Інтегральне числення функції однієї змінної.

Невизначений інтеграл та його властивості.

Первісна і невизначений інтеграл.

Раніше ми розглядали таку задачу: для заданої функції $F(x)$ знайти її похідну $f(x)$. Основна задача диференціального числення – це задача про знаходження похідної і безпосередньо зв'язана з нею задача про знаходження диференціалу заданої функції. Похідна від будь-якої елементарної функції обчислюється за стандартними правилами і є елементарною функцією.

Основна задача інтегрального числення – це задача про знаходження первісної для заданої функції, тобто про знаходження функції по заданій її похідній. Ця задача складніша, ніж задача диференціювання.

Означення: Функція $F(X)$ називається **первісною** від функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$, якщо в будь-якій точці цього відрізка виконується рівність:

$$F'(x) = f(x).$$

Наприклад, для функції $\cos x$ первісною на всій числовій осі служить функція $\sin x$, тому що $(\sin x)' = \cos x$.

Зауважимо, що якщо для заданої функції $f(x)$ існує первісна, то вона не єдина.

Нехай функція $f(x)$ має дві первісні $F_1(x),\quad F_2(x)$, тоді за означенням

$$F_1'(x) = f(x), \quad F_2'(x) = f(x).$$

Віднявши, одержимо $F_1'(x) - F_2'(x) = 0, \quad \left[F_1'(x) - F_2'(x)\right]' = 0, \quad F_1(x) - F_2(x) = const, \quad F_1(x) = F_2(x) + const.$

Таким чином, будь-які дві первісних до однієї і тієї ж функції відрізняються друг від друга на постійну величину. Первісних для однієї й тієї ж функції може бути нескінченно багато. Вони будуть відрізнятися друг від друга на деяке постійне число.

$$F_1(x) = F_2(x) + C.$$

<u>Означення:</u> Якщо функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$, то вираз $F(x) + C$ називається невизначеним інтегралом від функції $f(x)$ і позначається

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Функцію $f(x)$ називають підінтегральною функцією, $f(x)dx$ - підінтегральним виразом, змінна x - змінна інтегрування.

Відновлення функції по її похідній, або, що теж саме, знаходження невизначеного інтегралу по заданій підінтегральній функції, називається інтегруванням цієї функції.

Умовою існування невизначеного інтеграла на деякому відрізку є неперервність функції на цьому відрізку.

Для того, щоб перевірити, чи правильно виконано інтегрування, потрібно про диференціювати результат і одержати при цьому підінтегральну функцію.

Основні властивості невизначеного інтегралу.

Із означення невизначеного інтегралу безпосередньо випливають наступні властивості:

1. Похідна від невизначеного інтегралу дорівнює підінтегральній функції:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x)+C)' = f(x);$$

2. Диференціал від невизначеного інтегралу дорівнює підінтегральному виразу:

$$d\left(\int f(x)dx\right) = \left(\int f(x)dx\right)' dx = f(x)dx;$$

3. Невизначений інтеграл від диференціалу деякої функції дорівнює сумі цієї функції і довільної постійної:

$$\int dF(x) = \int F'(x)dx = F(x)+C;$$

4. Невизначений інтеграл від алгебраїчної суми двох або декількох функцій дорівнює алгебраїчній сумі інтегралів від цих функцій:

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx \, ;$$

5. Постійний множник можна виносити за знак невизначеного інтегралу:

$$\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx, \quad k = const \, .$$

При обчисленні невизначених інтегралів іноді корисно знати наступні правила. Якщо $\int f(x)dx = F(x)+C$, то

1) $\int f(ax)dx = \dfrac{1}{a}F(ax) + C$;

2) $\int f(x+b)dx = F(x+b) + C$;

3) $\int f(ax+b)dx = \dfrac{1}{a}F(ax+b) + C$, де a, b - постійні величини. Ці рівності доводяться диференціюванням лівих і правих частин.

Знаходження значення невизначеного інтеграла зв'язано головним чином зі знаходженням первісної функції. Для деяких функцій це досить складна задача. Нижче будуть розглянуті способи знаходження невизначених інтегралів для основних класів функцій - раціональних, ірраціональних, тригонометричних, показникових і ін.

Для зручності значення невизначених інтегралів більшості елементарних функцій зібрані в спеціальні таблиці інтегралів, які бувають іноді досить об'ємними. У них включені різні комбінації функцій, що найбільш часто зустрічаються . Але більшість представлених у цих таблицях формул є наслідками один одного, тому нижче приведемо таблицю основних інтегралів, за допомогою якої можна одержати значення невизначених інтегралів різних функцій.

Таблиця основних інтегралів.

$(\alpha, a, C = const)$

1. $\int a \cdot dx = ax + C.$ 2. $\int x^{\alpha} dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad (\alpha \neq 1).$

3. $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

4. $\displaystyle\int e^x dx = e^x + C.$

5. $\displaystyle\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \ (a > 0, \ a \neq 1).$

6. $\displaystyle\int \sin x\, dx = -\cos x + C.$

7. $\displaystyle\int \cos x\, dx = \sin x + C.$

8. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$

9. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$

10. $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\, dx = -\ln|\cos x| + C.$

11. $\displaystyle\int \operatorname{ctg} x\, dx = \ln|\sin x| + C.$

12. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$

13. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C.$

14. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C.$

15. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C.$

16. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$

17. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C.$

18. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right| + C.$

19. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$

20. $\displaystyle\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + C.$

21. $\displaystyle\int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x + C.$

22. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C.$

23. $\int \frac{dx}{\mathrm{sh}^2 x} = -\mathrm{cth}\, x + C.$

<u>Приклад.</u> Знайти невизначені інтеграли:

1) $\int (4x^3 - 3\sin x + 1)dx = 4\int x^3 dx - 3\int \sin x dx + \int dx = x^4 + 3\cos x + x + C$.

2) $\int \frac{dx}{x^2+5} = \frac{1}{\sqrt{5}} \mathrm{arctg} \frac{x}{\sqrt{5}} + C$.

3) $\int \frac{dx}{\sin^2 7x} = -\frac{1}{7} \mathrm{ctg}\, 7x + C$.

4) $\int \cos(3x+4)dx = \frac{1}{3}\sin(3x+4) + C$.

5) $\int \frac{dx}{x-5} = \ln|x-5| + C$.

Методи інтегрування.

<u>Безпосереднє інтегрування.</u>

Для обчислення інтегралу необхідно, якщо це можливо, користуючись тими або іншими способами, привести його до табличного інтегралу і таким чином знайти шуканий результат. Обчислення інтегралів за допомогою безпосереднього використання таблиці інтегралів та основних властивостей невизначеного інтегралу називається безпосереднім інтегруванням.

<u>Приклад.</u> Знайти невизначені інтеграли:

1) $$\int\left(\frac{x-2}{x}\right)^3 dx=\int\frac{x^3-6x^2+12x-8}{x^3}dx=\int\left(1-\frac{6}{x}+\frac{12}{x^2}-\frac{8}{x^3}\right)dx=x-6\ln|x|-\frac{12}{x}+\frac{4}{x^2}+C.$$

2) $$\int \mathrm{tg}^2 x\,dx=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=\int\frac{dx}{\cos^2 x}-\int dx=\mathrm{tg}\,x-x+C.$$

Зауважимо, що на відміну від диференціювання, де для знаходження похідної використовувалися чіткі прийоми й методи знаходження похідних, для інтегрування такі методи недоступні. Якщо при знаходженні похідної ми користувалися, так сказати, конструктивними методами, які, базуючись на певних правилах, приводили до результату, то при знаходженні первісної доводиться в основному опиратися на знання таблиці похідних і таблиці інтегралів.

Що стосується методу безпосереднього інтегрування, то його можна застосовувати тільки для деяких досить обмежених класів функцій. Функцій, для яких можна з ходу знайти первісну дуже мало. Тому в більшості випадків застосовуються способи, описані нижче.

<u>Спосіб підстановки (заміни змінних) в невизначеному інтегралі.</u>

В багатьох випадках введення нової змінної інтегрування дає можливість звести знаходження заданого інтегралу до знаходження табличного інтегралу, тобто перейти до безпосереднього інтегруванню. Такий метод називається методом підстановки або методом заміни змінної.

Нехай потрібно обчислити інтеграл $\int f(x)dx$, де $f(x)$ - складна функція. Зробимо заміну змінної $x = \varphi(t)$, де $\varphi(t)$ - неперервна функція з неперервною похідною, яка має обернену функцію. Знайдемо диференціал $dx = \varphi'(t)dt$. Доведемо, що

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt . \qquad (*)$$

Покажемо, що рівні похідні лівої і правої частин.

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x) .$$

Праву частину про диференціюємо по x як складну функцію

$$x'_t = \varphi'(t), \quad t'_x = \frac{1}{\varphi'(t)},$$

$$\left(\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt\right)'_x = \left(\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt\right)'_t \cdot t'_x = f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t) \cdot \frac{1}{\varphi'(t)} = f\left[\varphi(t)\right] = f(x) .$$

Так як похідні по x від лівої і правої частин рівні, отже, виконується рівність (*)

Приклад. Знайти невизначений інтеграл

1) $$\int \sqrt{\sin x}\cos x dx = \left| \begin{array}{l} t = \sin x, \\ dt = \cos x dx \end{array} \right| = \int \sqrt{t}\, dt = \int t^{1/2} dt = \frac{2}{3} t^{3/2} + C = \frac{2}{3} \sin^{3/2} x + C.$$

2) $$\int \frac{x^4 dx}{6 + x^5} = \left| \begin{array}{l} t = 6 + x^5, \\ dt = 5t^4 dx,\ t^4 dt = \dfrac{dt}{5} \end{array} \right| = \frac{1}{5} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{5} \ln|t| + C = \frac{1}{5} \ln\left|6 + x^5\right| + C .$$

3) $$\int e^{\cos^2 x} \sin 2x dx = \left| \begin{array}{l} t = e^{\cos^2 x}; \quad dt = -e^{\cos^2 x} \cdot 2\cos x \sin x = \\ = -\sin 2x \cdot e^{\cos^2 x} dx \end{array} \right| = -\int dt = -t + C == -e^{\cos^2 x} + C.$$

Зауваження. Одним з варіантів методу заміни змінної є спосіб *підведення під знак диференціала*, що полягає в перетворенні:

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt = \int f(\varphi)\, d\varphi .$$

Приклад. Знайти невизначений інтеграл

1) $$\int \frac{\ln^4 x\, dx}{x} = \int \ln^4 x \cdot (\ln x)' dx = \int \ln^4 x\, d \ln x = \frac{\ln^5 x}{5} + C.$$

2) $$\int \frac{dx}{\cos^2 x \cdot (\operatorname{tg} x - 7)} = \int \frac{d(\operatorname{tg} x - 7)}{\operatorname{tg} x - 7} = \ln\left|\operatorname{tg} x - 7\right| + C .$$

Інтегрування частинами в невизначеному інтегралі.

Спосіб інтегрування частинами заснований на відомій формулі диференціалу добутку двох функцій:

$$d(uv) = udv + vdu$$

Проінтегрувавши, одержуємо: $\int d(uv) = \int udv + \int vdu$, а відповідно до наведених вище властивостей невизначеного інтеграла, маємо

$$uv = \int udv + \int vdu \qquad \text{або} \qquad \int udv = uv - \int vdu\,.$$

Одержали формулу інтегрування частинами, що дозволяє знаходити інтеграли багатьох елементарних функцій. Ця формула дозволяє звести задачу обчислення інтеграла $\int u\,dv$ до обчислення інтеграла $\int v\,du$, який може виявитися простішим. За функцію u, як правило, береться така функція, яка при диференціюванні краще спрощується, а за dv - та частина (остальна) підінтегрального виразу, інтеграл від якої відомий або може бути знайденим. Не можна вибирати u й dv довільно, інакше можна одержати ще більш складний інтеграл. Метод інтегрування частинами дозволяє обчислювати, наприклад, інтеграли типу

(a) $\int x^k \sin x\,dx$, $\int x^k \cos x\,dx$, $\int x^k e^x\,dx$;

(b) $\int x^k \arcsin x\,dx$, $\int x^k arctg\,x\,dx$, $\int x^k \ln x\,dx$;

(c) $\int e^x \sin x\,dx$, $\int e^x \cos x\,dx$,

а також подібні їм. У випадку (a) варто взяти за $u = x^k$; у випадку (b) – $dv = x^k dx$; у випадку (c) – $u = e^x$. При цьому для інтегралів виду (a) і (b) потрібно рівно k раз застосовувати формулу інтегрування частинами, а для інтегралів виду (c) потрібне дворазове застосування формули.

Приклад. Знайти невизначений інтеграл

1) $$\int x\ln x dx = \begin{vmatrix} u=\ln x; & dv = xdx; \\ du = \dfrac{1}{x}dx; & v = \dfrac{x^2}{2}; \end{vmatrix} = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{x^2\ln x}{2} - \frac{1}{2}\int xdx = \frac{x^2\ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C =$$

$$= \frac{x^2}{4}(2\ln x - 1) + C.$$

2) $$\int x^2 \sin xdx = \begin{vmatrix} u = x^2; & dv = \sin xdx; \\ du = 2xdx; & v = -\cos x \end{vmatrix} = -x^2\cos x + \int \cos x\cdot 2xdx =$$

$$= \begin{vmatrix} u = x; & dv = \cos xdx; \\ du = dx; & v = \sin x \end{vmatrix} = -x^2\cos x + 2\left[x\sin x - \int \sin xdx\right] = -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C.$$

3) $$\int e^x \cos xdx = \begin{vmatrix} u = e^x; & du = e^x dx; \\ dv = \cos xdx; & v = \sin x \end{vmatrix} = e^x \sin x - \int \sin x\cdot e^x dx =$$

$$= \begin{vmatrix} u = e^x; & du = e^x dx; \\ dv = \sin x dx; & v = -\cos x; \end{vmatrix} = e^x \sin x - \left[-e^x \cos x - \int -\cos x \cdot e^x dx \right] = e^x \sin x +$$

$$+ e^x \cos x - \int \cos x e^x dx$$

Видно, що в результаті повторного застосування інтегрування частинами функцію не вдалося спростити до табличного вигляду. Однак, останній отриманий інтеграл нічим не відрізняється від заданого. Тому перенесемо його в ліву частину рівності.

$$2\int e^x \cos x dx = e^x (\sin x + \cos x)$$

$$\int e^x \cos x dx = \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) + C.$$

4) $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+1)^n}$, $n \in N$, при $n = 1$ маємо табличний інтеграл.

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+1)^n} = \begin{vmatrix} u = \left(x^2+1\right)^{-n}; & dv = dx; \\ du = -\frac{2nxdx}{\left(x^2+1\right)^{n+1}}; & v = x \end{vmatrix} = \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n\int \frac{x^2 dx}{(x^2+1)^{n+1}}.$$

Перетворимо інтеграл $\int \frac{x^2 dx}{(x^2+1)^{n+1}} = \int \frac{x^2+1-1}{(x^2+1)^{n+1}} dx = \int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^n} - \int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^{n+1}} = I_n - I_{n+1}$.

Тоді $I_n = \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2nI_n - 2nI_{n+1}$.

Звідси одержимо $I_{n+1} = \frac{x}{2n(x^2+1)^n} + \left(1 - \frac{1}{2n}\right)I_n$.

Ця формула зводить обчислення інтеграла I_{n+1} до обчислення інтеграла I_n з меншим на одиницю показником степеня. Формули такого типу називають рекурентними.

Інтеграли від функцій, які містять квадратний тричлен.

а) Розглянемо інтеграл $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$. Виділивши повний квадрат в знаменнику

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right] =$$

$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right)\right] = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \pm k^2\right], \quad \text{де} \quad k^2 = \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2},$$

одержимо

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \pm k^2} = \left| \begin{array}{l} t = x + \frac{b}{2a}; \\ dt = dx \end{array} \right| = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{t^2 \pm k^2}.$$

Тобто заданий інтеграл привели до табличних інтегралів.

Приклад. Знайти невизначений інтеграл

$$\int \frac{dx}{x^2-6x+25} = \int \frac{dx}{x^2-2\cdot 3\cdot x+3^2-3^2+25} = \int \frac{dx}{(x-3)^2+16} = \left| \begin{array}{l} t = x-3; \\ dt = dx \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{dt}{t^2+4^2} = \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{t}{4} + C = \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-3}{4}\right) + C.$$

б) Розглянемо інтеграл $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx$. Виділимо в чисельнику похідну знаменника

$$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx = \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)}{ax^2+bx+c}dx = \frac{A}{2a}\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx + \left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}.$$

Другий інтеграл обчислювати вміємо. В першому інтегралі, зробивши заміну, одержимо

$$\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx = \left| \begin{matrix} t = ax^2+bx+c; \\ dt = (2ax+b)dx \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|ax^2+bx+c\right| + C.$$

<u>Приклад.</u> Знайти невизначений інтеграл

$$\int \frac{(3x-2)}{5x^2-3x+2}dx = \int \frac{\frac{3}{10}(10x-3)-2+\frac{9}{10}}{5x^2-3x+2}dx =$$

$$= \frac{3}{10}\int \frac{10x-3}{5x^2-3x+2}dx - \frac{11}{10}\int \frac{dx}{5x^2-3x+2} = \frac{3}{10}\ln\left|5x^2-3x+2\right| - \frac{11}{10\cdot 5}\int \frac{dx}{x^2-\frac{3}{5}x+\frac{2}{5}} =$$

$$= \frac{3}{10}\ln\left|5x^2-3x+2\right| - \frac{11}{50}\int \frac{dx}{x^2-2\cdot\frac{3}{10}x+\left(\frac{3}{10}\right)^2-\left(\frac{3}{10}\right)^2+\frac{2}{5}} = \frac{3}{10}\ln\left|5x^2-3x+2\right| -$$

$$- \frac{11}{50}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{3}{10}\right)^2+\frac{31}{100}} = \frac{3}{10}\ln\left|5x^2-3x+2\right| - \frac{11}{5\sqrt{31}}\operatorname{arctg}\frac{10x-3}{\sqrt{31}} + C.$$

в) Розглянемо інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$. Виділяючи під радикалом повний квадрат, як це було в п. а), прийдемо до табличних інтегралів вигляду

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 \pm k^2}} \text{ при } a>0 \text{ або } \int \frac{dt}{\sqrt{k^2 - t^2}} \text{ при } a<0.$$

Приклад. Знайти невизначений інтеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-2x+8}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-2x-1+9}} = \int \frac{d(x+1)}{\sqrt{9-(x+1)^2}} = \left| \begin{array}{l} x+1=t; \\ dx=dt \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{dt}{\sqrt{3^2-t^2}} = \arcsin\frac{t}{3} + C = \arcsin\frac{x+1}{3} + C.$$

г) Розглянемо інтеграл $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$. Виділяючи в чисельнику, похідну підкореневого виразу, аналогічно п. б), одержимо два інтеграли.

$$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \frac{A}{2a}\int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx + \left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Другий інтеграл розглядали в п. в). А в першому інтегралі зробивши заміну, одержимо

$$\int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \left| \begin{array}{l} t=ax^2+bx+c; \\ dt=(2ax+b)dx \end{array} \right| = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} + C = 2\sqrt{ax^2+bx+c} + C.$$

Приклад. Знайти невизначений інтеграл

$$\int \frac{3x+4}{\sqrt{7+6x-x^2}}dx = \int \frac{3x+4}{\sqrt{16-(x-3)^2}}dx = \left| \begin{matrix} u = x-3; & du = dx; \\ x = u+3 & \end{matrix} \right| = \int \frac{3u+9+4}{\sqrt{16-u^2}}du = 3\int \frac{udu}{\sqrt{16-u^2}} +$$

$$+13\int \frac{du}{\sqrt{16-u^2}} = -3\sqrt{16-u^2} + 13\arcsin\frac{u}{4} + C = -3\sqrt{7-x^2-6x} + 13\arcsin\frac{x-3}{4} + C.$$

Інтегрування раціональних дробів.

Прості (елементарні) раціональні дроби та їх інтегрування.

Важливий клас функцій, інтеграли від яких завжди виражаються через елементарні функції, утворюють раціональні функції, тобто функції, які можна представити у вигляді дробу $\frac{P(x)}{Q(x)}$, де $P(x), Q(x)$ - многочлени.

Якщо степінь многочлена в чисельнику нижче степеня многочлена в знаменнику, то дріб називається правильним, в протилежному випадку – неправильним.

Якщо дріб неправильний, то виконавши ділення многочленів (чисельник на знаменник), одержимо

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = f(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

де $f(x)$ - деякий многочлен, $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$ - правильний дріб.

Інтегрування многочленів виконується просто. Основна трудність при інтегруванні раціональних дробів заключається в інтегруванні правильних раціональних дробів.

Означення. Правильні раціональні дроби вигляду:

I. $\dfrac{A}{x-a}$; III. $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$;

II. $\dfrac{A}{(x-a)^m}$; IV. $\dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$

де - m, n – натуральні числа ($m \geq 2; n \geq 2$) і $q-\dfrac{p^2}{4}>0$, називаються простими (елементарними) дробами відповідно I, II, III, IV типів.

Розглянемо інтеграли від простих дробів. Інтегрування простих дробів I, II, III типів не викликає труднощів.

I. $$\int \frac{A}{x-a}dx = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a| + C.$$

II. $\int \frac{A}{(x-a)^m} = A\int (x-a)^{-m}\, d(x-a) = A\frac{(x-a)^{-m+1}}{-m+1} + C = \frac{A}{(1-m)(x-a)^{m-1}} + C.$

III. $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx$ - обчислювали в попередній лекції.

Розглянемо тепер методи інтегрування простих дробів IV типу. Виділимо в чисельнику похідну виразу, який стоїть в знаменнику в дужках, і розіб'ємо на два інтеграли.

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p)+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)}{(x^2+px+q)^n}dx = \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}dx + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n}.$$ Обчислимо перший інтеграл.

$$\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}dx = \int \frac{d(x^2+px+q)}{(x^2+px+q)^n} = \frac{1}{(1-n)(x^2+px+q)^{n-1}} + C.$$

Обчислимо другий інтеграл, виділивши в знаменнику в дужках повний квадрат.

$$\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n} = \int \frac{dx}{\left[(x^2+2\cdot\frac{p}{2}x+\frac{p^2}{4})+q-\frac{p^2}{4}\right]^n} = \int \frac{dx}{\left[(x+\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{4}\right]^n} =$$

$$=\frac{1}{\left(q-\frac{p^2}{4}\right)^n}\int\frac{dx}{\left[\left(\frac{x+p/2}{\sqrt{q-p^2/4}}\right)^2+1\right]^n}=\left|\begin{array}{l} t=\frac{x+p/2}{\sqrt{q-p^2/4}};\quad x=t\cdot\sqrt{q-p^2/4}-p/2; \\ dx=\sqrt{q-p^2/4}\,dt \end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{\left(q-p^2/4\right)^n}\int\frac{\sqrt{q-p^2/4}\,dt}{\left(t^2+1\right)^n}=\frac{1}{\left(q-p^2/4\right)^{n-1/2}}\int\frac{dt}{\left(t^2+1\right)^n}.$$

Для обчислення цього інтегралу застосовують рекурентну формулу попередньої лекції.

<u>Зауваження</u>. При практичному обчисленні інтегралу від простого дробу IV типу заміну

$$t=\frac{x+p/2}{\sqrt{q-p^2/4}}$$

можна застосувати на самому початку обчислення.

<u>Приклад.</u> Знайти невизначений інтеграл $\displaystyle\int\frac{5x+3}{\left(x^2-2x+5\right)^2}dx=$

$$=\left|\begin{array}{l} t=\dfrac{x-1}{\sqrt{5-1}}=\dfrac{x-1}{2}; \\ x=2t+1; \quad dx=2dt \end{array}\right|=\int\frac{5(2t+1)+3}{\left[(2t+1)^2-2(2t+1)+5\right]^2}2dt=\frac{1}{4}\int\frac{5t+4}{\left(t^2+1\right)^2}dt=\frac{5}{4}\int\frac{tdt}{\left(t^2+1\right)^2}+$$

$$+\int\frac{dt}{\left(t^2+1\right)^2}=\frac{5}{8}\int\left(t^2+1\right)^{-2}d\left(t^2+1\right)+\frac{t}{2\left(t^2+1\right)}+\left(1-\frac{1}{2}\right)\int\frac{dt}{t^2+1}=$$

$$=-\frac{5}{8}\cdot\frac{1}{t^2+1}+\frac{t}{2\left(t^2+1\right)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}t+C=\frac{4t-5}{8\left(t^2+1\right)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}t+C=$$

$$=\frac{2x-7}{2\left(x^2-2x+5\right)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2}+C.$$

<u>Розклад правильного раціонального дробу на прості.</u>

Розглянемо правильний раціональний дріб $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$. Будемо вважати, що коефіцієнти дійсні і що даний дріб не скорочується, тобто чисельник і знаменник не мають спільних коренів. Розкладемо многочлен в знаменнику на множники з дійсними коефіцієнтами першого і другого степеня відповідної кратності.

$$Q(x)=a_0(x-a)^{\alpha}\ldots(x-b)^{\beta}\left(x^2+px+q\right)^{\lambda}\ldots\left(x^2+rx+s\right)^{\mu}.$$

<u>Теорема:</u> Будь-який правильний раціональний дріб можна представити єдиним чином у вигляді суми простих

раціональних дробів

$$\frac{R(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha}+\ldots+\frac{B_1}{(x-b)}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+\ldots+\frac{B_\beta}{(x-b)^\beta}+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+$$
$$+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}+\ldots+\frac{M_\lambda x+N_\lambda}{(x^2+px+q)^\lambda}+\ldots+\frac{P_1x+S_1}{x^2+rx+s}+\frac{P_2x+S_2}{(x^2+rx+s)^2}+\ldots+\frac{P_\mu x+S_\mu}{(x^2+rx+s)^\mu}$$

де $A_i, B_i, M_i, N_i, P_i, S_i$ – деякі постійні величини, які потрібно знайти.

Знайдемо невідомі коефіцієнти. Звівши дроби до спільного знаменника, одержимо тотожні многочлени в чисельниках зліва і справа. Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x, одержимо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для знаходження невідомих коефіцієнтів $A_i, B_i, M_i, N_i, P_i, S_i$. Цей метод знаходження коефіцієнтів називається методом невизначених коефіцієнтів.

Інтегрування раціональних дробів.

Нехай необхідно обчислити інтеграл $\int\frac{P(x)}{Q(x)}$. Якщо даний дріб неправильний, то необхідно представити його у вигляді суми многочлена $f(x)$ і правильного раціонального дробу $\frac{P(x)}{Q(x)}$. Правильний раціональний дріб необхідно представити у вигляді суми простих (елементарних) дробів.

Таким чином, інтегрування будь-якого раціонального дробу зводиться до інтегрування многочлена і скінченого числа простих дробів, інтеграли від яких обчислювати вміємо.

Приклад. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{x^2-5x+9}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}dx$.

Раціональний дріб правильний, тому розкладемо підінтегральну функцію на суму простих дробів:

$$\frac{x^2-5x+9}{(x-1)^2(x^2+2x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+2} .$$

В правій частині зведемо дроби до спільного знаменника

$$\frac{A(x-1)(x^2+2x+2)+B(x^2+2x+2)+(Cx+D)(x-1)}{(x-1)^2(x^2+2x+2)} =$$

$$= \frac{(A+C)x^3+(A+B-2C+D)x^2+(2B+C-2D)x-2A+2B+D}{(x-1)^2(x^2+2x+2)} .$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x в чисельниках ліворуч і праворуч, одержуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь (відносно A, B, C, D):

$$\begin{array}{c|c} x^3 & A+C=0 \\ x^2 & A+B-2C+D=1 \\ x & 2B+C-2D=-5 \\ 1 & -2A+2B+D=9 \end{array}$$

Розв'язавши систему рівнянь, знайдемо

$$A=-\frac{7}{5}, \quad B=1, \quad C=\frac{7}{5}, \quad D=\frac{21}{5}.$$

Повернемось до обчислення інтеграла:

$$\int \frac{x^2-5x+9}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}dx=-\frac{7}{5}\int\frac{dx}{x-1}+\int\frac{dx}{(x-1)^2}+\frac{7}{5}\int\frac{x\,dx}{x^2+2x+2}+\frac{21}{5}\int\frac{dx}{x^2+2x+2}=$$

$$=-\frac{7}{5}\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+\frac{7}{10}\ln(x^2+2x+2)+\frac{14}{5}\operatorname{arctg}(x+1)+C.$$

Приклад. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx.$

Так як дріб неправильний, то виділимо цілу частину, поділивши чисельник на знаменник. Одержимо

$$
\begin{array}{l|l}
-\dfrac{x^5+x^4-8}{\underline{x^5-4x^3}} & \dfrac{x^3-4x}{x^2+x+4} \\
\qquad -\dfrac{x^4+4x^3-8}{\underline{x^4-4x^2}} & \\
\qquad\qquad -\dfrac{4x^3+4x^2-8}{\underline{4x^3-16x}} & \\
\qquad\qquad\qquad 4x^2+16x-8 &
\end{array}
$$

Тоді інтеграл перепишеться

$$\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx. = \int\left(x^2+x+4+\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}\right)dx.$$

Спочатку розкладемо знаменник одержаного дробу на множники, а потім правильний раціональний дріб розкладемо на прості дроби.

$$\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x} = \frac{4x^2+16x-8}{x(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+2} = \frac{x^2(A+B+C)+x(2B-2C)-4A}{x(x-2)(x+2)}.$$

$$\begin{cases} A + B + C = 4; \\ 2B - 2C = 16; \\ -4A = -8. \end{cases}$$

$$A = 2; \quad B = 5; \quad C = -3.$$

Повернемось до обчислення інтеграла:

$$\int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} dx. = \int \left(x^2 + x + 4 + \frac{4x^2 + 16x - 8}{x^3 - 4x} \right) dx = \int \left(x^2 + x + 4 + \frac{2}{x} + \frac{5}{x-2} - \frac{3}{x+2} \right) dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + 2\ln|x| + 5\ln|x-2| - 3\ln|x+2| + C = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + \ln\left| \frac{x^2 (x-2)^5}{(x+2)^3} \right| + C.$$

Інтегрування деяких тригонометричних функцій.

Інтегралів від тригонометричних функцій може бути нескінченно багато. Більшість із цих інтегралів взагалі не можна обчислити аналітично, тому розглянемо деякі найголовніші типи функцій, які можуть бути проінтегровані завжди.

Універсальна тригонометрична підстановка.

Розглянемо інтеграл $\int R(\sin x, \cos x)dx$. де R - позначення деякої раціональної функції від змінних $\sin x$ і $\cos x$. Інтеграли такого вигляду приводяться до інтегралів від раціональних функцій за допомогою універсальної тригонометричної підстановки

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$

Виразимо $\sin x$ і $\cos x$ через $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, тобто через t .

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+t\,g^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2};$$

Тоді $x = 2\operatorname{arctg} t;$ $\quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$

Таким способом прийдемо до інтеграла від раціональної функції:

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\,dt.$$

Безумовним досягненням цієї підстановки є те, що з її допомогою завжди можна перетворити тригонометричну функцію в раціональну й обчислити відповідний інтеграл. Але на практиці можна одержати досить складну раціональну функцію, інтегрування якої займе багато часу й сил. Тому корисно знати і інші частинні підстановки, при застосуванні яких іноді простіше обчислити інтеграл.

Однак при неможливості застосувати більше раціональну заміну змінної цей метод є єдино результативним.

Приклад. Знайти невизначений інтеграл

$$\int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5} = \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}; \quad x = 2\operatorname{arctg} t; \qquad dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}; \\ \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}; \quad \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}; \end{array} \right| = \int \frac{\dfrac{2dt}{1+t^2}}{4\dfrac{2t}{1+t^2} + 3\dfrac{1-t^2}{1+t^2} + 5} =$$

$$= 2\int \frac{dt}{8t + 3 - 3t^2 + 5 + 5t^2} = 2\int \frac{dt}{2t^2 + 8t + 8} = \int \frac{dt}{t^2 + 4t + 4} = \int \frac{dt}{(t+2)^2} =$$

$$= -\frac{1}{t+2} + C = -\frac{1}{tg\dfrac{x}{2} + 2} + C.$$

Інтеграли вигляду $\int R(\sin x, \cos x)dx$.

Якщо $R(\sin x, \cos x)$ - непарна функція відносно $\sin x$, тобто $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то незважаючи на можливість обчислення такого інтеграла за допомогою універсальної тригонометричної підстановки, раціональніше застосувати підстановку $t = \cos x$.

Взагалі кажучи, для застосування цього методу необхідна тільки непарність функції щодо синуса, а степінь косинуса, що входить у функцію може бути будь-який, як цілий, так і дробовий.

Приклад. Знайти невизначений інтеграл

$$\int \frac{\sin^3 x}{2+\cos x}dx = \begin{vmatrix} \cos x = t; \\ dt = -\sin x dx \end{vmatrix} = -\int \frac{1-t^2}{2+t}dt = \int \frac{t^2+4t+4-4t-5}{t+2}dt = \int \left[\frac{(t+2)^2-4t-5}{t+2}\right]dt =$$

$$= \int \left[t+2-\frac{4t}{t+2}-\frac{5}{t+2}\right]dt = \int tdt + \int 2dt - 4\int \frac{tdt}{t+2} - 5\int \frac{dt}{t+2} = \frac{t^2}{2} + 2t - 5\ln|t+2| - 4\int \frac{t}{t+2}dt =$$

$$= \frac{t^2}{2} + 2t - 5\ln|t+2| + 8\int \frac{dt}{t+2} - 4\int dt = \frac{t^2}{2} + 2t - 5\ln|t+2| + 8\ln|t+2| - 4t =$$

$$= \frac{t^2}{2} - 2t + 3\ln|t+2| + C = \frac{\cos^2 x}{2} - 2\cos x + 3\ln(\cos x + 2) + C.$$

Якщо $R(\sin x, \cos x)$ - непарна функція відносно $\cos x$, тобто $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то раціональніше застосувати підстановку $t = \sin x$.

Приклад. Знайти невизначений інтеграл

$$\int \frac{\cos^5 x dx}{\sin^4 x} = \begin{vmatrix} \sin x = t \\ dt = \cos x dx \\ \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \end{vmatrix} = \int \frac{(1-t^2)^2}{t^4}dt = \int \frac{1-2t^2+t^4}{t^4}dt = \int \frac{dt}{t^4} - 2\int \frac{dt}{t^2} +$$

$$+ \int dt = -\frac{1}{3t^3} + \frac{2}{t} + t + C = -\frac{1}{3\sin^3 x} + \frac{2}{\sin x} + \sin x + C.$$

Якщо $R(\sin x, \cos x)$ - парна функція відносно $\sin x$ і $\cos x$, тобто $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то раціональніше застосувати підстановку $t = \operatorname{tg} x$.

Тоді $x = \operatorname{arctg} t;\quad dx = \dfrac{dt}{1+t^2};\quad \sin x = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}};\quad \cos x = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$.

Приклад. Знайти невизначений інтеграл

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x + 6\sin x \cos x - 16\cos^2 x} = \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg}^2 x + 6\operatorname{tg} x - 16}dx = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t; \\ \dfrac{1}{\cos^2 x}dx = d(\operatorname{tg} x) = dt \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{dt}{t^2 + 6t - 16} = \int \frac{dt}{(t+3)^2 - 25} = \frac{1}{10}\ln\left|\frac{\operatorname{tg} x + 3 - 5}{\operatorname{tg} x + 3 + 5}\right| + C = \frac{1}{10}\ln\left|\frac{\operatorname{tg} x - 2}{\operatorname{tg} x + 8}\right| + C.$$

Інтеграли вигляду $\int \sin^m x \cos^n x dx$.

Якщо число m - непарне, то раціональніше застосувати підстановку $t = \cos x$, якщо ж n - непарне, то робиться підстановка $t = \sin x$.

Якщо m, n - парні додатні числа, то необхідно за допомогою відомих формул

$$\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x;\quad \sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2};\quad \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$$

понизити показники степеня до першого степеня і обчислити інтеграли вигляду $\int\cos kxdx$.

Приклад. Знайти невизначений інтеграл

$$\int\sin^4 x\cos^5 xdx=\int\sin^4 x\cos^4 x\cos xdx=\left|\begin{matrix}t=\sin x;\\ dt=\cos xdx\end{matrix}\right|=\int t^4\left(1-t^2\right)^2dt=$$

$$=\int\left(t^4-2t^6+t^8\right)dt=\frac{t^5}{5}-2\cdot\frac{t^7}{7}+\frac{t^8}{8}+C=\frac{1}{5}\sin^5 x-\frac{2}{7}\sin^7 x+\frac{1}{8}\sin^8 x+C.$$

Приклад. Знайти невизначений інтеграл

$$\int\sin^4 x\cos^4 xdx=\int(\sin x\cos x)^4dx=\frac{1}{16}\int\left(\sin^2 2x\right)^2dx=\frac{1}{16}\int\left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right)^2dx=$$

$$=\frac{1}{64}\int\left(1-2\cos 4x+\cos^2 4x\right)dx=\frac{1}{64}\left(x-\frac{1}{2}\sin 4x+\int\frac{1+\cos 8x}{2}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{64}\left(x-\frac{1}{2}\sin 4x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}\sin 8x\right)+C=\frac{1}{64}\left(\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}\sin 4x+\frac{1}{16}\sin 8x\right)+C.$$

Інтеграли вигляду $\int\cos mx\cos nxdx,\quad \int\sin mx\cos nxdx,\quad \int\sin mx\sin nxdx.$

Щоб обчислити інтеграли такого вигляду необхідно за допомогою відомих формул перетворити добутки тригонометричних функцій в їх суму (різницю).

$$\int \cos mx \cos nx dx = \int \frac{1}{2}\left[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\right]dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{\sin(m-n)x}{m-n}\right] + C.$$

$$\int \sin mx \cos nx dx = \int \frac{1}{2}\left[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x\right]dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos(m+n)x}{m+n} - \frac{\cos(m-n)x}{m-n}\right] + C.$$

$$\int \sin mx \sin nx dx = \int \frac{1}{2}\left[-\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\right]dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{\sin(m+n)}{m+n} + \frac{\sin(m-n)}{m-n}\right] + C.$$

<u>Приклад.</u> Знайти невизначений інтеграл

$$\int \sin 5x \sin 2x dx = \frac{1}{2}\int \cos 3x dx - \frac{1}{2}\int \cos 7x dx = \frac{1}{6}\sin 3x - \frac{1}{14}\sin 7x + C.$$

<u>Інтеграли вигляду</u> $\int \mathrm{tg}^n\, x dx,\quad \int \mathrm{ctg}^n\, x dx$, <u>де</u> n - <u>ціле додатнє число.</u>

Для обчислення цих інтегралів поступово знижуємо показник степеня за допомогою формул:

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1; \quad \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1.$$

<u>Приклад.</u> Знайти невизначений інтеграл

$$\int \operatorname{tg}^5 x dx = \int \operatorname{tg}^3 x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \int \frac{\operatorname{tg}^3 x}{\cos^2 x} dx - \int \operatorname{tg}^3 x dx = \int \operatorname{tg}^3 x d(\operatorname{tg} x) - \int \operatorname{tg} x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} - \int \operatorname{tg} x d(\operatorname{tg} x) + \int \operatorname{tg} x dx = \frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 x - \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x - \ln|\cos x| + C.$$

<u>Інтеграли вигляду</u> $\int \operatorname{tg}^m x \sec^n x dx, \quad \int \operatorname{ctg}^m x \operatorname{cosec}^n x dx$, <u>де</u> n - <u>парне додатнє число.</u>

Такі інтеграли знаходяться аналогічно за допомогою попередніх формул.

<u>Приклад.</u> Знайти невизначений інтеграл

<u>Інтеграли вигляду</u> $\int \sec^{2p+1} x dx, \quad \int \operatorname{cosec}^{2p+1} x dx.$

Такі інтеграли знаходяться за рекурентними формулами. Виведемо їх.

$$\int \sec^{2p+1} x dx = \int \frac{dx}{\cos^{2p+1} x} = \int \frac{dx}{\cos^{2p-1} x \cdot \cos^2 x} = \left| \begin{array}{l} u = \dfrac{1}{\cos^{2p-1} x}; \quad dv = \dfrac{dx}{\cos^2 x}; \\ du = (2p-1)\dfrac{\sin x}{\cos^{2p} x} dx; \quad v = \operatorname{tg} x \end{array} \right| =$$

$$= \frac{\sin x}{\cos^{2p} x} - (2p-1)\int \frac{\sin^2 x}{\cos^{2p+1} x} dx = \frac{\sin x}{\cos^{2p} x} - (2p-1)\int \frac{dx}{\cos^{2p+1} x} dx + (2p-1)\int \frac{dx}{\cos^{2p-1} x}.$$

$$\int \frac{dx}{\cos^{2p+1} x} = \frac{1}{2p} \frac{\sin x}{\cos^{2p} x} + \left(1 - \frac{1}{2p}\right)\int \frac{dx}{\cos^{2p-1} x}.$$

$$\int \sec^{2p+1} x dx = \frac{1}{2p} \frac{\sin x}{\cos^{2p} x} + \left(1 - \frac{1}{2p}\right)\int \sec^{2p-1} x dx.$$

Аналогічно $\displaystyle \int \operatorname{cosec}^{2p+1} x dx = -\frac{1}{2p} \frac{\cos x}{\sin^{2p} x} + \left(1 - \frac{1}{2p}\right)\int \operatorname{cosec}^{2p-1} x dx.$

Приклад. Знайти невизначений інтеграл

$$\int \sec^3 x dx = \int \frac{dx}{\cos^3 x} = \left| \begin{matrix} u = \frac{1}{\cos x}; & dv = \frac{dx}{\cos^2 x}; \\ du = \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx; & v = \operatorname{tg} x \end{matrix} \right| = \frac{1}{\cos x} \frac{\sin x}{\cos x} - \int \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx =$$

$$= \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^3 x} dx = \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \int \frac{dx}{\cos^3 x} + \int \frac{dx}{\cos x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \int \frac{dx}{\cos^3 x} + \ln \left| \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|.$$

$$\int \frac{dx}{\cos^3 x} = \frac{1}{2} \frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C.$$

Інтегрування деяких ірраціональних функцій.

Далеко не кожна ірраціональна функція може мати інтеграл, виражений елементарними функціями. Для знаходження інтеграла від ірраціональної функції варто застосувати підстановку, що дозволить перетворити функцію в раціональну, інтеграл від якої може бути знайдений.

Розглянемо деякі прийоми для інтегрування різних типів ірраціональних функцій.

Інтеграли від лінійних і дробово-лінійних ірраціональностей.

Розглянемо інтеграл $\int R\left(x, x^{\frac{m_1}{n_1}}, x^{\frac{m_2}{n_2}}, \ldots\ldots x^{\frac{m_r}{n_r}}\right)dx$, де R - раціональна функція вказаних аргументів. Зробимо заміну $x = t^s$, $dx = st^{s-1}dt$, де s - спільний знаменник дробів $\frac{m_1}{n_1}; \frac{m_2}{n_2}; \ldots\ldots \frac{m_r}{n_r}$. Тоді кожний дробовий степінь x матиме вираз через цілий степінь t і, отже, підінтегральна функція перетвориться у раціональну функцію від t. Після інтегрування за змінною t повертаємось до змінної x: $t = \sqrt[s]{x}$.

Раціоналізація інтегралу $\int R\left(x, (ax+b)^{\frac{m_1}{n_1}}, (ax+b)^{\frac{m_2}{n_2}}, \ldots\ldots (ax+b)^{\frac{m_r}{n_r}}\right)dx$ здійснюється за допомогою підстановки $ax+b = t^s; \quad t = \sqrt[s]{ax+b}; \quad adx = st^{s-1}dt.$

Аналогічна підстановка робиться в випадку

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}, \ldots\ldots \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_r}{n_r}}\right)dx,$$

тобто $\frac{ax+b}{cx+d} = t^s; \quad x = \frac{dt^s - b}{a - ct^s}; \quad dx = \left(\frac{dt^s - b}{a - ct^s}\right)' dt.$

<u>Приклад.</u> Знайти невизначений інтеграл

$$\int\frac{dx}{\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}}=\left|\begin{array}{ll} x=t^4; & t=\sqrt[4]{x}; \\ dx=4t^3dt & \end{array}\right|=\int\frac{4t^3}{t+t^2}dt=4\int\frac{t^2}{t+1}dt=\int\left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)dt=$$

$$=\frac{t^2}{2}-t+\ln|t+1|+C=\frac{\sqrt{x}}{2}-\sqrt[4]{x}+\ln\left|\sqrt[4]{x}+1\right|+C.$$

<u>Приклад.</u> Знайти невизначений інтеграл

$$\int\frac{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[4]{x-1}}{(x-1)\left(1+\sqrt[6]{x-1}\right)}dx=\left|\begin{array}{ll} \sqrt[12]{x-1}=t; & x-1=t^{12}; \\ dx=12t^{11}dt; & \end{array}\right|=\int\frac{(t^4+t^3)12t^{11}dt}{t^{12}(1+t^2)}=12\int\frac{t^3+t^2}{t^2+1}dt=$$

$$=12\left(\int\frac{t^3}{t^2+1}dt+\int\frac{t^2}{t^2+1}dt\right)=12\left(\int\left(t-\frac{t}{t^2+1}\right)dt+\int\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt\right)=12\int tdt-12\int\frac{tdt}{t^2+1}+12\int dt-$$

$$-12\int\frac{dt}{1+t^2}=6t^2+12t-6\ln(t^2+1)-12\,\mathrm{arctg}\,t+C=6\sqrt[6]{x-1}+12\sqrt[12]{x-1}-6\ln(\sqrt[6]{x-1}+1)-$$

$$-12\,\mathrm{arctg}\sqrt[12]{x-1}+C.$$

<u>Інтегрування біноміальних диференціалів.</u>

<u>Означення:</u> Біноміальним диференціалом називається вираз

$$x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$$

де $m, n\ i\ p$ – раціональні числа.

Як було доведено академіком Чебышевым П.Л. (1821-1894), інтеграл від біномінального диференціала може бути виражений через елементарні функції тільки в наступних трьох випадках:

1) Якщо p – ціле число, то інтеграл раціоналізується за допомогою підстановки $t = \sqrt[\lambda]{x}$, де λ -спільний знаменник *m* і *n*.

2) Якщо $\dfrac{m+1}{n}$ - ціле число, то інтеграл раціоналізується підстановкою $t = \sqrt[s]{a + bx^n}$, де *s* – знаменник числа *p*.

3) Якщо $\dfrac{m+1}{n} + p$ - ціле число, то використовується підстановка $t = \sqrt[s]{\dfrac{a + bx^n}{x^n}}$, де *s* – знаменник числа *p*.

<u>Приклад</u>. Знайти невизначений інтеграл

$$I = \int \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx .$$

Перепишемо заданий інтеграл

$$I = \int x^{-\frac{1}{2}} (1 + x^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}} dx .$$

Це інтеграл від диференціального бінома, де $m = -\dfrac{1}{2}$, $n = \dfrac{1}{4}$, $p = \dfrac{1}{3}$; $\dfrac{m+1}{n} = 2$. Отже, має місце випадок 2) інтегрованості.

Підстановка $1+x^{\frac{1}{4}}=t^3$ дає: $x=(t^3-1)^4,\ dx=12t^2(t^3-1)^3\,dt$. Тому

$$I=\int x^{-\frac{1}{2}}(1+x^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}}dx=12\int\frac{t^3(t^3-1)^3}{(t^3-1)^2}dt=12\int(t^6-t^3)\,dt=\frac{12}{7}t^7-3t^4+C=$$

$$=\frac{12}{7}\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^{7/3}-3\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^{4/3}+C.$$

<u>Тригонометрична підстановка.</u>

Розглянемо інтеграл $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$. Існує кілька способів інтегрування такого роду функцій. Залежно від вигляду виразу, що стоїть під знаком радикала, застосовують той або інший спосіб. Розглянемо обчислення таких інтегралів за допомогою тригонометричних підстановок.

Як відомо, квадратний тричлен шляхом виділення повного квадрата може бути приведений до вигляду:

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(c-\frac{b^2}{4a}\right).$$

Зробимо заміну $t=x+\dfrac{b}{2a}$; $\quad dt=dx$;. $\quad ax^2+bx+c=at^2+\left(c-\dfrac{b^2}{4a}\right)$.

Розглянемо випадки:

1) $a>0, \quad c-\frac{b^2}{4a}>0$. Введемо позначення $a=m^2, \quad c-\frac{b^2}{4a}=n^2, \quad \sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{m^2t^2+n^2}$.

В цьому випадку підстановка $t=\frac{n}{m}\operatorname{tg} z$ або $t=\frac{n}{m}\operatorname{ctg} z$ приводить до інтегралу від раціональної функції відносно $\sin x$ і $\cos x$.

2) $a>0, \quad c-\frac{b^2}{4a}<0$. Введемо позначення $a=m^2$, $c-\frac{b^2}{4a}=-n^2$, $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{m^2t^2-n^2}$.

В цьому випадку підстановка $t=\frac{n}{m}\sec z$ або $t=\frac{n}{m}\operatorname{cosec} z$ приводить до інтегралу від раціональної функції відносно $\sin x$ і $\cos x$.

3) $a<0, \quad c-\frac{b^2}{4a}>0$. Введемо позначення $a=-m^2$, $c-\frac{b^2}{4a}=n^2$, $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{n^2-m^2t^2}$.

В цьому випадку підстановка $t=\frac{n}{m}\sin z$ або $t=\frac{n}{m}\cos z$ приводить до інтегралу від раціональної функції відносно $\sin x$ і $\cos x$.

Приклад: Обчислити

$$\int\frac{dx}{x^4\sqrt{9+x^2}}=\left|\begin{array}{l}x=3\operatorname{tg}z;\ dx=\dfrac{3}{\cos^2 z}dz;\\ \sqrt{9+x^2}=\dfrac{3}{\cos z}\end{array}\right|=\int\frac{3\cos z dz}{\cos^2 z 3^4\operatorname{tg}^4 z3}=\int\frac{\cos^3 z dz}{3^4\sin^4 z}=\frac{1}{81}\int\frac{(1-\sin^2 z)d(\sin z)}{\sin^4 z}=$$

$$=-\frac{1}{3\cdot 81\sin^3 z}+\frac{1}{81\sin z}+C=\left|\sin z=\sqrt{1-\frac{9}{9+x^2}}=\frac{x}{\sqrt{9+x^2}}\right|=-\frac{(9+x^2)^{3/2}}{243x^3}+\frac{\sqrt{9+x^2}}{81x}+C.$$

Приклад: Обчислити

$$\int\frac{dx}{x(x^2-4)^{5/2}}=\left|\begin{array}{l}x=2\sec z=\dfrac{2}{\cos z};\ dx=\dfrac{2\sin z}{\cos^2 z}dz;\\ \sqrt{x^2-4}=2\operatorname{tg}z\end{array}\right|=\int\frac{2\sin z\cos z dz}{\cos^2 z\cdot 2\cdot 2^5\operatorname{tg}^5 z}=\frac{1}{32}\int\operatorname{ctg}^4 z dz=$$

$$=\frac{1}{32}\int\operatorname{ctg}^2 z\left(\frac{1}{\sin^2 z}-1\right)dz=-\frac{1}{32}\int\operatorname{ctg}^2 z d(\operatorname{ctg}z)-\frac{1}{32}\int\operatorname{ctg}^2 z dz=-\frac{1}{96}\operatorname{ctg}^3 z-\frac{1}{32}\int\left(\frac{1}{\sin^2 z}-1\right)dz=$$

$$=-\frac{1}{96}\operatorname{ctg}^3 z+\frac{1}{32}\operatorname{ctg}z+\frac{z}{32}+C=\left|\operatorname{ctg}z=\frac{2}{\sqrt{x^2-4}}\right|=-\frac{1}{12(x^2-4)^{3/2}}+\frac{1}{16\sqrt{x^2-4}}+$$

$$+\frac{1}{32}\arccos\frac{2}{x}+C.$$

Приклад: Обчислити

$$\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\left|\begin{matrix}x=a\sin z;\ z=\arcsin\frac{x}{a};\\ dx=a\cos zdz\end{matrix}\right|=\int\sqrt{a^2-a^2\sin^2 z}\,a\cos zdz=\int a^2\cos^2 zdz=\frac{a^2}{2}\int(1+\cos 2z)dz=$$

$$=\frac{a^2z}{2}+\frac{a^2}{4}\sin 2z+C=\frac{a^2z}{2}+\frac{a^2}{2}\sin z\cos z+C=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

Інтеграли, що не виражаються через елементарні функції.

Всі елементарні функції диференційовні і їхні похідні знову є елементарними функціями. Про інтегрування функцій цього сказати не можна. Існують елементарні функції, інтеграли від яких не виражаються через елементарні функції (кажуть: "не інтегруються в кінцевому вигляді").

До таких інтегралів відносяться:

1) $\int e^{-x^2}dx$ - інтеграл Пуассона (Сімеон Дені Пуассон – французький математик (1781-1840));

2) $\int\sin x^2dx$; $\int\cos x^2dx$ - інтеграли Френеля (Жан Огюстен Френель – французький учений (1788-1827) - теорія хвильової оптики й ін.);

3) $\int\frac{dx}{\ln x}$ - інтегральний логарифм;

4) $\int \frac{e^x}{x} dx$ - зводиться до інтегрального логарифма;

5) $\int \frac{\sin x}{x} dx$ - інтегральний синус;

6) $\int \frac{\cos x}{x} dx$ - інтегральний косинус.