# Práctica 1

Gonzalo Barrera Borla

03/09/2019

## Parte 1

### Ejercicio 10

Sea $\mathrm{x} \sim N_p(0, \mathrm{I}_p)$ donde $p = 10$.

1. Sea $D$ la distancia de x al centro de la distribución, en este caso 0. Calcule $\mathbb{E}\big(D^2\big)$.
2. Sean $\mathrm{x}_i \overset{iid}{\sim} \mathrm{x}$, $1 \leq i \leq n$ una muestra aleatoria de x y sea $\mathrm{x}_0 \sim \mathrm{x}$ independiente de $\mathrm{x}_i \forall\, 1 \leq i \leq n$.
   (a) ¿Qué distribución tiene $\mathrm{x}_0^\mathsf{T}\mathrm{x}_i / \left\|\mathrm{x}_0\right\|$?
   (b) Calcule la distancia al cuadrado esperada entre el centro de los datos y $\mathrm{x}_0$ dado $\mathrm{x}_0$, es decir $\mathbb{E}\left(\left\|\bar{\mathrm{x}} - \mathrm{x}_0\right\|^2 \middle| \mathrm{x}_0\right)$.
   (c) Deduzca el valor de $\mathbb{E}\left(\left\|\bar{\mathrm{x}} - \mathrm{x}_0\right\|^2\right)$ ¿Qué observa?

#### Punto 1

$$
\begin{aligned}
D = \|\mathrm{x} - \mu\| = \|\mathrm{x} - 0\| = \|\mathrm{x}\| &= \sqrt{\mathrm{x}^\mathsf{T}\mathrm{x}} \\
\Rightarrow \mathbb{E}\left(D^2\right) = \mathbb{E}\left(\mathrm{x}^\mathsf{T}\mathrm{x}\right) &= \mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^{p} x_j^2\right) \\
&= \sum_{j=1}^{p} \mathbb{E}\left(x_j^2\right)
\end{aligned}
$$

Por definición, las componentes de x tienen distribución $x_j \overset{iid}{\sim} N_1(0,1) \Rightarrow x_j^2 = y_j \overset{iid}{\sim} \chi_1^2$. Luego, $\sum_{j=1}^{p} y_j = D^2 \sim \chi_p^2$ y $\mathbb{E}\left(D^2\right) = p$.

#### Punto 2(a)

Sean el vector aleatorio $\mathrm{v} = \frac{\mathrm{x}_0}{\|\mathrm{x}_0\|}$ de norma 1 y la variable aleatoria $\mathrm{w} = \frac{\mathrm{x}_0^\mathsf{T}\mathrm{x}_i}{\|\mathrm{x}_0\|} = \mathrm{v}^\mathsf{T}\mathrm{x}_i$. Luego, la variable aleatoria $\mathrm{w}\big|_{\mathrm{v}=\mathrm{v}_0}$ se puede escribir como una combinación lineal de VA normales independientes, $\mathrm{w}\big|_{\mathrm{v}=\mathrm{v}_0} = \sum_{j=1}^{p} v_j \cdot x_{ij}$, donde $\mathrm{v}_0 = (v_1, \ldots, v_p)$. Usando el resultado de 1.1.1, tenemos que $\mathrm{w}\big|_{\mathrm{v}=\mathrm{v}_0} \sim N\left(\mu_0, \sigma_0^2\right)$ , con

$$
\begin{aligned}
\mu_0 &= \sum_{j=1}^{p} \mathrm{v}_j \mathbb{E}\left(x_{ij}\right) = 0 \\
\sigma_0^2 &= \sum_{j=1}^{p} \mathrm{v}_j^2 \mathrm{Var}\left(x_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{p} \mathrm{v}_j^2 = \|\mathrm{v}\| = 1
\end{aligned}
$$

Resulta entonces que $\mathrm{w}\big|_{\mathrm{v}=\mathrm{v}_0} \sim N(0,1)\ \forall\, \mathrm{v}_0$, con lo cual w es independiente de v, y haciendo un abuso de notación, $\frac{\mathrm{x}_0^{\mathsf{T}}\mathrm{x}_i}{\|\mathrm{x}_0\|} = \mathrm{w} \sim \mathrm{w}\big|\mathrm{v} \sim N(0,1)$.

**Punto 2(b)** Consideremos el vector de constantes $\mathrm{a} \in \mathbb{R}^p$ y usemos la linealidad de la esperanza para operar. Recordemos además que como $\bar{\mathrm{x}} \perp \mathrm{x}_0 \Rightarrow \mathbb{E}\left(\bar{\mathrm{x}}\big|\mathrm{x}_0\right) = \mathbb{E}\left(\bar{\mathrm{x}}\right)$ :

$$
\begin{aligned}
g(\mathrm{a}) &= \mathbb{E}\left(\|\bar{\mathrm{x}} - \mathrm{x}_0\|^2 \big| \mathrm{x}_0 = \mathrm{a}\right) \\
&= \mathbb{E}\left((\bar{\mathrm{x}} - \mathrm{a})^{\mathsf{T}} (\bar{\mathrm{x}} - \mathrm{a})\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\|\bar{\mathrm{x}}\|^2 - 2\bar{\mathrm{x}}^{\mathsf{T}}\mathrm{a} + \|\mathrm{a}\|^2\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\|\bar{\mathrm{x}}\|^2\right) - 2\mathbb{E}\left(\bar{\mathrm{x}}\right)^{\mathsf{T}} \mathrm{a} + \|\mathrm{a}\|^2
\end{aligned}
$$

Por el mismo resultado 1.1.1, sabemos que $\bar{\mathrm{x}} \sim N_p\left(0, n^{-1}\mathrm{I}_p\right)$, y por ende $\sqrt{n}\bar{\mathrm{x}} \sim N_p\left(0, \mathrm{I}_p\right)$. Luego, $\|\sqrt{n}\bar{\mathrm{x}}\|^2 = |\sqrt{n}|^2 \|\bar{\mathrm{x}}\|^2 = n\|\bar{\mathrm{x}}\|^2 \sim \chi_p^2$ y resulta que $\mathbb{E}\left(\|\bar{\mathrm{x}}\|^2\right) = \frac{p}{n}$. Finalmente, $\mathbb{E}\left(\|\bar{\mathrm{x}} - \mathrm{x}_0\|^2 \big|\mathrm{x}_0\right) = g(\mathrm{x}_0) = \frac{p}{n} + \|\mathrm{x}_0\|^2$.

**Punto 2(c)** Usando que $\mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(X\big|Y\right)\right) = \mathbb{E}(X)$ y que $\|\mathrm{x}_0\|^2 = D^2 \sim \chi_p^2$, vemos que

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\|\bar{\mathrm{x}} - \mathrm{x}_0\|^2\right) &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left(\|\bar{\mathrm{x}} - \mathrm{x}_0\|^2 \big|\mathrm{x}_0\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\left(g(\mathrm{x}_0)\right) \\
&= \mathbb{E}\left[\tfrac{p}{n} + \|\mathrm{x}_0\|^2\right] \\
&= \tfrac{p}{n} + \mathbb{E}\left(\|\mathrm{x}_0\|^2\right) \\
\mathbb{E}\left(\|\bar{\mathrm{x}} - \mathrm{x}_0\|^2\right) &= \frac{(n+1)\,p}{n}
\end{aligned}
$$

Es decir que $\mathbb{E}\left(\|\bar{\mathrm{x}} - \mathrm{x}_0\|^2\right) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}\left(\|\mathrm{x}_0\|^2\right) = p$. El centro de los datos (*id est*, de la muestra), $\bar{\mathrm{x}}$, tenderá a coincidir con el centro de la distribución (*id est*, de la población), $\mu = 0$, y la distancia cuadrada de un elemento cualquiera $\mathrm{x}_0$ a $\bar{\mathrm{x}}$ será igual a su norma cuadrada.