Тема 7. Задачі на екстремум. Метод найменших квадратів

План

1. Екстремум функції двох змінних.
2. Найбільше та найменше значення функції двох змінних в заданій області.
3. Метод найменших квадратів.

3. Екстремум функції двох змінних.

Точка $M_0(x_0, y_0)$ називається точкою *локального максимуму* (*мінімуму*) функції $z = f(x, y)$, якщо знайдеться такий окіл цієї точки, що для всіх (x, y) із цього околу виконується нерівність $f(x, y) \le f(x_0, y_0)$ ($f(x, y) \ge f(x_0, y_0)$). Точки локального мінімуму або максимуму називають також точками *локального екстремуму*.

Наведемо *необхідні умови екстремуму*. Якщо в точці $M_0(x_0, y_0)$ функція $z = f(x, y)$ диференційована і досягає локального екстремуму, то її частинні похідні першого порядку в цій точці дорівнюють нулю:

$$f'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) = 0 . \tag{1}$$

Точки, в яких виконуються умови (9.1), називаються *стаціонарними*. Отже, якщо функція може досягати в якійсь точці свого екстремального значення, то така точка – стаціонарна. Іншими словами, точки локального екстремуму функції слід шукати серед її стаціонарних точок.

Проте не всі стаціонарні точки є точками екстремуму. Для цього повинні бути виконані *достатні умови екстремуму*. Наведемо вказані умови. Нехай $M_0(x_0, y_0)$ – стаціонарна точка функції $z = f(x, y)$. Припустимо, що в самій точці M_0 і деякому її околі вказана функція має неперервні частинні похідні другого порядку. Складемо визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{yx}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix}. \tag{2}$$

Тоді, якщо $\Delta > 0$, то в точці M_0 функція має екстремум. А саме, максимум при $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$ (або $f''_{yy}(x_0, y_0) < 0$) та мінімум при $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$ (або $f''_{yy}(x_0, y_0) > 0$). Якщо ж $\Delta < 0$, то в точці M_0 екстремум відсутній.

Приклад 1. Дослідити на екстремум функцію $z = x^3 - y^3 - 3xy$.

Розв'язання. Знаходимо стаціонарні точки:

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 0, \\ f'_y(x, y) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 3x^2 - 3y = 0, \\ -3y^2 - 3x = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} y = x^2, \\ x(x^3 + 1) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 0, \\ y_1 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -1, \\ y_2 = 1. \end{cases}$$

Маємо дві стаціонарні точки $M_1(0;0)$ і $M_2(-1;1)$. Обчислюємо другі похідні:

$$f''_{xx}(x,y)=6x, \quad f''_{xy}(x,y)=f''_{yx}(x,y)=-3, \quad f''_{yy}(x,y)=-6y.$$

Перевіряємо виконання достатніх умов у стаціонарних точках. В точці $M_1(0;0)$ маємо:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}=-3<0\,.$$

Так як $\Delta<0$, то дана точка не є точкою екстремуму. В точці $M_2(-1;1)$:

$$\Delta=\begin{vmatrix} -6 & -3 \\ -3 & -6 \end{vmatrix}=27>0\,.$$

Так як $\Delta>0$ і $f''_{xx}(-1;1)=-6<0$, то дана точка є точкою локального максимуму; $f(-1;1)=1$.

2. Найбільше та найменше значення функції двох змінних в заданій області

Нагадаємо, що функція однієї змінної $y=f_1(x)$, яка диференційована на відрізку $[a,b]$, приймає найбільше та найменше значення на цьому відрізку або в стаціонарних точках (стаціонарними точками є розв'язки рівняння $f_1'(x)=0$), що належать відрізку $[a,b]$, або на його кінцях.

Розглянемо тепер задачу про обчислення найбільшого та найменшого значень функції $z=f(x,y)$ в заданій області D. Нехай вказана функція диференційована в області D, а сама область D замкнена і обмежена. Тоді найбільше та найменше значення досягаються функцією або в стаціонарних точках, що належать області D, або на межі даної області. Нехай область D обмежена лініями, рівняння яких представлені у формі $y = \varphi(x) \quad (a \le x \le b)$ або $x = \psi(y) \quad (c \le y \le d)$. Наведемо далі схему розв'язування поставленої задачі.

1. Знаходимо всі стаціонарні точки функції, що лежать в області D, і визначаємо її значення в цих точках.

2. Досліджуємо функцію на межі області. На лінії $y = \varphi(x) \quad (a \le x \le b)$ функція z приймає вигляд $z = f(x, \varphi(x)) = f_1(x)$. Розв'язавши рівняння $f_1'(x) = 0$, знаходимо стаціонарні точки функції однієї змінної $f_1(x)$. Обчислюємо значення вказаної функції на кінцях відрізку $[a, b]$ і в стаціонарних точках, що йому належать. На лінії $x = \psi(y) \quad (c \le y \le d)$ отримаємо функцію однієї змінної $z = f(\psi(y), y) = f_2(y)$. Досліджуємо її на відрізку $[c, d]$ аналогічно попередньому. Виконуємо вказані дії по всій межі області D.

3. Вибираємо з одержаних значень функції найбільше та найменше.

Приклад 2. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^3 - y^3 - 3xy$ в області D, що обмежена лініями $y = x + 3, \quad x = 0, \quad y = 0$.

Розв'язання. Побудуємо область D у системі координат *Oxy* (рис. 2). В попередньому прикладі були визначені стаціонарні точки даної функції, а саме $M_1(-1;1)$ і $M_2(0;0)$. Обчислюємо значення функції в цих точках (обидві точки належать області D): $z_1 = f(-1;1) = 1$, $z_2 = f(0,0) = 0$. Межа області D складається із трьох відрізків AO, OB і AB (див. рис.2). Досліджуємо дану функцію на кожному з них. На відрізку AO ($y = 0$, $-3 \le x \le 0$) функція z приймає вигляд $z = f_1(x) = x^3$. Досліджуємо, далі, одержану функцію однієї змінної на відрізку $[-3;0]$. Знаходимо стаціонарні точки:

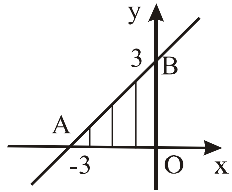

Рис. 2

$$f_1'(x) = 3x^2, \quad 3x^2 = 0, \quad x = 0.$$

Так як значення функції z в точці (0;0) вже знайдено, то обчислюємо її значення лише в точці $A(-3;0)$: $z_3 = f_1(-3) = f(-3;0) = -27$.

На відрізку OB:

$$x = 0, \quad 0 \le y \le 3; \quad z = f_2(y) = -y^3; \quad f_2'(y) = -3y^2, \quad -3y^2 = 0, \quad y = 0;$$

$$z_4 = f_2(3) = f(0;3) = -27.$$

На відрізку AB:

$$y = x + 3, \quad -3 \le x \le 0; \quad z = f_3(x) = x^3 - (x+3)^3 - 3x(x+3) =$$

$$= -12x^2 - 36x - 27, \quad f_3'(x) = -24x - 36, \quad -24x - 36 = 0, \quad x = -1{,}5;$$

$$z_5 = f_3(-1{,}5) = f(-1{,}5;1{,}5) = 0.$$

Вибираємо найбільше і найменше значення: $z_{найб} = 1$ $z_{найм} = -27$.

3. Метод найменших квадратів

В багатьох експериментальних дослідженнях для кожного значення $x_1, x_2, ..., x_n$ змінної величини x визначаються відповідні значення $y_1, y_2, ..., y_n$ змінної величини y. Іншими словами, експериментально визначається функція y від аргументу x, причому задається вказана функція табличним способом. Проте, більш зручною для подальшого аналізу є аналітична форма функціональної залежності, тобто виникає потреба представлення знайденої функції у вигляді співвідношення $y = \varphi(x)$, де $\varphi(x)$ – аналітичний вираз. Така задача може бути розв'язана за допомогою *методу найменших квадратів*.

Конкретна форма виразу $\varphi(x)$ визначається характером отриманої експериментальної залежності та, можливо, теоретичними міркуваннями. У відповідності з методом найменших квадратів функція y задається у вигляді $y = \varphi(x, a, b, ..., c)$, де $a, b, ..., c$ – невідомі параметри. Складаємо суму

$$S(a, b, ..., c) = \sum_{i=1}^{n} (\varphi(x_i, a, b, ..., c) - y_i)^2 . \qquad (1)$$

Сума (1) характеризує міру відхилення розрахункових значень величини y від експериментальних. Невідомі параметри $a, b, ..., c$ необхідно визначити таким чином, щоб вказана сума приймала найменше значення, тобто задача зводиться до знаходження мінімуму функції $S(a, b, ..., c)$. Записуємо необхідні умови екстремуму цієї функції (прирівнюємо до нуля частинні похідні по змінним $a, b, ..., c$)

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n}(\varphi(x_i, a, b, ..., c) - y_i)\dfrac{\partial\varphi(x_i, a, b, ..., c)}{\partial a} = 0, \\ \sum_{i=1}^{n}(\varphi(x_i, a, b, ..., c) - y_i)\dfrac{\partial\varphi(x_i, a, b, ..., c)}{\partial b} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum_{i=1}^{n}(\varphi(x_i, a, b, ..., c) - y_i)\dfrac{\partial\varphi(x_i, a, b, ..., c)}{\partial c} = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Розв’язком системи (2) є значення параметрів $a, b, ..., c$, при яких функція $S(a, b, ..., c)$ може приймати мінімальне значення.

У випадку лінійної залежності $y = ax + b$ маємо:

$$\varphi(x_i, a, b) = ax_i + b, \quad \frac{\partial\varphi(x_i, a, b)}{\partial a} = x_i, \quad \frac{\partial\varphi(x_i, a, b)}{\partial b} = 1 .$$

Система (2) приймає вигляд

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i, \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum_{i=1}^{n} y_i. \end{cases} \tag{3}$$

У випадку квадратичної залежності $y = ax^2 + bx + c$ одержимо:

$$\varphi(x_i, a, b, c) = ax_i{}^2 + bx_i + c, \quad \frac{\partial\varphi(x_i, a, b, c)}{\partial a} = x_i{}^2;$$

$$\frac{\partial\varphi(x_i, a, b, c)}{\partial b} = x_i, \quad \frac{\partial\varphi(x_i, a, b, c)}{\partial c} = 1.$$

Для визначення параметрів a, b і c отримаємо наступну систему

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i{}^4 + b\sum_{i=1}^{n} x_i{}^3 + c\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i{}^2, \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i{}^3 + b\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 + c\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i, \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i + cn = \sum_{i=1}^{n} y_i. \end{cases} \tag{4}$$

Приклад 1. В таблиці

x	1	3	5	7	10
y	6	5	3	2	1

наведені результаті експериментальних досліджень з метою встановлення залежності між величинами *x і y*. За допомогою методу найменших квадратів визначити аналітичну залежність $y = ax + b$. Зобразити експериментальні точки та побудувати знайдену пряму в декартовій прямокутній системі координат *Oxy*.

Розв'язання. Визначаємо числові коефіцієнти системи (3):

$$\sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 10^2 = 184, \quad \sum_{i=1}^{5} x_i = 1 + 3 + 5 + 7 + 10 = 26,$$

$$\sum_{i=1}^{5} x_i y_i = 1 \cdot 6 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 3 + 7 \cdot 2 + 10 \cdot 1 = 60, \quad \sum_{i=1}^{5} y_i = 6 + 5 + 3 + 2 + 1 = 17.$$

Складаємо систему (3) і розв'язуємо її за формулами Крамера:

$$\begin{cases} 184a + 26b = 60, \\ 26a + 5b = 17, \end{cases} \quad \begin{cases} 92a + 13b = 30, \\ 26a + 5b = 17; \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 92 & 13 \\ 26 & 5 \end{vmatrix} = 122, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 30 & 13 \\ 17 & 5 \end{vmatrix} = -71, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 92 & 30 \\ 26 & 17 \end{vmatrix} = 784;$$

$$a = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{71}{122} \approx -0{,}58; \quad b = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{784}{122} \approx 6{,}43.$$

Отже, $y = -0{,}58x + 6{,}43$. Будуємо пряму та зображаємо задані точки.

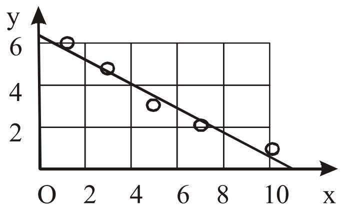

Рис. 3