Лекція 11.
Багатовимірні випадкові величини. Спільна функція розподілу двох випадкових величин. Незалежні випадкові величини.

План лекції

Питання, що розглядаються:

Багатовимірний випадковий вектор, дискретні багатовимірні величини, неперервні багатовимірні величини, закон розпозподілу дискретної багатовимірної величини, спільна функція розподілу двох випадкових величин, щільність спільного розподілу ймовірності двовимірної неперервної випадкової величини, незалежні випадкові величини.

Досі ми розглядали випадкові величини, можливі значення яких визначалися одним числом (одновимірні випадкові величини). Наприклад, число очок, яке може випасти при киданні грального кубика (дискретна одновимірна випадкова величина) або відстань від снаряда до місця падіння снаряда (неперервна одновимірна випадкова величина).

Часто доводиться мати справу з величинами, можливі значення яких визначаються двома або більш числами. Такі величини називаються n - мірними випадковими величинами; n - мірну випадкову величину можна розглядати як систему n випадкових величин. У даному контексті використовується також термін ***багатовимірний випадковий вектор*** $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, де кожна з величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$ називається складовою (компонентою). Аналогічно одновимірним випадковим величинам розрізняють ***дискретні*** багатовимірні випадкові величини (їх складові дискретні) і ***неперервні*** багатовимірні випадкові величини, складові яких неперервні.

Приклад. Верстат штампує сталеві плитки. Якщо контрольованими розмірами є довжина X, ширина Y і висота Z плитки, то ми маємо тривимірну випадкову величину (X, Y, Z).

Зупинимося детальніше на двовимірних випадкових величинах.

1.Закон розподілу ймовірності двовимірної випадкової величини

Законом розподілу дискретної двовимірної випадкової величини називають перелік можливих значень цієї величини, тобто пар чисел (x_i, y_i), де x_i і y_j $(i = 1,2,\ldots,n\ ;\ j = 1,2,\ldots,m)$ - можливі значення величин X і Y, відповідно, і ймовірностей $p_{ij} = p(x_i, y_j)$ їх спільної появи $P(X = x_i, Y = y_i)$.

Двовимірна дискретна випадкова величина $\xi = (X, Y)$ задається у вигляді ***таблиці розподілу*** виду :

$X \diagdown Y$	y_1	y_2	$\dots$	y_m
x_1	p_{11}	p_{12}	$\dots$	p_{1m}
x_2	p_{21}	p_{22}	$\dots$	p_{2m}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_n	p_{n1}	p_{n2}	$\dots$	p_{nm}

де перший рядок таблиці вказує можливі значення складової Y, а перший стовпець - усі можливі значення складової X.

Оскільки події $(X = x_i, Y = y_i)$ $(i = 1,2,\dots,n$, $j = 1,2,\dots,m)$ утворюють повну групу, то $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1.$

Знаючи закон розподілу двовимірної дискретної випадкової величини, можна знайти закони розподілу кожної з її складових. Так, наприклад, ймовірність того, що X набуде значення x_k,дорівнює

$$P(X = x_k) = \sum_{j=1}^{m} p_{kj}$$

2. Спільна функція розподілу двох випадкових величин

Функція $F(x, y)$, що визначає для кожної пари чисел x, y ймовірність того, що X набуде значення меншого x, і при цьому Y набуде значення меншого y, називається ***спільною функцією розподілу*** двох випадкових величин $F(x, y) = P(X < x, Y < y)$.

Геометрично цю рівність можна представити так: $F(x, y)$ - це ймовірність того, що випадкова точка (X, Y) потрапить в нескінченний квадрант з вершиною (x, y), розташований лівіше і нижче за цю вершину.

Властивості спільної функції розподілу двох випадкових величин

1. Значення спільної функції розподілу задовольняють нерівності:

$$0 \le F(x,y) \le 1.$$

2. $F(x,y)$ - неспадна функція по кожному аргументу, тобто

$$F(x_2,y) \ge F(x_1,y), \text{ якщо } x_2 \ge x_1;$$

$$F(x,y_2) \ge F(x,y_1), \text{ якщо } y_2 \ge y_1.$$

Спільна функція розподілу має наступні граничні значення:

$$F(-\infty,y) = 0; \qquad F(x,-\infty) = 0;$$

$$F(-\infty,-\infty) = 0; \qquad F(\infty,\infty) = 1.$$

3. При $x = \infty$ або $y = \infty$ спільна функція розподілу системи стає функцією розподілу однієї із складових : $F(x,\infty) = F_1(x)$; $F(\infty,y) = F_2(y)$

3. Щільність спільного розподілу ймовірності неперервної двовимірної випадкової величини

Неперервну двовимірну випадкову величину можна задати за допомогою щільності розподілу. ***Щільність спільного розподілу ймовірності*** $f(x,y)$ двовимірної неперервної випадкової величини (X ,Y) - це друга змішана частинна похідна від функції розподілу $F(x,y)$:

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}.$$

Знаючи щільність спільного розподілу $f(x,y)$, можна знайти спільну функцію розподілу $F(x,y)$ за формулою $F(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{y} \int\limits_{-\infty}^{x} f(x,y)dxdy$,

виходячи з означення щільності розподілу двовимірної неперервної випадкової величини (X , Y).

Зміст щільності спільного розподілу ймовірності : ймовірність попадання випадкової точки в прямокутник (з вершиною в точці (x,y) і сторонами Δx і Δy дорівнює добутку $f(x,y)\Delta x \Delta y$, коли сторони цього прямокутника прямують до нуля.

У зв'язку з цим, ймовірність попадання випадкової точки в ***довільну область D*** дорівнює подвійному інтегралу по області D від функції $f(x,y)$:

$$P((X,Y)\subset D)=\iint_D f(x,y)dxdy$$

Властивості двовимірної щільності ймовірності

1. Двовимірна щільність ймовірності невідємна: $f(x,y)\geq 0$.
2. Подвійний невласний інтеграл з нескінченними межами від двовимірної щільності ймовірності дорівнює одиниці: $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy=1$.

4. Незалежні випадкові величини

Дві випадкові величини називаються ***незалежними***, якщо закон розподілу однієї з них не залежить від того, яких можливих значень набула інша величина.

Теорема. Для того, щоб випадкові величини X і Y були незалежними, необхідно і достатньо, щоб функція розподілу системи (X, Y) дорівнювала добутку функцій розподілу складових *:* $F(X,Y)=F_1(X)F_2(Y)$.

Наслідок. Для того, щоб випадкові величини X і Y були незалежними, необхідно і достатньо, щоб щільність спільного розподілу системи (X, Y) дорівнювала добутку щільності розподілу складових :

$$f(X,Y)=f_1(X)f_2(Y).$$

Для незалежних випадкових величин справедливі співвідношення

$$M(XY)=M(X)M(Y)$$

$$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y).$$

Питання для самоперевірки

1. Дати означення багатовимірної випадкової величини.
2. Як поділяються багатовимірні випадкові величини?
3. Що таке закон розподілу двовимірної випадкової величини?
4. Що називається спільною функцією розподілу двох випадкових величин?

5. Записати властивості спільної функції розподілу двох випадкових величин.
6. Дати означення щільності спільного розподілу ймовірності неперервної двовимірної випадкової величини.
7. Записати властивості щільності спільного розподілу ймовірності неперервної двовимірної випадкової величини
8. Які випадкові величини називаються незалежними?