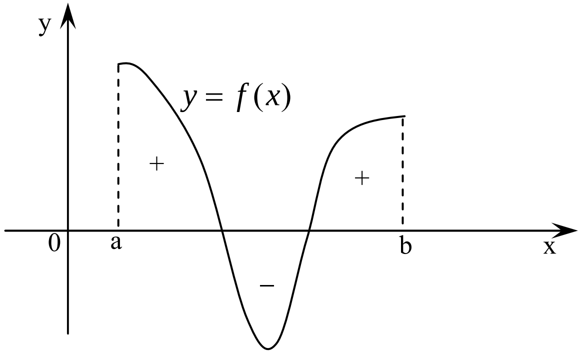
# Застосування визначених інтегралів.

## Обчислення площ плоских фігур.

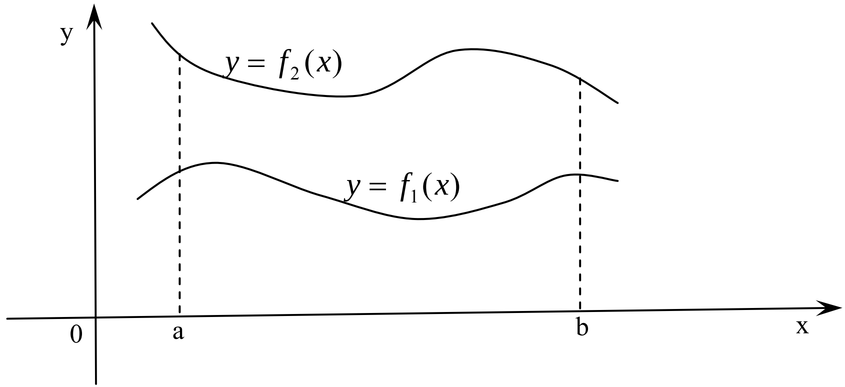
Відомо, що визначений інтеграл на відрізку $[a, b]$ представляє собою площу криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $f(x) \geq 0$. Якщо графік розташований нижче осі $Ox$, тобто $f(x) \leq 0$, то і визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx \leq 0$.



Для знаходження сумарної площі використовується формула $S = \left| \int_a^b f(x)dx \right|$.

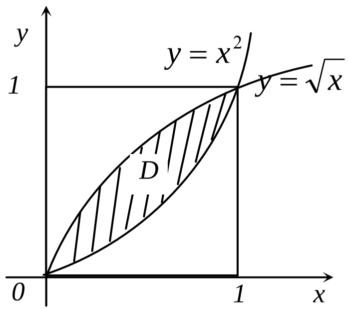
Якщо фігура обмежена знизу і зверху графіками функцій $y = f_1(x)$ і $y = f_2(x)$, $f_1(x) \le f_2(x)$, $a \le x \le b$, то площа фігури буде дорівнювати

$$S = \int_a^b f_2(x)dx - \int_a^b f_1(x)dx = \int_a^b \left[ f_2(x) - f_1(x) \right] dx.$$



Приклад. Обчислити площу фігури, обмеженої кривими $y=\sqrt{x}$ і $y=x^2$.

Розв'язання. Зробимо малюнок.




Знаходимо точки перетину кривих:

$$\begin{cases} y=\sqrt{x}, \\ y=x^2. \end{cases}$$

Звідси: $\sqrt{x}=x^2$; $x=x^4$;

$x^4-x=0$; $x(x^3-1)=0$.

Отже, $x_1=0$ і $x_2=1$.

Тоді

$$S=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)dx=\frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_0^1-\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\ (\text{од}^2).$$

Знайдемо площу криволінійної трапеції у випадку, коли крива задана рівняннями у параметричній формі:

$$\begin{cases} x=\varphi(t); \\ y=\psi(t). \end{cases}$$

де $\alpha\le t\le\beta$ і $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$. Нехай ці рівняння визначають деяку функцію $y=f(x)$ на відрізку $[a,b]$ і, отже, площа, криволінійної трапеції може бути обчислена за розглянутою вище формулою. Зробимо заміну змінної:

$$x = \varphi(t),\ dx = \varphi'(t)dt\ .$$

Тоді одержимо

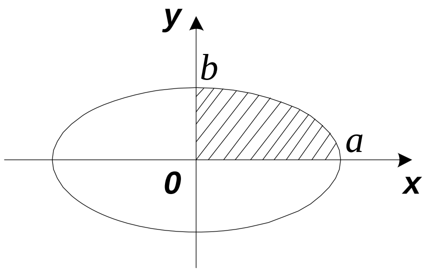
$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t)\varphi'(t)dt\ .$$

Це і є формула для обчислення площі криволінійної трапеції, коли крива задана рівняннями у параметричній формі.

Приклад. Обчислити площу еліпса

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2\pi\ .$$

Розв'язання. Зробимо малюнок.



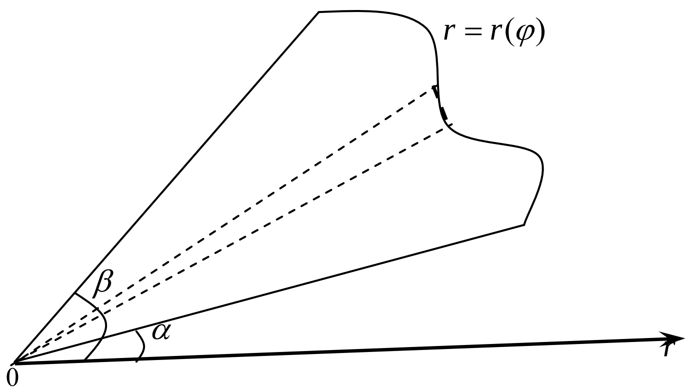

Обчислимо площу четвертої частини еліпса і помножимо на 4:

$$S_{\text{ел}} = 4\int_{\pi/2}^{0} b\sin t(a\cos t)'\,dt = 4\int_{\pi/2}^{0} b\sin t(-a\sin t)dt =$$

$$= 4ab\int_{0}^{\pi/2} \sin^2 t dt = 2ab\int_{0}^{\pi/2} (1-\cos 2t)dt =$$

$$= 2ab\left( t - \frac{1}{2}\sin 2t \right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \pi ab \text{ (од}^2\text{)}.$$

Площа криволінійного сектора в полярній системі координат.




Розглянемо в полярній системі координат криву $r = r(\varphi), \quad \alpha \le \varphi \le \beta$. Обчислимо площу криволінійного сектора, обмеженого кривою $r = r(\varphi)$ і радіус-векторами $\varphi = \alpha, \varphi = \beta$. Розіб'ємо сектор на $n$ частин

$$\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \varphi_2 < \dots\dots\dots < \varphi_n = \beta.$$

Позначимо через $\tilde{r}_i$ довжину радіус-вектора, який відповідає якому-небудь куту $\tilde{\varphi}_i \in [\varphi_{i-1}, \varphi_i]$. Площа маленьких секторів буде дорівнювати

$$S_i = \frac{1}{2}\tilde{r}_i^{\,2}\Delta\varphi_i, \quad \Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}.$$

Просумувавши, одержимо площу "ступінчатого" сектора

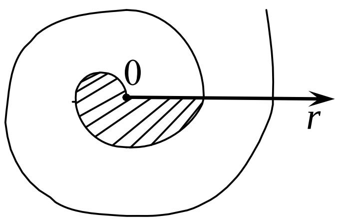
$$S_n = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\tilde{r}_i^{\,2}\Delta\varphi_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[r(\tilde{\varphi}_i)\right]^2\Delta\varphi_i.$$

Ця сума буде інтегральною сумою для функції $[r(\varphi)]^2$ на відрізку $[\alpha, \beta]$, а границя при $\max\Delta\varphi_i \to 0$ буде визначеним інтегралом. Тобто площа криволінійного сектора буде обчислюватися за формулою

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\left[r(\varphi)\right]^2 d\varphi.$$

Приклад. Обчислити площу, яка обмежена першим витком спіралі Архімеда $r = a\varphi$ .

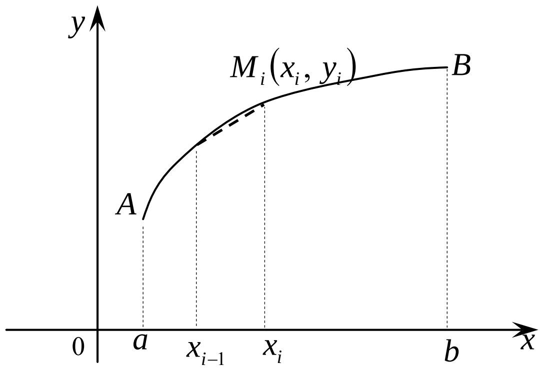
Розв'язання. Зробимо малюнок.




$$S = \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi}(a\varphi)^2 d\varphi = \frac{a^2}{2}\int_{0}^{2\pi}\varphi^2 d\varphi = \frac{a^2}{2}\frac{\varphi^3}{3}\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{a^2}{2}\frac{8\pi^3}{3} = \frac{4}{3}\pi^3 a^2 \text{ (од}^2\text{)}.$$

## <u>Обчислення довжини дуги кривої.</u>

Нехай потрібно обчислити довжину дуги кривої $AB$, яка задана рівнянням $y = f(x)$. Розіб'ємо дугу кривої на $n$ довільних частин. Одержимо ламану, границя якої буде прямувати до кривої.




<u>Означення</u>. Довжиною дуги $AB$ називається границя, до якої прямує довжина вписаної ламаної, при умові, що довжина її найбільшої ланки прямує до нуля.

Позначимо координати кожної точки $M_i(x_i, y_i)$. Тоді довжина кожної ланки ламаної буде дорівнювати

$$l_i = \sqrt{(x_{i-1} - x_i)^2 + (y_{i-1} - y_i)^2}.$$

За теоремою Лагранжа маємо

$$f(x_{i-1}) - f(x_i) = f'(\xi_i)(x_{i-1} - x_i), \quad x_{i-1} \le \xi_i \le x_i.$$

Тоді $l_i = \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2}\Delta x_i, \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Довжина всієї ламаної буде дорівнювати

$$L_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2}\Delta x_i.$$

Права частина представляє собою інтегральну суму для функції $\sqrt{1+[f(x)]^2}$ . Отже, довжина дуги кривої обчислюється

$$L = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+[f'(\xi_i)]^2}\Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}dx.$$

<u>Зауваження 1</u>. Якщо рівняння кривої задане в параметричному вигляді

$$\begin{cases} x = \varphi(t); \\ y = \psi(t). \end{cases} \qquad \alpha \le t \le \beta,$$

то одержуємо

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}dt .$$

<u>Зауваження 2</u>. Якщо крива задана в полярних координатах рівнянням $r = r(\varphi), \quad \alpha \le \varphi \le \beta$ , то одержуємо

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{[r(\varphi)]^2 + [r'(\varphi)]^2}d\varphi .$$

<u>Приклад:</u> Знайти довжину дуги кривої $y = \ln x$ від точки $\sqrt{3}$ до точки $\sqrt{8}$ .

Розв'язання. Знайдемо похідну $y' = \dfrac{1}{x}$ і використаємо формулу

$$L = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\,dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,dx = \left| \begin{array}{l} x = \operatorname{tg} t;\ t = \operatorname{arctg} x; \\ dx = \dfrac{dt}{\cos^2 t}; \\ x = \sqrt{3}, \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{3}, \\ x = \sqrt{8}, \Rightarrow t = \operatorname{arctg}\sqrt{8}. \end{array} \right| =$$

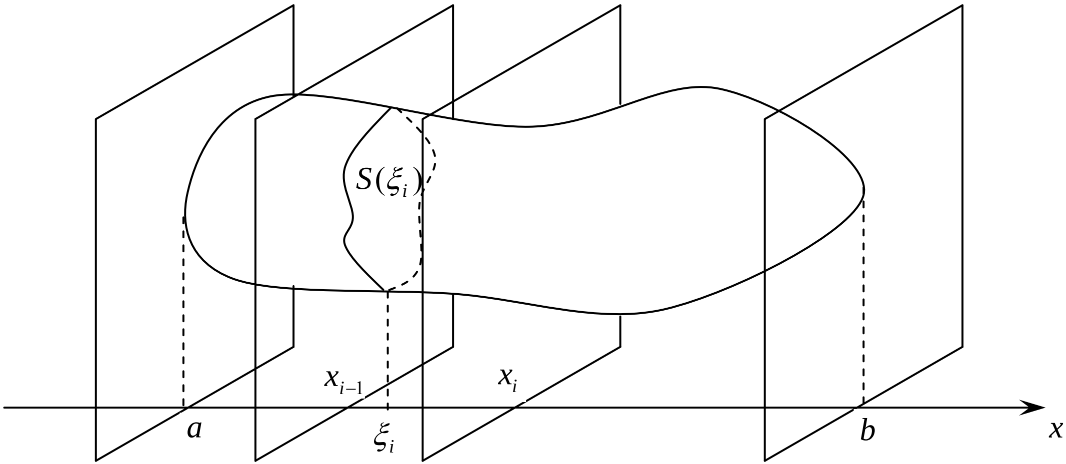
$$= \int_{\pi/3}^{\operatorname{arctg}\sqrt{8}} \frac{\sqrt{\operatorname{tg}^2 t + 1}}{\operatorname{tg} t} \frac{dt}{\cos^2 t} = \int_{\pi/3}^{\operatorname{arctg}\sqrt{8}} \frac{dt}{\sin t \cdot \cos^2 t} = \int_{\pi/3}^{\operatorname{arctg}\sqrt{8}} \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\sin t \cdot \cos^2 t}\,dt = \int_{\pi/3}^{\operatorname{arctg}\sqrt{8}} \left(\frac{\sin t}{\cos^2 t} + \frac{1}{\sin t}\right) dt =$$

$$= \left(\frac{1}{\cos t} + \ln\left|\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right|\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\operatorname{arctg}\sqrt{8}} = \frac{1}{\cos\left(\operatorname{arctg}\sqrt{8}\right)} + \ln\left|\operatorname{tg}\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{8}}{2}\right| - \frac{1}{\cos\dfrac{\pi}{3}} - \ln\left|\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\right| =$$

$$= \frac{1}{\cos\left(\arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+8}}\right)} + \ln\left|\frac{1-\cos\left(\operatorname{arctg}\sqrt{8}\right)}{\sin\left(\operatorname{arctg}\sqrt{8}\right)}\right| - 2 - \ln\frac{\sqrt{3}}{3} = 3 + \ln\left|\frac{1-\cos\left(\arccos\dfrac{1}{3}\right)}{\sin\left(\arcsin\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)}\right| - 2 - \ln\frac{1}{\sqrt{3}} =$$

$$= 1 + \ln\frac{1}{\sqrt{2}} - \ln\frac{1}{\sqrt{3}} = 1 + \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}.$$

Обчислення об'єму тіла по відомих площах його паралельних перетинів.




Розглянемо деяке трьохмірне тіло. Обчислимо об’єм цього тіла, якщо відома площа будь-якого перетину цього тіла площиною, яка перпендикулярна до осі $Ox$. Площа цього перетину буде функцією від $x$:

$$S = S(x).$$

Розіб'ємо тіло поперечними перетинами, що проходять через точки $x_i$ розбивки відрізка $[a,b]$. В кожному відрізку $[x_{i-1}, x_i]$ виберемо довільну точку $\xi_i$ і побудуємо циліндричні тіла, твірні яких паралельні осі $Ox$, а напрямні представляють собою контури перетину тіла площиною $x = \xi_i$.

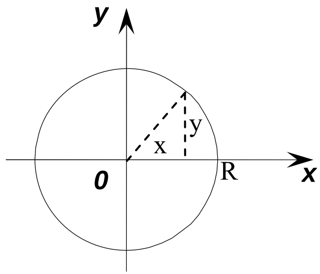
Об’єм одного такого циліндра дорівнює $V_i = S(\xi_i)\Delta x_i$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, а об’єм всіх циліндрів $V_n = \sum_{i=1}^{n} S(\xi_i)\Delta x_i$.

$V_n$ - представляє собою інтегральну суму для функції $S(x)$.Границя цієї суми при $\max \Delta x_i \to 0$ називається об’ємом тіла і обчислюється за формулою

$$V = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} S(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b S(x)dx .$$

Зауваження. Недоліком цієї формули є те, що для знаходження об'єму необхідно знати функцію $S(x)$, що досить проблематично для складних тіл.

Приклад: Знайти об'єм кулі радіуса $R$.




Розв'язання. У поперечних перетинах кулі одержуємо кола змінного радіуса $y$. Залежно від змінної координати $x$ цей радіус виражається формулою $\sqrt{R^2 - x^2}$.

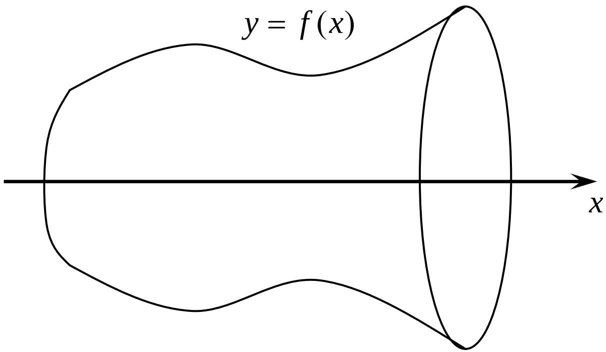
Тоді функція площ перетинів має вигляд: $S(x) = \pi\left(R^2 - x^2\right)$.

Обчислимо об'єм кулі:

$$V=\int_{-R}^{R}\pi(R^2-x^2)dx=\pi(R^2x-\frac{x^3}{3})\Big|_{-R}^{R}=\pi\left(R^3-\frac{R^3}{3}\right)-\pi\left(-R^3+\frac{R^3}{3}\right)=\frac{4\pi R^3}{3}..$$

Обчислення об'єму тіл обертання.

Розглянемо криву, задану рівнянням $y=f(x)$. Припустимо, що функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$. Якщо відповідну їй криволінійну трапецію обертати навколо осі $Ox$, то одержимо так зване тіло обертання.




Площа довільного перетину тіла площиною, яка перпендикулярна до осі $Ox$, є площа круга $S=\pi y^2=\pi[f(x)]^2$. Застосувавши формулу попереднього параграфа, одержимо формулу для обчислення об'єму тіла обертання

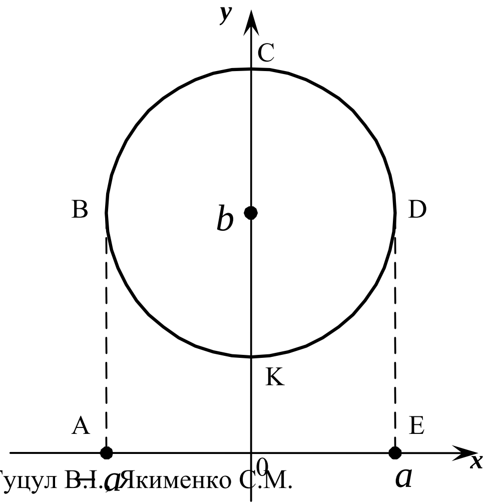
$$V=\pi\int_a^b\left[f(x)\right]^2 dx.$$

Приклад: Дуга синусоїди $y=\sin x$ від $x=0$ до $x=\pi$ обертається навколо осі $Ox$. Знайти об'єм тіла обертання.

Розв'язання. Застосувавши попередню формулу, одержимо

$$V=\pi\int_0^\pi \sin^2 x dx=\pi\int_0^\pi \frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{\pi}{2}\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Bigg|_0^\pi=\frac{\pi^2}{2}\text{ (од.}^3\text{)}$$

Приклад. Обчислити об'єм тора. (Тором називається тіло, що одержується при обертанні кола радіуса $a$ навколо осі, що лежить у його площині на відстані $b$ від центра кола ($b\geq a$).)




Розв'язання. Розглянемо коло радіуса $a$, яке обертається навколо осі $Ox$.

Об'єм тора можна представити як різницю об'ємів тіл, отриманих від обертання криволінійних трапецій $ABCDE$ і $ABKDE$ навколо осі $Ox$.

Рівняння кола із центром у точці $(0;b)$ й радіуса $a$ має вигляд

$$x^2+(y-b)^2=a^2.$$

При цьому рівняння верхнього півкола $BCD$

$$y = y_1(x) = b + \sqrt{a^2 - x^2},$$

а рівняння нижнього півкола $BKD$

$$y = y_2(x) = b - \sqrt{a^2 - x^2}.$$

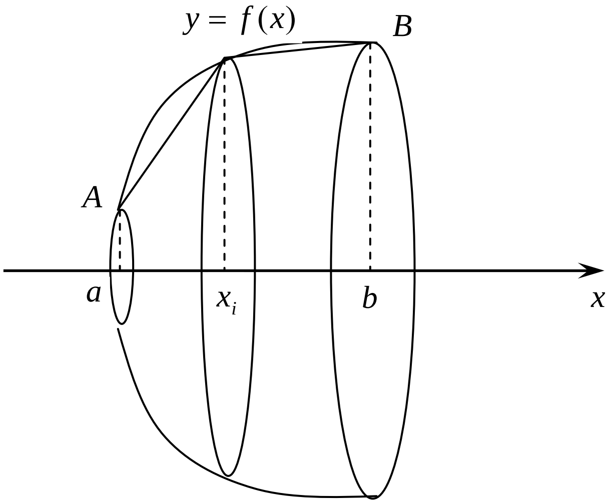
Використовуючи формулу для обчислення об'єму тіла обертання, одержуємо формулу для обчислення об'єму тора

$$V_{\text{тора}} = 2\pi\int_0^a y_1^2(x)\,dx - 2\pi\int_0^a y_2^2(x)\,dx = 2\pi\int_0^a \left[\left(b + \sqrt{a^2 - x^2}\right)^2 - \left(b - \sqrt{a^2 - x^2}\right)^2\right]dx =$$

$$= 8\pi b\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \left| \begin{array}{l} x = a\sin t,\ t = \arcsin\frac{x}{a}, \\ dx = a\cos t dt, \\ x = 0, \Rightarrow t = 0, \\ x = a, \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}. \end{array} \right| = 8\pi b\int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}\cdot a\cos t dt =$$

$$= 8\pi a^2 b\int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = 8\pi a^2 b\int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2t}{2}dt = 4\pi a^2 b\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi^2 a^2 b \text{ (од.}^3\text{)}.$$

Обчислення площі поверхні тіла обертання.




Означення: Площею поверхні обертання кривої $AB$ навколо заданої осі називається границя, до якої прямують площі поверхонь обертання ламаних, вписаних у криву $AB$, при прямуванні до нуля найбільшої довжини ланки цієї ламаної.

Якщо крива задана в прямокутній декартовій системі координат рівнянням $y = f(x), \quad a \le x \le b$, то площа поверхні тіла обертання обчислюється за формулою

$$S_{\text{пов. об.}} = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx.$$

Якщо крива задана параметричними рівняннями $x=\varphi(t),\ y=\psi(y),\ \alpha \le t \le \beta$, то площа поверхні тіла обертання обчислюється за формулою

$$S_{\text{пов. об.}} = 2\pi\int_{\alpha}^{\beta}\psi(t)\sqrt{\left[\varphi'(t)\right]^2 + \left[\psi'(t)\right]^2}\,dt.$$

Якщо крива задана в полярній системі координат рівнянням $r = r(\varphi),\ \ \alpha \le \varphi \le \beta$, то площа поверхні тіла обертання обчислюється за формулою

$$S_{\text{пов. об.}} = 2\pi\int_{\alpha}^{\beta}r(\varphi)\sqrt{\left[r(\varphi)\right]^2 + \left[r'(\varphi)\right]^2}\,d\varphi.$$

<u>Обчислення роботи змінної сили.</u>

Нехай матеріальна точка переміщується під дією змінної сили $F(x)$ вздовж осі $Ox$. Обчислимо роботу, виконаною цією силою по переміщенню матеріальної точки вздовж осі $Ox$ із точки $a$ до точки $b$. Розіб'ємо відрізок $[a, b]$ на $n$ частин. Якщо довжина відрізка мала, то значення сили в точках відрізка $[x_{i-1}, x_i]$ мало відрізняються від її значення в будь-якій точці $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Тому роботу $A_i$, виконану силою $F$ на $[x_{i-1}, x_i]$, можна вважати наближено рівною роботі, виконаною на тому ж відрізку постійною силою $F(\xi_i)$, тобто

$$A_i \approx F(\xi_i)\Delta x_i.$$

Робрту сили на відрізку $[a, b]$ наближено можна записати

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)\Delta x_i.$$

Ця сума є інтегральною сумою для функції $F(x)$. Тому робота сили $F(x)$ на переміщенні $[a,b]$ обчислюється за формулою

$$A = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)\Delta x_i. = \int_a^b F(x)dx.$$

<u>Обчислення статичних моментів і моментів інерції плоских дуг і фігур.</u>

Нехай на площині $Oxy$ задана система матеріальних точок $A_i(x_i, y_i)$, $(i = 1, 2, \ldots\ldots n)$ з масами відповідно $m_i$.

<u>Означення.</u> Статичним моментом $M_x$ $(M_y)$ системи матеріальних точок відносно осі $Ox$ $(Oy)$ називається сума добутків мас цих точок на їх відстані до відповідної осі, тобто

$$M_x = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i, \quad \left( M_y = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i \right).$$

<u>Означення.</u> Моментом інерції $I_x$ $(I_y)$ системи матеріальних точок відносно осі $Ox$ $(Oy)$ називається сума добутків мас цих точок на квадрати їх відстані до відповідної осі, тобто

$$I_x = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i^2, \quad \left( I_y = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i^2 \right).$$

Будемо вважати, що маса рівномірно розподілена вздовж дуги і фігури з густиною $\gamma = 1$.

За статичні моменти і моменти інерції пплоских дуг і фігур приймаються відповідні моменти умовних мас, рівномірно розподілених вздовж цих дуг і фігур з густиною (лінійною або площинною), рівною одиниці.

Статичні моменти і моменти інерції дуги плоскої кривої $y = f(x), \quad (a \le x \le b)$ обчислюються за формулами:

$$M_x = \int_a^b y dL, \quad M_y = \int_a^b x dL, \quad I_x = \int_a^b y^2 dL, \quad I_y = \int_a^b x^2 dL,$$

де $dL = \sqrt{1 + \left[ f'(x) \right]^2} dx$ - диференціал дуги кривої.

Статичні моменти і моменти інерції криволінійної трапеції, обмеженої кривою $y = f(x)$, віссю $Ox$ і двома прямими $x = a$ і $x = b$ обчислюються за формулами

$$M_x = \frac{1}{2}\int_a^b y dS = \frac{1}{2}\int_a^b y^2 dx, \quad M_y = \int_a^b x dS = \int_a^b xy dx,$$

$$I_x = \frac{1}{4}\int_a^b y_3 dx, \quad I_y = \int_a^b x^2 dS = \int_a^b x^2 y dx,$$

де $dS = y dx$ - диференціал площі криволінійної трапеції.

Обчислення координат центру мас.

Координати центру мас однорідної дуги плоскої кривої $y = f(x), (a \le x \le b)$ обчислюються за формулами

$$x_C = \frac{1}{L}\int_a^b x dL = \frac{\int_a^b x\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}dx}{\int_a^b \sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}dx}, \quad x_C = \frac{M_y}{L},$$

$$y_C = \frac{1}{L}\int_a^b y dL = \frac{\int_a^b y\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}dx}{\int_a^b \sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}dx}, \quad y_C = \frac{M_x}{L}.$$

Координати центру мас однорідної криволінійної трапеції обчислюються за формулами

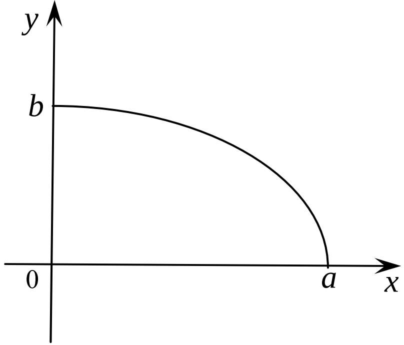
$$x_C = \frac{1}{S}\int_a^b xdS = \frac{1}{S}\int_a^b xydx = \frac{\int_a^b xydx}{\int_a^b ydx}, \quad x_C = \frac{M_y}{S},$$

$$y_C = \frac{1}{2S}\int_a^b ydS = \frac{1}{2S}\int_a^b y^2 dx = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b y^2 dx}{\int_a^b ydx}, \quad y_C = \frac{M_x}{S}.$$

Ці формули справедливі для будь-яких однорідних (які мають постійну густину в усіх точках) плоских дуг і фігур.

Приклад: Знайти координати центру мас однорідної фігури, яка обмежена дугою еліпса $x = a\cos t,\ y = b\sin t$, яка розміщена в першій четверті і осями координат.

Розв'язання. Зробимо малюнок.




$$x_C=\frac{1}{S}\int_0^a xydx=\frac{1}{S}\int_{\pi/2}^{0} a\cos t\cdot b\sin t\cdot(-a\sin t)dt=$$

$$=\frac{a^2b}{S}\int_0^{\pi/2}\sin^2 t\cos t dt=\frac{a^2b}{S}\frac{1}{3}\sin^3 t\Big|_0^{\pi/2}=\frac{a^2b}{3S}=\frac{4a}{3\pi}.$$

$$y_C=\frac{1}{2S}\int_0^a y^2dx=\frac{1}{2S}\int_{\pi/2}^{0} b^2\sin^2 t(-a\sin t)dt=\frac{2ab^2}{\pi ab}\int_{\pi/2}^{0}(1-\cos^2 t)d(\cos t)=$$

$$=\frac{2b}{\pi}\left(\cos t-\frac{1}{3}\cos^3 t\right)\Big|_{\pi/2}^{0}=\frac{4b}{3\pi}.$$

Координати центру мас $\left(\frac{4a}{3\pi};\ \frac{4b}{3\pi}\right)$.