MÉTODOS NO PARAMÉTRICOS

1. Prueba Binomial

1.1. Caso General.
Dado $\boldsymbol{X} = (X_i)_{i=1}^n /\forall i : X_i \sim Bi\,(1;p)$.

$T = \sum_{i=1}^n X_i$

$T \sim Bi\,(n;p)$. Típicamente requiere aleatorizar si se desea una prueba de nivel exacto.

1.1.1. *Prueba Bilateral.*

$$H_0 : p = p_0; H_1 : p \neq p_1$$

$$\Phi\left(\boldsymbol{X}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } T > k_2 \text{ o } T < k_1 \\ 0 & \text{si } k_1 < T \leq k_2 \end{cases}$$

$$k_1; k_2 / P_{p_0}\left(k_i\right) = \alpha_i \wedge \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$$

Pareja óptima de α_i.

$$\begin{cases} P_{p_0}\left(T \leq k_1\right) + P_{p_0}\left(T > k_2\right) = \alpha \\ \mathbb{E}\left[T \cdot \Phi\left(T\right)\right] = n \cdot \alpha \cdot p_0 \end{cases}$$

valor p.

$$pv = 2 \cdot \text{mín}\left\{P\left(T \leq T_{obs}\right); P\left(T > T_{obs}\right)\right\}$$

Este fue discutido y propusimos otras alternativas.

1.1.2. *Pruebas Unilaterales3.*
Estas dos pruebas son UMP para su nivel.

- $$H_0 : p \geq p_0; H_1 : p < p_1$$
  $$\Phi\left(\boldsymbol{X}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } T \leq k \\ 0 & \text{si } T > k_1 \end{cases}$$

  $k / P_{p_0}\left(T \leq k\right) = \alpha$

  $$pv = P_{p_0}\left(T \leq T_{\text{obs}}\right)$$

- $$H_0 : p \leq p_0; H_1 : p > p_1$$
  $$\Phi\left(\boldsymbol{X}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } T > k \\ 0 & \text{si } T \leq k_1 \end{cases}$$
  $$pv = P_{p_0}\left(T > T_{\text{obs}}\right)$$

  $k / P_{p_0}\left(T > k\right) = \alpha$

Prueba Asintótica.

$$\frac{T - np}{\sqrt{np\left(1-\right)p}} \sim \mathcal{N}\left(0;1\right)$$

1.1.3. Intervalos de Confianza para Probabilidad o Proporción, de nivel exacto. Para la prueba bilateral, la A.

$$\mathcal{A} = \{T/k_1 \leq T < k_2\}$$

$$k_1 = k/P_{p_o}\left(T \leq k_1\left(p_0; \frac{\alpha}{2}\right)\right) = \frac{\alpha}{2}$$

$$k_2 = k/P_{p_o}\left(T > k_2\left(p_0; \frac{\alpha}{2}\right)\right) = \frac{\alpha}{2}$$

$$I = (\hat{p}_{Inf}; \hat{p}_{Sup})\,/$$

$$\hat{p}_{Inf} = k_2^{-1}\left(T-1; \frac{\alpha}{2}\right)$$

$\hat{p}_{Inf}/P\left[Bi\left(n; \hat{p}_{Inf}\right) \leq T-1\right] = 1 - \frac{\alpha}{2}$

$$\hat{p}_{Sup} = k_1^{-1}\left(T; \frac{\alpha}{2}\right)$$

$\hat{p}_{sup}/P\left[Bi\left(n; \hat{p}_{Sup}\right) \leq T\right] = \frac{\alpha}{2}$

Agregar Demostración.

1.1.4. Aproximación Normal, para $n > 30$.

$$\hat{p}_{Inf} = \frac{X}{n} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{1}{n}\frac{X}{n}\left(1 - \frac{X}{n}\right)}$$

$$\hat{p}_{Sup} = \frac{X}{n} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{1}{n}\frac{X}{n}\left(1 - \frac{X}{n}\right)}$$

Donde $X = T_{\text{obs}}$.

1.2. Prueba para Cuantiles.

$$H_0 : X_{p_0} = x_0$$

Traducible a[1]

$$H_0 : P\left(X \leq x_0\right) \geq p_0 \wedge P\left(X < x_0\right) \leq p_0$$

$$Y = \underset{\{X \leq x_0\}}{\mathbb{I}(x)}\,/Y \sim Bi\left(1; p\right) \wedge p = F\left(x_0\right)$$

$$Z = \underset{\{X < x_0\}}{\mathbb{I}(x)}\,/Z \sim Bi\left(1; \tilde{p}\right) \wedge \tilde{p} = P\left(X < x_0\right)$$

Volvemos a traducir las hipótesis

$$H_0 : p \geq p_0 \wedge \tilde{p} \leq p_0$$

Este problema puede ser adaptado a la prueba binomial.

$$T_1 = \sum_{i=1}^{n} Y_i \Rightarrow T_1 \sim Bi\left(n; p\right)$$

[1]En el caso continuo es directamente $P\left(X \leq x_0\right) = p_0$.

$$T_2 = \sum_{i=1}^{n} Z_i \Rightarrow T_2 \sim Bi\left(n;\tilde{p}\right)$$

1.2.1. Prueba Bilateral A.

$$H_0 : x_{p_0} = x_0$$

$$H_1 : x_{p_0} \neq x_0$$

Traducibles a

- $$H_0 : p \geq p_0 \wedge \tilde{p} \leq p_0$$
- $$H_1 : p < p_0 \vee \tilde{p} > p_0$$
- $$\Phi\left(\boldsymbol{X}\right) = \begin{cases} 1 & T_1 \geq k_1\left(p_0;\alpha_1\right) \vee T_2 > k_2\left(p_0;\alpha_2\right) \\ 0 & \text{Toc} \end{cases}$$

$\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$ y los k definidos como siempre.
$k_1 / P\left(Bi\left(n;p_0\right) \leq k_1\left(p_0;\alpha_1\right)\right) = \alpha_1$
$k_2 / P\left(Bi\left(n;p_0\right) > k_2\left(p_0;\alpha_2\right)\right) = \alpha_2$
Aproximación normal:

$$k_1\left(p_0;\alpha_1\right) = np_0 - z_{\alpha_1}\sqrt{np_0\left(1-p_0\right)}$$

$$k_2\left(p_0;\alpha_2\right) = np_0 + z_{\alpha_2}\sqrt{np_0\left(1-p_0\right)}$$

1.2.2. Prueba de mayor o igual contra menor, caso B..

$$H_0 : x_{p_0} \geq x_0$$

$$H_1 : x_{p_0} < x_0$$

Podemos buscar las equivalentes en el caso continuo:

- $$H_0 : \tilde{p} \leq p_0$$
- $$H_1 : \tilde{p} > p_0$$
- $$\Phi\left(\boldsymbol{X}\right) = \begin{cases} 1 & T_2 > k\left(p_0;\alpha\right) \\ 0 & \text{Toc} \end{cases}$$

$k / P\left(Bi\left(n;p_0\right) > k\left(p_0;\alpha\right)\right) = \alpha$

1.2.3. Menor o igual contra mayor, C..

- $$H_0 : p \geq p_0$$
- $$H_1 : p < p_0$$
- $$\Phi(\boldsymbol{X}) = \begin{cases} 1 & T_1 \leq k(p_0;\alpha) \\ 0 & \text{Toc} \end{cases}$$

$k/P(Bi(n;p_0) \leq k(p_0;\alpha)) = \alpha$

1.2.4. Intervalo De Confianza.

$$\left(X^{(r)};X^{(s)}\right)/P\left(X^{(r)} \leq x_p \leq X^{(s)}\right) = 1-\alpha$$

Método A:. $k_1/P(Bi(n;p_0) \leq k_1(p_0;\alpha/2)) = \frac{\alpha}{2}$
$k_2/P(Bi(n;p_0) > k_2(p_0;\alpha/2)) = \frac{\alpha}{2}$

$$\left[X^{(r)};X^{(s)}\right]$$

- El razonamiento tras esto es que la probabilidad de que $x_{p_0} < X^{(r)}$ (complemento de la deseada) es la probabilidad de que los primeros r elementos sean menores a x_{p_0} es decir la suma de los primeros r casos de la binomial ajustando $r-1$ para lograr probabilidad $\alpha_1 = \frac{\alpha}{2}$. Idénticamente se ajusta n para que los últimos casos de s a n totalicen probabilidad $\alpha_2 = \frac{\alpha}{2}$, ubicando $X^{(s)} > x_{p_0}$ con probabilidad α_2. La probabilidad deseada es $1-\alpha_1-\alpha_2 = 1-\alpha$.

Método B, asintótico: $k_1(p_0;\alpha/2) = np_0 - z_{\alpha/2}\sqrt{np_0(1-p_0)}$
$k_2(p_0;\alpha/2) = np_0 + z_{\alpha/2}\sqrt{np_0(1-p_0)}$.
$r = [k_1]+1$ y $s = [k_2]+1$.

$$\left[X^{(r)};X^{(s)}\right]$$

1.3. Límites de Tolerancia.

Definición 1. Un límite de tolerancia es un intervalo que contiene una proporción de la poblaciónl con alta probabilidad, $1-\alpha$.

$$n/P\left(\frac{\#\left\{i/X_i \in \left[X^{(r)};X^{(n+1-m)}\right]\right\}}{n} = q\right) \geq 1-\alpha$$

1.3.1. Desarrollo del Problema. Es similar al intervalo de confianza, por ejemplo para el caso uniltareal:

$$P\left(x_q \leq X^{(n+1-m)}\right) \geq 1-\alpha$$

Esta probabilidad es la suma de las probabilidades de los primeros $n-m+1$ valores de una variable binomial $Bi(q;n)$

$$n/P(Bi(n;q) \leq n-m) \geq 1-\alpha$$

Para el otro unilateral

$$n/P\left(Bi\left(n;1-q\right)\leq n-m\right)\geq\alpha$$

Bilateral

$$n/P\left(Bi\left(n;1-q\right)\leq r+m-1\right)\leq\alpha$$

2. Prueba del Signo

Definición 2. Familia Ω_0.

$$F\in\Omega_0\Leftrightarrow F\left(0\right)=\frac{1}{2};0\in\mathcal{C}\left(F\right);0\in C\uparrow\left(F\right)=\mathbb{R}$$

Es decir, funciones de mediana única en 0, absolutamente continuas y crecientes en 0.

2.1. Modelo de Posición.

2.1.1. A.

$$X\sim F\left(x-\theta\right)$$

$$H_0:\theta=0$$

$$H_1:\theta\neq0$$

Observación 3. Ambas alternativas son compuestas.

$s\left(X_i\right)=\underset{\{x/x>0\}}{\mathbb{I}}$

$$S=\#\left\{i/X_i>0\right\}=\sum s\left(X_i\right)$$

$$\Phi\left(\boldsymbol{X}\right)=1\Leftrightarrow S\leq k\vee S\geq n-k$$

$$k/P\left(Bi\left(n;\frac{1}{2}\right)\leq k\right)=\frac{\alpha}{2}$$

Versión Asintótica.

$$k=\frac{n}{2}-z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{n}{4}}$$

2.1.2. B.

$$H_0:\theta=0$$

$$H_1:\theta<0$$

$$\Phi\left(\boldsymbol{X}\right)=1\Leftrightarrow S\leq k$$

$$k/P\left(Bi\left(n;\frac{1}{2}\right)\leq k\right)=\alpha$$

O bien

$$k=\frac{n}{2}-z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{n}{4}}$$

2.1.3. C.

$$H_0 : \theta = 0$$

$$H_1 : \theta > 0$$

$$\Phi(\boldsymbol{X}) = 1 \Leftrightarrow S \geq k$$

$$k/P\left(Bi\left(n; \frac{1}{2}\right) \geq k\right) = \alpha$$

O bien

$$k = \frac{n}{2} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{n}{4}}$$

2.2. Bajo H_0, S es de distribución libre.

2.3. La prueba es IUMP para la hipótesis bilateral y UMP para las unilaterales.

2.3.1. Función de potencia asintótica para el caso unilateral C.

$$\pi(\theta) = P_\theta(S \geq k) = P_\theta(Bi(n; p) \geq k)$$

$p = P_\theta(X > 0) > \frac{1}{2}$
Esta función de potencia es una función creciente de p.
Para n grande bajo H_1, $\theta_1 > 0$

$$\frac{S - n(1 - F(-\theta_1))}{\sqrt{nF(-\theta_1) \cdot (1 - F(-\theta_1))}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0; 1)$$

2.4. Prueba del Signo.

2.4.1. Hipótesis.

$$\{(X_i; Y_i)\}_{i=1}^{n} / D_i = Y_i - X_i$$

$$S = \#\{i/D_i > 0\}$$

$$P(D_i = 0) = 0$$

Esta prueba permite estudiar la diferencia entre las medianas de dos muestras $\boldsymbol{X}$ e $\boldsymbol{Y}$.

Este diseño reduce la comparación de muestras a la prueba binomial sobre la nueva variable $\boldsymbol{D}$, siendo $S = \sum D_i$.

- Los empates se eliminan. Esto resulta en una prueba conservadora.

*****Ya que se reduce la probabilidad de error de tipo I y se pierde potencia.

2.4.2. Caso A, prueba bilateral.

$$H_0 : P(X_i > 0) = P(X_i < 0)$$

$$H_1 : P(X_i > 0) \neq P(X_i < 0)$$

2.4.3. Caso B..

$$H_0 : P(X_i > 0) \geq P(X_i < 0)$$

$$H_1 : P(X_i > 0) < P(X_i < 0)$$

2.4.4. Caso C.

$$H_0 : P(X_i > 0) \leq P(X_i < 0)$$

$$H_1 : P(X_i > 0) > P(X_i < 0)$$

2.4.5. Prueba para diferencia de medianas. En este caso, las parejas provienen de una población de pares, donde uno de los elementos del par cumple la condición cuyo efecto en la mediana se quiere estudiar.

$D_i \sim F_i$

Sea $D_i \sim G_i$ bajo H_0 .

$$F_i(x) = G_i(x - \Delta)$$

$P(D_i = 0) = 0$

Observación 4. La hipótesis es sobre la mediana de las diferencias y no la diferencia entre medianas.