1	2	3	Calificación

Introducción a la Estadística y Ciencia de Datos - Segundo cuatrimestre
Primer examen parcial - 02/10/2023

Nombre y Apellido:
Cantidad Total de Hojas:

Por favor, numerar todas las hojas y colocar el nombre en ellas. Cada ejercicio debe realiazase en hoja separada Se aprueba con al menos 60 puntos. **- Justificar todas las respuestas -**

---

1. (60 puntos) Sean $X, X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes con densidad dada por

$$f(x, \lambda) = \frac{2}{\lambda}\, x\, e^{-x^2/\lambda}\, I_{(0,+\infty)}(x) \quad \lambda > 0 \tag{1}$$

Primera Parte

a) (7 puntos) Hallar el estimador de máxima verosimilitud de λ.

b) (5 puntos) Probar que la distribución de X^2 es $\mathcal{E}(1/\lambda)$.

c) (7 puntos) Comprobar si el estimador de λ hallado en a) es insesgado o no.

d) (5 puntos) Teniendo en cuenta que se desea estimar a $q(\lambda) = \mathbb{E}(X) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{\lambda}$, hallar el estimador de máxima verosimilitud de $\mathbb{E}(X)$.

e) (8 puntos) Probar que los estimadores hallados de λ y de $q(\lambda)$ son fuertemente consistentes.

Segunda Parte

f) (10 puntos) Hallar la distribución asintótica del estimador encontrado para $q(\lambda)$.

g) (10 puntos) A partir de los dos ítems anteriores, deducir un intervalo de nivel asintótico $1-\alpha$ para $q(\lambda)$.

h) (8 puntos) En cierto proceso, el tiempo de reacción en segundos sigue una distribución cuya densidad está dada por (1). En 30 procesos de este tipo se observa el tiempo de reacción dando por resultado los siguientes datos:

2.12	0.55	0.71	0.72	1.42	1.73	0.91	0.70	2.07	0.54	0.55	2.02	1.25
2.11	0.87	1.30	1.78	0.75	0.54	0.94	1.60	2.27	0.73	3.41	2.03	0.85
0.43	1.58	1.07	0.88									

Hallar un intervalo de confianza de nivel asintótico 0.99 para el tiempo de reacción esperado.

Sugerencia: Abrir el archivo datos-parcial.txt y recordar el uso del comando `scan()`.
.
$\longrightarrow$ **Sigue atrás**

2. **Teórico** (15 puntos) Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria con distribución F, tal que $\mathbb{E}(X_1) = \mu$ $\mathbb{V}ar(X_1) = \sigma^2$.

   a) (7 puntos) Probar que $S_n^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ es un estimador insesgado de σ^2.

   b) (8 puntos) Probar que S_n^2 es un estimador débilmente consistente para σ^2.

3. (25 puntos) **Para hacer con R: se debe entregar un archivo Rmd (o R en su defecto) y la correspondiente salida html o preferentemente pdf.**
   El nombre de ambos archivos debe contener el apellido del autor.
   Ejemplo: Ejer3-Bianco.Rmd y Ejer3-Bianco.pdf

   Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una población con distribución $\mathcal{E}(\lambda)$. Se quiere estimar $q(\lambda) = 1/\lambda^2$. Consideremos los siguientes dos estimadores para $q(\lambda)$:

$$T_1(X_1, \ldots, X_n) = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2 \qquad \text{y} \qquad T_2(X_1, \ldots, X_n) = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{2n},$$

   siendo T_1 el estimador de máxima verosimilitud.

   a) (2 puntos) Generar una muestra de tamaño $n = 20$ de una distribución $\mathcal{E}(\lambda)$ con $\lambda = 1/2$ y evaluar los estimadores T_1 y T_2 en dicha muestra. Copiar los valores obtenidos:

$$T_1 =$$

$$T_2 =$$

   b) (3 puntos) Fijar la semilla en el valor 2023. Repetir el inciso anterior $Nrep = 1000$ veces, obteniendo así, para cada uno de los dos estimadores, 1000 replicaciones que serán guardadas en sendos vectores.

   c) (10 puntos) Graficar boxplots paralelos para los $Nrep$ valores obtenidos de T_1 y T_2 e interpretar estos gráficos.

   ¿Sugieren simetría? ¿Hay valores atípicos?

   ¿Alrededor de que valor esperaría que estos boxplots estén centrados? ¿Alguno de ellos parece insesgado de acuerdo con estos gráficos?

   d) (10 puntos) Obtener un estimador no paramétrico de la densidad de T_1 usando el núcleo normal. ¿Cómo elige la ventana? Repetir para T_2.

   Graficar en un mismo plot los estimadores de la densidad de T_1 y T_2 obtenidos en distinto color. Comparar e interpretar el gráfico. Relacionar con el ítem anterior.