Тема 6. Деякі застосування функції багатьох змінних. Частинні похідні та диференціали вищих порядків

План

1. Похідна складної функції. Похідна функції заданої неявно.

2. Частинні похідні та диференціали вищих порядків.

3. Рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні.

4. Похідна за напрямом. Градієнт.

1. Похідна складної функції. Похідна функції заданої неявно

Розглянемо функцію $z = f(u,v)$. Нехай u і v – функції незалежних змінних x та y, тобто $u = u(x, y), v = v(x, y)$. Тоді функція z є складною функцією від аргументів x та y (u,v – проміжні змінні). Частинні похідні функції z можна знайти за формулами

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}. \tag{2}$$

Приклад 1. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$, якщо $z = e^{v^2+u}$; $u = x^2 + y^3$, $v = \sin(xy)$.

Розв'язання. Використовуючи формули (1), (2), маємо

$$\frac{\partial z}{\partial u}=e^{v^2+u},\quad \frac{\partial z}{\partial v}=2ve^{v^2+u},\quad \frac{\partial u}{\partial x}=2x\,;\quad \frac{\partial u}{\partial y}=3y^2,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=y\sin(xy),\quad \frac{\partial v}{\partial y}=x\sin(xy);$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2e^{v^2+u}\left(x+vy\sin(xy)\right),\quad \frac{\partial z}{\partial y}=e^{v^2+u}(3y^2+2vx\sin(xy))\,.$$

Якщо функція однієї змінної задана у вигляді $z=f(x,u,v)$, де u і v також залежать від аргументу x ($u=u(x),\ v=v(x)$), то її звичайна похідна визначається за формулою

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx}. \tag{3}$$

Приклад 2. Знайти $\frac{dz}{dx}$, якщо $z=x^3+\frac{u^2}{v}$, $u=\sin x,\ v=\cos x$.

Розв'язання. Застосовуючи формулу (3), отримаємо:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2,\quad \frac{\partial z}{\partial u}=\frac{2u}{v},\quad \frac{\partial z}{\partial v}=-\frac{u^2}{v^2},\quad \frac{du}{dx}=\cos x,\quad \frac{dv}{dx}=-\sin x;$$

$$\frac{dz}{dx}=3x^2+\frac{2u}{v}\cos x-\frac{u^2}{v^2}(-\sin x)=3x^2+\sin x\cdot(2+\mathrm{tg}^2\,x).$$

Розглянемо функцію однієї змінної y від x, яка задана неявно, тобто рівністю $F(x,y)=0$. Якщо в деякій області функція двох змінних $F(x,y)$ диференційована і $F'_y(x,y)\neq 0$, то звичайна похідна від функції y по аргументу x в цій області визначається за формулою

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)} \tag{4}$$

Приклад 3. Функція y від x задана рівністю $y^3x+\sin\frac{x}{y}=0$. Знайте похідну $\frac{dy}{dx}$.

Розв'язання. Так як функція задана неявно, то застосовуємо формулу (4). Можемо записати:

$$F(x,y)=y^3x+\sin\frac{x}{y},\quad \frac{\partial F}{\partial x}=y^3+\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y},\quad \frac{\partial F}{\partial y}=3y^2x-\frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y};$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y^3+\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}}{3y^2x-\frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y}}=\frac{y^5+y\cos\frac{x}{y}}{x\cos\frac{x}{y}-3y^4x}.$$

Розглянемо функцію двох змінних $z=f(x,y)$, яка задана неявно, тобто рівнянням $F(x,y,z)=0$. Якщо в деякій області функція трьох змінних $F(x,y,z)$ диференційована і $F'_z(x,y,z)\neq 0$, то частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ в цій області знаходяться за формулами

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)} \tag{5}$$

Приклад 4. Функцію двох змінних $z = f(x,y)$ задано рівністю $x^2 + \sin(y^2 + z^3) + e^{4z} = 0$. Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Розв'язання. Застосовуючи формулу (5), знайдемо:

$$F(x,y,z) = x^2 + \sin(y^2 + z^3) + e^{4z}, \quad F'_x(x,y,z) = 2x;$$

$$F'_y(x,y,z) = 2y\cos(y^2 + z^3), \quad F'_z(x,y,z) = 3z^2\cos(y^2 + z^3) + 4e^{4z};$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2x}{3z^2\cos(y^2 + z^3) + 4e^{4z}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2y\cos(y^2 + z^3)}{3z^2\cos(y^2 + z^3) + 4e^{4z}}.$$

2. Частинні похідні та диференціали вищих порядків

Припустимо, що функція $z = f(x,y)$ в деякій області D має частинні похідні $f'_x(x,y)$ і $f'_y(x,y)$. Вказані похідні в загальному випадку також є функціями двох змінних і можна ставити питання про існування їхніх частинних похідних. Частинні похідні від $f'_x(x,y)$ і $f'_y(x,y)$ (якщо вони існують) називаються *частинними* *похідними другого порядку* і визначаються наступним чином:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \equiv f''_{xx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \equiv f''_{yy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \equiv f''_{xy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \equiv f''_{yx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right);$$

Дві останні похідні називаються *змішаними частинними похідними другого порядку*.

Приклад 1. Для функції $z = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$ знайти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

Розв'язання.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y}\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} = \frac{y}{x^2+y^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)_x^{/} = -\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)_y^{/} = \frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}.$$

Аналогічно попередньому визначаються частинні похідні вищих порядків для функції трьох і більше змінних.

Приклад 2. Задана функція $u = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. Довести, що $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$.

Розв'язання. Знаходимо потрібні похідні і підставляємо в задану рівність:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\left(\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right)_x^{/}=-x\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\left(-x\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}\right)_x^{/}=-\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}+3x^2\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{5}{2}};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\left(\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right)_y^{/}=-y\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\left(-y\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}\right)_y^{/}=-\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}+3y^2\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{5}{2}};$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\left(\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right)_z^{/}=-z\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\left(-z\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}\right)_z^{/}=-\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}+3z^2\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{5}{2}};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}+3x^2\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{5}{2}}-$$

$$-\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}+3y^2\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{5}{2}}-\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}+$$

$$+3z^2\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{5}{2}}=-\frac{3}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}}+\frac{3\left(x^2+y^2+z^2\right)}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^5}}=$$

$$=-\frac{3}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}}+\frac{3}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}}=0.$$

Що й треба було довести.

Якщо змішані частинні похідні неперервні в деякій області, то в цій області вони рівні між собою, тобто

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} \qquad (1)$$

Приклад 3. Знайти змішані частинні похідні функції $z=x^4y^2+4x^3-y^2$.

Розв'язання. Маємо: $\frac{\partial z}{\partial x}=4x^3y^2+12x^2$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=8x^3y$; $\frac{\partial z}{\partial y}=2x^4y-2y$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=8x^3y$.

Як бачимо, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

Якщо в деякому околі точки $M(x, y)$ для функції $z = f(x, y)$ існують обидві частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$, а у самій точці M вказані похідні неперервні, то, як відомо, у цій точці визначений повний диференціал

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

В загальному випадку dz є функцією x та y (величини dx і dy вважаємо сталими). *Диференціалом другого порядку* (якщо функція dz диференційована) в точці $M(x, y)$ називається диференціал від диференціалу dz. Можемо записати

$$d^2 z = d(dz) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)dx + d\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)dy = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dy\right)dx + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy\right)dy =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2.$$

Таким чином

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2. \tag{2}$$

Для диференціала n-го порядку має місце наступна символічна формула

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n z \tag{3}$$

яка формально розкривається за біноміальним законом Ньютона

Приклад 4. Задана функція $z = \frac{x^2}{y}$. Знайти $d^2 z$.

Розв'язання. На основі формули (2) маємо:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{y}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2}{y}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{2x}{y^2}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x^2}{y^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2x^2}{y^3};$$

$$d^2 z = \frac{2}{y} dx^2 - \frac{4x}{y^2} dxdy + \frac{2x^2}{y^3} dy^2.$$

3. Рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні

Дотичною площиною до поверхні в точці M_0 називається площина, яка містить у собі всі дотичні до кривих, що проведені на поверхні через точку M_0. *Нормаллю* до поверхні називається пряма, яка проходить через точку дотику M_0 і перпендикулярна до дотичної площини.

Рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні $z = f(x, y)$ в точці $M_0(x_0, y_0)$ мають вигляд ((1) – дотична площина, (2) – нормаль):

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0), \tag{1}$$

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}. \tag{2}$$

Якщо поверхня задана рівнянням $F(x, y, z) = 0$, то вказані рівняння записуються в наступній формі ((3) – дотична площина, (4) – нормаль):

$$F'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + F'_z(x_0, y_0)(z - z_0) = 0, \tag{3}$$

$$\frac{(x - x_0)}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{(y - y_0)}{F'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{(z - z_0)}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}. \tag{4}$$

Приклад 1. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні $z=\ln(x^2+y^2+1)$ в точці $M(1;2)$.

Розв'язання. Застосовуємо формули (1) і (2):

$$x_0=1,\quad y_0=2;\quad z_0=f(1;2)=\ln(1^2+2^2+1)=\ln 6;$$

$$f'_x(x,y)=\frac{2x}{x^2+y^2+1},\ f'_x(1;2)=\frac{1}{3};\ f'_y(x,y)=\frac{2y}{x^2+y^2+1},\ f'_y(1;,2)=\frac{2}{3};$$

$$z-\ln 6=\frac{1}{3}(x-1)+\frac{2}{3}(y-2);\quad \frac{z-\ln 6}{-1}=\frac{3(x-1)}{1}=\frac{3(y-2)}{2}.$$

4. Похідна за напрямом. Градієнт

Розглянемо функцію трьох змінних $u=f(x,y,z)$. Нехай точки $M(x,y,z)$ і $M'(x+\Delta x,y+\Delta y,z+\Delta z)$ належать області визначення цієї функції. Позначимо через Δl довжину вектора $\overline{MM'}=\bar{l}(\Delta x,\Delta y,\Delta z)$. Відомо, що $\Delta l=|\bar{l}|=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}$. Величина

$$\Delta u=f(x+\Delta x,y+\Delta y,z+\Delta z)-f(x,y,z)$$

є приростом функції, якого вона зазнає, переходячи від точки M до M', а відношення $\frac{\Delta u}{\Delta l}$ є величиною приросту, що приходиться на одиницю довжини відстані між точками M і M' (середня швидкість зміни функції при такому переході).

Границя відношення $\frac{\Delta u}{\Delta l}$ при $\Delta l \to 0$ (якщо вона існує) називається *похідною функції* $u = f(x, y, z)$ *в точці M за напрямом вектора* $\bar{l}$ і позначається символом $\frac{\partial u}{\partial l}$. Отже

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta l}. \qquad (1)$$

Дана похідна характеризує швидкість зміни функції u в напрямі вектора $\bar{l}$. Якщо функція $u = f(x, y, z)$ диференційована в точці *M*, то одержимо

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma, \qquad (2)$$

де $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ – напрямні косинуси вектора $\bar{l}$.

Приклад 1. Знайти похідну функції $u = x^2 + 2y^2 - xyz$ за напрямом вектора $\bar{l} = 2\bar{i} - 2\bar{j} + \bar{k}$ у точці $A(1;1;1)$.

Розв'язання. У відповідності з формулою (2) можемо записати

$$\left(\frac{\partial u}{\partial l}\right)_A=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_A\cos\alpha+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_A\cos\beta+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_A\cos\gamma\ .$$

Знаходимо

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x-yz,\quad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_A=1;\quad \frac{\partial u}{\partial y}=4y-xz,$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_A=3;\quad \frac{\partial u}{\partial z}=-xy,\quad \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_A=-1.$$

Нагадаємо, що напрямні косинуси вектора $\overline{a}(a_x,a_y,a_z)$ визначаються за формулами: $\cos\alpha=\frac{a_x}{|\overline{a}|}, \cos\beta=\frac{a_y}{|\overline{a}|}, \cos\gamma=\frac{a_z}{|\overline{a}|}$. Знаходимо $\cos\alpha=\frac{2}{3}, \cos\beta=-\frac{2}{3}, \cos\gamma=\frac{1}{3}$. Можемо записати

$$\left(\frac{\partial u}{\partial l}\right)_A=1\cdot\frac{2}{3}+3\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)+(-1)\cdot\frac{1}{3}=-\frac{5}{3}.$$

Одержане значення $\frac{\partial u}{\partial l}<0$, що означає спадання функції в напрямку вектора $\overline{l}$.

Градієнтом функції $u=f(x,y,z)$ в точці A називають вектор $\operatorname{grad}u$, координатами якого є значення частинних похідних цієї функції в даній точці:

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}. \tag{3}$$

Позначимо через $\bar{l}_0$ одиничний вектор, напрям якого співпадає з напрямом вектора $\bar{l}$. Як відомо, координатами цього вектора будуть напрямні косинуси вектора $\bar{l}$, тобто

$$\bar{l}_0 = \cos\alpha \cdot \bar{i} + \cos\beta \cdot \bar{j} + \cos\gamma \cdot \bar{k} \tag{4}$$

На основі формул (2), (3), (4) отримуємо зв'язок між градієнтом і похідною за напрямом:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = (\operatorname{grad} u, \bar{l}_0) = |\operatorname{grad} u| \cos\varphi , \tag{5}$$

де φ – кут між векторами $\bar{l}$ і $\operatorname{grad} u$.

Зі співвідношень (5) випливає, що:

1) похідна функції u за напрямом вектора $\bar{l}$ дорівнює проекції вектора $\operatorname{grad} u$ на напрям вектора $\bar{l}$;

2) якщо напрям вектора $\bar{l}$ співпадає з напрямом вектора $\operatorname{grad} u$ (у цьому випадку $\varphi = 0$), то похідна за напрямом приймає найбільше значення:

$$\max \frac{\partial u}{\partial l} = |\operatorname{grad} u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2} ;$$

3) якщо вектор $\bar{l}$ перпендикулярний до вектора $\mathrm{grad}\,u$, то похідна за напрямом дорівнює нулю.

Приклад 2. Знайти напрям і швидкість найшвидшого зростання функції $u = x^2 + 2y^2 - xyz$ в точці $A(1;1;1)$.

Розв'язання. Напрям найшвидшого зростання визначається напрямом вектора $\mathrm{grad}\,u$, а швидкість зростання (у цьому напрямі) – його модулем. Тому знайдемо градієнт даної функції в точці A та його модуль:

$$\mathrm{grad}\,u = (2x - yz)\vec{i} + (4y - xz)\vec{j} + (-xy)\vec{k};$$

$$\left(\mathrm{grad}\,u\right)_A = \bar{i} + 3\bar{j} - \bar{k}; \quad |\left(\mathrm{grad}\,u\right)_A| = \sqrt{11}\,.$$

Отже, дана функція максимально зростає в напрямі вектора $\bar{l} = \bar{i} + 3\bar{j} - \bar{k}$; швидкість зростання при цьому дорівнює $\sqrt{11}$.

У випадку функції двох змінних $z = f(x, y)$, аналогічно попередньому:

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta; \quad \mathrm{grad}\,z = \frac{\partial z}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\vec{j}. \tag{7}$$