Тема 10. Диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Системи диференціальних рівнянь

План

1. Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.
2. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.
3. Поняття про системи диференціальних рівнянь.

1. Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Розглянемо *лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами*, а саме

$$y'' + py' + qy = 0\,, \tag{1}$$

де p, q – числові коефіцієнти. Особливістю даного рівняння є те, що його розв'язок може бути знайдений без застосування операції інтегрування.

Частинні розв'язки рівняння (1) шукаємо у вигляді $y = e^{kx}$, де k – числовий коефіцієнт. Підставивши вказаний розв'язок у задане рівняння і враховуючи, що $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2 e^{kx}$, $e^{kx} \neq 0$, одержимо

$$k^2 e^{kx} + pke^{kx} + qe^{kx} = 0;$$

$$k^2 + pk + q = 0\,. \tag{2}$$

Квадратне рівняння (2) відносно невідомої k називається *характеристичним рівнянням* диференціального рівняння (1). Відмітимо, що формально рівняння (2) отримується з рівняння (1) за допомогою заміни y'', y', y на $k^2, k, 1$ відповідно. Якщо k є розв'язком рівняння (2), то функція $y = e^{kx}$ є розв'язком рівняння (1).

Нагадаємо, що корені квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ визначаються формулами

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a},\ D = b^2 - 4ac. \tag{3}$$

Для рівняння (2) маємо

$$k_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{D}}{2},\ D = p^2 - 4q. \tag{4}$$

Розглянемо усі можливі випадки для розв'язків характеристичного рівняння.

1. Характеристичне рівняння має дійсні й різні корені k_1 і k_2 (дискримінант додатній). Функції $y_1 = e^{k_1 x}$ і $y_2 = e^{k_2 x}$ є частинними розв'язками диференціального рівняння (1). Так як

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{k_1 x}}{e^{k_2 x}} = e^{(k_1 - k_2)x} \neq const,\ (k_1 \neq k_2)\,,$$

то y_1 і y_2 лінійно незалежні. Отже, загальний розв'язок рівняння (1) має вигляд (див. попередню тему)

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}, \tag{5}$$

де C_1, C_2 – довільні сталі.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $y'' + 3y' - 10y = 0$.

Розв'язання. Маємо лінійне однорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами. Складаємо характеристичне рівняння і розв'язуємо його:

$$k^2 + 3k - 10 = 0;\ D = 49;\ k_1 = -5,\ k_2 = 2.$$

Так як корені дійсні й різні, то загальний розв'язок визначається за допомогою формули (5), а саме $y = C_1 e^{-5x} + C_2 e^{2x}$.

2. Характеристичне рівняння має дійсні і рівні корені $k_1 = k_2 = k$ (дискримінант дорівнює нулю). Можна показати, що у цьому випадку частинними лінійно незалежними розв’язками рівняння (1) будуть функції $y_1 = e^{kx}$, $y_2 = xe^{kx}$ і для знаходження загального розв'язку одержимо наступну формулу

$$y = e^{kx}(C_1 + C_2 x). \tag{6}$$

Приклад 2. Розв'язати рівняння $y'' - 8y' + 16y = 0$.

Розв'язання. Складаємо й розв'язуємо характеристичне рівняння:

$$k^2 - 8k + 16 = 0;\ D = 0;\ k_1 = k_2 = 4.$$

Оскільки корені дійсні й рівні, то застосувавши формулу (6), одержимо $y = e^{4x}(C_1 + C_2 x)$.

3. Коренями характеристичного рівняння є комплексні числа $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ (дискримінант від'ємний). Можна показати, що для такого диференціального рівняння частинними лінійно незалежними розв'язками будуть функції $y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$ і $y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$. Отже, загальний розв'язок рівняння (5.1) має вигляд

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x). \tag{7}$$

Приклад 3. Розв'язати рівняння $y'' + 6y' + 25y = 0$.

Розв'язання. Розв'язуємо характеристичне рівняння:

$$k^2 + 6k + 25 = 0;\ D = -64,\ \sqrt{D} = 8i;\ k_{1,2} = \frac{-6 \pm 8i}{2} = -3 \pm 4i.$$

Так як корені комплексні, то на основі формули (7) маємо

$$y = e^{-3x}(C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x).$$

2. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами називається наступне рівняння

$$y'' + py' + qy = f(x)\,, \tag{1}$$

де p, q – числові коефіцієнти; $f(x)$ – функція від x ($f(x)$ не дорівнює тотожно нулю). Загальний розв'язок рівняння (1) будемо шукати у вигляді

$$y = \tilde{y} + y^*\,, \tag{2}$$

де y^* – частинний розв'язок даного неоднорідного рівняння; $\tilde{y}$ – загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння, а саме

$$y'' + py' + qy = 0\,. \tag{3}$$

Спочатку за допомогою характеристичного рівняння інтегруємо диференціальне рівняння (3) і визначаємо функцію $\tilde{y}$ (див. попереднє питання), а потім знаходимо функцію y^*. Загальна форма останньої залежить від виду функції $f(x)$ та від коренів характеристичного рівняння. Розглянемо, далі, декілька частинних випадків рівняння (1) (розглядаються більш конкретні випадки для функції $f(x)$, яка стоїть в правій частині) і вкажемо методи визначення відповідних частинних розв'язків y^*.

Розглянемо рівняння

$$y'' + py' + qy = P_n(x)\,, \tag{4}$$

де $P_n(x)$ – многочлен n-го степеня відносно x. Частинний розв'язок рівняння (4) має вигляд

$$y^* = x^r Q_n(x), \tag{5}$$

де r – кратність кореня $k = 0$ в характеристичному рівнянні диференціального рівняння (3); $Q_n(x)$ – повний многочлен n-го степеня, тобто

$$Q_n(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \cdots + A_{n-1} x + A_n . \tag{6}$$

Числові коефіцієнти $A_0, A_1, \cdots, A_n$ необхідно визначити. Відмітимо, $Q_n(x)$ і $P_n(x)$ є многочленами одного степеня. З метою визначення коефіцієнтів $A_0, A_1, \cdots, A_n$ підставляємо розв'язок (5) у рівняння (1). Для цього попередньо знаходимо похідні $(y^*)'$, $(y^*)''$ і підставляємо y^*, $(y^*)'$, $(y^*)''$ замість y, y', y'' відповідно. Многочлен лівої частини отриманої рівності представляємо в стандартній формі (зводимо подібні відносно однакових степенів x). Прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях x лівої і правої частин, отримуємо систему лінійних рівнянь відносно невідомих $A_0, A_1, \cdots, A_n$. Розв'язуємо систему і записуємо частинний розв'язок y^*.

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y'' - 2y' = 6x^2 + 2x$.

Розв'язання. Маємо рівняння типу (4) і розв'язок шукаємо у формі (2). Розглядаємо спочатку відповідне однорідне рівняння і визначаємо складову $\tilde{y}$:

$$y'' - 2y' = 0;\ k^2 - 2k = 0,\ k(k-2) = 0;\ k_1 = 0,\ k_2 = 2;$$

$$\widetilde{y} = C_1 + C_2 e^{2x} .$$

Частинний розв'язок y^* шукаємо за формулою (5). У нашому випадку $Q_n(x)$ – многочлен другого степеня (права частина заданого рівняння є многочленом другого степеня) і $r = 1$ (число $k = 0$ є однократним коренем характеристичного рівняння), отже $y^* = xQ_2(x) = x(A_0 x^2 + A_1 x + A_2)$. Знаходимо похідні і підставляємо $(y^*)', (y^*)''$ в задане рівняння:

$$(y^*)' = 3A_0 x^2 + 2A_1 x + A_2, \; (y^*)'' = 6A_0 x + 2A_1;$$

$$6A_0 x + 2A_1 - 2(3A_0 x^2 + 2A_1 x + A_2) = 6x^2 + 2x;$$

$$-6A_0 x^2 + (6A_0 - 4A_1)x + 2A_1 - 2A_2 = 6x^2 + 2x .$$

Прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях x і розв'язуємо отриману систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x^2 \left| \; -6A_0 = 6 \right. , \\ x \left| \; 6A_0 + 4A_1 = 2, \right. \\ x^0 \left| \; 2A_1 - 2A_2 = 0 \right. , \end{cases} \qquad \begin{cases} A_0 = -1, \\ A_1 = 2, \\ A_2 = 2. \end{cases}$$

Записуємо частинний та загальний розв'язки заданого рівняння:

$$y^* = x(-x^2 + 2x + 2); \; y = \widetilde{y} + y^* = C_1 + C_2 e^{2x} + x(-x^2 + 2x + 2) .$$

Розглянемо рівняння

$$y'' + py' + qy = P_n(x)e^{\alpha x}, \qquad (7)$$

де $P_n(x)$ – многочлен n-го степеня відносно *x*; α – числовий коефіцієнт. Частинний розв'язок y^* для рівняння (7) визначається за формулою

$$y^* = x^r Q_n(x)e^{\alpha x}, \qquad (8)$$

де $Q_n(x)$ – многочлен (6), коефіцієнти якого необхідно визначити; r – кратність кореня $k = \alpha$ в характеристичному рівнянні диференціального рівняння (3).

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y'' + y' - 6y = 2e^{3x}$.

Розв'язання. Маємо рівняння типу (7), причому $\alpha = 3, P_n(x) = 2$ (многочлен нульового степеня). Знаходимо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння:

$$y'' + y' - 6y = 0;\ k^2 + k - 6 = 0;\ k_1 = -3,\ k_2 = 2;$$

$$\tilde{y} = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x}.$$

Частинний розв'язок y^* визначаємо за допомогою формули (8). Для даного рівняння $r = 0$ (число $\alpha = 3$ не є розв'язком характеристичного рівняння) і $Q_n(x) = Q_0(x) = A_0$ (многочлен нульового степеня). Отже, маємо

$$y^* = x^0 Q_0(x)e^{3x} = Ae^{3x}.$$

Підставляємо функцію y^* в задане рівняння і визначаємо невідомий коефіцієнт A_0:

$$(y^*)' = 3A_0 e^{3x},\ (y^*)'' = 9A_0 e^{3x};\ \ 9A_0 e^{3x} + 3A_0 e^{3x} - 6A_0 e^{3x} = 2e^{3x},$$

$$6A_0 e^{3x} = 2e^{3x},\ 6A_0 = 2,\ A_0 = \frac{1}{3}.$$

Записуємо частинний та загальний розв'язки заданого рівняння:

$$y^* = \frac{1}{3}e^{3x};\ y = \tilde{y} + y^* = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x} + \frac{1}{3}e^{3x}.$$

Розглянемо рівняння

$$y'' + py' + qy = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x), \tag{9}$$

де $P_n(x), Q_m(x)$ – многочлени; α, β – числові коефіцієнти. Частинний розв'язок y^* для рівняння (9) має вигляд

$$y^* = x^r e^{\alpha x}(U_s(x)\cos\beta x + V_s(x)\sin\beta x), \tag{10}$$

де $U_s(x), V_s(x)$ – повні многочлени, степінь яких дорівнює більшому зі степенів многочленів $P_n(x)$ і $Q_m(x)$; r – кратність комплексних коренів $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ у характеристичному рівнянні диференціального рівняння (3) (у нашому випадку $r = 0$ або $r = 1$). Аналогічно попередньому, коефіцієнти многочленів $U_s(x)$ і $V_s(x)$ необхідно визначати.

Приклад 3. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y'' + 4y = 8x\sin 2x$.

Розв'язання. Знаходимо спочатку розв'язок відповідного однорідного рівняння:

$$y'' + 4y = 0;\ k^2 + 4 = 0;\ k_{1,2} = \pm\sqrt{-4} = \pm 2i;$$

$$\widetilde{y} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x .$$

Задане рівняння має форму рівняння (9), причому $P_n(x) = 0$ (многочлен нульового степеня), $Q_m(x) = 8x$ (многочлен першого степеня), $\alpha = 0, \beta = 2, \alpha \pm \beta i = \pm 2i$. Застосовуємо, далі, формулу (10). Для нашого прикладу $r = 1$ (числа $\alpha \pm \beta i = \pm 2i$ є однократними коренями характеристичного рівняння), $U_s(x)$ і $V_s(x)$ – многочлени першого степеня (права частина заданого рівняння містить многочлени нульового і першого степенів). Отже, маємо

$$y^* = x((A_0 x + A_1)\cos 2x + (B_0 x + B_1)\sin 2x) .$$

Після диференціювання одержимо:

$$(y^*)'' = (-4A_0 x^2 + (8B_0 - 4A_1)x + 2A_0 + 4B_1)\cos 2x + (-4B_0 x^2 + (-8A_0 - 4B_1)x - 4A_1 + 2B_0)\sin 2x .$$

Підставивши y^* і $(y^*)''$ в задане рівняння, маємо

$$(8B_0 x + 2A_0 + 4B_1)\cos 2x + (-8A_0 x - 4A_1 + 2B_0)\sin 2x = 8x\sin 2x .$$

Прирівнюємо коефіцієнти при косинусах і синусах:

$$\begin{cases} \cos 2x \left| \, 8B_0 x + 2A_0 + 4B_1 = 0, \right. \\ \sin 2x \left| \, -8A_0 x - 4A_1 + 2B_0 = 8x. \right. \end{cases}$$

У кожній з рівностей прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях x і визначаємо невідомі величини:

$$\begin{cases} x \, \left| \, 8B_0 = 0, \right. \\ x^0 \left| \, 2A_0 + 4B_1 = 0 \right. , \\ x \, \left| \, -8A_0 = 8, \right. \\ x^0 \left| \, -4A_1 + 2B_0 = 0 \right. , \end{cases} \qquad \begin{cases} A_0 = -1, \\ A_1 = 0, \\ B_0 = 0, \\ B_1 = 0{,}5. \end{cases}$$

Записуємо частинний та загальний розв'язки заданого рівняння:

$$y^* = x(-x\cos 2x + 0{,}5\sin 2x) = -x^2 \cos 2x + 0{,}5x\sin 2x ,$$

$$y = \tilde{y} + y^* = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x - x^2 \cos 2x + 0{,}5x\sin 2x .$$

Інколи диференціальне рівняння (1) із більш складною правою частиною $f(x)$ можна звести до розглянутих вище за допомогою наступного твердження: якщо функції $y_1^* = y_1^*(x)$ і $y_2^* = y_2^*(x)$ є частинними розв'язками диференціальних рівнянь $y'' + py' + qy = f_1(x)$ і $y'' + py' + qy = f_2(x)$ відповідно, то функція $y^* = y_1^* + y_2^*$ є частинним розв'язком диференціального рівняння $y'' + py' + qy = f_1(x) + f_2(x)$. Наприклад, частинний розв'язок диференціального рівняння $y'' + 4y = 8x\sin 2x + x^2 e^x \cos 5x$ може бути знайдений як сума частинних розв'язків диференціальних рівнянь $y'' + 4y = 8x\sin 2x$ і $y'' + 4y = x^2 e^x \cos 5x$.

3. Поняття про системи диференціальних рівнянь

Дамо деякі поняття про методи інтегрування систем диференціальних рівнянь на прикладі наступної системи

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_1 x + b_1 y + f_1(t), \\ \dfrac{dy}{dt} = a_2 x + b_2 y + f_2(t), \end{cases} \tag{1}$$

де t – аргумент; $x = x(t),\ y = y(t)$ – шукані функції; a_1, b_1, a_2, b_2 –числові коефіцієнти; $f_1(t),\ f_2(t)$ – функції. Для системи (1) можуть бути задані наступні початкові умови

$$x(t_0) = x_0,\ y(t_0) = y_0, \tag{2}$$

де t_0, x_0, y_0 – певні числові значення аргументу та шуканих функцій відповідно. Один із методів інтегрування заданої системи полягає у тому, що вона зводиться до диференціального рівняння другого порядку, яке містить лише одну невідому функцію. Застосуємо вказаний метод до системи (1).

Диференціюємо перше рівняння системи:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a_1\frac{dx}{dt} + b_1\frac{dy}{dt} + \frac{df_1}{dt}. \qquad (3)$$

Використовуючи друге рівняння системи (1), перепишемо рівняння (3) у вигляді

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a_1\frac{dx}{dt} + b_1(a_2x + b_2y + f_2(t)) + \frac{df_1}{dt}. \qquad (4)$$

Розв'язуємо перше рівняння заданої системи відносно функції *y*:

$$y = \frac{1}{b_1}\left(\frac{dx}{dt} - a_1x - f_1(t)\right). \qquad (5)$$

Підставляємо (5) у (4) і дістаємо

$$\frac{d^2x}{dt^2} + p\frac{dx}{dt} + qx = f(t), \qquad (6)$$

де

$$p = -(a_1 + b_2);\ q = a_1b_2 - a_2b_1;\ f(t) = b_1f_2(t) - b_2f_1(t) + \frac{df_1}{dt}.$$

Як бачимо, одержали лінійне рівняння зі сталими коефіцієнтами (якщо в заданій системі $f_1(t) = f_2(t) \equiv 0$, то рівняння буде однорідним). Проінтегрувавши його, знаходимо функцію $x = \varphi(t, C_1, C_2)$. Функцію $y = \psi(t, C_1, C_2)$ визначаємо за допомогою формули (5).

Приклад 1. Розв'язати систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 7y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - 6y. \end{cases}$$

Розв'язання. Диференціюємо перше рівняння системи й у отриманому співвідношенні замінюємо похідну від функції *y* правою частиною другого рівняння:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 3\frac{dx}{dt} - 7\frac{dy}{dt}; \frac{d^2x}{dt^2} = 3\frac{dx}{dt} - 7(2x - 6y).$$

Знаходимо величину *y* з першого рівняння заданої системи і підставляємо в друге:

$$y = \frac{1}{7}(3x - \frac{dx}{dt}); \frac{d^2x}{dt^2} = 3\frac{dx}{dt} - 7(2x - \frac{6}{7}(3x - \frac{dx}{dt}));$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} - 4x = 0 .$$

Відмітимо, що отримане лінійне рівняння зі сталими коефіцієнтами могло бути записане на самому початку за допомогою формули (6) (у нашому випадку $a_1 = 3, b_1 = -7, a_2 = 2, b_2 = -6, f_1(t) \equiv 0, f_2(t) \equiv 0;$ $p = 3, q = -4, f(t) = 0$). Інтегруємо вказане рівняння та визначаємо функцію *x*:

$$k^2+3k-4=0;\ k_1=-4,\ k_2=1;\ x=C_1e^{-4t}+C_2e^t\ .$$

Диференціюємо функцію *x* і знаходимо функцію *y*:

$$\frac{dx}{dt}=-4C_1e^{-4t}+C_2e^t;\ y=\frac{1}{7}(3x-\frac{dx}{dt})=C_1e^{-4t}+\frac{2}{7}C_2e^t\ .$$