лекция №5

Тема: Матричная запись преобразования координат

цель: Реализовать матричная запись преобразования координат и задать последовательность преобразования координат.

ПЛАН

1. Матричный запись двумерного преобразования поворота

2. Матричный запись двумерного масштабирования

3. Матричный запись двумерного преобразования переноса. однородные координаты

4. Матричное объединения преобразования координат

1. Матричный запись двумерного преобразования поворота

В предыдущих лекциях использовано запись преобразований координат в виде обычных математических выражений. В большинстве случаев такой записи хватает, но в последовательных зависимостях (лекция №4) формулы преобразования становятся значительно сложнее, поэтому возникла проблема в их более коротком записи. Вспомним преобразования поворота:

$$\begin{cases} x_1 = x_0 \cos(\alpha) + y_0 \sin(\alpha), \\ y_1 = x_0 \sin(\alpha) + y_0 \cos(\alpha). \end{cases} \quad (1)$$

Начальная точка имеет координаты $(x_0; y_0)$, после преобразования координат точка будет координаты (x_1, y_1). По непонятно какими математическими способами (хотя матричная запись скорее всего и возник для упрощения таких записей), выражение (1) можно записать как умножение вектора на матрицу:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Такая запись не значительно проще за запись (1), но в матричной арифметике значительно проще записывать комбинации преобразований. Пусть сформирован преобразования поворота, и во избежание медленной операции отыскания sin и cos, использовано результат:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

для ряда точек. Для подчиненной фигуры использовано вращения на дополнительный угол

$$\begin{pmatrix} x_2 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\beta) & \sin(\beta) \\ -\sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C & D \\ -D & C \end{pmatrix}.$$

Комбинация таких преобразований в матричном виде, в отличие от записи формулам (лаб. 4), выглядит проще:

$$\begin{pmatrix} x_2 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 & y_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C & D \\ -D & C \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 & y_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} CA - DB & CB + DA \\ -CB - DA & CA - DB \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Также как и в предыдущих формулах через умножение матриц, влияет зависимость результата преобразования от порядка их применения (в общем случае). В дополнение, для преобразования изображения целесообразно однократное счета значений тригонометрических функций. При использовании матричного записи поворота можно экономить и на последующих расчетах зависимых объектов.

2. Матричный запись двумерного масштабирования

Напомним формулы преобразования масштабирования

$$\begin{cases} x_1 = m_x \cdot x_0, \\ y_1 = m_y \cdot y_0. \end{cases} \quad (4)$$

Формулы являются простыми, но матричная запись может дать преимущество не в простоте записи, а в более простой комбинации с другими преобразованиями. Как показано в предыдущем пункте, комбинация преобразований в матричном виде сводится к произведению матриц - однотипной операции независящим от вида преобразования.

Рассмотрим умножения вектора точки на матрицу:

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 & y_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{00} x_0 + a_{10} y_0 & a_{01} x_0 + a_{11} y_0 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

если принять $a_{00} = m_x$; $a_{01} = 0$; $a_{10} = 0$; $a_{11} = m_y$;, тогда запись (5) станет эквивалентным записи (4):

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 & y_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m_x & 0 \\ 0 & m_y \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Также вариант совмещения двух преобразований записывается матричным умножением:

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 & y_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m_{1x} & 0 \\ 0 & m_{1y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m_{2x} & 0 \\ 0 & m_{2y} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 & y_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m_{1x} m_{2x} & 0 \\ 0 & m_{1y} m_{2y} \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Результат совмещения преобразований полностью совпадает с предыдущим, что позволяет в отличие от использования записи выражениями, пользоваться едиными принципами, формулами и процедурами без определения типа преобразований.

3. Матричный запись двумерного преобразования переноса, однородные координаты

Запись параллельного переноса показан следующими соотношениями

$$x_1 = dx + x_0,\quad y_1 = dy + y_0. \qquad (8)$$

С соотношение (5) видно, что умножение матрицы 2х2 нельзя получить свободных слагаемых для смещения по координатам. Поэтому попробуем использовать матрицу большей размерности, а недостаточное координату в векторе-точке заменим единицей (догадка связана с целым курсом проективной геометрии разработанной несколько столетий назад).

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{00} x_0 + a_{01} y_0 + 1\, a_{02} \\ a_{10} x_0 + a_{11} y_0 + 1\, a_{12} \\ a_{20} x_0 + a_{21} y_0 + 1\, a_{22} \end{pmatrix}. \qquad (9)$$

Привести в соответствие отношение (8) и (9) можно если принять значения коэффициентов:

$$\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & dx \\ 0 & 1 & dy \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Также стоит проверить, можно ли использовать для объединения преобразований матричное умножение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & dx_0 \\ 0 & 1 & dy_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & dx_1 \\ 0 & 1 & dy_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & dx_1 + dx_0 \\ 0 & 1 & dy_1 + dy_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (10)$$

Последняя формула является подтверждением пригодности применения матричного умножения для совмещения последовательного переноса координат.

4. Матричное объединения преобразования координат

Полученные формулы (3), (7), (10) доказывают возможность комбинации преобразований с помощью матричных преобразований. Однако, для формул (3), (7) размерность не совпадает с матрицами из формулы параллельного преобразования (10). Эту проблему можно решить увеличив размерность матриц в соотношениях (3) и (7):

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 & y_0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 & y_0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m_x & 0 & 0 \\ 0 & m_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 & y_0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ dx & dy & 1 \end{pmatrix}.$$

Если перемножить все виды матриц преобразования, получим матрицу, которая комбинирует все три вида преобразований в одной записи:

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 & y_0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m_x\cos(\alpha) & m_y\sin(\alpha) & 0 \\ -m_x\sin(\alpha) & m_y\cos(\alpha) & 0 \\ dx & dy & 1 \end{pmatrix}.$$

В программе для вывода плоского изображения достаточно трансформацию координат заменить матричные операции с одноразовым поиском значений тригонометрических функций. Визуально результат выполнения программы не будет отличаться, но благодаря внесенным изменениям преобразования стало определенной операцией с постоянной последовательностью операций. Сегодня существует много оптимизированных реализаций матричных преобразований координат, ускоряют расчеты в 3 и более раз (3DNow !, SSE и др.).