МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КІРОВОГРАДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

МЕХАНІКО-ТЕХНОЛОГІЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ПРОГРАМНОГО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ

Комп'ютерна графіка

Курс лекцій

з елементами кредитно – модульної
системи організації навчального процесу

для студентів денної та заочної форми навчання
за напрямом підготовки 6.050102 «Комп'ютерна інженерія»

Укладач:
ст. викладач Приходькіна А.І.

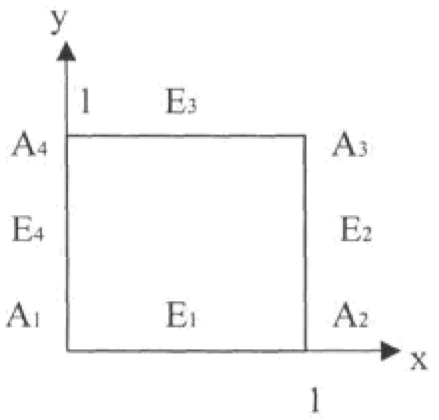
Кіровоград

Тема 1 Основні геометричні перетворення на площині та в просторі: основні елементи геометричних перетворень, способи надання графічної інформації в комп'ютерній системі

КГ- складна і різноманітна дисципліна. Кінцевим продуктом її є зображення. Тому необхідно розглянути, як:

- зображення представляється в КГ;
- зображення готуються для візуалізації;
- заздалегідь підготовлене зображення малюється;
- здійснюється взаємодія із зображенням.

Хоча в багатьох алгоритмах в якості геометричних даних, що описують зображення, виступають многокутники і ребра, кожний многокутник або ребро можна представити вершинами. Тобто. точки є фундаментальними будівельними блоками для представлення геометричних даних. Як ілюстрація розглянемо одиничний квадрат. Він представлений своїми вершинами (рис.1)



A1(0,0); A2(1,0);
A3(1,1);A4(0,1);

Рис.1. Опис даних зображення

Відповідний алгоритмічний опис може виглядати так $A_1A_2A_3A_4$ A_1. Одиничний квадрат можна описати за допомогою чотирьох ребер: $E_1=A_1A_2$; $E_2=A_2A_3$ $E_3=A_3A_4$, $E_4=A_4A_1$, і нарешті, для опису одиничного квадрата як многокутник можна використовувати або точки або ребра: К= $A_1A_2A_3A_4$ A_1 або К= $E_1E_2E_3E$

Геометричні перетворення

Геометричні перетворення використовуються для переміщення і модифікації об'єктів. Перетворення представлені в матричному вигляді. Геометричне перетворення, застосоване до об'єкту або сукупності об'єктів, може бути композицією декількох перетворень. Для його описів використовуватимемо матрицю, що є добутком матриць більш простих перетворень (що є наслідком матричного множення).

Основні перетворення:

1. перетворення перенесення на вектор Т
2. перетворення повороту відносно початку координат на кут γ
3. перетворення розтягування(стиснення)

4. перетворення віддзеркалення
5. перетворення масштабу на вектор Е

Основні будівельні блоки можна уявити або як пари, або як трійки чисел. Таким чином, (X_1,Y_1) або $(X_1Y_1Z_1)$ представили б точку в двох або тривимірному просторі. Дві точки представили б відрізок або ребро, а сукупність з трьох точок, або більше - многокутник. Ці точки, ребра, многокутники накопичуються або зберігаються в базі даних. Дані, з яких одержують малюнок, рідко співпадають з даними, що служать безпосередньо для малювання. Дані, що використовуються для виводу зображення, називають дисплейним файлом. В ньому міститься деяка частина, вид або сцена зображення, представлена в загальній базі даних. Зображення, що виводиться, звичайно формується за допомогою операцій повороту, перенесення, масштабування і обчислень різних проекцій даних. Ці основні видові перетворення виконуються за допомогою матричних (4*4) операцій над даними, представленими в однорідних координатах. Ці операції часто реалізуються апаратний.

Проекції в тривимірному просторі

В науці і техніці прийнято використовувати тривимірну систему координат з осями x, y, z.

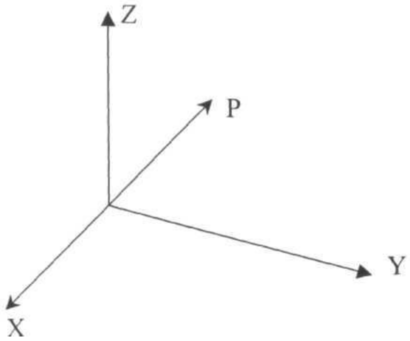


Рис.2 Тривимірна система координат

Така система називається ортогональною (декартовой) системою координат (будь-яка пара цих трьох осей взаємно перпендикулярні, всі три координатні осі проходять через одну загальну точку початку координат 0 і є нескінченно довгими.) Координати представляються у вигляді дійсних чисел. Координатна система зображена на малюнку 2 є правою. Припустили, що позитивна вісь x повертається на 90° навкруги осі Z таким чином, що після цього повороту вісь x співпадає з віссю y. Це обертання можна порівнювати з обертанням гвинта з правим різьбленням. При такому повороті гвинт дещо переміщатиметься у напрямі осі z. (Це прямокутні координати). Окрім прямокутних координат для задач вирішуваних користувачем, необхідне скористатися сферичними координатами. В них також використовують дійсні числа, а замість позначень x, y, z використовують для позначень сферичних координат ρ, ψ, γ (ро, тета, фе).

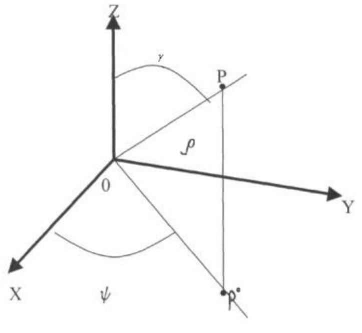


Рис 3

Значення ρ визначає відстань між точками ρ і 0. Це значення є радіусом сфери з центром в точці 0, проходячої через точку P: Символи ψ і γ позначають кути. Кут вимірюється в площині xy, використовуючи положення точки ρ', що є проекцією точки P на цю площину. Значення рівно куту. на який було потрібно б повернути позитивну вісь x (навкруги осі z) в позитивному напрямі до тих пір, поки вона не проходитиме через точку ρ'.

Кут γ - це кут, виміряний у вертикальній площині між віссю Z і прямою лінією OP. Значення кута - γ може бути в межах від 0° до 180°. Між сферичними координатами ρ, ψ, γ однієї сторони і прямокутними координатами з іншою можна встановити наступне співвідношення:

x = ρ *cos*sin /
y=*sin#*sin γ
z = ρ *cos γ

Об'єкт, точка спостереження і перспективне зображення

В тривимірній графіці використовують точку, відрізки прямих ліній, а також кінцеві, суцільні тіла, які обмежені плоскими гранями. Криві поверхні можуть обмежуватися набором плоских граней. Такі обмежуючі грані можуть бути утворений будь-яким полігоном, можливо з отворами в них. Оскільки необхідно отримати добре зображення, то необхідно тим або іншим способом визначити позиції вершин цих полігонів. Для цієї мети використовують прямокутні координати в правій системі координат. Задається спосіб завдання позицій ока, званою точкою спостереження. Для позначення цієї точки використовують букву Е. Дана точка має важливе значення в співвідношенні з центральною точкою об'єкту 0, яка розташовується близько від центру об'єкту. Пряма лінія Е0 називається лінією спостереження, а напрям від Е до 0 - напрямом спостереження

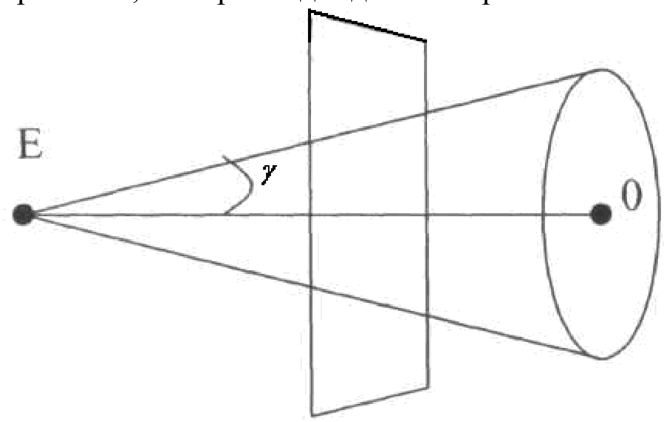


Рис 4

З малюнка видно, що для спостереження доступно все, що лежить в межах певного конуса, вісь якого співпадає з лінією спостереження ЕО.

Для того щоб вказати точки спостереження Е відносно об'єкту представимо нову систему координат з початком в центральній точці об'єкту 0, кожна вісь якої паралель відповідним початковим осям. Потім потрібно вказати сферичні координати, ψ, γ точки спостереження щодо цієї нової системи координат. Тоді буде позначена довжина відрізка прямої лінії. Тут показана поверхня проектування, яка представляється у вигляді площини, перпендикулярної лінії спостереження. Всі видимі точки об'єкту посилають проміння світла в око Е. Перетин цього проміння з площиною проекцій утворює перспективне зображення. Такий спосіб проектування об'єкта на площину називається центральним проектуванням, оскільки все проектоване проміння проходить через точку спостереження, то Е - центр проекції. Відстань між площиною проекції і точкою спостереження Е визначають розмір зображення . Кут між віссю конуса і його створюючої повинен бути достатньо малим, щоб перспективне зображення виглядало прийнятним чином для більшості користувачів. Це досягається вибором відстані спостереження значно більше ніж розмір об'єкту. (Наприклад, якщо необхідно отримати зображення куба з одиничною довжиною сторони, тоді рекомендують значення $\rho \geq 5$). Якщо ж кут γ буде таким малим, що все проміння світла що виходять з різних точок об'єкту і проходить через точку спостереження Е. Т. о, при дуже великих значеннях відстані буде отримана приблизно паралельна проекція, яка дуже часто застосовується на практиці, оскільки її простіше використовувати, ніж реальну перспективну проекцію. Кути і можуть приймати будь-які значення. Якщо і прийняти постійними і змінювати значення від 0° до 360°, то положення точки ока переміщується навколо об'єкту в горизонтальній площині на повний оберт. Якщо вибрати γ = 0, то точка спостереження лежить безпосередньо зверху об'єкту, а при γ = 90° лінія спостереження направлена горизонтально. В більшості практичних випадків деяке значення кута γ лежить між 45° і 90°, що відповідає розташуванню ока трохи вище за об'єкт. Дуже цікавий факт, що не всі лінії мають однакову товщину. Лінії об'єкту близькі до точки спостереження відображаються товстішими лініями, ніж більш видалені. Це допомагає краще інтерпретувати зображення дротяної моделі, ніж при однаковій товщині зображення всіх ліній.

Ефект паралельного проектування виходить просто шляхом вказування достатньо великого значення ρ (наприклад 100000). Дуже легко отримати види об'єкту спереду, збоку і зверху, які використовуються в інженерному кресленні. Для цього потрібно задати дуже велике ρ і вибрати ψ і γ таким чином

вигляд спереду ψ = 0°, γ = 90°

вигляд збоку (з підлога. у) ψ = 90° γ = 90°

вигляд зверху (з підлога. z) ψ = 0° γ = 0°

Перш ніж малювати видалення невидимих ліній, або поверхонь, необхідно провести зафарбовування, врахувати вплив прозорості, нанести текстуру і відтворити колірні ефекти. Якщо не треба малювати зображення, представлене у всій базі даних, то слід вибрати відповідну його частину. Даний процес називається відсіканням. Воно може бути двох- або тривимірним. В деяких випадках відсікаюче вікно або об'єм можуть бути з дірами або мають нерегулярну форму.

Відсікання відносно стандартних областей часто реалізується апаратно.

В комп'ютерній графіці все, що відноситься до двомірного випадку, прийнято позначати 2D/

Припустимо, що введена на площині прямолінійна координатна система. Тоді кожній точці М ставиться у відповідність впорядкована пара чисел (x, y) її координат.

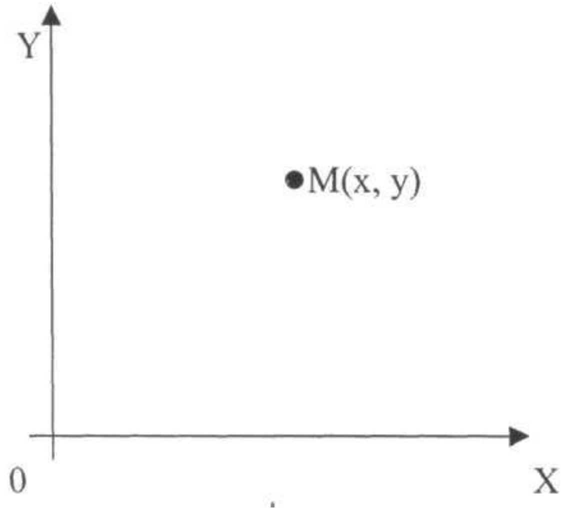


Рис. 5

Вводячи на площині ще одну прямолінійну систему координат, ми ставимо у відповідність тій же точці М іншу пару чисел (x*, y*)

Перехід від однієї прямолінійної координати системи до іншої описується наступними співвідношеннями:

$$x^* = \alpha x + \beta y + \lambda$$
$$y^* = \gamma x + \delta y + \mu \qquad (12.1)$$

де - довільні числа, зв'язані нерівністю:

$|\alpha\beta|$

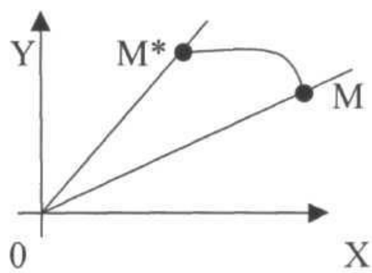
$|\gamma\delta|$ #0

Формули (12.1) можна розглядати двояко: або зберігається точка і змінюється координатна система (точка М залишається тією ж, змінюються тільки її координати) (x, y)→(x*, y*) (рис. 12.2), або змінюється точка і зберігається координатна система(12.У) - в цьому випадку формули задають відображення, що переводять довільну точку M(x, y) в точку M*(x*, y*), координати якої визначені в тій же координатній системі.

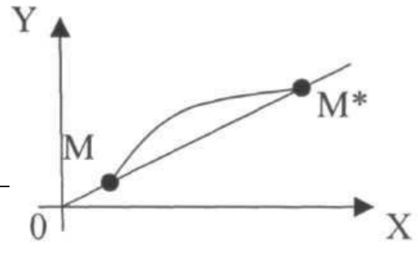
При дослідженні геометричного значення числових коефіцієнтів у формулі (12.1и) зручно вважати, що задана система координат є прямокутною декартовою.

А. Поворот навколо початкової точки на кут γ описується формулами:

$$x^* = x\cos\gamma - y\sin\gamma;$$
$$y^* = x\sin\gamma + y\cos\gamma;$$



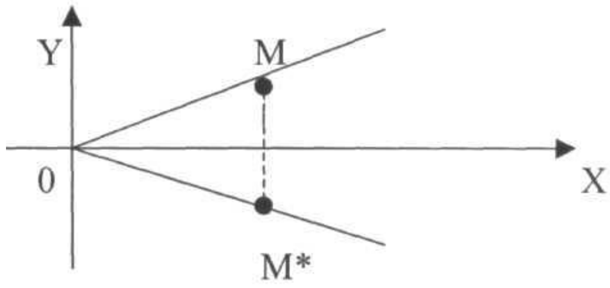
Б. Розтягнення (стиснення) уздовж координатних осей можна задати так:



$$x^* = \alpha x;$$
$$y^* = \delta y;$$
$$\alpha > 0, \delta > 0$$

В. Відображення (щодо осі абсцис) задається за допомогою формул:

$$x^* = x$$
$$y^* = -y$$



Г. На рис. 12.7 вектор перенесення MM* має координати λ і μ. Перенесення забезпечують співвідношення:

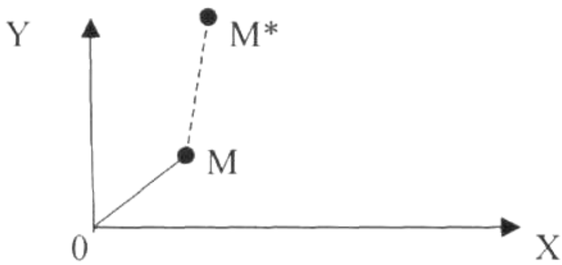


Рис 12.7

Д. Масштабування об'єкту означає зміну його розмірів. Часто нам необхідно сформувати новий об'єкт, який багато в чому подібний старому, тобто при зміні загальних розмірів, їх пропорції повинні залишатися без зміни. В таких випадках застосовується рівномірне масштабування. Число h, на яке перемножуються всі розміри, називається коефіцієнтом масштабування.

Якщо пристрій відображення працює тільки з цілими числами, то для довільного значення h (h=l) точку з однорідними координатами (0.5, 0.1,2.5) представити не можна. Але правильно вибравши h, можна добитися того, щоб координати цієї точки були цілими числами. Так при h=10 отримаємо (5,1,2 5)

Інший приклад. Щоб результати перетворення не привели до арифметичного переповнювання, для точки з координатами (8000 4000 1000) можна узяти h=0,001, і в результаті отримаємо: (8 4 1).

Перетворення масштабу на вектор E(e1, e2). Правила перетворення координат:

$$x^*=e1x;$$
$$y^*=e2y;$$

То, справедлива наступна важлива властивість перетворення площини: будь-яке відображення вигляду (12.1) можна описати за допомогою відображень, що задаються формулами А,Б,В і Г,Д. Для ефектного використовування цих формул в задачах комп'ютерної графіки більш зручним є їх матричний запис.

Матриці, відповідне випадкам А, Б і В будуються легко і мають відповідно наступний вигляд:

$$\left|\begin{pmatrix} \cos\gamma \sin\gamma \\ -\sin\gamma \cos\gamma \end{pmatrix}\right. \qquad \begin{pmatrix} \alpha 0 \\ 0\delta \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 10 \\ 0-1 \end{pmatrix}$$

Для вирішення задач що розглядаються далі необхідно охопити матричним підходом всі 5 найпростіших перетворень. Перейдемо до опису довільної точки площини не впорядкованою парою чисел, а впорядкованою трійкою чисел.

Хай М - довільна точка площини з координатами X і Y, обчисленими відносно заданої прямолінійної координатної системи.

Однорідними координатами цієї точки називається будь-яка трійка одночасно нерівних нулю чисел $X_1X_2X_3$, пов'язаних із заданими числами X і Y наступними співвідношеннями:

$$\frac{X_1}{X_2} = X \qquad \frac{X_2}{X_3} = Y$$

$$\begin{bmatrix} x^* \\ y^* \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\,\beta\,\lambda \\ \gamma\,\delta\,\mu \\ 0\,0\,1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Такий запис еквівалентний приведеному вище запису по рядках і виходить з неї транспонуванням.).

Щоб реалізувати те або інше відображення, необхідні спеціальні прийоми. Звичайно побудова цієї матриці розбивається на декілька етапів. На кожному етапі шукається матриця, відповідна тому або іншому з виділених вище випадків А, Б, В, Г, Д володіючих добре вираженими геометричними властивостями.

Випишемо матриці третього порядку:

А. Матриця обертання

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Б. Матриця розтягування/стиснення

$$[D] = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

В. Матриця віддзеркалення

$$[M] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Г. Матриця перенесення

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \lambda & \mu & 1 \end{bmatrix}$$

Д. Матриця перетворення масштабу

$$E = \begin{bmatrix} e1 & 0 & 0 \\ 0 & e2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Розглянемо приклади перетворень.

Приклад 1: Побудувати матрицю повороту навколо точки A(a, b), на кут φ

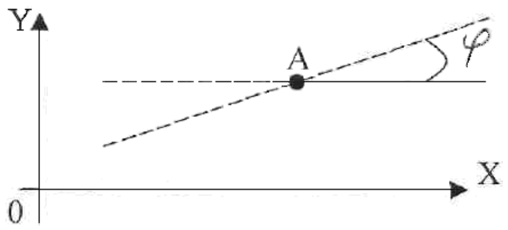


Рис.12.9

Перший крок. Перенесення на вектор A(-a, -b), для поєднання центру повороту з початком координат.

$$[T_A]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -a & -b & 1\end{bmatrix}$$ - матриця відповідного перетворення

Другий крок. Поворот на кут γ

$$[R\gamma]=\begin{bmatrix}\cos\gamma & \sin\gamma & 0\\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Третій крок. Перенесення на вектор A (a, b), для повернення центру повороту в колишнє положення.

$$[T_A]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ a & b & 1\end{bmatrix}$$

- матриця відповідного перетворення

Перемножимо матриці в тому ж порядку, як вони виписані: $[T_A]$ $[R\gamma]$ $[T_A]$

В результаті отримаємо: (x*y*1) = (xyl) *

$$\begin{bmatrix}\cos\gamma & \sin\gamma\\ -\sin\gamma & \cos\gamma\\ -a\cos\gamma+b\sin\gamma+a & -a\sin\gamma-b\cos\gamma+b\end{bmatrix}$$

Елементи отриманої матриці важко запам'ятати, хоча кожна з матриць легко будується

Перетворення в просторі

Тривимірний випадок описується 3D. Геометричні перетворення в тривимірному просторі здійснюється так само, як і на площині. Таким же чином визначаються основні перетворення, і матриці складних перетворень отримуємо множенням відповідних простих матриць. Опис перетворень в тривимірному просторі трохи складніше, ніж на площині. Замінимо координатну трійку X,Y,Z, задаючи точку в просторі, на четвірку чисел (x,y,z,l) або (hx,hy,hz, 1), $h\neq 0$.

Кожна точка простору (окрім початкової точки 0) може бути задана четвіркою одночасно нерівних нулю чисел; ця четвірка чисел визначена однозначно з точністю до загального множника. Будь-яке перетворення в тривимірному просторі може бути представлено у вигляді суперпозиції обертань, розтягувань, віддзеркалень і перенесень. Тому опишемо матриці цих перетворень.

А. Матриця обертання в просторі

Матриця обертання навколо осі абсцис, на кут γ

$$[Rx] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ 0 & -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Матриця обертання навколо осі ординат на кут ψ

$$[Ry] = \begin{bmatrix} \cos\psi & 0 & -\sin\psi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\psi & 0 & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Матриця обертання навколо осі аплікат на кут λ

$$[Rz] = \begin{bmatrix} \cos\lambda & \sin\lambda & 0 & 0 \\ -\sin\lambda & \cos\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Б. Матриця розтягування (стиснення):

$$[D] = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

де $\alpha >$ - коефіцієнт розтягування (стиснення) уздовж осі абсцис

де $\beta >$ - коефіцієнт розтягування (стиснення) уздовж осі ординат

де $\gamma >$ - коефіцієнт розтягування (стиснення) уздовж осі аплікат

В. Матриця віддзеркалення

В.1. Матриця віддзеркалення щодо площини xy

$$[Mz] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

В.2. Матриця віддзеркалення щодо площини yz

$$[Mx] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

В.3 Матриця віддзеркалення осі zx

$$[My] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Г. Матриця перенесення (тут λ, μ, γ) - вектор перенесення

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \lambda & \mu & \gamma & 1 \end{bmatrix}$$

Д. Масштабування

Матриця перетворення масштабу має вигляд

$$[E] = \begin{bmatrix} Ex & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Ey & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Ez & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Зауваження : Всі виписані матриці не вироджені

Дзеркальне відображення

Дзеркальним відображенням називається таке перетворення, яке формує дзеркальний образ об'єкту. Об'єкт відображається відносно площини, яка називається площиною віддзеркалення, або просто дзеркалом.

Приклад 2: Побудувати матрицю обертання на кут φ n).навколо прямої L, яка проходить через точку A(a, b ,c), Можна вважати, що направляючий вектор прямий, є одиничним:

1, m, n

На рис. 12.10 схематично показано матрицю якого перетворення необхідно знайти.

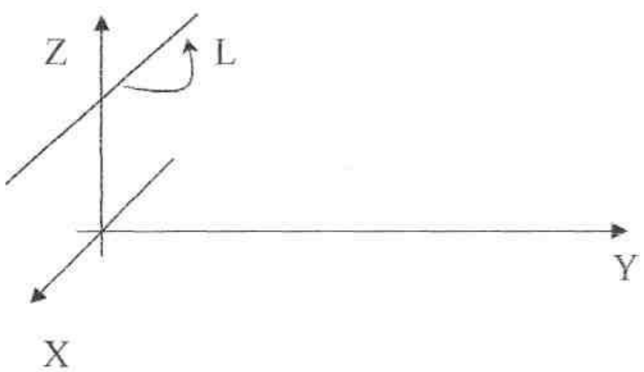


Рис. 12.10

Вирішення сформованої задачі розбивається на декілька кроків.

Перший крок: Перенесення на вектор - A(-a, -b, -c) за допомогою матриці.

$$[T]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ -a & -b & -c & 1\end{bmatrix}$$

В результаті цього перенесення добиваємося того, що пряма L проходить через початок координат.

Другий крок: Поєднання осі аплікат з прямою L двома поворотами навколо осі абсцис, і осі ординат. Перший поворот - навколо осі абсцис ψ (підлягаючий визначенню). Щоб знайти цей кут, розглянемо ортогональну проекцію L початкової прямої L на площину X=0 (рис. 12.11).

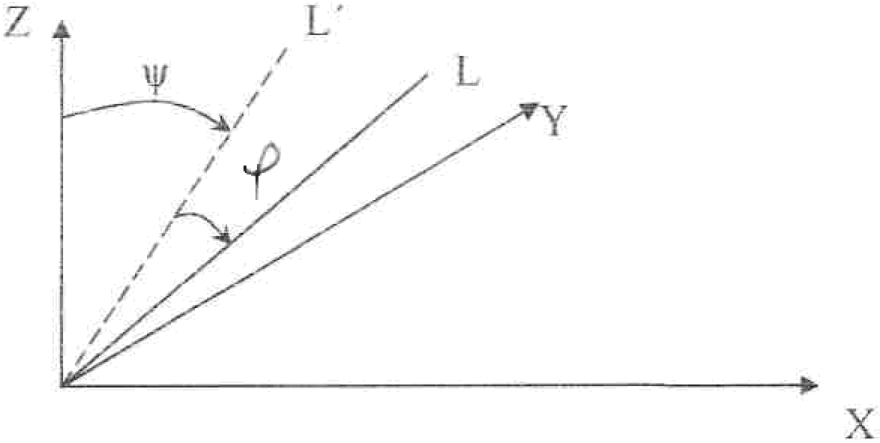


Рис. 12.11

Направляючий вектор прямої L’ визначається просто - він рівний (o, m, n). Звідси зразу ж витікає, що $\cos\Psi=\frac{n}{m}$; $\sin\Psi=\frac{m}{d}$, где $d=\sqrt{m^2+n^2}$

Відповідна матриця обертання має наступний вигляд:

$$[Rx]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{n}{d} & \frac{m}{d} & 0\\ 0 & -\frac{m}{d} & \frac{n}{d} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Під дією перетворення, описуваного цією матрицею, координати вектора (l, m, n.) зміняться. Підрахувавши їх, в результаті отримаємо: (l, m, n, 1) [Rx]=[l, 0, d, 1].

Другий поворот навколо осі ординат на кут φ, визначуваний співвідношеннями cos φ=l; sin φ =-d.

Відповідна матриця обертання записується в наступному вигляді:

$$[Ry]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & d & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -d & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Третій крок: Обертання навкруги прямої L на заданий кут γ. Оскільки тепер пряма L співпадає з віссю аплікат, то відповідна матриця має наступний вигляд:

$$[Rz]=\begin{bmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Четвертий крок: Поворот навколо осі ординат на кут $-\varphi$.

П'ятий крок: Поворот навколо осі абсцис на кут $-\psi$.

Шостий крок: Перенесення на вектор A(a, b, c).

Перемножимо знайдені матриці в порядку їх побудови і отримаємо наступну матрицю [T] [Rx] [Ry] [Rz] $[Ry]^{-1}$ $[Rx]^{-1}$ $[T]^{-1}$.

Остаточний результат такий (вважаючи для простоти, що вісь обертання L проходить через початкову точку):

$$\begin{bmatrix} l^2+\cos\varphi(1-e^2) & l(1-\cos\varphi)m+n\sin\varphi & l(1-\cos\varphi)n-m\sin\varphi & 0 \\ l(1-\cos\varphi)m-n\sin\varphi & m^2+\cos\varphi(1-m^2) & m(1-\cos\varphi)n+l\sin\varphi & 0 \\ l(1-\cos\varphi)n+m\sin\varphi & m(1-\cos\varphi)n-l\sin\varphi & n^2+\cos\varphi(1-n^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Розглядаючи інші приклади, отримаємо в результаті невироджені матриці вигляду:

$$[A]=\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 \\ \lambda & \mu & \nu & 1 \end{bmatrix}$$

За допомогою таких матриць можна перетворити плоскі і просторові фігури.

Платонові тіла

Правильними многогранниками (платоновими тілами) називаються такі опуклі многогранники, всі грані яких є правильні багатокутники, і всі багатогранні кути при вершинах рівні між собою.

Існує 5 правильних многогранників (довів Евклід), їх основні характеристики приведені в таблиці

Назва	Число граней, г	Число ребер, р	Число вершин, в

Тетраедр	4	6	4
Гексаедр	6	12	8
Октаедр	8	12	6
Додекаедр	12	30	20
Ікосаедр	20	30	12

В кожному з 5 випадків числа г, р, в зв'язані рівністю Ейлера: Г+В=Р+2 Правильні многогранники володіють багатьма цікавими властивостями. Розглянемо деякі з них. Операції побудови перших трьох платонових тіл є дуже простими. Куб (гексаедр) будується зовсім просто.

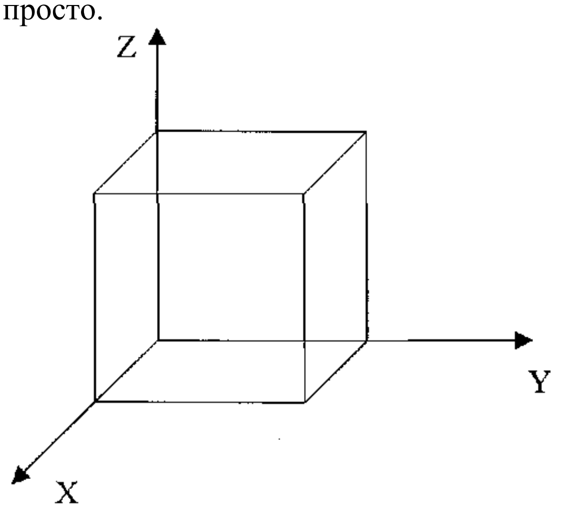


Рис. 12.12

Покажемо, як використовуючи куб, можна побудувати тетраедр і октаедр. Для побудови тетраедра достатньо провести діагоналі протилежних граней куба, що схрещуються. (рис. 12.13)

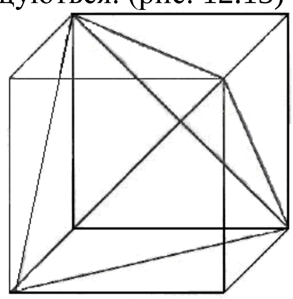


Рис. 12.13

Тим самим, вершинами тетраедра є будь-які 4 вершини куба, попарно не суміжні ні з одним з його ребер.

Для побудови октаедра, скористаємося наступними властивостями подвійності: вершини октаедра суть центру (тяжкості) граней куба (рис. 12.14)

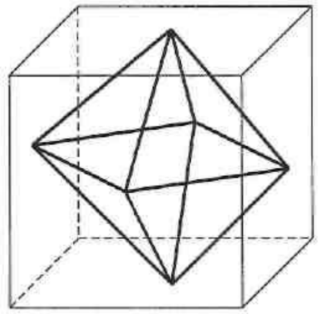


Рис. 12.14

Координати вершин октаедра по координатах вершин куба легко обчислюється (кожна координата вершини октаедра є середньою арифметичною однойменних координат чотирьох вершин що містить її грані куба).

Додекаедр і икосаэдр також можна побудувати за допомогою куба, але є і більш простий спосіб їх конструювання (за допомогою розтину круглого циліндра одиничного радіусу).

Відрізки прямих ліній, грані

Тривимірні об'єкти можуть бути відображені в двох видах: у вигляді дротяної моделі або у вигляді непрозорого суцільного тіла. Це означає, що для куба, узятого як такий об'єкт, спостережуваний з деякої випадкової точки, можемо бачити всі 6 або тільки 3 обмежуючі грані.

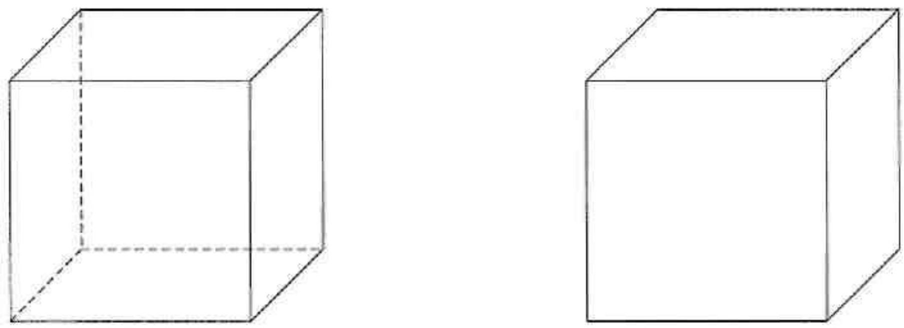


Рис. 15.1

Однією з найважливіших задач тривимірної графіки є наступна: визначити, які частини об'єктів (ребра, грані), що знаходяться в тривимірному просторі, будуть видимі при заданому способі проектування, а які будуть закриті від спостерігача іншими об'єктами.

Задача видалення невидимих ліній і поверхонь, є достатньо складною, вимагає дуже великих об'ємів обчислень. Тому існує цілий ряд різних методів вирішення цієї задачі. Вони розрізняються по наступних основних параметрах:

- способу представлення об'єктів;
- способу візуалізації сцени;
- простору, в якому проводиться аналіз видимості;
- виду одержуваного результату;

В якості можливих способів представлення об'єктів можуть виступати аналітичні (явні і неявні), параметричні і полігональні.

Вважатимемо, що всі об'єкти представлені набором опуклих площин граней, наприклад, трикутників, які можуть перетинатися друг з другом тільки уздовж ребер.

Координати в початковому тривимірному просторі позначатимемо через (x,y,z), а в двовимірному(x,y).

Вважатимемо, що проектування здійснюється на площину OXY. Проектування при цьому відбувається паралельно осі *OZ*, задається формулами X = x, Y = y, або є центральними з центром, розташованим на осі OZ і задається формулами

$$X = \frac{x}{z} \qquad\qquad Y = \frac{y}{z}$$

Так як існує два різні способи зображення тривимірних тіл (каркасне і суцільне), то виникають і два типи задач - видалення невидимих ліній (ребер для каркасних зображень) і видалення невидимих поверхонь (граней для суцільних зображень).