Лабораторна робота №4
Мінімізація функцій алгебри логіки методом мінімізуючих карт.

Теоретичні відомості

Отриманий аналітичний вираз функції алгебри логіки (ФАЛ) в ПДНФ або ПКНФ є не єдино можливим, і як правило, не найкращим з погляду економічності.

Здійснення спрощення ФАЛ називається мінімізацією. Мінімізація, здійснена з використанням законів алгебри логіки (закони де Моргана, поглинання, склеювання), називається дужковою, тому що щоразу до спрощення приводимо виведенням за дужки спільних аргументів в кон'юнкціях. Даний спосіб використовується тільки при невеликій кількості змінних, а іноді, як заключний, при мінімізації ФАЛ іншими методами.

Розглянемо **приклад 1**: Використовуючи закони алгебри логіки мінімізувати функцію

$Y(x_1, x_2, x_3) = x_1(\bar{x}_1 + x_2) + \bar{x}_2(x_2 + x_1) + x_3$

Рішення.

$Y(x_1, x_2, x_3) = x_1(\bar{x}_1 + x_2) + \bar{x}_2(x_2 + x_1) + x_3 =$
$= x_1 \bar{x}_1 + x_1 x_2 + x_2 \bar{x}_2 + x_1 \bar{x}_2 + x_3$

Враховуючи, що $x_1 \bar{x}_1 = 0$, $x_2 \bar{x}_2 = 0$, $x_1 x_2 + x_1 \bar{x}_2 = = x_1(x_2 + \bar{x}_2) = x_1$.

Маємо $Y(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_3$.

Мінімізація - це процес відшукання для заданої ФАЛ такої форми, яка мала б мінімальне число вхідних змінних. Це означає, що при інженерному проектуванні цифрових пристроїв з двох форм, які відображають задану ФАЛ, слід вибрати ту, яка реалізується за допомогою меншої кількості логічних елементів, а при однаковому числі елементів - ту, в якій менше сумарне число вхідних окремих змінних.

X_1

X_2

12	14	6	4
13	15	7	5
9	11	3	1
8	10	2	0

X_3

Рис. 3. Вид карти Вейча дл
чотирьох змінних.

Широке практичне застосування завдяки своїй простоті знайшли методи мінімізації, які використовують карти Вейча.

Цими картами є таблиці відповідностей, перетворені таким чином, що у функції, яка нанесена на таку карту, сусідні кон'юнкції знаходяться поряд або на конкретних місцях.

Цифри в клітинках - це десяткові номери відповідних кон'юнкцій максимальної довжини. Клітинки карти Вейча, які не обведені дужками як по вертикалі так і по горизонталі відповідають значенням інверсій змінних.

При мінімізації ФАЛ за допомогою карт Вейча їх краще записувати в ПДНФ.

Для мінімізації перш за все необхідно відшукати сусідні кон'юнкції. Сусідніми клітинками і відповідно їм сусідніми кон'юнкціями максимальної довжини на картах необхідно вважати ті, які знаходяться безпосередньо поряд по горизонталі чи вертикалі, а також ті, що розташовані на протилежних сторонах карти.

Для відшукання сусідніх кон'юнкцій, тобто для мінімізації ФАЛ необхідно нанести її на відповідну карту, тобто на місця, які відповідають десятковим наборам кон'юнкцій, поставити одиниці, а в інших клітинках - нулі. Часто, щоб не затінювати карту, нульові значення не проставляють.

Склеювання сусідніх констант на картах Вейча виконуються їх геометричним об'єднанням в групи, які складаються з прямокутників з площею 2^n (n=1, 2, ...), де під площею мається на увазі кількість клітинок, які входять в прямокутник.

Таке об'єднання називається покриттям, а прямокутник з площею 2^n правильним. Результат записується у вигляді кон'юнкцій, які входять в покриття.

Чим більша площа покриття, тим менше змінних входить в результат, і чим менше число покриттів, тим менше кон'юнкцій в результаті. Тому необхідно прагнути об'єднати всі одиниці мінімальним числом покриттів максимальної площі.

На підставі вищевикладеного можна сформулювати порядок операцій мінімізації ФАЛ за допомогою карт Вейча:

1. на карту наносяться всі одиничні значення функції;

2. виконується покриття всіх одиничних значень функції мінімальним числом максимальних за площею правильних прямокутників;

3. записується результат у вигляді диз'юнкції кон'юнкцій, які охоплюють кожне окреме покриття.

Розглянемо **<u>приклад 2</u>**: Використовуючи метод мінімізуючих карт, мінімізувати функцію $Y(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum(2,3,4,5,8,10,11)$.

Рішення.

Нанесемо значення ФАЛ на карту Вейча. Виконуємо покриття всіх одиничних значень ФАЛ мінімальним

числом максимальних за площею правильних прямокутників - потовщена лінія об'єднує значення в карті. (10-й набір належить двом прямокутникам - на карті відтінений).

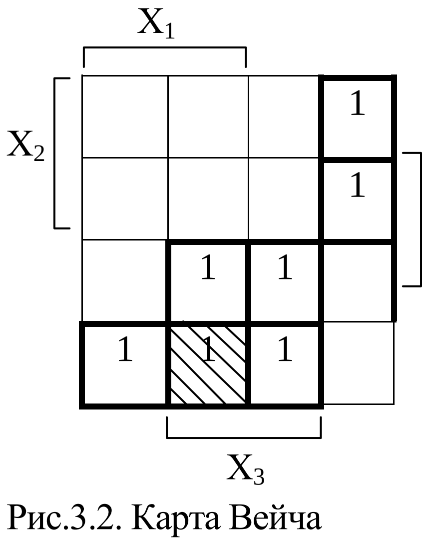

Рис.3.2. Карта Вейча для функції з прикладу 2

Прямокутник, що покриває набори 4 і 5, описується термом $\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3$. Прямокутник, що покрив набори 8 і 10 - $x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_4$. Прямокутник, який покрив набори 2, 3, 10 і 11 - $\bar{x}_2 x_3$.

Таким чином, представимо розглянуту ФАЛ у вигляді диз'юнкції кон'юнкцій:

$$Y(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum(2,3,4,5,8,10,11) = \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 + x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_4 + \bar{x}_2 x_3.$$

Завдання:

Згідно варіанту, мінімізувати функцію:

1. Використовуючи закони алгебри логіки

№ вар.	$Y(x_1, x_2, x_3)$	№ вар.	$Y(x_1, x_2, x_3)$	№ вар.	$Y(x_1, x_2, x_3)$
1	$x_1 x_2 + x_3 + x_1$	6	$x_1(x_1 + \bar{x}_2) + x_1 \bar{x}_3$	11	$\bar{x}_1 \bar{x}_2 + x_1 \bar{x}_2 + x_1 \bar{x}_2 x_3$
2	$x_3(\bar{x}_2 x_1 + x_2 x_1)$	7	$(x_1 + x_2)(x_1 + \bar{x}_2 x_3)$	12	$\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 + \bar{x}_1 x_2 x_3$
3	$x_2 + x_2 x_1 + x_3$	8	$(x_3 x_2 x_1 + \bar{x}_3 x_1) x_2$	13	$x_1 \bar{x}_2 + \bar{x}_2 \bar{x}_1 + x_3$
4	$\bar{x}_1 \bar{x}_2 + \bar{x}_2 x_1 + x_3$	9	$\bar{x}_1 + x_2 \bar{x}_1 + \bar{x}_3 x_2$	14	$\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 + \bar{x}_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 \bar{x}_3$
5	$x_1(\bar{x}_3 + x_2) + \bar{x}_2(x_1 + x_3)$	10	$x_1 \bar{x}_3 + \bar{x}_2 x_1 + x_2 x_1$	15	$x_1 \bar{x}_2 + x_1 x_2 + x_1 x_3$

2. Використовуючи метод мінімізуючих карт

№ набору	x_1	x_2	x_3	x_4	$F(x_1, x_2, x_3, x_4)$ для варіанту:														
					1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1
2	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	0	1	0	1	1
3	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	0
4	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1
5	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1
6	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0
7	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0	1	0
8	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1
9	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0
10	1	0	1	0	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0
11	1	0	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	1	0	1	1
12	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	1	1
13	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0
14	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1
15	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0

Контрольні питання:

1. Для чого виконувати мінімізацію ФАЛ ?
2. В чому суть “дужкового” методу мінімізації ФАЛ ?
3. Як застосувати метод карт Вейча для мінімізації ФАЛ ?
4. Чому потрібно намагатися об’єднати одиничні значення ФАЛ покриттями максимальної площі?
5. Скільки разів можна об’єднувати одну клітинку з іншими сусідніми в складі різних покриттів?
6. Які клітинки карти Вейча вважаються сусідніми?