Лекція 1.
Основні поняття теорії ймовірностей та комбінаторики

План лекції

Питання, що розглядаються

Предмет теорії ймовірностей та математичної статистики, достовірна подія, неможлива подія, випадкова подія, експеримент, стохастичний експеримент, простір елементарних подій, сумісні події, несумісні події, рівноможливі події, сприяючі наслідки для події, операції над подіями: включення, тотожність, сума, добуток, різниця; властивості операцій над подіями, правила суми і добутку комбінаторики, розміщення, перестановки, сполучення.

1. Предмет теорії ймовірностей та математичної статистики.

Теорія ймовірностей - спеціальний розділ курсу вищої математики, що вивчає математичні закономірності масових однорідних випадкових подій. Слід особливо підкреслити, що методи теорії ймовірностей за своєю суттю не дають можливості передбачити результат *окремої* випадкової події, але дають можливість *передбачити середній сумарний результат* маси однорідних випадкових подій.

Методи теорії ймовірностей широко використовуються в економіці, в теорії надійності, теорії інформації, теорії масового обслуговування, теорії прийняття рішень, в фізиці, астрономії та інших дисциплінах. Теорія ймовірностей лежить в основі ***математичної статистики***, яка, в свою чергу, використовується при плануванні та організації виробництва, при аналізі технологічних процесів, контролі якості продукції та ін.

Математична статистика – наука про математичні методи систематизації та використання статистичних даних для здійснення науково обгрунтованих прогнозів та практичних рекомендацій.

Взагалі кажучи, всі спостережні події (явища) оточуючого нас світу можна поділити на наступні три види: ***достовірні***, ***неможливі*** та ***випадкові***.

Достовірною називають подію, яка обовязково відбудеться, якщо буде виконана певна сукупність умов. *Приклад*. Лід плавиться при температурі вище нуля.

Неможливою називають подію, яка точно не відбудеться при виконанні певної сукупності умов. *Приклади.* 1) Лід не може існувати при 100 градусах Цельсія. 2) Земля не може без впливу зовні припинити своє обертання.

Випадковою називають подію, яка при виконанні сукупності умов може відбутися або не відбутися. *Приклади.* 1)випадання певного числа очок при киданні грального кубика. 2) Попадання снаряду в ціль. 3) Вихід з ладу технічного пристрою. 4) Отримання певного прибутку фірмою тощо.

2. Поняття стохастичного експерименту.

Експериментом називається реалізація наміченої дії, що приводить до деякого результату. Експерименти поділяються на детерміновані та стохастичні (випадкові).

Експеримент називається ***детермінованим,*** якщо, виходячи з умов, що описують експеримент, його результат передбачуваний.

Приклади. 1) Камінь, підкинутий вгору, обовязково впаде вниз. 2) Підвищення життєвого рівня викликає зростання споживання товарів. 3) Поломка системного блоку виводить з ладу компютер.

Експеримент вважається ***стохастичним (випадковим),*** якщо він може закінчитися будь-яким з деякої сукупності відомих результатів, але до здійснення експерименту не можна сказати, яким саме.

Теорія ймовірностей досліджує саме стохастичні експерименти, вірніше моделі ***експериментів з випадковими наслідками.*** При цьому розглядаються тільки такі експерименти, які можна повторювати (відтворювати) при незмінному комплексі умов довільну кількість разів (принаймні теоретично).

Будемо розглядати ***подію*** як результат експерименту.

Приклади. 1) Стрілець стріляє по мішені, яка поділена на декілька частин. Постріл – це експеримент, попадання в певну частину мішені – подія. 2) Діставання кулі з урни – експеримент, поява кулі певного кольору – подія. 3) Здача екзамену – експеримент, отримання оцінки – подія.

3. Простір елементарних подій.

Нехай в результаті експерименту настає одна і тільки одна з подій $\omega_i (i = 1,2,...,n)$

Події ω_i называют ***елементарними подіями***.

Простором елементарних подій Ω називають множину всіх елементарних подій, які можуть зявитися в експерименті.

Точками простору Ω**.** називаються самі елементарні події.

Простір елементарних подій зазвичай вважається заданим, якщо вказані всі його елементи.

Приклад. Для експерименту з підкиданням грального кубика простір елементарних подій утворює сукупність елементарних подій {1,2,3,4,5,6}; при підкиданні монети {Ц, Г}.

З елементарних подій можна скласти більш складну подію. Іншими словами, кожна випадкова подія A визначається як підмножина в множині елементарних подій Ω.

При цьому ті елементарні наслідки з Ω, при яких подія A настає (тобто належить підмножині A), називають ***сприяючими*** події A. Кажуть, що подія A відбулася, якщо результатом експерименту стала елементарна подія ω, що належить A ($\omega \in A$).

Приклади. 1) При підкиданні грального кубика події “випадання парної кількості очок” сприяють елементарні події {2,4,6}. 2) Здачі екзамену сприяє отримання 3, 4 чи 5 балів.

4. Сумісні та несумісні події.

Дві події називаються ***сумісними*** в даному експерименті, якщо поява одного з них не виключає появу іншої.

Приклади. 1) Попадання в ціль двома різними стрільцями. 2) Випадіння однакового числа очок на двох кубиках.

Дві події називаються ***несумісними*** в даному експерименті, якщо вони не можуть відбутися разом при одному і тому ж експерименті.

Декілька подій називаються ***несумісними***, якщо вони попарно несумісні.

Приклади. 1) Попадання і промах при одному пострілі. 2) З ящика з деталями навмання дістали деталь – події "дістали стандартну деталь" та "дістали нестандартну деталь". 3) Розорення фірми та отримання нею прибутку.

Іншими словами, події A і B сумісні, якщо відповідні множини A і B мають спільні елементи і несумісні, якщо відповідні множини A і B не мають спільних елементів.

При визначенні ймовірностей подій часто використовується поняття ***рівноможливих*** подій.

Декілька подій в даному експерименті називаються ***рівновоможливи-ми***, якщо за умовами симетрії є підстава вважати, що жодна з них обєктивно не є більш можливою, ніж інші.

Приклади. 1) Випадіння герба і цифри. 2) Поява карти будь-якої масті. 3) Вибір кулі з урни тощо.

5. Операції над подіями.

З кожним експериментом пов'язаний ряд подій, які, взагалі кажучи, можуть зявитися одночасно.

Приклад. При киданні грального кубика подія A - випадання двійки, а подія B – випадання парного числа очок. Очевидно, що ці події не виключають одна одну.

Нехай всі можливі результати випробування здійснюються в ряді єдино можливих частинних випадків, що взаємно виключають один одного. Тоді:

- кожний наслідок випробування представляється однією і тільки однією елементарною подією;
- всяка подія A, повязана з цим випробуванням, є множина скінченного чи нескінченного числа елементарних подій;
- подія A відбувається тоді і тільки тоді, коли реалізується одна з елементарних подій, які належать цій множині.

Довільний, але фіксований простір елементарних подій Ω, можна представити у вигляді деякої області на площині. При цьому елементарні події $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n, ...$ – це точки площини, що лежать всередині Ω. Так як подія ототожнюється з множиною, то над подіями можна здійснювати всі операції, що здійснюються над множинами.

За аналогією з теорією множин будується ***алгебра подій***. При цьому можуть бути визначені наступні операції та співвідношення між подіями:

1) $A \subset B$ (відношення включення множин: множина A є підмножиною множини B) – з події A випливає подія B. Іншими словами, подія B відбувається щоразу, коли відбувається подія A.

   Приклад. З випадіння двійки випливає випадіння парного числа очок.
2) $A = B$ (відношення еквівалентності множин)

   Подія A ***тотожня*** або ***еквівалентна*** події B, якщо $A \subset B$ і одночасно $B \subset A$, тобто кожна з них відбувається щоразу, коли відбувається інша.

   Приклад. Подія A – поломка приладу, подія B – поломка хоча б одного з блоків (деталей) приладу.
3) $A + B$ ($A \cup B$) ***– сума подій***.

   Сума подій - це подія, що полягає в тому, що відбулася хоча б одна з двох подій A або B (логічне "або").

   В загальному випадку, під сумою декількох подій розуміють подію, що полягає в появі хоча б однієї з цих подій.

   Приклад. Ціль вражена першим стрільцем, другим або обома одночасно.
4) AB ($A \cap B$) ***– добуток подій***.

   Добуток подій - це подія, що полягає в сумісному здійсненні подій A і B (логічне "і").

   В загальному випадку, під добутком декількох подій розуміють подію, що полягає в одночасному здійсненні всіх цих подій.

   Таким чином, події A і B несумісні, якщо добуток їх є подія неможлива, тобто $AB = \varnothing$.

   Приклад. Подія A – виймання з колоди карти бубнової масті, подія B – виймання туза, тоді AB - поява бубнового туза.
5) $A - B$ ***– різниця подій***.

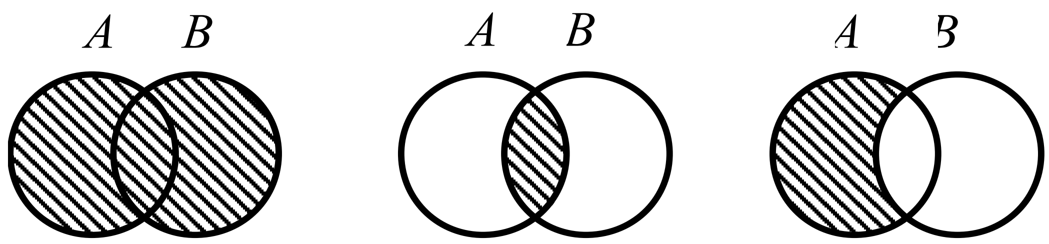
   Різниця подій - це подія, що складається з наслідків, які входять в A, але не входять в B. Вона полягає в тому, що відбувається подія A, але при цьому не відбувається подія B.

   Приклад. A – здача екзаменаційної сесії, B – отримання стипендії, тоді $A - B$ – здача сесії з недостатньо високим для отримання стипендії результатом.

Протилежною подією (доповняючою) для події A (позначається $\overline{A}$) називається подія, що складається з усіх тих наслідків, які не входять в A.

Настання події $\overline{A}$ означає просто, що подія A не настала.

Часто буває корисною геометрична інтерпретація операцій над подіями. Графічна ілюстрація операцій називається діаграмами Венна.



$A+B$ AB $A-B$

Властивості операцій над подіями.

Деякі властивості операцій над подіями постулуються, інші легко можна отримати за допомогою діаграм Венна. Наведемо без доведення основні з цих властивостей.

1. $A+B=B+A$
2. $AB=BA$
3. $A+\overline{A}=\Omega$
4. $A\Omega=A$
5. $AB\subset A$
6. $A\overline{A}=\varnothing$
7. $\overline{\overline{A}}=A$
8. $A-B=A\overline{B}$
9. $(A+B)C=AC+BC$
10. $\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$
11. $\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$
12. $(A-B)C=AC-BC$

6. Основні поняття комбінаторики

При розвязанні ряду теоретичних та практичних задач потрібно з скінченної множини елементів за заданими правилами складати різні сполуки та підраховувати кількість всіх можливих таких сполук.

Комбінаторика – це розділ математики, що вивчає розташування обєктів у відповідності зі спеціальними правилами і методи підрахунку кількості всіх можливих способів, якими ці розташування можна здійснити.

Правила суми та добутку

Правило суми – якщо елемент a може бути вибраний n способами, а елемент b – m способами, то один з цих елементів можна вибрати $n+m$ способами.

Правило добутку – якщо елемент a може бути вибраний n способами та після кожного такого вибору елемент b можна вибрати m способами, то пару (ab) з цих елементів у вказаному порядку можна вибрати nm способами.

Розміщеннями *з* n елементів по k називаються впорядковані набори, що складаються з k різних елементів, вибраних з n даних елементів, .

Розміщення можуть відрізнятися як елементами, так і порядком.

Теорема. Число всіх розміщень з n елементів по k обчислюється за формулою:

$$A_n^k=n(n-1)(n-2)...(n-(k-1))=\frac{n!}{(n-k)!}$$

Доведення. Дійсно, перший елемент розміщення може бути вибраний n способами. Для кожного з цих варіантів є n-1 способів розташування одного з елементів, що залишились, на другому місці. Отже, за правилом добутку, маємо $n \cdot (n-1)$ різних способів вибору елементів на перших двох місцях. Продовжуючи це суждення, отримуємо потрібну формулу.

Приклад. Різними розміщеннями множини з трьох елементів {1,2,3} по два будуть набори (1,2), (2,1), (1,3), (3,1), (2,3), (3,2)

Перестановками P_n. називаються розміщення при $k=n$.

Так як кожна перестановка містить всі n елементів множини, то різні перестановки відрізняються одна від одної лише порядком елементів і

$$P_n = A_n^n = n!$$

Приклад. Різними перестановками множини елементів {1,2,3} будуть (1,2,3), (1,3,2), (2,3,1), (2,1,3), (3,2,1), (3,1,2)

Сполученнями (комбінаціями) з n елементів по k називаються невпорядковані набори з k елементів, взятих з даних n елементів,

Теорема. Число сполучень з n елементів по k обчислюється за формулою

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Доведення можна отримати, враховуючи, що сполучення відрізняються від розміщень тим, що в них не важливий порядок розташування заданих k елементів. Тому при рівних n і k число сполучень менше числа розміщень в $k!$ разів.

Питання для самоперевірки

1. Що вивчає теорія ймовірності?
2. Яка подія називається достовірною?
3. Яка подія називається неможливою?
4. Яка подія називається випадковою?
5. Що таке стохастичний експеримент?
6. Що називають простором елементарних подій?
7. Які події називаються сумісними?
8. Які події називаються несумісними?
9. Що таке рівноможливі події?
10. Перерахувати операції над подіями.
11. Записати властивості операцій над подіями.
12. Що вивчає комбінаторика?
13. Сформулювати правила суми та добутку.
14. Записати формулу для розміщень.
15. Записати формулу для перестановок.
16. Записати формулу для сполучень.