étricos/amsart.cfg

CLASE 2: PRUEBA BINOMIAL

1. Ejemplo en el Apunte

1.1. ¿Por qué la prueba del ejemplo es UMP?.

Definición 1. Una familia de distribuciones $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R} : f(x;\theta)$ se llama de cociente de verosimilitud monótono en $T = r(\boldsymbol{x})$ si $\forall \theta_1 < \theta_2$ si

1. $f(x;\theta_1) \neq f(x;\theta_2)$.
2. $\frac{f(x;\theta_2)}{f(x;\theta_1)} = g_{\theta_1;\theta_2}(T)$, con g no decreciente en $S = \{T : t = t(\boldsymbol{x}); f(x;\theta) > 0\}$.

El ejemplo usual es que toda familia exponencial cumple esto cuando $c(\theta)$ es creciente.

Teorema 2. *Si X con función de densidad o probabilidad puntual $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$: $f(x;\theta)$ tiene CVM entonces:*

1. $\exists k_\alpha; \gamma_\alpha$ tales que $\Phi(\boldsymbol{X}) = \begin{cases} 1 & T > k_\alpha \\ \gamma_\alpha & T = k_\alpha \\ 0 & T < k_\alpha \end{cases}$ y $\beta_\Phi(\theta_0) = \alpha$. Esta prueba es UMP para hipótesis del tipo igual contra mayor.
2. La función de potencia es monótona no decreciente. Es estrictamente creciente $\forall \theta / \pi(\theta) \in (0;1)$.
3. Φ es también UMP de nivel $\leq \alpha$ para menor o igual contra mayor.

Observación 3. Para armar los $p$valores consideramos que las desigualdades no se portan igual: para menor es menor o igual pero para mayor es una desigualdad estricta.

Definición 4. Generalizada del $p$valor[1]:

$$p \leq \alpha \Leftrightarrow T_{obs} \in RR$$

1.2. Justificación para la prueba bilateral de su condición de IUMP..

- Hay que acudir al Lehman dominando la teoría de la medida.

Si queremos que sea de nivel α,

- $$\mathbb{E}_{p_0}[\Phi(\boldsymbol{X})] = \alpha$$

Para lograr que sea insesgado:

$$\forall p \neq p_0 : \mathbb{E}_p[\Phi(\boldsymbol{X})] \geq \alpha$$

(En un gráfico de la potencia, hay una cima cuando toma el valor α para el parámetro p_0).

La función de potencia de una binomial $\beta(p)$ es una función continua sencilla.

Por lo razonado gráficamete ,para que sea insesgadao en p_0 hay un mínimo absoluto.

- $$\beta'(p_0) = 0$$

Esta es una condición necesaria pero no suficiente.

1.2.1. *Punto Crítico en la Función de potencia $\beta(p)$ de una familia exponencial.*

Generalizamos a una familia exponencial. $T \sim A(\theta) e^{c(\theta)t} h(t)$.

$$\beta(\theta) = \mathbb{E}_p[\Phi(\boldsymbol{X})] = \int \Phi(t) \left[A(\theta) e^{c(\theta)t} h(t)\right] dt$$

$$\beta(\theta) = A(\theta) \int \Phi(t) \left[e^{c(\theta)t} h(t)\right] dt$$

Derivemos según θ, en particular dentro del signo de la integral para el segundo término

$$\beta'(\theta) = -c'(\theta)\,\mathbb{E}(T)\,\mathbb{E}(\Phi(T)) + c'(\theta)\,\mathbb{E}(T\cdot\Phi(T))$$

Sabemos que es nula porque hay un extremo en $\theta = p_0$.

$$\beta'(p_0) = -c'(p_0)\,\mathbb{E}(T\cdot\Phi(T))\,\mathbb{E}(\Phi(T)) + c'(p_0)\,\mathbb{E}(T) = 0$$

$$c'(p_0)\left[-\mathbb{E}(T)\,\mathbb{E}(\Phi(T)) + \mathbb{E}(T\cdot\Phi(T))\right] = 0$$

Como es familia exponencial (hace falta pedir CVM? acá ella dijo «pensemos solo en la binomial») entonces $c'(p_0) \neq 0$.

$c'(p_0) \neq 0 \Rightarrow$

$$\mathbb{E}(T\cdot\Phi(T)) = \mathbb{E}(T)\cdot\underbrace{\mathbb{E}(\Phi(T))}_{\beta(p_0)}$$

T es binomial

$$\mathbb{E}(T\cdot\Phi(T)) = np_0\cdot\alpha$$

1.2.2. Verificamos que la segunda ecuación equivale a esta expresión: $P(k_1 \leq Bi(n-1;p_0) < k) = 1-\alpha$.

$$\mathbb{E}_{p_0}[T\cdot\Phi(T)] = n\alpha p_0$$

$$\mathbb{E}_{p_0}[T\cdot\Phi(T) - T + T] = n\alpha p_0$$

$$\mathbb{E}_{p_0}\{T\cdot[\Phi(T)-1] + T\} = n\alpha p_0$$

$$\mathbb{E}_{p_0}\{T\cdot[\Phi(T)-1]\} + \underbrace{\mathbb{E}_{p_0}(T)}_{np_0} = n\alpha p_0$$

$$\mathbb{E}_{p_0}\{T\cdot[\Phi(T)-1]\} = n(\alpha-1)\,p_0$$

$$\mathbb{E}_{p_0}\{(-1)\,T\cdot[1-\Phi(T)]\} = n(-1)(\alpha-1)\,p_0$$

$$\mathbb{E}_{p_0}\{T\cdot[1-\Phi(T)]\} = n(1-\alpha)\,p_0$$

Trabajamos con $\mathbb{E}_{p_0}\{T\cdot[1-\Phi(T)]\} =$

$T \sim Bi(n;p_0)$

$$\Phi(T) = \begin{cases} 1 & T \leq k_1 \vee T > k_2 \\ 0 & k_1 < T \leq k_2 \end{cases}$$

$$\mathbb{E}_{p_0}\{T\cdot[1-\Phi(T)]\} = \sum_{k=0}^{n} k\,(1-\Phi(k))\binom{n}{k}p_0^k\,(1-p_0)^{n-k}$$

Separamos por casos, si $k_1 < T \leq k_2$ entonces $\Phi(T) = 0$,

$$\mathbb{E}_{p_0}\{T\cdot[1-\Phi(T)]\} = \sum_{k_1<k\leq k_2} k\,(1-\Phi(k))\binom{n}{k}p_0^k\,(1-p_0)^{n-k} + 0$$

$$\mathbb{E}_{p_0}\left\{T\cdot\left[1-\Phi\left(T\right)\right]\right\}=\sum_{k=k_1+1}^{k_2}\cancel{k}\frac{n!}{\underbrace{\cancel{k!}}_{k-1!}\left(n-k\right)!}p_0^k\left(1-p_0\right)^{n-k}$$

$s=k-1$
$r=s+1$

$$\mathbb{E}_{p_0}\left\{T\cdot\left[1-\Phi\left(T\right)\right]\right\}=\sum_{s=k_1+1}^{k_2}\frac{n!}{s!\left(n-s-1\right)!}p_0^{s+1}\left(1-p_0\right)^{n-(s+1)}$$

$$\mathbb{E}_{p_0}\left\{T\cdot\left[1-\Phi\left(T\right)\right]\right\}=np_0\sum_{s=k_1+1}^{k_2}\underbrace{\frac{(n-1)!}{s!\left(n-1-s\right)!}}_{\binom{n-1}{s}}p_0^{s}\left(1-p_0\right)^{(n-1)-s}$$

$$\mathbb{E}_{p_0}\left\{T\cdot\left[1-\Phi\left(T\right)\right]\right\}=np_0P\left(k_1\leq Bi\left(n-1;p_0\right)\leq k_2-1\right)$$

$$\mathbb{E}_{p_0}\left\{T\cdot\left[1-\Phi\left(T\right)\right]\right\}=np_0P\left(k_1\leq Bi\left(n-1;p_0\right)< k_2\right)$$

Hab'iamos llamado $\mathbb{E}_{p_0}\left\{T\cdot\left[1-\Phi\left(T\right)\right]\right\}=np_0\left(1-\alpha\right)$

$$np_0\left(1-\alpha\right)=np_0P\left(k_1\leq Bi\left(n-1;p_0\right)< k_2\right)$$

- $$1-\alpha=P\left(k_1\leq Bi\left(n-1;p_0\right)< k_2\right)$$

Tenemos el complemento de la probabilidad que queríamos asegurar, para el conjunto complementario a H_0.
Las condiciones quedan así.

$$\begin{cases}1-\alpha=P\left(k_1< Bi\left(n;p_0\right)\leq k_2\right)\\ 1-\alpha=P\left(k_1\leq Bi\left(n-1;p_0\right)< k_2\right)\end{cases}$$

- Lo que no demostramos es que es IUMP.

1.2.3. Secciones del Lehman que justifican la condición de IUMP..

- Lehmann: *Testing Statistical Hypothesis.*

El primer problema es obtener α en una distribución discreta.

$$\Phi\left(T\right)=\begin{cases}1 & T<k_1\vee T>k_2\\ \gamma_1 & T=k_1\\ \gamma_2 & T=k_2\\ 0 & k_1<T<k_2\end{cases}$$

Donde los parámetros γ_i y k_i están determinados por $\mathbb{E}_{p_0}\left[\Phi\left(X\right)\right]=\alpha$ y $\mathbb{E}_{p_0}\left[T\cdot\Phi\left(T\right)\right]=\mathbb{E}_{p_0}\left[\Phi\left(T\right)\right]\alpha$.

- Págs 111,112 y lo más importante en la bala de abajo.
- Si $\alpha_1=\alpha_2=\frac{\alpha}{2}\Leftrightarrow\gamma_1=\gamma_2$ y k_1 y k_2 son simétricos[2]: $k_2=2a-k_1$[3] . Hay que considerar las desigualdades estrictas y no estrictas para identificar bien los percentiles.

---

[2]En nuestro caso, $p_0=\frac{1}{2}$ en la binomial.
[3]Él usa desigualdades estrictas.

$$k_2 = n - (k_1 + 1)$$

1.3. Pe-va Perón: Discutimos la definición de p valor para prueba bilateral.

$p \leq \alpha \Leftrightarrow$ rechazar $H_0 \Leftrightarrow T_{obs} \in RR$

La docente no concuerda con la deifnicnión del apunte porque, por ejemplo

Suponemos $\alpha_2 < \alpha_1$.

La región de rechazo es abierta en el máximo k_2 y cerrada en k_1.

Al tomar el doble del mínimo estamos perdiendo una parte de la región de rechazo en algunos casos.

con ese mínimo, si ese es k_2

$$pv = 2P\left(T > \underbrace{T_{\text{obs}}}_{k_2}\right) = 2\alpha_2 < \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$$

Es absurdo no lograr que las regiones se complementen.

- Si son iguales es sensato.
- Pareciera que puede definirse los demás casos con una función por ramas.

2. Intervalos de Confianza

2.1. Relación con la prueba bilateral.

$$T = \sqrt{n}\frac{\overline{X}_n - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}$$

Para pivotear, aproximamos p_0.

$$T = \sqrt{n}\frac{\overline{X}_n - p_0}{\sqrt{\overline{X}_n(1-\overline{X}_n)}}$$

Intervalo asintótio

$$1 - \alpha = \lim_n P\left(-z_{\alpha/2} \leq \sqrt{n}\frac{\overline{X}_n - p_0}{\sqrt{\overline{X}_n(1-\overline{X}_n)}} \leq z_{\alpha/2}\right)$$

$$1 - \alpha = \lim_n P\left(\overline{X}_n - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\overline{X}_n(1-\overline{X}_n)}{n}} \leq p \leq \overline{X}_n + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\overline{X}_n(1-\overline{X}_n)}{n}}\right)$$

Despejamos $\overline{X}_n$.

$$1 - \alpha = \lim_n P\left(p_0 - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} \leq \overline{X}_n \leq p_0 + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}\right)$$

Esta probabilidad es la de la región de aceptación.

$$\overline{X}_n \leq p_0 + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\overline{X}_n(1-\overline{X}_n)}{n}}$$

$$\overline{X}_n - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\overline{X}_n(1-\overline{X}_n)}{n}} \leq p_0$$

El p valor es el extremo inferior del intervalo de confianza. $\hat{p}_L$.

Observación 5. Como estamos obligados a tomar los valores posibles de α para una distribución discreta, ambas cotas son de menor o igual y el intervalo es en general más amplio que lo deseado.

2.1.1. Por qué ambos extremos k_i crecen con p: Al incrementar este parámetro disminuye el área bajo la cola izquierda y corremos k_1 a la derecha para incrementarla y se incrementa el área de la cola derecha con lo cual para reducirla incrementamos k_2. La región de aceptación es

$$\mathcal{A} = \{T : k_1(p_0) < T \leq k_2(p_0)\}$$

$$\mathcal{A} = \{p_0 : \hat{p}_{inf} < p_0 \leq \hat{p}_{sup}\}$$

Acá hay una disquisición sobre cómo se justifica el despeje pero el procedimiento es simple

$$T = k_2(p) + 1$$

$$T - 1 = k_2(p)$$

Quiero el p que tiene ese borde.

$$P_{\hat{p}_{inf}}(B(n;p) > T - 1) \leq \frac{\alpha}{2}$$

Análogamente

$$k_1(\hat{p}_{sup}) = T$$

$$P_{\hat{p}_{sup}}(B(n;p) \leq T) \leq \frac{\alpha}{2}$$

- En el algoritmo, por el fenómeno estudiando antes, quedan determinadas las búsquedas. Se busca el primer $\hat{p}_{sup}$ para el cual $P_{\hat{p}_{sup}}(B(n;p) \leq T) \leq \frac{\alpha}{2}$ y el último $\hat{p}_{inf}$ para el cual $P(B(n;\hat{p}_{inf}) \leq T-1) \geq 1 - \frac{\alpha}{2}$.

Ejercicio 6. Revisar el programa.

La docente considera que no es correcto restarle al índice. `lup` debería ser a_i.

3. Cuantiles

La definición muestra que como puede ser discontinua en el punto, sobre él precisamente puede ser mayor pero al sustraer el punto del intervalo considerado pasa a ser menor, así aseguramos que es a lo sumo la primera que acumula más que p[4].

En las discretas puede haber infinitos valores porque no es estrictamente creciente.

- La prueba construye dos bernoulli para probar los dos intervalos de la definición, el semiabierto y el cerrado.

[4]Recordar que sólo pedimos continuidad por izquierda al definir la función de diostribución acumulada F.

3.1. ¿Por qué vale en el caso continuo? Afirmar que las hipótesis
$x_0 \leq x_{p_0} \Leftrightarrow \tilde{p} \leq p_0$
Donde $\tilde{p} = P(X \leq x_0)$ y $p_0 / \begin{cases} P(X \leq x_0) \geq p_0 \\ P(X < x_0) \leq p_0 \end{cases}$

$$p_0 / \begin{cases} P(X \leq x_0) \geq p_0 \\ P(X < x_0) \leq p_0 \end{cases} \quad \Leftarrow F(x_0) = p_0$$

Demostración. Ida

$$x_0 \leq x_{p_0} \leq \underbrace{P(X < x_0)}_{\tilde{p}} \leq \underbrace{P(X \leq x_{p_0})}_{p_0}$$

no fue necesaria la continuidad □

Demostración. vuelta

$$\underbrace{\tilde{p}}_{P(X<x_0)} \leq \underbrace{p_0} \leq P(X \leq x_{p_0})$$

con continuidad

$$P(X < x_0) \leq F(x_{p_0})$$

Por axiomas de cotniudad conjj de medida nula

$$F(x_0) \leq F(x_{p_0})$$

$$x_0 \leq x_{p_0}$$

□