Визначений інтеграл.

Задачі, які приводять до поняття визначеного інтегралу.

Нехай відомий закон зміни миттєвої швидкості $V = V(t)$ при русі точки. Знайдемо пройдений шлях за деякий проміжок часу $[\alpha, \beta]$. Рух нерівномірний, тому неможливо обчислити шлях як добуток швидкості на час.

Розіб'ємо весь проміжок часу на на велике число малих, не обов'язково рівних друг другу інтервалів часу

$$\alpha = t_0 \le t_1 \le t_2 \le \ldots\ldots\ldots \le t_{n-1} \le t_n = \beta ,$$

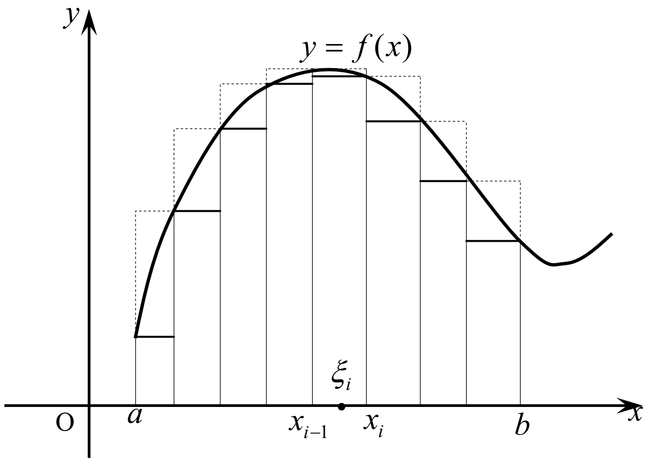
де $t_1, t_2, \ldots\ldots t_n$ - деякі моменти часу. Якщо ці інтервали достатньо малі, то без великої помилки можна вважати на кожному інтервалі рух рівномірним, і наближено шлях буде дорівнювати

$$l = V_1 \Delta t_1 + V_2 \Delta t_2 + \ldots\ldots\ldots + V_n \Delta t_n = \sum_{k=1}^{n} V_k \Delta t_k ,$$

де - $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$, V_k - швидкість на k -тому інтервалі часу. Ця формула тим точніша, чим більше число розбивок проміжку часу $[\alpha, \beta]$. Щоб одержати точну формулу, потрібно перейти до границі, прийнявши, що розбивок нескінчено багато, а $\max \Delta t_k \to 0$

$$l = \lim_{\max \Delta t_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} V_k \Delta t_k \ .$$

Розглянемо геометричний приклад. Нехай необхідно обчислити площу криволінійної трапеції, яка обмежена зверху неперервною функцією $y = f(x) \geq 0$, знизу віссю Ox, зліва і справа відповідно прямими $x = a$ і $x = b$, $a < b$.



Позначимо m і M найменше й найбільше значення функції на відрізку $[a, b]$.

Розіб'ємо відрізок $\left[a, b\right]$ на n частин (не обов'язково однакових).

$$a = x_0 \le x_1 \le x_2 \le \dots\dots\dots \le x_n = b, \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1}.$$

Позначимо найменше і найбільше значення функції $f(x)$ на кожному відрізку $\left[x_{i-1}, x_i\right]$ через m_i, M_i.

Складемо суми:

$$\underline{S_n} = m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 + \dots\dots\dots + m_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i,$$

$$\overline{S_n} = M_1\Delta x_1 + M_2\Delta x_2 + \dots\dots\dots + M_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i,$$

які називаються відповідно нижньою і верхньою інтегральними сумами або нижньою і верхньою сумами Дарбу. Якщо $f(x) \ge 0$, то нижня інтегральна сума чисельно дорівнює площі “вписаної” ступінчатої фігури, а верхня інтегральна сума чисельно дорівнює площі “описаної” ступінчатої фігури.

Властивості сум Дарбу:

а) так як $m_i \le M_i$ для будь-якого i, то звідси випливає $\underline{S_n} \le \overline{S_n}$.

б) так як $m_i \ge m$ для будь-якого i, то звідси випливає

$$\underline{S_n} = m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 + \dots\dots\dots + m_n\Delta x_n \ge m\Delta x_1 + m\Delta x_2 + \dots\dots\dots + m\Delta x_n =$$
$$= m\left(\Delta x_1 + \Delta x_2 + \dots\dots\dots + \Delta x_n\right) = m(b-a),$$

тобто $\underline{S_n} \geq m(b-a)$.

в) так як $M_i \leq M$ для будь-якого i, то звідси випливає

$$\overline{S_n} = M_1\Delta x_1 + M_2\Delta x_2 + \ldots\ldots\ldots + M_n\Delta x_n \leq M\Delta x_1 + M\Delta x_2 + \ldots\ldots\ldots + M\Delta x_n = \\ = M(\Delta x_1 + \Delta x_2 + \ldots\ldots\ldots + \Delta x_n) = M(b-a),$$

тобто $\overline{S_n} \leq M(b-a)$.

Отже. $m(b-a) \leq \underline{S_n} \leq \overline{S_n} \leq M(b-a)$.

Визначений інтеграл, як границя інтегральних сум.

В кожному із відрізків $[x_{i-1}, x_i]$ візьмемо точку ξ_i, $i = 1,2,\ldots\ldots,n.$ Знайдемо значення функції в цих точках і складемо суму

$$S_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots\ldots\ldots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

яка називається інтегральною сумою для функції $f(x)$ на відрізку [a, b]. Так як на будь-якому відрізку $[x_{i-1}, x_i]$ виконується $m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i$, $\Delta x_i > 0,$ то

$$m_i\Delta x_i \leq f(\xi_i)\Delta x_i \leq M_i\Delta x_i.$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i.$$

$$\underline{S_n} \le S_n \le \overline{S_n}.$$

Геометрично це означає наступне: графік функції $f(x)$ обмежений зверху “описаною” ламаною лінією, а знизу – “вписаною” ламаною лінією.

Сума S_n залежить від способу розбивки відрізка $[a, b]$ на відрізки $[x_{i-1}, x_i]$ і від вибору точок ξ_i всередині цих відрізків. Чим більше розбивок, тим точніша площа криволінійної трапеції (Δx_i - зменшується і прямує до нуля).

Збільшуючи число розбивок і переходячи до границі при $\max \Delta x_i \to 0,$ тобто максимальний із відрізків прямує до нуля, (кількість розбивок прямує до нескінченості), одержимо площу криволінійної трапеції.

Означення. Границя (якщо вона існує), до якої прямує інтегральна сума S_n, коли $\max \Delta x_i \to 0,$ називається визначеним інтегралом від функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$ і позначається

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx.$$

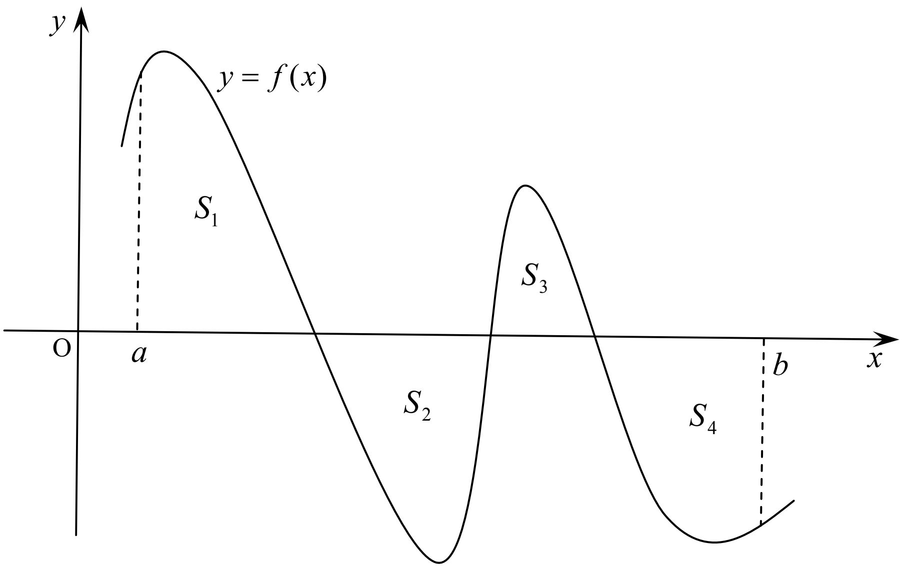
Числа a і b - називаються нижньою і верхньою межами інтегрування, x - змінна інтегрування, $[a, b]$ - відрізок інтегрування.

Якщо для функції $f(x)$ існує дана границя, то функцію $f(x)$ називають інтегровною на відрізку $[a, b]$.

Так як нижня і верхня суми Дарбу є частинними випадками інтегральної суми, тому якщо $f(x)$ інтегровна, то нижня і верхня суми Дарбу прямують до тієї ж самої границі

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \int_a^b f(x)dx,$$

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = \int_a^b f(x)dx.$$



Якщо побудувати графік підінтегральної функції $y = f(x)$, то в випадку $f(x) \geq 0$ інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ буде чисельно дорівнювати площі криволінійної трапеції, яка обмежена вказаною кривою, прямими $x = a, x = b$ і віссю Ox.

Якщо підінтегральна функція від'ємна або змінює знак, то в інтегральну суму деякі члени ввійдуть зі знаком мінус. В границі одержимо, що інтеграл дорівнюватиме алгебраїчній сумі площ частин криволінійної трапеції, причому площі частин, які лежать вище (нижче) осі Ox , беруться зі знаком плюс (мінус).

$$\int_a^b f(x)dx = S_1 - S_2 + S_3 - S_4.$$

На початку було розглянуто пройдений шлях

$$l = \lim_{\max \Delta t_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} V_k \Delta t_k = \int_{\alpha}^{\beta} V(t)dt.$$

<u>Властивості визначеного інтеграла.</u>

1) Визначений інтеграл був введений для $a < b.$ Якщо межі інтегрування співпадають, то визначений інтеграл дорівнює нулю, тобто $\int_a^a f(x)dx = 0$.

2) При перестановці меж інтегрування інтеграл змінює знак на протилежний:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

3) Для будь-яких чисел a, b, c має місце рівність

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

4) Постійний множник можна виносити за знак інтеграла:

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx.$$

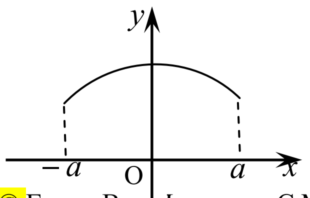
5) Визначений інтеграл від алгебраїчної суми двох або декількох функцій дорівнює алгебраїчній сумі інтегралів:

$$\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx .$$

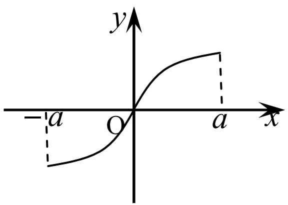
6) Якщо m і M - відповідно найменше й найбільше значення функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$, то:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a) .$$

7) Інтегрування в симетричних межах в деяких випадках можна спростити за формулами:



$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$$, якщо $f(x)$ - парна функція,



$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$, якщо $f(x)$ - непарна функція.

Теорема про середнє.

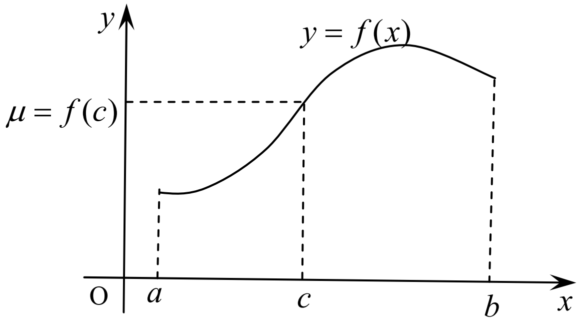
Теорема. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, то на цьому відрізку існує точка c така, що

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c).$$

Доведення. У відповідності із властивістю 6:

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M .$$

Так як функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, то вона приймає на цьому відрізку всі значення від m до M . Інакше кажучи, існує таке число $c \in [a,b]$, що якщо $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \mu$ і $\mu = f(c)$, а $a \le c \le b$, тоді



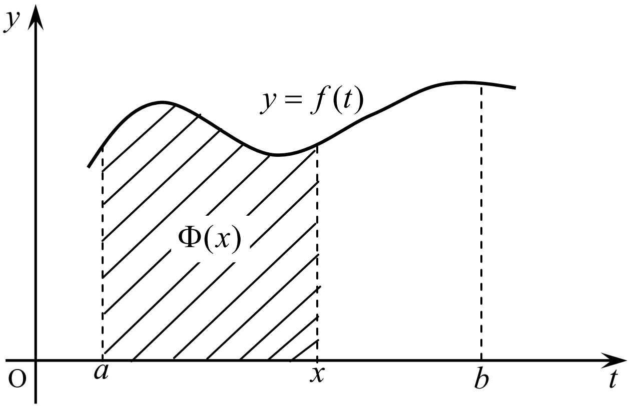
$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c)$$. Теорема доведена.

Зауваження. Теорема про середнє має геометричний зміст: Величина визначеного інтегралу при $f(x) \ge 0$ дорівнює площі прямокутника, який має висоту $f(c)$ і основу $(b-a)$.

Обчислення визначеного інтеграла.

Теорема про похідну інтеграла по верхній межі.

Раніше ми розглядали визначений інтеграл з постійними межами інтегрування a і b. Якщо змінювати верхню межу так, щоб не вийти за межі відрізка $[a,b]$, то величина визначеного інтеграла буде змінюватися, тобто буде представляти функцію своєї верхньої межі.



Позначимо цю функцію

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \quad a \le x \le b$$

і назвемо її інтегралом зі змінною верхньою межею.

Геометрично функція $\Phi(x)$ представляє собою площу заштрихованої на малюнку криволінійної трапеції, якщо $f(t) > 0$.

Теорема. Похідна визначеного інтегралу від неперервної функції по змінній верхній межі існує і дорівнює значенню підінтегральної функції в точці, яка дорівнює верхній межі, тобто

$$\Phi'(x) = \left(\int_a^x f(t)dt\right)'_x = f(x).$$

Доведення. Для будь-якого $x \in [a,b]$ задамо приріст $\Delta x \ne 0$ так, щоб $x + \Delta x \in [a,b]$. Тоді функція $\Phi(x)$ одержить нове значення

$$\Phi(x+\Delta x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt.$$

Згідно властивості 3)

$$\Phi(x+\Delta x)=\int_a^x f(t)dt+\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt=\Phi(x)+\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt.$$

Знайдемо приріст функції $\Phi(x)$

$$\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt.$$

Застосуємо теорему про середнє

$$\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=f(c)\Delta x,$$

де c - число, яке знаходиться між x і $x+\Delta x$.

Розділимо обидві частини рівності на Δx, і, якщо $\Delta x\to 0$, то $c\to x$ і, в силу неперервності функції $f(t)$ на $[a,b]$, $f(c)\to f(x)$.

$$\frac{\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)}{\Delta x}=f(c),$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0} f(c)=\lim_{c\to x} f(c)=f(x).$$

$$\Phi'(x) = f(x).$$

Зауваження. Нами встановлено, що будь-яка неперервна на відрізку $[a,b]$ функція $f(x)$ має на цьому відрізку первісну, а саме, функцію $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Оскільки всяка інша первісна для функції $f(x)$ може відрізнятися від $\Phi(x)$ тільки на постійну, то встановлений зв'язок між невизначеним і визначеним інтегралами у вигляді

$$\int f(x)\,dx = \int_a^x f(t)\,dt + C.$$

Формула Ньютона-Лейбніца.

Обчислення визначених інтегралів методом, який заснований на означенні інтеграла як границі інтегральної суми, як правило, зв’язаний з великими труднощами. Існує більш зручний метод.

Функція $f(x)$, неперервна на відрізку $[a, b]$, має на цьому відрізку первісні. Дві будь-які первісні відрізняються на постійну. Нехай $F(x)$ - одна із первісних.

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + C, \quad a \le x \le b.$$

Для визначення постійної C покладемо $x = a$

$$\int_a^a f(t)dt = F(a) + C, \qquad 0 = F(a) + C, \quad C = -F(a),$$

Тобто для будь-якого $x \in [a,b]$

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a).$$

В цій формулі покладемо $x = b$

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

Замінивши позначення змінної інтегрування, одержимо формулу Ньютона-Лейбніца

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Теорему доведено.

Формула Ньютона-Лейбніца дає простий і зручний метод обчислення визначеного інтегралу: визначений інтеграл від неперервної функції дорівнює різниці значень будь-якої її первісної, обчисленої для верхньої і нижньої межі інтегрування.

Приклад. Знайти визначений інтеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{4}.$$

Приклад. Знайти визначений інтеграл

$$\int_{-1}^{0} \left(4x^3 + 2x - 1\right) dx = \left(x^4 + x^2 - x\right)\Big|_{-1}^{0} = 0 - (1+1+1) = -3.$$

При обчисленні визначених інтегралів застосовують подібні прийоми і методи, які були розглянуті вище при обчисленні невизначених інтегралів.

Точно так само застосовуються методи підстановки (заміни змінної), метод інтегрування частинами, ті ж прийоми знаходження первісних для тригонометричних, ірраціональних і трансцендентних функцій. Особливістю є тільки те, що при застосуванні цих прийомів треба поширювати перетворення не тільки на підінтегральну функцію, але й на межі інтегрування. Заміняючи змінну інтегрування, не забути змінити відповідно межі інтегрування.

Метод підстановки (заміни змінних) у визначеному інтегралі.

Теорема. Нехай заданий інтеграл $\int_a^b f(x)dx$, де $f(x)$ – неперервна функція на відрізку $[a,b]$. Тоді якщо

1) $x = \varphi(x)$ - диференційовна функція на $[\alpha, \beta]$ і $\varphi'(t)$ - неперервна функція на $[\alpha, \beta]$.

2) $\varphi(\alpha)=a, \quad \varphi(\beta)=b.$

3) $f\left[\varphi(t)\right]$ - визначена і неперервна функція на $\left[\alpha, \beta\right]$, то

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt\,. \qquad (*)$$

Доведення. За формулою Ньютона-Лейбніца

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a),\ \text{де}\ F(x)\ \text{- первісна.}$$

З іншої сторони, розглянемо на $\left[\alpha, \beta\right]$ складну функцію від t: $\Phi(t)=F\left[\varphi(t)\right]$. Знайдемо похідну

$$\Phi'(t)=F'\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)=f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)\,.$$

Звідси випливає, що функція $\Phi(t)$ є первісною для функції $f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)$, яка неперервна на $\left[\alpha, \beta\right]$, і за формулою Ньютона-Лейбніца одержимо

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt=\Phi(\beta)-\Phi(\alpha)=F\left[\varphi(\beta)\right]-F\left[\varphi(\alpha)\right]=$$

$$=F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)dx.$$

Теорема доведена.

Формула (*) називається формулою заміни змінної або підстановки у визначеному інтегралі.

Зауваження. При обчисленні визначеного інтегралу за формулою (*) не потрібно повертатись до старої змінної (на відміну від невизначеного інтегралу), так як потрібно знайти число, яке згідно доведеної теореми дорівнює значенню кожного із розглянутих інтегралів.

Приклад. Обчислити

$$\int_1^4 \frac{xdx}{\sqrt{2+4x}} = \left| \begin{array}{l} 2+4x=t^2;\ 4dx=2tdt; \\ dx=\dfrac{tdt}{2};\ x=\dfrac{t^2-2}{4}; \\ x=1 \Rightarrow t=\sqrt{6}; \\ x=4 \Rightarrow t=3\sqrt{2} \end{array} \right| = \int_{\sqrt{6}}^{3\sqrt{2}} \frac{(t^2-2)t}{8t}dt = \frac{1}{8}\int_{\sqrt{6}}^{3\sqrt{2}} (t^2-2)dt =$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{t^3}{3}-2t\right)\Bigg|_{\sqrt{6}}^{3\sqrt{2}} = \frac{1}{8}\left(\frac{27\cdot 2\sqrt{2}}{3} - 2\cdot 3\sqrt{2} - \frac{6\sqrt{6}}{3} + 2\sqrt{6}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Приклад. Обчислити

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \left| \begin{array}{l} x=\sin t;\ \ dx=\cos tdt; \\ t=\arcsin x; \\ x=0 \Rightarrow t=0;\ \ x=1 \Rightarrow t=\pi/2 \end{array} \right| = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos tdt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 tdt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (1+\cos 2t)dt =$$

$$=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_{0}^{\pi/2}=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}\sin\pi=\frac{\pi}{4}.$$

Інтегрування частинами у визначеному інтегралі.

Нехай $u(x)$ і $v(x)$ - диференційовані функції від x. Тоді

$$(uv)'=u'v+v'u\,.$$

Проінтегрувавши обидві частини рівності у межах від *a* до *b*, маємо

$$\int_a^b (uv)'dx=\int_a^b u'vdx+\int_a^b uv'dx\,.$$

Оскільки $\int (uv)'dx=uv+C$, тому $\int_a^b (uv)'dx=uv\big|_a^b$. Рівність може бути записана у вигляді

$$uv\big|_a^b=\int_a^b vdu+\int_a^b udv,$$

або остаточно $$\int_a^b udv=uv\big|_a^b-\int_a^b vdu\,.$$

Одержали формулу інтегрування частинами у визначеному інтегралі.

Приклад. Обчислити інтеграл

$$\int_1^e \ln^2 x dx = \left| \begin{matrix} u = \ln^2 x;\ dv = dx; \\ du = 2\ln x \frac{1}{x} dx;\ v = x \end{matrix} \right| = x\ln^2 x \Big|_1^e - 2\int_1^e \ln x dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x;\ dv = dx; \\ du = \frac{1}{x} dx;\ v = x \end{matrix} \right| = x\ln^2 x \Big|_1^e -$$

$$-2x\ln x \Big|_1^e + 2\int_1^e dx = \left(x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x\right)\Big|_1^e = e\ln^2 e - 2e\ln e + 2e - \ln^2 1 + 2\ln 1 - 2 = e - 2.$$

Приклад. Обчислити інтеграл

$$\int_0^1 \operatorname{arctgx} dx = \left| \begin{matrix} u = \operatorname{arctg} x;\ dv = dx; \\ du = \dfrac{dx}{1+x^2};\ v = x \end{matrix} \right| = x\operatorname{arctg} x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{xdx}{1+x^2} = x\operatorname{arctg} x \Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d\left(1+x^2\right)}{1+x^2} =$$

$$= x\operatorname{arctg} x \Big|_0^1 - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\Big|_0^1 = \operatorname{arctg} 1 - \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\ln(1+0) = \frac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2}.$$

Наближене обчислення визначеного інтеграла.

Нехай потрібно обчислити визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ від неперервної функції $f(x)$. Бувають випадки, що знаходження первісної функції досить складне, крім того існує багато функцій, інтеграл від яких не може бути виражений через елементарні функції. Для знаходження інтегралів від подібних функцій застосовуються різноманітні наближені методи, суть яких полягає в тому, що підінтегральна функція заміняється "близькою" до неї функцією, інтеграл від якої виражається через елементарні функції.

<u>Формула прямокутників.</u>

Розглянемо функцію $f(x)$, яка неперервна на відрізку $[a,b]$. Розіб'ємо відрізок $[a,b]$ на n рівних частин довжиною $\Delta x = \frac{b-a}{n} = x_i - x_{i-1}$ за допомогою точок $x_0 = a, x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n = b.$ Складемо інтегральні суми:

$$f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + \ldots\ldots + f(x_{n-1})\Delta x;$$

$$f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \ldots\ldots + f(x_n)\Delta x.$$

Тоді $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(f(x_0) + f(x_1) + \ldots\ldots + f(x_{n-1})) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$ або

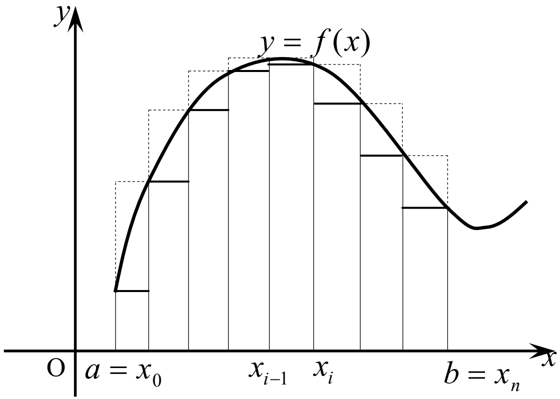
$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(f(x_1) + f(x_2) + \ldots\ldots + f(x_n)) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$ - кожна із цих формул може застосовуватися для наближеного обчислення визначеного інтеграла й називаються загальними формулами прямокутників.

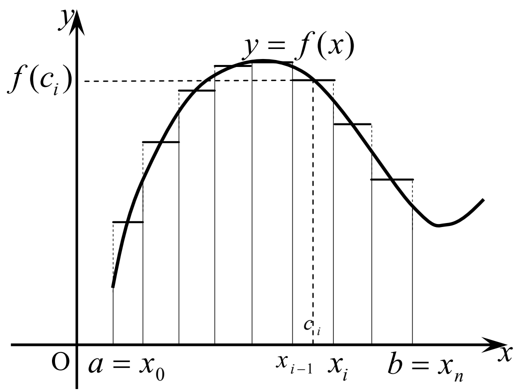
Взявши в кожному відрізку $[x_{i-1}, x_i]$ точку $c_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$, побудуємо прямокутник площа якого $f(c_i)\Delta x$.

Склавши інтегральну суму $f(c_1)\Delta x + f(c_2)\Delta x + \ldots\ldots + f(c_n)\Delta x$ одержимо формулу

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(f(c_1) + f(c_2) + \ldots\ldots + f(c_n)) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(c_i), \qquad (*)$$

яка називається формулою середніх прямокутників.





Абсолютна похибка наближеної рівності (*) оцінюється за допомогою слідуючої формули:

$$|R_n| \le \frac{(b-a)^3 \cdot N_2}{24n^2},$$

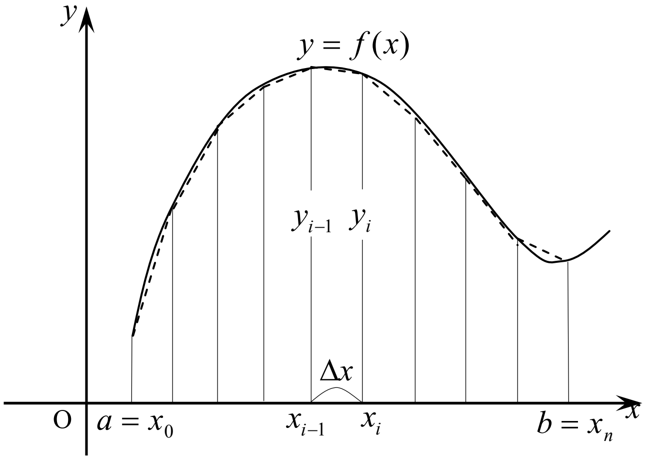
де N_2 - найбільше значення $|f''(x)|$ на відрізку $[a,b]$,

$$|R_n| = \left|\int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(c_i).\right|$$

Зауважимо, що для лінійної функції $(f(x) = kx + b)$ формула (*) дає точну відповідь, тому що в цьому випадку $f''(x) = 0.$

Формула трапецій.

Формула трапецій є більш точною в порівнянні з формулою прямокутників. Формулу трапецій одержують аналогічно формулі прямокутників: на кожному відрізку $[x_{i-1}, x_i]$ криволінійна трапеція замінюється звичайною трапецією. Очевидно, що чим більше взяти точок n розбивки інтервалу, тим з більшою точністю буде обчислений інтеграл.



Площі трапецій обчислюються за формулами:

$$\frac{y_0+y_1}{2}\Delta x;\quad \frac{y_1+y_2}{2}\Delta x;\quad \ldots\quad ,\frac{y_{n-1}+y_n}{2}\Delta x\,,$$

де $y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), \ldots\ldots\ldots, y_n = f(x_n)$, y_{i-1}, y_i - основи трапецій, $\Delta x = \dfrac{b-a}{n} = x_i - x_{i-1}$ - висота кожної трапеції.

Тоді інтеграл наближено буде дорівнювати

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{y_0+y_1}{2}\Delta x + \frac{y_1+y_2}{2}\Delta x + \ldots + \frac{y_{n-1}+y_n}{2}\Delta x\,.$$

Після приведення подібних доданків одержимо формулу трапецій:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}\right).$$

Абсолютна похибка R_n наближення, одержаного за формулою трапецій, оцінюється за допомогою формули

$$\left|R_n\right| \le \frac{(b-a)^3 \cdot N_2}{12n^2},$$

де N_2 - найбільше значення $\left|f''(x)\right|$ на відрізку $[a,b]$. Для лінійної функції формула трапецій також буде точною.

Формула парабол

(формула Сімпсона або квадратурна формула).

Розіб'ємо відрізок інтегрування $[a,b]$ на $2n$ рівних відрізків довжиною $h=\dfrac{b-a}{2n}$ точками $x_i = x_0 + ih, \quad (i=0,1,2,\ldots\ldots,2n)$. В точках розбивки $a = x_0, x_1, x_2, \ldots\ldots, x_{2n-1}, x_{2n} = b$ обчислимо значення підінтегральної функції $y_i = f(x_i)$. Площу криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $f(x)$, замінимо на площу криволінійної трапеції, обмеженою параболою другого ступеня з віссю симетрії, яка паралельна осі Oy і проходить через точки кривої, зі значеннями $f(x_i), f(x_{i+1}), f(x_{i+2})$. Для кожної пари відрізків побудуємо таку параболу.

Рівняння цих парабол мають вигляд $Ax^2 + Bx + C$, де коефіцієнти A, B, C можуть знайдені за трьома точками перетину параболи з заданою кривою.

$$y_0 = Ax_0^2 + Bx_0 + C,$$
$$y_1 = Ax_1^2 + Bx_1 + C,$$
$$y_2 = Ax_2^2 + Bx_2 = C.$$

Площа криволінійної трапеції, обмежена параболою, запишеться

$$S = \int_{x_0}^{x_2} (Ax^2 + Bx + C)dx = \left[A\frac{x^3}{3} + B\frac{x^2}{2} + Cx \right]\Bigg|_{x_0}^{x_2}$$

Якщо прийняти $x_0 = -h, x_1 = 0, x_2 = h$, то $S = \frac{h}{3}(2Ah^2 + 6C)$.

Тоді значення функції приймуть вигляд:

$$y_0 = Ah^2 - Bh + C,$$
$$y_1 = C,$$
$$y_2 = Ah^2 + Bh + C.$$

С врахуванням цього: $y_0 + 4y_1 + y_2 = 2Ah^2 + 6C$, $\quad S = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$.

Звідси одержимо: $\quad S_1 = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$.

Аналогічно знайдемо

$$S_2 = \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4),$$

....

$$S_n = \int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}).$$

Складаючи ці вирази, одержуємо формулу Сімпсона:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6n}\left[y_0 + y_{2n} + 2(y_2 + y_4 + ... + y_{2n-2}) + 4(y_1 + y_3 + ... + y_{2n-1})\right].$$

Чим більше взяти число n, тим більш точне значення інтеграла буде одержано.

Абсолютна похибка обчислення за формулою Сімпсона оцінюється співвідношенням

$$|R_n| \le \frac{(b-a)^5 \cdot N_4}{180 \cdot (2n)^4},$$

де $N_4 = \max\limits_{a \le x \le b}\left|f^{IV}(x)\right|$. Зауважимо, що формула Сімпсона дає точне значення інтеграла $\int_a^b f(x)dx$ в усіх випадках, коли $f(x)$ - многочлен, степінь якого менший або дорівнює трьом (тоді $f^{IV}(x) = 0$).

Крім розглянутих вище способів, існують і інші методи наближеного обчислення визначених інтегралів.

Приклад. Обчислити наближено $\int\limits_{-1}^{9} \sqrt{2x^3 + 3}dx$.

Розв’язання. Розіб’ємо відрізок інтегрування на 10 частин. Складемо таблицю

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
f(x)	1	1,7321	2,2361	4,3589	7,5498	11,4455	15,9060	20,8567	26,2488	32,0468	38,2230

Обчислимо наближено цей інтеграл.

а) за загальними формулами прямокутників:

$$\frac{b-a}{n} = \frac{9-(-1)}{10} = 1.$$

$$\int\limits_{-1}^{9} \sqrt{2x^3 + 3}dx \approx 1 \cdot (1 + 1,7321 + 2,2361 + 4,3589 + 7,5498 + 11,4455 + 15,906 +$$

$$+ 20,8567 + 26,2488 + 32,0468) \approx 123,381.$$

$$\int_{-1}^{9}\sqrt{2x^3+3}dx \approx 1\cdot(1{,}7321+2{,}2361+4{,}3589+7{,}5498+11{,}4455+15{,}906+$$
$$+20{,}8567+26{,}2488+32{,}0468+38{,}223)\approx 160{,}604.$$

б) за формулою середніх прямокутників:

$$\frac{b-a}{n}=\frac{9-(-1)}{10}=1,\quad c_1=-0{,}5;\ c_2=0{,}5;\ c_3=1{,}5;\ c_4=2{,}5;\ c_5=3{,}5;$$
$$c_6=4{,}5;\ c_7=5{,}5;\ c_8=6{,}5;\ c_9=7{,}5;\ c_{10}=8{,}5.$$

$$f(-0{,}5)\approx 1{,}6583;\quad f(0{,}5)\approx 1{,}8028;\quad f(1{,}5)\approx 3{,}1225;\quad f(2{,}5)\approx 5{,}8523;\quad f(3{,}5)\approx 9{,}4207;$$
$$f(4{,}5)\approx 13{,}6107;\quad f(5{,}5)\approx 18{,}3235;\quad f(6{,}5)\approx 23{,}5;\quad f(7{,}5)\approx 29{,}099;\quad f(8{,}5)\approx 35{,}0892.$$

$$\int_{-1}^{9}\sqrt{2x^3+3}dx \approx 1\cdot(1{,}6583+1{,}8028+3{,}1225+5{,}8523+9{,}4207+13{,}6107+$$
$$+18{,}3235+23{,}5+29{,}099+35{,}0892)\approx 141{,}479.$$

в) за формулою трапецій:

$$\int_{-1}^{9}\sqrt{2x^3+3}dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}\right)=1\cdot\left(\frac{1+38{,}223}{2}+1{,}7321+2{,}2361+\right.$$
$$\left.+4{,}3589+7{,}5498+11{,}4455+15{,}906+20{,}8567+26{,}2488+32{,}0468\right)\approx 141{,}992$$

г) за формулою Сімпсона:

$$\int_{-1}^{9}\sqrt{2x^3+3}dx \approx \frac{9+1}{6\cdot 5}[y(-1)+y(9)+2[y(1)+y(3)+y(5)+y(7)]+4[y(0)+y(2)+y(4)+y(6)+$$

$$+y(8)]]=\frac{1}{3}[1+38{,}223+2[2{,}2361+7{,}5498+15{,}906+26{,}2488]+4[1{,}7321+4{,}3589+$$

$$+11{,}4455+20{,}8567+32{,}0468]]\approx 141{,}621.$$

Обчислення інтегралу в Mathcad дає результат

$$\int_{-1}^{9}\sqrt{2x^3+3}dx = 141{,}6596673422\ldots\ldots$$