Estimación

Métodos de Estimación

- **Métodos de Estimación**: métodos que nos permiten aproximar o inferir el valor de una característica desconocida de interés de una población a partir de una muestra aleatoria de dicha población.

- Existen dos abordajes: la **estimación puntual** y la **estimación por intervalos**.

Métodos de estimación puntual y por intervalos

- Con los métodos de **estimación puntual** buscamos dar un único valor para la característica de interés que desconocemos.

- Con los métodos de **estimación por intervalos** buscamos dar un rango de valores donde esperamos que esté la característica desconocida con un cierto nivel de confianza.

¿Qué tenemos y qué queremos?

Información

- **Muestra aleatoria**: $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias i.i.d. con distribución F: $X_i \sim F$

Objetivo

- **Característica de interés de F**: la esperanza o media, la varianza, o los cuantiles. También podría ser la función de distribución acumulada o la función de densidad, entre otras.

Ejemplo: Cuantiles

- **Población**: $F = F_X$, donde $X =$ cantidad de anticuerpos IgG e IgM en un individuo 20 días después de la segunda dosis de vacuna contra COVID.

- **Características de interés**: $F^{-1}(p)$ cuantiles de la distribución.

- **Muestra aleatoria**: $X_1, \ldots, X_n$ donde $X_i =$ cantidad de anticuerpos del i-ésimo paciente.

- **Datos**:

$$5.9,\ 6.3, 19.6, 7.2, \ldots$$

Métodos de Estimación Puntual

Estimador puntual: ¿Qué es un estimador puntual?

- **Ingredientes**: variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $X_1, \ldots, X_n$ con distribución F y $\theta = \theta(F)$ una característica desconocida de interés.

- **Objetivo**: Estimar θ (o una función $q(\theta)$).

- Un **estimador puntual** de θ es una función de $X_1, \ldots, X_n$. Por convención, un estimador de θ se denota $\widehat{\theta}$ o $\widehat{\theta}_n$. Se tiene entonces que para cierta g:

$$\widehat{\theta} = \widehat{\theta}_n = g(X_1, \ldots, X_n)$$

- **Nota**: Un estimador es una variable aleatoria.

Estimación puntual: ¿Qué es una estimación de θ?

- Una **estimación** de θ es el valor observado de un estimador $\widehat{\theta}$ cuando éste es evaluado en los datos.
- Es una realización de $\widehat{\theta}$: $\widehat{\theta}_{obs}$.

$$\widehat{\theta}_{obs} = \widehat{\theta}_{n,obs} = g(x_1, \ldots, x_n)$$

donde $x_1, \ldots, x_n$ es una realización de $X_1, \ldots, X_n$

Como ya habíamos visto...

- **Muestra**: $(X_i)_{i\geq 1}$ i.i.d. $X_i \sim F$, $F \in \mathcal{F}$ familia de distribuciones posibles para nuestro problema

- **Objetivo**: inferir *algo relacionado* con el mecanismo que genera los datos:
  - $\mathbb{P}_F(X_1 \leq 20)$
  - F
  - $\mathbb{E}_F(X_1)$
  - $\mathbb{V}_F(X_1)$

- ¿Cómo estimaríamos para cada uno de los *objetivos* planteados?

$\Longrightarrow$ **¿Qué sabemos de F?**

Algunos ejemplos

- **Bernoulli**: surge naturalmente en caso de variables binarias.
- **Poisson**: suele usarse para modelar procesos de conteo
- **Normal**: Modelo de Posición: $X_i = \theta + \epsilon_i$
  Uso y abuso: suele asumirse que los errores tienen distribución normal con $\mathbb{E}(\epsilon_i) = 0$.
- **Gamma**: El tiempo de hospitalización de un paciente suele modelarse con una distribución Gamma $\Gamma(\alpha, \lambda)$

Modelos Paramétricos

Casos Discretos

- **Bernoulli:** $X \sim \mathcal{B}(\theta)$
  $p(x,\theta) = \theta^x \, (1-\theta)^{1-x}$, $x = 0, 1$, $\theta \in \Theta = (0,1)$.

- **Poisson:** $X \sim \mathcal{P}(\theta)$
  $p(x,\theta) = e^{-\theta} \, \theta^x / x!$, $x \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ $\theta \in R_{>0}$

$$\mathcal{F} = \{p(\cdot,\theta)\ , \theta \in \Theta\}\ .$$

Modelos Paramétricos

Casos Continuos

- **Uniforme:** $X \sim \mathcal{U}(0, \theta)$
  $f(x, \theta) = \frac{1}{\theta}\, \mathcal{I}_{[0,\theta]}(x)$, $\theta \in \Theta = \mathbb{R}_{>0}$.

- **Normal:** $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
  $f(x, \theta) = (2\pi\sigma^2)^{-1/2} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$, $\theta = (\mu, \sigma^2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0}$

- **Gamma:** $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$
  $f(x, \alpha, \lambda) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha}\, x^{\alpha-1}\, e^{-\lambda x} \mathcal{I}_{[0,\infty)}(x)$,
  $\theta = (\alpha, \lambda) \in \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0}$.

$$\mathcal{F} = \left\{ f(\cdot, \theta)\ , \theta \in \Theta \right\} .$$

Modelos No Paramétricos

Asumimos que $\mathcal{F}$ pertenece a una familia de distribuciones que no pueden ser indexadas por una cantidad finita de parámetros.

- $\mathcal{F} = \{$distribuciones continuas$\}$
- $\mathcal{F} = \{$distribuciones con densidad simétrica alrededor de $0\}$
- $\mathcal{F} = \{$distribuciones con media y varianza finitas$\}$

Vamos a abordar el enfoque paramétrico

$\mathcal{F}$ es una familia paramétrica $\mathcal{F} = \{f(\cdot, \theta)\ , \theta \in \Theta\}$

- Una $F \sim \mathcal{F}$ es de la forma $F(\cdot, \theta)$, por lo tanto para identificarla solo necesitamos conocer θ.
- En este caso, θ está relacionada con características de interés de la distribución tales como esperanza o varianza:
    - Bernoulli: $X \sim \mathcal{B}(\theta)$, $\mathbb{E}_\theta(X) = \theta$, $\mathbb{V}_\theta(X) = \theta(1-\theta)$
    - Gamma: $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$
      $\theta = (\alpha, \lambda)$, $\mathbb{E}_\theta(X) = \alpha/\lambda$, $\mathbb{V}_\theta(X) = \alpha/\lambda^2$

Métodos de estimación en modelos paramétricos

Veremos en principio dos métodos:

- Método de los Momentos
- Método de Máxima Verosimilitud

Método de los Momentos: ¿Qué son los momentos?

- **Momentos Poblacionales**: Sea $X \sim F$ una v.a. Llamamos momento (poblacional) de orden k o $k-$ésimo momento de X, si la esperanza existe, a

$$\mu_k = \mathbb{E}_F(X^k)$$

- **Momentos Muestrales**: Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria. Llamamos momento muestral de orden k o $k-$ésimo momento muestral de $X_1, \ldots, X_n$ a

$$\widehat{\mu}_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^k$$

¿Qué relación guarda con $\widehat{F}_n$? $\mathbb{E}_{\widehat{F}_n}(X) =?$

Motivación para los Momentos

- k-**ésimo momento** $\mu_k = \mathbb{E}_F[X^k]$, $X \sim F$

$$\begin{aligned}\mu_1 &= \mathbb{E}_F[X] \\ \mu_2 &= \mathbb{E}_F[X^2]\end{aligned}$$

Motivación para los Momentos

- **k-ésimo momento** $\mu_k = \mathbb{E}_F[X^k]$, $X \sim F$

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \mathbb{E}_F[X] \\ \mu_2 &= \mathbb{E}_F[X^2] \end{aligned}$$

- **k-ésimo momento muestral** $\widehat{\mu}_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} {X_i}^k$, $X_1, \ldots, X_n$, i.i.d., $X_i \sim F$.

  Por la LGN, sabemos que si las esperanzas existen

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{P} \mu_1 = \mathbb{E}_F[X]$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \xrightarrow{P} \mu_2 = \mathbb{E}_F[X^2]$$

$$.....$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k \xrightarrow{P} \mu_k = \mathbb{E}_F[X^k]$$

Ejemplos: Normal

Supongamos que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ i.i.d. $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma_o^2)$, σ_o^2 conocida. En este caso $\theta = \mu$, que coincide con μ_1.

- Utilizando la LGN, tenemos que $\bar{X}_n \xrightarrow{P} \mu = \mu_1$, cuando $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma_o^2)$ cualquiera sea $\mu \in \mathbb{R}$.
- nuestro parámetro de interés es $\theta = \mu_1$
- estimamos a μ por $\widehat{\theta} = \bar{X}_n$

Ejemplos: Uniforme

Supongamos que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ i.i.d., $X_i \sim \mathcal{U}(0, \theta)$.

- sabemos que $\mu_1 = \mathbb{E}_\theta(X_i) = \frac{\theta}{2}$
- $\theta = 2\,\mu_1$, es decir $\theta = h_1(\mu_1)$
- el método de momentos propone

$$\widehat{\theta} = h_1(\widehat{\mu}_1)$$

- estimamos a θ por $\widehat{\theta} = h_1(\bar{X}_n)$

$$\widehat{\theta} = 2\bar{X}_n$$

Método de los Momentos

Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una m.a. de una distribución con función de distribución F_θ.

- Si $\mu_1 = E_\theta\left(X_i\right)$ es $\theta = h_1(\mu_1)$, el estimador de momentos de θ basado en el primer momento es el valor $\widehat{\theta}$ tal que

$$\widehat{\theta} = h_1(\widehat{\mu}_1) \quad \text{donde } \widehat{\mu}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

- Si $\mu_k = E_\theta\left(X_i^k\right)$ es $\theta = h_k(\mu_k)$, el estimador de momentos de θ basado en el k-ésimo momento es el valor $\widehat{\theta}$ tal que

$$\widehat{\theta} = h_k(\widehat{\mu}_k) \quad \text{donde } \widehat{\mu}_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$$

.

Ejemplos: Exponencial

- Tarea 1 :

Supongamos que $X \sim \mathcal{E}(\theta)$. ¿Cómo estimamos a θ a partir de una muestra aleatoria $X_1 \dots X_n$ usando el método de los momentos?

¿Qué momentos usamos?

- Tarea 2:
Explorar el caso $X_1, X_2, \ldots, X_n$ i.i.d., $X_i \sim \mathcal{U}(-\theta, \theta)$.

  - ¿Sirve el primer momento? ¿Da información sobre θ?

  - ¿Qué obtenemos si usamos el segundo momento?

.

Estimadores de Momentos: ¿y cuándo tenemos varios parámetros?

Supongamos que tenemos dos parámetros θ_1, θ_2 y que pueden ser expresados en función de los dos primeros momentos, μ_1 y $\mu 2$, como

$$\begin{aligned} \theta_1 &= h_1(\mu_1, \mu_2) \\ \theta_2 &= h_2(\mu_1, \mu_2) \end{aligned}$$

entonces los estimadores del método de los momentos (el primero y el segundo) son

$$\begin{aligned} \widehat{\theta}_1 &= h_1(\widehat{\mu}_1, \widehat{\mu}_2) \\ \widehat{\theta}_2 &= h_2(\widehat{\mu}_1, \widehat{\mu}_2) \end{aligned}$$

(plug–in)

Ejemplos: Estimación de μ y σ^2 en distribución normal

Supongamos que tenemos una m. a. $X_1, \ldots X_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Aquí $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2) = (\mu, \sigma^2)$

Sabemos que

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \mathbb{E}_{\mu,\sigma^2}(X_i) = \mu \\ \mu_2 &= \mathbb{E}_{\mu,\sigma^2}(X_i^2) = \mu^2 + \sigma^2 \end{aligned}$$

Para hallar los estimadores de momentos de μ y σ^2 hallamos las funciones h_1 y h_2:

$$\begin{aligned} \mu &= \mu_1 \\ \sigma^2 &= \mu_2 - \mu_1^2 \end{aligned}$$

Ejemplos: Estimación de μ y σ^2 distribución normal

$$\begin{cases} \widehat{\mu} = & \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X}_n \\ \widehat{\sigma}^2 = & \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \bar{X}_n^2 \end{cases}$$

Importante

Puede verificarse fácilmente que:

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}_n\right)^2$$

- Tarea 3: si $X_1, \ldots X_n$, i.i.d., $X_i \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$, ¿cómo resultan los estimadores de momentos de α y λ?

Estimadores de Momentos

Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una m.a. de una distribución que depende de m parámetros $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$ y supongamos que están relacionados con los m primeros momentos poblacionales, de tal forma que

$$\theta_i = h_i(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m) \quad i = 1, \ldots, m\,.$$

Los estimadores de momentos de $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$ son los valores $\widehat{\theta}_1, \widehat{\theta}_2, \ldots, \widehat{\theta}_m$ que se obtienen mediante el plug–in de los momentos muestrales correspondientes en el sistema de m ecuaciones

$$\begin{aligned} \widehat{\theta}_1 &= h_1(\widehat{\mu}_1, \widehat{\mu}_2, \ldots, \widehat{\mu}_m) \\ &\cdots \\ \widehat{\theta}_m &= h_m(\widehat{\mu}_1, \widehat{\mu}_2, \ldots, \widehat{\mu}_m) \end{aligned}$$

Ejemplos: Extensión a otras familias

$X_1, \ldots, X_n$ v.a. i.i.d. $X_i \sim F, \mathbb{E}_F(X_1) = \mu, \mathbb{V}_F(X_1) = \sigma^2$

- $\boldsymbol{\theta} = (\mu, \sigma^2)$. Tenemos que

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \mu \\ \mu_2 &= \sigma^2 + \mu^2 \end{aligned}$$

- Nos queda el mismo sistema que en el caso normal.
- Obtenemos como antes

$$\widehat{\mu} = \bar{X}_n \qquad \widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2$$

Veamos una generalización del método de los momentos: Vayamos al pizarrón