Caso Normal

- $X_1, \ldots, X_n$ m.a. $N(\mu, \sigma_0^2)$ σ_0^2 conocido,
- $H_0 : \mu = \mu_0$ vs. $H_1 : \mu = \mu_1$ (con $\mu_1 > \mu_0$)
  El test **más potente** de nivel α es

$$\phi_1(X_1, \ldots, X_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sqrt{n}\frac{(\overline{X}-\mu_0)}{\sigma_0} \geq z_\alpha \\ \\ 0 & \text{si } \sqrt{n}\frac{(\overline{X}-\mu_0)}{\sigma_0} < z_\alpha \end{cases}$$

- ϕ_1 es **uniformemente más potente (UMP)** de nivel α para
  $H_0 : \mu \leq \mu_0$ vs. $H_1 : \mu > \mu_0$
- $\pi_{\phi_1}(\mu) = 1 - \Phi\left(z_\alpha + \sqrt{n}\frac{(\mu_0 - \mu)}{\sigma_0}\right)$

Caso Normal

Rechazamos si

$$k \leq \frac{f\left(\mathbf{x},\mu_1\right)}{f\left(\mathbf{x},\mu_0\right)} = \frac{\prod_{i=1}^{n}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i-\mu_1}{\sigma_0}\right)^2}\right\}}{\prod_{i=1}^{n}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i-\mu_0}{\sigma_0}\right)^2}\right\}}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0}\right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2} e^{-\frac{1}{2\sigma_0^2}\left\{-2\mu_1\sum_{i=1}^{n} x_i + n\mu_1^2\right\}}}{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0}\right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2} e^{-\frac{1}{2\sigma_0^2}\left\{-2\mu_0\sum_{i=1}^{n} x_i + n\mu_0^2\right\}}}$$

$$= e^{\frac{1}{\sigma_0^2}\left(\mu_1-\mu_0\right)\sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{n}{2\sigma_0^2}\left(\mu_1^2-\mu_0^2\right)}$$

Tomemos logaritmo en ambos miembros.

Caso Normal

Desarrollando esta desigualdad, se tiene que rechazamos si

$$2(\mu_1 - \mu_0) \sum_{i=1}^{n} X_i \geq 2\sigma_0^2 \ln k + n\mu_1^2 - n\mu_0^2 \; .$$

Como $\mu_1 - \mu_0 > 0$, se tiene que rechazamos si

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \geq \frac{2\sigma_0^2 \ln k + n\mu_1^2 - n\mu_0^2}{2(\mu_1 - \mu_0)}$$

pero el segundo miembro de esta desigualdad es una constante, que llamamos k'.

Luego, el test más potente es de la forma

$$\phi_1(X_1, \ldots, X_n) = 1 \qquad \text{si} \qquad \sum_{i=1}^{n} X_i \geq k'$$

La constante k' deberá elegirse de modo que

$$\mathbb{E}_{\mu_0}(\phi_1(X_1, \ldots, X_n) = \alpha$$

Para encontrar el k' que satisfaga esto, estandarizamos y para ello escribimos el test de la siguiente forma $\phi_1(X_1, \ldots, X_n) = 1$ si

$$\sqrt{n}\frac{(\overline{X}_n - \mu_0)}{\sigma_0} \geq \sqrt{n}\frac{(k'/n - \mu_0)}{\sigma_0}$$

donde $\overline{X}_n = (1/n)\sum_{i=1}^{n} X_i$. Nuevamente, tomando $k'' = \sqrt{n}(k'/n - \mu_0)/\sigma_0$, resulta

$$\phi_1(X_1, \ldots, X_n) = 1 \quad \text{si } \sqrt{n}\frac{(\overline{X}_n - \mu_0)}{\sigma_0} \geq k''.$$

Calculemos k''. De acuerdo con el Lema de Neyman–Pearson, debería tenerse que

$$\begin{aligned} \alpha &= \mathbb{E}_{\mu_0}(\phi_1(X_1, \ldots, X_n)) \\ &= \mathbb{P}_{\mu_0}(\phi_1(X_1, \ldots, X_n) = 1) \\ &= \mathbb{P}_{\mu_0}(\sqrt{n}\frac{(\overline{X}_n - \mu_0)}{\sigma_0} \geq k'') \; . \end{aligned}$$

Como cuando μ es μ_0, $\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu_0)/\sigma_0 \sim N(0,1)$, tenemos que k'' debe ser igual a z_α.

Finalmente, el test queda como

$$\phi_1(X_1, \ldots, X_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sqrt{n}\frac{(\overline{X} - \mu_0)}{\sigma_0} \geq z_\alpha \\ \\ 0 & \text{si } \sqrt{n}\frac{(\overline{X} - \mu_0)}{\sigma_0} < z_\alpha \end{cases}$$

Observaciones

- El test no depende de μ_1, sólo usamos que $\mu_1 > \mu_0$. Es decir, el test es el mismo cualquiera sea $\mu_1 > \mu_0$.
- El test resulta uniformemente más potente de nivel menor o igual que α para testear $H_0 : \mu = \mu_0$ vs. $H_1 : \mu > \mu_0$

Caso Normal: Función de Potencia

Notemos que tras algún manejo algebraico podemos escribir al test

$$\phi_1(X_1, \ldots, X_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sqrt{n}\frac{(\overline{X}_n - \mu)}{\sigma_0} \geq z_\alpha + \sqrt{n}\frac{(\mu_0 - \mu)}{\sigma_0} \\ \\ 0 & \text{si } \sqrt{n}\frac{(\overline{X}_n - \mu)}{\sigma_0} < z_\alpha + \sqrt{n}\frac{(\mu_0 - \mu)}{\sigma_0} \end{cases} \tag{3}$$

Luego, la función de potencia del test ϕ_1 definido está dada por

$$\pi_{\phi_1}(\mu) = \mathbb{E}_\mu(\phi_1(\mathbf{X})) = \mathbb{P}_\mu\left(\sqrt{n}\frac{(\overline{X}_n - \mu)}{\sigma_0} \geq z_\alpha + \sqrt{n}\frac{(\mu_0 - \mu)}{\sigma_0}\right)$$

y por lo tanto

$$\pi_{\phi_1}(\mu) = 1 - \Phi\left(z_\alpha + \sqrt{n}\frac{(\mu_0 - \mu)}{\sigma_0}\right) \, .$$

Caso Normal: Función de Potencia

$$\pi_{\phi_1}(\mu) = 1 - \Phi\left(z_\alpha + \sqrt{n}\frac{(\mu_0 - \mu)}{\sigma_0}\right)$$

Notemos que

A. $\pi_{\phi_1}(\mu)$ para n fijo es una función creciente de μ, ya que Φ es una función creciente.

B. $\pi_{\phi_1}(\mu_0) = \alpha$.

C. $\lim_{\mu\to+\infty} \pi_{\phi_1}(\mu) = \lim_{x\to-\infty}(1 - \Phi(x)) = 1$.

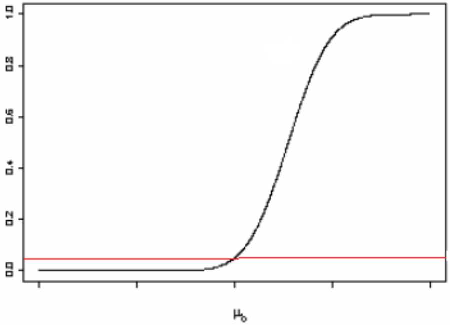
D. $\lim_{\mu\to-\infty} \pi_{\phi_1}(\mu) = \lim_{x\to+\infty}(1 - \Phi(x)) = 0$.

E. Para μ fijo, $\mu > \mu_0$, se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \pi_{\phi_1}(\mu) = \lim_{x\to-\infty}(1 - \Phi(x)) = 1$$

de donde se deduce que para un $\mu > \mu_0$, la probabilidad de error de tipo II se puede hacer tan pequeña como se desee tomando n suficientemente grande.

Función de Potencia de ϕ_1



Caso Normal: Función de Potencia de ϕ_1

Notemos que

- De A y de B resulta que

$$\sup_{\mu \leq \mu_0} \pi_{\phi_1}(\mu) = \alpha,$$

  y luego ϕ_1 resulta un test de nivel igual que α para $H_0 : \mu \leq \mu_0$ vs. $H_1 : \mu > \mu_0$.

- Si ϕ^* es otro test de nivel $\leq \alpha$ para $H_0 : \mu \leq \mu_0$; también tendrá este nivel para $H_0 : \mu = \mu_0$, pero ϕ_1 es el test uniformemente más potente para $H_0 : \mu = \mu_0$ contra $H_1 : \mu > \mu_0$. Entonces se tiene

$$\pi_{\phi_1}(\mu) \geq \pi_{\phi^*}(\mu) \quad \forall\, \mu > \mu_0$$

  y ϕ_1 resulta el test más potente de nivel menor o igual que α para $H_0 : \mu \leq \mu_0$ vs. $H_1 : \mu > \mu_0$.

Caso Normal

- $X_1, \ldots, X_n$ m.a. $N(\mu, \sigma_0^2)$ σ_0^2 conocido,
- $H_0 : \mu = \mu_0$ vs. $H_1 : \mu = \mu_1$ (con $\mu_1 < \mu_0$)
  El test **uniformemente más potente** de nivel α es

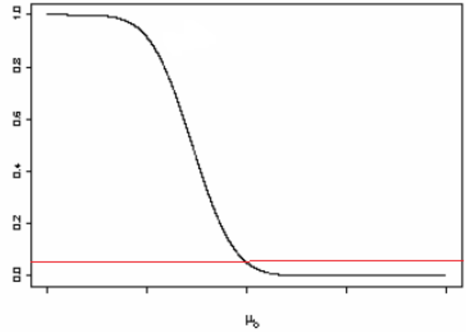
$$\phi_2(X_1, \ldots, X_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sqrt{n}\frac{(\overline{X} - \mu_0)}{\sigma_0} \leq -z_\alpha \\ 0 & \text{si } \sqrt{n}\frac{(\overline{X} - \mu_0)}{\sigma_0} > -z_\alpha \end{cases}$$

- ϕ_2 es **UMP** de nivel α para

$$H_0 : \mu \geq \mu_0 \text{ vs. } H_1 : \mu < \mu_0$$

- $\pi_{\phi_2}(\mu) = \Phi\left(-z_\alpha + \sqrt{n}\frac{(\mu_0 - \mu)}{\sigma_0}\right)$

Caso Normal: Función de Potencia de ϕ_2



Caso Normal

- $X_1, \ldots, X_n$ m.a. $N(\mu, \sigma_0^2)$ σ_0^2 conocido,

- ϕ_1 tiene función de potencia creciente

  Es **UMP** de nivel α para

  $$H_0 : \mu \leq \mu_0 \text{ contra } H_1 : \mu > \mu_0$$

- ϕ_2 tiene función de potencia decreciente

  Es **UMP** de nivel α para

  $$H_0 : \mu \geq \mu_0 \text{ contra } H_1 : \mu < \mu_0$$

Caso Normal

- $X_1, \ldots, X_n$ m.a. $N(\mu, \sigma_0^2)$ σ_0^2 conocido,

- ϕ_1 tiene función de potencia creciente

  Es **UMP** de nivel α para
  $$H_0 : \mu \leq \mu_0 \text{ contra } H_1 : \mu > \mu_0$$

- ϕ_2 tiene función de potencia decreciente

  Es **UMP** de nivel α para
  $$H_0 : \mu \geq \mu_0 \text{ contra } H_1 : \mu < \mu_0$$

- ¿Cómo queda en el caso bilateral?
  $$H_0 : \mu = \mu_0 \text{ contra } H_1 : \mu \neq \mu_0$$

  ¿Hay un test UMP?

Caso Normal: Caso bilateral

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad vs. \quad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

- Notemos en este caso los tests que vimos para las hipótesis unilaterales $H_1 : \mu > \mu_0$ y $H_1 : \mu < \mu_0$, ϕ_1 y ϕ_2 respectivamente, tienen nivel α para el caso bilateral.
- Aunque estos tests tienen el nivel deseado para el caso bilateralno son buenos tests para este problema. (¿Por qué?)
- Si existiera un test ϕ_3 UMP de nivel α para las hipótesis bilaterales, en particular, sería más potente para testear $H_0 : \mu = \mu_0$ contra $H_1 : \mu = \mu_1$ para un $\mu_1 > \mu_0$ a dicho nivel, pero como ϕ_1 es más potente en ese caso entonces $\pi_{\phi_3}(\mu_1) = \pi_{\phi_1}(\mu_1)$, y eso para todo $\mu_1 > \mu_0$, por lo que el test ϕ_3 debería rechazar como ϕ_1. Haciendo el mismo razonamiento para $\mu_1 < \mu_0$, vemos que $\pi_{\phi_3}(\mu_1) = \pi_{\phi_2}(\mu_1)$ para todo $\mu_1 < \mu_0$, por lo que el test debería rechazar como ϕ_2, pero no hay un test que se pueda comportar de esta manera.

Casos de especial interés

El lema puede ser especialmente útil en algunas familias de distribuciones. Por caso, lo que se conoce como familia exponencial a un parámetro.

Decimos que $X \sim f(x;\theta)$ pertenece a una familia exponencial de un parámetro si

$$f(x;\theta) = \exp\{\eta(\theta)T(x) - d(\theta)\}S(x)$$

Ejemplos:

- Veamos el caso $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$

$$f(x,\theta) = \frac{\theta^x \exp(-\theta)}{x!}\ \mathbb{I}_{\mathbb{N}_0}(x)$$

- Puede reescribirse como

$$f(x,\theta) = e^{x\log(\theta)-\theta}\ \frac{1}{x!}\ \mathbb{I}_{\mathbb{N}_0}(x)$$

Casos de especial interés

- Veamos el caso $X \sim Bi(n,p)$

$$
\begin{aligned}
f(x,p) &= \left(\begin{array}{c} n \\ x \end{array}\right) p^x (1-p)^{n-x} I_{\{x\in\{0,1,\cdots,n\}\}} \\
&= \left(\begin{array}{c} n \\ x \end{array}\right) \left(\frac{p}{1-p}\right)^x (1-p)^n I_{\{x\in\{0,1,\cdots,n\}\}} \\
&= \left(\begin{array}{c} n \\ x \end{array}\right) e^{x\log\frac{p}{1-p}+n\log(1-p)} I_{\{x\in\{0,1,\cdots,n\}\}}
\end{aligned}
$$

- Sea $X \sim U(0,\theta)$ ¿pertenece a un familia exponencial a un parámetro? Ejercicio

Aplicación de NP

Sea $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} f(x;\theta)$,donde

$$f(x;\theta) = \exp\{\eta(\theta)T(x) - d(\theta)\}\, S(x)$$

es una familia exponencial a un parámetro, con η creciente.

Queremos testear $H_0 : \theta = \theta_0$ vs. $H_1 : \theta = \theta_1$.

Asumamos que $\theta_0 < \theta_1$.

El Lema de Neyman-Pearson nos dice que construyamos el estadístico

$$\mathbb{I}\left\{L\left(\theta_1\right)/L\left(\theta_0\right) > k\right\} = \mathbb{I}\left\{\log L\left(\theta_1\right) - \log L\left(\theta_0\right) > \log k\right\}$$

Aplicación de NP

Comprobar que usando la forma de $f(x;\theta)$, obtenemos

$$\begin{aligned}\phi &= \mathbb{I}\left\{(\eta(\theta_1)-\eta(\theta_0))\sum_{i=1}^{n} T(X_i) - n(d(\theta_1)-d(\theta_0)) > \log k\right\} \\ &= \mathbb{I}\left\{\sum_{i=1}^{n} T(X_i) > \frac{\log k + n(d(\theta_1)-d(\theta_0))}{\eta(\theta_1)-\eta(\theta_0)}\right\}\end{aligned}$$

Notemos que $\eta(\theta_1)-\eta(\theta_0)>0$ ya que η es creciente y $n(d(\theta_1)-d(\theta_0))$es constante.

Luego, tenemos que el estadístico del test queda de la forma

$$\phi(X_1,\ldots,X_n) = \mathbb{I}\{\tau(X_1,\ldots,X_n) > k^*\}$$

para τ convenientemente definido.

Método del Pivote para Tests

Teorema: Sea $U = U(\mathbf{X}, \theta)$ un pivote decreciente en θ con distribución conocida G independiente de θ, y u_π su cuantil π. Dados θ_0 y α tenemos:

a) El test φ con región de rechazo $U(\mathbf{X}, \theta_0) > u_{1-\alpha}$ es un test de nivel α para chequear $H_0 : \theta \leq \theta_0$ (o de $H_0 : \theta = \theta_0$) vs. $H_1 : \theta > \theta_0$

b) El test φ con región de rechazo $U(\mathrm{X}, \theta_0) < u_{\alpha/2}$ o $U(\mathrm{X}, \theta_0) > u_{1-\alpha/2}$ es un test de nivel α de $H_0 : \theta = \theta_0$ vs. $H_1 : \theta \neq \theta_0$

Método del Pivote para Tests

Teorema: Sea $U = U(\mathbf{X}, \theta)$ un pivote decreciente en θ con distribución conocida G independiente de θ, y u_π su cuantil π. Dados θ_0 y α tenemos:

a) El test φ con región de rechazo $U(\mathbf{X}, \theta_0) > u_{1-\alpha}$ es un test de nivel α para chequear $H_0 : \theta \leq \theta_0$ (o de $H_0 : \theta = \theta_0$) vs. $H_1 : \theta > \theta_0$

b) El test φ con región de rechazo $U(\mathrm{X}, \theta_0) < u_{\alpha/2}$ o $U(\mathrm{X}, \theta_0) > u_{1-\alpha/2}$ es un test de nivel α de $H_0 : \theta = \theta_0$ vs. $H_1 : \theta \neq \theta_0$

Verifiquemos el caso unilateral. Tenemos $\theta \in \Theta_0 \iff \theta \leq \theta_0$, luego

$$\theta \in \Theta_0 \Longrightarrow U(\mathbf{X}, \theta) \geq U(\mathbf{X}, \theta_0)$$

por ser U decreciente. Por lo tanto,

$$\theta \in \Theta_0 \Longrightarrow \mathbb{P}_\theta(\varphi = 1) = \mathbb{P}_\theta(U(\mathbf{X}, \theta_0) > u_{1-\alpha}) \leq \mathbb{P}_\theta(U(\mathrm{X}, \theta) > u_{1-\alpha}) = \alpha$$

Como $\mathbb{P}_{\theta_0}(\varphi = 1) = \alpha$, el nivel es α.

Análogamente para el test bilateral. **Ejercicio**

Ejemplo

- $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d., $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 desconocida.

$$H_0 : \mu = \mu_0 \text{ vs. } H_1 : \mu \neq \mu_0$$

El test

$$\varphi(X_1, \ldots, X_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sqrt{n}\frac{|\overline{X} - \mu_0|}{S} \geq t_{n-1,\alpha/2} \\ \\ 0 & \text{si } \sqrt{n}\frac{|\overline{X} - \mu_0|}{S} < t_{n-1,\alpha/2} \end{cases}$$

tiene nivel α

Ejemplo de duración de baterías

- Los siguientes datos corresponden a la duración en horas de 18 baterías eléctricas (Maronna, 2021):

  237 242 232 242 248 230 244 243 254
  262 234 220 225 246 232 218 228 240

- Supongamos que un comprador decide adquirir el lote de baterías si el vendedor demuestra que su vida media es mayor a 235 hs., con una probabilidad 0.01 de adquirir un lote malo. Solo para ilustración, como antes, suponemos que los datos tienen distribución normal.

Vayamos al R.

Test para $H_0 : \mu \leq \mu_0$ vs. $H_1 : \mu > \mu_0$

- $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d., $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 desconocida.

$$\phi(X_1, \ldots, X_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sqrt{n}\frac{\overline{X}-\mu_0}{S} \geq t_{n-1,\alpha} \\ 0 & \text{si } \sqrt{n}\frac{\overline{X}-\mu_0}{S} < t_{n-1,\alpha} \end{cases}$$

¿Cuál es la potencia de este test?

Para responder esta pregunta, necesitaremos la siguiente distribución.

Distribución $\mathcal{T}_k(\Delta)$

- *Distribución de Student no central con k grados de libertad y parámetro de no centralidad Δ:* $t_k(\Delta)$ es la distribución de

$$\frac{Z + \Delta}{\sqrt{U/k}}$$

  con $Z \sim N(0,1)$ independiente de $U \sim \chi^2_k$.

- Sea $\Delta = \sqrt{n}(\mu - \mu_0)/\sigma$. Se puede demostrar que la potencia del test depende de (μ, σ^2) solo a través de Δ.

Sea

$$T = \frac{\sqrt{n}(\overline{X} - \mu_0)}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}} =$$

Sea

$$T = \frac{\sqrt{n}(\overline{X} - \mu_0)}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}} = \frac{\sqrt{n}\frac{(\overline{X}-\mu_0)}{\sigma}}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{\sigma^2}}}$$

resulta

$$T = \frac{\sqrt{n}\frac{(\overline{X}-\mu)}{\sigma} + \sqrt{n}\frac{(\mu-\mu_0)}{\sigma}}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{\sigma^2}}} \ .$$

Llamando $U = \sqrt{n}(\overline{X} - \mu)/\sigma$ y $V = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2/\sigma^2$ se tiene que U y V son independientes, y cuando los valores de los parámetros son μ y σ^2:

- $U \sim N(0,1)$

- $V \sim \chi^2_{n-1}$.

Luego, T tiene distribución $t_{n-1}(\Delta)$ donde $\Delta = \sqrt{n}(\mu - \mu_0)/\sigma$.

Test para $H_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2$ vs. $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$

- $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d., $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, μ desconocida.

$$(n-1)\frac{S^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

y además es una función decreciente de σ^2. Por lo tanto, usando el método del pivote, el test

$$\varphi(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \dfrac{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2}{\sigma_0^2} \geq \chi^2_{n-1,\alpha} \\ 0 & \text{si } \dfrac{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{n-1,\alpha} \;. \end{cases}$$

tiene nivel α.

¿Cuál es la potencia de este test?

Test para $H_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2$ vs. $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$

¿Cuál es la potencia de este test?

$$
\begin{aligned}
\pi_\varphi(\sigma^2) &= \mathbb{P}_{\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 \geq \sigma_0^2\chi^2_{n-1,\alpha}\right) \\
&= \mathbb{P}_{\sigma^2}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{\sigma^2} \geq \frac{\sigma_0^2\chi^2_{n-1,\alpha}}{\sigma^2}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(V \geq \frac{\sigma_0^2\chi^2_{n-1,\alpha}}{\sigma^2}\right) = 1 - F_V\left(\frac{\sigma_0^2\chi^2_{n-1,\alpha}}{\sigma^2}\right) \ ,
\end{aligned}
$$

siendo $V \sim \chi^2_{n-1}$.

$\pi_\varphi(\sigma^2)$ resulta una función creciente de σ^2.