Recapitulemos

Queremos elegir un test ϕ basado en un estadístico T y una región crítica $\mathcal{R}$ de tal manera que:

la probabilidad de error tipo I sea pequeña para todo $\theta \in \Theta_0$ y al mismo tiempo la probabilidad de error tipo II sea pequeña para todo valores $\theta \in \Theta_1$.

¿Siempre es posible hacer pequeñas estas dos probabilidades para todo todo θ en los conjuntos respectivos Θ_0 y Θ_1?

Andamiaje de Neyman-Pearson

Usemos la forma compacta del test

$$\phi\left(X_1, \ldots, X_n\right) = \mathbb{I}_{\mathcal{R}}\left(T\left(X_1, \ldots, X_n\right)\right)$$

y supongamos que queremos que probabilidad de error tipo I sea pequeña para todo $\theta \in \Theta_0$.

Andamiaje de Neyman-Pearson

Usemos la forma compacta del test

$$\phi\left(X_1, \ldots, X_n\right) = \mathbb{I}_{\mathcal{R}}\left(T\left(X_1, \ldots, X_n\right)\right)$$

y supongamos que queremos que probabilidad de error tipo I sea pequeña para todo $\theta \in \Theta_0$. Entonces, nos enfocamos en

$$\pi_\phi(\theta) = \mathbb{P}_\theta(\phi(\mathbf{X}) = 1) \qquad \theta \in \Theta_0$$

Andamiaje de Neyman-Pearson

Usemos la forma compacta del test

$$\phi\left(X_1, \ldots, X_n\right) = \mathbb{I}_{\mathcal{R}}\left(T\left(X_1, \ldots, X_n\right)\right)$$

y supongamos que queremos que probabilidad de error tipo I sea pequeña para todo $\theta \in \Theta_0$. Entonces, nos enfocamos en

$$\pi_\phi(\theta) = \mathbb{P}_\theta(\phi(\mathbf{X}) = 1) \quad \theta \in \Theta_0$$

Como ϕ es binaria resulta que

$$\pi_\phi(\theta) = \mathbb{E}_\theta(\phi(\mathbf{X})) \quad \theta \in \Theta_0$$

Andamiaje de Neyman-Pearson

Usemos la forma compacta del test

$$\phi\left(X_1, \ldots, X_n\right) = \mathbb{I}_{\mathcal{R}}\left(T\left(X_1, \ldots, X_n\right)\right)$$

y supongamos que queremos que probabilidad de error tipo I sea pequeña para todo $\theta \in \Theta_0$. Entonces, nos enfocamos en

$$\pi_\phi(\theta) = \mathbb{P}_\theta(\phi(\mathbf{X}) = 1) \quad \theta \in \Theta_0$$

Como ϕ es binaria resulta que

$$\pi_\phi(\theta) = \mathbb{E}_\theta(\phi(\mathbf{X})) \quad \theta \in \Theta_0$$

En general, dado θ nos interesará la función de potencia del test

$$\pi_\phi(\theta) = \mathbb{P}_\theta(\phi(\theta) = 1) = \mathbb{E}_\theta(\phi(\mathbf{X}))$$

También tenemos que

$$\pi_\phi(\theta) = \mathbb{P}_\theta(T(\mathbf{X}) \in \mathcal{R})$$

Andamiaje de Neyman-Pearson

Para disminuir esta probabilidad consideremos la región $\mathcal{R}^* \subset \mathcal{R}$ y definamos un nuevo test

$$\phi^* \left(X_1, \ldots, X_n\right) = \mathbb{I}_{\mathcal{R}^*} \left(T \left(X_1, \ldots, X_n\right)\right)$$

Entonces, la probabilidad de error tipo I asociada a este test es:

$$\mathbb{P}_\theta(\phi^*(\mathbf{X}) = 1) = \mathbb{P}_\theta(T(\mathbf{X}) \in \mathcal{R}^*) \quad \theta \in \Theta_0$$

Andamiaje de Neyman-Pearson

Para disminuir esta probabilidad consideremos la región $\mathcal{R}^* \subset \mathcal{R}$ y definamos un nuevo test

$$\phi^* \left(X_1, \ldots, X_n\right) = \mathbb{I}_{\mathcal{R}^*} \left(T \left(X_1, \ldots, X_n\right)\right)$$

Entonces, la probabilidad de error tipo I asociada a este test es:

$$\mathbb{P}_\theta(\phi^*(\mathbf{X}) = 1) = \mathbb{P}_\theta(T(\mathbf{X}) \in \mathcal{R}^*) \qquad \theta \in \Theta_0$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\theta \left[\phi^* = 1\right] &= \mathbb{P}_\theta \left[T \left(X_1, \ldots, X_n\right) \in \mathcal{R}^*\right] \\ &\leq \mathbb{P}_\theta \left[T \left(X_1, \ldots, X_n\right) \in \mathcal{R}\right] = \mathbb{P}_\theta[\phi = 1], \quad \forall \theta \in \Theta_0. \end{aligned}$$

Andamiaje de Neyman-Pearson

Para disminuir esta probabilidad consideremos la región $\mathcal{R}^* \subset \mathcal{R}$ y definamos un nuevo test

$$\phi^*(X_1, \ldots, X_n) = \mathbb{I}_{\mathcal{R}^*}(T(X_1, \ldots, X_n))$$

Entonces, la probabilidad de error tipo I asociada a este test es:

$$\mathbb{P}_\theta(\phi^*(\mathbf{X}) = 1) = \mathbb{P}_\theta(T(\mathbf{X}) \in \mathcal{R}^*) \quad \theta \in \Theta_0$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\theta[\phi^* = 1] &= \mathbb{P}_\theta[T(X_1, \ldots, X_n) \in \mathcal{R}^*] \\ &\leq \mathbb{P}_\theta[T(X_1, \ldots, X_n) \in \mathcal{R}] = \mathbb{P}_\theta[\phi = 1], \quad \forall \theta \in \Theta_0. \end{aligned}$$

Logramos lo que queríamos en Θ_0. ¿Qué pasa si $\theta \in \Theta_1$?

Andamiaje de Neyman-Pearson

Para disminuir esta probabilidad consideremos la región $\mathcal{R}^* \subset \mathcal{R}$ y definamos un nuevo test

$$\phi^*\left(X_1, \ldots, X_n\right) = \mathbb{I}_{\mathcal{R}^*}\left(T\left(X_1, \ldots, X_n\right)\right)$$

Entonces, la probabilidad de error tipo I asociada a este test es:

$$\mathbb{P}_\theta(\phi^*(\mathbf{X}) = 1) = \mathbb{P}_\theta(T(\mathbf{X}) \in \mathcal{R}^*) \quad \theta \in \Theta_0$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\theta\left[\phi^* = 1\right] &= \mathbb{P}_\theta\left[T\left(X_1, \ldots, X_n\right) \in \mathcal{R}^*\right] \\ &\leq \mathbb{P}_\theta\left[T\left(X_1, \ldots, X_n\right) \in \mathcal{R}\right] = \mathbb{P}_\theta[\phi = 1], \quad \forall \theta \in \Theta_0. \end{aligned}$$

Logramos lo que queríamos en Θ_0. ¿Qué pasa si $\theta \in \Theta_1$? Notemos que $\mathcal{R}^* \subset \mathcal{R} \Longrightarrow \overline{\mathcal{R}^*} \supset \overline{\mathcal{R}}$ y por lo tanto,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\theta\left[\phi^* = 0\right] &= \mathbb{P}_\theta\left[T\left(X_1, \ldots, X_n\right) \notin \mathcal{R}^*\right] \\ &\geq \mathbb{P}_\theta\left[T\left(X_1, \ldots, X_n\right) \notin \mathcal{R}\right] \geq \mathbb{P}_\theta[\phi = 0], \quad \forall \theta \in \Theta_1. \end{aligned}$$

Por simetría, algo similar pasaría si quisiéramos disminuir la probabilidad de error II.

Andamiaje de Neyman-Pearson

La premisa de Neyman-Pearson es que como el más importante es el error de tipo I, controlaremos la probabilidad de error I y vamos a fijarla en un determinado valor.

Una vez que eso está fijado, podemos preocuparnos por el otro error y tratar de que la probabilidad de error II sea baja.

Nivel y Potencia

- $\mathbf{X} \sim F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) \qquad H_0 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_0 \qquad\qquad H_1 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_1$

- Fijemos un valor $\alpha \in (0, 1)$.

- El *nivel de significación* de un test ϕ es α si:

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} \pi_\phi(\theta) = \sup_{\theta \in \Theta_0} \mathbb{P}_\theta \left(\phi = 1\right) = \alpha$$

Nivel y Potencia

- $\mathbf{X} \sim F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) \quad H_0 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_0 \qquad H_1 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_1$

- Fijemos un valor $\alpha \in (0, 1)$.

- El *nivel de significación* de un test ϕ es α si:

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} \pi_\phi(\theta) = \sup_{\theta \in \Theta_0} \mathbb{P}_\theta\left(\phi = 1\right) = \alpha$$

- ϕ es el test *más potente* de nivel menor o igual que α para una alternativa fija $\boldsymbol{\theta}_1 \in \Theta_1$ si

  (a) $\sup_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta_0} \pi_\phi(\boldsymbol{\theta}) \leq \alpha$

  (b) Dado ϕ^* de nivel menor o igual que α se tiene

$$\pi_{\phi^*}(\boldsymbol{\theta}_1) \leq \pi_\phi(\boldsymbol{\theta}_1)$$

TEST UMP: tests óptimos

- ϕ es un test *uniformemente más potente*, **UMP**, de nivel menor o igual que α para

$$H_0 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_0 \quad vs. \quad H_1 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_1$$

si

(a) $\sup\limits_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta_0} \pi_\phi(\boldsymbol{\theta}) \leq \alpha$

(b) Dado ϕ^* de nivel menor o igual que α se tiene

$$\pi_{\phi^*}(\boldsymbol{\theta}_1) \leq \pi_\phi(\boldsymbol{\theta}_1) \qquad\qquad \boldsymbol{\theta}_1 \in \Theta_1$$

Tipos de Tests

Consideremos el caso θ univariado.

- Hipótesis Simple: $\theta = \theta_0$
- Hipótesis Compuesta: $\theta < \theta_0$, $\theta > \theta_0$ $\theta \neq \theta_0$

Tipos de Tests

- Unilaterales:

$$H_0 : \theta \geq \theta_0 \text{ vs. } H_1 : \theta < \theta_0$$

$$H_0 : \theta \leq \theta_0 \text{ vs. } H_1 : \theta > \theta_0$$

- Bilateral:

$$H_0 : \theta = \theta_0 \text{ vs. } H_1 : \theta \neq \theta_0$$

Lema de Neyman Pearson

Θ_0 y Θ_1 son hipótesis simples y que $\mathbf{X}$ tiene distribución discreta: $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$ es una f.p.p.

Lema de Neyman Pearson

Θ_0 y Θ_1 son hipótesis simples y que $\mathbf{X}$ tiene distribución discreta: $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$ es una f.p.p.

$$H_0 : \boldsymbol{\theta} = \theta_0 \quad vs. \quad H_1 : \theta = \theta_1$$

Parece razonable rechazar H_0 si $f(\mathbf{x}, \theta_1)$ es mayor que $f(\mathbf{x}, \theta_0)$. Es decir, si

$$\frac{f(\mathbf{x}, \theta_1)}{f(\mathbf{x}, \theta_0)} > k_\alpha$$

donde k_α se elegirá de manera de alcanzar el nivel deseado α.

Lema de Neyman Pearson

Lema: Sea $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ una muestra aleatoria de tamaño n de una distribución con f.d. o f.p.p $f(x; \theta)$, donde θ_0 y θ_1 son dos posibles valores de θ.

Consideremos $H_0 : \theta = \theta_0$ vs. $H_1 : \theta = \theta_1$.

a) Si para algún $k > 0$ la variable aleatoria

$$\Lambda(\mathbf{X}) = \frac{f(\mathbf{x}, \theta_1)}{f(\mathbf{x}, \theta_0)}$$

satisface

$$\mathbb{P}_{\theta_0}(\Lambda(\mathbf{X}) > k) = \alpha\,,$$

entonces el test definido como

$$\phi(\mathbf{X}) = \mathbb{I}\{\Lambda(\mathbf{X}) > k\} \tag{1}$$

es un test más potente de nivel α para testear dichas hipótesis.

Lema de Neyman Pearson

Observación: Notemos que el test es de la forma:

$$\phi(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad f(\mathbf{x}, \theta_1) > k f(\mathbf{x}, \theta_0) \\ 0 & \text{en c.c.} \end{cases} \tag{2}$$

b) Si ψ es un test UMP para testear H_0 vs. H_1, entonces es de la forma (2) excepto quizás un conjunto $\mathcal{S}$ tal que

$$\mathbb{P}_{\theta_0}(\mathcal{S}) = \mathbb{P}_{\theta_1}(\mathcal{S}) = 0$$

Lema de Neyman Pearson

Demo: a) Probaremos el resultado para el caso continuo. Es claro que ϕ tiene el nivel deseado.

Para simplificar el resto de la demostración usaremos la siguiente notación:

$$\int_B f(\theta, \mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int \ldots \int_B f(\theta, x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$

Definimos los siguientes conjuntos:

$$\begin{cases} C_1 = & \{\mathbf{x} : f(\theta_1, \mathbf{x}) > k f(\theta_0, \mathbf{x})\} \\ C_2 = & \{\mathbf{x} : f(\theta_1, \mathbf{x}) \leq k f(\theta_0, \mathbf{x})\} \end{cases}$$

Sea ψ otro test que cumple que su nivel es α, entonces

$$\alpha = \mathbb{P}_{\theta_0}(\phi(\mathbf{X}) = 1) = \mathbb{P}_{\theta_0}(\psi(\mathbf{X}) = 1)$$

o dicho de otra manera

$$\alpha = \mathbb{E}_{\theta_0}(\phi(\mathbf{X})) = \mathbb{E}_{\theta_0}(\psi(\mathbf{X}))$$

y la diferencia de las potencias es

Lema de Neyman Pearson

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{\theta_1}(\phi(\mathbf{X})) - \mathbb{E}_{\theta_1}(\psi(\mathbf{X})) = \mathbb{E}_{\theta_1}[\phi(\mathbf{X}) - \psi(\mathbf{X})] \\
&= \int_{C_1} [\phi(\mathbf{x}) - \psi(\mathbf{x})] f\left(\theta_1, \mathbf{x}\right) d\mathbf{x} + \int_{C_2} [\phi(\mathbf{x}) - \psi(\mathbf{x})] f\left(\theta_1, \mathbf{x}\right) d\mathbf{x} \\
&= \int_{C_1} [1 - \psi(\mathbf{x})] f\left(\theta_1, \mathbf{x}\right) d\mathbf{x} + \int_{C_2} [0 - \psi(\mathbf{x})] f\left(\theta_1, \mathbf{x}\right) d\mathbf{x} \\
&\geq \int_{C_1} [1 - \psi(\mathbf{x})] k f\left(\theta_0, \mathbf{x}\right) d\mathbf{x} + \int_{C_2} [-\psi(\mathbf{x})] k f\left(\theta_0, \mathbf{x}\right) d\mathbf{x}
\end{aligned}
$$

Entonces,

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{\theta_1}(\phi(\mathbf{X})) - \mathbb{E}_{\theta_1}(\psi(\mathbf{X})) \\
&\geq \int_{C_1} [\phi(\mathbf{x}) - \psi(\mathbf{x})] k f\left(\theta_0, \mathbf{x}\right) d\mathbf{x} + \int_{C_2} [\phi(\mathbf{x}) - \psi(\mathbf{x})] k f\left(\theta_0, \mathbf{x}\right) d\mathbf{x} \\
&= k\mathbb{E}_{\theta_0}[\phi(\mathbf{X}) - \psi(\mathbf{X})] = k(\alpha - \alpha) = 0 \qquad (*)
\end{aligned}
$$

y por lo tanto

$$\mathbb{E}_{\theta_1}(\phi(\mathbf{X})) \geq \mathbb{E}_{\theta_1}(\psi(\mathbf{X}))$$

como queríamos ver.

Lema de Neyman Pearson

b) Consideremos el caso continuo. Notemos que si ψ tiene nivel α y es UMP, entonces

$$E_{\theta_0}(\phi(\mathbf{X})) = \mathbb{E}_{\theta_0}(\psi(\mathbf{X})) = \alpha$$

y

$$E_{\theta_1}(\phi(\mathbf{X})) = \mathbb{E}_{\theta_1}(\psi(\mathbf{X}))$$

Además, como $\psi \leq 1$

$$[\phi(\mathbf{x}) - \psi(\mathbf{x})][f(\theta_1, \mathbf{x}) - kf(\theta_0, \mathbf{x})] \geq 0\,,$$

por lo tanto si

$$\int [\phi(\mathbf{x}) - \psi(\mathbf{x})][f(\theta_1, \mathbf{x}) - kf(\theta_0, \mathbf{x})] d\mathbf{x} = 0$$

tenemos que

$$[\phi(\mathbf{x}) - \psi(\mathbf{x})][f(\theta_1, \mathbf{x}) - kf(\theta_0, \mathbf{x})] = 0$$

salvo en un conjunto $\mathcal{S}$ tal que $|\mathcal{S}| = 0$.

Por lo tanto, $\{\mathbf{x} : f(\theta_1, \mathbf{x}) \neq kf(\theta_0, \mathbf{x})\} \cap \overline{\mathcal{S}}$, $\phi = \psi$, es decir que ψ es de la forma (2) salvo en un conjunto $\mathbb{P}_{\theta_0}(\mathcal{S}) = \mathbb{P}_{\theta_0}(\mathcal{S}) = 0$, como queríamos ver.

Observaciones

- Una condición suficiente para la existencia de una k adecuada para cualquier $\alpha \in (0,1)$ es que $\Lambda(\mathbf{X})$ sea una variable aleatoria continua bajo la hipótesis nula.

Si la distribución de $\Lambda(\mathbf{X})$ bajo H_0 es discreta o tiene discontinuidades, puede existir un $\alpha \in (0,1)$ para el cual no se pueda hallar un $k > 0$ para el cual $\mathbb{P}_{\theta_0}(\Lambda(\mathbf{X}) > k) = \alpha$.

- El Lema de Neyman Pearson fue probado esencialmente sin condiciones de regularidad u otra restricciones. Sin embargo, si se lo escribe de la forma anterior queda claro que las situaciones en que $f(\mathbf{x}, \theta_0) = 0$ deben ser analizadas especialmente con cuidado.

- Notemos que la desiguladad final en (*) sigue siendo válida si ψ tiene nivel menor que α, digamos $\alpha^* < \alpha$, pues quedará $k(\alpha - \alpha^*) > 0$.