1. АРИФМЕТИЧНІ ОСНОВИ КОМП'ЮТЕРІВ

Позиційні системи числення.

Способи переводу чисел з однієї системи числення в другу. Арифметичні дії в різних системах числення.

Позиційні системи числення.

1. Принципи побудови систем числення.

Числова інформація в комп'ютерах характеризується:

– системою числення (двійкова, десяткова та інші);

– видом числа (числа дійсні, комплексні, масиви);

– типом числа (змішане, ціле, дробове);

– формою представлення числа (місцем коми – з природною (змінною), фіксованою, плаваючою комами);

– розрядною сіткою і форматом числа;

– діапазоном і точністю подання чисел;

– способом кодування від'ємних чисел – прямим, оберненим та доповняльним кодами;

– алгоритмами виконання арифметичних операцій.

Системою числення називається сукупність цифр і правил для записування чисел.

Запис чисел у деякій системі числення називається його кодом.

Усі системи числення поділяють на позиційні й непозиційні. Для запису чисел у позиційній системі числення використовують певну кількість графічних знаків (цифр і букв), які відрізняються один від одного. Число таких знаків q називається основою позиційної системи числення.

В комп'ютерах використовують позиційні системи з різною основою.

Система числення з основою два (цифри 0 і 1) називається двійковою, система числення з основою три (цифри 0, 1, 2) – трійковою і т.д.

У системах числення з основою меншою десяти використовують десяткові цифри, а для основи більшої десяти добавляють букви латинського алфавіту – A, B, C, D, E, F (табл. 1.1, табл.1.2).

Таблиця 1.1 – Алфавіт систем числення

Основа q	Система числення	Знаки
2	Двійкова	0, 1
3	Трійкова	0, 1, 2
5	П'ятіркова	0, 1, 2, 3, 4
8	Вісімкова	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
10	Десяткова	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
16	Шістнадцяткова	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F

У позиційних системах числення значення кожної цифри визначається її зображенням і позицією в числі. Окремі позиції числа називають розрядами, а номер позиції – номером розряду.

Число розрядів у записі числа називається його розрядністю і збігається з довжиною числа.

У непозиційних системах числення значення кожної цифри не залежить від її позиції.

Найвідомішою непозиційною системою є римська, в якій використовуються сім знаків – I, V, X, L, C, D, M, таким значенням:

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

Наприклад: III – 3, LIX – 59, DLV – 555.

Недоліком непозиційної системи є відсутність нуля та формальних правил запису чисел і відповідно арифметичних дій з ними.

Таблиця 1.2 – Позиційні системи числення

q =10	q = 2	q =16	q = 8	q = 5	q = 3
0	0 0 0 0	0	0	0	0
1	0 0 0 1	1	1	1	1
2	0 0 1 0	2	2	2	2
3	0 0 1 1	3	3	3	10
4	0 1 0 0	4	4	4	11
5	0 1 0 1	5	5	10	12
6	0 1 1 0	6	6	11	20
7	0 1 1 1	7	7	12	21
8	1 0 0 0	8	10	13	22
9	1 0 0 1	9	11	14	100
10	1 0 1 0	A	12	20	101
11	1 0 1 1	B	13	21	102
12	1 1 0 0	C	14	22	110
13	1 1 0 1	D	15	23	111
14	1 1 1 0	E	16	24	112
15	1 1 1 1	F	17	30	120

Перевагою двійкової системи є:

– простота виконання арифметичних операцій;
– наявність надійних мікроелектронних схем з двома стійкими станами (тригерів), призначених для зберігання значень двійкового розряду – цифр 0 або 1.

Двійкові цифри називають також бітами. Назву БІТ у 1946 році запропонував видатний американський вчений статистик Джон Тюкі.

Система числення повинна забезпечувати:

– можливість представлення будь-якого числа в заданому діапазоні;

– однозначність, стислість запису числа і простоту виконання арифметичних операцій;

– досягнення високої швидкодії машини в процесі оброблення інформації.

Число в позиційній системі можна представити поліномом:

$$A_q = a_k \cdot q^k + a_{k-1} \cdot q^{k-1} + \ldots + a_0 \cdot q^0 + a_{-1} \cdot q^{-1} + \ldots + a_{-m} \cdot q^{-m} = \sum_{i=-m}^{k} a_i \cdot q^i ,$$

де q – основа системи числення;

q^i – вага позиції;

$a_i \in \{0, 1, \ldots (q-1)\}$ – цифри в позиціях числа;

$0, 1, \ldots, k$ – номери розрядів цілої частини числа;

$-1, -2, \ldots, -m$ – номери розрядів дробової частини числа.

Позиційні системи з однаковою основою в кожному розряді називають однорідними.

Приклади запису чисел:

– двійкова система: $q = 2$; $a_i \in \{0, 1\}$,

$$A_2 = 1011_2 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 8 + 2 + 1 = 11_{10} ;$$

– вісімкова система: $q = 8$; $a_i \in \{0, 1, \ldots, 7\}$,

$$A_8 = 425_8 = 4 \cdot 8^2 + 2 \cdot 8^1 + 5 \cdot 8^0 = 256 + 16 + 5 = 277_{10} ;$$

– шістнадцяткова система: $q = 16$; $a_i \in \{0, 1, \ldots, 9, A, B, C, D, E, F\}$,

$$A_{16} = 4AC_{16} = 4 \cdot 16^2 + 10 \cdot 16^1 + 12 \cdot 16^0 = 1024 + 160 + 12 = 1196_{10} .$$

Способи переводу чисел з однієї системи числення в другу

Існують два основних способи переводу числа із однієї системи числення в другу: ***табличний*** і ***розрахунковий.***

Табличний спосіб прямого переводу оснований на співставленні таблиць відповідності чисел різних систем числення. Цей спосіб дуже громіздкий і вимагає великого об’єму пам’яті для зберігання таблиці, але його можна використати для будь-яких систем числення (не тільки для позиційних).

Перевід цілих чисел із однієї позиційної системи числення в іншу

Нехай задано число А в довільній позиційній системі числення з основою і його необхідно перевести в нову систему з основою Р.

тобто $A = Q_n q^n + Q_{n-1} q^{n-1} + ... + Q_1 q^1 + Q_0 q^0$,

$$Q_1 = 0 \div (q - 1) .$$

Необхідно перетворити до виду:

$$A = Q_n P^n + Q_{n-1} P^{n-1} + ... + Q_1 P^1 + Q_0 P^0 \qquad (1.1)$$

де $Q_1 = 0 \div (P - 1)$ – база нової системи числення.

Вираз (1.1) можна записати:

$A = A_1 P + Q_0$,

де $A_1 = (Q_n P^{n-1} + Q_{n-1} P^{n-2} + ... + Q_2 P + Q_1)$,

Q_0 – залишок від ділення А на Р , який є цифрою молодшого розряду числа.

В результаті серії ділень вихідного числа на основу нової системи числення Р знаходимо коефіцієнти:

$A = A_1 P + Q_0$;

$A_1 = A_2 P + Q_1$;

....

$A_{n-1} = A_n P + Q_{n-1}$;

$A_n = 0 \cdot P + Q_n$.

При цьому ділення продовжується до тих пір, поки не будуть виконуватися співвідношення:

$$A_n < P ; A_{n+1} < 0 .$$

Правило переводу*: щоб перевести ціле число із однієї позиційної системи числення в другу, необхідно задане число послідовно ділити на основу нової системи числення, записаної в числах старої (заданої) системи числення до одержання* ***частки рівної 0.***

Число в новій системі числення записується із залишків від ділення починаючи із останнього.

Приклади переводу.

Переведемо число 25 з десяткової системи числення в двійкову.

25_{10}	2_{10}	
1	–	
2	1	молодший розряд
6	0	
3	0	
1	1	
0	1 –	старший розряд

Отже $25_{10} = 11001_2$.

Переведемо число 92 з десяткової системи числення в вісімкову.

92_{10}	8_{10}
11	4
1	3
0	1

Отже $92_{10} = 134_8$.

Переведемо число 168 з десяткової системи числення в шістнадцяткову.

168_{10}	16_{10}
10	8
0	10 - A

Отже $168_{10} = A8_{16}$.

При переводі із двійкової системи числення в десяткову задане число необхідно ділити на основу нової системи числення тобто на 1010_2 .

Оскільки ділення виконувати в двійковій системі трудно, тому на практиці підраховують суму степенів основи 2, при яких коефіцієнти Q_i рівні одиниці.

Розрахунки проводяться в десятковій системі числення. Приклад.

1) Перевести двійкове число 10010100 в десяткову систему $2 \rightarrow 10$:

$$A = 10010100_2 \text{ ; } A = 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^2 = 128 + 16 + 4 = 148_{10} .$$

2) $8 \rightarrow 10$:

$A = 235_8$;

$$A = 2 \cdot 8^2 + 3 \cdot 8^1 + 5 \cdot 8^0 = 128 + 24 + 5 = 157_{10} .$$

3) $16 \rightarrow 10$:

$N = 12_{16}$;

$$A = 1 \cdot 16^1 + 6 \cdot 16^0 = 16 + 6 = 22_{10} .$$

$$N = A1C_{16} \text{ ; } N = A \cdot 16^2 + 1 \cdot 16 + C = 10 \cdot 256 + 16 + 12 = 2560 + 28 = 2588_{10} .$$

Перевід правильних дробів.

Щоб перевести правильний дріб із одної позиційної системи в другу, необхідно задане число послідовно множити на основу нової системи числення, записаної в старій системі числення до отримання заданої точності.

Дріб в новій системі числення запишеться в виді цілих частин добутку, починаючи з першої частини.

Приклад: Перевести правильний дріб 0,456 із десяткової системи числення в двійкову і вісімкову.

1) При переводі із десяткової системи в двійкову множимо заданий дріб на 2, а при переводі в вісімкову – на 8.

Ціла частина	Дробова частина
0	456
0	912
1	824
1	648
1	296
0	592
1	184
0	368

Ціла частина	Дробова частина
	456
0	x
	8
3	648
	8
5	184
	8
1	472

Одержали: $0{,}456_{10} = 0{,}0111010_2$; $0{,}456_{10} = 0{,}351_8$.

2) При переводі із двійкової системи в десяткову множимо задане двійкове число на десять записане у двійковій системі числення (1010_2):

$$
\begin{array}{r}
\times\ 0{,}011101 \\
1010 \\
\hline
000000 \\
011101 \\
+\ 000000 \\
011101 \\
\hline
100100010{,}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
\times\ 100100010{,} \\
1010 \\
\hline
000000 \\
+\ 100010 \\
000000 \\
100010 \\
\hline
101{,}010100
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
101{,}010100 \\
\times\ 1010 \\
\hline
000000 \\
+\ 010100 \\
000000 \\
010100 \\
\hline
011{,}100100
\end{array}
$$

Одержані цілі частини переводимо у десяткову систему числення. Результат перетворення має вигляд: $0{,}0111010_2 = 0{,}453_{10}$.

Перевід неправильних дробів.

При переводі неправильних дробів необхідно окремо перевести цілу і дробову частини числа по вище розглянутих правилах переводу і записати в новій системі числення, залишивши без зміни положення коми.

Перевід чисел із системи числення в систему з кратною основою.

Якщо основи систем числення кратні одна одній, тобто зв'язані залежністю $q = p^m$, то кожна цифра системи числення з основою q може бути представлена m цифрами в системі з основою p.

Відповідно, для того щоб перевести число із заданої системи числення в нову систему, основа якої кратна основі заданої системи, необхідно кожну цифру числа записати за допомогою m цифр в новій системі числення, якщо основа заданої системи більша за основу нової системи.

Наприклад, при переводі вісімкового числа 254_8 в двійкову систему числення достатньо кожну цифру вісімкового числа записати в виді двійкової тріади, так як $8 = 2^3$, $254_8 = 010101100_2$.

При переводі двійкового числа в шістнадцяткову систему достатньо кожну тетраду заданого числа записати в виді шістнадцяткової цифри $2^4 = 16$, $010101100 = AC$.

Вибір системи числення для використання в ЕОМ.

При виборі системи числення необхідно враховувати такі фактори:

1. Наявність фізичних елементів, здатних відтворити символи системи.
2. Економічність системи, тобто кількість елементів необхідних для представлення багаторозрядних чисел.
3. Трудоємність виконання операцій в ЕОМ.
4. Швидкодія обчислювальних систем.
5. Наявність формального математичного апарату для аналізу і синтезу обчислювальної системи.
6. Зручність роботи людини з машиною.
7. Завадостійкість кодування цифр на носіях інформації.

Арифметичні дії в q-ричній системі числення

Розглянемо основні арифметичні операції: **додавання, віднімання.** Правила виконання цих операцій в десятковій системі добре відомі. Ці правила можна застосувати і до всіх інших позиційних систем числення. Тільки таблицями додавання і множення треба користуватися особливими для кожної системи.

Додавання.

Додавання в двійковій системі.

+	0	1
0	0	1
1	1	10

Додавання в вісімковій системі.

+	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7	10
2	2	3	4	5	6	7	10	11
3	3	4	5	6	7	10	11	12
4	4	5	6	7	10	11	12	13
5	5	6	7	10	11	12	13	14
6	6	7	10	11	12	13	14	15
7	7	10	11	12	13	14	15	16

При додаванні цифри додаються порозрядно, і якщо при цьому виникає надлишок то він переноситься вліво (формується старший розряд).

Приклад.

Додамо числа в різних системах числення (СЧ).

Двійкова СЧ. $01+01_{2}{}_{2}$

```
 + 1 0 1 0 1
     0 1 1 1
 ___________
   1 1 1 0 0
     1+1=2=2+0
     0+1+1=2=2+0
     1+1+1=3=2+1
     0+0+1=1
```

```
 + 1 0 1 0 1
     0 1 1 1
 ___________
   1 1 1 0 0
     1+1=2=10
     0+1+1=2=10
     1+1+1=3=11
     0+0+1=1
```

Вісімкова СЧ. $16_8 + 7_8 = 25_8$

```
   16
 +  7
 ____
   25
     7+6=13=8+5
     1+1=2
```

Шістнадцяткова СЧ. $D_{16} + 5_{16} = 12_{16}$

```
   D
   5
 ____
  12
     13+5=18=16+2
```

Віднімання.

Двійкова СЧ. Правила віднімання:

```
  1  1  0  10
- -  -  -1  1  0  0
  0  1  0  01
```

Приклади:

```
 100     1000      100010    10011010000
-  1    - 0101   - 011101   - 01100011101
 011     0011      000101    00110110011
```

Вісімкова СЧ.

```
  16      100     125
-  7    -   1   -  46
   7       77      57
```

Шістнадцяткова СЧ.

```
  10     15A     235
-  1   -   1   -  38    1C9
   F     122      6C
```

Кодовані позиційні системи числення

Десяткова цифра	Код 8421	Код 2421	Код 8421 + 3
0	0000	0000	0011
1	0001	0001	0100
2	0010	0010	0101
3	0011	0011	0110
4	0100	0100	0111
5	0101	0101	1000
6	0110	0110	1001
7	0111	0111	1010
8	1000	1110	1011
9	1001	1111	1100

Двійково-десяткові коди мають надлишковість, так як для кодування десяткових цифр використовуються тільки 10 комбінацій із 16.

Двійково-десятковий код

В двійково-десятковому (двійково-кодованому) представленні десяткового числа кожна десяткова цифра зображується тетрадою двійкових символів $a_l = a_4^i\, a_3^i\, a_2^i\, a_1^i$, a_i – десяткова цифра i – го розряду; a_i^i – двійкова цифра i – ї тетради.

Одержаний таким чином десятковий код, кодований двійковими символами називається Д – кодами.

Є деяка множина Д кодів. Це зумовлено наявністю 10 дозволених із 16 можливих комбінацій, які допускає тетрада.

Наявність заборонених комбінацій в Д - кодах відрізняє їх від звичайних позиційних систем числення в яких всі комбінації – дозволені. Із всієї множини відомих Д – кодів найбільш поширені в обчислювальній техніці отримали код Д1 прямого заміщення (система 8421) і код Д2 з надлишком 3 (система 8421+3).

Із-за заборонених комбінацій, при додаванні чисел в Д – кодах виникає необхідність в корекції результату і трудності в формуванні десяткового переносу в наступну тетраду.

Особливості додавання чисел в кожному із Д – кодів різні. Задані числа

$A = a_n\, a_{n-1}\, a_1\, a_0$;

$B = b_n\, b_{n-1}\, b_1\, b_0$,

де a_i , b_i – двійково-кодовані десяткові цифри (тетради).

Необхідно отримати

$A + B = C = C_{n-1}\, C_n \quad C_1\, C_0$ при цьому $c_i = a_i + b_i + \Pi_{i-1} - \Pi_i \cdot p$; $c_{n+1} = \Pi_n$, де $\Pi_i = \{0, 1\}$, $\Pi_{i-1} = \{0,1\}$ - десяткові переноси; $p = 10$ - основа системи числення.

Так як найбільше десяткове однорозрядне число 9 то з врахуванням переносу в даний розряд, значення результату розрядного сумування лежить в межах від 0 до 19. При цьому одиниця в другому розряді представляє собою десятковий переніс в наступну тетраду, а суму одержуємо в двійковому коді, який відрізняється від потрібного двійково-десяткового представлення, тобто він потребує корекції.

При додаванні чисел в Д кодах можуть виникнути наступні випадки:

1) якщо $a_i + b_i + \Pi_{i-1} < 10$, то виконання дій над розрядами тетради по правилах двійкової арифметики зразу отримаємо правильний результат;

2) якщо $a_i + b_i + \Pi_{i-1} \geq 10$, то виникає десятковий переніс. Тому сума в даній тетраді повинна бути рівна:

$$a_i + b_i + \Pi_{i-1} - \Pi_i - 10 ,$$

де $\Pi_i = 1$.

При цьому ознакою неправильного результату є в одному випадку виникнення потетрадного переносу $\Pi_i' = 16$, в другому поява забороненої комбінації, якщо $15 \geq a_i + b_i + \Pi_{i-1} \geq 10$.

В будь якому із цих випадків необхідно скоректувати результат в даній тетраді введенням поправки +0110, що приведе до виникнення потетрадного переносу і в другому випадку.

Корекція обумовлена тим, що кожний переніс забирає із собою із даної тетради 16 одиниць, а приносить в наступну тільки 10 одиниць.

Приклад. Додати тетради $a_i = 1000$; $b_i = 1001$ при $\Pi_{i-1} = 1$.

$c_i' = a_i + b_i + \Pi_{i-1} = 10010$.

Так як $\Pi_i = 1$, необхідна корекція результату $c_i = 0010 + 0110 = 1000$, $\Pi_i = \Pi_i' = 1$

Приклад. Додати тетради $a_i = 1000$; $b_i = 0110$ при $\Pi_{i-1} = 1$.

$c_i' = a_i + b_i + \Pi_{i-1} = 1111$.

Так як величина $c_i' = 1111$ належить до заборонених комбінацій, то необхідно ввести поправку виду 0110.

Отже, якщо в i – й тетраді сума цифр з переносом із $(i-1)$ - ї тетради менше 10, то додавання відбувається без поправок; якщо сума цифр з переносом рівна або більша 10, то відбувається корекція результату тетради введенням поправки +0110, а переніс який при цьому виник додаємо до наступної тетради $(i+1) - i$.

При цьому, якщо в декількох тетрадах, починаючи з $(i+1)$ – ї, розрядна сума дорівнює 1001, то переніс приводить до формування забороненої комбінації в (i +1) – й тетраді. В результаті цього необхідна корекція, яка приведе до забороненої комбінації в (i + 2) – й тетраді і т.д.

Приклад. Додати два числа: $A = 248_{10} = 0010\ 0100\ 1000$ і $B = 349_{10} = 0011\ 0100\ 1001$.

$$\begin{array}{r} +\ 0010\ 0100\ 1000 \\ 0011\ 0100\ 1001 \\ \hline 0101\ 1001\ 0001 \\ 0110 \\ \hline 01011001\ 0111 \end{array} : 597_{10} = 248_{10} + 348_{10}\ .$$

Приклад: $A = 538$, $B = 465$.

$$\begin{array}{r} +\ 0101\ 0011\ 1000 \\ 0100\ 0110\ 0101 \\ \hline 1001\ 1001\ 1101 \end{array};$$

проводимо корекцію в молодшій тетраді:

$$\begin{array}{r} +\ 1001\ 1001\ 1101 \\ 0110 \\ \hline 1001\ \ 1010\ \ 0011 \end{array};$$

проводимо корекцію в другій тетраді:

$$\begin{array}{r} +\ 1001\ \ 1010\ \ 0011 \\ 0110\qquad\ \ \\ \hline 1010\ \ 0000\ \ 0011 \end{array};$$

проводимо корекцію в старшій тетраді:

$$\begin{array}{r} +\ 1010\ 0000\ 0011 \\ 0110\qquad\qquad\quad \\ \hline 1\ 0000\ \ 0000\ 0011 \end{array}.$$

Контрольні запитання

1. Які системи числення називаються позиційними, непозиційними ?
2. Переведіть задані числа із однієї системи числення в іншу.
3. Виконайте арифметичні операції в різних системах числення.
4. Які фактори необхідно враховувати при виборі СЧ.