Лекція 7.

Основні розподіли випадкової величини : біноміальний, Пуассона, геометричний, гіпергеометричний, рівномірний, показниковий. Їх математичні сподівання і дисперсії.

План лекції

Питання, що розглядаються:

Біноміальний розподіл та його характеристики, розподіл Пуасона та його характеристики, основна властивість розподілу Пуасона, геометричний розподіл та його характеристики, гіпергеометричний розподіл та його характеристики, рівномірний розподіл та його характеристики, показниковий розподіл та його характеристики, основна властивість показникового розподілу.

Випадкову величину повністю задає закон її розподілу (у дискретному випадку), а також функція розподілу або щільність ймовірності (для неперервної випадкової величини).

Найбільш важливими законами розподілу дискретної випадкової величини є біноміальний закон, закон розподілу Пуассона, геометричний і гіпергеометричний розподіли, а неперервної - нормальний, рівномірний і показниковий розподіли. Нормальний розподіл буде розглянутий на одній з наступних лекцій.

1. Біноміальний розподіл, його математичне сподівання і дисперсія.

Закон розподілу випадкової величини X числа появ події A в схемі Бернулі має вигляд $P_m(n) = P(X = m) = C_n^m p^m q^{n-m}$

де , $m = 0,1,2,\ldots,n,\quad q = P(\overline{A}) = 1 - p$.

Ця формула ще називається біноміальною, оскільки її права частина є $(m+1)$ -й член бінома Ньютона : $(p+q)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m q^{n-m}$.

Очевидно, що для закону біноміального розподілу ймовірності виконується умова нормування, тобто сума всіх ймовірностей дорівнює одиниці: $\sum_{m=0}^{n} P_m(n) = (p+q)^n = 1$.

Біноміальний розподіл для $n=10$ і деяких значень p наведено нижче

Математичне сподівання числа появ події A в n незалежних випробуваннях для біноміального розподілу дорівнює добутку числа випробувань на ймовірність появи події A в кожному випробуванні (тобто середньому числу появи події в цій серії випробувань). $M(X) = np$.

Дисперсія і середнє квадратичне відхилення дорівнюють відповідно: $D(X) = npq;\ \sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{npq}.$

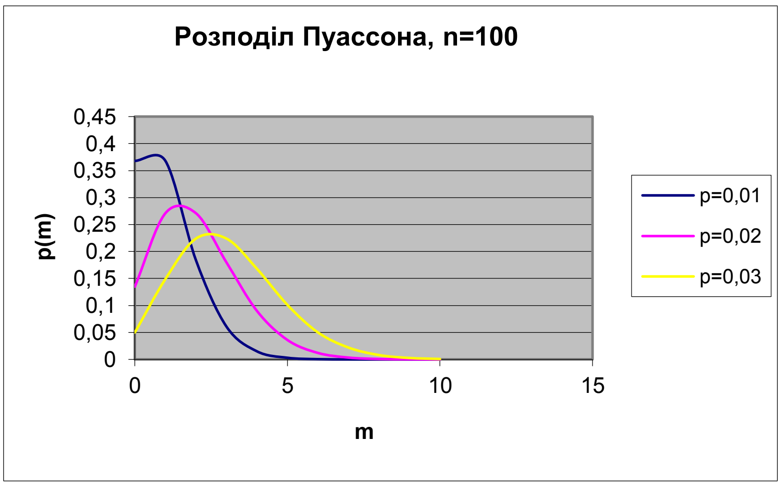
2.Розподіл Пуассона

Раніше відзначалося, що якщо при збільшенні числа випробувань добуток $np = \lambda$ залишається постійним, то біноміальний розподіл при великих значеннях n збігається до розподілу Пуассона.

Випадкова величина X називається розподіленою за законом Пуассона, якщо вона може набувати значень $0,1,2,\ldots,n$, відповідна ймовірність яких визначається за формулою Пуассона:

$$P_n(m) = \frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda},\ (n \to \infty).$$

Розподіл Пуассона для $n=100$, $\lambda = 1,2,3$ наведено нижче



Для розподілу Пуассона математичне сподівання і дисперсія дорівнюють відповідно:

$$M(X) = \lambda;\ \ D(X) = \lambda.$$

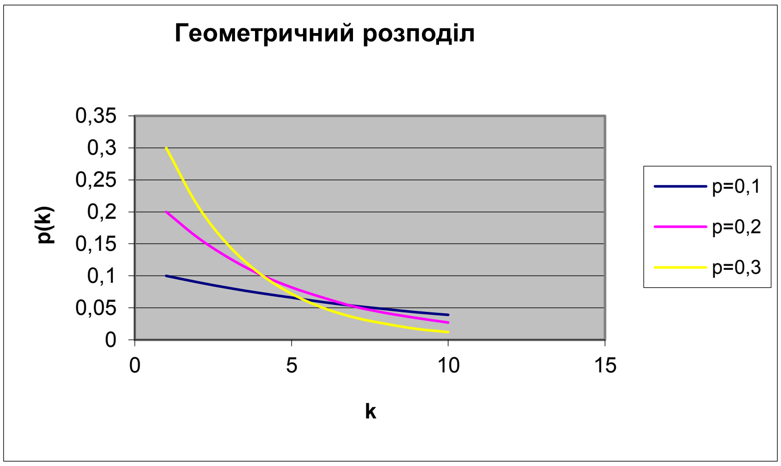
Рівність значень математичного очікування і дисперсії є унікальною властивістю розподілу Пуассона. Ця властивість часто застосовується на практиці для вирішення питання, чи правдоподібна гіпотеза про те, що випадкова величина X розподілена за законом Пуассона. Для цього визначають з експерименту статистичні характеристики випадкової величини - математичне сподівання і дисперсію. Якщо їх значення близькі, то це може служити аргументом на користь гіпотези про пуассонівський розподіл.

3.Геометричний розподіл

Дискретна випадкова величина X має геометричний розподіл, якщо вона набуває значень $k = 1, 2, 3, \ldots$ (зліченна кількість значень) з ймовірностями

$$p_k = P(X = k) = q^{k-1} \cdot p, \quad 0 < p < 1, \quad q = 1 - p \quad .$$

Випадкова величина, що має геометричний розподіл, є числом випробувань в схемі Бернулі до першого успіху. Геометричний розподіл для деяких конкретних значень p наведений нижче



Можна показати, що математичне сподівання і дисперсія для геометричного розподілу дорівнюють відповідно: $M(X) = \dfrac{1}{p}$ $\quad D(X) = \dfrac{q}{p^2}$

Приклад. У великій партії виробів ймовірність браку рівна p. Контроль якості проводиться до першої появи бракованого виробу. В результаті серії перевірок виявилося, що бракований виріб уперше з'являвся в середньому при десятому випробуванні. Оцінити чисельне значення p.

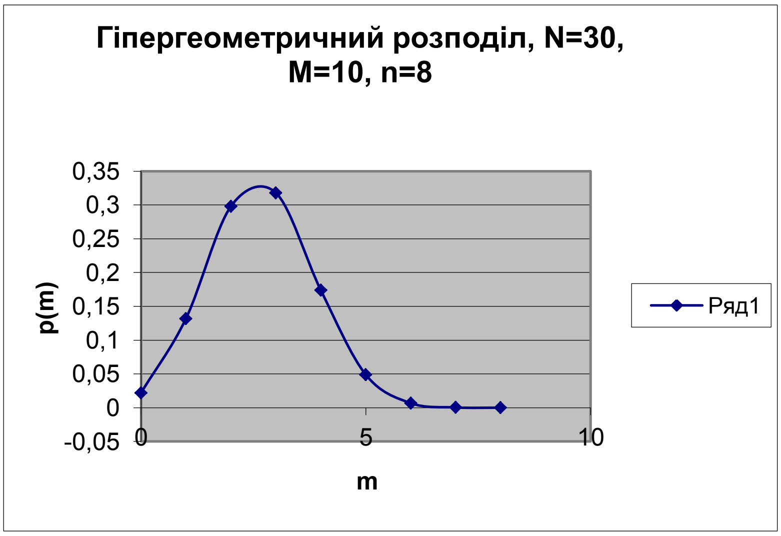
Розвязання. Нехай X - число випробувань до першої появи бракованого виробу. Ця випадкова величина має геометричний розподіл. За умовою її середнє значення рівне $M(X)=10$. Таким чином $p=1/M(X)=0.1$

4. Гіпергеометричний розподіл (урнова схема)

Дискретна випадкова величина X має гіпергеометричний розподіл, якщо вона набуває значення m з ймовірностями

$$p_m = P(X=m) = \frac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$$

p_m представляє ймовірність вибору m об'єктів, що мають задану властивість, з безлічі об'єктів, випадково витягнутих (без повернення) з сукупності N об'єктів, серед яких M об'єктів мають задану властивість. Нижче наведений приклад графіка гіпергеометричного розподілу.



Математичне сподівання і дисперсія випадкової величини, що має гіпергеометричний розподіл з параметрами рівні :

$$M(X)=n\cdot\frac{M}{N}; \qquad D(X)=n\cdot\frac{M}{N-1}\cdot\left(1-\frac{M}{N}\right)\cdot\left(1-\frac{n}{N}\right)$$

Приклад. Є 5 фірм, у трьох з яких звітність оформлена неправильно. 2 ревізори перевіряють 2 довільно вибрані фірми. Яка ймовірність того, що при перевірці буде виявлена неправильна звітність а) ні в одній, б) в одній, в) в двох фірмах?

Розвязання. Ця задача може бути розвязана за допомогою гіпергеометричного розподілу. За умовою задачі загальне число об'єктів (фірм) рівне $N = 10$, число фірм з неправильною звітністю $M=3$. Перевіряється всього дві фірми ($n=2$). Число фірм з неправильною звітністю серед двох вибраних - величина змінна ($m=0, 1, 2$). Таким чином, маємо

а) $p_0 = P(X=0) = \frac{C_3^0 \cdot C_2^2}{C_5^2}$ (жодної неправильної звітності)

б) $p_1 = P(X=1) = \frac{C_3^1 \cdot C_2^1}{C_5^2}$ (одна неправильна звітність)

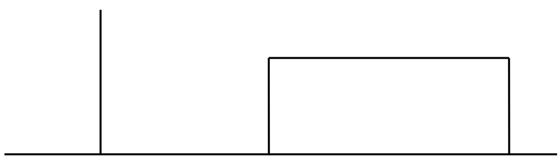
в) $p_2 = P(X=2) = \frac{C_3^2 \cdot C_2^0}{C_5^2}$ (дві неправильні звітності).

5. Рівномірний розподіл

Неперервна випадкова величина вважається рівномірно розподіленою на відрізку (a, b), якщо її щільність ймовірності має вигляд:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le a \\ \frac{1}{b-a}, & a < x \le b \\ 0, & x > b \end{cases}$$

Графік щільності ймовірності для рівномірного розподілу



Математичне сподівання і дисперсія неперервної випадкової величини, що має рівномірний розподіл, дорівнюють відповідно:

$$M(X) = \frac{a+b}{2} \qquad D(X) == \frac{(b-a)^2}{12}$$

Приклад. Інтервал руху автобуса дорівнює 15 хв. Яка ймовірність того, що пасажир на зупинці чекатиме автобус не більше 5 хвилин?

Розвязання. Нехай випадкова величина X - час очікування автобуса. Вона має рівномірний розподіл на відрізку [0,15]. Маємо

$$P(\alpha \le X \le \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx.$$

У даному випадку

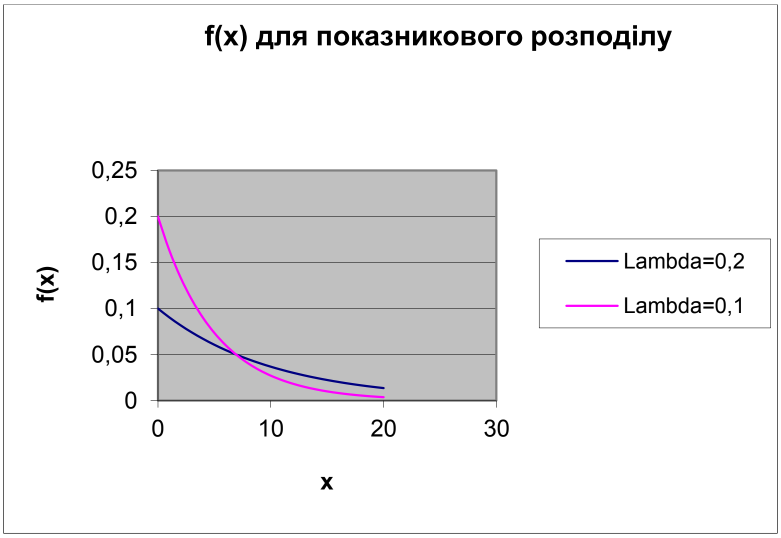
$$P(0 \le X \le 5) = \int_0^5 \frac{1}{b-a}\,dx = \int_0^5 \frac{1}{15-0}\,dx = \frac{5-0}{15-0} = \frac{1}{3}$$

6. Показниковий розподіл

Показниковим (експоненціальним) розподілом неперервної випадкової величини X називається розподіл, що має щільність ймовірності виду :

$$f(x) = \begin{cases} 0, (x < 0) \\ \lambda e^{-\lambda x}, (x \ge 0) \end{cases}$$

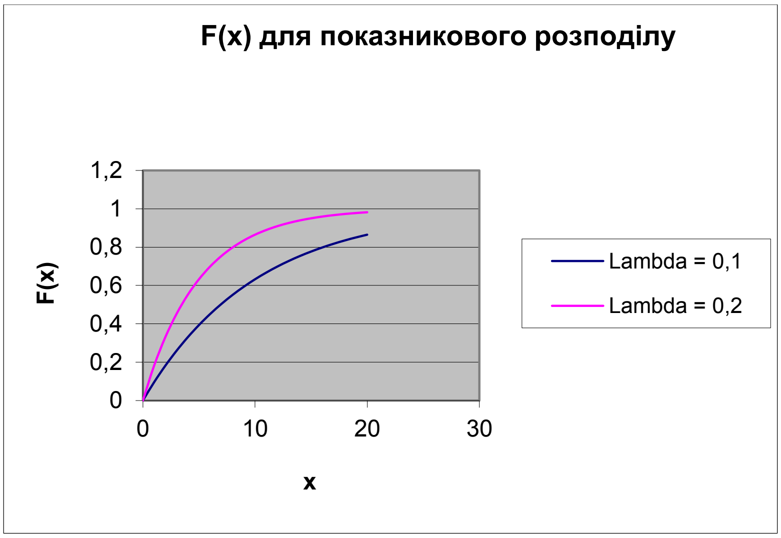
де λ - постійна додатна величина. Щільність ймовірності для показникового розподілу для $\lambda = 0{,}1;\ \ 0{,}2$ наведена нижче



Функція розподілу ймовірності для показникового розподілу має вигляд:

$$F(x)=\begin{cases}0,(x<0)\\1-e^{-\lambda x},(x\geq 0)\end{cases}$$

Функція розподілу для $\lambda=0{,}1;\quad 0{,}2$ наведена нижче



Можна показати, що математичне сподівання і дисперсія випадкової величини, що має експоненціальний розподіл, дорівнюють:

$$M(X)=\frac{1}{\lambda}\qquad D(X)=\frac{1}{\lambda^2}$$

Приклад. Встановлено, що час горіння електричної лампочки (Т) є випадковою величиною, розподіленою за показниковим законом. Вважаючи, що середнє значення цієї величини дорівнює 6 місяцям, знайти ймовірність того, що лампочка буде справна більше року.

Розвязання. Оскільки $M(T)=1/\lambda=6,\ \textit{то}\ \lambda=1/6$ і функція розподілу випадкової величини Т має вигляд

$$F(x)=\begin{cases}1-\exp(-x/6),\ x\geq 0\\0,\ \ x<0\end{cases}$$

Тому

$$P(T>12)=P(12<T<+\infty)=F(\infty)-F(12)=1-(1-\exp(-12/6))=\exp(-2)\approx 0.135$$

Питання для самоперевірки

1. Що таке біноміальний розподіл?
2. Записати характеристики біноміального розподілу.

3. Дати означення розподілу Пуассона.
4. Сформулювати основну властивість розподілу Пуассона.
5. Що таке геометричний розподіл?
6. Записати характеристики геометричного розподілу.
7. Коли випадкова величина має гіпергеометричний розподіл?
8. Записати характеристики гіпергеометричного розподілу.
9. Який розподіл називається рівномірним?
10. Записати характеристики рівномірного розподілу.
11. Який розподіл називається показниковим?
12. Як повязані між собою характеристики показникового розподілу?