

Лабораторна робота №2

Основні поняття функцій алгебри логіки (ФАЛ)

Теоретичні відомості

1. Способи задання комбінаційних функцій

ФАЛ можуть бути задані словесним описом, табличним, аналітичним, числовим або графічним способом.

Аналітичний спосіб задання ФАЛ полягає в тому, що логічна функція F задається у вигляді алгебраїчної рівності, у якій змінні x_j зв'язані між собою символами логічних операцій І, АБО, НЕ.

Існує дві основні форми запису логічних функцій в алгебраїчному вигляді, що називаються нормальними.

Перша - диз'юнктивна нормальна форма (ДНФ), яка є логічною сумою елементарних і неелементарних логічних добутоків (диз'юнкцією кон'юнкцій). При цьому в кожному з кон'юнкцій аргумент чи його заперечення входить не більше одного разу. Наприклад:

$$F(x_1, x_2, x_3) = x_1 \bar{x}_2 + x_2 x_3 + x_1 \bar{x}_2 x_3.$$

Друга - кон'юнктивна нормальна форма (КНФ), що являє собою логічний добуток елементарних і неелементарних логічних сум (кон'юнкція диз'юнкцій):

$$F(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2) (x_1 + \bar{x}_2 + x_3) (x_2 + x_3).$$

Елементарними називаються такі диз'юнкції або кон'юнкції, де число змінних менше повного числа змінних, від яких залежить функція. Ті кон'юнкції і диз'юнкції, які включають повне число змінних, називаються неелементарними.

$$F(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 x_2 x_3 + x_1 \bar{x}_2 x_3 + x_1 x_2 \bar{x}_3 + x_1 x_2 x_3.$$

Дана функція складається з кон'юнкцій, що об'єднані знаками диз'юнкції і включають у свій склад повний набір змінних (або їхнє заперечення), тобто складається з диз'юнкції неелементарних кон'юнкцій.

Запис ФАЛ у вигляді суми кон'юнкцій, які складаються з повного набору змінних, на яких функція дорівнює одиниці, називається повною диз'юнктивною нормальною формою (ПДНФ).

Таким чином, аналітичний спосіб задання функцій алгебри логіки полягає в зображенні їх формулами алгебри логіки. В результаті, будь-яка функція, задана таблично, може бути представлена в аналітичній формі за допомогою використання операцій І, АБО, НЕ, тобто може бути зображена у вигляді ФАЛ.

В деяких випадках для задання ФАЛ використовується так званий числовий спосіб. При цьому ФАЛ записується у вигляді логічної суми десяткових номерів наборів, на яких функція дорівнює одиниці. Наприклад:

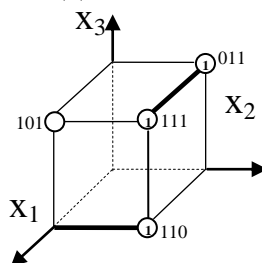
$$F(x_1, x_2, x_3) = 3 \vee 5 \vee 6 \vee 7 = \sum (3, 5, 6, 7).$$

або

$$F = \vee k_i^3, \text{ при } i=3, 5, 6, 7$$

де 3 - показник на кількість аргументів ФАЛ.

Графічний спосіб задання ФАЛ полягає в заданні



функції у вигляді n-мірного одиничного куба, вершинами якого є його значення на відповідних наборах.

2. Основні базиси функцій

Серед повних систем найбільше практичне значення має булевий базис функцій I, АБО, НЕ, базис функції Шеффера I-НЕ і базис функції Вебба (Пірса) АБО-НЕ.

Властивості функцій базису I, АБО, НЕ відповідають аксіомам і законам булевої алгебри.

$$\begin{aligned}\bar{\bar{x}} &= x; \\ x + x &= x, \quad x \cdot x = x; \\ x + 1 &= 1; \\ x \cdot 1 &= x; \\ x + 0 &= x; \\ x \cdot 0 &= 0; \\ x + \bar{x} &= 1; \\ x \cdot \bar{x} &= 0;\end{aligned}$$

Правила двоїстості де Моргана:

$$\begin{aligned}\overline{x + y} &= \bar{x} \cdot \bar{y} \\ \overline{x \cdot y} &= \bar{x} + \bar{y}\end{aligned}$$

Функція Шеффера має вигляд:

$$F(x_1, x_2) = \overline{x_1 x_2} = x_1 / x_2$$

Дана функція має наступні властивості.

Для кон'юнкції двох змінних справедливе співвідношення:

$$x_1 x_2 = \overline{\overline{x_1 x_2}} = \overline{x_1 / x_2} = (x_1 / x_2) / 1$$

Для диз'юнкції двох змінних справедливе співвідношення:

$$x_1 \vee x_2 = \overline{\overline{x_1 \vee x_2}} = \overline{\bar{x}_1 \bar{x}_2} = \bar{x}_1 / \bar{x}_2 = (x_1 / 1) / (x_2 / 1)$$

У сучасній мікросхемотехніці широко застосовуються логічні елементи, які реалізують функцію Вебба.

Функція Вебба може бути записана у вигляді:

$$F(x_1, x_2) = \overline{x_1 \vee x_2} = \bar{x}_1 \bar{x}_2 = x_1 \downarrow x_2$$

Для даної функції справедливі наступні співвідношення.

Зв'язок функції Вебба з кон'юнкцією двох змінних:

$$x_1 x_2 = \bar{x}_1 \downarrow \bar{x}_2$$

Зв'язок функції Вебба з диз'юнкцією двох змінних:

$$x_1 \vee x_2 = \overline{\overline{x_1 \vee x_2}} = \overline{x_1 \downarrow x_2} = (x_1 \downarrow x_2) \downarrow 0$$

Функції Шеффера і Вебба зв'язані між собою співвідношеннями:

$$x_1 / x_2 = \overline{\overline{x_1} \downarrow \overline{x_2}} = (\overline{x_1} \downarrow \overline{x_2}) \downarrow 0$$

$$x_1 \downarrow x_2 = \overline{x_1 / x_2} = (\overline{x_1} / \overline{x_2}) / 1$$

Завдання

1. Функцію $Y(x_1, x_2, x_3)$ представлено табличним способом, подати в:

- аналітичному вигляді;
- числовому вигляді;
- графічному вигляді.

№ набору	x_1	x_2	x_3	$Y(x_1, x_2, x_3)$ для варіанту:														
				1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	0	0	0	1	0	1	1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0
1	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1
2	0	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0
3	0	1	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1
4	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0
5	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	1	0
6	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	1	1
7	1	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1

2. Функцію $y(x_1, x_2, x_3)$, задану аналітичним виразом, представити:

- у базисі І-НЕ;
- у базисі АБО-НЕ.

№ вар.	$y(x_1, x_2, x_3)$	№ вар.	$y(x_1, x_2, x_3)$	№ вар.	$y(x_1, x_2, x_3)$
1	$\overline{x_1} x_2 + \overline{x_1} x_3 + x_2 x_3$	6	$x_1 \overline{x_1} + x_3 \overline{x_2} + x_1 x_3$	11	$\overline{x_1} x_2 + x_2 x_3 + \overline{x_1} \overline{x_3}$
2	$x_1 x_2 + x_2 \overline{x_3} + x_1 \overline{x_3}$	7	$x_2 x_1 + x_3 \overline{x_2} + x_1 x_3$	12	$\overline{x_1} x_2 + x_2 x_3 + \overline{x_1} \overline{x_3}$
3	$x_1 \overline{x_3} + x_3 \overline{x_2} + x_3 \overline{x_1}$	8	$x_2 x_1 + x_3 \overline{x_2} + \overline{x_1} x_3$	13	$\overline{x_1} x_3 + \overline{x_2} x_3 + \overline{x_1} \overline{x_3}$
4	$x_1 \overline{x_2} + x_3 \overline{x_1} + x_2 x_3$	9	$x_1 x_2 + x_2 x_3 + \overline{x_1} x_3$	14	$x_1 \overline{x_2} + \overline{x_2} x_3 + \overline{x_1} \overline{x_3}$
5	$x_2 \overline{x_1} + x_3 \overline{x_2} + x_1 x_3$	10	$x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 \overline{x_3}$	15	$x_1 \overline{x_2} + x_2 \overline{x_3} + \overline{x_1} \overline{x_3}$

Контрольні питання:

- Як можна задати комбінаційну функцію?
- В чому різниця між ДНФ і ПДНФ?
- Які базиси можна застосувати для запису логічних функцій?
- Сформулювати аксіоми алгебри логіки.
- Сформулювати правило де Моргана для трьох змінних.
- Яка функція називається комбінаційною?