

Лабораторна робота №3

Мінімізація ФАЛ методом невизначених коефіцієнтів для базису І-АБО-НЕ.

Теоретичні відомості

Згідно з теоремою Жегалкіна, будь-яку логічну функцію можна представити в нормальній формі, наприклад, в диз'юнктивній нормальній формі (ДНФ):

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = k_1^1 x_1 + k_1^0 \bar{x}_1 + k_2^1 x_2 + k_2^0 \bar{x}_2 + \dots + k_n^1 x_n + k_n^0 \bar{x}_n + k_{12}^{11} x_1 x_2 + k_{12}^{10} x_1 \bar{x}_2 + k_{12}^{01} \bar{x}_1 x_2 + k_{12}^{00} \bar{x}_1 \bar{x}_2 + \dots + k_{1n}^{11} x_1 x_n + k_{1n}^{10} x_1 \bar{x}_n + k_{1n}^{00} \bar{x}_1 \bar{x}_n + \dots + k_{2n}^{11} x_2 x_n + k_{2n}^{10} x_2 \bar{x}_n + k_{2n}^{00} \bar{x}_2 \bar{x}_n + \dots + k_{12n}^{111} x_1 x_2 x_n + k_{12n}^{110} x_1 x_2 \bar{x}_n + k_{12n}^{100} x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_n + \dots + k_{12n}^{000} \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_n + \dots + k_{12\dots n}^{11\dots 1} x_1 x_2 \dots x_n + k_{12\dots n}^{11\dots 0} x_1 x_2 \dots \bar{x}_n + \dots$$

де k - невизначені коефіцієнти, що приймають значення 0 чи 1 і так, щоб одержана результатом ДНФ була мінімальною. Коефіцієнти k знаходяться із системи рівнянь, одержуваної шляхом підстановки значень x_1, x_2, \dots, x_n в наведену вище ДНФ.

Алгоритм пошуку невизначених коефіцієнтів k наступний:

1. Вибрати черговий рядок, у якому $F_i = 0$, і всі коефіцієнти цього рядка визначити нулем (викреслити).
2. Якщо всі нульові рядки переглянуті, то перейти до п. 3, якщо ні, то до п. 1.
3. Переглянути рядки, в яких $F_i = 1$, та викреслити з них усі коефіцієнти, що зустрічаються в рядках, де $F_i = 0$.
4. Переписати всі модифіковані рівняння.
5. Вибрати черговий рядок $F_i = 1$ і викреслити максимально можливу кількість коефіцієнтів так, щоб ранг членів, що залишаються, був мінімальним.

Метод невизначених коефіцієнтів найбільш застосовний для диз'юнктивної форми і практично непридатний для кон'юнктивної форми.

Розглянемо приклад: Знайти мінімальну форму для функції $F(x_1, x_2, x_3) = \sum(0,2,4,7)$

Розв'язок:

На підставі теореми Жегалкіна логічну функцію трьох змінних представимо в НДФ:

$$F(x_1, x_2, x_3) = k_1^1 x_1 + k_1^0 \bar{x}_1 + k_2^1 x_2 + k_2^0 \bar{x}_2 + k_3^1 x_3 + k_3^0 \bar{x}_3 + k_{12}^{11} x_1 x_2 + k_{12}^{10} x_1 \bar{x}_2 + k_{12}^{01} \bar{x}_1 x_2 + k_{12}^{00} \bar{x}_1 \bar{x}_2 + k_{13}^{11} x_1 x_3 + k_{13}^{10} x_1 \bar{x}_3 + k_{13}^{01} \bar{x}_1 x_3 + k_{13}^{00} \bar{x}_1 \bar{x}_3 + k_{23}^{11} x_2 x_3 + k_{23}^{10} x_2 \bar{x}_3 + k_{23}^{01} \bar{x}_2 x_3 + k_{23}^{00} \bar{x}_2 \bar{x}_3 + k_{123}^{111} x_1 x_2 x_3 + k_{123}^{110} x_1 x_2 \bar{x}_3 + k_{123}^{100} x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 + k_{123}^{101} x_1 \bar{x}_2 x_3 + k_{123}^{001} \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 + k_{123}^{011} \bar{x}_1 x_2 x_3 + k_{123}^{010} \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 + k_{123}^{000} \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$$

Складемо систему рівнянь, і запишемо її у вигляді таблиці:

k_1^0	k_2^0	k_3^0	k_{12}^{00}	k_{13}^{00}	k_{23}^{00}	k_{123}^{000}	F0	1
k_1^0	k_2^0	k_3^1	k_{12}^{00}	k_{13}^{01}	k_{23}^{01}	k_{123}^{001}	F1	0
k_1^0	k_2^1	k_3^0	k_{12}^{01}	k_{13}^{00}	k_{23}^{10}	k_{123}^{010}	F2	1
k_1^0	k_2^1	k_3^1	k_{12}^{01}	k_{13}^{01}	k_{23}^{11}	k_{123}^{011}	F3	0
k_1^1	k_2^0	k_3^0	k_{12}^{10}	k_{13}^{10}	k_{23}^{00}	k_{123}^{100}	F4	1
k_1^1	k_2^0	k_3^1	k_{12}^{10}	k_{13}^{11}	k_{23}^{01}	k_{123}^{101}	F5	0

k_1^1	k_2^1	k_3^0	k_{12}^{11}	k_{13}^{10}	k_{23}^{10}	k_{123}^{110}	F6	0
k_1^1	k_2^1	k_3^1	k_{12}^{11}	k_{13}^{11}	k_{23}^{11}	k_{123}^{111}	F7	1

Згідно алгоритму викреслюємо коефіцієнти для $F_i = 0$. (\ нахил). Потім викреслюємо співпадаючі коефіцієнти для $F_i = 1$ (/ нахил). Отримуємо модифіковану систему рівнянь. Коефіцієнти, що задовольняють пункт 5, виділяємо, описавши їх по периметру стовщеною лінією.

Таким чином, маємо $k_{13}^{00} = 1$ $k_{23}^{00} = 1$, $k_{123}^{111} = 1$, а всі інші коефіцієнти рівні 0.

У результаті мінімізації знаходимо шукану функцію:

$$F(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 \bar{x}_3 + \bar{x}_2 \bar{x}_3 + x_1 x_2 x_3$$

Завдання

Згідно варіанту, мінімізувати ФАЛ $F(x_1, x_2, x_3, x_4)$ методом невизначених коефіцієнтів для базису І-АБО-НЕ.

№ набору	x_1	x_2	x_3	x_4	F(x_1, x_2, x_3, x_4) для варіанту:														
					1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0	1	0
1	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1
2	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0
3	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0	1	1	1	0	1	0	0
4	0	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1
5	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1
6	0	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1
7	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0
8	1	0	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0
9	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0
10	1	0	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1
11	1	0	1	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	1	0	1	1
12	1	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0
13	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1
14	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	0
15	1	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1

Примітка: Для функцій чотирьох змінних система рівнянь у вигляді таблиці наступна:

k_1^0	k_2^0	k_3^0	k_4^0	k_{12}^{00}	k_{13}^{00}	k_{14}^{00}	k_{23}^{00}	k_{24}^{00}	k_{34}^{00}	k_{123}^{000}	k_{124}^{000}	k_{134}^{000}	k_{234}^{000}	k_{1234}^{0000}	F0
k_1^0	k_2^0	k_3^0	k_4^1	k_{12}^{00}	k_{13}^{00}	k_{14}^{01}	k_{23}^{00}	k_{24}^{01}	k_{34}^{01}	k_{123}^{000}	k_{124}^{001}	k_{134}^{001}	k_{234}^{001}	k_{1234}^{0001}	F1
k_1^0	k_2^0	k_3^1	k_4^0	k_{12}^{00}	k_{13}^{01}	k_{14}^{00}	k_{23}^{01}	k_{24}^{00}	k_{34}^{10}	k_{123}^{001}	k_{124}^{000}	k_{134}^{010}	k_{234}^{010}	k_{1234}^{0010}	F2
k_1^0	k_2^0	k_3^1	k_4^1	k_{12}^{00}	k_{13}^{01}	k_{14}^{01}	k_{23}^{01}	k_{24}^{01}	k_{34}^{11}	k_{123}^{001}	k_{124}^{001}	k_{134}^{011}	k_{234}^{011}	k_{1234}^{0011}	F3
k_1^0	k_2^1	k_3^0	k_4^0	k_{12}^{01}	k_{13}^{00}	k_{14}^{00}	k_{23}^{10}	k_{24}^{10}	k_{34}^{00}	k_{123}^{010}	k_{124}^{010}	k_{134}^{000}	k_{234}^{100}	k_{1234}^{0100}	F4
k_1^0	k_2^1	k_3^0	k_4^1	k_{12}^{01}	k_{13}^{00}	k_{14}^{01}	k_{23}^{10}	k_{24}^{11}	k_{34}^{01}	k_{123}^{010}	k_{124}^{011}	k_{134}^{001}	k_{234}^{101}	k_{1234}^{0101}	F5
k_1^0	k_2^1	k_3^1	k_4^0	k_{12}^{01}	k_{13}^{01}	k_{14}^{00}	k_{23}^{11}	k_{24}^{10}	k_{34}^{10}	k_{123}^{011}	k_{124}^{010}	k_{134}^{010}	k_{234}^{110}	k_{1234}^{0110}	F6
k_1^0	k_2^1	k_3^1	k_4^1	k_{12}^{01}	k_{13}^{01}	k_{14}^{01}	k_{23}^{11}	k_{24}^{11}	k_{34}^{11}	k_{123}^{011}	k_{124}^{011}	k_{134}^{011}	k_{234}^{111}	k_{1234}^{0111}	F7
k_1^1	k_2^0	k_3^0	k_4^0	k_{12}^{10}	k_{13}^{10}	k_{14}^{10}	k_{23}^{00}	k_{24}^{00}	k_{34}^{00}	k_{123}^{100}	k_{124}^{100}	k_{134}^{100}	k_{234}^{000}	k_{1234}^{1000}	F8
k_1^1	k_2^0	k_3^0	k_4^1	k_{12}^{10}	k_{13}^{10}	k_{14}^{11}	k_{23}^{00}	k_{24}^{01}	k_{34}^{01}	k_{123}^{100}	k_{124}^{101}	k_{134}^{101}	k_{234}^{001}	k_{1234}^{1001}	F9

k_1^1	k_2^0	k_3^1	k_4^0	k_{12}^{10}	k_{13}^{11}	k_{14}^{10}	k_{23}^{01}	k_{24}^{00}	k_{34}^{10}	k_{123}^{101}	k_{124}^{100}	k_{134}^{110}	k_{234}^{010}	k_{1234}^{1010}	F10
k_1^1	k_2^0	k_3^1	k_4^1	k_{12}^{10}	k_{13}^{11}	k_{14}^{11}	k_{23}^{01}	k_{24}^{01}	k_{34}^{11}	k_{123}^{101}	k_{124}^{101}	k_{134}^{111}	k_{234}^{011}	k_{1234}^{1011}	F11
k_1^1	k_2^1	k_3^0	k_4^0	k_{12}^{11}	k_{13}^{10}	k_{14}^{10}	k_{23}^{10}	k_{24}^{10}	k_{34}^{00}	k_{123}^{110}	k_{124}^{110}	k_{134}^{100}	k_{234}^{100}	k_{1234}^{1100}	F12
k_1^1	k_2^1	k_3^0	k_4^1	k_{12}^{11}	k_{13}^{10}	k_{14}^{11}	k_{23}^{10}	k_{24}^{11}	k_{34}^{01}	k_{123}^{110}	k_{124}^{111}	k_{134}^{101}	k_{234}^{101}	k_{1234}^{1101}	F13
k_1^1	k_2^1	k_3^1	k_4^0	k_{12}^{11}	k_{13}^{11}	k_{14}^{10}	k_{23}^{11}	k_{24}^{10}	k_{34}^{10}	k_{123}^{111}	k_{124}^{110}	k_{134}^{110}	k_{234}^{110}	k_{1234}^{1110}	F14
k_1^1	k_2^1	k_3^1	k_4^1	k_{12}^{11}	k_{13}^{11}	k_{14}^{11}	k_{23}^{11}	k_{24}^{11}	k_{34}^{11}	k_{123}^{111}	k_{124}^{111}	k_{134}^{111}	k_{234}^{111}	k_{1234}^{1111}	F15

Контрольні питання:

1. Що називають базисом ?
2. Сформулювати означення диз'юнктивної нормальної форми логічної функції.
3. Що називають рангом терма?
4. Сформулювати теорему Жегалкіна.
5. Сформулювати алгоритм методу невизначених коефіцієнтів для мінімізації логічної функції.