Лекція 4. МЕТОДИ МІНІМІЗАЦІЇ ЛОГІЧНИХ ФУНКЦІЙ

1. Метод Квайна
2. Метод Квайна-Мак-Класкі
3. Метод Блейка-Порецького
4. Метод Нельсона
5. Метод карт Карно-Вейча
6. Мінімізація кон'юнктивних нормальних форм
7. Мінімізація функцій в базисах І-НЕ та АБО-НЕ
8. Мінімізація не повністю визначених функцій алгебри логіки
9. Мінімізація систем булевих функцій

Розглянемо основні методи мінімізації логічних функцій в класі диз'юнктивних нормальних форм. При цьому під мінімальними будемо розуміти диз'юнктивні нормальні форми (ДНФ), які містять найменшу сумарну кількість змінних (букв) в усіх диз'юнктивних членах.

Нагадаємо деякі поняття.

Елементарним добутком (кон'юнкцією) будемо називати кон'юнкцію декількох різних змінних, що взяті із запереченнями або без них. Наприклад $x, xy, \bar{x}y, \bar{x}yz$ і тому подібні.

Диз'юнктивною нормальною формою (ДНФ) називають диз'юнкцію елементарних кон'юнкцій.

Мінімальною диз'юнктивною нормальною формою булевої функції називають ДНФ, яка містить найменшу кількість букв (відносно всіх інших ДНФ, які представляють задану функцію).

Функція $\varphi(x_n)$ називається імплікантою функції $f(x_n)$, якщо на будь-якому наборі значень змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$ виконується умова

$$\varphi(x_n) \le f(x_n).$$

Наведемо два твердження (без доведення), які є корисними при отриманні мінімальних ДНФ:

1) диз'юнкція будь-якого числа імплікант булевої функції f також є імплікантою цієї функції;

2) будь-яка булева функція f еквівалентна диз'юнкції всіх своїх імплікант; така форма подання булевої функції називається скороченою ДНФ.

Простими імплікантами логічної функції f називають такі елементарні кон'юнкції, які самі входять до даної функції, тобто є імплікантами функції f, але ніяка їх власна частина не є імплікантою функції f.

Прості імпліканти являють собою найкоротші елементарні добутки, що входять до даної логічної функції. Звідси випливає, що логічна функція f дорівнює диз'юнкції всіх простих імплікант.

Будь-яка логічна функція має нескінченну множину простих імплікант, кількість яких менша або дорівнює кількості конституент одиниці в досконалій диз'юнктивній нормальній формі (ДДНФ).

Метод Квайна

Розглянемо метод отримання скороченої ДНФ, який називається методом Квайна. Цей метод базується на перетвореннях досконалої диз'юнктивної нормальної форми за допомогою операції неповного склеювання та поглинання.

Операція (повного) склеювання визначається співвідношенням:

$$xy \vee x\bar{y} = x \qquad (3.1)$$

Справедливість даного виразу випливає з такого перетворення:

$$xy \vee x\bar{y} = x(y \vee \bar{y}) = x \cdot 1 = x.$$

Операція поглинання визначається співвідношенням:

$$x \vee xy = x. \quad (3.2)$$

Кажуть, що член xy поглинається членом x. Справедливість сказаного випливає з перетворень:

$$x \vee xy = x(1 \vee y) = x \cdot 1 = x.$$

Операція неповного склеювання, що застосована в методі Квайна, визначається формулою

$$xy \vee x\bar{y} = x \vee xy \vee x\bar{y},$$

яка може бути отримана з формул (3.1) і (3.2)

$$x = x \vee x = x \vee xy \vee xy \vee x\bar{y} = x \vee xy \vee x\bar{y}.$$

Теорема Квайна

Якщо в досконалій диз'юнктивній нормальній формі логічної функції провести всі операції неповного склеювання, а потім всі операції поглинання, то вийде скорочена диз'юнктивна нормальна форма цієї функції, тобто диз'юнкція всіх її простих імплікант [1, 2].

З теореми Квайна випливає: якщо функція задана у довільній формі, то її слід перетворити в досконалу ДНФ, застосувати функцію розгортання, і лише після цього проводити операції склеювання і поглинання.

Приклад

Знайти скорочену ДНФ функції

$$f = \overline{\overline{x(y \vee z)} \wedge (x \vee yz)} = \overline{\overline{x(y \vee z)}} \vee \overline{(x \vee yz)} = x(y \vee z) \vee \bar{x}(\overline{yz}) =$$
$$= x(y \vee z) \vee \bar{x}(\bar{y} \vee \bar{z}) = xy \vee xz \vee \bar{x}\bar{y} \vee \bar{x}\bar{z}.$$

Застосувавши розгортку знаходимо ДДНФ

$$xy(\bar{z} \vee z) \vee xz(\bar{y} \vee y) \vee \bar{x}\bar{y}(\bar{z} \vee z) \vee \bar{x}\bar{z}(\bar{y} \vee y) =$$
$$= xyz \vee xy\bar{z} \vee xyz \vee x\bar{y}z \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} =$$
$$= \frac{xyz}{1} \vee \frac{xy\bar{z}}{2} \vee \frac{x\bar{y}z}{3} \vee \frac{\bar{x}\bar{y}z}{4} \vee \frac{\bar{x}\bar{y}\bar{z}}{5} \vee \frac{\bar{x}y\bar{z}}{6}.$$

Проводимо склеювання:

1 – 2 xy

$$xyz \vee xy\bar{z} = xy(z + \bar{z}) = xy$$

2 – 6 $y\bar{z}$

$$xy\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z} = y\bar{z}(x + \bar{x}) = y\bar{z}$$

1 – 3 xz

$$xyz \vee x\bar{y}z = xz(y + \bar{y}) = xz$$

3 – 4 $\bar{y}z$

$$x\bar{y}z \vee \bar{x}\bar{y}z = \bar{y}z(x + \bar{x}) = \bar{y}z$$

4 – 5 $\bar{x}\bar{y}$

$$\bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} = \bar{x}\bar{y}(z + \bar{z}) = \bar{x}\bar{y}$$

5 – 6 $\bar{x}\bar{z}$

$$\bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z} = \bar{x}\bar{z}(y + \bar{y}) = \bar{x}\bar{z}$$

Для пошуку мінімальних форм зручно користуватися імплікантною таблицею, яка подана в табл. 3.1, у вертикальні та горизонтальні входи якої записуються конституенти 1-ці та прості імпліканти заданої функції.

Таблиця 3.1

	xyz	$xy\bar{z}$	$x\bar{y}z$	$\bar{x}\bar{y}z$	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$	$\bar{x}y\bar{z}$
xy	V	V				
$y\bar{z}$		V	V			V
xz	V		V			
$\bar{y}z$			V	V		
$\bar{x}\bar{y}$				V	V	
$\bar{x}\bar{z}$					V	V

Отримано дві еквівалентні мінімальні диз’юнктивні нормальні форми.

$$f(xyz) = xy + \bar{x}\bar{z} + \bar{y}z = xz + y\bar{z} + \bar{x}\bar{y};$$

Таким чином при мінімізації за методом Квайна припускається, що вихідна функція задана в досконалій диз’юнктивній нормальній формі (ДДНФ). Задача мінімізації за методом Квайна полягає в попарному порівнянні всіх імплікант, що входять до ДДНФ, з метою виявлення можливості поглинання будь-якої змінної:

$$f \cdot x_i \vee f \cdot \bar{x}_i = f.$$

Ця процедура знижує ранг термів та продовжується до тих пір, поки не залишиться жодного члена, який допускає поглинання з будь-яким іншим термом. Терми, які піддалися поглинанню, відмічаються. Невідмічені терми являють собою первинні імпліканти.

Отриманий логічний вираз не завжди виявляється мінімальним, тому досліджується можливість подальшого спрощення. Для цього складається таблиця, в рядках якої записуються знайдені первинні імпліканти, а в стовпцях вказуються терми вихідного рівняння. Клітинки цієї таблиці відмічаються у випадку, коли первинна імпліканта входить до складу будь-якого терма. Після цього задача спрощення зводиться до того, щоб знайти таку мінімальну кількість первинних імплікант, які покривають всі стовпці.

Розглянемо мінімізацію логічної функції, яка задана у вигляді:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = V_1(3, 4, 5, 7, 9, 11, 12, 13) =$$

$$= \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 \cdot x_4 + \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3 \cdot \bar{x}_4 + \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3 \cdot x_4 + \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 +$$

$$+ x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 \cdot x_4 + x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 \cdot x_4 + x_1 \cdot x_2 \bar{x}_3 \cdot \bar{x}_4 + x_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3 \cdot x_4.$$

Задачу мінімізації функції відповідно до алгоритму Квайна розв’язуємо в декілька етапів.

Етап 1. Знаходження первинних імплікант.

Складаємо таблицю 3.2 і знаходимо імпліканти четвертого і третього рангу, тобто знижуємо ранг термів, які входять до ДДНФ. Потім складаємо іншу таблицю (табл. 3.3), яка містить всі терми, що не піддалися поглинанню, а також первинні імпліканти третього рангу. Складання таблиць продовжується до тих пір, поки буде неможливо застосувати правило поглинання. В нашому завданні можна дійти до первинної імпліканти другого рангу (табл. 3.3).

Таким чином первинні імпліканти найменшого рангу – $x_2\bar{x}_3$.

Етап 2. Встановлення позначок.

Складаємо таблицю, кількість рядків якої дорівнює кількості отриманих первинних імплікант, а кількість стовпців збігається з кількістю мінтермів ДДНФ. Якщо в деякий мінтерм ДДНФ входить будь-яка з первинних імплікант, то на перетині відповідного стовпця і рядка ставиться позначка (табл. 3.4).

Етап 3. Знаходження суттєвих імплікант.

Якщо в будь-якому із стовпців таблиці 3.4 є тільки одна позначка, то первинна імпліканта у відповідному рядку є суттєвою, оскільки без неї не буде отримана вся множина заданих мінтермів. В таблиці 3.4 суттєвою імплікантою є терм $x_2\bar{x}_3$. Стовпці, які відповідають суттєвим імплікантам, з таблиці викреслюються.

Етап 4. Викреслення зайвих стовпців.

Після третього етапу в результаті викреслення стовпців 2, 3, 7 і 8 одержуємо таблицю 3.5. Якщо в таблиці є два стовпці, в яких є позначки в однакових рядках, то один з них викреслюється. Покриття стовпця, що залишився, буде здійснювати відкинутий мінтерм. В прикладі такого випадку немає.

Етап 5. Викреслення зайвих первинних імплікант.

Якщо після викреслення декількох стовпців на етапі 4 в табл. 3.5 з'являються рядки, в яких немає жодної позначки, то первинні імліканти, які відповідають цим рядкам, виключаються з подальшого розгляду, оскільки вони не покривають мінтерми, що залишилися.

Етап 6. Вибір мінімального покриття.

Вибирається в таблиці 3.5 така сукупність первинних імплікант, яка містить позначки в усіх стовпцях. При декількох можливих варіантах такого вибору надається перевага варіанту покриття з мінімальним сумарним числом букв в імплікантах, що створюють покриття. Цю вимогу задовольняють первинні імпліканти $\overline{x}_1 x_3 x_4$ і $x_1 \overline{x}_2 x_4$.

Таким чином, мінімальна форма заданої функції буде складатися з суми суттєвих імплікант і первинних імплікант, які покривають мінтерми, що залишились:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2 \cdot \overline{x}_3 + \overline{x}_1 x_3 x_4 + x_1 \overline{x}_2 x_4.$$

Нижче наведено таблиці (3.2-3.5), в яких поданий даний приклад.

Таблиця 3.2

Вихідні терми	$\overline{x}_1\overline{x}_2x_3x_4$	$\overline{x}_1x_2\overline{x}_3\overline{x}_4$	$\overline{x}_1x_2\overline{x}_3x_4$	$\overline{x}_1x_2x_3x_4$	$x_1\overline{x}_2\overline{x}_3x_4$	$x_1\overline{x}_2x_3x_4$	$x_1x_2\overline{x}_3\overline{x}_4$	$x_1x_2\overline{x}_3x_4$
$\overline{x}_1\overline{x}_2x_3x_4$	1			$\overline{x}_1x_3x_4$		$\overline{x}_2x_3x_4$		
$\overline{x}_1x_2\overline{x}_3\overline{x}_4$		1	$\overline{x}_1x_2\overline{x}_3$				$x_2\overline{x}_3\overline{x}_4$	
$\overline{x}_1x_2\overline{x}_3x_4$		$\overline{x}_1x_2\overline{x}_3$	1	$\overline{x}_1x_2x_4$				$x_2\overline{x}_3x_4$
$\overline{x}_1x_2x_3x_4$	$\overline{x}_1x_3x_4$		$\overline{x}_1x_2x_4$	1				
$x_1\overline{x}_2\overline{x}_3x_4$					1	$x_1\overline{x}_2x_4$		$x_1\overline{x}_3x_4$
$x_1\overline{x}_2x_3x_4$	$\overline{x}_2x_3x_4$				$x_1\overline{x}_2x_4$	1		
$x_1x_2\overline{x}_3\overline{x}_4$		$x_2\overline{x}_3\overline{x}_4$					1	$x_1x_2\overline{x}_3$
$x_1x_2\overline{x}_3x_4$			$x_2\overline{x}_3x_4$		$x_1\overline{x}_3x_4$		$x_1x_2\overline{x}_3$	1

Таблиця 3.3

Терм рангу 3	$\overline{x}_1x_3x_4$	$\overline{x}_2x_3x_4$	$\overline{x}_1x_2\overline{x}_3$	$x_2\overline{x}_3\overline{x}_4$	$\overline{x}_1x_2x_4$	$x_2\overline{x}_3x_4$	$x_1\overline{x}_2x_4$	$x_1\overline{x}_3x_4$	$x_1x_2\overline{x}_3$
$\overline{x}_1x_3x_4$	1								
$\overline{x}_2x_3x_4$		1							
$\overline{x}_1x_2\overline{x}_3$			1						$x_2\overline{x}_3$
$x_2\overline{x}_3\overline{x}_4$				1		$x_2\overline{x}_3$			
$\overline{x}_1x_2x_4$					1				
$x_2\overline{x}_3x_4$				$x_2\overline{x}_3$		1			
$x_1\overline{x}_2x_4$							1		
$x_1\overline{x}_3x_4$								1	
$x_1x_2\overline{x}_3$			$x_2\overline{x}_3$						1

Таблиця 3.4

Вихідні терми / первинні імпліканти	$\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3x_4$	$\overline{x_1}\,x_2\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}$	$\overline{x_1}\,x_2\,\overline{x_3}\,x_4$	$\overline{x_1}\,x_2x_3x_4$	$x_1\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,x_4$	$x_1\,\overline{x_2}\,x_3x_4$	$x_1x_2\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}$	$x_1x_2\,\overline{x_3}\,x_4$
$\overline{x_1}\,x_3x_4$	∨			∨				
$\overline{x_2}\,x_3x_4$	∨					∨		
$\overline{x_1}\,x_2x_4$			∨	∨				
$x_1\,\overline{x_2}\,x_4$					∨	∨		
$x_1\,\overline{x_3}\,x_4$					∨			∨
$x_2\,\overline{x_3}$		∨	∨				∨	∨

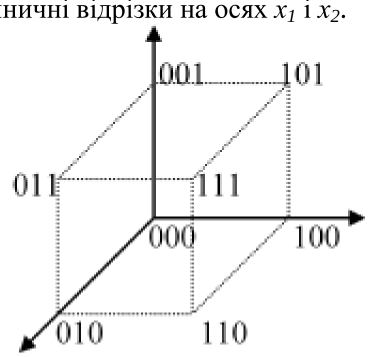
Таблиця 3.5

Первинні імпліканти	Вихідні терми			
	$\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3x_4$	$\overline{x_1}\,x_2x_3x_4$	$x_1\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,x_4$	$x_1\,\overline{x_2}\,x_3x_4$
$\overline{x_1}\,x_3x_4$	∨	∨		
$\overline{x_2}\,x_3x_4$	∨			∨
$\overline{x_1}\,x_2x_4$		∨		
$x_1\,\overline{x_2}\,x_4$			∨	∨
$x_1\,\overline{x_3}\,x_4$			∨	

Метод Квайна-Мак-Класкі

В методі Квайна-Мак-Класкі використовується геометричне подання логічних функцій.

Якщо функція містить два аргументи, то їй відповідають набори 00, 01, 10, 11 (рис. 3.1, а). В декартових координатах візьмемо дві осі x_1,x_2. В точці перетину координат x_1=0, x_2=0 відкладаємо одиничні відрізки на осях x_1 і x_2.



а)

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = V_1(3, 4, 5, 7, 9, 11, 12, 13)$$

б)

Рисунок 3.1

Перетин координат з точками 01 і 10 дає значення аргументів функції 11; можна використовувати тривимірний простір (куб) при поданні функції 3-х аргументів (рис. 3.1, б).

В загальному випадку функції алгебри логіки, які мають n аргументів, зображуються n-вимірним кубом.

Недоліком методу Квайна є необхідність повного попарного порівняння всіх мінтермів на етапі знаходження первинних імплікант. Із збільшенням кількості мінтермів збільшується кількість попарних порівнянь. Числове подання функції алгебри логіки дозволяє спростити етап знаходження первинних імплікант. Всі мінтерми записуються у вигляді двійкових номерів, а всі номери розбиваються за кількістю одиниць на групи, що не перетинаються, оскільки умовою утворення r-кубу є наявність розбіжності в (r-1) кубах лише за однією координатою (в одному двійковому розряді) та наявність загальних незалежних координат. Тому групи, які відрізняються в двох розрядах або більше, просто немає сенсу порівнювати. При цьому в i-ту групу ввійдуть всі номери (набори), що мають у своєму двійковому записі *i* одиниць. Попарне порівняння можна проводити лише між сусідніми за номерами групами.

Нехай задано функцію:

$$K^0_1=\{0100\}; \qquad K^0_2=\begin{Bmatrix}0011\\0101\\1001\\1100\end{Bmatrix}; \qquad K^0_3=\begin{Bmatrix}0111\\1011\\1101\end{Bmatrix}.$$

Розглянемо її мінімізацію за методом Квайна-Мак-Класкі:

Спочатку випишемо 0-куби:

K^0={0011,0100,0101,0111,1001,1011,1100,1101}.

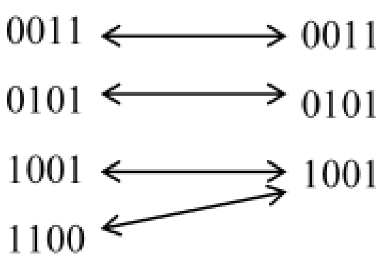
Розіб'ємо 0-куби на три групи за кількістю одиниць в кожному двійковому наборі:

$$\begin{Bmatrix}010x\\x100\end{Bmatrix};$$

За методом Квайна-Мак-Класкі мінімізація логічної функції буде складатися з таких етапів:

Етап 1. Знаходження первинних імплікант.

а) порівняння K^0_1 та K^0_2:



На основі порівняння будуємо куб K^1_1, в якому поглинену координату замінюємо символом *x*:

$$K^1_1=\begin{Bmatrix} 0x11 \\ x011 \\ 01x1 \\ 10x1 \\ 1x01 \\ 110x \\ x101 \end{Bmatrix}$$

б) порівняння K^0_2 та K^0_3 :

$$K^1_1=\begin{Bmatrix} 010x \\ 110x \end{Bmatrix}; \quad K^1_2=\begin{Bmatrix} 01x1 \\ 10x1 \end{Bmatrix}; \quad K^1_3=\begin{Bmatrix} 0x11 \\ 1x01 \end{Bmatrix}; \quad K^1_4=\begin{Bmatrix} x100 \\ x011 \\ x101 \end{Bmatrix};$$

На основі порівняння будуємо куб K^1_2, в якому поглинену координату замінюємо символом *x*:

$$\begin{Bmatrix} 010x \\ 110x \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} 01x1 \\ 10x1 \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} 0x11 \\ 1x01 \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} x100 \\ x011 \\ x101 \end{Bmatrix}.$$

$K^1_2=\{x10x\}.$

Первинних імплікант рангу 4 немає.

в) розіб’ємо всі 1-куби на чотири групи залежно від положення незалежної координати *x*:

$$\{01x1, 10x1, 0x11, 1x01, x011\}$$

г) на основі порівняння всередині кожної групи K^1_1 , K^1_2 ,K^1_3 та K^1_4 отримаємо результати:

$$\{x10x\}$$

Отже первинні імпліканти рангу 3:

Таблиця 3.6

Первинні імпліканти	0011	0100	0101	0111	1001	1011	1100	1101
01*x*1				*				
10*x*1					*	*		
0*x*11	*			*				
1*x*01					*		*	*
*x*011	*							
*x*10*x*		*	*				*	*

.

Відповідно одержуємо первинну імпліканту рангу 2:

$x_2 \overline{x_3}$.

Етап 2. Встановлення позначок.

В таблицях (3.6-3.7) подані результати мінімізації заданої функції за методом Квайна-Мак-Класкі.

Таблиця 3.7

Первинні імпліканти	Вихідні терми			
	0011	0111	1001	1011
01*x*1	*	*		
10*x*1			*	*
0*x*11	*	*		
1*x*01				
*x*011	*			

Етап 3. Знаходження суттєвих імплікант.
Суттєвою імплікантою рангу 2 будемо називати терм

$\{x10x\}$ = $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2\,\overline{x_3} \vee x_1\,\overline{x_2}\,x_4 \vee \overline{x_1}\,x_3 x_4$.

Етапи 4 і 5. Відсутні.

Етап 6. Вибирається мінімальне покриття термів, що залишилися {10x1} і {0x11} (табл. 3.5)

Результат:

Метод Блейка-Порецького

Метод дозволяє отримувати скорочену ДНФ булевої функції *f* з її довільної ДНФ. Базується на використанні формули узагальненого склеювання:

$$F_1 x \vee F_2 \overline{x} = F_1 x \vee F_2 \overline{x} \vee F_1 F_2,$$

справедливість якої легко довести. Дійсно,

$$F_1 x = F_1 x \vee F_1 F_2 x; \quad F_2 \overline{x} = F_2 \overline{x} \vee F_1 F_2 \overline{x}.$$

Таким чином,

$$F_1 x \vee F_2 \overline{x} = F_1 x \vee F_1 F_2 x \vee F_2 \overline{x} \vee F_1 F_2 \overline{x} = F_1 x \vee F_2 \overline{x} \vee F_1 F_2.$$

В основу метода покладено таке твердження: якщо в довільній ДНФ булевої функції *f* виконати всі можливі узагальнені склеювання, а потім виконати всі поглинання, то в результаті отримаємо скорочену ДНФ функції *f*.

Приклад 1. Булева функція *f*1 задана довільною ДНФ

$$f_1 = \overline{x}_1 \overline{x}_2 \vee x_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3 \vee x_1 x_2.$$

Знайти методом Блейка – Порецького скорочену ДНФ функцію *f*. Проводимо узагальнене склеювання. Легко побачити, що перший та другий елемент заданої ДНФ допускають узагальнене склеювання за змінною x_1. В результаті склеювання маємо

$$\overline{x}_1 \overline{x}_2 \vee x_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3 = \overline{x}_1 \overline{x}_2 \vee x_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3 \vee \overline{x}_2 \overline{x}_3.$$

Перший та третій елемент ДНФ допускають узагальнене склеювання як за елементом x_1 так і за x_2, після склеювання за x_1 маємо результат

$$\overline{x}_1 \overline{x}_2 \vee x_1 x_2 = \overline{x}_1 \overline{x}_2 \vee x_1 x_2 \vee \overline{x}_2 x_2 = \overline{x}_1 \overline{x}_2 \vee x_1 x_2.$$

Склеювання за x_2 дає аналогічний результат

$$\overline{x}_1 \overline{x}_2 \vee x_1 x_2 = \overline{x}_1 \overline{x}_2 \vee x_1 x_2.$$

Другий та третій елемент ДНФ допускають узагальнене склеювання за змінною x_2. Після склеювання отримуємо

$$x_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3 \vee x_1 x_2 = x_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3 \vee x_1 x_2 \vee x_1 \overline{x}_3.$$

Виконавши останнє узагальнене склеювання, переходимо до ДНФ:

$$f_1 = \overline{x}_1 \overline{x}_2 \vee x_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3 \vee \overline{x}_2 \overline{x}_3 \vee x_1 x_2 \vee x_1 \overline{x}_3.$$

Після виконання поглинань отримуємо

$$f_1 = \overline{x}_1 \overline{x}_2 \vee \overline{x}_2 \overline{x}_3 \vee x_1 x_2 \vee x_1 \overline{x}_3.$$

Спроби подальшого використання операції узагальненого склеювання і поглинання не дають результату. Отже, отримана скорочена ДНФ функції f_1 Далі задача пошуку мінімальної ДНФ вирішується за допомогою імплікантної матриці таким же чином, як і в методі Квайна.

Приклад 2. Булева функція *f*2 задана довільною ДНФ.

$$f_2 = \overline{x}_1 x_2 \vee x_2 \overline{x}_3 x_4 \vee \overline{x}_1 x_3 x_4 \vee x_2 x_3 x_4.$$

Знайти методом Блейка – Порецького скорочену ДНФ функції f_2. Проводимо узагальнене склеювання. Легко побачити, що другий та четвертий елемент заданої ДНФ допускають узагальнене склеювання за змінною x_3. В результаті склеювання маємо

$$x_2 \overline{x}_3 x_4 \vee x_2 x_3 x_4 = x_2 \overline{x}_3 x_4 \vee x_2 x_3 x_4 \vee x_2 x_4.$$

Очевидно, що ніякі інші елементи заданої ДДНФ не допускають узагальнене склеювання за іншими змінними.

Виконавши останнє узагальнене склеювання, переходимо до ДНФ:

$$f_2 = \overline{x}_1 x_2 \vee x_2 \overline{x}_3 x_4 \vee \overline{x}_1 x_3 x_4 \vee x_2 x_3 x_4 \vee x_2 x_4.$$

Після виконання поглинань отримуємо

$$f_2 = \overline{x_1}\,\overline{x_2} \vee x_2 x_4 \vee \overline{x_1} x_3 x_4.$$

Як і у першому прикладі подальше використання операції узагальненого склеювання і поглинання не дають результату, мінімальну ДНФ знаходять за допомогою імплікантної матриці, як у методі Квайна.

Метод Нельсона

Метод дозволяє отримати скорочену ДНФ булевої функції *f* з її довільної кон'юнктивної нормальної форми. Суть методу полягає у використанні такого твердження, яке наводимо без доведення [9]: якщо в довільній КНФ булевої функції *f* розкрити дужки і зробити всі поглинання, то в результаті отримаємо скорочену ДНФ булевої функції *f*.

Приклад:

Булева функція *f* задана КНФ:

$$f = (x_1 \vee \overline{x_2})(\overline{x_1} \vee x_3)(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}).$$

Знайти методом Нельсона скорочену ДНФ функції *f*. Після розкриття дужок отримуємо:

$$f = (x_1 x_3 \vee x_3 \overline{x_2} \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2})(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}) = x_1 x_3 \vee x_1 x_2 x_3 \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee x_1 \overline{x_2} x_3.$$

Після проведення всіх поглинань отримали $f = x_1 x_3 \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}$. Отримана скорочена ДНФ функції *f*.

Метод карт Карно-Вейча

Одним з способів подання булевих функцій від невеликої кількості змінних є карти Карно. Їх різновид – карти (діаграми) Вейча, які будуються як розгортки кубів на площині. При цьому вершини куба зображуються як клітинки карти, координати яких збігаються з координатами відповідних вершин куба. Карта заповнюється так само, як таблиця істинності: значення 1 вказується в клітинці, що відповідає набору, на якому функція має значення 1. Значення 0 звичайно на картах не відображається.

Карти (діаграми) Вейча

Метод дозволяє швидко одержати мінімальні ДНФ булевої функції f невеликої кількості змінних. В основі методу лежить задання булевих функцій діаграмами деякого спеціального вигляду: їх називають діаграми Вейча. Для булевої функції двох змінних діаграма Вейча має вигляд (таблиця 3.8). Кожна клітинка діаграми відповідає набору змінних булевої функції в її таблиці істинності. В клітинці діаграми Вейча ставиться одиниця, якщо булева функція набуває одиничного значення на відповідному наборі. Нульові значення булевої функції в діаграмі Вейча не проставляються. Для булевої функції трьох змінних діаграма Вейча має такий вигляд (табл. 3.9), аналогічно діаграма Вейча для функції чотирьох змінних має вигляд (табл. 3.10).

Таблиця 3.8

	X_1	$\overline{X_1}$
X_2	11	01
$\overline{X_2}$	10	00

Таблиця 3.9

	X_1		$\overline{X_1}$	
X_2	110	111	011	010
$\overline{X_2}$	100	101	001	000
	$\overline{X_3}$	X_3		$\overline{X_3}$

Таблиця 3.10

	X_2		$\overline{X_2}$		
X_1	1100	1101	1001	1000	$\overline{X_3}$
X_1	1110	1111	1011	1010	X_3
$\overline{X_1}$	0110	0111	0011	0010	X_3
$\overline{X_1}$	0100	0101	0001	0000	$\overline{X_3}$
	$\overline{X_4}$	X_4	X_4	$\overline{X_4}$	

Правила мінімізації такі:

1. Дві сусідні клітинки (два 0-куби) утворюють один 1-куб. При цьому мається на увазі, що клітинки, які знаходяться на межах карти, також є сусідніми відносно одна одної;
2. Чотири вершини можуть об’єднуватися, утворюючи один 2-куб, що містить дві незалежні координати;
3. Вісім вершин можуть об’єднуватися, утворюючи один 3-куб;
4. Шістнадцять вершин, об’єднуючись, утворюють один 4-куб і т.д.

Відзначимо, що сусідніми клітинками є клітинки, які збігаються при суміщенні карт поворотом навколо загального ребра.

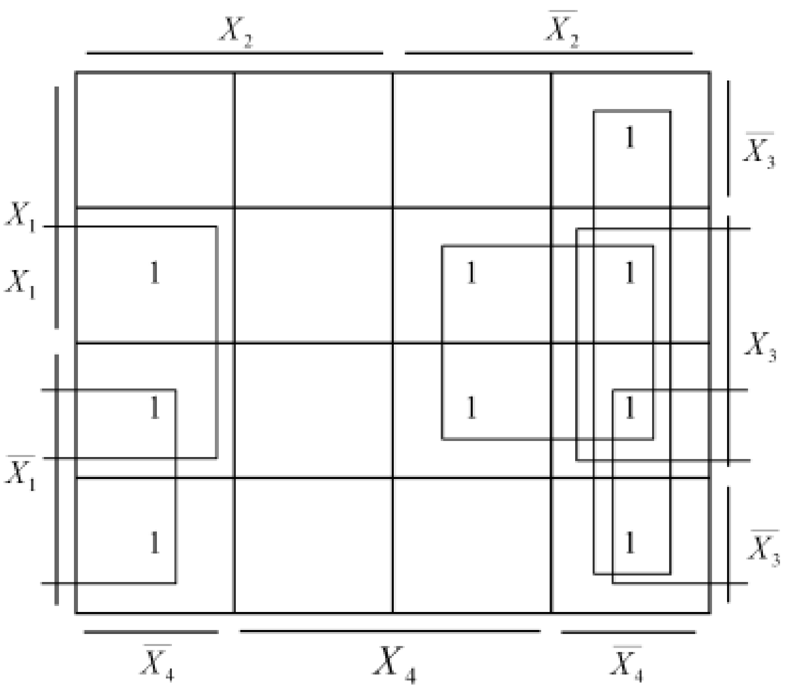
Сукупність прямокутників, які покривають усі одиниці, називається покриттям. Зазначимо, що одна і та ж комірка може покриватися два або декілька разів.

Таким чином, формула, що отримується в результаті мінімізації логічної функції за допомогою діаграм Вейча, містить суму стількох елементарних добутків, скільки прямокутників є в покритті. Чим більше комірок в прямокутнику, тим менше змінних міститься у відповідному йому елементарному добутку.

Нехай задана логічна функція:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = V_1(0, 2, 3, 4, 6, 8, 10, 11, 14) = \overline{x}_1\,\overline{x}_2\,\overline{x}_3\,\overline{x}_4 \vee \overline{x}_1\,\overline{x}_2\,x_3\,\overline{x}_4 \vee \overline{x}_1\,\overline{x}_2\,x_3 x_4 \vee$$
$$\vee \overline{x}_1\,x_2\,\overline{x}_3\,\overline{x}_4 \vee \overline{x}_1\,x_2 x_3\,\overline{x}_4 \vee x_1\,\overline{x}_2\,\overline{x}_3\,\overline{x}_4 \vee x_1\,\overline{x}_2\,x_3\,\overline{x}_4 \vee x_1\,\overline{x}_2\,x_3 x_4 \vee x_1 x_2 x_3\,\overline{x}_4 .$$

Будуємо діаграму Вейча для заданої функції:



Таким чином, мінімальна форма заданої функції має такий вигляд:

$$f(x_1, x_2, x_3 x_4) = \overline{x_1}\,\overline{x_4} + x_3\,\overline{x_4} + \overline{x_2}\,x_3 + \overline{x_2}\,\overline{x_4}\,.$$

Карти Карно

Метод карт Карно знаходить широке застосування для мінімізації логічних функцій.

Основою мінімізації за допомогою карти Карно є такий крок: два мінтерма, що знаходяться в сусідніх клітинках карти, можуть бути замінені однією кон'юнкцією, яка містить на одну змінну менше. Якщо сусідніми є дві пари мінтермів, то така група з чотирьох мінтермів може бути замінена кон'юнкцією, яка містить на дві змінних менше. В загальному випадку наявність мінтермів в 2^n сусідніх клітинках дозволяє виключити n змінних. Такі дії можливо показати, якщо сусідні пари мінтермів перетворювати методом послідовного виключення змінних, використовуючи при цьому закони

$$(x_1 \vee x_2)x_3 = x_1 x_3 \vee x_2 x_3;\ (x_1 x_2) \vee x_3 = (x_1 \vee x_3)(x_2 \vee x_3),$$

правила поглинання $x_1 \vee x_1 x_2 = x_1$

$$x_1 x_2 \vee x_1 \overline{x_2} = x_1;$$

і склеювання $(x_1 \vee x_2)(x_1 \vee x_2) = x_1$.

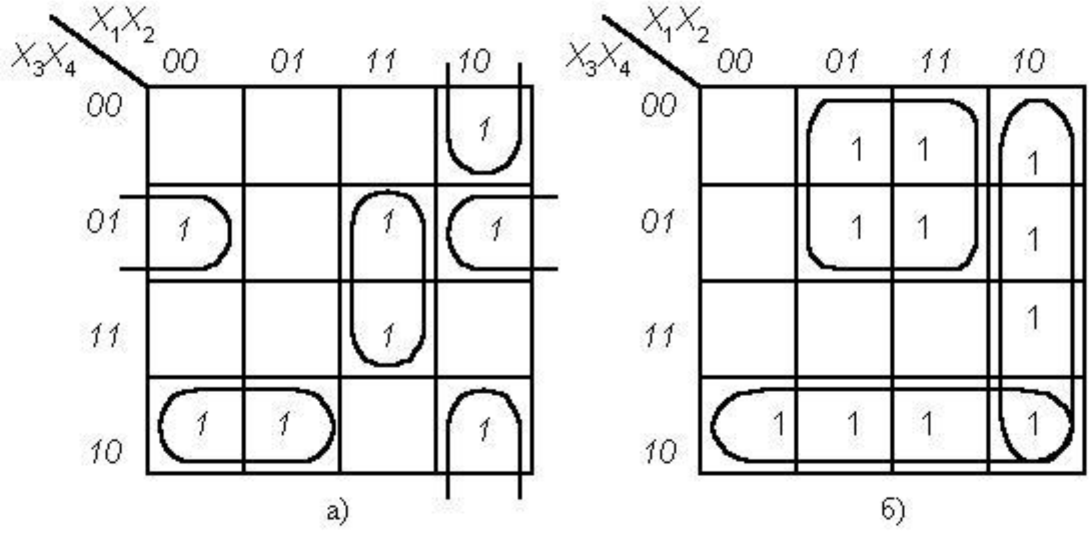


Рисунок 3.2 - Приклади об'єднання клітинок в картах Карно

Виконучи мінімізацію необхідно пам’ятати, що сусідніми клітинками є не тільки клітинки, які розміщені близько по горизонталі і вертикалі, але й клітинки на протилежних сторонах карти Карно; клітинки можуть об’єднуватися по дві (рис. 3.2, а), чотири (рис 3.2, б) і т. ін.; одна і та ж клітинка карти Карно може входити в декілька груп.

Картами Карно можна користуватися для мінімізації логічних функцій, заданих як в ДДНФ, так і в ДКНФ.

Приклад. Логічну функцію

$$y_{ДДНФ} = x_1\overline{x_2}x_3 \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3 \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee \overline{x_1}x_2\overline{x_3} \vee x_1x_2\overline{x_3} \vee x_1x_2x_3,$$

задану в ДДНФ, мінімізувати за допомогою карти Карно.

Розв’язання. 1. Зобразимо карту Карно для трьох змінних *X_1, X_2, X_3* і відмітимо в ній одиничні мінтерми $x_1\overline{x_2}x_3$, $\overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3$, $\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}$, $x_1x_2\overline{x_3}$, $x_1x_2x_3$ і $\overline{x_1}x_2\overline{x_3}$ (рис 3.3, а).

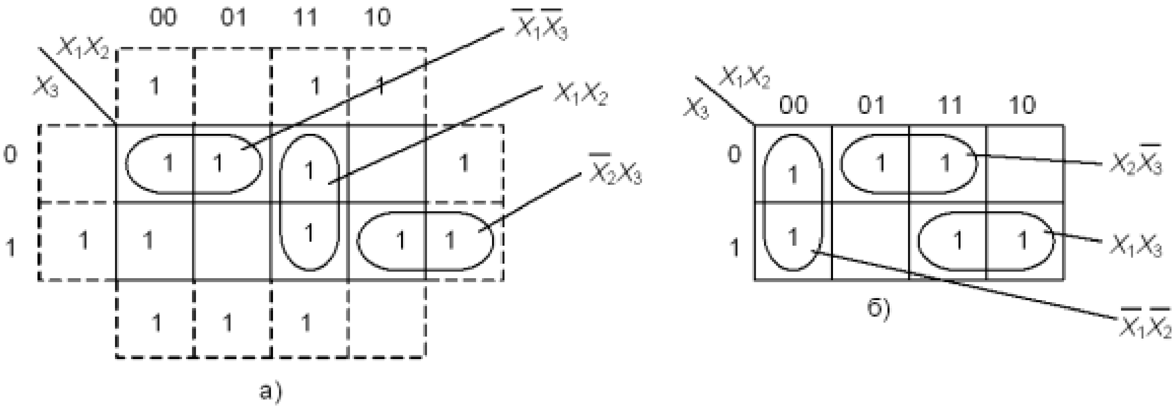


Рисунок 3.3 - Мінімізація логічної функції за допомогою карт Карно

2. В карті Карно (рис. 3.3, а) мінтерми утворюють три групи, кожна з яких містить два мінтерми. Перша складається з $\overline{x_1}x_2\overline{x_3}$ і $\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}$, з цієї групи змінна x_2 може бути виключена. Друга група складається з $x_1x_2x_3$ та $x_1x_2\overline{x_3}$ і з цієї групи може бути виключена змінна x_3. Третя група складається з $x_1\overline{x_2}x_3$ і $\overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3$, з якої може бути виключена змінна x_1.

3. Записуємо мінімізовану логічну функцію в ДНФ:

$$y1 = x_1x_2 \vee \overline{x_2}x_3 \vee \overline{x_1}\,\overline{x_3}.$$

Вибираючи групи мінтермів по-іншому (((рис. 3.3, б), отримуємо другу мінімальну форму логічної функції, заданої рівнянням

$$y_{ДДНФ} = x_1\overline{x_2}x_3 \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3 \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee \overline{x_1}x_2\overline{x_3} \vee x_1x_2\overline{x_3} \vee x_1x_2x_3,$$

$$y2 = \overline{x_1}\,\overline{x_2} \vee x_2\overline{x_3} \vee x_1x_3.$$

Мінімізація кон'юнктивних нормальних форм

Мінімізація КНФ виконується аналогічно розглянутим методам мінімізації ДНФ булевих функцій, тому зупинимося лише на основних положеннях.

Нагадаємо, що конституентою нуля називається функція, яка набуває значення 0 на одному наборі. Вона виражається диз'юнкцією всіх змінних функції.

Наприклад, набору 0110 відповідає конституента нуля $x_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3 \vee x_4$, відповідно:

0111 - $x_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3 \vee \overline{x}_4$,

1000 - $\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4$.

Задачею мінімізації КНФ є визначення мінімальної КНФ. Ця задача вирішується в два етапи – пошук скороченої КНФ (кон'юнкція всіх простих імплікант) і потім знаходження мінімальної КНФ. Другий етап мінімізації виконується за допомогою таблиці Квайна так само, як і при пошуку мінімальної ДНФ. Оскільки можливо тільки два варіанти: або дана проста імпліканта поглинає дану конституенту нуля, або ні – згідно зі співвідношенням поглинання

$$(A \vee x)A = A.$$

Перший етап мінімізації полягає у пошуку всіх простих імплікант. Практично всі методи мінімізації ДНФ мають свої аналоги для КНФ. Розглянемо це детальніше.

Співвідношення склеювання на основі метода Квайна:

$$(A \vee x)(A \vee \overline{x}) = (A \vee x)(A \vee \overline{x})A.$$

Співвідношення склеювання на основі метода Блейка:

$$(A \vee x)(B \vee \overline{x}) = (A \vee x)(B \vee \overline{x})(A \vee B).$$

Метод Нельсона у застосуванні до задачі мінімізації КНФ полягає у розкритті дужок в довільній ДНФ функції і виконання поглинань. Такі дії приводять до появи скороченої КНФ. Передбачається використання дужок на початку і в кінці кожного елементарного добутку початкової ДНФ та використання другого дистрибутивного закону. Наприклад, функція задана мінімальною ДНФ: $x_1\overline{x}_2 \vee \overline{x}_1 x_2$, її скорочена КНФ буде мати вигляд:

$$(x_1 \vee \overline{x}_1)(x_1 \vee x_2)(\overline{x}_2 \vee \overline{x}_1)(\overline{x}_2 \vee x_2) = (x_1 \vee x_2)(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2).$$

За допомогою діаграм Вейча пошук мінімальної КНФ здійснюється так само просто, як і у випадку ДНФ. Відмінність тільки в тому, що аналізуються нульові набори і змінні виписуються з інверсіями. Наприклад для функції, заданої діаграмою (табл. 3.11), мінімальною КНФ буде:

$$(\overline{x}_1 \vee x_3)(x_2 \vee x_3)(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_4).$$

Для порівняння знайдемо мінімальну ДНФ: $\overline{x}_1 x_2 \vee \overline{x}_2 x_3 \vee x_3 \overline{x}_4$. В даному випадку ДНФ виявилася простішою. В загальному випадку про порівняльну складність мінімальних КНФ і ДНФ не можна говорити наперед, але можна відзначити таке: кількість букв мінімальної ДНФ довільної функції f і мінімальної КНФ функції $\overline{f}$ однакові.

Таблиця 3.11

Мінімізація функцій в базисах І-НЕ та АБО-НЕ

Функції «стрілка Пірса» та «штрих Шеффера», як відмічено в п. 2.4, мають функціональну повноту. Нагадаємо, що зв’язок цих функцій з операціями диз’юнкції і кон’юнкції достатньо простий:

$$x_1 \downarrow x_2 = \overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2 = \overline{x_1 \vee x_2};$$

$$x_1 / x_2 = \overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 = \overline{x_1 \cdot x_2}.$$

Узагальнюючи для *n* змінних, будемо мати:

$$x_1 \downarrow x_2 \downarrow x_3 \downarrow \ldots \downarrow x_n = \overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot \overline{x}_3 \cdot \ldots \cdot \overline{x}_n = \overline{x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \ldots \vee x_n};$$

$$x_1 / x_2 / x_3 / \ldots / x_n = \overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3 \vee \ldots \vee \overline{x}_n = \overline{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n}.$$

Дані співвідношення дозволяють звести задачу мінімізації логічних функцій в вищезгаданих базисах до задачі мінімізації ДНФ та КНФ. Дійсно, для випадку функції «стрілка Пірса» можна показати, що справедливе таке твердження.

Для того щоб перейти від КНФ функції *f* до виразу, що є функцією *f* за допомогою операції «стрілка Пірса», достатньо замінити в КНФ всі операції кон’юнкції та диз’юнкції стрілкою Пірса, залишаючи дужки та заперечення на своїх місцях.

Отже, КНФ функції *f* можна подати в такому вигляді:

$$f = t_1 \cdot t_2 \cdot \ldots \cdot t_r = \overline{\overline{t_1 \cdot t_2 \cdot \ldots \cdot t_r}} = \overline{\overline{t_1} \vee \overline{t_2} \vee \ldots \vee \overline{t_p}},$$

де t_i - елементарні диз’юнкції:

$$t_i = \tilde{x}_1 \vee \tilde{x}_2 \vee \ldots \vee \tilde{x}_s.$$

Використовуючи наведені співвідношення будемо мати :

$$\overline{t_i} = \overline{\tilde{x}_1 \vee \tilde{x}_2 \vee \ldots \vee \tilde{x}_s} = \tilde{x}_1 \downarrow \tilde{x}_2 \downarrow \ldots \downarrow \tilde{x}_s;$$

$$f = \overline{t_1} \downarrow \overline{t_2} \downarrow \ldots \downarrow \overline{t_y}.$$

Твердження доведено. Таким чином, мінімізацію функції можна відтворити в базисі І, АБО, НЕ, а потім перейти до стрілки Пірса. Операція заперечення реалізується за допомогою стрілки Пірса:

$$\overline{x} = x \downarrow x.$$

Оскільки функції «стрілка Пірса» та «штрих Шеффера» не підпорядковуються закону асоціативності, то це треба враховувати при переході від багатомісних операцій до двомісних. Такий перехід можна зробити за допомогою таких співвідношень:

$$x_1 \downarrow x_2 \downarrow x_3 = x_1 \downarrow \overline{x_2 \downarrow x_3} = \overline{x_1 \downarrow x_2} \downarrow x_3 \neq (x_1 \downarrow x_2) \downarrow x_3;$$

$$x_1 \downarrow x_2 \downarrow x_3 \downarrow x_4 = \overline{x_1 \downarrow x_2} \downarrow \overline{x_3 \downarrow x_4},$$

справедливість яких легко перевіряється.

Приклад 1. Розглянемо функцію, яка задана діаграмою Вейча (див. табл. 3.12). Її мінімальна КНФ (одна з можливих):

$$f = (\overline{x_1} \vee \overline{x_3})(\overline{x_3} \vee \overline{x_4})(x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4).$$

Переходимо до операції «стрілка Пірса»:

$$f = (\overline{x_1} \downarrow \overline{x_3}) \downarrow (\overline{x_3} \downarrow \overline{x_4}) \downarrow (x_1 \downarrow x_2 \downarrow x_3 \downarrow x_4).$$

Перехід до двомісних операцій дає можливість обрати кінцевий вираз:

$$f = \overline{(\overline{x_1} \downarrow \overline{x_3}) \downarrow (\overline{x_3} \downarrow \overline{x_4})} \downarrow (\overline{x_1 \downarrow x_2} \downarrow \overline{x_3 \downarrow x_4}).$$

Аналогічно відбувається перехід від ДНФ до виразу, що має тільки операції «штрих Шеффера». Мають місце аналогічні перехідні співвідношення

$$x_1/x_2/x_3 = x_1/\overline{x_2/x_3} = \overline{x_1/x_2}/x_3;$$
$$x_1/x_2/x_3/x_4 = x_1/x_2/x_3/x_4;$$
$$x = x/x.$$

Таблиця 3.12

Таблиця 3.12

	X_2	X_2			
X_1	1	1	1	1	
X_1	0	0	0	0	X_3
	1	0	0	1	X_3
	1	1	1	0	
		X_4	X_4		

Приклад 2. Розглянемо ту ж саму функцію *f* (табл. 3.12). Її мінімальна ДНФ
$$f = x_1\overline{x}_3 \vee x_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_3 x_4 \vee \overline{x}_1 x_3 \overline{x}_4.$$
Використовуючи перехідні співвідношення отримаємо
$$f = (x_1/\overline{x}_3)/(x_2/\overline{x}_3)/(\overline{x}_3/x_4)/(\overline{x}_1/x_3/\overline{x}_4)$$
і далі переходимо до двомісних операцій, маємо кінцевий вираз
$$f = \overline{(x_1/\overline{x}_3)/(x_2/\overline{x}_3)}/\overline{(\overline{x}_3/x_4)/(\overline{x}_1/\overline{x_3/\overline{x}_4})}.$$

Мінімізація не повністю визначених функцій алгебри логіки

Не повністю визначена логічна функція n змінних – це функція, задана на числі наборів, менших 2^n, тобто це логічні функції f_i, які задані не на всіх 2^n наборах аргументів $x_1, x_2, \ldots, x_n$

Приклад:

Таблиця 3.13

x_1	0	0	0	0	1	1	1	1
x_2	0	0	1	1	0	0	1	1
x_3	0	1	0	1	0	1	0	1
$f(x_1x_2x_3)$	-	0	1	-	1	-	-	1

Вихідна функція f_0: $f_0(x_1x_2x_3) = \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 + x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 + x_1x_2x_3$.

Довизначимо функцію f_0 одиницями і запишемо функцію f_1:

$$f_1(x_1x_2x_3) = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 + \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 + \bar{x}_1x_2x_3 + x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 + x_1\bar{x}_2x_3 + x_1x_2\bar{x}_3 + x_1x_2x_3.$$

Методом діаграм Вейча приведемо f_1 до скороченої форми: використання діаграм Вейча для функції з трьома аргументами:

	x_2		$\bar{x}_2$	
x_1	1	1	1	1
	1	1	0	1
		x_3		

$$f(x_1x_2x_3) = \bar{x}_3 + x_2 + x_1.$$

За допомогою метода Квайна побудуємо імплікантну таблицю:

Таблиця 3.14 – Імплікантна таблиця

Імпліканти функції f_1	Члени ДДНФ f_0		
	$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3$	$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$	$x_1x_2x_3$
$\bar{x}_3$	x	x	
x_2	x		x
x_1		x	x

Мінімальна форма може бути отримана шляхом вилучення будь-якої з 3-х простих імплікант.

$$f(x_1x_2x_3) = \begin{cases} \bar{x}_3 \vee x_2; \\ x_2 \vee x_1; \\ \bar{x}_3 \vee x_1. \end{cases}$$

Розглянемо мінімізацію тієї ж функції діаграмою Вейча.

	x_2		$\bar{x}_2$	
x_1	•	1	•	1
	1	•	0	•
		x_3		

• - заборонений набір.

Необхідно на заборонених наборах аргументів надавати функціям такі значення, при яких клітинки із значенням 1 охоплюються мінімальною кількістю областей з максимальною кількістю клітинок в кожній з областей. У цьому випадку до визначення функції може бути виконано трьома різними способами:

	x_2		$\overline{x}_2$	
x_1	•	1	•	1
	1	•	0	•
		x_3		

	x_2		$\overline{x}_2$	
x_1	1	1	1	1
	1	•	0	1
		x_3		

Дві області по 4 одиниці $x_1 + \overline{x}_3$.

	x_2		$\overline{x}_2$	
x_1	1	1	1	1
	1	1	0	•
		x_3		

Дві області по 4 одиниці $x_1 + x_2$.

	x_2		$\overline{x}_2$	
x_1	1	1	•	1
	1	1	0	1
		x_3		

Дві області по 4 одиниці $\overline{x}_3 + x_2$.

Мінімізація систем булевих функцій

На практиці часто необхідно реалізовувати сукупності булевих функцій. Якщо зробити мінімізацію булевих функцій, які входять в систему незалежно одна від одної, то загальна схема буде складатися з ізольованих підсхем. Для того, щоб спростити отриману схему, використовують метод мінімізації булевих функцій, який грунтується на методі Квайна.

Нехай задано систему повністю визначених булевих функцій, які подані в ДНФ:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1\overline{x_3} + x_1\overline{x_2} + \overline{x_1}x_3; \\ f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1\overline{x_2} + \overline{x_1}x_3 + \overline{x_1}x_2; \\ f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}. \end{cases}$$

Всі різні елементарні кон'юнкції системи об'єднуємо в множину A, яку назвемо повною множиною елементарних кон'юнкцій системи функцій.

$$A = \left\{x_1\overline{x_3}; x_1\overline{x_2}; \overline{x_1}x_3; \overline{x_1}x_2; x_1x_2; \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\right\}$$

Сума рангів (число букв) елементарних кон'юнкцій множини А є зручним критерієм для оцінювання складності заданої системи.

Означення. Система ДНФ булевих функцій називається мінімальною, якщо її повна множина елементарних кон'юнкцій має мінімальну кількість букв, а кожна ДНФ булевої функції системи містить мінімальне число елементарних кон'юнкцій найбільшого рангу.

Алгоритм мінімізації систем булевих функцій

1. Побудувати повну множину А елементарних кон'юнкцій системи, яку мінімізуємо, враховуючи, що спочатку кожна з функцій системи подана в ДДНФ. Кожній конституенті одиниці множини А присвоїти ознаку, що містить номери функцій системи, в яку входить розглядувана конституента.

2. Виконати мінімізацію ДДНФ функції ϕ , конституентами якої є всі елементи множини А. При цьому:

а) при склеюванні двох конституент одиниці кожній одержаній елементарній кон'юнкції присвоїти ознаку, що складається з номерів функцій, загальних для двох склеюваних конституент одиниці;

б) якщо ознаки не мають спільних номерів, то склеювання не відбувається;

в) поглинання відбувається тільки для елементарних кон'юнкцій з однаковими ознаками. Одержані в результаті склеювання і поглинання кон'юнкції називаються простими імплікантами системи функцій.

3. Побудувати таблицю імплікант функції ϕ, аналогічно до методу Квайна, тільки для кожної конституенти одиниці виділяється стільки стовпців, скільки різних номерів функцій має її ознака.

Приклад.

Система булевих функцій задана таблицею істинності.

Таблиця 3.15 – Таблиця істинності

x_1	x_2	x_3	f_1	f_2
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	1	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	0
1	1	1	1	0

Подамо кожну з функцій в ДДНФ:

$$f_1 = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3} + x_1\overline{x_2}x_3 + x_1x_2\overline{x_3} + x_1x_2x_3;$$

$$f_2 = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3} + \overline{x_1}x_2\overline{x_3} + \overline{x_1}x_2x_3 + x_1\overline{x_2}x_3.$$

1. Побудуємо повну множину елементарних кон'юнкцій системи, яку отримали, приписуючи кожній конституенті ознаку входження до функцій f_1 і f_2 :

$$A=\left\{\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3(1,2);\overline{x}_1x_2\overline{x}_3(2);\overline{x}_1x_2x_3(2);x_1\overline{x}_2x_3(1,2);x_1x_2\overline{x}_3(1);x_1x_2x_3(1)\right\}.$$

2. Будуємо ДДНФ функції ϕ :

$$\phi=\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3(1,2)+\overline{x}_1x_2\overline{x}_3(2)+\overline{x}_1x_2x_3(2)+x_1\overline{x}_2x_3(1,2)+x_1x_2\overline{x}_3(1)+x_1x_2x_3(1).$$

1 2 3 4 5 6

Пронумеруємо конституенти для зручності склеювання.

1-2 : $\overline{x}_1\overline{x}_3(2)=\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3(1,2)+\overline{x}_1x_2\overline{x}_3(2)$

2-3 : $\overline{x}_1x_2(2)=\overline{x}_1x_2\overline{x}_3(2)+\overline{x}_1x_2x_3(2)$

4-6 : $x_1x_3(1)=x_1\overline{x}_2x_3(1,2)+x_1x_2x_3(1)$

5-6 : $x_1x_2(1)=x_1x_2\overline{x}_3(1)+x_1x_2x_3(1)$

Після проведення поглинань ($\overline{x}_1\overline{x}_3+\overline{x}_1x_2\overline{x}_3=\overline{x}_1\overline{x}_3(1+\overline{x}_2)=\overline{x}_1\overline{x}_3$), з урахуванням ознаки, маємо:

$$\phi=\overline{x}_1\overline{x}_3(2)+x_1x_3(1)+\overline{x}_1x_2(2)+x_1x_2(1)+x_1\overline{x}_2x_3(1,2)+\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3(1,2).$$

Таким чином отримано прості імпліканти вихідної системи булевих функцій

3. Будуємо імплікантну матрицю. Стовпці – конституенти одиниці з ДДНФ фунції ϕ. Для кожної конституенти виділяємо стільки стовпців, скільки різних номерів функцій мають ознаку конституенти.

Рядки матриці – прості імпліканти системи.

Заповнення матриці аналогічно до методу Квайна. Отримане ядро покриває всі конституенти одиниці з ДДНФ функції ϕ.

Таблиця 3.16

	Конституенти одиниці функції ϕ							
	$\overline{x}_1\overline{x}$		$\overline{x}_1x$	$\overline{x}_1$	x_1		x_1	x_1x
			2	2				1
$\overline{x}_1\overline{x}_3(2)$								
$x_1x_3(1)$								
$\overline{x}_1x_2(2)$								
$x_1x_2(1)$								
$x_1\overline{x}_2x_3(1$								
$\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3($								

$$\phi=\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3(1,2)+x_1\overline{x}_2x_3(1,2)+\overline{x}_1x_2(2)+x_1x_2(1).$$

Виділяємо для функції f_i імпліканти з ознакою, що містить ознаку *i*, отримаємо таку мінімальну диз'юнктивну нормальну форму системи.

$$\begin{cases} f_1=\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3+x_1\overline{x}_2x_3+x_1x_2; \\ f_2=\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3+x_1\overline{x}_2x_3+\overline{x}_1x_2. \end{cases}$$

Недолік: велика громіздкість проведення операцій склеювання та поглинання з ознакою.

Вправи для самостійної роботи

Мінімізувати системи булевих функцій алгебри логіки.

Варіанти завдань

1. $\begin{cases} f(x,y,z) = V_1(2,4,6,7) \\ f(x,y,z) = V_1(1,3,5) \end{cases}$

2. $\begin{cases} f(x,y,z) = V_1(0,2,5) \\ f(x,y,z) = V_1(0,3,7) \end{cases}$

3. $\begin{cases} f(x,y,z) = V_1(3,5,7) \\ f(x,y,z) = V_1(0,5,6) \end{cases}$

4. $\begin{cases} f(x,y,z) = V_1(1,3,5,7) \\ f(x,y,z) = V_1(1,4,5) \end{cases}$

5. $\begin{cases} f(x,y,z) = V_1(2,3,7) \\ f(x,y,z) = V_1(1,4,5) \end{cases}$

6. $\begin{cases} f(x,y,z) = V_1(0,1,4) \\ f(x,y,z) = V_1(1,5,7) \end{cases}$

7. $\begin{cases} f(x,y,z) = V_1(1,4,3,7) \\ f(x,y,z) = V_1(1,2,3,4) \end{cases}$

8. $\begin{cases} f(x,y,z) = V_1(0,2,6,7) \\ f(x,y,z) = V_1(0,1,5,7) \end{cases}$

9. $\begin{cases} f(x,y,z) = V_1(1,4,6,7) \\ f(x,y,z) = V_1(0,5,6,7) \end{cases}$

10. $\begin{cases} f(x,y,z) = V_1(0,3,6,7) \\ f(x,y,z) = V_1(0,4,6,7) \end{cases}$

11. $\begin{cases} f(x,y,z) = V_1(0,2,6,7) \\ f(x,y,z) = V_1(1,3,5,7) \end{cases}$

12. $\begin{cases} f(x,y,z) = V_1(1,2,5,7) \\ f(x,y,z) = V_1(0,1,4,7) \end{cases}$

13. $\begin{cases} f(x,y,z) = V_1(1,2,4) \\ f(x,y,z) = V_1(3,4,7) \end{cases}$

14. $\begin{cases} f(x,y,z) = V\ (2,3,4) \\ f(x,y,z) = V_1(2,5,7) \end{cases}$

15. $\begin{cases} f(x,y,z) = V_1(1,3,4) \\ f(x,y,z) = V_1(4,6,7) \end{cases}$

16. $\begin{cases} f(x,y,z) = V_1(1,2,3) \\ f(x,y,z) = V_1(5,6,7) \end{cases}$

17. $\begin{cases} f(x,y,z) = V_1(3,4,5) \\ f(x,y,z) = V_1(5,6,7) \end{cases}$

18. $\begin{cases} f(x,y,z) = V_1(0,1,2) \\ f(x,y,z) = V_1(3,5,7) \end{cases}$

19. $\begin{cases} f(x,y,z) = V_1(0,3,4) \\ f(x,y,z) = V_1(2,6) \end{cases}$

20. $\begin{cases} f(x,y,z) = V_1(1,3,4) \\ f(x,y,z) = V_1(3,7) \end{cases}$

21. $\begin{cases} f(x,y,z) = V_1(0,2,3) \\ f(x,y,z) = V_1(4,5,7) \end{cases}$

22. $\begin{cases} f(x,y,z) = V_1(1,3,5) \\ f(x,y,z) = V_1(4,5,7) \end{cases}$

23. $\begin{cases} f(x,y,z) = V_1(0,3,4) \\ f(x,y,z) = V_1(4,6,7) \end{cases}$

24. $\begin{cases} f(x,y,z) = V_1(1,4,5) \\ f(x,y,z) = V_1(3,5,6) \end{cases}$

25. $\begin{cases} f(x,y,z) = V_1(0,3,4) \\ f(x,y,z) = V_1(4,6,7) \end{cases}$

Контрольні питання

1. Яку диз’юнкцію нормальних форм називають мінімальною формою логічної функції?
2. Що таке проста імпліканта логічної функції ?
3. Що таке суттєва імпліканта?
4. Наведіть визначення скороченої диз’юнктивної нормальної форми логічної функції.
5. З яких основних кроків складається процес мінімізації логічної функції за методом Квайна?
6. Як ви розумієте нульові куби в методі Квайна-Мак-Класкі?
7. З яких основних кроків складається процес мінімізації логічної функції за методом Квайна-Мак-Класкі?
8. Наведіть основні закони булевої алгебри, які використовуються в методах Квайна та Квайна-Мак-Класкі.
9. Що таке елементарна кон’юнкція?
10. Що таке елементарна диз’юнкція?
11. Як отримати скорочену ДНФ логічної функції за допомогою метода Блейка-Порецького?
12. Як отримати скорочену ДНФ логічної функції за допомогою метода циклів, що знижуються?
13. З яких основних кроків складається процес мінімізації монотонної логічної функції?
14. З яких основних кроків складається процес мінімізації КНФ логічної функції?
15. Як використовуються для мінімізації логічної функції діаграми Вейча?
16. Які є правила створення контурів при використанні карти Карно?
17. Які є правила створення контурів при використанні діаграми Вейча?
18. Як використовуються для мінімізації логічної функції карти Карно?
19. З яких основних кроків складається процес мінімізації логічної функції в базисах І-НЕ чи АБО-НЕ?
20. Які логічні функції називають не повністю визначеними?
21. Які є методи мінімізації не повністю визначених логічних функцій?
22. Які є методи мінімізації систем булевих функцій?

Список рекомендованої літератури

1. Капітонова Д. В., Кривий С. Л., Летичевський О. А. Основи дискретної математики // Підручник / НАН України. МОН України – К. : Наукова думка, 2002. – 579 с.
2. Бардачов Ю. М., Соколова Н. А., Ходаков В. Є. Дискретна математика // Підручник / За ред. В. Є. Ходакова. – К. : Вища школа, 2002. – 287 с.
3. Міхайленко В. М., Федоренко Н. Д., Демченко В. В. Дискретна математика // Підручник / МОН України. – К. : Вид-во Європейського ун-ту, 2003 – 319 с.
4. Бондаренко М. Ф., Білоус Н. В., Руткас А. Г. Комп’ютерна дискретна математика // Підручник для студ. ВНЗ, які навчаються за напрямом “Комп’ютерні науки”. – Харків: “Компанія СМІТ”, 2004. – 480 с.
5. Борисенко О. А. Лекції з дискретної математики: (множини і логіка) // Навчальний посібник. – 3-є вид., випр. і доп. – Суми: ВТД “Університетська книга”, 2002 – 180 с.
6. Роїк О. М., Тадевасян Р. Г. Основи дискретної математики // Навчальний посібник / МОН України. – Вінниця: ВДТУ, Ч-2: Елементи загальної алгебри, булеві функції, теорія графів і комбінаторика, 2003. – 116 с.
7. Акимов О. Е. Дискретная математика // Логика, группы, графы. – 2-е изд., доп.. – М. : Лаборатория Базових Знаний, 2001. – 376 с.
8. Луцький Г. М., Кривий С.Л., Печурін М.К. Основи дискретної математики // Навч. посібник. – К. : ІСДО, 1995, – 252 с.
9. Самофалов К. Г., Романкевич А. М., Валуйский В. Н. и др. // Прикладная теория цифровых автоматов. – Киев: Вища школа, 1987. – 370с.
10. Грей П. Логика, алгебра и базы даннях // Пер.с англ. Х. И. Килова, Г. Е. Минца. –М. : Машиностроение, 1989. – 368 с.
11. Клини С. К. Математическая логика // М. : Мир, 1973. – 480 с.
12. Мендельсон Є. Введение в математическую логику // Пер. с англ. Ф. А. Кабакова. – 2-е изд., испр. – М. : Мир, 1985. – 307 с.
13. Новиков П. С. Элементы математической логики // М. : Наука, 1973. – 399 с.
14. Курейчик В. М. Математическое обеспечение конструкторського и технологического проектирования с применением САПР // М. : Радио и связь, 1990. – 352 с.