Práctica 4

Gonzalo Barrera Borla

28/10/2019

Parte 2

Ejercicio 6

> Sea x un vector aleatorio de dimensión p con media 0 y matriz de covarianza $\Sigma = (\sigma_{jk})$, donde todas las covarianzas σ_{jk}, $j \neq k$ son positivas. Sea t_1 un autovector de norma 1 correspondiente al mayor autovalor, mostrar que todos sus coeficientes son o bien positivos o bien negativos.

Por conveniencia, llamemos $[p] = \{1, 2, \ldots, p\}$ al conjunto de enteros positivos desde 1 hasta p. Como $\sigma_{jj} = \mathrm{Var}\left(\mathrm{x}_j\right) > 0 \; \forall \; j \in [p] \Rightarrow \sigma_{jk} > 0 \; \forall \; (j,k) \in [p]^2$, y todos los elementos de Σ son estrictamente positivos. Además, $\Sigma = \Sigma^{\mathsf{T}}$(es simétrica) con mayor autovalor λ, y por ende se cumple que (Seber 1977, A.7.2)

$$\max_{\mathrm{x}:\|\mathrm{x}\|=1} \mathrm{x}^{\mathsf{T}} \Sigma \mathrm{x} = \lambda$$

que se alcanza cuando x es un autovector asociado a λ.

Consideremos un vector $\gamma \in \mathbb{R}^p : \gamma_j = |\mathrm{t}_{1j}| \; \forall \; j \in [p]$, con cada componente igual al valor absoluto del respectivo componente en t_1. Nótese que $\|\gamma\| = \|\mathrm{t}_1\| = 1$. Por un lado,

$$0 \leq \gamma^{\mathsf{T}} \Sigma \gamma \leq \mathrm{t}_1^{\mathsf{T}} \Sigma \mathrm{t}_1 = \max_{\mathrm{x}:\|x\|=1} \mathrm{x}^{\mathsf{T}} \Sigma \mathrm{x} = \lambda$$

y por otro, usando que (a) $\sum_i |x_i| \geq |\sum_i x_i|$ y (b) si $x > 0 \Rightarrow |x| = x$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\gamma^{\mathsf{T}} \Sigma \gamma &= \sum_{(i,j)\in[p]^2} \gamma_i \gamma_j \sigma_{ij} = \sum_{(i,j)\in[p]^2} |\mathrm{t}_{1i}| \, |\mathrm{t}_{1j}| \, \sigma_{ij} = \sum_{(i,j)\in[p]^2} |\mathrm{t}_{1i} \cdot \mathrm{t}_{1j} \cdot \sigma_{ij}| \\
&\geq \left| \sum_{(i,j)\in[p]^2} \mathrm{t}_{1i} \cdot \mathrm{t}_{1j} \cdot \sigma_{ij} \right| = \left| \mathrm{t}_1^{\mathsf{T}} \Sigma \mathrm{t}_1 \right| = \mathrm{t}_1^{\mathsf{T}} \Sigma \mathrm{t}_1 = \lambda
\end{aligned}$$

Tenemos entonces que $\lambda \leq \gamma^{\mathsf{T}}\Sigma\gamma \leq \lambda$, que sólo es posible si $\gamma^{\mathsf{T}}\Sigma\gamma = \lambda$. Luego, $\gamma^{\mathsf{T}}\Sigma\gamma = \max_{\mathrm{x}:\|x\|=1} \mathrm{x}^{\mathsf{T}}\Sigma \mathrm{x}$ y por ende γ (al igual que t_1) es un autovector de norma 1 asociado al mayor autovector de Σ, y podemos escribir $\Sigma\gamma = \lambda\gamma$. En particular, si $\exists j \in [p] : \gamma_j = 0$, entonces $0 = \lambda\gamma_j = (\Sigma\gamma)_j = \sum_{l\in[p]} \sigma_{jl}\gamma_l$, y como todo $\sigma_{jl} > 0$, esto sólo es posible si todo $\gamma_l = 0$ y por ende $\|\gamma\| = 0$, cuando ya establecimos que $\|\gamma\| = 1$. Esto es un absurdo al que llegamos por suponer que algún componente de γ era igual a 0. Luego $\gamma_l > 0 \, \forall \, l \in [p]$, y en consecuencia $\mathrm{t}_{1l} \neq 0 \, \forall \, l \in [p]$.

Consideremos ahora t_{1j}, la j-ésima componente de t_1, de modo que $\lambda \mathrm{t}_{1j} = \sum_{l\in[p]} \sigma_{jl} \cdot \mathrm{t}_{1l}$, y supongamos que $\mathrm{t}_{1j} < 0$ para cierto j, de modo que $\mathrm{t}_{1j} + |\mathrm{t}_{1j}| = \mathrm{t}_{1j} + \gamma_j = 0$. Luego, $0 = \lambda\left(\mathrm{t}_{1j} + \gamma_j\right) = \sum_{l=1}^{p} \sigma_{jl}\left(\mathrm{t}_{1l} + |\mathrm{t}_{1l}|\right)$, donde

$$\mathrm{t}_{1l} + |\mathrm{t}_{1l}| = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathrm{t}_{1l} < 0 \\ 2\mathrm{t}_{1l} > 0 & \text{si } \mathrm{t}_{1l} > 0 \end{cases}$$

y como todo $\sigma_{jl} > 0 \Rightarrow \mathrm{t}_{1l} < 0 \, \forall \, l \in [p]$. Un argumento análogo partiendo del supuesto de que $\mathrm{t}_{1j} > 0$ para cierto j nos lleva a concluir que $\mathrm{t}_{1l} > 0 \forall l \in [p]$. Finalmente, hemos probado que (i) ninguna componente de t_1 puede ser nula, y (ii) todas las componentes de t_1t tienen el mismo signo, lo cual concluye la demostración.

Referencias

- Teorema de Perron-Frobenius
- Ninio, F. (1976). *A simple proof of the Perron-Frobenius theorem for positive symmetric matrices*, J. Phys. A: Math. Gen.. Vol. 9. No. 8, 1976.
- Seber, G. A. F. (1977). Linear Regression Analysis. Wiley: New York.