Лекція №5

Тема: Матричний запис перетворення координат

Мета: Реалізувати матричний запис перетворення координат та задати послідовність перетворення координат.

ПЛАН

1. **Матричний запис двовимірного перетворення повороту**
2. **Матричний запис двовимірного масштабування**
3. **Матричний запис двовимірного перетворення переносу. Однорідні координати**
4. **Матричне об'єднання перетворення координат**

1. Матричний запис двовимірного перетворення повороту

В попередніх лекціях використано запис перетворень координат у вигляді звичайних математичних виразів. В більшості випадків такого запису вистачає, але в послідовних залежностях (лекція №4) формули перетворення стають значно складнішими, тому виникла проблема в їх більш короткому записі. Згадаємо перетворення повороту:

$$\begin{cases} x_1 := x_0\cos(\alpha) + y_0\sin(\alpha), \\ y_1 := -x_0\sin(\alpha) + y_0\cos(\alpha). \end{cases} \tag{1}$$

Початкова точка має координати $(x_0; y_0)$, після перетворення координат точка матиме координати $(x_1; y_1)$. За незрозуміло якими математичними шляхами (хоча матричний запис скоріш за все і виник для спрощення таких записів), вираз (1) можна записати як множення вектора на матрицю:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} . \tag{2}$$

Такий запис не є значно простішим за запис (1), але в матричній арифметиці значно простіше записувати комбінації перетворень. Нехай сформовано перетворення повороту, і з метою уникнення повільної операції відшукання sin та cos, використано результат:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} , \tag{2}$$

для ряду точок. Для підлеглої фігури використано обертання на додатковий кут

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & \sin(\beta) \\ -\sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \quad \to \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & D \\ -D & C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \quad .$$

Комбінація таких перетворень в матричному вигляді, на відміну від запису формулами (лаб. 4), виглядає простіше:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & D \\ -D & C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \quad \to \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} CA-DB & CB+DA \\ -(CB+DA) & CA-DB \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \quad . \tag{3}$$

Також як і в попередніх формулах через множення матриць, впливає залежність результату перетворення від порядку їх застосування (в загальному випадку). На додачу, для перетворення зображення є доцільним одноразове рахування значень тригонометричних функцій. При використанні матричного запису повороту також можна економити й на подальших розрахунках залежних об’єктів.

2. Матричний запис двовимірного масштабування

Нагадаємо формули перетворення масштабування:

$$\begin{cases} x_1 := m_x \cdot x_0 , \\ y_1 := m_y \cdot y_0 . \end{cases} \tag{4}$$

Формули є простими, але матричний запис може дати перевагу не в простоті запису, а в більш простій комбінації з іншими перетвореннями. Як показано в попередньому пункті, комбінація перетворень в матричному вигляді зводиться до добутку матриць — однотипній операції незалежних від вигляду перетворення.

Розглянемо множення вектора-точки на матрицю:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \quad \to \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{00} \cdot x_0 + a_{01} \cdot y_0 \\ a_{10} \cdot x_0 + a_{11} \cdot y_0 \end{pmatrix} \quad . \tag{5}$$

Якщо прийняти $a_{00} = m_x ; a_{01} = 0 ; a_{10} = 0 ; a_{11} = m_y ;$, тоді запис (5) стане еквівалентним запису (4):

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_x & 0 \\ 0 & m_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \quad . \tag{6}$$

Також варіант суміщення двох перетворень записується матричним множенням:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{1x} & 0 \\ 0 & m_{1y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m_{2x} & 0 \\ 0 & m_{2y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \quad \to \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{1x} m_{2x} & 0 \\ 0 & m_{1y} m_{2y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \quad . \tag{7}$$

Результат суміщення перетворень повністю збігається з попереднім, що дозволяє на відміну від використання запису виразами, користуватися єдиними принципами, формулами та процедурами без визначення типу перетворень.

3. Матричний запис двовимірного перетворення переносу, однорідні координати

Запис паралельного переносу показаний наступними співвідношеннями

$$x_1 = dx + x_0, \qquad (8)$$
$$y_1 = dy + y_0.$$

З співвідношення (5) видно, що з множення матриці 2х2 не можна отримати вільних доданків для зміщення по координатам. Тому спробуємо використати матрицю більшої розмірності, а недостатню координату в векторі-точці замінимо одиницею (здогадка пов'язана з цілим курсом проективної геометрії розробленої декілька сторіч тому).

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{00}x_0 + a_{01}y_0 + 1a_{02} \\ a_{10}x_0 + a_{11}y_0 + 1a_{12} \\ a_{20}x_0 + a_{21}y_0 + 1a_{22} \end{pmatrix} . \qquad (9)$$

Привести до відповідності відношення (8) та (9) можна якщо прийняти значення коефіцієнтів:

$$\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & dx \\ 0 & 1 & dy \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Також варто перевірити, чи можна використовувати для об'єднання перетворень матричне множення:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & dx_0 \\ 0 & 1 & dy_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & dx_1 \\ 0 & 1 & dy_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & dx_1 + dx_0 \\ 0 & 1 & dy_1 + dy_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \qquad (10)$$

Остання формула є підтвердженням придатності застосування матричного множення для суміщення послідовного перенесення координат.

4. Матричне об'єднання перетворення координат

Отримані формули (3), (7), (10) доводять можливість комбінації перетворень за допомогою матричних перетворень. Однак, для формул (3), (7) розмірність не збігається з матрицями з формули паралельного перетворення (10). Цю проблему можна розв'язати збільшивши розмірність матриць в співвідношеннях (3) та (7):

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_x & 0 & 0 \\ 0 & m_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad .$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & dx_0 \\ 0 & 1 & dy_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad .$$

Якщо перемножити всі види матриць перетворення, отримаємо матрицю, яка комбінує всі три види перетворень в одному запису:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_x \cos(\alpha) & m_y \sin(\alpha) & dx \\ -m_x \sin(\alpha) & m_y \cos(\alpha) & dy \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad .$$

В програмі для виведення плаского зображення досить трансформацію координат замінити на матричні операції з одноразовим пошуком значень тригонометричних функцій. Візуально результат виконання програми не буде відрізнятися, але завдяки внесеним змінам перетворення стало визначеною операцією зі сталою послідовністю операцій. На сьогодні існує багато оптимізованих реалізацій матричних перетворень координат, що пришвидшують розрахунки в 3 та більше разів (3DNow!, SSE та ін.).