Тема 9. Диференціальні рівняння вищих порядків. Метод варіації довільних сталих

План

1. Деякі типи диференціальних рівнянь вищих порядків, які допускають зниження порядку.
2. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку. Основні поняття.
3. Метод варіації довільних сталих.

1. Деякі типи диференціальних рівнянь вищих порядків, які допускають зниження порядку

Розглянемо рівняння виду

$$y^{(n)} = f(x) . \quad (1)$$

Враховуючи, що похідна *n*-го порядку дорівнює похідній від похідної $n-1$-го порядку, можемо записати

$$\frac{dy^{(n-1)}}{dx} = f(x), \quad \int dy^{(n-1)} = \int f(x)dx, \quad y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1 .$$

Одержане диференціальне рівняння $n-1$-го порядку відноситься до типу рівняння (3.1) і до нього можна застосувати вказані вище дії. Поступово знижуючи порядок рівняння, визначаємо шукану функцію y.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $y''' = 6x + \cos 2x$.

Розв'язання. Поступово знижуємо порядок заданого рівняння і визначаємо функцію y:

$$y'' = \int (6x + \cos 2x)dx = 3x^2 + \frac{1}{2}\sin 2x + C_1 ;$$

$$y' = \int (3x^2 + \frac{1}{2}\sin 2x + C_1)dx = x^3 - \frac{1}{4}\cos 2x + C_1 x + C_2 ;$$

$$y = \int (x^3 - \frac{1}{4}\cos 2x + C_1 x + C_2)dx = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{8}\sin 2x + \frac{1}{2}C_1 x^2 + C_2 x + C_3 .$$

Розглянемо диференціальне рівняння другого порядку, яке не містить явно шукану функцію y, тобто рівняння виду

$$F(x, y', y'') = 0 . \tag{2}$$

Указане рівняння зводиться до рівняння першого порядку за допомогою підстановки $y' = p, y'' = p'$, де p – функція від x. Після здійснення вказаної заміни отримаємо рівняння $F(x, p, p') = 0$. Проінтегрувавши його, визначаємо функцію $p = \varphi_1(x, C_1)$. Враховуючи, що $p = y'$, маємо $y' = \varphi_1(x, C_1)$. Розв'язуємо останнє рівняння і знаходимо функцію $y = \varphi(x, C_1, C_2)$.

Приклад 2. Розв'язати задачу Коші: $y'' - \frac{1}{x}y' = x^2 + x; \quad y(1) = 0, y'(1) = 1$.

Розв'язання. Так як задане рівняння не містить явно y, то робимо підстановку $y' = p, y'' = p'$, де p –

функція від *x*. Одержуємо лінійне диференціальне рівняння першого порядку $p' - \frac{1}{x}p = x^2 + x$. Його розв'язок шукаємо у вигляді $p = uv, (p' = u'v + uv')$:

$$u'v + uv' - \frac{1}{x}uv = x^2 + x, \quad v(u' - \frac{1}{x}u) + uv' = x^2 + x;$$

$$u' - \frac{1}{x}u = 0, \quad \frac{du}{dx} = \frac{u}{x}, \quad \int \frac{du}{u} = \int \frac{dx}{x}, \quad u = x;$$

$$xv' = x^2 + x, \quad v' = x + 1, \quad v = \frac{1}{2}x^2 + x + C_1;$$

$$p = x(\frac{1}{2}x^2 + x + C_1), \quad y' = \frac{1}{2}x^3 + x^2 + C_1 x .$$

Використовуючи початкові умови, визначаємо значення довільної сталої C_1 і інтегруємо одержане диференціальне рівняння:

$$1 = \frac{1}{2} + 1 + C_1, \quad C_1 = -\frac{1}{2}; \quad y' = \frac{1}{2}x^3 + x^2 - \frac{1}{2}x;$$

$$y = \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + C_2 .$$

Визначаємо значення довільної сталої і записуємо кінцеву відповідь:

$$0=\frac{1}{8}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+C_2, \quad C_2=-\frac{5}{24}, \quad y=\frac{1}{8}x^4+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^2-\frac{5}{24}.$$

Розглянемо далі диференціальне рівняння другого порядку, яке не містить явно незалежну змінну *x*, тобто рівняння виду

$$F(y, y', y'')=0. \tag{3}$$

Зробимо підстановку $y'=p$, де p – функція від *y*. Друга похідна у даному випадку визначається рівністю $y''=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}$ або $y''=p\frac{dp}{dy}$. Отже, рівняння (3) перетворюється до наступного рівняння першого порядку $F(y, p, p\frac{dp}{dy})=0$. Відмітимо, що у цьому рівнянні величина *y* виступає як незалежна змінна, а величина *p* – як шукана функція. Розв'язавши вказане рівняння, знайдемо функцію $p=\varphi_1(y, C_1)$ або $y'=\varphi_1(y, C_1)$. Інтегруємо отримане рівняння першого порядку і визначаємо функцію $y=\varphi(x, C_1, C_2)$.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $y''=(y')^2 \operatorname{tg} y$.

Розв'язання. Маємо диференціальне рівняння типу (3). Робимо заміну $y'=p$ (*p* – функція від *y*; $y''=p\frac{dp}{dy}$) і інтегруємо:

$$p\frac{dp}{dy}=p^2\operatorname{tg}y,\quad p\left(\frac{dp}{dy}-p\operatorname{tg}y\right)=0\,;$$

$$1)\;\; p=0,\quad y'=0,\quad y=C,\quad C\in R\,;$$

$$2)\;\; \frac{dp}{dy}-p\operatorname{tg}y=0,\;\; \int\frac{dp}{p}=\int\operatorname{tg}y\,dy,\quad \ln|p|=-\ln|\cos y|+\ln|C_1|;$$

$$\ln|p|=\ln\left|\frac{C_1}{\cos y}\right|,\quad p=\frac{C_1}{\cos y},\quad y'=\frac{C_1}{\cos y};$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{C_1}{\cos y},\quad \int\cos y\,dy=\int C_1dx,\quad \sin y=C_1x+C_2\,.$$

2. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку. Основні поняття

Диференціальне рівняння другого порядку називається *лінійним*, якщо воно лінійне відносно шуканої функції y та її похідних y' і y'', тобто це рівняння виду

$$y''+a_1y'+a_2y=f(x)\,, \tag{1}$$

де a_1, a_2 – функції від x або числові коефіцієнти, $f(x)$ – задана функція. Якщо права частина рівняння (1) тотожно дорівнює нулю, то отримаємо

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0\,. \tag{2}$$

Рівняння (1) називається *неоднорідним лінійним рівнянням другого порядку*, а рівняння (2) –*однорідним*.

Нехай $y_1 = y_1(x),\ y_2 = y_2(x)$ – частинні розв'язки однорідного рівняння (2). Якщо існують числові коефіцієнти α і β, які не рівні одночасно нулю і для яких виконується тотожна рівність $\alpha y_1 + \beta y_2 = 0$, то розв'язки y_1 і y_2 називаються *лінійно залежними*. Очевидно, що відношення таких розв’язків дорівнює сталому числу. Якщо ж тотожна рівність $\alpha y_1 + \beta y_2 = 0$ виконується лише при $\alpha = 0$ і $\beta = 0$, то розв'язки y_1 і y_2 називаються *лінійно незалежними*. Відношення двох лінійно незалежних розв'язків є функцією, а не числом. Сформульовані означення лінійної залежності і лінійної незалежності справедливі і для довільних функцій y_1 і y_2.

Припустимо, тепер, що $y_1 = y_1(x)$ і $y_2 = y_2(x)$ є частинними лінійно незалежними розв'язками однорідного рівняння (2). У цьому випадку *загальний розв'язок* вказаного рівняння представляється у вигляді

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2\,, \tag{3}$$

де C_1, C_2 – довільні сталі. Отже, знаходження загального розв'язку рівняння (2) можна звести до знаходження двох лінійно незалежних частинних розв'язків цього рівняння.

Приклад 1. Показати, що функції $y_1 = e^x$ і $y_2 = e^{2x}$ є частинними лінійно незалежними розв'язками диференціального рівняння $y'' - 3y' + 2y = 0$. Записати загальний розв'язок указаного рівняння.

Розв'язання. Підставляємо функції та відповідні похідні в задане рівняння (похідні необхідно попередньо знайти):

$$y_1' = e^x,\ y_1'' = e^x;\ e^x - 3e^x + 2e^x = 0,\ 0 = 0;$$

$$y_2' = 2e^{2x},\ y_2'' = 4e^{2x};\ 4e^{2x} - 6e^x + 2e^x = 0,\ 0 = 0.$$

Для з'ясування питання про лінійну незалежність розглянемо відношення заданих розв'язків: $\dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{e^x}{e^{2x}} = e^{-x}$.

Так як відношення не дорівнює сталому числу, то y_1 і y_2 лінійно незалежні. На основі формули (3) загальний розв'язок заданого диференціального рівняння має вигляд $y = C_1e^x + C_2e^{2x}$.

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння (1) завжди можна представити в наступній формі

$$y = \tilde{y} + y^*, \tag{4}$$

де y^* – будь-який *частинний розв'язок* заданого неоднорідного рівняння, а $\tilde{y}$ – *загальний розв'язок* відповідного однорідного рівняння (рівняння $y'' + a_1y' + a_2y = 0$).

3. Метод варіації довільних сталих

Нехай задане неоднорідне рівняння $y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x)$ і нехай функції $y_1 = y_1(x)$ і $y_2 = y_2(x)$ є частинними лінійно незалежними розв'язками відповідного однорідного рівняння. Маючи на увазі застосування формули (4) попереднього питання, знаходимо спочатку складову $\tilde{y}$. Як уже відомо, загальний розв'язок однорідного рівняння визначається рівністю $\tilde{y} = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$. Частинний розв'язок y^* може бути знайдений за допомогою *метода варіації довільних сталих*.

Суть вказаного методу полягає у тому, що функція y^* шукається у тій же формі, що і функція $\tilde{y}$, але у останньому випадку величини C_1 і C_2 вважаються вже не довільними сталими, а невідомими функціями. Таким чином, частинний розв'язок y^* шукаємо у вигляді

$$y^* = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x) . \tag{1}$$

Виходячи з того, що функція (1) повинна задовольняти заданому неоднорідному рівнянню, отримаємо наступну

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1(x) + C_2'(x) y_2(x) = 0, \\ C_1'(x) y_1'(x) + C_2'(x) y_2'(x) = f(x). \end{cases} \tag{2}$$

Відмітимо, що система (2) є лінійною відносно невідомих $C_1'(x)$ і $C_2'(x)$, крім того, визначником її основної матриці є функція, яка не дорівнює тотожно нулю (система невироджена і має єдиний розв'язок). Розв'язавши вказану систему (наприклад, за формулами Крамера), одержимо

$$C_1'(x) = -\frac{y_2(x) f(x)}{\Delta}, C_2'(x) = \frac{y_1(x) f(x)}{\Delta}, \tag{3}$$

де $\Delta = y_1(x) y_2'(x) - y_2(x) y_1'(x)$. Інтегруємо рівності (3) (довільні сталі при інтегруванні покладаються рівними нулю):

$$C_1(x) = -\int \frac{y_2(x) f(x)}{\Delta} dx, \quad C_2(x) = \int \frac{y_1(x) f(x)}{\Delta} dx. \tag{4}$$

Підставивши знайдені функції $C_1(x)$ і $C_2(x)$ в формулу (1), записуємо частинний розв'язок y^*.

Приклад 1. Використовуючи результати прикладу попереднього питання, знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y'' - 3y' + 2y = 3e^x$.

Розв'язання. Розв'язок шукаємо у вигляді $y = \tilde{y} + y^*$. Розглядаємо однорідне рівняння $y'' - 3y' + 2y = 0$. У попередньому прикладі було показано, що функції $y_1 = e^x$ і $y_2 = e^{2x}$ є частинними лінійно незалежними розв'язками даного однорідного рівняння і його загальний розв'язок має вигляд $\tilde{y} = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$. Частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у формі (формула (1)) $y^* = C_1(x) e^x + C_2(x) e^{2x}$. Враховуючи, що

$y_1' = e^x$, $y_2' = 2e^{2x}$, складаємо систему (2) і розв'язуємо її (можна застосовувати формули (3)):

$$\begin{cases} C_1'(x)e^x + C_2'(x)e^{2x} = 0, \\ C_1'(x)e^x + 2C_2'(x)e^{2x} = 3e^x, \end{cases} \quad \begin{cases} C_1'(x) = -3, \\ C_2'(x) = 3e^{-x}. \end{cases}$$

Інтегруємо рівності останньої системи і визначаємо шукані функції $C_1(x)$ і $C_2(x)$ (нагадаємо, що довільні сталі при інтегруванні не пишуться):

$$C_1(x) = -\int 3dx = -3x,\ C_2(x) = \int 3e^{-x}dx = -3e^{-x}\ .$$

Записуємо частинний та загальний розв'язки заданого рівняння:

$$y^* = C_1(x)e^x + C_2(x)e^{2x} = -3xe^x - 3e^{-x}e^{2x} = -3e^x(x+1)\ ;$$

$$y = \widetilde{y} + y^* = C_1e^x + C_2e^{2x} - 3e^x(x+1)\ .$$