Método del Pivote para Tests

Teorema: Sea $U = U(\mathbf{X}, \theta)$ un pivote decreciente en θ con distribución conocida G independiente de θ, y u_π su cuantil π. Dados θ_0 y α tenemos:

a) El test φ con región de rechazo $U(\mathbf{X}, \theta_0) > u_{1-\alpha}$ es un test de nivel α para chequear $H_0 : \theta \leq \theta_0$ (o de $H_0 : \theta = \theta_0$) vs. $H_1 : \theta > \theta_0$

b) El test φ con región de rechazo $U(\mathrm{X}, \theta_0) < u_{\alpha/2}$ o $U(\mathrm{X}, \theta_0) > u_{1-\alpha/2}$ es un test de nivel α de $H_0 : \theta = \theta_0$ vs. $H_1 : \theta \neq \theta_0$

Método del Pivote para Tests

Teorema: Sea $U = U(\mathbf{X}, \theta)$ un pivote decreciente en θ con distribución conocida G independiente de θ, y u_π su cuantil π. Dados θ_0 y α tenemos:

a) El test φ con región de rechazo $U(\mathbf{X}, \theta_0) > u_{1-\alpha}$ es un test de nivel α para chequear $H_0 : \theta \leq \theta_0$ (o de $H_0 : \theta = \theta_0$) vs. $H_1 : \theta > \theta_0$

b) El test φ con región de rechazo $U(\mathrm{X}, \theta_0) < u_{\alpha/2}$ o $U(\mathrm{X}, \theta_0) > u_{1-\alpha/2}$ es un test de nivel α de $H_0 : \theta = \theta_0$ vs. $H_1 : \theta \neq \theta_0$

Verifiquemos el caso unilateral. Tenemos $\theta \in \Theta_0 \iff \theta \leq \theta_0$, luego

$$\theta \in \Theta_0 \Longrightarrow U(\mathbf{X}, \theta) \geq U(\mathbf{X}, \theta_0)$$

por ser U decreciente. Por lo tanto,

$$\theta \in \Theta_0 \Longrightarrow \mathbb{P}_\theta(\varphi = 1) = \mathbb{P}_\theta(U(\mathbf{X}, \theta_0) > u_{1-\alpha}) \leq \mathbb{P}_\theta(U(\mathrm{X}, \theta) > u_{1-\alpha}) = \alpha$$

Como $\mathbb{P}_{\theta_0}(\varphi = 1) = \alpha$, el nivel es α.

Análogamente para el test bilateral. **Ejercicio**

Ejemplo

- $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d., $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 desconocida.

$$H_0 : \mu = \mu_0 \text{ vs. } H_1 : \mu \neq \mu_0$$

El test

$$\varphi(X_1, \ldots, X_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sqrt{n}\frac{|\overline{X}-\mu_0|}{S} \geq t_{n-1,\alpha/2} \\ 0 & \text{si } \sqrt{n}\frac{|\overline{X}-\mu_0|}{S} < t_{n-1,\alpha/2} \end{cases}$$

tiene nivel α

Test para $H_0 : \mu \leq \mu_0$ vs. $H_1 : \mu > \mu_0$

- $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d., $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 desconocida.

$$\phi(X_1, \ldots, X_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sqrt{n}\frac{\overline{X}-\mu_0}{S} \geq t_{n-1,\alpha} \\ 0 & \text{si } \sqrt{n}\frac{\overline{X}-\mu_0}{S} < t_{n-1,\alpha} \end{cases}$$

¿Cuál es la potencia de este test?

Para responder esta pregunta, necesitaremos la siguiente distribución.

Distribución $\mathcal{T}_k(\Delta)$

- *Distribución de Student no central con k grados de libertad y parámetro de no centralidad Δ:* $t_k(\Delta)$ es la distribución de

$$\frac{Z + \Delta}{\sqrt{U/k}}$$

con $Z \sim N(0,1)$ independiente de $U \sim \chi^2_k$.

- Sea $\Delta = \sqrt{n}(\mu - \mu_0)/\sigma$. Se puede demostrar que la potencia del test depende de (μ, σ^2) solo a través de Δ.

Sea

$$T = \frac{\sqrt{n}(\overline{X} - \mu_0)}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}} =$$

Sea

$$T = \frac{\sqrt{n}(\overline{X} - \mu_0)}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}} = \frac{\sqrt{n}\frac{(\overline{X}-\mu_0)}{\sigma}}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{\sigma^2}}}$$

resulta

$$T = \frac{\sqrt{n}\frac{(\overline{X}-\mu)}{\sigma} + \sqrt{n}\frac{(\mu-\mu_0)}{\sigma}}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{\sigma^2}}} \; .$$

Llamando $U = \sqrt{n}(\overline{X} - \mu)/\sigma$ y $V = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2/\sigma^2$ se tiene que U y V son independientes, y cuando los valores de los parámetros son μ y σ^2:

- $U \sim N(0,1)$

- $V \sim \chi^2_{n-1}$.

Luego, T tiene distribución $t_{n-1}(\Delta)$ donde $\Delta = \sqrt{n}(\mu - \mu_0)/\sigma$.

Test para $H_0: \sigma^2 \leq \sigma_0^2$ vs. $H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$

- $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d., $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, μ desconocida.

$$(n-1)\frac{S^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

y además es una función decreciente de σ^2. Por lo tanto, usando el método del pivote, el test

$$\varphi(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \dfrac{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2}{\sigma_0^2} \geq \chi^2_{n-1,\alpha} \\ 0 & \text{si } \dfrac{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{n-1,\alpha} \, . \end{cases}$$

tiene nivel α.

¿Cuál es la potencia de este test?

Test para $H_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2$ vs. $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$

¿Cuál es la potencia de este test?

$$
\begin{aligned}
\pi_\varphi(\sigma^2) &= \mathbb{P}_{\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 \geq \sigma_0^2 \chi^2_{n-1,\alpha}\right) \\
&= \mathbb{P}_{\sigma^2}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{\sigma^2} \geq \frac{\sigma_0^2 \chi^2_{n-1,\alpha}}{\sigma^2}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(V \geq \frac{\sigma_0^2 \chi^2_{n-1,\alpha}}{\sigma^2}\right) = 1 - F_V\left(\frac{\sigma_0^2 \chi^2_{n-1,\alpha}}{\sigma^2}\right) \ ,
\end{aligned}
$$

siendo $V \sim \chi^2_{n-1}$.

$\pi_\varphi(\sigma^2)$ resulta una función creciente de σ^2.

Ejemplo de duración de baterías

- Los siguientes datos corresponden a la duración en horas de 18 baterías eléctricas (Maronna, 2021):

  237 242 232 242 248 230 244 243 254
  262 234 220 225 246 232 218 228 240

- Supongamos que un comprador decide adquirir el lote de baterías si el vendedor demuestra que su vida media es mayor a 235 hs., con una probabilidad 0.01 de adquirir un lote malo. Solo para ilustración, como antes, suponemos que los datos tienen distribución normal.

Vayamos al R.

Nivel Crítico o p–valor

El *nivel crítico o p-valor* da la probabilidad de obtener evidencia en contra de la hipótesis nula bajo el supuesto de que ésta sea cierta.

- El *nivel crítico o p-valor* es el menor valor de significación para el que rechazamos H_0 para un conjunto de datos $\mathbf{x}$.
- Prefijado el valor de significación de un test, α, rechazaremos H_0 si el p-valor p satisface que $p \leq \alpha$.
- Dicho de otra manera, es la probabilidad de observar un valor del estadístico del test tan extremo como el observado o más extremo aún.

Ejemplo

Volvamos al caso normal: $X_1, \ldots, X_n$ m.a. $N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 desconocido,

Testeamos $H_0 : \mu \leq \mu_0$ vs. $H_1 : \mu > \mu_0$.

El test que hemos visto depende del estadístico $T = \sqrt{n}\frac{\overline{X}-\mu_0}{S}$ y rechaza si $T \geq t_{n-1,\alpha}$.

Supongamos que en un conjunto de datos $\mathbf{x}$ el valor del estadístico es T_{obs}, ¿Cuánto vale el p-valor? ¿Cómo calculamos el p-valor?

Ejemplo

Volvamos al caso normal: $X_1, \ldots, X_n$ m.a. $N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 desconocido,

Testeamos $H_0 : \mu \leq \mu_0$ vs. $H_1 : \mu > \mu_0$.

El test que hemos visto depende del estadístico $T = \sqrt{n}\frac{\overline{X} - \mu_0}{S}$ y rechaza si $T \geq t_{n-1,\alpha}$.

Supongamos que en un conjunto de datos $\mathbf{x}$ el valor del estadístico es T_{obs}, ¿Cuánto vale el p-valor? ¿Cómo calculamos el p-valor?

En este caso de interés, la evidencia en contra de la hipótesis nula se obtiene con valores grandes del estadístico:

$$p = \mathbb{P}_{\mu_0}(T \geq T_{obs})$$

Ejemplo: Caso de Baterías

Testeamos $H_0 : \mu \leq 235$ vs. $H_1 : \mu > 235$ y $n = 18$. El test de nivel α que hemos visto depende del estadístico $T = \sqrt{18}\dfrac{\overline{X} - 235}{S}$ y rechaza si $T \geq t_{17,\alpha}$.

Habíamos obtenido que el $T_{obs} = 0.96588$

$$\text{p-valor} : p = \mathbb{P}_{235}(T \geq 0.96588)$$

podemos calcularlo con R como

1-pt(0.96588,17)

[1] 0.1738224

Observemos que este p-valor es más grande que los valores de α con los que trabajamos habitualmente, así que a los niveles habituales no rechazariamos H_0. En particuar, es más grande que el nivel deseado que era 0.01.

¿Qué pasa si probamos con el comando t.test?

```
t.test(duracion, alternative="greater",mu=235)

One Sample t-test

data:  duracion
t = 0.96588, df = 17, p-value = 0.1738
alternative hypothesis: true mean is greater than 235
95 percent confidence interval:
232.9083      Inf
sample estimates:
mean of x
237.6111
```

Test con nivel asintótico

- $X_1, \ldots, X_n$ m.a. $X_i \sim F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$

- $H_0: \boldsymbol{\theta} \in \Theta_0$ vs. $H_1: \boldsymbol{\theta} \in \Theta_1$.

Se dirá que una sucesión de test $\phi_n(X_1, \ldots, X_n)$ tiene nivel de significación asintótico α si

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta_0} \pi_{\phi_n}(\boldsymbol{\theta}) = \alpha$$

En otras palabras: el nivel del test $\phi_n(X_1, \ldots, X_n)$ se acerca a α cuando el tamaño de la muestra tiende a infinito.

Ejemplo

- $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $\mathbb{E}(X_i) = \mu$ y $\mathbb{V}ar(X_i) = \sigma^2$.

Queremos testear $H_0 : \mu = \mu_0$ vs. $H_1 : \mu < \mu_0$.

Tenemos $\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$ y $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2}{n-1}$.

Sabemos que cuando la esperanza de las variables X_i es μ_0

$$\sqrt{n}\frac{(\overline{X} - \mu_0)}{S} \xrightarrow{D} N(0,1)$$

Ejemplo

- $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con $\mathbb{E}(X_i) = \mu$ y $\mathbb{V}ar(X_i) = \sigma^2$.

Queremos testear $H_0 : \mu = \mu_0$ vs. $H_1 : \mu < \mu_0$.

Tenemos $\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$ y $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2}{n-1}$.

Sabemos que cuando la esperanza de las variables X_i es μ_0

$$\sqrt{n}\frac{(\overline{X} - \mu_0)}{S} \xrightarrow{D} N(0,1)$$

$$\varphi_n(X_1, \ldots, X_n) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \sqrt{n}\dfrac{(\overline{X} - \mu_0)}{S} \leq -z_\alpha \\ \\ 0 & \text{si} \quad \sqrt{n}\dfrac{(\overline{X} - \mu_0)}{S} > -z_\alpha \end{cases}$$

es un test de nivel de significación asintótico α.