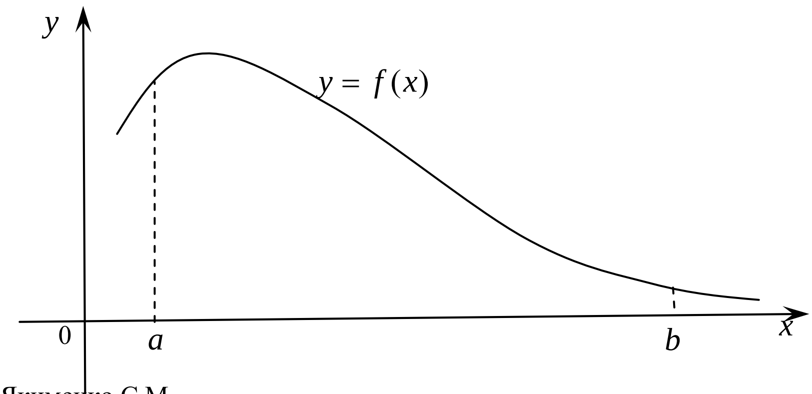
Невласні інтеграли.

Вводячи визначений інтеграл як границю інтегральних сум, ми вважали, що відрізок інтегрування скінчений, а підінтегральна функція обмежена на цьому відрізку. Якщо хоча б одна з цих умов не виконується, то прийняте раніше означення визначеного інтегралу втрачає зміст. Але можна узагальнити означення визначеного інтегралу.

Невласні інтеграли з нескінченими межами інтегрування (невласні інтеграли першого роду).

Розглянемо функцію $y = f(x)$ на проміжку $[a, +\infty)$.



Означення. Нехай функція $f(x)$ визначена на $[a, +\infty)$ і інтегровна на будь-якому відрізку $[a, b]$, тобто існує визначений інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ при будь-якому $b > a$. Тоді, якщо існує скінчена границя $\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$, то її називають невласним інтегралом з нескінченою межею інтегрування (невласним інтегралом першого роду) і позначають

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx.$$

В цьому випадку кажуть, що невласний інтеграл існує або збігається. Якщо ж ця границя не існує або дорівнює нескінченості, то тоді невласний інтеграл не існує або розбігається.

Аналогічно вводиться невласний інтеграл на $(-\infty, b]$.

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)dx.$$

Аналогічними міркуваннями можна прийти до невласних інтегралів з двома нескінченними межами інтегрування:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{\infty} f(x)dx,$$

де c - будь-яке число, при цьому вважається, що обидва невласні інтеграли існують.

Розглянемо геометричний зміст невласних інтегралів першого роду.Нехай $f(x) \geq 0$. Тоді невласний інтеграл

$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ виражає скінчену площу нескінченої області, яка обмежена зверху кривою $y = f(x)$, знизу віссю Ox, зліва прямою $x = a$.

Зауваження. При розв'язуванні задач, пов'язаних з невласними інтегралами першого роду допускається такий формальний запис:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a),$$

де позначено $F(+\infty) = \lim\limits_{a\to+\infty} F(x)$.

Приклад. Обчислити невласний інтеграл першого роду: $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^n}$, де n - будь-яке число.

Розв'язання. Розглянемо два випадки.

а) Якщо $n \neq 1$, то

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^n} = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_1^{b} \frac{dx}{x^n} = \lim_{b\to+\infty} \frac{x^{1-n}}{1-n}\Big|_1^b = \lim_{b\to+\infty} \frac{b^{1-n}-1}{1-n} = \begin{cases} \frac{-1}{1-n}, & \text{при} \quad n>1, \quad \text{інтеграл збігається,} \\ \infty, & \text{при} \quad n<1, \quad \text{інтеграл розбігається.} \end{cases}$$

б) Якщо $n = 1$, то $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_1^{b} \frac{dx}{x} = \lim\limits_{b\to+\infty} \ln x\Big|_1^b = \lim\limits_{b\to+\infty} \ln b = \infty$. Інтеграл розбігається.

Приклад. Обчислити невласний інтеграл першого роду: $I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x dx}{1+x^2}$.

Розв'язання. Розіб'ємо інтеграл на два інтеграли:

$$I = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{\operatorname{arctg} x dx}{1+x^2} + \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x dx}{1+x^2}.$$

Обчислимо перший інтеграл:

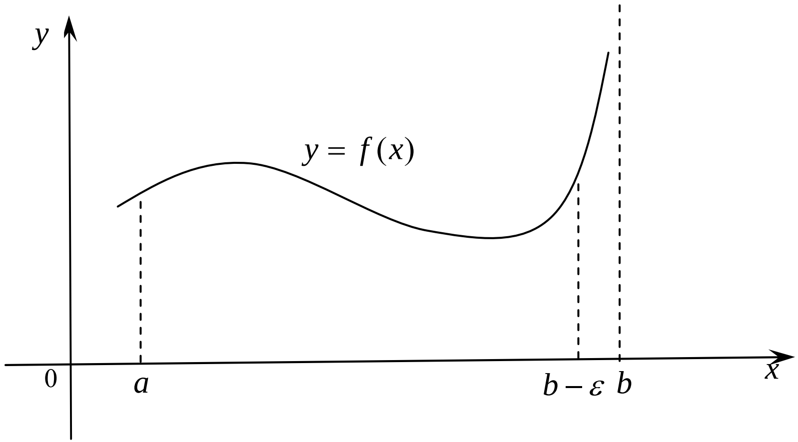
$$\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{\operatorname{arctg} x dx}{1+x^2} = \lim_{a \to -\infty} \int\limits_{a}^{0} \frac{\operatorname{arctg} x dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \lim_{a \to -\infty} \operatorname{arctg}^2 x \Big|_{a}^{0} = -\frac{1}{2} \lim_{a \to -\infty} \operatorname{arctg}^2 a = -\frac{\pi^2}{8}.$$

Обчислимо другий інтеграл:

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x dx}{1+x^2} = \lim_{b \to +\infty} \int\limits_{0}^{b} \frac{\operatorname{arctg} x dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \lim_{b \to +\infty} \operatorname{arctg}^2 x \Big|_{0}^{b} = \frac{1}{2} \lim_{b \to +\infty} \operatorname{arctg}^2 b = \frac{\pi^2}{8}.$$

Тоді $I = -\frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi^2}{8} = 0$. Отже, невласний інтеграл збігається і дорівнює нулю.

Невласні інтеграли від необмежених функцій (невласні інтеграли другого роду).



Розглянемо функцію $y = f(x)$ на проміжку $\left[a, b\right)$. Точка $x = b$ називається особливою, якщо функція необмежена в будь-якому околі цієї точки, але обмежена на будь-якому відрізку $\left[a, b-\varepsilon\right]$, який знаходиться в $\left[a, b\right)$. Нехай на будь-якому відрізку $\left[a, b-\varepsilon\right]$ функція $y = f(x)$ інтегровна, тобто існує визначений інтеграл $\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ при будь-якому $\varepsilon > 0$, такому, що $b - \varepsilon > a$. Тоді, якщо існує скінчена границя

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx ,$$

то її називають невласним інтегралом від необмеженої функції (невласним інтегралом другого роду) і позначають

$$\int\limits_a^{b} f(x)dx .$$

В цьому випадку кажуть, що невласний інтеграл існує або збігається. Якщо ж ця границя не існує або дорівнює нескінченості, то тоді невласний інтеграл не існує або розбігається.

Аналогічно вводиться невласний інтеграл другого роду, якщо $x = a$ - особлива точка.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{a\to 0+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx .$$

Якщо функція необмежена в околі особливої точки $c \in [a, b]$, то при умові існування обох інтегралів, одержимо

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx .$$

Якщо a і b - особливі точки, одержимо

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^l f(x)dx + \int_l^b f(x)dx ,$$

де l - будь-яка точка, яка належить відрізку $[a, b]$, при умові, що обидва інтеграли в правій частині формули існують.

<u>Приклад</u>. Обчислити невласний інтеграл другого роду: $\int_0^1 \frac{dx}{x^n}$, де $n > 0$ - число.

<u>Розв'язання</u>. Особлива точка $x = 0$. Розглянемо два випадки.

а) Якщо $n \neq 1$, то

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^n} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^n} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{x^{1-n}}{1-n}\Big|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{1-\varepsilon^{1-n}}{1-n} = \begin{cases} \infty, & \text{при} \quad n>1, \quad \text{інтеграл розбігається,} \\ \dfrac{1}{1-n}, & \text{при} \quad 0<n<1, \quad \text{інтеграл збігається.} \end{cases}$$

б) Якщо $n=1$, то $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0+} \ln x\Big|_{\varepsilon}^{1} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0+}(-\ln\varepsilon) = \infty$. Інтеграл розбігається.

<u>Приклад</u>. Обчислити невласний інтеграл другого роду: $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

<u>Розв'язання</u>. Особлива точка $x=1$.

$$\int\limits_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_{1+\varepsilon}^{e}(\ln x)^{\frac{1}{2}}\,d(\ln x) = \lim_{\varepsilon\to 0+} 2\sqrt{\ln x}\,\Big|_{1+\varepsilon}^{e} = \lim_{\varepsilon\to 0+} 2\left(1-\sqrt{\ln(1+\varepsilon)}\right) = 2.$$

Інтеграл збігається.

<u>Приклад</u>. Обчислити невласний інтеграл другого роду: $\int\limits_0^2 \frac{dx}{x-1}$.

<u>Розв'язання</u>. Особлива точка $x=1$, яка знаходиться всередині відрізка інтегрування $[0, 2]$. Тому потрібно розглянути окремо інтеграли $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x-1}$ і $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x-1}$. Обчислимо перший інтеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x-1} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_1^{1-\varepsilon} \frac{dx}{x-1} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0+} \ln|x-1|\Big|_0^{1-\varepsilon} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0+} \ln\varepsilon = -\infty$. Так як цей інтеграл розбігається (не існує), то другий інтеграл

можна не обчислювати, зробивши висновок, що заданий інтеграл $\int_0^2 \frac{dx}{x-1}$ розбігається.

Ознаки порівняння невласних інтегралів.

В багатьох випадках буває достатньо встановити, збігається чи розбігається заданий невласний інтеграл, і оцінити його значення.

Перша ознака порівняння. Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні на проміжку $[a, +\infty)$ і задовольняють на ньому умові $0 \le f(x) \le g(x)$, то із збіжності інтеграла $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ випливає збіжність інтеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, а із розбіжності інтеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ випливає розбіжність інтеграла $\int_a^{+\infty} g(x)dx$.

Зауваження. Аналогічну ознаку порівняння для невласних інтегралів другого роду можна сформулювати таким чином: якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні на проміжку $(a, b]$ і для всіх точок x із деякого інтервала $(a, a+\varepsilon)$ виконується умова $0 \le f(x) \le g(x)$, то із збіжності інтеграла $\int_a^b g(x)dx$ випливає збіжність інтеграла $\int_a^b f(x)dx$, а із розбіжності інтеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ випливає розбіжність інтеграла $\int\limits_a^b g(x)dx$.

<u>Друга ознака порівняння.</u> Якщо існує скінчена границя $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = A \neq 0,$ то невласні інтеграли $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ і $\int\limits_b^{+\infty} g(x)dx$ збігаються або розбігаються одночасно (хоча в випадку збіжності їх значення можуть суттєво відрізнятися, навіть якщо $A = 1$ і $a = b$).

<u>Приклад</u>. Дослідити на збіжність невласний інтеграл першого роду: $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2\left(1+e^{-x}\right)}$.

<u>Розв'язання</u>. Порівняємо підінтегральну функцію $\frac{1}{x^2\left(1+e^{-x}\right)}$ з функцією $\frac{1}{x^2}$ на проміжку $\left[1, +\infty\right)$.

$$\frac{1}{x^2\left(1+e^{-x}\right)} < \frac{1}{x^2} .$$

Так як невласний інтеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ збігається (розглядали раніше), то збігається і заданий інтеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2\left(1+e^{-x}\right)}$.

Приклад. Дослідити на збіжність невласний інтеграл першого роду: $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}dx}{1+x}$.

Розв'язання. Розглянемо функцію $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ і порівняємо її з підінтегральною функцією.

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{x+x} \le \frac{\sqrt{x}}{1+x}, \qquad (1 \le x < +\infty).$$

Так як невласний інтеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{2\sqrt{x}}$ розбігається (розглядали раніше), то розбігається і заданий інтеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}dx}{1+x}$.

Раніше ми розглядали невласні інтеграли від невід'ємних функцій. Для випадку підінтегральної функції, яка змінює знак, сформулюємо теорему.

Теорема. Якщо невласний інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ збігається, то збігається і інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$, який буде називатися абсолютно збіжним.

Означення. Якщо невласний інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ розбігається, а інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ збігається, то будемо мати неабсолютну збіжність.

Приклад. Дослідити на збіжність невласний інтеграл першого роду: $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x^3}$.

Розв’язання. Підінтегральна функція знакозмінна, тому розглянемо інтеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x^3}\right| dx$. Порівняємо підінтегральну функцію з функцією $\left|\frac{1}{x^3}\right|$ на проміжку $[1, +\infty)$.

$$\left|\frac{\sin x}{x^3}\right| \le \left|\frac{1}{x^3}\right|.$$

Так як невласний інтеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^3}$ збігається (розглядали раніше), то збігається і інтеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x^3}\right| dx$ (за першою ознакою порівняння). Так як збігається інтеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x^3}\right| dx$, то за теоремою буде збігатися і заданий інтеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x^3}$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисление. - М.: Наука, 1980, 1988.
2. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика: Задачник. – М.: Наука, 1982.

3. Виленкин Н.Я., Шварцбурд С.К. Математический анализ. - М.: Просвещение, 1973.
4. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. - М.: Просвещение, 2002.
5. Кудрявцев Л.Д. Математический анализ. Т. 1,2. - М.: Наука, 1981. – 687 с.
6. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. - М.: Высшая школа, 1998.
7. Кудрявцев Л.Д. и др. Сборник задач по математическому анализу (ч.1 и 2). - М.: Высшая школа, 1998.
8. Миносцев В.Б. Курс высшей математики. - М.: РИЦ МГИУ, 2001.
9. Миносцев В.Б. Сборник типовых расчётов по высшей математике. - М.: РИЦ МГИУ, 2002.
10. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. Т. 1,2. - М.: Наука, 1985. – 480с.
11. Архипов Г.И. Лекции по математическому анализу. - М.: Высшая школа, 2000.
12. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М.: Наука, 1990. – 624с.
13. Ильин В.А, Поздняк Э.Г. Основы математического анализа. - М.: Высшая школа, 1994.
14. Кузнецов Л.А. Сборник задач по высшей математике (типовые расчёты). Учебное пособие для втузов. - М.: Высш. шк., 1983.
15. Мантуров О.В. Матвеев Н.М. Курс высшей математики. - М.: Высшая школа, 1996.
16. Курант Р. Курс дифференциального и интегрального исчисления. - М.: Наука, 1967.
17. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука. 1985. – 383с.
18. Ляшко И.И., Боярчук А.К., Гай Я.Г., Головач Г.П. Математический анализ в примерах и задачах. – М.: URSS, 2001. – 696с.
19. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике.- М.: Наука, 1967. – 360с.
20. Никольский С.М. Курс математического анализа. – М.: Наука, 1985. – 222с.
21. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. В 3 ч./ Под ред. А.П. Рябушко. – М.: Высшая школа, 1991. –

270с.
22. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах: В 2 ч. – М.: Высш. шк., 1986.
23. Каплан И.А. Практические задания по высшей математике. – Харьковский университет, 1971.
24. Шипачев В.С. Высшая математика. – М.: Высш. шк., 1985.
25. Овчинников П.П., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. Вища математика.Ч. 1,2. – К.: Техніка, 2000.
26. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – М.: Наука. – Т.1. -1966. - 608с., Т.2. – 1966. – 800с., Т.3. – 1969. – 656с.
27. Тевяшев А.Д., Литвин А.Г. Высшая математика. Общий курс. Сборник задач и упражнений. – Харьков: Рубикон, 1999.