Лекція №5. Електростатика. Теорема Остроградського - Ґаусса. Напруженість та потенціал.

II. ЕЛЕКТРОСТАТИКА

15. Закон збереження електричного заряду. Електричне поле. Напруженість електричного поля

Електростатика - це розділ фізики, в якому розглядають взаємодії і властивості електричних зарядів, нерухомих в тій системі координат, в якій ці заряди вивчають.

У природі існує два види електричних зарядів - ***позитивні і негативні.*** Домовились вважати позитивним заряд, що виникає, наприклад, на склі, яке натирають шовком, а негативним - на бурштині, який натирають хутром. Однойменно заряджені тіла відштовхуються одне від одного, а різнойменно заряджені притягуються.

При електризації тіл тертям завжди одночасно електризуються ***обидва тіла,*** причому одне з них дістає позитивний заряд, а інше - негативний. Позитивний заряд першого тіла за величиною завжди точно дорівнює негативному заряду другого, якщо до електризації обидва тіла не були заряджені. Численними експериментами було встановлено *закон збереження електричних зарядів*:

в електрично ізольованій системі повна алгебраїчна сума електричних зарядів залишається незмінною. Заряди можуть лише передаватись від одного тіла даної системи до іншого, або зміщуватись всередині даного тіла.

Електричні заряди можуть зникати і виникати знову, але завжди зникають або виникають два електричні заряди протилежних знаків.

1909 року американський вчений Р. Мілікен встановив кратність електричного заряду деякому елементарному заряду *e:*

$$q = \pm n \cdot e,$$

де $n = 1,2,3...$

Було виявлено, що цей елементарний заряд має величину $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ кулона.

За одиницю електричного заряду в системі СІ беруть заряд, що проходить за одну секунду через поперечний переріз провідника, струм у якому постійний і дорівнює 1 амперу.

В 1785 році французький вчений Ш. Кулон експериментально за допомогою крутильних терезів встановив основний закон взаємодії нерухомих точкових електричних зарядів.

Точковим називається заряд, який зосереджений на тілі, лінійні розміри якого малі порівняно з відстанню до інших заряджених тіл, з якими він взаємодіє.

Закон Кулона:

сила електростатичної взаємодії між двома точковими електричними зарядами у вакуумі прямо пропорційна до добутку величин зарядів і обернено пропорційна до квадрата відстані між ними.

$$F = k\frac{|q_1||q_2|}{r^2},$$

де k – коефіцієнт пропорційності ($k>0$).

Сили, які діють на заряди, є ***центральними,*** тобто вони напрямлені вздовж прямої, що з'єднує заряди. Для однойменних зарядів сила $F>0$ відповідає випадку взаємного відштовхування однойменних зарядів, а сила $F<0$ - взаємного притягання різнойменних зарядів.

Закон Кулона можна записати у векторній формі. Якщо $\vec{r}_{12}$ – радіус-вектор, що сполучає заряд q_1 із зарядом q_2 (рис.1) і $\left|\vec{r}_{12}\right| = r$, тоді

$$\vec{F}_{12} = -k\frac{q_1 q_2}{r^3}\vec{r}_{12}, \quad \vec{F}_{21} = k\frac{q_1 q_2}{r^3}\vec{r}_{12}.$$

У системі СІ для зарядів коефіцієнт k у формулі закону Кулона беруть таким, що дорівнює

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o\varepsilon},$$

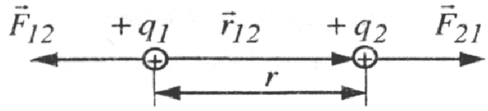


Рис. 1

де $\varepsilon_o = 8{,}85\cdot 10^{-12}\ \dfrac{Кл^2}{Н\cdot м^2}$ – електрична стала.

ε- відносно діелектрична проникність середовища (для вакууму ε=1)

Множник 4π у виразі $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_o}$ відображає сферичну симетрію електростатичного поля точкового заряду, оскільки величина 4π чисельно дорівнює повному тілесному куту у стерадіанах.

Електричне поле – це специфічний вид матерії, який існує навколо електричних зарядів і за допомогою якого передається електрична взаємодія. Воно проявляє себе у тому, що поміщений в нього електричний заряд виявляється під дією сили. Досліди показують, що ця сила, при інших однакових умовах, пропорційна до величини заряду. Тому ця сила не може бути характеристикою самого поля.

Але величина, яка дорівнює відношенню $\dfrac{F}{q_0} = const$, може служити силовою характеристикою поля.

q_0 - пробний заряд. Пробний заряд — це одиничний додатній заряд, який не створює власного поля.

Векторна величина

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$$

називається *напруженістю електричного поля.*

Напруженість електричного поля чисельно дорівнює силі, що діє на одиничний позитивний пробний заряд в даній точці поля.

За напрямок вектора напруженості $\vec{E}$ беруть напрямок сили, з якою поле діє на пробний позитивний заряд, вміщений у певну точку поля (рис.2).

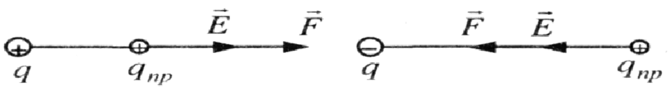


Рис 3

У системі СІ одиниця напруженості електричного поля 1 *Н/м* – це напруженість такого поля, яке на точковий заряд *1Кл* діє з силою *1Н.*

Електричні поля зображають за допомогою ***ліній напруженості,*** які проводять так, щоб дотичні до цих ліній в кожній точці збігалися з напрямками вектора $\vec{E}$.

Лінії напруженості мають початок і кінець або йдуть у нескінченність, вони напрямлені від позитивного заряду до негативного, тобто виходять з позитивного заряду, а входять у негативний заряд. Лінії напруженості ніколи не перетинаються. Ці лінії проводять з такою густиною, щоб кількість ліній, які пронизують одиничну площу, перпендикулярну до вектора напруженості, числово дорівнювала величині напруженості електричного поля в місці розміщення площини.

***Поле, у всіх точках якого величина і напрямок вектора напруженості незмінні, називається однорідним*.**

Однорідне поле зображують паралельними лініями напруженості, що мають однакову густину.

Якщо поле створено системою *N* нерухомих зарядів, то результуюча сила, яка діє на пробний заряд зі сторони системи зарядів, дорівнює векторній сумі сил, з якими окремі заряди діють на пробний.

Звідси випливає:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n$$

Напруженість поля системи точкових зарядів дорівнює векторній сумі напруженостей полів, які створював би кожний із зарядів системи зокрема:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_{пр}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i}{q_{пр}} = \frac{\vec{F}_1}{q_{пр}} + \frac{\vec{F}_2}{q_{пр}} + \ldots + \frac{\vec{F}_n}{q_{пр}}, \quad \vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \ldots + \vec{E}_N .$$

Це твердження називають *принципом незалежної дії* електричних полів, або *принципом суперпозиції полів.*

Враховуючи закон Кулона, напруженість поля точкового заряду у вакуумі на відстані *r* від заряду становить:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{q}{r^3} \vec{r}_{12} \quad , (\varepsilon=1)$$

Звідси видно, що поле точкового заряду – центрально симетричне.

Принцип суперпозиції дає можливість обчислювати напруженість поля будь-якої системи зарядів. Подумки поділяючи, наприклад, заряджене тіло скінченних розмірів на точкові заряди, знаходимо складові напруженості в певній точці, створені окремими елементами зарядженого тіла. Потім, згідно з принципом суперпозицій, визначаємо результуючу напруженість.

Електричним диполем називається система з двох однакових за величиною і протилежних за знаком електричних зарядів $+q$ і $-q$, відстань l між якими мала порівняно з відстанню до точок поля, які розглядаються (рис.3).

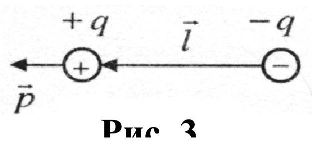


Рис. 3

Плечем диполя називається вектор $\vec{l}$, напрямлений вздовж осі диполя від негативного заряду до позитивного; він числово дорівнює відстані між ними. Добуток позитивного заряду диполя q на плече $\vec{l}$ називається *електричним моментом диполя*: $\vec{p} = q\vec{l}$.

Вектор $\vec{p}$ за напрямком збігається з плечем диполя $\vec{l}$.

16. Потік вектора напруженості.

Основне завдання електростатики полягає в тому, щоб за заданим розподілом у просторі і величиною електричних зарядів знайти величину і напрямок вектора напруженості $\vec{E}$ в кожній точці поля. Використання принципу суперпозиції для обрахунку електричних полів пов’язано із значними математичними труднощами. Значно простіший метод розрахунку полів ґрунтується на використанні теореми Остроградського - Ґаусса.

Нехай в однорідному електричному полі ($E=const$) проведена довільна площина dS. Одиничний вектор $\vec{n}$ нормалі до площини утворює з вектором $\vec{E}$ кут α (рис.4).

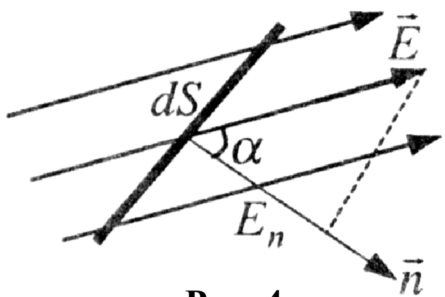


Рис. 4

Елементарним потоком вектора напруженості будемо називати величину

$$d\Phi_E = EdS\cos\alpha ,$$

або

$$d\Phi_E = E_n dS = \left(\vec{E}, d\vec{S}\right),$$

де E_n – проекція вектора $\vec{E}$ на напрямок вектора нормалі, а вектор $d\vec{S} = dS\vec{n}$.

Повний потік вектора напруженості через довільну поверхню S буде

$$\Phi_E = \int_S E_n dS = \int_S E\cos\alpha dS .$$

17. Теорема Остроградського-Ґаусса

Нехай навколо точкового заряду q описана сферична поверхня радіусом r, в центрі якої знаходиться цей заряд (рис. 5).

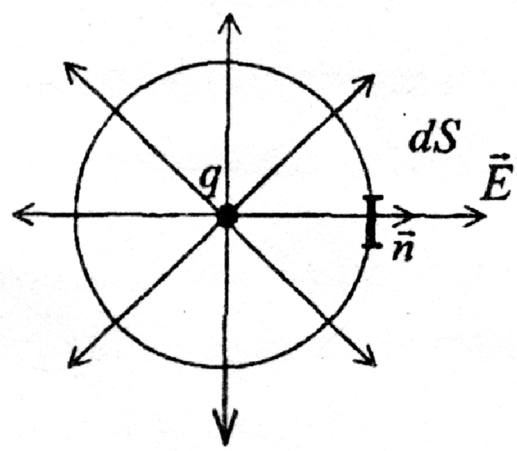


Рис. 5

Проекція вектора напруженості E_n,, на напрям нормалі буде:

$$E_n = \left|\vec{E}\right| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{r^2},$$

тоді потік вектора напруженості через замкнену сферичну поверхню буде:

$$\Phi_Г = \oint_S E_n dS = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{r^2}\oint_S dS = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{r^2}4\pi r .$$

Отже

$$\Phi_E = \oint_S E_n dS = \frac{q}{\varepsilon_o} .$$

Це рівняння називається *теоремою* ***Остроградського - Ґаусса.*** Воно справедливе не лише для сферичних поверхонь, але і для будь-яких замкнених поверхонь, і для будь-якої кількості зарядів, що нею охоплюються. В загальному вигляді ця теорема записується так:

$$\oint_S \vec{E}d\vec{S} = \oint_S \vec{E}_n d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_o}\sum_{i=1}^{N} q_i \ .$$

Потік вектора напруженості електричного поля через замкнену поверхню дорівнює алгебраїчній сумі електричних зарядів, які охоплює ця поверхня, поділеній на електричну сталу.

Потік вектора напруженості електричного поля через довільну замкнену поверхню, що не охоплює заряду, дорівнює нулю.

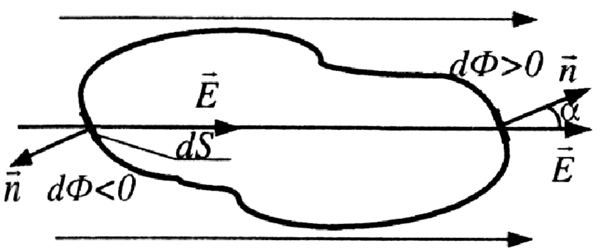


Рис. 6

Знак потоку залежить від вибору напрямку нормалі. Для замкнених поверхонь нормаль, яка виходить назовні, приймається за додатну. Тоді там, де вектор $\vec{E}$ напрямлений назовні, E_n та Φ_E додатні, а коли $\vec{E}$ входить всередину поверхні, E_n та Φ_E – від'ємні (рис. 6).

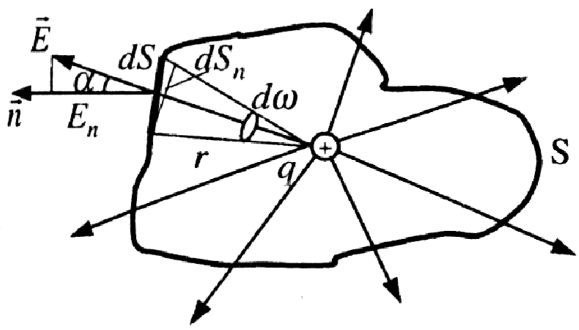


Рис. 7

Для замкнених поверхонь

$$\Phi_E = \oint_S E_n dS = \oint_S \left(\vec{E}, d\vec{S}\right).$$

Нехай навколо точкового заряду q описана сферична поверхня радіусом r, в центрі якої знаходиться цей заряд (рис.7).

Нехай навколо точкового заряду + q, який знаходиться у вакуумі, описано довільну замкнену поверхню S

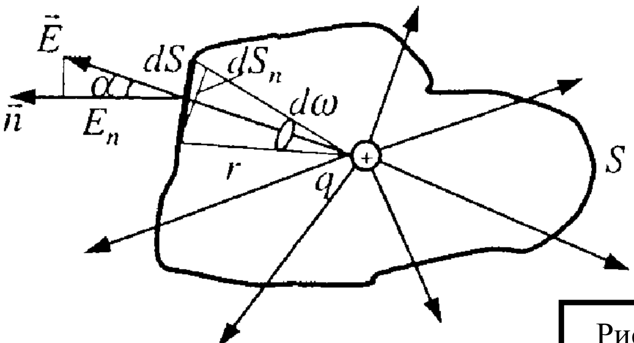


Рис.108

Рис.50

Лінії напруженості виходять з цієї поверхні. Виділимо довільну елементарну площадку ds, нормаль $\vec{n}$ до якої складає кут α з вектором $\vec{E}$. Спроектуємо елемент ***ds*** поверхні S на поверхню радіуса r з центром в місці знаходження заряду q.

Тоді $dS_n = dS\cos\alpha$. Елементарний потік

$$d\Phi_E = E\cos\alpha\, dS = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dS_n =$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} r^2 d\omega = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} d\omega,$$

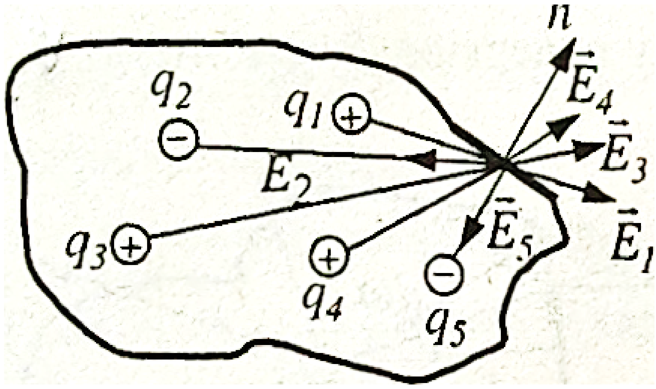
а dώ -тілесний кут, під яким елементарну площадку *ds* видно з точкового заряду **q.**
Провівши інтегрування по куту, отримаємо

$$\Phi_E = \oint_S E_n dS = \int_0^{4\pi} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} d\omega = \frac{q}{\varepsilon_0}.$$

Якщо всередині замкненої поверхні буде негативний заряд, то кут між нормаллю і вектором $\vec{E}$ буде тупий (лінії напруженості входять всередину замкненої поверхні). Отже, $cos a < 0$. Тоді $d\Phi_E < 0$. Це означає, що потік через замкнену поверхню

$$\Phi_E < 0 \text{ і } \Phi_E = -\frac{q}{\varepsilon_0}.$$

Нехай всередині замкненої поверхні S буде N позитивних і негативних зарядів (рис. 109). За принципом суперпозиції напруженість $\vec{E}$ поля, що створюється



всіма зарядами, дорівнює сумі напруженостей $\vec{E}$, що створюється кожним зарядом, зокрема і $\vec{E} = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i$.

Тому проекція вектора $\vec{E}$ на напрямок нормалі до площадки dS дорівнює алгебраїчній сумі проекцій всіх векторів Ei на цей напрямок:

$$E_n = \sum_{i=1}^{N} E_{in}.$$

Потік вектора напруженості результуючого поля через довільну замкнену поверхню S, що охоплює заряди q1,q2,..qn дорівнює

$$\Phi_E = \oint_S E_n dS = \oint_S \left(\sum_{i=1}^{n} E_{in} \right) dS = \sum_{i=1}^{n} \oint_S E_{in} dS$$

Оскільки $\oint_S E_{in} dS = \frac{q_i}{\varepsilon_0}$, то

$$\Phi_E = \oint_S E_n dS = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} q_i \, .$$

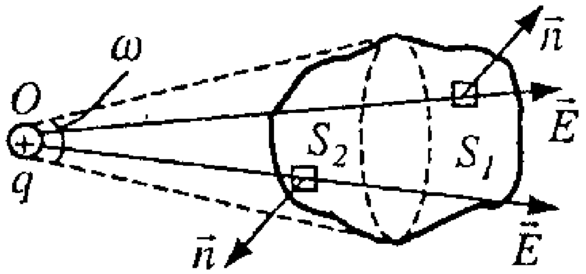
Отже, *потік вектора напруженості у вакуумі через довільну замкнену поверхню, яка охоплює електричні заряди, дорівнює алгебраїчній сумі цих зарядів, поділеній на електричну сталу*

Це твердження називається *теоремою Остроградського-Гаусса.*

Наприклад, для системи зарядів, які наведені на рис.109, потік напруженості

$$\Phi_E = \frac{1}{\varepsilon_0}(q_1 - q_2 + q_3 + q_4 - q_5).$$

Якщо замкнена поверхня S не охоплює заряд q (риє. 110), то дотична до



поверхні S конічна поверхня з вершиною у точці O поділяє поверхню S , на дві частини:

S1 і S2.

Потік напруженості через поверхню 5 дорівнює сумі потоків: >

$$\Phi_E = \Phi_{E_1} + \Phi_{E_2} .$$

Потоки Φ_{E1} і ΦE_2 дорівнюють один одному за абсолютною величиною, тому що поверхні S1 і S2 видно з точки O під тим самим тілесним кутом ώ. Оскільки для всіх елементів поверхні S1 кути між векторами E і зовнішніми нормалями n гострі, а для поверхні S2 ці кути тупі, то

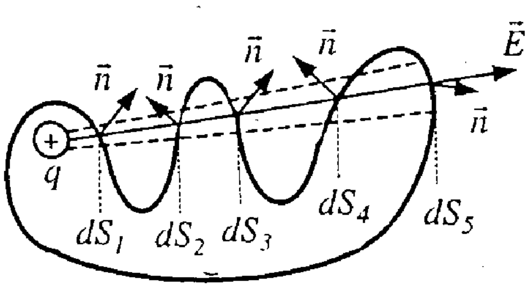
$$\Phi_{E_1} = \int_{S_1} E \cos(\vec{E},\vec{n}) dS > 0 \, ,$$

$$\Phi_{E_2} = \int_{S_2} E \cos(\vec{E},\vec{n}) dS < 0 \, .$$

Тому сумарний потік через поверхню ***8***

$$\Phi_E = \Phi_{E_1} + \Phi_{E_2} = 0 .$$

Нехай заряд q знаходиться всередині замкненої поверхні S і лінії напруженості перетинають цю поверхню кілька разів (рис.111).

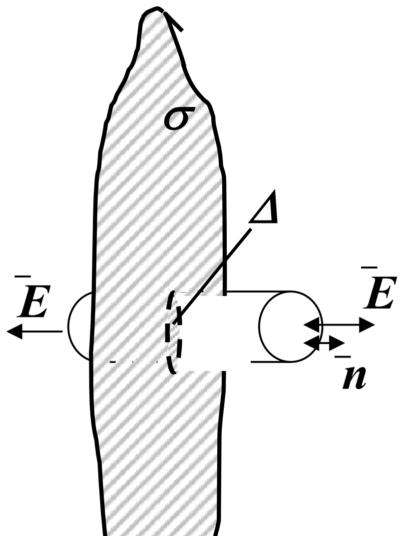


Елементарний потік напруженості через площадки *dS1*..... *dS2* дорівнює

$$d\Phi_E = d\Phi_{E_1} + d\Phi_{E_2} + d\Phi_{E_3} + d\Phi_{E_4} + d\Phi_{E_5} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}d\omega - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}d\omega + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}d\omega - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}d\omega + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}d\omega = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}d\omega .$$

Отже, непарне число перетинів при обчисленні потоку,напруженості зводиться до одного перетину.

18. Застосування теореми Остроградського-Ґаусса до розрахунку напруженості електростатичних полів



Нехай поле створюється безкінечною, рівномірно зарядженою площиною із поверхневою густиною зарядів σ (рис.1).

Рис. 8

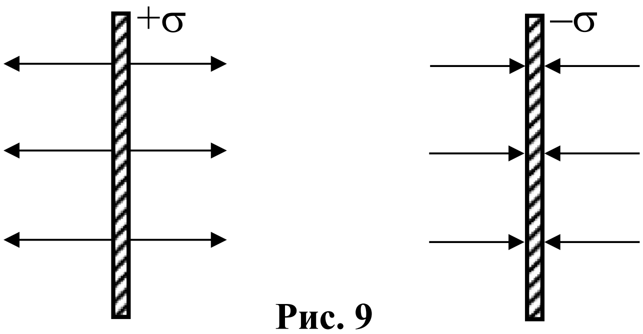


Рис. 9

Напруженість електростатичного поля у будь-якій точці має напрямок, перпендикулярний до площини (рис.2). У семетричних відносно площини точках напруженість поля однакова за величиною і протилежна за напрямком.

Виберемо замкнуту поверхню у формі циліндра із площею ΔS.

В силу симетрії $E'=E''=E$. Застосуємо теорему Остроградського-Гауса.

Потік $\vec{E}$ через бічну поверхню циліндра відсутній, так як $E_n=0$. Залишається тільки потік вектора $\vec{E}$ через поверхні основи, який дорівнює:

$$\Phi_e = 2E \cdot \Delta S .$$

Всередині замкнутої поверхні знаходиться електричний заряд, який дорівнює:

$$q = \sigma \cdot \Delta S .$$

Отже, $2E \cdot \Delta S = \dfrac{\sigma \cdot \Delta S}{\varepsilon_o}$, звідки

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o} .$$

Це означає, що на будь-яких відстанях від площини напруженість поля однакова за величиною.

Поле, яке створюється двома безкінечними зарядженими площинами:

Як слідує із рис. 3 електричне поле має напруженість тільки між пластинами, яка визначається:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_o} .$$

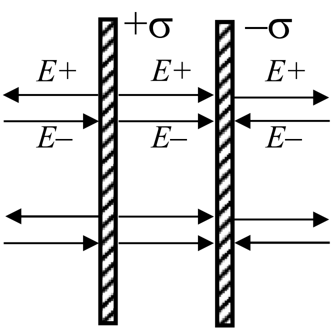


Рис. 10

19. Потенціал електростатичного поля

Електростатичне поле точкового заряду являється **потенціальним**, а електростатичні сили - **консервативними** . Доведемо це.

Розглянемо рух пробного заряду q_0 в полі, створеного зарядом q (рис.1)

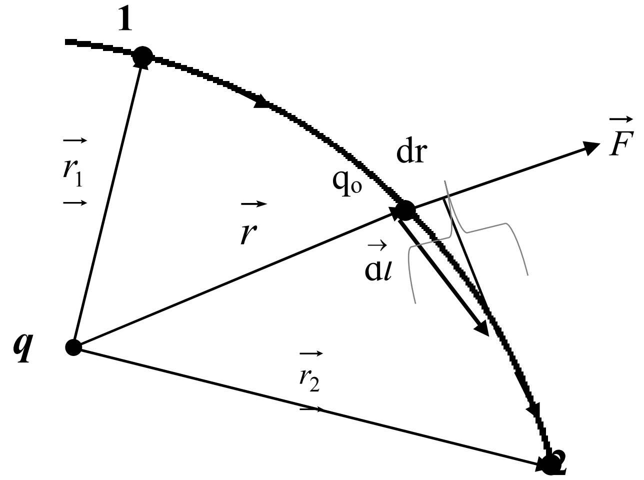


Рис.1

При переміщені заряду q_0 на $\vec{dl}$ поле виконує елементарну роботу:

$$\delta A = (\vec{F}\vec{dl}) = Fdl\cos(\vec{F}\vec{dl}).$$

З врахуванням того, що dl cos(Fdl)=dr , а сила F визначається за законом Кулона, $F = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_o}\frac{qq_o}{r^2}$, то вираз , що визначає елементарну роботу , набуває вигляду :

$$dA = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_o}\cdot\frac{qq_o}{r^2}dr\,.$$

При кінечному переміщені заряду q_0 з точки 1 в точку 2 повна робота, яка виконується полем , дорівнює:

$$A_{1\to 2} = \frac{qq_o}{4\pi\varepsilon\varepsilon_o}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2} = \frac{qq_o}{4\pi\varepsilon\varepsilon_o}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

Як слідує із останього виразу, робота по переміщеню заряду q_0 не залежить від траєкторії руху! Це означає, що сили, які діють на заряд – консервативні, а електростатичне поле – потенціальне. Для потенціального поля $\oint dA = 0$.

Тіло, яке знаходиться у потенціальному полі сил, володіє потенціальною енергією, за рахунок якої силами поля виконується робота. Тому роботу сил електростатичного поля можна уявити як різницю потенціальних енергій, якими володіє точковий заряд q_0 в початковій та кінцевій точках поля, створеного зарядом q.

$$A_{1\to 2} = \frac{qq_o}{4\pi\varepsilon\varepsilon_o}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = W_{\Pi_1} - W_{\Pi_2}\,.$$

Потенціальну енергію заряду q_0 в полі заряду q можна виразити слідуючим чином :

$$W_{П} = \frac{qq_o}{4\pi\varepsilon\varepsilon_o}.$$

Для одноіменних зарядів значення потенціальної енергії додатнє ($W_п>0$) для різноіменних – від'ємне ($W_п<0$).

Із одержаних формул витікає, що відношення $W_п/q_0$ - не залежить від величини заряда q_0 і являється енергетичною характеристикою електростатичного поля. Ця величина називається **потенціалом:**

$$\varphi = \frac{W_П}{q_o}.$$

Потенціал φ в будь-якій точці електростатичного поля це фізична величина, яка визначається потенціальною енергією одиничного додатнього заряду, поміщеного в цю точку поля.

Порівняємо вирази для роботи :

$$A_{1\to 2} = \frac{qq_o}{4\pi\varepsilon\varepsilon_o}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = W_{П_1} - W_{П_2} = q_o(\varphi_1 - \varphi_2)\ ;\quad A_{1\to 2} = \int_1^2 \left(\vec{F}\,\vec{dl}\right) = \int_1^2 \left(q_o\,\vec{E}\,\vec{dl}\right) = \int_1^2 \left(\vec{E}\,\vec{dl}\right).$$

Отримаємо
$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \left(\vec{E}\,\vec{dl}\right).$$

Якщо переміщувати заряд q_0 із довільної точки в нескінченість, то робота сил дорівнює :

$$A_\infty = q_0\varphi,$$

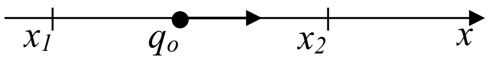
звідки
$$\varphi = \frac{A_\infty}{q_o}$$

Тому потенціал φ електростатичного поля може бути визначений слідуючим чином.

Потенціал – це фізична величина , яка визначається роботою по переміщеню одиничного додатнього заряду при переміщені його із даної точки поля у нескінченність.

20. Напруженість як градієнт потенціалу

Розглянемо випадок переміщення одиничного додатнього точкового заряду q із точки 1 в точку 2 вздовж осі *x*.



Елементарна робота по переміщенню цього заряду дорівнює :

$$\delta A = \left(\vec{F}\,d\vec{x}\right) = q_o E_x dx = E_x dx\ ,\quad (q_o = 1).$$

Ця ж сама робота дорівнює різниці потенціалів :

$$\delta A = \varphi_1 - \varphi_2 = -d\varphi.$$

Прирівнявши праві частини обох виразів , одержимо :

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x},$$

тобто проекція вектора напруженості електростатичного поля на вісь x визначається швидкістю зміни потенціалу у напрямку x.
Аналогічно можна одержати, що:

$$E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} \quad \text{та} \quad E_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

Додавши праві та ліві частини цих рівнянь і домноживши їх на одиничні вектори $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ (орти), одержимо:

$$\underbrace{E_x\vec{i} + E_y\vec{j} + E_z\vec{k}}_{\vec{E}} = -\underbrace{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\right)}_{\overrightarrow{grand}\ \varphi}.$$

Або :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grand}\ \varphi.$$

$\overrightarrow{grand}\ \varphi$ - вектор градієнта потенціалу чисельно дорівнює швидкості зміни потенціалу поля на одиницю довжини.

Знак “мінус” означає , що вектор $\vec{E}$ спрямований в сторону зменшення потенціалу.Уявна поверхня , всі точки якої мають однаковий потенціал, зветься поверхнею рівного потенціалу, або **еквіпотенціальною** поверхнею. Її рівняння має вигляд φ(x,y,z)= const. При переміщені по дотичній до еквіпотенціальної поверхні на відрізок $\vec{dl}$ потенціал не змінюється (dφ=0). Так як $E_1 = \frac{\partial\varphi}{\partial l}$, то проекція вектора $\vec{E}$ на дотичну ліню дорівнює нулю. А це означає, що вектор $\vec{E}$ перепендикулярний до еквіпотенціальної поверхні.

Отже, лінії напруженості електростатичного поля у кожній точці перпендикулярні до еквіпотенціальних поверхонь.

За допомогою формули $\vec{E} = -\overrightarrow{grand}\ \varphi$ (або $E_x = \frac{\partial\varphi}{\partial l}$) по відомій величині напруженості поля можна знайти різицю потенціалів між двома довільними точками поля.Розглянемо декілька прикладів:

а) Поле безкінечної рівномірної зарядженості площини:

$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}$; $\sigma = \frac{q}{s}$ – поверхнева густина зарядів ; $E \neq f(x)$.

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi = -\Delta\varphi.$$

$$\Delta\varphi = \int_{x_1}^{x_2} Edx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sigma dx}{2\varepsilon_o} = \left(\sigma/2\varepsilon_o\right)(x_2 - x_1)$$

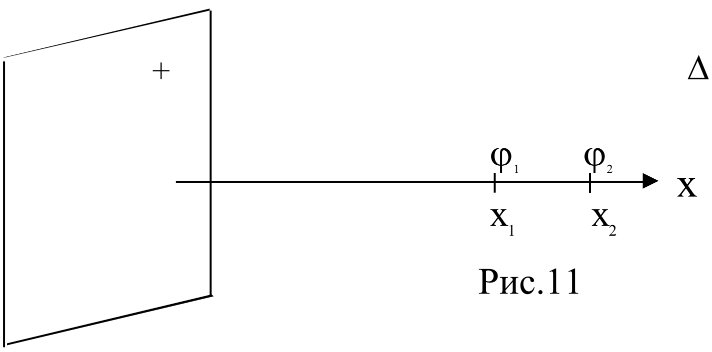


Рис.11

Якщо $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_o}$ (див. рис.3) , $\varphi_1 - \varphi_2 = \int_0^d E dx = \dfrac{\sigma d}{\varepsilon_o}$.

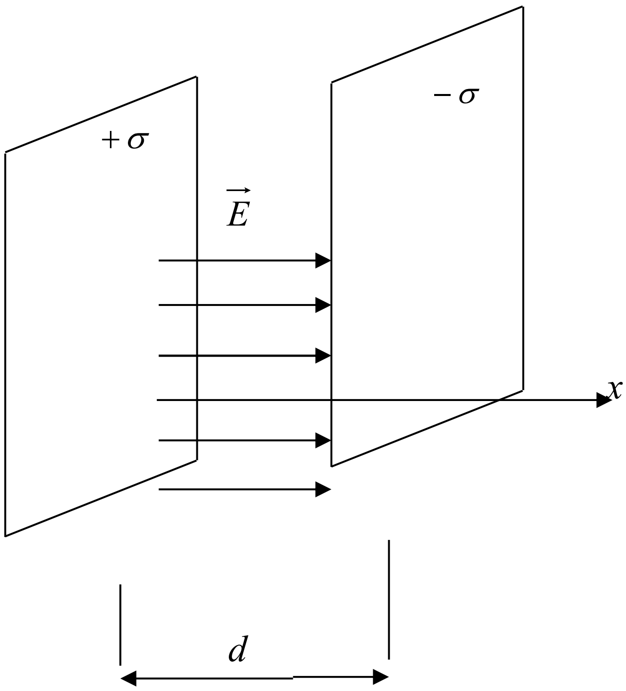


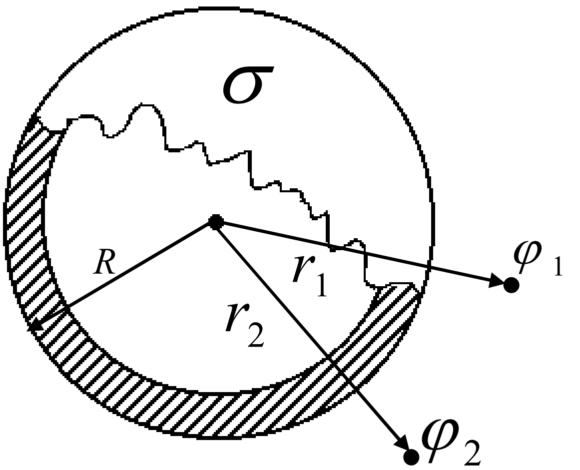
Рис. 3

б) Нехай поле створюється пустотілою сферичною поверхнею радіуса R (рис.4).
При r<R E=0 (за теоремою Остроградського-Гауса)

При $r \geq R$ $E = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_o r^2}$.

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} E dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_o} \right) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

.



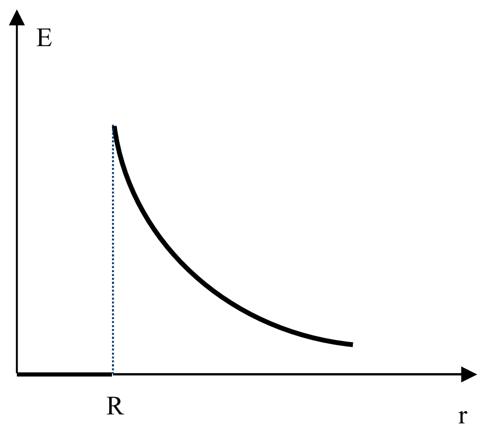


Рис.12 Рис.13

Якщо $r_1=R$, а $r_2=\infty$, то потенціал зарядженої сфери $\varphi= q/ 4\pi\varepsilon_0 R$;

в) Нехай поле створюється зарядженою кулею радіуса R (рис.6).

Якщо $r'<R$:

а) $E=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_o R^3}\cdot r'$ (всередині кулі);

$$\varphi_1'-\varphi_2'=\int_{r_1'}^{r_2'} E dr' = \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_o R^3}\right)\frac{1}{2}\left[\left(r_2{}'\right)^2-\left(r_1'\right)^2\right].$$

б) Якщо $E=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_o r^2}$, $r\geq R$, тоді ; $\varphi_1-\varphi_2=\left(\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_o}\right)\cdot\displaystyle\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2}=\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\right)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$

(так само ми для точкового заряду або пустотілої сфери !).

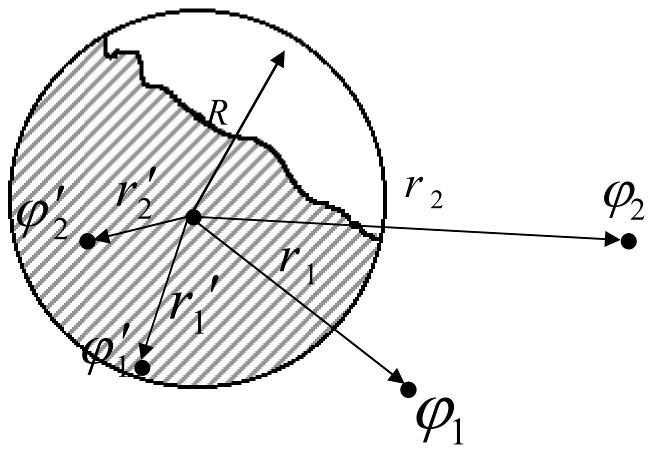


Рис.14

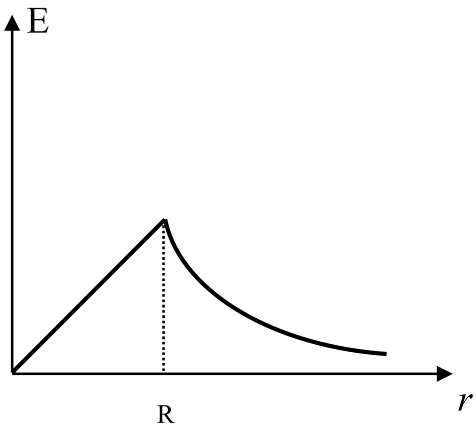


Рис.15