# Test de Cociente de Verosimilitud

Este método puede verse como una extensión del Lema de Neyman Pearson.

Bajo condiciones de regularidad sobre las distribuciones involucradas se puede deducir la distribución límite para $n \to \infty$, que resulta $\chi^2$.

Por lo tanto, cuando la distribución exacta no se conoce, se puede usar esta aproximación.

# Test de Cociente de Verosimilitud

$\mathbf{X} \sim f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$, f.d. o bien f.p.p., $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ y queremos testear

$$H_0: \ \boldsymbol{\theta} \in \Theta_0 \text{ vs. } H_1: \ \boldsymbol{\theta} \in \Theta_1 \qquad \Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$$

Veamos cuál es la motivación de este método.

# Test de Cociente de Verosimilitud

$\mathbf{X} \sim f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$, f.d. o bien f.p.p., $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ y queremos testear

$$H_0: \boldsymbol{\theta} \in \Theta_0 \text{ vs. } H_1: \boldsymbol{\theta} \in \Theta_1 \qquad \Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$$

Veamos cuál es la motivación de este método.

- $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_0$: EMV de $\boldsymbol{\theta}$, suponiendo $\boldsymbol{\theta} \in \Theta_0$

# Test de Cociente de Verosimilitud

$\mathbf{X} \sim f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$, f.d. o bien f.p.p., $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ y queremos testear

$$H_0: \boldsymbol{\theta} \in \Theta_0 \text{ vs. } H_1: \boldsymbol{\theta} \in \Theta_1 \qquad \Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$$

Veamos cuál es la motivación de este método.

- $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_0$: EMV de $\boldsymbol{\theta}$, suponiendo $\boldsymbol{\theta} \in \Theta_0$
- $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_1$: EMV de $\boldsymbol{\theta}$, suponiendo $\boldsymbol{\theta} \in \Theta_1$

# Test de Cociente de Verosimilitud

$\mathbf{X} \sim f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$, f.d. o bien f.p.p., $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ y queremos testear

$$H_0: \ \boldsymbol{\theta} \in \Theta_0 \text{ vs. } H_1: \ \boldsymbol{\theta} \in \Theta_1 \qquad \Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$$

Veamos cuál es la motivación de este método.

- $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_0$: EMV de $\boldsymbol{\theta}$, suponiendo $\boldsymbol{\theta} \in \Theta_0$
- $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_1$: EMV de $\boldsymbol{\theta}$, suponiendo $\boldsymbol{\theta} \in \Theta_1$

$$\begin{aligned} f(\mathbf{X}, \widehat{\boldsymbol{\theta}}_0) &= \max_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta_0} f(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}) \\ f(\mathbf{X}, \widehat{\boldsymbol{\theta}}_1) &= \max_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta_1} f(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}) \end{aligned}$$

Si "nos olvidásemos" de que $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_0$ y $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_1$ son aleatorios,
y procediésemos en consecuencia, podríamos considerar el cociente:

# Test de Cociente de Verosimilitud

$\mathbf{X} \sim f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ y queremos testear

$$H_0 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_0 \text{ versus } H_1 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_1 \qquad \Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$$

$$\frac{f(\mathbf{x}, \widehat{\boldsymbol{\theta}}_1)}{f(\mathbf{x}, \widehat{\boldsymbol{\theta}}_0)} \geq k$$

# Test de Cociente de Verosimilitud

- $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n) \sim f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$ con $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_p) \in \Theta \subset \mathbb{R}^p$.

- $H_0 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_0$ vs. $H_1 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_0$, con $\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1$.

$$\lambda(\mathbf{X}) = \frac{\sup\limits_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta_0} f(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta})}{\sup\limits_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta_1} f(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta})} \,.$$

da origen a un test asintótico.

# Test de Cociente de Verosimilitud

En muchos casos, como por ejemplo, cuando la dimensión de $\Theta_0$ es menor que la dimensión de $\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1$, y $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$ es continua, resulta que

$$\sup_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta_1} f(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}) = \sup_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta} f(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}) \tag{4}$$

El test del cociente de máxima verosimilitud resulta

$$\varphi(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda^*(\mathbf{X}) \leq k_\alpha \\ 0 & \text{si } \lambda^*(\mathbf{X}) > k_\alpha \end{cases}$$

donde

$$\lambda^*(\mathbf{X}) = \frac{\sup_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta_0} f(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta})}{\sup_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta} f(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta})} \ .$$

# Ejemplo: caso distribución exacta

Sean $X_1, \cdots, X_n$ i.i.d. $N\left(\mu, \sigma^2\right)$, donde $\mu$ y $\sigma$ son desconocidos. Queremos testear con nivel $\alpha$

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \quad \text{vs.} \quad H_a : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$$

Veremos que el test de CV es equivalente al test $\chi^2$ .

# Ejemplo: caso distribución exacta

Parámetro: $\theta = \left(\mu, \sigma^2\right)$

Notemos que $\Theta_0 = \left\{\left(\mu, \sigma_0^2\right) : -\infty < \mu < \infty\right\}$ y $\Theta_1 = \left\{\left(\mu, \sigma^2\right) : -\infty < \mu < \infty, \sigma^2 \neq \sigma_0^2\right\}$.

$\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1 = \left\{\left(\mu, \sigma^2\right) : \ -\infty < \mu < \infty, \sigma^2 > 0\right\}$

# Ejemplo: caso distribución exacta

Parámetro: $\theta = \left(\mu, \sigma^2\right)$

Notemos que $\Theta_0 = \left\{\left(\mu, \sigma_0^2\right) : -\infty < \mu < \infty\right\}$ y
$\Theta_1 = \left\{\left(\mu, \sigma^2\right) : -\infty < \mu < \infty, \sigma^2 \neq \sigma_0^2\right\}$.

$\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1 = \left\{\left(\mu, \sigma^2\right) :\ -\infty < \mu < \infty, \sigma^2 > 0\right\}$

Hallaremos el supremo de $f$, en $\Theta_0$ y $\Theta$.

Para la distribución normal tenemos

$$f(\mathbf{x}, \theta) = f\left(\mathbf{x}, \mu, \sigma^2\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n \exp\left[-\sum_{i=1}^{n} \frac{\left(X_i - \mu\right)^2}{2\sigma^2}\right]$$

En $\Theta_0$, $\sigma^2 = \sigma_0^2$. Tendríamos que encontar el valor de $\mu$ que maximiza $f\left(\mathbf{x}, \mu, \sigma^2\right)$ sujeto a que $\sigma^2 = \sigma_0^2$. Hemos visto que el máximo de $f\left(\mathbf{x}, \mu, \sigma_0^2\right)$ se realiza en $\hat{\mu} = \bar{X}$.

# Ejemplo: caso distribución exacta

Luego, en $\Theta_0$ el máximo es

$$\max_{\Theta_0} f = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0}\right)^n \exp\left[-\sum_{i=1}^{n} \frac{\left(X_i - \bar{X}\right)^2}{2\sigma_0^2}\right]$$

Por otro lado, ya hemos calculado el máximo sin restricciones, es decir en $\Theta$ y sabemos que se alcanza en

$$\hat{\mu} = \bar{X} \quad \text{y} \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2$$

entonces

$$\max_{\Theta} f = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\hat{\sigma}}\right)^n \exp\left[-\sum_{i=1}^{n} \frac{\left(X_i - \bar{X}\right)^2}{2\hat{\sigma}^2}\right] =$$

# Ejemplo: caso distribución exacta

Luego, en $\Theta_0$ el máximo es

$$\max_{\Theta_0} f = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0}\right)^n \exp\left[-\sum_{i=1}^{n} \frac{\left(X_i - \bar{X}\right)^2}{2\sigma_0^2}\right]$$

Por otro lado, ya hemos calculado el máximo sin restricciones, es decir en $\Theta$ y sabemos que se alcanza en

$$\hat{\mu} = \bar{X} \quad \text{y} \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2$$

entonces

$$\max_{\Theta} f = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\hat{\sigma}}\right)^n \exp\left[-\sum_{i=1}^{n} \frac{\left(X_i - \bar{X}\right)^2}{2\hat{\sigma}^2}\right] = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\hat{\sigma}}\right)^n e^{-n/2}$$

# Ejemplo: caso distribución exacta

Asi, obtenemos que el cociente de verosimilitud es

$$\lambda^* = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0}\right)^n \exp\left[-\sum_{i=1}^n \frac{\left(X_i - \bar{X}\right)^2}{2\sigma_0^2}\right]}{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\hat{\sigma}}\right)^n e^{-n/2}} = e^{n/2}\left(\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma_0^2}\right)^{n/2} \exp\left[-\frac{n}{2}\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma_0^2}\right]$$

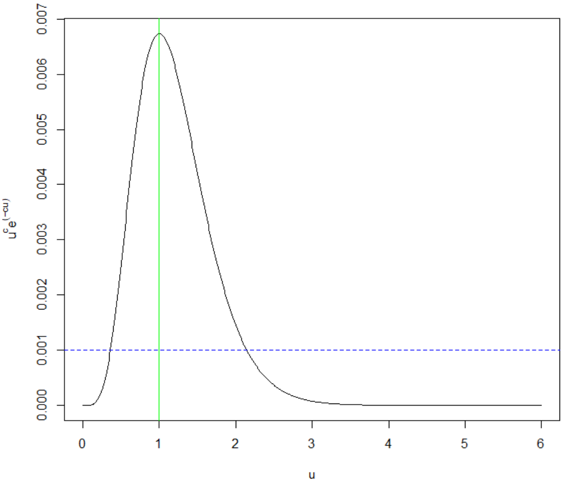
Notemos que $0 < \lambda^* \leq 1$ ya que $\Theta_0 \subset \Theta$, entonces rechazaremos $H_0$ si $\lambda^* \leq k$, donde $k < 1$.

La región de rechazo, $\lambda^* \leq k$, es equivalente a

$$\left(\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma_0^2}\right)^{n/2} \exp\left[-\frac{n}{2}\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma_0^2}\right] \leq k e^{-n/2} = k'$$

La función $g(u) = u^c\, e^{-cu}$ tiene la siguiente forma.

# Función de Potencia ($n = 10$)



# Ejemplo: caso distribución exacta

Entonces la condición

$$\left(\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma_0^2}\right)^{n/2} \exp\left[-\frac{n}{2}\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma_0^2}\right] \leq ke^{-n/2} = k'$$

se cumple si

$$\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma_0^2} \leq a \text{ o } \frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma_0^2} \geq b$$

o equivalentemente

$$\frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma_0^2} \leq na \text{ o } \frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma_0^2} \geq nb$$

Como $\frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma_0^2} = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2_{n-1}$ bajo la hipótesis nula, obtenemos

$$\varphi(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma_0^2} \leq \chi^2_{n-1,1-\alpha/2} \text{ o } \frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma_0^2} \geq \chi^2_{n-1,\alpha/2} \\ 0 & \text{c c.} \end{cases}$$

# Distribución asintótica del test de CV

En muchos casos la distribución de $\lambda^*(\mathbf{X})$ puede ser muy compleja y, en consecuencia, es difícil determinar la constante $k_\alpha$ necesaria para que el test tenga el nivel deseado.

En estas circunstancias, se puede optar por un test de nivel aproximado que surge de estudiar la distribución asintótica y que será útil para muestras de tamaño suficientemente grande.

# Distribución asintótica del test de CV

- $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n) \sim f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$ con $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_p) \in \Theta \subset \mathbb{R}^p$ que contiene una esfera.

- $\Theta_0$ es un conjunto de dimensión $p - j$, $1 \leq j \leq p$.

- $H_0 : \; \boldsymbol{\theta} \in \Theta_0$ vs. $H_1 : \; \boldsymbol{\theta} \in \Theta_1$, con $\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1$.

$$\lambda^*(\mathbf{X}) = \frac{\sup\limits_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta_0} f(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta})}{\sup\limits_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta} f(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta})} \, .$$

Bajo condiciones de regularidad generales en $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$,

$$-2 \ln \lambda^*(\mathbf{X}) \xrightarrow{D} \chi^2_j \text{ cuando } \boldsymbol{\theta} \in \Theta_0$$

.

# Distribución asintótica del test de CV

$\Longrightarrow$ Un test de nivel de significación asintótico $\alpha$ está dado por

$$\phi(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad -2\ln\lambda^*(\mathbf{X}) \geq \chi^2_{j,\alpha} \\ \\ 0 & \text{si} \quad -2\ln\lambda^*(\mathbf{X}) < \chi^2_{j,\alpha} \end{cases}$$

Nosotros deduciremos la distribución en el caso particular en que

$$H_0 : \theta = \theta_0 \text{ vs. } H_1 : \theta \neq \theta_0$$

.

# Distribución asintótica del test de CV

$X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. $X_1 \sim f(x, \theta)$ con $\theta \in \Theta$ y $\Theta$ un abierto en $\mathbb{R}$. Sea $f(\mathbf{x}, \theta)$ la densidad conjunta de $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$.

Supongamos que se cumplen las siguientes condiciones

(A) *El conjunto $\mathcal{S} = \{x : f(x, \theta) > 0\}$ es independiente de $\theta$.*

(B) *Para todo $x \in \mathcal{S}$, $f(x, \theta)$ tiene derivada tercera respecto de $\theta$ continua y tal que*

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^3 \ln f(x, \theta)}{\partial \theta^3} \right| &= \left| \frac{\partial^2 \psi(x, \theta)}{\partial \theta^2} \right| \leq K \quad \forall\, x \in \mathcal{S} \quad \forall\, \theta \in \Theta \\ \psi(x, \theta) &= \frac{\partial \ln f(x, \theta)}{\partial \theta} \,. \end{aligned}$$

# Distribución asintótica del test de CV

(C) *Si* $h(\mathbf{X})$ *es un estadístico tal que* $\mathbb{E}_\theta[|h(\mathbf{X})|] < \infty$, $\forall\ \theta \in \Theta$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} h(\mathbf{x}) f(\mathbf{x},\theta) d\mathbf{x}\right] = \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} h(\mathbf{x}) \frac{\partial f(\mathbf{x},\theta)}{\partial\theta} d\mathbf{x}$$

(D) $0 < I(\theta) = \mathbb{E}_\theta\left[\left(\dfrac{\partial \ln f(X_1,\theta)}{\partial\theta}\right)^2\right] < \infty$ .

*Sea* $\widehat{\theta}_n$ *un EMV de* $\theta$ *consistente,*

$$\lambda^*(\mathbf{X}) = \frac{f(\mathbf{X},\theta_0)}{\sup\limits_{\theta\in\Theta} f(\mathbf{X},\theta)} = \frac{f(\mathbf{X},\theta_0)}{f(\mathbf{X},\widehat{\theta}_n)} .$$

$$\Longrightarrow \qquad U = -2\ln\left(\lambda^*(\mathbf{X})\right) \xrightarrow{D} \chi_1^2$$

# Distribución asintótica del test de CV

El test

$$\phi(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad U \geq \chi^2_{1,\alpha} \\ 0 & \text{si} \quad U < \chi^2_{1,\alpha} \end{cases}$$

donde $U = -2\ln\left(\lambda^*(\mathbf{X})\right)$, tiene nivel de significación asintótico $\alpha$.

# Ejemplo

Sea $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. $X_i \sim Bi(1, \theta)$, $0 < \theta < 1$

Queremos testear $H_0 : \theta = \theta_0$ vs. $\theta \neq \theta_0$.

Luego, el test del cociente de verosimilitud es

$$\lambda^* = \frac{f(\mathbf{x}, \theta_0)}{\sup_{\theta \in \Theta} f(x, \theta)} = \frac{\theta_0^T (1 - \theta_0)^{n-T}}{\overline{X}^T (1 - \overline{X})^{n-T}} \ ,$$

donde $T = \sum_{i=1}^n X_i$.

# Ejemplo

Sea $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. $X_i \sim Bi(1, \theta)$, $0 < \theta < 1$

Queremos testear $H_0 : \theta = \theta_0$ vs. $\theta \neq \theta_0$.

Luego, el test del cociente de verosimilitud es

$$\lambda^* = \frac{f(\mathbf{x}, \theta_0)}{\sup_{\theta \in \Theta} f(x, \theta)} = \frac{\theta_0^T (1-\theta_0)^{n-T}}{\overline{X}^T (1-\overline{X})^{n-T}} \ ,$$

donde $T = \sum_{i=1}^n X_i$. Luego,

$$U = -2 \ln \lambda^* = 2T \ln \frac{\overline{X}}{\theta_0} + 2(n-T) \ln \frac{(1-\overline{X})}{1-\theta_0}$$

tiene una distribución asintótica $\chi_1^2$ bajo $H_0$ y un test de nivel asintótico estará dado por

$$\varphi(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad U \geq \chi^2_{1,\alpha} \\ & \\ 0 & \text{si} \quad U < \chi^2_{1,\alpha} \ . \end{cases}$$

# Demo (Video)

Sea $\ell(\theta) = \ln f(\mathbf{X}, \theta) = \sum_{i=1}^{n} \ln\left(f(X_i, \theta)\right)$ .

Denotamos $\ell'$, $\ell''$ y $\ell'''$ a las derivadas hasta el orden tres respecto de $\theta$ de la función $\ell$ y por

$$\psi'(x, \theta) = \frac{\partial \psi(x, \theta)}{\partial \theta} \quad \text{y} \quad \psi''(x, \theta) = \frac{\partial^2 \psi(x, \theta)}{\partial \theta^2}.$$

Luego, $\widehat{\theta}_n$ verifica

$$\ell'(\widehat{\theta}_n) = \sum_{i=1}^{n} \psi(X_i, \widehat{\theta}_n) = 0 \ .$$

# Demo (Video)

Sea $\ell(\theta) = \ln f(\mathbf{X}, \theta) = \sum_{i=1}^{n} \ln \left( f(X_i, \theta) \right)$ .

Denotamos $\ell'$, $\ell''$ y $\ell'''$ a las derivadas hasta el orden tres respecto de $\theta$ de la función $\ell$ y por

$$\psi'(x, \theta) = \frac{\partial \psi(x, \theta)}{\partial \theta} \quad \text{y} \quad \psi''(x, \theta) = \frac{\partial^2 \psi(x, \theta)}{\partial \theta^2}.$$

Luego, $\widehat{\theta}_n$ verifica

$$\ell'(\widehat{\theta}_n) = \sum_{i=1}^{n} \psi(X_i, \widehat{\theta}_n) = 0 \ .$$

Desarrollando por Taylor alrededor de $\widehat{\theta}_n$ resulta

$$\ell(\theta_0) - \ell(\widehat{\theta}_n) \quad = \quad \ell'(\widehat{\theta}_n)(\theta_0 - \widehat{\theta}_n) + \frac{1}{2}\ell''(\xi_n^1)(\theta_0 - \widehat{\theta}_n)^2$$

# Demo (Video)

Sea $\ell(\theta) = \ln f(\mathbf{X}, \theta) = \sum_{i=1}^n \ln\left(f(X_i, \theta)\right)$ .

Denotamos $\ell'$, $\ell''$ y $\ell'''$ a las derivadas hasta el orden tres respecto de $\theta$ de la función $\ell$ y por

$$\psi'(x,\theta) = \frac{\partial \psi(x,\theta)}{\partial \theta} \quad \text{y} \quad \psi''(x,\theta) = \frac{\partial^2 \psi(x,\theta)}{\partial \theta^2}.$$

Luego, $\widehat{\theta}_n$ verifica

$$\ell'(\widehat{\theta}_n) = \sum_{i=1}^n \psi(X_i, \widehat{\theta}_n) = 0 \ .$$

Desarrollando por Taylor alrededor de $\widehat{\theta}_n$ resulta

$$\begin{aligned}
\ell(\theta_0) - \ell(\widehat{\theta}_n) &= \ell'(\widehat{\theta}_n)(\theta_0 - \widehat{\theta}_n) + \frac{1}{2}\ell''(\xi_n^1)(\theta_0 - \widehat{\theta}_n)^2 \\
&= \frac{1}{2}(\theta_0 - \widehat{\theta}_n)^2 \left(\sum_{i=1}^n \psi'(X_i, \xi_n^1)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(n(\theta_0 - \widehat{\theta}_n)^2\right) \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \psi'(X_i, \theta_0) + R_n \ ,
\end{aligned}$$

donde $\xi_n^1$ es un punto intermedio entre $\widehat{\theta}_n$ y $\theta_0$ y

$$R_n = \frac{1}{2}\left(n(\theta_0 - \widehat{\theta}_n)^2\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \psi'(X_i, \xi_n^1) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \psi'(X_i, \theta_0)\right) \ .$$

Aplicando el Teorema del Valor Medio resulta

$$R_n = \frac{1}{2}\left(n(\theta_0 - \widehat{\theta}_n)^2\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\psi''(X_i, \xi_n^2)(\xi_n^1 - \theta_0)\right) \tag{5}$$

donde $\xi_n^2$ es un punto intermedio entre $\xi_n^1$ y $\theta_0$.

Aplicando el Teorema del Valor Medio resulta

$$R_n = \frac{1}{2}\left(n(\theta_0 - \widehat{\theta}_n)^2\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\psi''(X_i, \xi_n^2)(\xi_n^1 - \theta_0)\right) \tag{5}$$

donde $\xi_n^2$ es un punto intermedio entre $\xi_n^1$ y $\theta_0$.

Si definimos $A_n = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\psi'(X_i, \theta_0)$, entonces

$$Z = 2\left(\ell(\widehat{\theta}_n) - \ell(\theta_0)\right) = \left(n(\widehat{\theta}_n - \theta_0)^2\right) A_n - R_n \ . \tag{6}$$

Por un lado, tenemos que cuando $\theta = \theta_0$

$$\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n - \theta_0) \xrightarrow{D} \mathsf{N}(0, \frac{1}{I(\theta_0)})$$

y así resulta que

$$I(\theta_0)\, n\, (\widehat{\theta}_n - \theta_0)^2 \xrightarrow{D} \chi_1^2 \tag{7}$$

Por otro lado, por la L.G.N.

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\psi'(X_i,\theta_0) \xrightarrow{p} \mathbb{E}(\psi'(X_1,\theta_0)) = -I(\theta_0) \tag{8}$$

con lo cual

$$\left(n\,(\widehat{\theta}_n-\theta_0)^2\right)\, A_n \xrightarrow{D} \chi^2_1\,. \tag{9}$$

Por lo tanto, deducimos que para obtener el resultado deseado bastará probar que

$$R_n \xrightarrow{p} 0.$$

Notemos que

$$R_n = \frac{1}{2}\left(n(\theta_0 - \widehat{\theta}_n)^2\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\psi'(X_i, \xi_n^1) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\psi'(X_i, \theta_0)\right) \ ,$$

entonces

$$R_n = \frac{1}{2}\left(n(\theta_0 - \widehat{\theta}_n)^2\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\psi''(X_i, \xi_n^2)(\xi_n^1 - \theta_0)\right)$$

donde $\xi_n^2$ es un punto intermedio entre $\xi_n^1$ y $\theta_0$. Como $\widehat{\theta}_n$ es un estimador consistente, se obtiene que $\xi_n^j \xrightarrow{p} \theta_0$ para $j = 1, 2$. Además, observemos que como $|\psi''(X_i, \theta)| \leq K$ para todo $\theta$, en consecuencia vale

$$\left|\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}\psi''(X_i, \xi_n^2)(\xi_n^1 - \theta_0)\right| \leq \frac{K}{2}|(\xi_n^1 - \theta_0)|$$

y luego como $\xi_n^1 \xrightarrow{p} \theta_0$ se deduce que:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\psi''(X_i, \xi_n^2)(\xi_n^1 - \theta_0) \xrightarrow{p} 0\,. \tag{10}$$

y obtenemos que $R_n \xrightarrow{p} 0$ ya que además $n(\widehat{\theta}_n - \theta_0)^2$ está acotado en probabilidad.

# Dos Muestras

Mediante el método del pivote podemos obtener tests de hipótesis que involucren dos muestras usando los pivotes con los que trabajamos en el contexto de intervalos de confianza.

Volvamos al ejemplo de las parcelas

# Dos Muestras

Mediante el método del pivote podemos obtener tests de hipótesis que involucren dos muestras usando los pivotes con los que trabajamos en el contexto de intervalos de confianza.

Volvamos al ejemplo de las parcelas

**Ejemplo: Comparamos dos tratamientos**

- **Objetivo**: comparar el rendimiento de dos fertilizantes.
- Se divide un terreno en 30 parcelas homogéneas (por ej. cant. sol, humedad, etc.).
- En las 30 parcelas se cultiva la misma variedad de maíz.
- En 15 de ellas se utiliza el fertilizante A y en las restantes el B.

# Ejemplo: Comparamos dos tratamientos

Datos

- Parcelas con Tratamiento A

$$238, 237, 235, 220, 233, 203, 228, 220, 221,$$
$$215, 218, 217, 232, 225, 209$$

- Parcelas con Tratamiento B

$$253, 227, 241, 245, 237, 248, 250, 218, 239,$$
$$243, 257, 208, 215, 240, 229$$

- Queremos comparar el rendimiento medio de esta variedad de maíz cuando el terreno se trata con estos dos fertilizantes.

# Modelo 1: Muestras normales independientes con igual varianza

Supongamos que:

- $X_1, \ldots, X_{n_1} \sim \mathcal{N}\left(\mu_1, \sigma^2\right),$
- $Y_1, \ldots, Y_{n_2} \sim \mathcal{N}\left(\mu_2, \sigma^2\right)$

Además, asumimos que:

Las dos muestras aleatorias, independientes entre sí.

# Test para $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \Delta$ vs. $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq \Delta$

En muchas situaciones $\Delta = 0$. Notemos que en nuestro ejemplo podemos reescribir las hipótesis como:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \text{ vs. } H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

**Varianzas DESconocidas pero IGUALES** $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$

$$\frac{\overline{X}_{n_1} - \overline{Y}_{n_2} - \Delta}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim \mathcal{N}(0,1) \;, \quad \frac{\overline{X}_{n_1} - \overline{Y}_{n_2} - \Delta}{\sqrt{\sigma^2 \left( \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Necesitamos estimar $\sigma^2$. Tenemos dos estimadores:

$$S_1^2 = \frac{1}{n_1 - 1} \sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \overline{X}_{n_1})^2 \;, \quad S_2^2 = \frac{1}{n_2 - 1} \sum_{i=1}^{n_2} (Y_i - \overline{Y}_{n_2})^2$$

# Test para $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \Delta$ vs. $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq \Delta$

En muchas situaciones $\Delta = 0$. Notemos que en nuestro ejemplo podemos reescribir las hipótesis como:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \text{ vs. } H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

**Varianzas DESconocidas pero IGUALES** $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$

$$\frac{\overline{X}_{n_1} - \overline{Y}_{n_2} - \Delta}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim \mathcal{N}(0,1) \;, \quad \frac{\overline{X}_{n_1} - \overline{Y}_{n_2} - \Delta}{\sqrt{\sigma^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Necesitamos estimar $\sigma^2$. Tenemos dos estimadores:

$$S_1^2 = \frac{1}{n_1 - 1} \sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \overline{X}_{n_1})^2 \;, \quad S_2^2 = \frac{1}{n_2 - 1} \sum_{i=1}^{n_2} (Y_i - \overline{Y}_{n_2})^2$$

Los combinamos:

$$S_p^2 = \frac{S_1^2 (n_1 - 1) + S_2^2 (n_2 - 1)}{n_1 + n_2 - 2}$$

# El pivote

$$\frac{\overline{X}_{n_1} - \overline{Y}_{n_2} - \Delta}{\sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \sim t_{n_1+n_2-2}\ , \quad S_p^2 = \frac{S_1^2\,(n_1 - 1) + S_2^2\,(n_2 - 1)}{n_1 + n_2 - 2}$$

# El pivote

$$\frac{\overline{X}_{n_1} - \overline{Y}_{n_2} - \Delta}{\sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \sim t_{n_1+n_2-2}\,, \quad S_p^2 = \frac{S_1^2\,(n_1-1) + S_2^2\,(n_2-1)}{n_1+n_2-2}$$

$$\frac{\dfrac{\overline{X}_{n_1} - \overline{Y}_{n_2} - \Delta}{\sqrt{\sigma^2\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}}}{\sqrt{\dfrac{S_1^2\,(n_1-1) + S_2^2\,(n_2-1)}{\sigma^2(n_1+n_2-2)}}} \sim \frac{\mathcal{N}(0,1)}{\sqrt{\dfrac{\chi^2_{n_1+n_2-2}}{n_1+n_2-2}}} \sim t_{n_1+n_2-2}$$

# El pivote

$$\frac{\dfrac{\overline{X}_{n_1} - \overline{Y}_{n_2} - \Delta}{\sqrt{\sigma^2 \left( \dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2} \right)}}}{\sqrt{\dfrac{S_1^2\,(n_1 - 1) + S_2^2\,(n_2 - 1)}{\sigma^2 (n_1 + n_2 - 2)}}} \sim \frac{\mathcal{N}(0,1)}{\sqrt{\dfrac{\chi^2_{n_1+n_2-2}}{n_1 + n_2 - 2}}} \sim t_{n_1+n_2-2}$$

ya que son independientes

$$\frac{\overline{X}_{n_1} - \overline{Y}_{n_2} - \Delta}{\sqrt{\sigma^2 \left( \dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2} \right)}} \sim \mathcal{N}(0,1),$$

$$\frac{S_1^2\,(n_1 - 1)}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n_1-1}$$

y

$$\frac{S_2^2\,(n_2 - 1)}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n_2-1}$$

## $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \Delta$ vs. $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq \Delta$

Test de nivel $\alpha$

Rechazamos $H_0$ si

$$\frac{|\overline{X}_{n_1} - \overline{Y}_{n_2} - \Delta|}{\sqrt{S_p^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} > t_{n_1+n_2-2,\alpha/2}$$

## $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \Delta$ vs. $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq \Delta$

Test de nivel $\alpha$

Rechazamos $H_0$ si

$$\frac{|\overline{X}_{n_1} - \overline{Y}_{n_2} - \Delta|}{\sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} > t_{n_1+n_2-2,\alpha/2}$$

.....¿y cómo sabemos que las varianza son iguales????

El test más tradicional para chequear esto es el test de F que asume que las dos poblaciones son normales.