Тема 8. Поняття диференціального рівняння. Диференціальні рівняння першого порядку

План

1. Поняття диференціального рівняння. Загальні означення.
2. Диференціальні рівняння із відокремленими та відокремлюваними змінними.
3. Однорідні диференціальні рівнянням першого порядку та рівняння, яки зводяться до однорідних.
4. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку. Рівняння Бернуллі.

1. Поняття диференціального рівняння. Загальні означення

Звичайним диференціальним рівнянням називається рівняння, яке пов'язує між собою незалежну змінну x, шукану функцію y та її похідні різних порядків. Якщо шукана функція залежить від декількох змінних, то диференціальне рівняння містить вже не звичайні, а частинні похідні і називається *диференціальним рівнянням у частинних похідних*. Далі будемо розглядати лише звичайні диференціальні рівняння (слово „звичайні" у їхній назві будемо опускати).

Порядком диференціального рівняння називається порядок його старшої похідної. Таким чином, у загальному випадку диференціальне рівняння n-го порядку можна представити у вигляді:

$$F(x, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0 . \qquad (1)$$

Відмітимо, що у частинних випадках деякі з величин $x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}$ можуть явно не входити у диференціальне рівняння n-го порядку. *Розв'язком* диференціального рівняння називається будь-яка функція $y = \varphi(x)$, яка після підстановки у дане рівняння перетворює його у тотожність. Очевидно, що *розв'язування* (або *інтегрування*) диференціального рівняння зводиться до знаходження його розв'язку.

Приклад 1. Показати, що функція $y = x^3 - \sin 2x + 3x$ є розв'язком диференціального рівняння $y'' + y - x^3 - 9x - 3\sin 2x = 0$.

Розв'язання. Знаходимо другу похідну y'' і підставляємо відповідні вирази у задане рівняння:

$$y' = 3x^2 - 2\cos 2x + 3,\ y'' = 6x + 4\sin 2x;$$

$$6x + 4\sin 2x + x^3 - \sin 2x + 3x - x^3 - 9x - 3\sin 2x = 0,\ 0 = 0\ .$$

Задати *початкові умови* для диференціального рівняння (1) означає задати значення функції та її похідних $y', y'', \cdots, y^{(n-1)}$ при певному значенні незалежної змінної, а саме:

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0',\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \qquad (2)$$

де $x_0, y_0, \ldots, y_0^{(n-1)}$ – числа.

Загальним розв'язком диференціального рівняння (1) називається функція $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$, яка залежить від n довільних сталих $C_1, C_2, ..., C_n$ і яка задовольняє наступним двом умовам: а) вона є розв'язком при будь-яких значеннях указаних довільних сталих; б) при будь-яких початкових умовах (2) довільні сталі $C_1, C_2, ..., C_n$ можуть бути визначені таким чином, що вказані початкові умови будуть задовольнятися.

Якщо у загальному розв'язку всім довільним сталим надати певні числові значення, то отримаємо так званий *частинний розв'язок* диференціального рівняння. *Розв'язати задачу Коші* означає, що необхідно знайти частинний розв'язок рівняння (1), який задовольняє початковим умовам (2). Якщо загальний розв'язок знайдено неявно, тобто у вигляді $F(x, y, C_1, C_2, ..., C_n) = 0$, то кажуть, що знайдено *загальний інтеграл* диференціального рівняння (1). *Частинний інтеграл* отримується із загального за допомогою надання довільним сталим певних числових значень.

2. Диференціальні рівняння із відокремленими та відокремлюваними змінними

Зробимо спочатку одне зауваження. У теорії диференціальних рівнянь похідна y' часто позначається через $\frac{dy}{dx}$. Указане позначення розглядається як відношення двох диференціалів, які можуть відокремлюватися один від одного.

У загальному випадку диференціальне рівняння першого порядку та його початкова умова мають відповідно вигляд:

$$F(x, y, y') = 0, \quad y(x_0) = y_0 . \tag{1}$$

Загальним розв'язком цього рівняння є функція $y = \varphi(x, C)$, яка залежить від однієї довільної сталої С. Розглянемо далі деякі основні типи диференціальних рівнянь першого порядку.

Диференціальним *рівнянням із відокремленими змінними* називається наступне рівняння:

$$M(x)dx + N(y)dy = 0 . \tag{2}$$

Указане рівняння розв'язується за допомогою безпосереднього інтегрування.

Приклад 1. Розв'язати рівняння: а) $(x^2 + e^{3x})dx + (2y + \cos 5y)dy = 0$; б) $\sqrt{y}\,y' + \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = 0$.

Розв'язання. а) Інтегруємо:

$$\int (x^2 + e^{3x})dx + \int (2y + \cos 5y)dy = 0 , \quad \frac{x^3}{3} + \frac{1}{3}e^{3x} + y^2 + \frac{1}{5}\sin 5y + C = 0 .$$

б) Замінюємо y' на $\dfrac{dy}{dx}$, домножуємо отримане рівняння на dx й інтегруємо:

$$\sqrt{y}\,\frac{dy}{dx} + \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = 0 , \quad \sqrt{y}dy + \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}dx = 0 ,$$

$$\int \sqrt{y}dy + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = 0, \quad \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} + \arcsin x + C = 0.$$

Диференціальне рівняння *з відокремлюваними змінними* має вигляд

$$M_1(x)M_2(y)dx + N_1(x)N_2(y)dy = 0. \tag{3}$$

Як бачимо, у лівій частині цього рівняння кожен із множників залежить тільки від однієї змінної. Розділивши його на добуток $M_2(y)N_1(x)$, одержимо рівняння з відокремленими змінними

$$\frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx + \frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy = 0.$$

Приклад 2. Розв'язати рівняння: а) $2x(1+y^2)dx + (3+x^2)dy = 0$; б) $(y - yx^2)y' = 5x + xy^2$.

Розв'язання. а) Маємо рівняння з відокремлюваними змінними. Ділимо його на добуток $(1+y^2)(3+x^2)$ та інтегруємо:

$$\frac{2xdx}{3+x^2} + \frac{dy}{1+y^2} = 0, \quad \int \frac{d(3+x^2)}{(3+x^2)} + \int \frac{dy}{1+y^2} = 0, \quad \ln|3+x^2| + \operatorname{arctg} y + C = 0.$$

б) Робимо спочатку прості, очевидні перетворення:

$$y(1-x^2)\frac{dy}{dx} = x(5+y^2), \quad y(1-x^2)dy = x(5+y^2)dx.$$

Маємо рівняння з відокремлюваними змінними. Ділимо його на добуток $(1-x^2)(5+y^2)$ і інтегруємо:

$$\int \frac{ydy}{5+y^2} = \int \frac{xdx}{1-x^2}, \quad \frac{1}{2}\int \frac{d(5+y^2)}{5+y^2} = -\frac{1}{2}\int \frac{d(1-x^2)}{1-x^2};$$

$$\frac{1}{2}\ln|5+y^2| + \frac{1}{2}\ln|1-x^2| = \frac{1}{2}\ln|C|, \quad \ln|(5+y^2)(1-x^2)| = \ln|C|;$$

$$(5+y^2)(1-x^2) = C.$$

Звертаємо увагу на те, що з метою спрощення кінцевого результату довільна стала представлена за допомогою логарифма (таке допускається).

3. Однорідні диференціальні рівнянням першого порядку та рівняння, яки зводяться до однорідних

Рівняння $y' = f(x,y)$ будемо називати *однорідним* диференціальним рівнянням першого порядку, якщо для будь-якого відмінного від нуля λ виконується рівність $f(\lambda x, \lambda y) = f(x,y)$. Дане рівняння зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними за допомогою підстановки $y = ux$, де u – нова шукана функція.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $y' = \dfrac{y}{x-y}$.

Розв'язання. Покажемо, що задане рівняння є однорідним:

$$f(x,y)=\frac{y}{x-y};\quad f(\lambda x,\lambda y)=\frac{\lambda y}{\lambda x-\lambda y}=\frac{\lambda y}{\lambda(x-y)}=\frac{y}{x-y}=f(x,y).$$

Зробимо заміну $y=ux,\ y'=u'x+u$:

$$u'x+u=\frac{ux}{x-ux},\quad u'x=\frac{u}{1-u}-u,\quad x\frac{du}{dx}=\frac{u^2}{1-u},\quad \int\frac{1-u}{u^2}du=\int\frac{dx}{x};$$

$$\int(u^{-2}-\frac{1}{u})du=\int\frac{dx}{x},\quad -\frac{1}{u}-\ln|u|=\ln|x|+C;$$

$$\frac{x}{y}+\ln\left|\frac{y}{x}\right|+\ln|x|+C=0,\quad x+y\ln|y|+Cy=0.$$

Розглянемо рівняння виду

$$y'=\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2},\tag{1}$$

де a_1,b_1,c_1,a_2,b_2,c_2 – числові коефіцієнти. Очевидно, що якщо $c_1=c_2=0$, то рівняння (1) є однорідним. У зв'язку зі сказаним будемо вважати, що хоча б один із коефіцієнтів c_1,c_2 відмінний від нуля. Розглянемо два можливі випадки вказаного рівняння.

1) Коефіцієнти при x і y пропорційні, тобто виконується умова $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}$. У цьому випадку рівняння (1) зводиться до рівняння *з відокремлюваними змінними* за допомогою підстановки $z=a_1x+b_1y$ (або $z=a_2x+b_2y$), де z – нова функція. Продиференціювавши останню рівність, знайдемо y': $z'=a_1+b_1y'$, $y'=(z'-a_1)/b_1$.

2) Коефіцієнти при x і y не пропорційні, тобто виконується умова $\dfrac{a_1}{a_2}\neq\dfrac{b_1}{b_2}$. У цьому випадку рівняння (1) зводиться до *однорідного* за допомогою підстановки $x=x_1+h$, $y=y_1+k$, де x_1 – нова незалежна змінна, y_1 – нова функція; h, k – числа, які є розв'язком системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_1h+b_1k+c_1=0, \\ a_2h+b_2k+c_2=0 \end{cases}. \tag{2}$$

Відмітимо, що при вказаній підстановці $dx=dx_1$, $dy=dy_1$.

Приклад 5. Розв'язати рівняння: а) $y'=\dfrac{x-y+3}{3x-3y+5}$; б) $(y-1)dx=(x-y+3)dy$.

Розв'язання. а) Так як коефіцієнти при x і y пропорційні ($\dfrac{1}{3}=\dfrac{-1}{-3}$), то розв'язок знайдемо за допомогою підстановки $z = x - y$. З останньої рівності отримуємо: $z' = 1 - y'$, $y' = 1 - z'$. Підставляємо:

$$1 - z' = \frac{z-3}{3z+5}, \quad \frac{dz}{dx} = 1 - \frac{z-3}{3z+5}, \quad \frac{3z+5}{z+4}dz = 2dx;$$

$$\int (3 - \frac{7}{z+4})dz = \int 2dx, \quad 3z - 7\ln|z+4| = 2x + C;$$

$$3(x-y) - 7\ln|x-y+4| = 2x + C.$$

б) Перепишемо задане рівняння у вигляді $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y-1}{x-y+3}$.

Коефіцієнти при x і y не пропорційні ($\dfrac{0}{1} \neq \dfrac{1}{-1}$). Складемо систему (2) і розв'яжемо її:

$$\begin{cases} k - 1 = 0, \\ h - k + 3 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} k = 1, \\ h = -2 \end{cases}.$$

Зробимо заміну $x = x_1 - 2,\ y = y_1 + 1,\ dx = dx_1,\ dy = dy_1$:

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{y_1 + 1 - 1}{x_1 - 2 - (y_1 + 1) + 3}, \quad \frac{dy_1}{dx_1} = \frac{y_1}{x_1 - y_1}.$$

Отримане однорідне рівняння інтегрується за допомогою підстановки $y_1 = ux_1$ (див. прикл. 1).

4. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку. Рівняння Бернуллі

Лінійним диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння, яке лінійне відносно шуканої функції y та її похідної y' (величини y і y' входять тільки у першому степені і між собою не перемножуються). Указане рівняння завжди можна представити у стандартній формі

$$y' + P(x)y = Q(x)\,. \qquad (1)$$

Розв'язок рівняння (1) будемо шукати у вигляді $y = uv$, де u, v – нові шукані функції. Знаходимо похідну: $y' = u'v + uv'$. Підставимо y і y' в рівняння (1):

$$u'v + uv' + P(x)uv = Q(x)\,;$$

$$v(u' + P(x)u) + uv' = Q(x)\,. \qquad (2)$$

Функція u визначається з умови, що вираз у дужках у формулі (2) дорівнює нулю:

$$u' + P(x)u = 0, \quad \frac{du}{dx} = -P(x)u, \quad \int \frac{du}{u} = -\int P(x)dx;$$

$$\ln|u| = -\int P(x)dx, \quad u = e^{-\int P(x)dx}\,.$$

Звертаємо увагу на те, що при інтегруванні довільна стала береться рівною нулю. Підставимо знайдену функцію u в рівняння (2) і визначимо функцію v:

$$e^{-\int P(x)dx}v' = Q(x), \quad dv = Q(x)e^{\int P(x)dx}dx, \quad v = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C.$$

Враховуючи, що $y = uv$, отримаємо

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right). \tag{3}$$

Формулу (3) можна використовувати для інтегрування лінійних диференціальних рівнянь.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $y' - 2xy = e^{x^2}\cos x$.

Розв'язання. *Перший спосіб*. Здійснюємо підстановку $y = uv$, $y' = u'v + uv'$ і розв'язуємо рівняння за наведеною вище схемою:

$$u'v + uv' - 2xuv = e^{x^2}\cos x, \quad v(u' - 2xu) + uv' = e^{x^2}\cos x;$$

$$u' - 2xu = 0, \quad \int\frac{du}{u} = 2\int xdx, \quad \ln|u| = x^2, \quad u = e^{x^2};$$

$$e^{x^2}v' = e^{x^2}\cos x, \quad v' = \cos x, \quad \int dv = \int\cos xdx, \quad v = \sin x + C;$$

$$y = e^{x^2}(\sin x + C).$$

Другий спосіб. Розв'яжемо рівняння за допомогою формули (3). У нашому випадку

$P(x)=-2x,\quad Q(x)=e^{x^2}\cos x$. Знайдемо потрібні інтеграли (у першому інтегралі довільна стала береться рівною нулю):

$$\int P(x)dx=\int(-2x)dx=-x^2\ ;$$

$$\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx=\int e^{x^2}\cdot\cos x\cdot e^{-x^2}dx=\int\cos x dx=\sin x+C\ .$$

Підставимо знайдені інтеграли у формулу (3):

$$y=e^{x^2}(\sin x+C)\ .$$

Рівнянням Бернуллі називається наступне рівняння

$$y'+P(x)y=Q(x)y^m;\quad m\neq 0,\quad m\neq 1\ . \tag{4}$$

Аналогічно попередньому, воно розв'язується за допомогою підстановки $y=uv$.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $y'-\dfrac{y}{x-1}=\dfrac{y^2}{x-1}$.

Розв'язання. Робимо підстановку $y=uv$, $y'=u'v+uv'$ і розв'язуємо рівняння:

$$u'v+uv'-\frac{uv}{x-1}=\frac{(uv)^2}{x-1},\quad v\left(u'-\frac{u}{x-1}\right)+uv'=\frac{u^2v^2}{x-1};$$

$$u' - \frac{u}{x-1} = 0, \quad \frac{du}{u} = \frac{dx}{x-1}, \quad \ln|u| = \ln|x-1|, \quad u = x-1;$$

$$(x-1)v' = \frac{(x-1)^2 v^2}{x-1}, \quad v' = v^2, \quad \frac{dv}{v^2} = dx, \quad \frac{v^{-1}}{-1} + C = x, \quad v = \frac{1}{C-x};$$

$$y = uv = \frac{x-1}{C-x}.$$