Tests de Hipótesis

Tests de Hipótesis

Sea $\mathbf{X}_n = \{X_1, \ldots, X_n\}$ una muestra aleatoria donde $X_i \sim F(\theta), \theta \in \Theta$.

Hemos visto hasta ahora el problema de:

- estimación puntual de $q(\theta)$
- estimación por intervalos

Veremos ahora un nuevo problema que aborda la **inferencia estadística**: el problema de tests de hipótesis.

Este suele ser muchas veces un objetivo final o parcial en una investigación, ya que en el proceso de investigación con frecuencia es necesario decidir cuál de dos aseveraciones que conciernen al parámetro es cierta.

La herramienta que sirve para tomar una decisión entre las dos afirmaciones es un **test de hipótesis**

Ejemplos

- decidir si una moneda es equilibrada o no.
- decidir si una estrategia para bajar el ausentismo es efectiva.
- decidir si una vacuna aumenta las defensas contra cierta enfermedad.
- chequear si una muestra aleatoria proviene de una distribución normal.
- chequear independencia.

Nosotros nos restringiremos a los problemas relacionados a parámetros.

¿Qué son las hipótesis?

Las hipótesis son las aseveraciones o afirmaciones que se realizan sobre el valor del parámetro en cuestión.

Tenemos dos hipótesis excluyentes entre las que debemos elegir:

- Hipótesis Nula
- Hipótesis Alternativa

El test no trata de manera simétrica a las dos, así como ocurre en un juicio con las hipótesis de inocencia y culpabilidad.

Veamos un ejemplo.

Ejemplo

- Un laboratorio sospecha que determinada droga en pruebas ha producido un aumento de la presión ocular como efecto secundario. El nivel de presión base tiene una media de 15 mmHg.

- Este incremento puede provocar un aumento del riesgo de padecer glaucoma. La droga en cuestión tiene un efecto primario muy positivo, es importante comprobar si esta sospecha es cierta antes de seguir adelante con su comercialización.

Ejemplo

- A través de ensayos previos se ha establecido que, a nivel poblacional, la presión ocular tiende a seguir una distribución $N(15, 2.5^2)$. La sospecha sobre el efecto secundario significa entonces que la presión ocular entre los consumidores de la droga es $N(\mu, 2.5^2)$, con $\mu > 15$.

- Si denotamos por $X \sim N(\mu, 2.5^2)$ a la v.a. **presión ocular de quienes reciben la droga**, entonces, la pregunta que enfrenta la compañía farmacéutica es decidir si
  - $\mu = 15$ (la droga no tiene efecto secundario)
    o
  - si $\mu > 15$ (la droga tiene un efecto secundario)

  basado en evidencia empírica.

Ejemplo

En este ejemplo se tiene una disyuntiva que involucra al presión ocular media, μ.

El problema es acerca de dos posibilidades:

$$\mu = 15 \quad \text{vs.} \quad \mu > 15$$

Definiciones

la Hipótesis Nula, que indicaremos como H_0, es la hipótesis que se sostendrá a menos qu se encuentre suficiente evidencia contra ella. La opuesta es la Hipótesis Alternativa, que llamaremos H_1.

Hipótesis Nula:

- La moneda es equilibrada.
- La vacuna no genera anticuerpos contra la enfermedad
- En nuestro ejemplo $H_0 : \mu = 15$

Hipótesis Alternativa:

- La moneda no es equilibrada.
- La vacuna genera anticuerpos contra la enfermedad.
- En nuestro ejemplo $H_1 : \mu > 15$

Algunas Observaciones

- Como notamos antes el rol de las dos hipótesis es diferente. (similar a culpable-inocente en un juicio).
- La carga de la prueba recae sobre la hipótesis alternativa.
- En el lenguaje usual, decimos que rechazamos la hipótesis nula o no la rechazamos. Cuando rechazamos es porque hallamos suficiente evidencia en contra de la hipótesis nula.
- Un test será una regla basada en $\mathbf{X}$ para decidir entre H_0 y H_1

Volvamos al ejemplo

En nuestro ejemplo

$$H_0 : \mu = 15 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu > 15$$

Para decidir, el laboratorio toma la presión ocular en 10 individuos que están tomando la droga y obtienen $\bar{x} = 15.8$, la pregunta es:

El promedio muestral es mayor a 15, pero
¿para qué valores observados del promedio comenzaríamos a pensar que $\mu > 15$?

- Notemos que $\bar{X} \sim \mathcal{N}(\mu, 2.5^2/10)$
- Si H_0 es cierta, $\bar{X} \sim \mathcal{N}(15, 2.5^2/10)$
- Si H_0 es cierta, $\dfrac{\bar{X} - 15}{2.5/\sqrt{10}} \sim N(0, 1)$

Volvamos al ejemplo

En nuestro ejemplo

$$H_0 : \mu = 15 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu > 15$$

Parece razonable la siguiente regla

$$\begin{cases} \text{rechazamos } H_0 & \text{si} \quad \dfrac{\bar{X} - 15}{2.5/\sqrt{10}} \text{ es "muy grande"} \\ \text{no rechazamos } H_0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Volvamos al ejemplo

En nuestro ejemplo

$$H_0 : \mu = 15 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu > 15$$

Parece razonable la siguiente regla

$$\begin{cases} \text{rechazamos } H_0 & \text{si} \quad \dfrac{\bar{X} - 15}{2.5/\sqrt{10}} \text{ es "muy grande"} \\ \text{no rechazamos } H_0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Podemos reescribirla como para algún k que elegiremos

$$\begin{cases} 1 & \text{si} \quad \dfrac{\bar{X} - 15}{2.5/\sqrt{10}} \geq k \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

¿Cómo elegimos a k?

Planteo general

- $\mathbf{X} \sim F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$, $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n) \in \mathbb{R}^n$
- Θ_0 y Θ_1 tales que $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$.

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \qquad \text{contra} \qquad H_1 : \theta \in \Theta_1$$

Planteo general

- $\mathbf{X} \sim F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$, $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n) \in \mathbb{R}^n$
- Θ_0 y Θ_1 tales que $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$.

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \qquad \text{contra} \qquad H_1 : \theta \in \Theta_1$$

- Introducimos valores numéricos que representen **rechazo** y **no rechazo**:

  $1 \leftrightarrow$ Rechazamos

  $0 \leftrightarrow$ No Rechazamos

- Un *Test* es una una función $\phi : \mathbb{R}^n \to \{0, 1\}$.

Test de hipótesis

- $\phi(\mathbf{X}) = 1$ indica que se rechaza H_0 (se acepta H_1).
- $\phi(\mathbf{X}) = 0$ indica que no se rechaza H_0

- La *región crítica* $\mathcal{R}$, de un test ϕ, es el conjunto de puntos $\mathbf{X}$ que llevan a la decisión de rechazar H_0.

- Un test en general será de la forma

$$\phi\left(X_1, \ldots, X_n\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } T\left(X_1, \ldots, X_n\right) \in \mathcal{R} \\ 0 & \text{si } T\left(X_1, \ldots, X_n\right) \notin \mathcal{R} \end{cases}$$

- La *región de aceptación* $\mathcal{A}$ es el conjunto de puntos $\mathbf{X}$ que llevan a no rechazar H_0.

Test de hipótesis

- Un test en general será de la forma

$$\phi\left(X_1, \ldots, X_n\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } T\left(X_1, \ldots, X_n\right) \in \mathcal{R} \\ 0 & \text{si } T\left(X_1, \ldots, X_n\right) \notin \mathcal{R} \end{cases}$$

- T recibe el nombre de estadístico del test.

- Notar que en notación compacta resulta

$$\phi\left(X_1, \ldots, X_n\right) = \mathbb{I}_{\mathcal{R}}\left(T\left(X_1, \ldots, X_n\right)\right)$$

Test de hipótesis

- Un test en general será de la forma

$$\phi(X_1, \ldots, X_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } T(X_1, \ldots, X_n) \in \mathcal{R} \\ 0 & \text{si } T(X_1, \ldots, X_n) \notin \mathcal{R} \end{cases}$$

- T recibe el nombre de estadístico del test.

- Notar que en notación compacta resulta

$$\phi(X_1, \ldots, X_n) = \mathbb{I}_{\mathcal{R}}(T(X_1, \ldots, X_n))$$

- Esta variable de Bernoulli tiene asociadas probabilidades

$$\phi(X_1, \ldots, X_n) = \begin{cases} 1 \text{ con} & \mathbb{P}(T(X_1, \ldots, X_n) \in \mathcal{R}) \\ 0 \text{ con} & \mathbb{P}(T(X_1, \ldots, X_n) \notin \mathcal{R}) \end{cases}$$

- Esto nos lleva a analizar los escenarios y tipos de errores que pueden ocurrir.

Escenarios

	H_0 es cierta	H_1 es cierta
Decidimos Rechazar H_0		
Decidimos No Rechazar H_0		

Tipos de errores

	H_0 es cierta	H_1 es cierta
Decidimos Rechazar H_0 ($\phi = 1$)	ERROR I	OK
Decidimos No Rechazar H_0 ($\phi = 0$)	OK	ERROR II

- Se llamará **error de tipo 1** al que se comete al rechazar H_0, cuando H_0 es cierta.

$$\mathbb{P}(\text{ERROR I}) : \mathbb{P}_{\boldsymbol{\theta}}(\phi(\mathbf{X}) = 1) \quad \boldsymbol{\theta} \in \Theta_0$$

- Se llamará **error de tipo 2** al que se comete al no rechazar H_0, cuando H_0 es falsa.

$$\mathbb{P}(\text{ERROR II}) : \mathbb{P}_{\boldsymbol{\theta}}(\phi(\mathbf{X}) = 0) \quad \boldsymbol{\theta} \in \Theta_1$$

Volvamos al ejemplo

Notemos que en nuestro ejemplo

$$H_0 : \mu = 15 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu > 15$$

Podemos reescribirla para algún k que elegiremos

$$\phi(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \dfrac{\bar{X} - 15}{2.5/\sqrt{10}} \geq k \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

o equivalentemente

$$\phi(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \bar{X} \geq 15 + k\, 2.5/\sqrt{10} \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Volvamos al ejemplo: $H_0 : \mu = 15 \quad$ vs. $\quad H_1 : \mu > 15$

Podemos limitar la probabilidad de error de tipo I: $\mathbb{P}(\text{ERROR I}) \leq \alpha$ o en otras palabras

$$\mathbb{P}(\text{Rechazar } H_0 | H_0 \text{ cierta}) = \mathbb{P}\left(\frac{\bar{X} - 15}{2.5/\sqrt{10}} \geq k \text{ si } \mu = 15\right) \leq \alpha.$$

Observemos que si tomamos $k = z_\alpha$ se cumple la desigualdad.

Si $\alpha = 0.05$, $k = 1.645$ y resulta

$$\phi(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \dfrac{\bar{X} - 15}{2.5/\sqrt{10}} \geq 1.645 \\ 0 & \text{en c.c.} \end{cases}$$

o equivalentemente

$$\phi(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \bar{X} \geq 16.30049 \\ 0 & \text{en c.c.} \end{cases}$$

¿Qué decisión tomamos en nuestro ejemplo?