Лекція 6.
Математичне сподівання випадкової величини і його властивості. Дисперсія випадкової величини, її властивості. Середнє квадратичне відхилення.

План лекції

Питання, що розглядаються:

Математичне сподівання, сума двох випадкових величин, різниця двох випадкових величин, добуток двох випадкових величин, дисперсія, середнє квадратичне відхилення

У багатьох практичних випадках інформація про випадкову величину, яку дають закон розподілу, функція розподілу або щільність ймовірності, є надлишковою. Часто простіше і зручніше користуватися числами, які описують випадкову величину сумарно. До найбільш важливих з таких числових характеристик випадкових величин належать математичне сподівання, дисперсія і середнє квадратичне відхилення.

1. Математичне сподівання випадкової величини та його властивості

Математичне сподівання характеризує середнє очікуване значення випадкової величини, тобто приблизно дорівнює її середньому значенню (імовірнісний зміст математичного сподівання). Іноді знання цієї характеристики вистачає для розвязання завдання. Наприклад, при оцінці купівельної спроможності населення цілком може вистачити знання середнього доходу, при аналізі ймовірності двох видів діяльності можна обмежитися порівнянням їх середніх прибутковостей. Знання того, що випускники цього університету заробляють в середньому більше випускників іншого, може послужити основою для ухвалення рішення про вступ до цього ВНЗу і тому подібне

Математичне сподівання дискретної випадкової величини визначається співвідношенням:

$$M(X) = M_X = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \text{, де } \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 .$$

Математичне сподівання неперервної випадкової величини дорівнює

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\,dx \text{, де } f(x) \text{ — щільність ймовірності.}$$

Властивості математичного сподівання

Перш ніж формулювати властивості математичного сподівання, необхідно пояснити зміст арифметичних операцій $X+Y$, $X-Y$, $X \cdot Y$ і тому подібне, де X і Y - дискретні випадкові величини.

Наприклад, під сумою $X+Y$ розуміється випадкова величина Z, значеннями якої є усі допустимі суми $z_{ij} = x_i + y_j$, де x_i і y_j - усі можливі значення відповідно випадкових величин X і Y.

Під добутком $X \cdot Y$ розуміється випадкова величина Z, значеннями якої є усі допустимі добутки $z_{ij} = x_i \cdot y_j$, де x_i і y_j - усі можливі значення відповідно випадкових величин X і Y.

1. Математичне сподівання постійної величини C дорівнює цій величині.

$$M(C) = C \cdot 1 = C .$$

2. Математичне сподівання суми (різниці) двох або декількох випадкових величин X і Y дорівнює сумі (різниці) їх математичних сподівань : $M(X \pm Y) = M(X) \pm M(Y)$.

   Наслідок. Якщо C *- постійна величина, то*
   $$M(X + C) = M(X) + C$$
3. Математичне сподівання добутку двох незалежних випадкових величин X і Y дорівнює добутку їх математичних сподівань : $M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y)$.

Наслідок 1. Математичне сподівання добутку декількох взаємно незалежних випадкових величин дорівнює добутку математичних сподівань цих величин.

Наслідок 2. Постійний множник можна виносити за знак математичного сподівання, тобто. $M(CX) = C \cdot M(X)$

2. Дисперсія випадкової величини і її властивості.

На практиці часто вимагається оцінити розсіювання випадкової величини навколо її середнього значення. Наприклад, акції двох компаній можуть приносити в середньому однакові дивіденди, проте вкладення грошей в одну з них може бути набагато ризикованішою операцією, ніж в іншу. Тому виникає необхідність в числовій характеристиці, що оцінює розкид можливих значень випадкової величини відносно її середнього значення (математичного сподівання). Такою характеристикою є дисперсія. ***Дисперсією (розсіюванням) випадкової величини*** називають математичне сподівання квадрата відхилення цієї величини від її математичного сподівання

$$D(X) = M\left[(X - M(X))^2\right].$$

Легко показати, що наведений вище вираз може бути записаний у вигляді

$$D(X) = M(X^2) - \left[M(X)\right]^2$$

Дійсно, використовуючи основні теореми про математичне сподівання, отримаємо

$$D(X) = M\left[(X - M(X))^2\right] = M\left[X^2 - 2XM(X) + M(X)^2\right] =$$
$$= M(X^2) - 2M(X)M(X) + \left[M(X)\right]^2 = M(X^2) - \left[M(X)\right]^2$$

У разі дискретної випадкової величини, що має закон розподілу (x_i, p_i) $(i = 1,2,..., n)$

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M(X))^2 p_i .$$

Для неперервної випадкової величини формула для розрахунку дисперсії має вигляд

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty}(x-M(X))^2 \, f(x)\,dx$$

Властивості дисперсії

1. Дисперсія постійної величини дорівнює нулю.

$$D(C)=0$$

2. Постійний множник можна виносити за знак дисперсії, підводячи його до квадрату:

$$D(CX) = C^2 D(X).$$

3. Дисперсія суми (різниці) двох незалежних випадкових величин дорівнює сумі дисперсій цих величин :

$$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y).$$

Наслідок 1. Дисперсія суми декількох взаємно незалежних випадкових величин дорівнює сумі дисперсій цих величин.

Наслідок 2. Якщо C *- постійна величина, то* $D(X + C) = D(X)$.

Математичне сподівання і дисперсія випадкової величини є її основними числовими характеристиками.

Приклад 1. Нехай закон розподілу дискретної випадкової величини має вигляд

x_i	1	2	3	4	5
p_i	0,07	0,21	0,55	0,16	0,01

Знайти математичне сподівання і дисперсію випадкової величини X.

Розвязування: Розрахуємо спочатку математичне сподівання

$$M(X) = 1\cdot 0{,}07 + 2\cdot 0{,}21 + 3\cdot 0{,}55 + 4\cdot 0{,}16 + 5\cdot 0{,}01 = 2{,}83$$

Дисперсія дорівнює

$$D(X) = (1-2{,}83)^2\cdot 0{,}07 + (2-2{,}83)^2\cdot 0{,}21 + (3-2{,}83)^2\cdot 0{,}55 + (4-2{,}83)^2\cdot 0{,}16 +$$

$$(5-2{,}83)^2\cdot 0{,}01 = 0{,}661$$

Приклад 2. Щільність ймовірності неперервної випадкової величини дорівнює

$$f(x) = \exp(-x), \qquad \text{де} \quad x > 0$$

Знайти її математичне сподівання і дисперсію.

Розвязування: Знайдемо математичне сподівання***:***

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\,dx = \int_0^{\infty} x e^{-x}\,dx = \begin{bmatrix} U = x & dU = dx \\ dV = e^{-x}dx & V = -e^{-x} \end{bmatrix} = [-e^{-x}\cdot x]\Big| + \int_0^{\infty} e^{-x}dx = 1$$

Далі

$$M(X^2) = \int_0^{\infty} x^2 \cdot e^{-x}\,dx = \begin{bmatrix} U = x^2 & dU = 2x\,dx \\ dV = e^{-x} & V = -e^{-x} \end{bmatrix} = [-e^{-x}\cdot x^2]\Big| + 2\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx = 2$$

Знайдемо дисперсію, використовуючи формулу

$$D(X)=M(X^2)-(M(X))^2=2-1=1.$$

3. Середнє квадратичне відхилення.

Для оцінки розсіювання можливих значень випадкової величини навколо її середнього значення окрім дисперсії служать і деякі інші характеристики. До їх числа відноситься середнє квадратичне відхилення. ***Середнім квадратичним відхиленням*** σ ***(чи стандартом) випадкової величини*** X називається корінь квадратний з дисперсії цієї величини :

$$\sigma(x)=\sqrt{D(X)}.$$

Легко показати, що дисперсія має розмірність, рівну квадрату розмірності випадкової величини. Тому розмірність $\sigma(X)$ співпадає з розмірністю X . В тих випадках, коли бажано, щоб оцінка розсіювання мала розмірність випадкової величини, обчислюють середнє квадратичне відхилення, а не дисперсію.

Поняття дисперсії і середнього квадратичного відхилення широко використовується практично в усіх областях людської діяльності, пов'язаних з процесами вимірів. Так, наприклад, в техніці, вони характеризують точність вимірювальної апаратури (чим вище середньоквадратичне відхилення (розкид) при вимірах, тим гірша якість приладу).

Прикладами використання цих параметрів в економіці можуть служити вивчення ризику різних дій з випадковим результатом, зокрема, при аналізі ризику інвестування в ту або іншу галузь, при оцінюванні різних активів в портфелі цінних паперів і так далі.

Приклад. Нехай є два варіанти інвестування з наступними характеристиками

Ймовірності можливого чистого доходу								
	Порівняння варіантів рішень							
Чистий дохід, млн. гр. од.	-3	-	-1	0	1	2	3	4
Ймовірності:								
Інвестиція 1	0	0	0,1	0	0,3	0,2	0,2	0
Інвестиція 2	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,2	0,2

Очікуваний чистий прибуток інвестування визначається математичним сподіванням і складає:

Інвестиція 1: $M(X) = \sum x_i \cdot p_i = 1{,}2$ *млн.*

Інвестиція 2: $M(X) = \sum x_i \cdot p_i = 1{,}1$ *млн.*

За очікуваним прибутком прийнятніший 1-й варіант. Проте ми не врахували ризик, пов'язаний з інвестиціями. Цей ризик може бути визначений за допомогою дисперсії і (чи) середнього квадратичного відхилення. Використовуючи результати таблиці, отримаємо

Інвестиція 1: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = 1{,}25$

Інвестиція 2: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = 2{,}385$

Тобто ризик за варіантом для інвестиції 1 менший. Вибір - за підприємцем.

Питання для самоперевірки

1. Що таке математичне сподівання випадкової величини?
2. Сформулювати властивості математичного сподівання.
3. Що таке дисперсія випадкової величини?
4. Записати формули для обчислення дисперсії дискретної та неперервної величин.
5. Сформулювати властивості дисперсії.
6. Що таке середнє квадратичне відхилення випадкової величини?