Лекція 10. Закон розподілу функції випадкових величин.

План лекції

Питання, що розглядаються:

Закон розподілу функції дискретного аргументу, закон розподілу функції неперервного аргументу, закон розподілу лінійної функції, числові характеристики функції випадкового аргументу.

Раніше ми розглядали задачі знаходження числових характеристик функцій випадкових величин без знаходження законів їх розподілу. Проте в багатьох застосуваннях, зокрема при визначенні ймовірності попадання цих функцій в певні області їх можливих значень, потрібно знати закони розподілу функцій. Тому при розв'язуванні задач такого типу необхідно знати закони розподілу випадкових величин, що фігурують в постановці задачі. Звичайно при цьому закон розподілу випадкового аргументу або системи випадкових аргументів є відомим, так само як і відома функціональна залежність.

Отже, виникає така задача: задана система випадкових аргументів (X_1, X_2, … , X_n), закон розподілу якої відомий. Відома випадкова величина Y

$$Y = \varphi(X_1, X_2, X_n) \qquad (1)$$

як функція випадкових аргументів ($X_1,\dots, X_n$).Потрібно визначити закон розподілу випадкової величини Y.

1.Закон розподілу функції випадкової величини.

Спочатку розглянемо простішу задачу: про закон розподілу функції одного випадкового аргументу

$$Y = \varphi(X) \qquad (2)$$

Нехай: – X – *дискретна випадкова величина*, задана рядом розподілу

X	x_1	x_2	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_n

Тоді $Y = \varphi(X)$ – теж дискретна випадкова величина, яка приймає можливі значення

$$y_1 = \varphi(x_1),\; y_2 = \varphi(x_2)\; \dots,\; y_n = \varphi(x_n).$$

Тут розрізняють *два випадки*: а) коли всі значення y_i різні (функція $y = \varphi(x)$ монотонна),

б) коли серед y_i є значення, які співпадають (функція $y = \varphi(x)$ немонотонна).

а) Якщо всі значення y_i $(i = \overline{1,n})$ різні, то для кожного i=1,2, …,n події

$$(X = x_i) \text{ і } (Y = y_i = \varphi(x_i)) \text{ тотожні.}$$

Отже, $P(Y = y_i) = P(X = x_i) = p_i$ і шуканий закон розподілу функції має вигляд

Y	$y_1 = \varphi(x_1)$	$y_2 = \varphi(x_2)$	…	$y_n = \varphi(x_n)$
P	p_1	p_2	…	p_n

де $y_i < y_{i+1}$, $(i = \overline{1,n})$; $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Приклад 1. Задано закон розподілу випадкового аргументу X

X	1	2	3
P	0,25	0,40	0,35

Знайти закон розподілу функції $Y = X^2$.

Розв'язання. Для заданої множини значень X функція $y = x^2$ приймає значення: $y_1 = 1^2 = 1$, $y_2 = 2^2 = 4$, $y_3 = 3^2 = 9$

Отже, закон розподілу функції має вигляд

Y	1	4	9
P	0,25	0,40	0,35

б) Якщо серед чисел $y_i = \varphi(x_i)$ є однакові, то кожній групі однакових чисел y_i відводимо в таблиці один стовпчик, а відповідні ймовірності додаємо.

Приклад 2. Задано закон розподілу випадкового аргументу X

X	-2	-1	0	1	2
P	0,15	0,15	0,4	0,12	0,18

Знайти закон розподілу функції $Y = X^2$.

Розв'язання. Можливі значення функції $y_1 = 4$, $y_2 = 1$, $y_3 = 0$, $y_4 = 1$, $y_5 = 4$.

Маємо три різні числові значення y=0, y=1, y=4, причому два останні повторюються, тому додаємо їх відповідні ймовірності.

Отже, закон розподілу функції $Y = X^2$

Y	0	1	2
P	0,4	0,27	0,33

Нехай X – *неперервна випадкова величина*, щільність розподілу якої відома: $f(x)$. Знайдемо щільність розподілу $g(y)$ випадкової величини $Y = \varphi(X)$.

Припустимо, що функція $\varphi(x)$ *монотонно зростає*, неперервна і диференційовна на (a, b).

Функція розподілу $G(y)$ випадкової величини Y визначається за формулою

$$G(y) = P(Y < y) \tag{3}$$

Якщо функція $y = \varphi(x)$ монотонно зростає, то подія $(Y < y)$ еквівалентна події $(X < \varphi^{-1}(y))$, де $x = \varphi^{-1}(y)$- функція, обернена функції $y = \varphi(x)$, яка теж монотонно зростаюча, неперервна і диференційовна.

Отже,

$$G(y) = P(Y < y) = P(X < \varphi^{-1}(y)) = \int_a^{\varphi^{-1}(y)} f(x)dx \tag{4}$$

Диференціюючи цей вираз по y, отримаємо щільність розподілу випадкової величини Y

$$g(y) = G'(y) = f[\varphi^{-1}(y)][\varphi^{-1}(y)]' \tag{5}$$

Якщо функція $\varphi(x)$ на (a,b) *монотонно спадає*, то подія $(Y < y)$ еквівалентна події ($X > \varphi^{-1}(y)$).

Отже,
$$G(y) = \int_{\varphi^{-1}(y)}^{b} f(x)dx \tag{6}$$
і
$$g(y) =- f[\varphi^{-1}(y)][\varphi^{-1}(y)]'. \tag{7}$$
Оскільки щільність розподілу не може бути від‘ємною, то формули (5) і (7) можна об‘єднати в одну
$$g(y) = f[\varphi^{-1}(y)]\,|[\varphi^{-1}(y)]'\,| \tag{8}$$
Отже, щільність розподілу функції (2) визначається формулою (8).

Зауваження. Якщо функція $y = \varphi(x)$ немонотонна, тобто обернена функція $x = \varphi^{-1}(y)$ неоднозначна, то весь інтервал зміни значень функції розбиваємо на інтервали монотонності і для знаходження $g(y)$ підсумовуємо за формулою (8) по всіх інтервалах монотонності.

Приклад 3. Випадкова величина X розподілена нормально з параметрами $m_x = 0$, $\sigma_x = 1$
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$
Знайти закон розподілу функції $Y = X^3$.

Розв'язання. Функція $y = x^3$ монотонна на $(-\infty,+\infty)$. Обернена до неї функція $\varphi^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$.

Знаходимо похідну $(\varphi^{-1}(y))' = \dfrac{1}{3y^{2/3}}$.

Отже, за формулою (8) маємо
$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{\sqrt[3]{y^2}}{2}} \cdot \frac{1}{3y^{2/3}} = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}\,{\cdot}^{2/3}} \cdot e^{-\frac{y^{2/3}}{2}} .$$

Приклад 4. Випадкова величина X розподілена нормально з параметрами $m_x = 0$, $\sigma_x = 1$.
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$
Знайти закон розподілу функції $Y = X^2$.

Розв'язання. Обернена функція $x = \varphi^{-1}(y)$ неоднозначна:
$$x_1 = -\sqrt{y} \text{ для } x < 0 \quad \text{і} \quad x_2 = \sqrt{y} \text{ для } x \ge 0 .$$
Отже, $g(y) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-y/2} \left| -\dfrac{1}{2\sqrt{y}} \right| + \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-y/2} \left| \dfrac{1}{2\sqrt{y}} \right| = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-y/2}$, $y > 0$.

2.Закон розподілу лінійної функції.

Нехай $Y=\alpha X+\beta$, де α,β – невипадкові величини. Оскільки $y=\alpha x+\beta$ монотонна функція, то обернена функція $x=\dfrac{y-\beta}{\alpha}$ теж монотонна. Маємо $x'_y=\dfrac{1}{\alpha}$ і за формулою (8)

$$g(y)=f\left(\frac{y-\beta}{\alpha}\right)\cdot\frac{1}{|\alpha|}. \tag{9}$$

Вираз (9) показує, що лінійне перетворення випадкової величини X тотожне зміні масштабу зображення кривої $f(x)$ і переносу початку координат в нову точку. Вигляд кривої $f(x)$ при такому перетворенні не змінюється.

Покажемо, що лінійна функція $Y=\alpha X+\beta$ розподілена нормально, якщо аргумент X - нормально розподілена випадкова величина: $f(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$.

Припустивши $\alpha>0$, знайдемо похідну $x'_y=\dfrac{1}{\alpha}$. За формулою (9) запишемо щільність розподілу функції

$$g(y)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\frac{y-\beta}{\alpha}-a)^2}{2\sigma^2}}\cdot\frac{1}{\alpha} \quad \text{або} \quad g(y)=\frac{1}{(\sigma\alpha)\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-(\beta+\alpha a))^2}{2(\alpha\sigma)^2}}. \tag{10}$$

Таким чином, лінійна функція теж розподілена нормально з параметрами $\sigma_y=\sigma\alpha$ і $m_y=\beta+\alpha a$.

3. Математичне сподівання і дисперсія функції випадкової величини

В задачах, пов'язаних з оцінкою точності роботи автоматичних систем, тощо, доводиться розглядати функції однієї або декількох випадкових величин. В найпростішому випадку задача ставиться таким чином: на вхід деякого технічного пристрою поступає випадковий сигнал X, і технічний пристрій, виконуючи над X деяке функціональне перетворення φ, дає на виході випадкову величину Y, яка є функцією від X

$$Y=\varphi(X) \tag{11}$$

Розглянемо таку задачу: за відомим законом розподілу випадкового аргумента X знайти числові характеристики функції $Y=\varphi(X)$, не знаходячи закону розподілу Y.

Нехай X *дискретна випадкова величин*а, задана рядом розподілу

X	x_1	x_2	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_n

де $x_i < x_{i+1}$, $(i = \overline{1,n})$; $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, тоді і *функція* $Y = \varphi(X)$ *теж дискретна випадкова величина*.

Складемо таблицю значень величини Y і ймовірностей цих значень $P(Y = y_i = \varphi(x_i)) = P(X = x_i) = p_i$

Y	$y_1 = \varphi(x_1)$	$y_2 = \varphi(x_2)$	$\dots$	$y_n = \varphi(x_n)$
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n

Ця таблиця не є рядом розподілу , оскільки деякі значення y_i можуть повторюватися. Проте математичне сподівання можна визначати за формулою

$$M[Y] = M[\varphi(x)] = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i) p_i \tag{12}$$

Дійсно, величина (2) не може змінитися від того. що під знаком суми деякі члени будуть наперед об'єднані , а порядок членів змінений.

Міркуючи аналогічно, отримаємо формулу для обчислення дисперсії

$$D[Y] = D[\varphi(x)] = \sum_{i=1}^{n} (\varphi(x) - M[Y])^2 p_i$$

або робочу формулу

$$D[Y] = M[Y^2] - (M[Y])^2 = \sum_{i=1}^{n} \varphi^2(x_i) p_i - \left(\sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i) p_i \right)^2 \tag{13}$$

Якщо аргумент X - *неперервна випадкова величина*, то і *функція* $Y = \varphi(X)$ *теж неперервна випадкова величина*, математичне сподівання якої визначається за формулою

$$M[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f(x) dx \tag{14}$$

якщо інтеграл (4) збігається,

а дисперсія $D[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi(x) - M[Y])^2 f(x) dx$ або $D[Y] = M[Y^2]-(M[Y])^2$ (15)

де початковий момент другого порядку $M[Y^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^2(x) f(x) dx$.

Таким чином, для знаходження числових характеристик функції $Y = \varphi(X)$ досить знати закон розподілу її аргумента.

Зауваження. Надалі будемо записувати тільки вираз для початкового моменту другого порядку, оскільки дисперсія обчислюється за робочою формулою $D[Y] = M[Y^2]-(M[Y])^2$

Приклад 1. Задано закон розподілу випадкового аргументу X

X	-2	-1	0	1	2
P	0,15	0,15	0,4	0,12	0,18

Знайти математичне сподівання і дисперсію функції $Y = X^2$, не знаходячи її закону розподілу.

Розв'язання. Можливі значення функції $y_1 = 4$, $y_2 = 1$, $y_3 = 0$, $y_4 = 1$, $y_5 = 4$.

Складаємо таблицю можливих значень функції та ймовірностей цих значень

$Y = X^2$	4	1	0	1	4
P	0,15	0,15	0,4	0,12	0,18

Отже, $M[Y] = 4\cdot 0{,}15 + 1\cdot 0{,}15 + 1\cdot 0{,}12 + 4\cdot 0{,}18 = 1{,}59.$

$$M[Y^2] = 16\cdot 0{,}15 + 1\cdot 0{,}15 + 1\cdot 0{,}12 + 16\cdot 0{,}18 = 4{,}95.$$

$$D[Y] = 4{,}95 - (1{,}59)^2 \approx 2{,}42\,.$$

Приклад 2. Задана щільність розподілу аргументу $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in (0, \pi/2) \\ 0, & x \notin (0, \pi/2) \end{cases}.$

Знайти математичне сподівання і дисперсію функції $Y = X^2$, не знаходячи її закону розподілу .

Розв'язання. $y = \varphi(x) = x^2$. Отже, $M[Y] = \int_0^{\pi/2} x^2 \sin x \, dx = \pi - 2$.

$M[Y^2] = \int_0^{\pi/2} x^4 \sin x \, dx = \dfrac{\pi^3}{2} - 12\pi + 24$. $D[Y] = \dfrac{\pi^3}{2} - \pi^2 - 8\pi + 20.$

В деяких випадках для знаходження числових характеристик функції $Y = \varphi(X)$ не потрібно навіть знати закону розподілу аргумента, а тільки його числові характеристики.

4. Математичне сподівання і дисперсія лінійної функції

Нехай випадкові величини X та Y зв'язані між собою лінійно:

$$Y = \alpha X + \beta, \tag{16}$$

де α, β – невипадкові величини, причому відомі $M[X]$ і $D[X]$.

Враховуючи властивості математичного сподівання і дисперсії, отримаємо

$$M[Y] = \alpha M[X] + \beta, \tag{17}$$

тобто математичне сподівання лінійної функції є лінійною функцією математичного сподівання її аргументу, а дисперсія

$$D[Y] = \alpha^2 D[X] \tag{18}$$

5. Математичне сподівання і дисперсія мінімальної із двох величин: випадкової X і невипадкової α

Випадкова величина Y як мінімальна із двох величин зв'язана з X залежністю
$$Y = \min\{X, \alpha\} = \begin{cases} X, & X < \alpha \\ \alpha, & X \geq \alpha \end{cases}. \qquad (19)$$
Знайдемо її математичне сподівання і дисперсію.

Нехай X - *неперервна випадкова величина*, щільність розподілу якої $f(x)$. За формулою (14) знайдемо математичне сподівання
$$M[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} \min\{x, \alpha\} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\alpha} x f(x) dx + \alpha \int_{\alpha}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\alpha} x f(x) dx + \alpha \cdot [1 - F(\alpha)] \qquad (20)$$
де $F(x)$- функція розподілу випадкової величини X.

Початковий момент другого порядку
$$M[Y^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} [\min\{x, \alpha\}]^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{\alpha} x^2 f(x) dx + \alpha^2 \int_{\alpha}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\alpha} x^2 f(x) dx + \alpha^2 \cdot [1 - F(\alpha)]$$
(21)

Нехай X - *дискретна випадкова величина*, яка приймає значення $X = x_i$, $(i = \overline{1, n})$ з відповідними ймовірностями $p_i = P(X = x_i)$.

За формулою (12) знайдемо математичне сподівання
$$M[Y] = \sum_{i=1}^{n} \min\{x_i, \alpha\} \cdot p_i = \sum_{i=1}^{(\alpha)} x_i \cdot p_i + \alpha \sum_{i=(\alpha)+1}^{n} p_i \qquad (22)$$
де (α) - номер максимального з можливих значень випадкової величини X, яке не більше α:
$x_{(\alpha)} \leq \alpha$.

Початковий момент другого порядку
$$M[Y^2] = \sum_{i=1}^{n} [\min\{x_i, \alpha\}]^2 \cdot p_i = \sum_{i=1}^{(\alpha)} x_i^2 \cdot p_i + \alpha^2 \sum_{i=(\alpha)+1}^{n} p_i \qquad (23)$$

Приклад 1. Напруга X, яка подається на вхід обмежувача, розподілена за нормальним законом з параметрами a і σ. Обмежувач працює за принципом $Y = \min\{X, \alpha\}$. Знайти математичне сподівання і дисперсію напруги Y на виході обмежувача.

Ввести змінну $\tau = \dfrac{\alpha - a}{\sigma}$

Приклад 2. В обчислювальний центр за зміну надходить випадкове число X інформаційних документів, яке розподілене за законом Пуассона з параметром $\lambda = M[X]$. Число інформаційних документів, що обробляються в ОЦ за зміну, не може перевищувати α (ціле число): $Y = \min\{X, \alpha\}$. Знайти математичне сподівання і дисперсію випадкової величини Y.

6. Математичне сподівання і дисперсія максимальної із двох величин: випадкової X і невипадкової α

Випадкова величина Y як максимальна із двох величин зв'язана з X залежністю

$$Y=\max\{X,\alpha\}=\begin{cases}\alpha, & X<\alpha\\ X, & X\geq\alpha\end{cases}. \qquad (24)$$

Знайдемо її математичне сподівання і дисперсію.

Нехай X - неперервна випадкова величина, щільність .розподілу якої $f(x)$.

За формулою (14) знайдемо математичне сподівання

$$M[Y]=\int_{-\infty}^{+\infty}\max\{x,\alpha\}f(x)dx=\alpha\int_{-\infty}^{\alpha}f(x)dx+\int_{\alpha}^{+\infty}xf(x)dx=\alpha F(\alpha)+\int_{\alpha}^{+\infty}xf(x)dx. \qquad (25)$$

Початковий момент другого порядку

$$M[Y^2]=\int_{-\infty}^{+\infty}[\max\{x,\alpha\}]^2 f(x)dx=\alpha^2\int_{-\infty}^{\alpha}f(x)dx+\int_{\alpha}^{+\infty}x^2 f(x)dx. \qquad (26)$$

7. Математичне сподівання і дисперсія модуля функції випадкової величини

Нехай $Y=|X-\alpha|=\begin{cases}\alpha-X, & X<\alpha\\ X-\alpha, & X\geq\alpha\end{cases}$ (27)

де X - неперервна випадкова величина , щільність якої $f(x)$.

Знайдемо математичне сподівання і дисперсію випадкової величини Y.
За формулою (14) математичне сподівання

$$M[Y]=\int_{-\infty}^{+\infty}|x-\alpha|f(x)dx=\int_{-\infty}^{\alpha}(\alpha-x)f(x)dx+\int_{\alpha}^{+\infty}(x-\alpha)f(x)dx=$$

$$=\alpha[2F(\alpha)-1]+2\int_{\alpha}^{+\infty}xf(x)dx\text{-}M[X] \qquad (28)$$

Початковий момент другого порядку

$$M[Y^2]=\int_{-\infty}^{+\infty}|x-\alpha|^2 f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\alpha)^2 f(x)dx=M[X^2]\text{-}2\alpha M[X]+\alpha^2\text{ё} \qquad (29)$$

Питання для самоперевірки

1. Дати означення функції випадкового аргументу.
2. Як скласти закон розподілу функції дискретного випадкового аргументу?
3. Як знайти щільність розподілу функції неперервного випадкового аргументу?
4. Записати закон розподілу лінійної функції.

5. Записати формули для математичного сподівання і дисперсії функції випадкової дискретної величини.
6. Записати формули для математичного сподівання і дисперсії функції випадкової неперервної величини.
7. Записати формули для математичного сподівання і дисперсії лінійної функції.