Тема 11. Приклади задач на складання та розв'язування диференціальних рівнянь

План

1. Задача на рух.
2. Задача на охолодження тіла.
3. Задача на витікання рідини з резервуару.
4. Геометрична задача.

1. Задача на рух

Задача. Тіло масою m падає вертикально вниз. Знайти закон руху тіла, якщо сила опору повітря пропорційна квадрату його швидкості. Вважати, що на початку руху швидкість v і шлях s дорівнюють нулю.

Розв'язання. Диференціальне рівняння, яке описує рух даного тіла, складається за допомогою другого закону Ньютона $F = ma$, де F – сила; m – маса тіла; a – прискорення. Крім того, нагадаємо, що при прямолінійному русі швидкість дорівнює похідній від шляху, а прискорення – похідній від швидкості. При розв'язанні даної задачі будуть використані наступні гіперболічні функції: гіперболічний синус $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, гіперболічний косинус $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ і гіперболічний тангенс $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$. Первісна від $\operatorname{th} x$ дорівнює $\ln \operatorname{ch} x$.

Тіло, яке падає вниз, рухається під дією сили тяжіння $F_1 = mg$ (g – прискорення вільного падіння) і сили опору повітря $F_2 = -kv^2$ (k – коефіцієнт пропорційності; напрям дії сили протилежний до напряму руху). На основі другого закону Ньютона одержимо

$$ma = mg - kv^2 \text{ або } m\frac{dv}{dt} = mg - kv^2 .$$

Маємо диференціальне рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними. Перепишемо його у зручному для інтегрування вигляді і проінтегруємо (уведено позначення $\beta^2 = \frac{mg}{k}$):

$$\int \frac{dv}{\beta^2 - v^2} = \frac{k}{m}\int dt, \quad \frac{1}{2\beta}\ln\left|\frac{\beta + v}{\beta - v}\right| = \frac{k}{m}t + C_1 .$$

Так як $v(0) = 0$, то $C_1 = 0$. Враховуючи, що $C_1 = 0$ і $v < \beta$ (із фізичних міркувань), можемо записати

$$\frac{1}{2\beta}\ln\left|\frac{\beta + v}{\beta - v}\right| = \frac{k}{m}t, \quad \frac{\beta + v}{\beta - v} = e^{\frac{2\beta k}{m}t} .$$

Розв'язуємо останнє рівняння відносно v:

$$v=\beta\frac{e^{\frac{2\beta k}{m}t}-1}{e^{\frac{2\beta k}{m}t}+1}=\beta\frac{e^{\frac{\beta k}{m}t}-e^{-\frac{\beta k}{m}t}}{e^{\frac{\beta k}{m}t}+e^{-\frac{\beta k}{m}t}}=\beta\,\mathrm{th}\left(\frac{\beta k}{m}t\right)\text{ або }\frac{ds}{dt}=\sqrt{\frac{mg}{k}}\,\mathrm{th}\left(\sqrt{\frac{kg}{m}}t\right).$$

Інтегруємо отримане диференціальне рівняння:

$$s=\frac{m}{k}\ln\frac{e^{\sqrt{\frac{kg}{m}}t}+e^{-\sqrt{\frac{kg}{m}}t}}{2}+C_2=\frac{m}{k}\ln\mathrm{ch}\left(\sqrt{\frac{kg}{m}}t\right)+C_2\,.$$

Так як $s(0)=0$, то $C_2=0$. Записуємо шуканий закон руху

$$s=\frac{m}{k}\ln\mathrm{ch}\left(\sqrt{\frac{kg}{m}}t\right).$$

2. Задача на охолодження тіла

Задача. Тіло нагріте до температури 100° С і внесене до приміщення з температурою повітря $20^{\circ}C$. Протягом 10 хвилин температура тіла знизилася до $70^{\circ}C$. Швидкість охолодження тіла пропорційна різниці температур тіла й середовища (закон Ньютона). Знайти залежність температури тіла T від часу t (підвищенням температури в приміщенні знехтувати). Якою буде температура тіла через 20 хвилин?

Розв'язання. У відповідності із законом Ньютона можемо записати

$$\frac{dT}{dt} = -k(T-20) \ ,$$

де k – коефіцієнт пропорційності. Знак мінус після знака рівності обумовлений тем, що температура знижається. Відокремлюємо змінні у одержаному рівнянні та інтегруємо:

$$\int \frac{dT}{T-20} = -k\int dt, \quad \mathbf{ln}\,|T-20| = -kt + \mathbf{ln}\,C, \, T = 20 + Ce^{-kt} \ .$$

Використовуючи те, що $T = 100$ при $t = 0$ й $T = 70$ при $t = 10$, визначаємо невідомі коефіцієнти C і k:

$$\begin{cases} 20 + C = 100, \\ 20 + Ce^{-10k} = 70, \end{cases} \quad \begin{cases} C = 80, \\ e^{-k} = 0{,}625^{0,1}. \end{cases}$$

Шукана залежність має вигляд

$$T = 20 + 80 \cdot 0{,}625^{0,1t} \ .$$

Якщо $t = 20$, то $T = 20 + 80 \cdot 0{,}625^2 = 51{,}25$ (град.).

3. Задача на витікання рідини з резервуару

Задача. Резервуар циліндричної форми з радіусом основи 1 м і висотою 4 м повністю заповнений водою.

У дні резервуара утворився круглий отвір радіуса 4 см. За який час уся вода витече з резервуара?

Розв'язання. Застосуємо тут стандартний прийом, який часто використовується при складанні диференціальних рівнянь. Його суть полягає у тому, що нескінченно малий приріст змінної величини замінюється її диференціалом. Іншими словами, ми відкидаємо нескінченно малі більш високого порядку малості. Відмітимо, що при такому підході часто отримуються не наближені, а точні функціональні залежності. Для розв'язання даної задачі нам знадобиться також формула Бернуллі $v = \sigma\sqrt{2gh}$, де v – швидкість витікання рідини через малий отвір; h – рівень води над отвором; $g \approx 9{,}8$ – прискорення сили тяжіння; σ – сталий коефіцієнт (для води $\sigma \approx 0{,}6$).

Нехай у деякий момент часу t рівень води дорівнює h. Через нескінченно малий проміжок часу Δt рівень води буде дорівнювати $h + \Delta h$ (зауважимо, що $\Delta h < 0$). З одного боку, за вказаний проміжок часу об'єм води в резервуарі змінився на величину $\Delta V = -\pi R^2 \Delta h$ (R – радіус основи), а з іншого – на величину $\Delta V = \pi r^2 v \Delta t = \pi r^2 \sigma\sqrt{2gh}\Delta t$ (r – радіус отвору). Отже, можемо записати таку рівність

$$-\pi R^2 \Delta h = \pi r^2 \sigma\sqrt{2gh}\Delta t\ .$$

Замінивши величини Δh і Δt відповідними диференціалами dh і dt, отримаємо наступне диференціальне рівняння

$$-\pi R^2 dh = \pi r^2 \sigma \sqrt{2gh}dt .$$

Відокремлюємо змінні й інтегруємо:

$$\int \frac{dh}{\sqrt{h}} = -\left(\frac{r}{R}\right)^2 \sigma\sqrt{2g}\int dt; \quad h = \frac{1}{4}\left(-\left(\frac{r}{R}\right)^2 \sigma\sqrt{2g}t + C\right)^2 .$$

Так як $h = 4$ при $t = 0$, то $C = 4$. Підставивши в знайдений розв'язок відповідні числові значення ($C = 4$; $r = 0{,}04$; $R = 1$; $\sigma = 0{,}6$; $g = 9{,}8$), отримуємо залежність рівня h від часу t:

$$h = 0{,}25(4 - 0{,}00425t)^2 .$$

Знаходимо час витікання усієї води (покладаємо $h = 0$):

$$0 = 0{,}25(4 - 0{,}00425t)^2; \quad t \approx 941 \text{ (с).}$$

4. Геометрична задача

Задача 4. Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку $M_0(3;1)$, якщо довжина відрізка, що відтинається будь-якою її дотичною на осі ординат, дорівнює піднормалі.

Розв'язання. Зробимо спочатку декілька загальних зауважень. В задачах подібного типу, як правило, використовуються рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = f(x)$ в точці з абсцисою $x = x_0$. Нагадаємо, що вказані рівняння мають відповідно вигляд

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \quad y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) .$$

Крім того, в геометричних задачах часто використовуються поняття піднормалі й піддотичної. На наведеному рисунку відрізок NL – це піддотична, а відрізок PN – це піднормаль (ML – дотична; MP – нормаль; N – проекція точки M на вісь Ox).

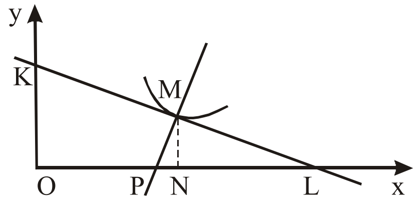

Рис. 4

Нехай $M(x, y)$ – довільна точка шуканої кривої. Проведемо у цій точці дотичну ML і нормаль MP (рис. 4). У відповідності з умовою задачі виконується рівність $|OK| = |PN|$.

Визначимо далі довжину відрізків OK і PN в потрібній нам формі. Записуємо рівняння дотичної ML і нормалі MP (оскільки через x і y вже позначено координати точки M, то змінні величини позначаємо через X і Y):

$$Y = y + y'(X - x), \quad Y = y - \frac{1}{y'}(X - x) .$$

В рівнянні дотичної покладаємо $X = 0$ й знаходимо $|OK| = |Y| = |y - y'x|$. В рівнянні нормалі покладаємо $Y = 0$

й здобуваємо $X = yy' + x$ (абсциса точки P). Враховуючи, що абсциса точки N дорівнює x, знаходимо $|PN| = |yy' + x - x| = |yy'|$. Підставляємо відповідні вирази в рівність $|OK| = |PN|$ і одержуємо

$$|y - y'x| = |yy'|, \quad y - y'x = \pm yy', \quad y' = \frac{y}{x \pm y}.$$

Отримали однорідне диференціальне рівняння першого порядку. Проінтегрувавши його за відомою схемою (потрібна заміна $y = ux$), можемо записати $x = y(C \mp \ln|y|)$. Використовуючи координати заданої точки $(3;1)$, визначаємо довільну сталу C:

$$3 = 1 \cdot (C \mp \ln|1|), \quad C = 3.$$

Записуємо рівняння шуканої кривої

$$x = y(3 \mp \ln|y|).$$