5 \cdot 5^n}$, т.к. $n \in N$, то $1-4n < 0$, т.е. $x_{n+1} < x_n$. Последовательность монотонно убывает.

4. Предел функции в точке

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x = a$ (т.е. в самой точке $x = a$ функция может быть и не определена).

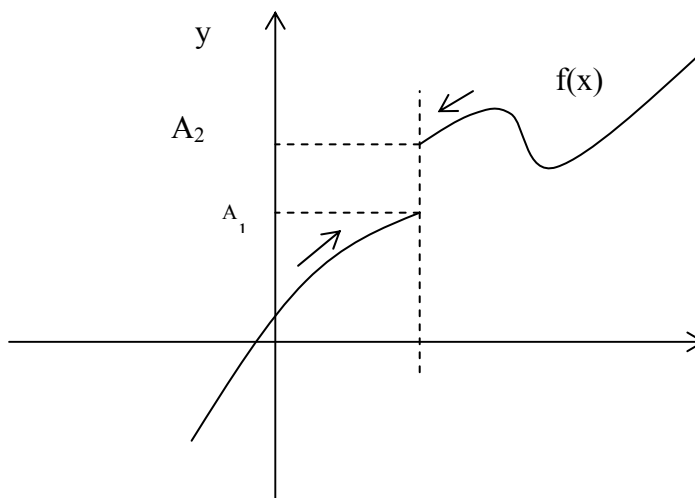
Определение. Число A называется пределом функции $f(x)$ при $x \rightarrow a$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\Delta > 0$, что для всех x таких, что $0 < |x - a| < \Delta$ верно неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

То же определение может быть записано в другом виде:

Если $a - \Delta < x < a + \Delta$, $x \neq a$, то верно неравенство $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$.

Запись предела функции в точке: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$.

Определение. Если $f(x) \rightarrow A_1$ при $x \rightarrow a$ только при $x < a$, то $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = A_1$ - называется пределом функции $f(x)$ в точке $x = a$ слева, а если $f(x) \rightarrow A_2$ при $x \rightarrow a$ только при $x > a$, то $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = A_2$ называется пределом функции $f(x)$ в точке $x = a$ справа.



Приведенное выше определение относится к случаю, когда функция $f(x)$ не определена в самой точке $x = a$, но определена в некоторой сколь угодно малой окрестности этой точки.

Пределы A_1 и A_2 называются также односторонними пределами функции $f(x)$ в точке $x = a$. Также говорят, что A - конечный предел функции $f(x)$.

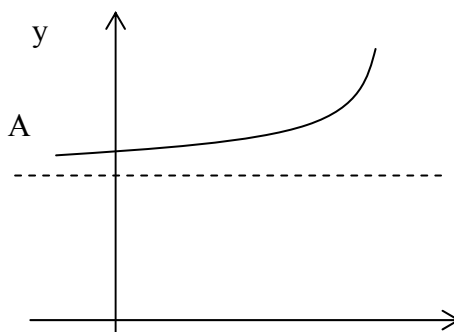
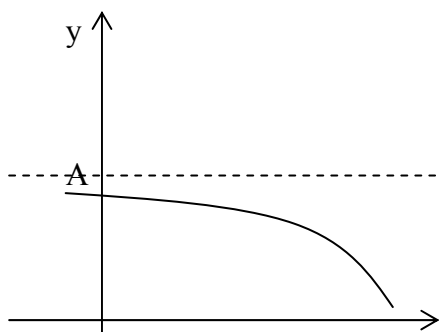
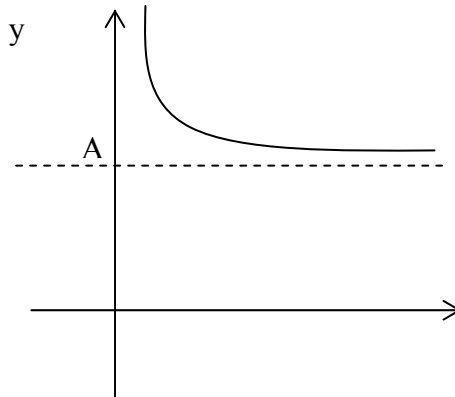
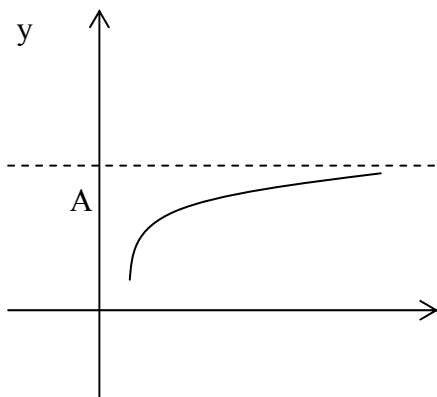
5. Предел функции при стремлении аргумента к бесконечности

Определение. Число A называется пределом функции $f(x)$ при $x \rightarrow \infty$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $M > 0$, что для всех $x, |x| > M$ выполняется неравенство $|A - f(x)| < \varepsilon$.

При этом предполагается, что функция $f(x)$ определена в окрестности бесконечности. Записывают:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$$

Графически можно представить:



Аналогично можно определить пределы $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ для любого $x > M$ и $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ для любого $x < M$.

6. Основные теоремы о пределах

Теорема 1. $\lim_{x \rightarrow a} C = C$, где $C = \text{const}$.

Следующие теоремы справедливы при предположении, что функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют конечные пределы при $x \rightarrow a$.

Теорема 2. $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

Доказательство этой теоремы будет приведено ниже.

Теорема 3. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

Следствие. $\lim_{x \rightarrow a} C \cdot f(x) = C \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x)$

Теорема 4. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$ при $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$.

Теорема 5. Если $f(x) > 0$ вблизи точки $x = a$ и $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, то $A > 0$.

Аналогично определяется знак предела при $f(x) < 0, f(x) \geq 0, f(x) \leq 0$.

Теорема 6. Если $g(x) \leq f(x) \leq u(x)$ вблизи точки $x = a$ и $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} u(x) = A$, то и $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$.

Определение. Функция $f(x)$ называется ограниченной вблизи точки $x = a$, если существует такое число $M > 0$, что $|f(x)| < M$ вблизи точки $x = a$.

Теорема 7. Если функция $f(x)$ имеет конечный предел при $x \rightarrow a$, то она ограничена вблизи точки $x = a$.

Доказательство. Пусть $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, т.е. $|f(x) - A| < \varepsilon$, тогда $|f(x)| = |f(x) - A + A| \leq |f(x) - A| + |A|$ или $|f(x)| < \varepsilon + |A|$, т.е. $|f(x)| < M$, где $M = \varepsilon + |A|$.

Теорема доказана.

Лекция 13. Бесконечно-малые и бесконечно-большие функции

1. Бесконечно малые функции

Определение. Функция $f(x)$ называется бесконечно малой при $x \rightarrow a$, где a может быть числом или одной из величин $\infty, +\infty$ или $-\infty$, если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$.

Бесконечно малой функция может быть только если указать к какому числу стремится аргумент x . При различных значениях a функция может быть бесконечно малой или нет.

Пример. Функция $f(x) = x^n$ является бесконечно малой при $x \rightarrow 0$ и не является бесконечно малой при $x \rightarrow 1$, т.к. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$.

Теорема. Для того, чтобы функция $f(x)$ при $x \rightarrow a$ имела предел, равный A , необходимо и достаточно, чтобы вблизи точки $x = a$ выполнялось условие $f(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ бесконечно малая при $x \rightarrow a$ ($\alpha(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow a$).

2. Свойства бесконечно малых функций

1. Сумма фиксированного числа бесконечно малых функций при $x \rightarrow a$ тоже бесконечно малая функция при $x \rightarrow a$.
2. Произведение фиксированного числа бесконечно малых функций при $x \rightarrow a$ тоже бесконечно малая функция при $x \rightarrow a$.
3. Произведение бесконечно малой функции на функцию, ограниченную вблизи точки $x = a$ является бесконечно малой функцией при $x \rightarrow a$.
4. Частное от деления бесконечно малой функции на функцию, предел которой не равен нулю есть величина бесконечно малая.

Используя понятие бесконечно малых функций, приведем доказательство некоторых теорем о пределах, приведенных выше.

3. Бесконечно большие функции и их связь с бесконечно малыми

Определение. Предел функции $f(x)$ при $x \rightarrow a$, где a - число, равен бесконечности, если для любого числа $M > 0$ существует такое число $\Delta > 0$, что неравенство $|f(x)| > M$ выполняется при всех x , удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \Delta$. Записывается $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$.

Собственно, если в приведенном выше определении заменить условие $|f(x)| > M$ на $f(x) > M$, то получим: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ а если заменить на $f(x) < -M$, то:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

Определение. Функция называется бесконечно большой при $x \rightarrow a$, где a - число или одна из величин $\infty, +\infty$ или $-\infty$, если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, где A - число или одна из величин $\infty, +\infty$ или $-\infty$.

Связь бесконечно больших и бесконечно малых функций осуществляется в соответствии со следующей теоремой.

Теорема. Если $f(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow a$ (если $x \rightarrow \infty$) и не обращается в ноль, то

$$y = \frac{1}{f(x)} \rightarrow \infty$$

4. Сравнение бесконечно малых функций

Пусть $\alpha(x), \beta(x)$ и $\gamma(x)$ - бесконечно малые функции при $x \rightarrow a$. Будем обозначать эти функции α, β и γ соответственно. Эти бесконечно малые функции можно сравнивать по скорости их убывания, т.е. по скорости их стремления к нулю.

Например, функция $f(x) = x^{10}$ стремится к нулю быстрее, чем функция $f(x) = x$.

Определение. Если $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta} = 0$, то функция α называется бесконечно малой более высокого порядка, чем функция β .

Определение. Если $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta} = A, A = \text{const}, A \neq 0$, то α и β называются бесконечно малыми одного порядка.

Определение. Если $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta} = 1$ то функции α и β называются эквивалентными бесконечно малыми. Записывают $\alpha \sim \beta$.

Определение. Бесконечно малая функция α называется бесконечно малой порядка k относительно бесконечно малой функции β , если предел $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta^k}$ конечен и отличен от нуля.

Однако следует отметить, что не все бесконечно малые функции можно сравнивать между собой. Например, если отношение $\frac{\alpha}{\beta}$ не имеет предела, то функции несравнимы.

5. Свойства эквивалентных бесконечно малых

1. $a \sim a, \left(\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\alpha} = 1 \right)$.
 2. Если $\alpha \sim \beta$ и $\beta \sim \gamma$, то $\alpha \sim \gamma, \left(\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\gamma} = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\beta}{\gamma} \right) = 1 \cdot 1 = 1 \right)$.
 3. Если $\alpha \sim \beta$, то $\beta \sim \alpha, \left(\lim_{x \rightarrow a} \frac{\beta}{\alpha} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\frac{\alpha}{\beta}} = 1 \right)$.
 4. Если $\alpha \sim \alpha_1$ и $\beta \sim \beta_1$ и $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta} = k$, то и $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha_1}{\beta_1} = k$ или $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha_1}{\beta_1}$.
- Следствие: а) если $\alpha \sim \alpha_1$ $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta} = k$, то и $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha_1}{\beta}$.
- б) если $\beta \sim \beta_1$ и $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta} = k$, то $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta_1}$.

Свойство 4 особенно важно на практике, т.к. оно фактически означает, что предел отношения бесконечно малых не меняется при замене их на эквивалентные бесконечно малые. Этот факт дает возможность при нахождении пределов заменять бесконечно малые на эквивалентные им функции, что может сильно упростить вычисление пределов.

Пример. Найти предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\sin 7x}$.

Так как $\operatorname{tg} 5x \sim 5x$ и $\sin 7x \sim 7x$ при $x \rightarrow 0$, то, заменив функции эквивалентными бесконечно малыми, получим: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\sin 7x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{7x} = \frac{5}{7}$.

Если α и β - бесконечно малые при $x \rightarrow a$, причем β - бесконечно малая более высокого порядка, чем α , то $\gamma = \alpha + \beta$ - бесконечно малая, эквивалентная α . Это можно доказать следующим равенством $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\gamma}{\alpha} = \lim_{x \rightarrow a} \left(1 + \frac{\beta}{\alpha} \right) = 1$.

Тогда говорят, что α - главная часть бесконечно малой функции γ .

6. Некоторые замечательные пределы

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x) = a_0x_n + a_1x_{n-1} + \dots + a_n$, $Q(x) = b_0x_m + b_1x_{m-1} + \dots + b_m$ - многочлены.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_n}{x^n}}{b_0 + \frac{b_1}{x} + \dots + \frac{b_m}{x^m}} = \frac{a_0}{b_0}$$

Итого:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} 0, & \text{при } n < m \\ \frac{a_0}{b_0}, & \text{при } n = m \\ \infty, & \text{при } n > m \end{cases}$$

Первый замечательный предел.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Второй замечательный предел.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$$

Часто если непосредственное нахождение предела какой-либо функции представляется сложным, то можно путем преобразования функции свести задачу к нахождению замечательных пределов.

Кроме трех, изложенных выше, пределов можно записать следующие полезные на практике соотношения:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^m - 1}{x} = m.$$

Пример. Найти предел. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} mx}{\sin nx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx}{nx} = \frac{m}{n}$;

Пример. Найти предел.

$$\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sin x - \cos x}{\pi - 4x} = \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{-\frac{2}{\sqrt{2}} \sin(\pi/4 - x)}{\pi - 4x} = \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{-\sin(\pi/4 - x)}{2\sqrt{2}(\pi - 4x)} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Пример. Найти предел.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-1} \right)^{x+3} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1+4}{x-1} \right)^{x+3} = \left\{ \begin{array}{l} y = x-1 \\ x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty \end{array} \right\} = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(\frac{y+4}{y} \right)^{y+4} = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{y} \right)^y \cdot \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{y} \right)^4 = \\
&= \left\{ z = \frac{y}{4} \right\} = \lim_{z \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{z} \right)^{4z} = \left(\lim_{z \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{z} \right)^z \right)^4 = e^4
\end{aligned}$$

Лекция 14. Непрерывность функции

1. Непрерывность функции в точке

Определение. Функция $f(x)$, определенная в окрестности некоторой точки x_0 , называется непрерывной в точке x_0 , если предел функции и ее значение в этой точке равны, т.е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Тот же факт можно записать иначе:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} x)$$

Определение. Если функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 , но не является непрерывной в самой точке x_0 , то она называется разрывной функцией, а точка x_0 - точкой разрыва.

Определение.

Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0 , если для любого положительного числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\Delta > 0$, что для любых x , удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \Delta$

2. Свойства непрерывных функций

1. Сумма, разность и произведение непрерывных в точке x_0 функций - есть функция, непрерывная в точке x_0 .

2. Частное двух непрерывных функций $\frac{f(x)}{g(x)}$ - есть непрерывная функция при условии, что $g(x)$ не равна нулю в точке x_0 .

3. Суперпозиция непрерывных функций - есть непрерывная функция.

Это свойство может быть записано следующим образом:

Если $u = f(x), v = g(x)$ - непрерывные функции в точке $x = x_0$, то функция $v = g(f(x))$ - тоже непрерывная функция в этой точке.

Справедливость приведенных выше свойств можно легко доказать, используя теоремы о пределах.

верно неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Определение. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке $x = x_0$, если приращение функции в точке x_0 является бесконечно малой величиной.

$f(x) = f(x_0) + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ - бесконечно малая при $x \rightarrow x_0$.

3. Непрерывность некоторых элементарных функций

1. Функция $f(x) = C, C = const$ - непрерывная функция на всей области определения.

2. Рациональная функция $f(x) = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m}$ непрерывна для всех значений x , кроме тех, при которых знаменатель обращается в ноль. Таким образом, функция этого вида непрерывна на всей области определения.

3. Тригонометрические функции \sin и \cos непрерывны на своей области определения.

Таким образом, имеется произведение ограниченной функции на бесконечно малую, следовательно это произведение, т.е. функция Δy - бесконечно малая. В соответствии с рассмотренными выше определениями, функция $y = \sin x$ - непрерывная функция для любого значения $x = x_0$ из области определения, т.к. ее приращение в этой точке - бесконечно малая величина.

4. Непрерывность функции на интервале и на отрезке

Определение. Функция $f(x)$ называется непрерывной на интервале (отрезке), если она непрерывна в любой точке интервала (отрезка).

При этом не требуется непрерывность функции на концах отрезка или интервала, необходима только односторонняя непрерывность на концах отрезка или интервала.

5. Свойства функций, непрерывных на отрезке

Свойство 1: (Первая теорема Вейерштрасса (Вейерштрасс Карл (1815-1897) - немецкий математик)). Функция, непрерывная на отрезке, ограничена на этом отрезке, т.е. на отрезке $[a, b]$ выполняется условие - $M \leq f(x) \leq M$.

Доказательство этого свойства основано на том, что функция, непрерывная в точке x_0 , ограничена в некоторой ее окрестности, а если разбивать отрезок $[a, b]$ на бесконечное количество отрезков, которые “стягиваются” к точке x_0 , то образуется некоторая окрестность точки x_0 .

Свойство 2: Функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$, принимает на нем наибольшее и наименьшее значения.

Т.е. существуют такие значения x_1 и x_2 , что $f(x_1) = m, f(x_2) = M$, причем $m \leq f(x) \leq M$.

Отметим эти наибольшие и наименьшие значения функция может принимать на отрезке и несколько раз (например - $f(x) = \sin x$).

Разность между наибольшим и наименьшим значением функции на отрезке называется колебанием функции на отрезке.

Свойство 3: (Вторая теорема Больцано - Коши). Функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$, принимает на этом отрезке все значения между двумя произвольными величинами.

Свойство 4: Если функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = x_0$, то существует некоторая окрестность точки x_0 , в которой функция сохраняет знак.

Свойство 5: (Первая теорема Больцано (1781-1848) - Коши). Если функция $f(x)$ - непрерывная на отрезке $[a, b]$ и имеет на концах отрезка значения противоположных знаков, то существует такая точка внутри этого отрезка, где $f(x) = 0$.

Т.е. если $\text{sign}(f(a)) \neq \text{sign}(f(b))$, то $\exists x_0 : f(x_0) = 0$.

Определение. Функция $f(x)$ называется равномерно непрерывной на отрезке $[a, b]$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\Delta > 0$ такое, что для любых точек $x_1 \in [a, b]$ и $x_2 \in [a, b]$ таких, что $|x_2 - x_1| < \Delta$ верно неравенство $f(x_2) - f(x_1) < \varepsilon$.

Отличие равномерной непрерывности от “обычной” в том, что для любого ε существует свое Δ , не зависящее от x , а при “обычной” непрерывности Δ зависит от ε и x .

Свойство 6: Теорема Кантора (Кантор Георг (1845-1918) - немецкий математик). Функция, непрерывная на отрезке, равномерно непрерывна на нем. (Это свойство справедливо только для отрезков, а не для интервалов и полуинтервалов.)

Свойство 7: Если функция $f(x)$ определена, монотонна и непрерывна на некотором промежутке, то и обратная ей функция $x = g(y)$ тоже однозначна, монотонна и непрерывна.

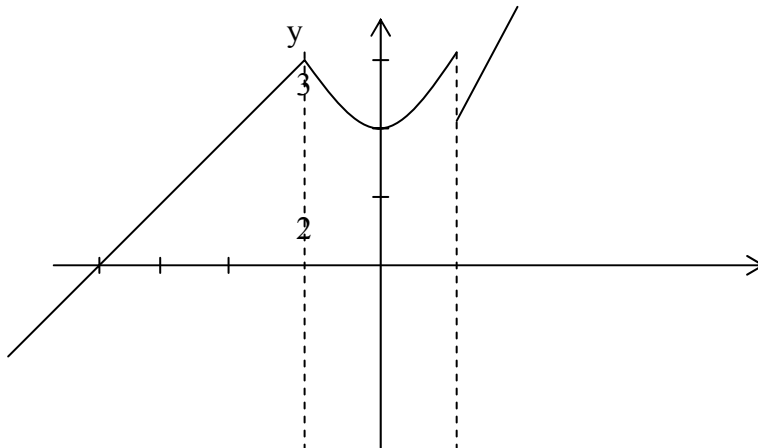
Пример. Исследовать на непрерывность функцию и определить тип точек разрыва, если они есть.

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) = 3 \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) = 3 \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = 2$$

в точке $x = 1$ функция непрерывна в точке $x = 1$

точка разрыва 1 - го рода



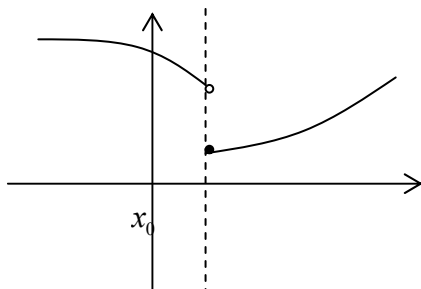
Точки разрыва

Точки разрыва и их классификация

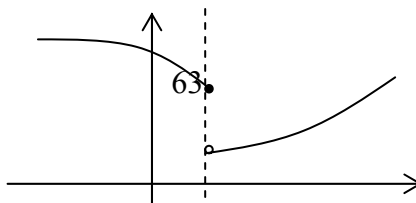
Рассмотрим некоторую функцию $f(x)$, непрерывную в окрестности точки x_0 , за исключением может быть самой этой точки. Из определения точки разрыва функции следует, что $x = x_0$ является точкой разрыва, если функция не определена в этой точке, или не является в ней непрерывной.

Следует отметить также, что непрерывность функции может быть односторонней. Поясним это следующим образом.

Если односторонний предел (см. выше) $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0)$, то функция называется непрерывной справа.



Если односторонний предел (см. выше) $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = f(x_0)$, то функция называется непрерывной слева.



Определение. Точка x_0 называется точкой разрыва функции $f(x)$, если $f(x)$ не определена в точке x_0 или не является непрерывной в этой точке.

Определение. Точка x_0 называется точкой разрыва 1 - го рода, если в этой точке функция $f(x)$ имеет конечные, но не равные друг другу левый и правый пределы.

$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)$$

Для выполнения условий этого определения не требуется, чтобы функция была определена в точке $x = x_0$, достаточно того, что она определена слева и справа от нее.

Из определения можно сделать вывод, что в точке разрыва 1 - го рода функция может иметь только конечный скачок. В некоторых частных случаях точку разрыва 1 - го рода еще иногда называют устранимой точкой разрыва, но подробнее об этом поговорим ниже.

Определение. Точка x_0 называется точкой разрыва 2 - го рода, если в этой точке функция $f(x)$ не имеет хотя бы одного из односторонних пределов или хотя бы один из них бесконечен.

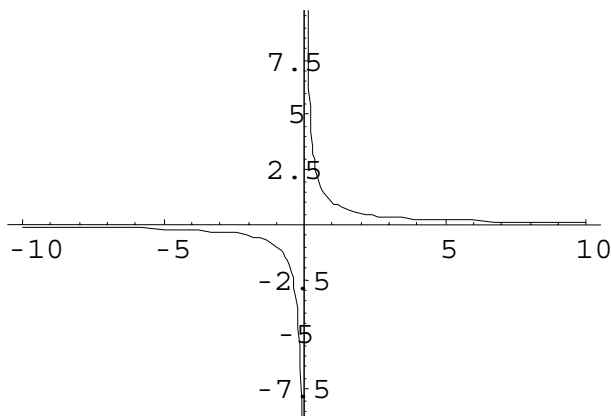
Пример. Функция Дирихле (Дирихле Петер Густав(1805-1859) - немецкий математик, член-корреспондент Петербургской АН 1837г)

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x - \text{рациональное число} \\ 0, & x - \text{иррациональное число} \end{cases}$$

не является непрерывной в любой точке x_0 .

Пример. Функция $f(x) = \frac{1}{x}$ имеет в точке $x_0 = 0$ точку разрыва 2 - го рода, т.к.

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = -\infty.$$



Приложения

Полярная система координат

Определение. Точка O называется полюсом, а луч l - полярной осью.

Суть задания какой-либо системы координат на плоскости состоит в том, чтобы каждой точке плоскости поставить в соответствие пару действительных чисел, определяющих положение этой точки на плоскости. В случае полярной системы координат роль этих чисел играют расстояние точки от полюса и угол между полярной осью и радиус-вектором этой точки. Этот угол φ называется полярным углом.

Можно установить связь между полярной системой координат и декартовой прямоугольной системой, если поместить начало декартовой прямоугольной системы в полюс, а полярную ось направить вдоль положительного направления оси Ox .

Тогда координаты произвольной точки в двух различных системах координат связываются соотношениями:

$$x = r \cos \varphi; y = r \sin \varphi; x^2 + y^2 = r^2$$

Комплексные числа

Определение. Комплексным числом z называется выражение $z = a + ib$, где a и b - действительные числа, i - мнимая единица, которая определяется соотношением: $i^2 = -1$; $i = \sqrt{-1}$.

При этом число a называется действительной частью числа z ($a = \operatorname{Re} z$), b - мнимой частью ($b = \operatorname{Im} z$).

Если $a = \operatorname{Re} z = 0$, то число z будет чисто мнимым, если $b = \operatorname{Im} z = 0$, то число z будет действительным.

Определение. Числа $z = a + ib$ и $\bar{z} = a - ib$ называются комплексно - сопряженными.

Определение. Два комплексных числа $z_1 = a_1 + ib_1$ и $z_2 = a_2 + ib_2$ называются равными, если соответственно равны их действительные и мнимые части: $a_1 = a_2$; $b_1 = b_2$.

Определение. Комплексное число равно нулю, если соответственно равны нулю действительная и мнимая части $a = b = 0$.

Понятие комплексного числа имеет геометрическое истолкование. Множество комплексных чисел является расширением множества действительных чисел за счет включения множества мнимых чисел. Комплексные числа включают в себя все множества чисел, которые изучались ранее. Так натуральные, целые, рациональные, иррациональные, действительные числа являются, вообще говоря, частными случаями комплексных чисел.

Если любое действительное число может быть геометрически представлено в виде точки на числовой прямой, то комплексное число представляется точкой на плоскости, координатами которой будут соответственно действительная и мнимая части комплексного числа. При этом горизонтальная ось будет являться действительной числовой осью, а вертикальная - мнимой осью.

Таким образом, на оси Ox располагаются действительные числа, а на оси Oy - чисто мнимые.

С помощью подобного геометрического представления можно представлять числа в так называемой тригонометрической форме.

Тригонометрическая форма числа

Из геометрических соображений видно, что $a = r \cos \varphi$; $b = r \sin \varphi$. Тогда комплексное число можно представить в виде:

$$z = a + ib = r \cos \varphi + ir \sin \varphi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

Такая форма записи называется тригонометрической формой записи комплексного числа.

При этом величина r называется модулем комплексного числа, а угол наклона φ - аргументом комплексного числа. $r = |z|$; $\varphi = \operatorname{Arg} z$.

Из геометрических соображений видно:

$$r = |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad \varphi = \operatorname{Arg} z = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}.$$

Очевидно, что комплексно - сопряженные числа имеют одинаковые модули и противоположные аргументы. $|z| = |\bar{z}|$; $\operatorname{Arg} z = -\operatorname{Arg} \bar{z}$.

Действия с комплексными числами

Основные действия с комплексными числами вытекают из действий с многочленами.

1. Сложение и вычитание.

$$z = z_1 \pm z_2 = (a_1 + ib_1) \pm (a_2 + ib_2) = (a_1 \pm a_2) + i(b_1 \pm b_2)$$

$$|z| = \sqrt{(a_1 \pm a_2)^2 + (b_1 \pm b_2)^2}$$

2. Умножение.

$$z = z_1 z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1 a_2 + ia_1 b_2 + ib_1 a_2 + i^2 b_1 b_2$$

$$z = z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2)$$

В тригонометрической форме:

$$z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$$

$$z = z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

В случае комплексно - сопряженных чисел:

$$z \bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = |z|^2 = |\bar{z}|^2$$

3. Деление.

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = x + iy \quad z = \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{(a_2 + ib_2)(a_2 - ib_2)} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + i(a_2 b_1 - a_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2}$$

$$z = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

В тригонометрической форме: $z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$

4. Возведение в степень.

Из операции умножения комплексных чисел следует, что

$$z^2 = z z = r^2 (\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi)$$

В общем случае получим: $z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$, где n - целое положительное число. Это выражение называется формулой Муавра.

5. Извлечение корня из комплексного числа.

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \rho (\cos \psi + i \sin \psi)$$

Возводя в степень, получим: $\rho^n (\cos n\psi + i \sin n\psi) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$

Отсюда: $\rho = \sqrt[n]{r}$; $n\psi = \varphi + 2\pi k$; $k \in \mathbb{Z}$.

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right)$$

Таким образом, корень n -ой степени из комплексного числа имеет n различных значений.

Показательная форма комплексного числа

Рассмотрим показательную функцию $w = e^x$; $z = x + iy$.

Можно показать, что функция w может быть записана в виде: $w = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$.

Если представить комплексное число в тригонометрической форме:

$w = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$ и воспользуемся формулой Эйлера: $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$

$z = re^{i\varphi}$ Полученное равенство и есть показательная форма комплексного числа.

Элементы комбинаторики

Если из некоторого количества элементов, различных между собой, составлять различные комбинации, то среди них можно выделить три типа комбинаций, носящих общее название - соединения.

Рассмотрим подробнее эти три типа соединений:

1. Перестановки.

Определение. Если в некотором множестве a_1, a_2, \dots, a_m переставлять местами элементы, оставляя неизменным их количество, то каждая полученная таким образом комбинация называется перестановкой.

Общее число перестановок из m элементов обозначается P_m и вычисляется по формуле:

$$P_m = m!$$

2. Размещения.

Определение. Если составлять из m различных элементов группы по n элементов в каждой, располагая взятые элементы в различном порядке. Получившиеся при этом комбинации называются размещениями из m элементов по n .

Общее число таких размещений рассчитывается по формуле:

$$A_m^n = m(m-1)(m-2)\dots(m-(n-1)) = \frac{m!}{(m-n)!}$$

Вообще говоря, перестановки являются частным случаем размещений.

3. Сочетания.

Определение. Если из m элементов составлять группы по n элементов в каждой, не обращая внимания на порядок элементов в группе, то получившиеся при этом комбинации называются сочетаниями из m элементов по n .

Общее число сочетаний находится по формуле:

$$C_m^n = \frac{P_m}{P_n P_{m-n}} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

Также одним из вариантов комбинаций являются перестановки с повторяющимися элементами.

Если среди t элементов имеется m_1 одинаковых элементов одного типа, m_2 одинаковых элементов другого типа и т.д., то при перестановке этих элементов всевозможными способами получаем комбинации, количество которых определяется по формуле:

$$\frac{P_m}{P_{m_1} P_{m_2} \dots P_{m_k}} = \frac{m!}{m_1! m_2! \dots m_k!}$$

Пример. Номер автомобиля состоит из трех букв и трех цифр. Сколько различных номеров можно составить, используя 10 цифр и алфавит в 30 букв.

Очевидно, что количество всех возможных комбинаций из 10 цифр по 4 равно 10.000.

Число всех возможных комбинаций из 30 букв по две равно $A_{30}^2 = 30 \cdot 29 = 870$.

Если учесть возможность того, что буквы могут повторяться, то число повторяющихся комбинаций равно 30 (одна возможность повтора для каждой буквы). Итого, полное количество комбинаций по две буквы равно 900.

Если к номеру добавляется еще одна буква из алфавита в 30 букв, то количество комбинаций увеличивается в 30 раз, т.е. достигает 27.000 комбинаций.

Окончательно, т.к. каждой буквенной комбинации можно поставить в соответствие числовую комбинацию, то полное количество автомобильных номеров равно 270.000.000.

Бином Ньютона (полиномиальная формула)

В дальнейшем будет получена формула бинома Ньютона с помощью приемов дифференциального исчисления.

Бином Ньютона - это формула, выражающая выражение $(a+b)^n$ в виде многочлена. Эта формула имеет вид:

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + b^n = \sum_{i=0}^n C_n^i a^{n-i} b^i$$

C_n^k - число сочетаний из n элементов по k . $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Широко известные формулы сокращенного умножения квадрата суммы и разности, куба суммы и разности, являются частными случаями бинома Ньютона.

Когда степень бинома невысока, коэффициенты многочлена могут быть найдены не расчетом по формуле количества сочетаний, а с помощью так называемого треугольника Паскаля. (Блез Паскаль (1623 – 1662) - французский математик).

Этот треугольник имеет вид:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & 2 & 1 & \\ & & & 1 & 3 & 3 & 1 & \\ & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\ & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & \\ 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 & \\ & 1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 & 1 \\ & & 1 & 8 & 28 & 56 & 70 & 56 & 28 & 8 & 1 \end{array}$$

Формула бинома Ньютона может быть обобщена для произвольного числа слагаемых.

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_k)^n = \sum \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!} a_1^{n_1} a_2^{n_2} \dots a_k^{n_k} \quad n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$$

Напомним, что при вычислениях $0!$ принимается равным 1.

Элементы математической логики

Математическая логика - разновидность формальной логики, т.е. науки, которая изучает умозаключения с точки зрения их формального строения.

Определение. Высказыванием называется предложение, к которому возможно применить понятия истинно или ложно.

В математической логике не рассматривается сам смысл высказываний, определяется только его истинность или ложность, что принято обозначать соответственно И или Л.

Понятно, что истинные и ложные высказывания образуют соответствующие множества. С помощью простых высказываний можно составлять более сложные, соединяя простые высказывания союзами “и”, “или”.

Таким образом, операции с высказываниями можно описывать с помощью некоторого математического аппарата.

Вводятся следующие логические операции (связки) над высказываниями

1. **Отрицание.** Отрицанием высказывания P называется высказывание, которое истинно только тогда, когда высказывание P ложно.

Обозначается $\neg P$ или \bar{P} . Соответствие между высказываниями определяется таблицами истинности. В нашем случае эта таблица имеет вид:

P	P
P	P
И	Л
И	Л
Л	И
Л	И

2. **Конъюнкция.** Конъюнкцией двух высказываний P и Q называется высказывание, истинное тогда и только тогда, когда истинны оба высказывания.

Обозначается $P \& Q$ или $P \wedge Q$.

P	Q	$P \& Q$
P	Q	$P \& Q$
И	И	И
И	И	И
И	Л	Л
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	И	Л
Л	Л	Л
Л	Л	Л

3. **Дизъюнкция.** Дизъюнкцией двух высказываний P и Q называется высказывание, ложное тогда и только тогда, когда оба высказывания ложны.

Обозначается $P \vee Q$.

P	Q	$P \vee Q$
P	Q	$P \vee Q$
В	В	В
И	И	И
В	К	В
И	Л	И
К	В	В
Л	И	И
К	К	К
Л	Л	Л

4. Импликация. Импликацией двух высказываний P и Q называется высказывание, истинное тогда и только тогда, когда высказывание P истинно, а Q - ложно.

Обозначается $P \supset Q$ (или $P \Rightarrow Q$). Высказывание P называется посылкой импликации, а высказывание Q - следствием.

Н Р	Q	РР $\Rightarrow Q$
И И	И И	И И
И И	Л Л	ЛЛ
Л Л	И И	И И
Л Л	Л Л	И И

5. Эквиваленция. Эквиваленцией двух высказываний P и Q называется высказывание, истинное тогда и только тогда, когда истинности высказываний совпадают.

Обозначается $P \sim Q$ или $P \Leftrightarrow Q$.

Р Р	Q	Р Р~Q
И И	И И	И И
И И	Л Л	Л Л
Л Л	И И	Л Л
Л Л	Л Л	И И

С помощью этих основных таблиц истинности можно составлять таблицы истинности сложных формул.

Булевы функции

Определение. Булевой функцией $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ называется произвольная n - местная функция, аргументы и значения которой принадлежат множеству $\{0, 1\}$.

Вообще говоря между логическими высказываниями, логическими связками и булевыми функциями просматривается явная аналогия. Если логические функции могут принимать значения истинно или ложно, то для булевой функции аналогами этих значений будут значения 0 или 1.

Для булевых функций также можно составить таблицы значений, соответствующим основным логическим операциям.

X_1	X_2	$\neg X_1$	$X_1 \& X_2$	$X_1 \vee X_2$	$X_1 \Rightarrow X_2$	$X_1 \Leftrightarrow X_2$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Исчисление предикатов

Определение. Предикатом $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется функция, переменные которой принимают значения из некоторого множества M , а сама функция принимает два значения: I (истина) и L (ложь), т.е.

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) : M^n \rightarrow \{I, L\}$$

Предикат от n аргументов называется n - местным предикатом. Высказывания считаются нуль - местными предикатами.

Над предикатами можно производить обычные логические операции, в результате которых получаются новые предикаты.

Кроме обычных логических операций к предикатам применяются также специальные операции, называемые кванторами.

Кванторы бывают двух видов:

1. Квантор общности. Обозначается $(\forall x)P(x)$. Квантором общности называется высказывание истинное, когда $P(x)$ истинно для каждого элемента x из множества M , и ложное - противном случае.
2. Квантор существования. Обозначается $(\exists x)P(x)$. Квантором существования называется высказывание, истинное, когда существует элемент из множества M , для которого $P(x)$ истинно, и ложное в противном случае.

Операцию связывания квантором можно применять и к предикатам от большего числа переменных.

Для формул логики предикатов сохраняется справедливость всех правил равносильных преобразований логики высказываний. Кроме того, справедливы следующие свойства:

Перенос квантора через отрицание.

$$\neg(\forall x)A(x) \equiv (\exists x)\neg A(x); \quad \neg(\exists x)A(x) \equiv (\forall x)\neg A(x);$$

Вынесение квантора за скобки.

$$(\exists x)(A(x) \& B) \equiv (\exists x)A(x) \& B; \quad (\forall x)(A(x) \& B) \equiv (\forall x)A(x) \& B;$$

$$(\exists x)(A(x) \vee B) \equiv (\exists x)A(x) \vee B; \quad (\forall x)(A(x) \vee B) \equiv (\forall x)A(x) \vee B;$$

3) Перестановка одноименных кванторов.

$$(\forall y)(\forall x)(A(x, y)) \equiv (\forall x)(\forall y)(A(x, y)); \quad (\exists y)(\exists x)A(x, y) \equiv (\exists x)(\exists y)A(x, y);$$

Переименование связанных переменных. Если заменить связанную переменную формулы A другой переменной, не входящей в эту формулу, в кванторе и всюду в области действия квантора получаем формулу, равносильную A .

Исчисление предикатов базируется на приведенных выше свойствах и правилах, называемых аксиомами.

Какими бы ни были формулы A и B для них справедливы следующие аксиомы:

- 1) $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$;
- 2) $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$;
- 3) $(\neg B \Rightarrow \neg(A \Rightarrow B)) \Rightarrow ((\neg B \Rightarrow A) \Rightarrow B)$;
- 4) $(\forall x_i)A(x_i) \Rightarrow A(x_i)$, где формула $A(x_i)$ не содержит переменной x_i .
- 5) $A(x_i) \Rightarrow (\exists x_i)A(x_i)$, где формула $A(x_i)$ не содержит переменной x_i .

Дискретная математика

Конечные графы и сети

Основные определения

Определение. Если на плоскости задать конечное множество V точек и конечный набор линий X , соединяющих некоторые пары из точек V , то полученная совокупность точек и линий будет называться графом.

При этом элементы множества V называются вершинами графа, а элементы множества X - ребрами.

В множестве V могут встречаться одинаковые элементы, ребра, соединяющие одинаковые элементы называются петлями. Одинаковые пары в множестве X называются кратными (или параллельными) ребрами. Количество одинаковых пар (v, w) в X называется кратностью ребра (v, w) .

Множество V и набор X определяют граф с кратными ребрами - псевдограф.

$$G = (V, X)$$

Псевдограф без петель называется мультиграфом.

Если в наборе X ни одна пара не встречается более одного раза, то мультиграф называется графом.

Если пары в наборе X являются упорядоченными, то граф называется ориентированным или орграфом.

Графу соответствует геометрическая конфигурация. Вершины обозначаются точками (кружочками), а ребра - линиями, соединяющими соответствующие вершины.

Определение. Если $x = \{v, w\}$ - ребро графа, то вершины v, w называются концами ребра x . Если $x = \{v, w\}$ - дуга орграфа, то вершина v - начало, а вершина w - конец дуги x .

Определение. Вершины v, w графа $G = (V, X)$ называются смежными, если $\{v, w\} \in X$. Два ребра называются смежными, если они имеют общую вершину.

Определение. Степенью вершины графа называется число ребер, которым эта вершина принадлежит. Вершина называется изолированной, если ее степень равна единице и висячей, если ее степень равна нулю.

Определение. Графы $G_1(V_1, X_1)$ и $G_2(V_2, X_2)$ называются изоморфными, если существует взаимно однозначное отображение $\varphi: V_1 \rightarrow V_2$, сохраняющее смежность.

Определение. Маршрутом (путем) для графа $G(V, X)$ называется последовательность $v_1 x_1 v_2 x_2 v_3 \dots x_k v_{k+1}$. Маршрут называется замкнутым, если его начальная и конечная точки совпадают. Число ребер (дуг) маршрута (пути) графа называется длиной маршрута (пути).

Определение. Незамкнутый маршрут (путь) называется цепью. Цепь, в которой все вершины попарно различны, называется простой цепью.

Определение. Замкнутый маршрут (путь) называется циклом (контуром). Цикл, в котором все вершины попарно различны, называется простым циклом.

Матрицы графов

Пусть $D = (V, X)$ - орграф, где $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, $X = \{x_1, \dots, x_m\}$.

Определение. Матрицей смежности орграфа D называется квадратичная матрица $A(D) = [a_{ij}]$ порядка n , у которой

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } (v_i, v_j) \in X \\ 0, & \text{если } (v_i, v_j) \notin X \end{cases}$$

Определение. Если вершина v является концом ребра x , то говорят, что v и x - инцидентны.

Определение. Матрицей инцидентности орграфа D называется матрица размерности $n \times m$ $B(D) = [b_{ij}]$, у которой

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если вершина } v_i \text{ является концом дуги } x_j \\ -1, & \text{если вершина } v_i \text{ является началом дуги } x_j \\ 0, & \text{если вершина } v_i \text{ не инцидентна дуге } x_j \end{cases}$$

Если граф имеет кратные дуги (ребра), то в матрице смежности принимается $a_{ij} = k$, где k - кратность дуги (ребра).

С помощью матриц смежности и инцидентности всегда можно полностью определить граф и все его компоненты. Такой метод задания графов очень удобен для обработки данных на ЭВМ.

Достижимость и связность

Определение. Вершина w графа D (или орграфа) называется достижимой из вершины v , если либо $w = v$, либо существует путь из v в w (маршрут, соединяющий v и w).

Определение. Граф (орграф) называется связным, если для любых двух его вершин существует маршрут (путь), который их связывает. Орграф называется односторонне связным, если для любых двух его вершин по крайней мере одна достижима из другой.

Определение. Псевдографом $D(V, X)$, ассоциированным с ориентированным псевдографом, называется псевдограф $G(V, X_0)$ в котором x_0 получается из x заменой всех упорядоченных пар (v, w) на неупорядоченные пары (v, w) .

Определение. Орграф называется слабо связным, если связным является ассоциированный с ним псевдограф.

Эйлеровы и гамильтоновы графы

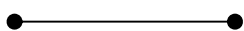
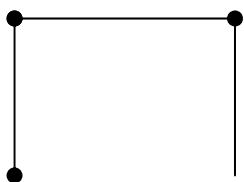
Определение. Цепь (цикл) в псевдографе G называется эйлеровой, если она проходит по одному разу через каждое ребро псевдографа G .

Теорема. Для того, чтобы связный псевдограф G обладал эйлеровым циклом, необходимо и достаточно, чтобы степени его вершин были четными.

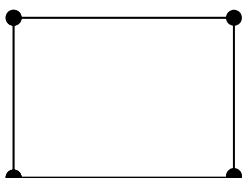
Теорема. Для того, чтобы связный псевдограф G обладал эйлеровой цепью, необходимо и достаточно, чтобы он имел ровно две вершины нечетной степени.

Определение. Цикл (цепь) в псевдографе G называется гамильтоновым, если он проходит через каждую вершину псевдографа G ровно один раз.

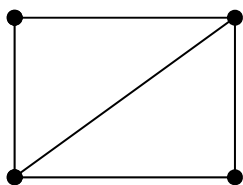
Пример.



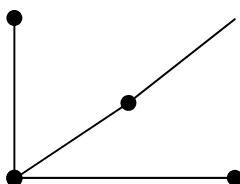
в графе есть и эйлеровый и гамильтонов циклы



в графе есть эйлеров цикл, но нет гамильтонова



в графе есть гамильтонов, но нет эйлерова цикла



в графе нет ни эйлерова, ни гамильтонова цикла

Граф G называется полным, если каждая его вершина смежна со всеми остальными вершинами. В полном графе всегда существуют гамильтоновы циклы.

Также необходимым условием существования гамильтонова цикла является связность графа.

Деревья и циклы

Определение. Граф G называется деревом, если он является связным и не имеет циклов. Граф G , все компоненты, связности которого являются деревьями, называется лесом.

У графа, который является деревом, число ребер на единицу меньше числа вершин. Дерево не содержит циклов, любые две его вершины можно соединить единственной простой цепью.

Если у дерева G есть, по крайней мере, одно ребро, то у него обязательно найдется висячая вершина, т.к. в противном случае в графе будет цикл.

Для графов, которые сами по себе не являются деревьями, вводится понятие основного дерева.

Определение. Островным деревом связного графа G называется любой его подграф, содержащий все вершины графа G и являющийся деревом.

Пусть G - связный граф. Тогда основное дерево графа G (если оно существует) должно содержать $n(G) - 1$ ребер.

Таким образом, любое основное дерево графа G есть результат удаления из графа G ровно $m(G) - (n(G) - 1) = m(G) - n(G) + 1$ ребер.

Число $\nu(G) = m(G) - n(G) + 1$ называется цикломатическим числом связного графа G .

Одной из самых распространенных задач является задача построения основного дерева минимальной длины графа. Для решения этой задачи применяется следующий алгоритм.

1. Выберем в графе G ребро минимальной длины. Вместе с инцидентными ему вершинами оно образует подграф G_2 .

2. Строим граф G_3 , добавляя к графу G_2 новое ребро минимальной длины, выбранное среди ребер графа G , каждое из которых инцидентно какой-либо вершине графа G_2 , и одновременно инцидентно какой-либо вершине графа G , не содержащейся в графе G_2 .
3. Строим графы G_4, G_5, \dots, G_n , повторяя действия пункта 2 до тех пор, пока не переберем все вершины графа G . На четвертом шаге алгоритма получили дерево G_5 , которое соединяет все вершины исходного графа. Таким образом, дерево G_5 будет минимальным основным деревом графа G .

Квадратичные формы

Определение: Однородный многочлен второй степени относительно переменных x_1 и x_2 $\Phi(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$, не содержащий свободного члена и неизвестных в первой степени, называется квадратичной формой переменных x_1 и x_2 .

Определение: Однородный многочлен второй степени относительно переменных x_1, x_2 и x_3 .

$\Phi(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{13}x_1x_3$ не содержащий свободного члена и неизвестных в первой степени называется квадратичной формой переменных x_1, x_2 и x_3 .

Рассмотрим квадратичную форму двух переменных. Квадратичная форма имеет симметрическую матрицу $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Определитель этой матрицы называется определителем квадратичной формы.

Пусть на плоскости задан ортогональный базис \bar{e}_1, \bar{e}_2 . Каждая точка плоскости имеет в этом базисе координаты x_1, x_2 .

Если задана квадратичная форма $\Phi(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$, то ее можно рассматривать как функцию от переменных x_1 и x_2 .

Приведение квадратичных форм к каноническому виду

Рассмотрим некоторое линейное преобразование A с матрицей $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Это симметрическое преобразование можно записать в виде:

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2$$

$$y_2 = a_{12}x_1 + a_{22}x_2$$

где y_1 и y_2 - координаты вектора $A\bar{x}$ в базисе \bar{e}_1, \bar{e}_2 .

Очевидно, что квадратичная форма может быть записана в виде $\Phi(x_1, x_2) = x_1y_1 + x_2y_2$.

Как видно, геометрический смысл числового значения квадратичной формы Φ в точке с координатами x_1 и x_2 - скалярное произведение $\bar{x} \cdot A\bar{x} = \Phi$.

Если взять другой ортонормированный базис на плоскости, то в нем квадратичная форма Φ будет выглядеть иначе, хотя ее числовое значение в каждой геометрической точке и не изменится. Если найти такой базис, в котором квадратичная форма не будет содержать координат в первой степени, а только координаты в квадрате, то квадратичную форму можно будет привести к каноническому виду.

Если в качестве базиса взять совокупность собственных векторов линейного преобразования, то в этом базисе матрица линейного преобразования имеет вид:

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

При переходе к новому базису от переменных x_1 и x_2 мы переходим к переменным x'_1 и x'_2 . Тогда:

$$\Phi = x'_1 y'_1 + x'_2 y'_2$$

$$y'_1 = a'_{11} x'_1 + a'_{12} x'_2 \quad \text{Тогда} \quad y'_1 = \lambda_1 x'_1, \quad y'_2 = \lambda_2 x'_2.$$

$$y'_2 = a'_{12} x'_1 + a'_{22} x'_2$$

Выражение $\Phi(x'_1, x'_2) = \lambda_1 (x'_1)^2 + \lambda_2 (x'_2)^2$ называется каноническим видом квадратичной формы. Аналогично можно привести к каноническому виду квадратичную форму с большим числом переменных.

Теория квадратичных форм используется для приведения к каноническому виду уравнений кривых и поверхностей второго порядка.

Пример. Привести к каноническому виду квадратичную форму

$$\Phi(x_1, x_2) = 27x_1^2 - 10x_1x_2 + 3x_2^2.$$

Коэффициенты: $a_{11} = 27$, $a_{12} = 5$, $a_{22} = 3$.

Составим характеристическое уравнение: $\begin{vmatrix} 27 - \lambda & 5 \\ 5 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = 0$;

$$(27 - \lambda)(3 - \lambda) - 25 = 0$$

$$\lambda^2 - 30\lambda + 56 = 0; \quad \lambda_1 = 2; \quad \lambda_2 = 28; \quad \Phi(x'_1, x'_2) = 2x_1'^2 + 28x_2'^2$$

Собственные значения и собственные вектора

Определение: Пусть L - заданное n -мерное линейное пространство. Ненулевой вектор $\bar{x} \in L$ называется собственным вектором линейного преобразования A , если существует такое число λ , что выполняется равенство: $A \bar{x} = \lambda \bar{x}$.

При этом число λ называется собственным значением (характеристическим числом) линейного преобразования A , соответствующего вектору \bar{x} .

Определение: Если линейное преобразование A в некотором базисе $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$ имеет

матрицу $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, то собственные значения линейного преобразования A можно

найти как корни $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ уравнения:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Это уравнение называется характеристическим уравнением, а его левая часть - характеристическим многочленом линейного преобразования A .

Следует отметить, что характеристический многочлен линейного преобразования не зависит от выбора базиса.

Рассмотрим частный случай. Пусть A - некоторое линейное преобразование плоскости, матрица которого равна $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Тогда преобразование A может быть задано формулами:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}; \begin{cases} x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases} \text{ в некотором базисе } \bar{e}_1, \bar{e}_2.$$

Если преобразование A имеет собственный вектор с собственным значением λ , то $A \bar{x} = \lambda \bar{x}$.

$$\begin{cases} x'_1 = \lambda x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ x'_2 = \lambda x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 = 0 \end{cases}$$

Т.к. собственный вектор \bar{x} ненулевой, то x_1 и x_2 не равны нулю одновременно. Т.к. данная система однородна, то для того, чтобы она имела нетривиальное решение, определитель системы должен быть равен нулю. В противном случае по правилу Крамера система имеет единственное решение - нулевое, что невозможно.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$$

Полученное уравнение является характеристическим уравнением линейного преобразования A .

Таким образом, можно найти собственный вектор $\bar{x} (x_1, x_2)$ линейного преобразования A с собственным значением λ , где λ - корень характеристического уравнения, а x_1 и x_2 - корни системы уравнений при подстановке в нее значения λ .

Понятно, что если характеристическое уравнение не имеет действительных корней, то линейное преобразование A не имеет собственных векторов.

Следует отметить, что если \bar{x} - собственный вектор преобразования A , то и любой вектор ему коллинеарный - тоже собственный с тем же самым собственным значением λ .

Действительно, $A(k\bar{x}) = kA\bar{x} = k\lambda\bar{x} = \lambda(k\bar{x})$. Если учесть, что векторы имеют одно начало, то эти векторы образуют так называемое собственное направление или собственную прямую.

Т.к. характеристическое уравнение может иметь два различных действительных корня λ_1 и λ_2 , то в этом случае при подстановке их в систему уравнений получим бесконечное количество решений. (Т.к. уравнения линейно зависимы). Это множество решений определяет две собственные прямые.

Если характеристическое уравнение имеет два равных корня $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, то либо имеется лишь одна собственная прямая, либо, если при подстановке в систему она превращается в систему вида: $\begin{cases} 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 0 \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 0 \end{cases}$. Эта система удовлетворяет любым значениям x_1 и x_2 . Тогда все векторы будут собственными, и такое преобразование называется преобразованием подобия.

Пример. Найти характеристические числа и собственные векторы линейного преобразования с матрицей $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Запишем линейное преобразование в виде:

$$\begin{cases} x'_1 = \lambda x_1 = 5x_1 + 4x_2 \\ x'_2 = \lambda x_2 = 2x_1 + 3x_2 \end{cases}$$

Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(3-\lambda) - 8 = 15 - 3\lambda - 5\lambda + \lambda^2 - 8 = 0$$

$$\lambda^2 - 8\lambda + 7 = 0;$$

Корни характеристического уравнения: $\lambda_1 = 7; \lambda_2 = 1$;

$$\text{Для корня } \lambda_1 = 7: \begin{cases} (5-7)x_1 + 4x_2 = 0 \\ 2x_1 + (3-7)x_2 = 0 \end{cases} \begin{cases} -2x_1 + 4x_2 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases}$$

Из системы получается зависимость: $x_1 - 2x_2 = 0$. Собственные векторы для первого корня характеристического уравнения имеют координаты: $(t, 0, 5t)$ где t - параметр.

$$\text{Для корня } \lambda_2 = 1: \begin{cases} (5-1)x_1 + 4x_2 = 0 \\ 2x_1 + (3-1)x_2 = 0 \end{cases} \begin{cases} 4x_1 + 4x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$$

Из системы получается зависимость: $x_1 + x_2 = 0$. Собственные векторы для второго корня характеристического уравнения имеют координаты: $(t, -t)$ где t - параметр.

Полученные собственные векторы можно записать в виде:

$$\bar{u}_1 = t(\bar{e}_1 + 0,5\bar{e}_2); \quad \bar{u}_2 = t(\bar{e}_1 - \bar{e}_2).$$

Элементы топологии

Топология изучает понятия непрерывности и близости с абстрактной точки зрения.

О п р е д е л е н и е . Окрестностью точки p называется произвольное множество U , содержащее открытый шар (не включая границу) с центром в точке p .

Окрестностью на плоскости, очевидно, является открытый круг с центром в точке p .

Из определения окрестности вытекают следующие очевидные свойства:

1. Точка p принадлежит любой своей окрестности.
2. Если U - окрестность точки p , а $V \supset U$, то V - тоже окрестность точки p .
3. Если U и V - окрестности точки p , то их пересечение $U \cap V$ тоже будет окрестностью точки p .
4. Если U - окрестность точки p , то можно найти такую окрестность V точки p , что $W = V \subset U$ является окрестностью является окрестностью каждой из своих точек.

О п р е д е л е н и е . Топологическим пространством называется множество E , каждая точка которого p имеет набор подмножеств множества E , называемых окрестностями точки p и удовлетворяющих приведенным выше свойствам.

Частным случаем топологического пространства является метрическое пространство.

О п р е д е л е н и е . Пусть E - топологическое пространство, а F - его подмножество. Пусть p - точка множества F . Назовем подмножество U множества F окрестностью точки p в F , если $U = F \cap V$, где V - окрестность точки p в E .

При этом множество F называется подпространством пространства E .

Метрическое пространство

О п р е д е л е н и е . Метрикой на множестве E называется функция $f(x, y)$, определенная на декартовом произведении $E \times E$, значениями которой являются неотрицательные действительные числа, удовлетворяющая при любых значениях x, y, z из множества E следующим условиям:

1. $f(x, y) = f(y, x)$
2. $f(x, y) + f(y, z) \geq f(x, z)$

3. $f(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x=y$.

Определение. Метрическим пространством называется множество E с заданной на нем метрикой f .

Определение. Число $\rho(x, y)$, где $x \in E$ и $y \in E$ - заданные точки, называется расстоянием между этими точками.

Определение. Пусть r - положительное число. Множество $\{y: \rho(x, y) < r\}$ называется открытым шаром радиуса r с центром в точке x ; множество $\{y: \rho(x, y) \leq r\}$ - замкнутым шаром радиуса r с центром в точке x .

Например, для трехмерного евклидова пространства R^3 метрика определяется как $\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}$, где $x(x_1, x_2, x_3) \in R^3$ и $y(y_1, y_2, y_3) \in R^3$.

Открытые и замкнутые множества

Определение. Пусть E - топологическое пространство, а U - его подмножество. Множество U называется открытым, если оно является окрестностью для любой точки $\rho \in U$.

Определение. Пусть E - топологическое пространство, а F - его подмножество. Множество F называется замкнутым, если множество $E \setminus F$ - открыто.

Отметим следующие свойства:

1. Объединение любой совокупности открытых множеств открыто.
2. Пересечение конечного числа открытых множеств открыто.
3. Пересечение любой совокупности замкнутых множеств замкнуто.
4. Объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто.

Определение. Если A - любое множество в топологическом пространстве E , то объединение всех открытых множеств, содержащихся в A , открыто. Это объединение называется внутренностью множества A . Обозначается $Int A$. Это объединение будет наибольшим открытым множеством, содержащимся в A .

Определение. Множество \bar{A} называется замыканием множества A . Множество $Fr A = \bar{A} \cap C A$ называется границей множества A .

Непрерывные отображения

Пусть E и F - топологические пространства, и пусть f - отображение пространства E в F . $f: E \rightarrow F$.

Непрерывность отображения состоит в том, что точки, близкие друг к другу в множестве E , отображаются в точки, близкие друг к другу в множестве F .

Определение. Отображение $f: E \rightarrow F$ называется непрерывным в точке p , если для любой окрестности V точки $f(p)$ в множестве F существует такая окрестность U точки в множестве E , что $f(U) \subset V$. Отображение f называется непрерывным, если оно непрерывно в каждой точке пространства E .

Особое значение имеют те непрерывности отображения, для которых существует непрерывное обратное отображение.

Определение. Если f - взаимно однозначное отображение пространства E в F , то существует обратное отображение g пространства F в E . Если и f и g непрерывны, то отображение f называется гомеоморфизмом, а пространства E и F - гомеоморфные.

Гомеоморфизм между множествами устанавливает взаимно однозначное соответствие между окрестностями, закрытыми и открытыми подмножествами этих множеств.

Топологические произведения

Пусть E и F - топологические пространства. Множество $E \times F$ определяется как множество пар (p, q) , где $p \in E$, а $q \in F$. Оно превращается в топологическое пространство следующим образом: если $(p, q) \in E \times F$, то окрестность точки (p, q) - это любое множество, содержащее множество вида $U \times V$, где U - окрестность точки p в E , а V - окрестность q в F .

Определение. Множество $E \times F$, превращенное в топологическое пространство только что описанным способом, называется топологическим произведением пространств E и F .

Например, в трехмерном евклидовом пространстве тор является топологическим произведением окружности на себя.

Связность

Определение. Пространство E называется связным, если его нельзя представить в виде объединения двух непустых непересекающихся множеств, открытых в E . Множество в топологическом пространстве называется связным, если оно связно как подпространство.

Если E и F - связные пространства, то произведение $E \times F$ также связно.

Компактность

Понятие компактности обобщает свойство быть замкнутым и ограниченным множеством в евклидовом пространстве.

Определение. Топологическое пространство называется хаусдорфовым, если оно обладает следующим свойством: каковы бы ни были две различные точки p и q , существует такая окрестность U точки p и такая окрестность V точки q , что $U \cap V = \emptyset$.

Любое евклидово пространство является хаусдорфовым.

Любое подпространство евклидова пространства хаусдорфово. На самом деле любое подпространство любого хаусдорфова пространства хаусдорфово. Прежде чем определять компактность, приведем несколько предварительных определений.

Определение. Покрытие топологического пространства E - набор множеств из E , объединение которых дает все пространство E . Оно называется открытым покрытием, если каждое множество в наборе открыто.

Определение. Пусть дано покрытие топологического пространства. Подпокрытием называется покрытие, все множества которого принадлежат данному покрытию.

Определение. Компактным пространством называется хаусдорфово пространство, обладающее тем свойством, что каждое его открытое покрытие содержит конечное подпокрытие, т.е. покрытие, состоящее из конечного числа множеств. Множество в топологическом пространстве называется компактным, если оно является компактным подпространством.

Компактное подмножество евклидова пространства должно быть замкнутым и ограниченным. Если перемножаемые компактные пространства A и B лежат в евклидовых пространствах размерностей m и n , то их произведение есть подпространство в $(n+m)$ -мерном пространстве. Так как пространства A и B компактны, они замкнуты и ограничены. Поэтому их произведение является замкнутым и ограниченным подмножеством евклидова пространства. Следовательно, $A \times B$ компактно.