Metodos No Parametricos - Final

Gonzalo Barrera Borla

Lunes 15/08/2019

Contents

1 Notación

- $[n]$ representa el conjunto de los naturales de 1 hasta n, $1, 2, 3, \ldots, n$
- $\mathbb{I}$ representa la función indicadora, $\mathbb{I}(P) = \begin{cases} 1 & \text{si P es verdadera} \\ 0 & \text{si P es falsa} \end{cases}$
- $\Pr(X)$ es la probabilidad del evento X
- E, Var son los operadores esperanza y varianza, respectivamente

2 Ejercicios

2.1 Practica 1, ej. 4

Un empresario de la industria alimenticia asegura que menos del 10% de sus frascos de café instantáneo contiene menos café del que garantiza la etiqueta. Para probar esta afirmación se eligen al azar 15 frascos de café y se pesa su contenido. Su afirmación es aceptada si a lo sumo dos frascos contienen menos café del garantizado.

1. ¿Qué hipótesis se deben testear?
2. ¿Cuál es el nivel de la regla de decisión planteada? ¿Le parece razonable?
3. Encuentre la probabilidad de que la afirmación del empresario sea aceptada cuando el porcentaje real de frascos que contienen menos café del garantizado en la etiqueta es 5%, 10% y 20%.
4. Grafique la función de potencia del test planteado inicialmente. Muestre que es insesgado.
5. Con el tamaño de muestra dado, ¿es posible obtener un test de nivel 0.05? Hallar el tamaño de muestra mínimo para obtener un test de nivel 0.05, manteniendo la misma región de rechazo que el test anterior.

El planteo de las hipótesis a testear suele ser un poco idiosincrático, y dependerá de dónde queramos que caiga la carga de la prueba. La frase "su afirmación sera *aceptada*" (id est, *no rechazada*), nos sugiere que coloquemos la afirmación del empresario en la hipótesis nula. Este arreglo es equivalente a la "inocencia hasta que se pruebe lo contario", e implica que salvo que haya clara evidencia contra la proporción de frascos defectuosos, asumiremos que está debajo del 10%:

$$\begin{aligned} & H_0 : \text{Menos del 10\% de los frascos contienen menos café del garantizado.} \\ vs. \quad & H_1 : \text{Más del 10\% de los frascos contiene menos café del garantizado.} \end{aligned}$$

La estrategia tradicional, sin embargo, consiste en colocar "lo que se desea probar" en la hipótesis alternativa, de manera que sólo se acepte su afirmación si la evidencia está a su favor. Por razones que quedarán claras al resolver el punto (5), esta parece ser la estrategia correcta en el ejercicio:

$$\begin{aligned} & H_0 : \text{10\% o más de los frascos contienen menos café del garantizado.} \\ vs. \quad & H_1 : \text{Menos del 10\% de los frascos contiene menos café del garantizado.} \end{aligned}$$

Sea $X_i = 1$ si el i-ésimo frasco de café tiene menos café del que garantiza la etiqueta, y 0 en caso contrario. Supongamos además que la probabilidad p de que un frasco de café contenga menos café del garantizado, es constante e idéntica para todos los frascos de manera que $X_i \overset{iid}{\sim} Ber(p)\ \forall i \in [n]$, y

$\sum_{i=1}^{n} X_i = T \sim Bi\,(n,p)$ (en nuestro caso, $n = 15$). Bajo estos supuestos, una forma matemáticamente tratable de las hipótesis originales es

$$H_0 \coloneqq p \geq 0.1 \quad vs. \quad H_1 \coloneqq p < 0.1$$

o

$$H_0 \coloneqq p \in \Theta_0 = [0.1, 1] \quad vs. \quad H_1 \coloneqq p \in \Theta_1 = [0, 0.1)$$

.

Sea $\Phi(T) = \mathbb{I}\,(T \leq k)$ un test que rechaza la hipótesis nula (*acepta* la afirmación del empresario) para valores bajos de T. El nivel de significación α es igual al supremo de su esperanza bajo la hipótesis nula. En general,

$$\mathrm{E}\,(\Phi|p = p_0) = \mathrm{E}_{p_0}\,(\mathbb{I}\,(T \leq k)) = \Pr_{p_0}(T \leq k) = \Pr\,(Bi\,(n, p_0) \leq k)$$

Y en particular, $n = 15, k = 2$ nos dan el test del enunciado, con región de rechazo $RR = \{0, 1, 2\}$. Sea $f_{n,k}(p) = \Pr\,(Bi\,(n,p) \leq k)$ la probabilidad acumulada a *izquierda* para una VA binomial, como función de p para $0 < k < n$ dados. f es *estrictamente decreciente* en p, ya que a mayor p, menor es la probabilidad de que T realice un valor por debajo de k , de manera que $\sup_{p\in[a,b]} f_{n,k}(p) = f(a)$. Luego,

$$\alpha = \sup_{p_0 \in [0.1,1]} \mathrm{E}_{p_0}\,(\Phi) = \Pr_{0.1}(T \leq 2) = \sum_{i=0}^{2} \binom{15}{i} 0.1^i \; 0.9^{15-i} \approx 0.8159$$

En general, un test que rechace la hipótesis nula aún cuando ésta es verdadera (*id est,* acepte la afirmación del empresario aún cuando miente) 4 de cada 5 veces, no es razonable. Tradicionalmente, esperaríamos $\alpha \leq 0.5$.

La probabilidad de que la afirmación del empresario sea aceptada cuando la proporción real de frascos de café es p_0, es simplemente la probabilidad de que T caiga en la región de rechazo

$$\Pr\,(\Phi = 1|p = p_0) = \Pr_{p_0}(T \leq k) = \Pr\,(Bi\,(n, p_0) \leq k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} p_0^i (1 - p_0)^{n-i}$$

$$\Pr_{0.05}(T \leq 2) = \sum_{i=0}^{2} \binom{15}{i} 0.05^i 0.95^{15-i} \approx 0.9638$$

$$\Pr_{0.1}(T \leq 2) \approx 0.8159$$

$$\Pr_{0.2}(T \leq 2) \approx 0.3980$$

Se dice que el test $\Phi(T)$ es insesgado para las hipótesis H_0, H_1cuando es menos probable rechazar la hipótesis nula en caso de que esta sea verdadera, que cuando es falsa. Más formalmente, dado un test $\Phi(T) = \mathbb{I}\,(T \in RR)$ basado en un estadístico cuya función de distribución está unívocamente determinada por un único parámetro $\theta : T \sim F_\theta$ y un par de hipótesis $H_0 : \theta \in \Theta_0 \quad vs. \quad H_1 :$

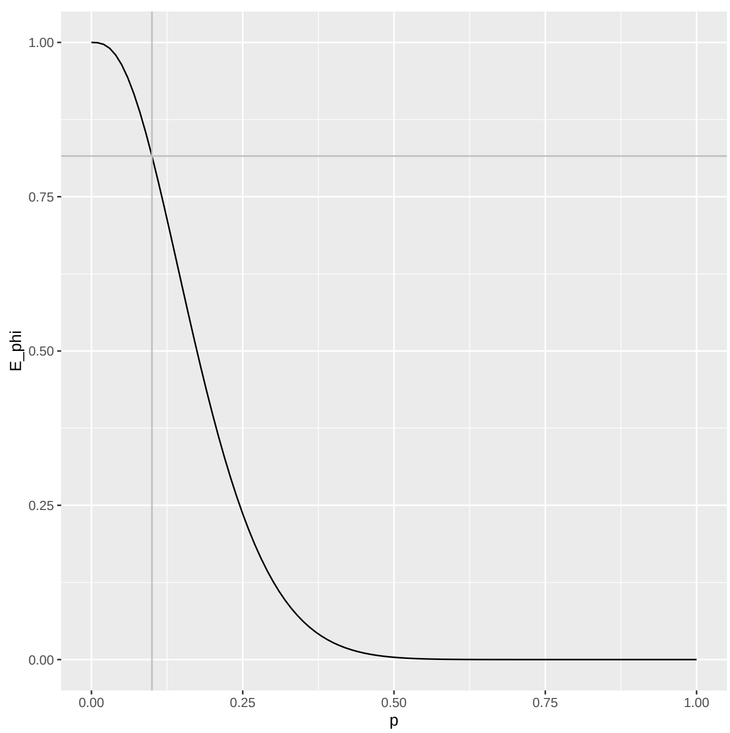
$\theta \in \Theta_1$

$$
\begin{aligned}
\Pr(\text{rech. } H_0 | H_0 \text{ es V}) &< \Pr(\text{rech. } H_0 | H_0 \text{ es F}) \\
\Pr(\Phi = 1 | \theta \in \Theta_0) &< \Pr(\Phi = 1 | \theta \in \Theta_1) \\
\mathrm{E}_{\theta_0}(\Phi) &< \mathrm{E}_{\theta_1}(\Phi) && \forall \quad \theta_0 \in \Theta_0, \theta_1 \in \Theta_1 \\
\sup_{\theta \in \Theta_0} \mathrm{E}_\theta(\Phi) &< \inf_{\theta \in \Theta_1} \mathrm{E}_\theta(\Phi) && \Rightarrow \Phi \text{es insesgado para } H_0, H_1
\end{aligned}
$$

En nuestro caso particular, $\Theta_0 = [0.1, 1]$, $\Theta_1 = [0, 0.1)$ y $\mathrm{E}(\Phi) = f_{n,k}(p)$ es una función estrictamente *decreciente*. Como $\inf \Theta_0 = 0.1 < \sup \Theta_1$, entonces $\sup_{\theta \in \Theta_0} \mathrm{E}_\theta(\Phi) < \inf_{\theta \in \Theta_1} \mathrm{E}_\theta(\Phi)$ y Φ es insesgado para H_0, H_1. La *potencia* de un test, es justamente la probabilidad de rechazar H_0:

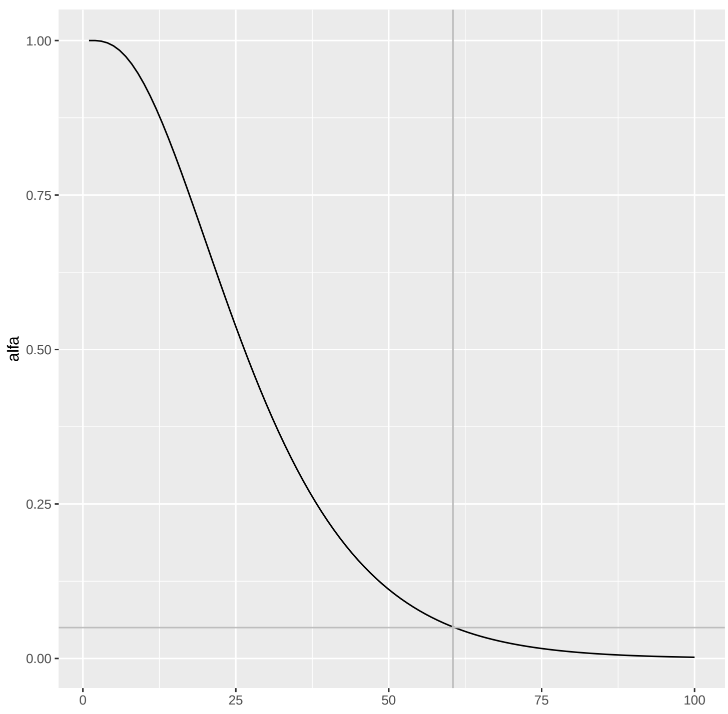
- cuando $\theta \in \Theta_0$, el supremo de la funcion de potencia nos da el nivel de signifcacion α del test, y
- cuando $\theta \in \Theta_1$, obtenemos la probabilidad de detectar la hipotesis alternativa (la potencia propiamente dicha).

Con una simple función de R, agregando referencias horizontales para el nivel de significacion del test ($\alpha \approx 0.8159$) y $p = 0.1$, se intuye claramente la insesgadez que antes demostramos:



Finalmente, debemos encontrar el mínimo n tal que el nivel de significación del test sea ≤ 0.05, manteniendo la misma $RR = \{0, 1, 2\}$. Si al comienzo del ejercicio nos hubiésemos decidido por el *set* de hipótesis que coloca la afirmación del empresario en H_0, la región de rechazo hubiese sido $RR = \{3, ..., 15\}$, ¡que rechaza para valores "centrales" de T! Aún siendo razonables y tomando $RR = \{3, ..., n\}$, consideremos $g_{k,p}(n) = \Pr_p(T \in RR) = \Pr(Bi(n, p) > k)$ para $0 \leq k < n$, $0 < p < 1$ dados. $g_{k,p}$ es una función estrictamente creciente en n, de manera que subiendo el tamaño muestral, ¡aumentaría α! Evidentemente, esta última consigna sólo tiene sentido si planteamos las hipótesis con la afirmación del empresario en H_1.

Estamos buscando $\min n : \Pr(Bi(n, p) \leq k) = 1 - g_{k,p}(n) \leq \alpha$, y si g era estrictamente creciente, $1 - g$ será estrictamente decreciente en n. Además, ya vimos que $\Pr(Bi(n, p) \leq k)$ es *estrictamente decreciente* en p, y por ende alcanza su máximo en $p = \inf \Theta_0 = 0.1\, \forall n$. Tomando $\alpha = 0.05, p = 0.1, k = 2$, podemos buscar n con la ayuda de R, y encontramos que $\Pr(Bi(60, 0.1) \leq 2) \approx 0.0530 > 0.05 > 0.0491 \approx \Pr(Bi(61, 0.1) \leq 2)$,de manera que el mínimo tamaño muestral que nos garantiza $\alpha \leq 0.05$ dada $RR = \{0, 1, 2\}$, es $n = 61$.



2.2 Práctica 2, ej. 2

Construya el gráfico de $S(\theta)$ para n impar y deduzca el estimador y el intervalo de confianza para θ.

$S(\theta) = \# \{i : X_i > \theta,\, i \in [n]\}$

2.3 Práctica 3, ej. 8

Suponga que $\forall i \in [n]$, $X_i \stackrel{iid}{\sim} F \in \Omega_s$ (distribuciones simétricas con única mediana en 0).

1. Usando que $g(X_1, ..., X_n)$ y $g(-X_1, ..., -X_n)$ tienen la misma distribución, muestre que si $g(X_1, ..., X_n) + g(-X_1, ..., -X_n) = \mu_0$, entonces $g(X_1, ..., X_n)$ está simétricamente distribuída alrededor de $\mu_0/2$, Hint: Muestre que $P(g(X_1, ..., X_n) \leq \mu_0/2 - t) = P(g(X_1, ..., X_n) \leq \mu_0/2 + t)$.

2. Aplique (1) al estadístico del test de rangos signados de Wilcoxon para demostrar que T^+ tiene distribución simétrica bajo la hipótesis nula. ¿Cuál es el punto de simetría?

3 Demostraciones

3.1 Consistencia del test de Wilcoxon

Sea $\bar{X}=(X_1, ..., X_n)$ una muestra aleatoria tal que $\forall i =1,....n ,\ X_i \stackrel{iid}{\sim} F \in \Omega_s$ (distribuciones simétricas con única mediana en 0), y definamos - la posicion o rango de X_i en la muestra ordenada segun valores absolutos: $R_i = \#\{j : |X_j| \leq |X_i|, j = 1,... n\}$, - la "funcion signo" $s(X_i) = I(X_i > 0)$, y - el estadistico $T^+ = \sum_{i=1}^{n} R_i \ s(X_i)$

Recordemos que T^+ admite la siguiente definicion equivalente en base a los promedios de Walsh, $$ T^+ = \#\left\{ i, j : \frac{X_i + X_j}{2} > 0, \ 1 \leq i \leq j \leq n \right\} = \sum_{i=1}^{j} \sum_{j=1}^{n} I(X_i + X_j > 0) = \sum_{i=1}^{j} \sum_{j=1}^{n} T_{ij} $$

donde $I(\cdot)$ es la funcion indicadora.

Utilicemos esta ultima forma para desarrollar la esperanza y varianza de T^+, dada cierta distribucion subyacente fija F_0. Gracias a la linealidad de la esperanza, y el hecho de que $E(I(Q)) = P(Q)$ $$ \begin{split} E(T^+)&= E\left(\sum_{i=1}^{j} \sum_{j=1}^{n} I(X_i + X_j > 0) \right) =\sum_{i=1}^{j} \sum_{j=1}^{n} E(I(X_i + X_j > 0)) =\sum_{i=1}^{j} \sum_{j=1}^{n} P(X_i + X_j > 0) \\ &=\sum_{i=j}P(X_i > 0) + \sum_{i<j} P(X_i + X_j > 0) \end{split} $$ Sean ahora $p_1=P(X_i > 0), \ \ p_2=P(X_i + X_j > 0 | i < j)$. Se observa que hay n sumandos donde $i=j$ (1 por cada elemento j), y $(n-1)n/2$ sumandos donde $i<j$. Luego, $E(T^+)= np_1 + (n-1)n p_2$.

Para el calculo de la varianza de T^+, usaremos el hecho de que, en general, si $Y = \sum_i X_i \Rightarrow Var(Y) = \mathbb{cov}(Y, Y) = \mathbb{cov}(\sum_i X_i, \sum_i X_i) = \sum_i Var(X_i) + 2 \sum_{i<j} \mathbb{cov}(X_i, X_j)$. Para ello, tendremos que encontrar la expresion de la covarianza para todas las combinaciones unicas de subindices.

$$ \begin{split} Var(T^+) &= Var\left(\sum_{i=1}^{j} \sum_{j=1}^{n} T_{ij} \right) = \sum_{i=1}^{j} \sum_{j=1}^{n} Var(T_{ij}) + 2 \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \sum_{k=1}^{l} \sum_{l=1}^{n} \mathbb{cov}(T_{ij},T_{kl}) \end{split} $$

Recordemos que si $X \perp Y$ (las VA X y Y son independientes entre si, $cov(X, Y)=0$. Ademas, para funciones deterministicas arbitrarias f, g, $X \perp Y \Rightarrow f(X) \perp g(Y)$. Como $T_{ij}=f(X_i, X_j)$, y $X_i \perp X_j \ \forall i \neq j$, siempre y cuando los pares$(i,j),(k,l)$ no compartan ningun indice, $\mathbb{cov}(T_{ij},T_{kl})=0$. Consideremos a continuacion los casos en que "ambos T" comparten algun subindice: - Hay Usando que $cov(X, Y)=cov(Y,X)$ y $T_{ij}=T_{ji}$, podemos limitarnos sin perdida de generalidad a los $i \leq k \leq j \leq l$ y nos basta con limitarnos a los siguientes casos:

$$ cov(T_{ij}, T_{kl}) = \begin{cases} Var(T_{ii}) = Var(T_{11}) &\text{si } i = k = j = l \\ Var(T_{ij}) = Var(T_{12}) &\text{si } i = k < j = l \\ cov(T_{ii}, T_{il}) = cov(T_{11}, T_{12}) &\text{si } i = k = j < l \\ cov(T_{ij}, T_{il}) = cov(T_{12}, T_{13}) &\text{si } i = k < j < l \\ 0 &\text{en otro caso} \\ \end{cases} $$

Usando que $cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$ e $I(P) \cdot I(Q) = I(P \land Q)$ (y por ende $I(P)^2=I(P \land P)=I(P)$), calculamos

$$
\begin{aligned}
Var(T_{ii}) &= E(T_{11}^2) - E(T_{11})^2 = E(I(X_1 > 0)^2) - E(I(X_1 > 0))^2 \\
&= E(I(X_1 > 0))(1 - E(I(X_1 > 0))) \\
&= P(X_1 > 0)(1 - P(X_1 > 0)) \\
&= p_1(1 - p_1) \\
Var(T_{ij}) &= E(T_{12}^2) - E(T_{ij})^2 = E(I(X_1 + X_2 > 0)^2) - E(I(X_1 + X_2 > 0))^2 \\
&= E(I(X_1 + X_2 > 0))(1 - E(I(X_1 + X_2 > 0))) \\
&= P(X_1 + X_2 > 0)(1 - P(X_1 + X_2 > 0)) \\
&= p_2(1 - p_2) \\
cov(T_{ii}, T_{il}) &= E(T_{11}T_{12}) - E(T_{11})E(T_{12}) \\
&= E(I(X_1 > 0 \land X_1 + X_2 > 0)) - E(I(X_1 > 0)E(I(X_1 + X_2 > 0)) \\
&= P(X_1 > 0 \land X_1 + X_2 > 0) - p_1 \cdot p_2 \\
&= p_3 - p_1 \cdot p_2 \quad \text{, digamos} \\
cov(T_{ij}, T_{il}) &= E(T_{12}T_{13}) - E(T_{12})E(T_{13}) \\
&= E(I(X_1 + X_2 > 0 \land X_1 + X_3 > 0)) - E(I(X_1 + X_2 > 0)E(I(X_1 + X_3 > 0)) \\
&= P(X_1 + X_2 > 0 \land X_1 + X_3 > 0) - p_2^2 \\
&= p_4 - p_2^2 \quad \text{, digamos}
\end{aligned}
$$

Para concluir, basta ver cuantos de cada tipo de termino en la expansion de $Var(T^+)$ en sus terminos de covarianza. Cuando los 4 subindices son identicos, $cov(T_{ij}, T_{kl})=Var(T_{ii})$, y hay ${n \choose 1}=n$ de elegir un subindice entre n, asi que $Var(T_{ii})$ aparece n veces. Similarmente, hay ${n \choose 2}=n(n-1)/2$ formas de elegir 2 subindices unicos, asi que tanto $cov(T_{11}, T_{22}), cov(T_11), T_tanto $cov(T_{ii}, T_{ij})$ como $Var(T_{ij})$ aparecen ${n \choose 2}=n(n-1)/2$ veces. Por ultimo, hay ${n \choose 3}=n(n-1)(n-2)/6$ formas de elegir 3 subindices unicos, de manera que

formas de elegir 2 subindices, de manera que $Var(T_{ij})$ aparece $(n-1)n/2$ veces, y tanto $cov(T_{ii}, T_{ij})$ como $cov(T_{ij}, T_{ii})$aparece - $cov(T_{ii}, T_{il})$ aparece tambien $n(n-1)/2$ veces ($l-1$ veces por cada $l=1,...,n$), al igual que $cov(T_{il}, T_{ii})$, para un total de $n(n-1)$ veces, y -en $cov(T_{ij}, T_{il})$

$$
\begin{array}{cccccccc}
T_{11} & T_{12} & ... & T_{1i} & ... & T_{1j} & ... & T_{1n} \\
 & T_{22} & ... & T_{2i} & ... & T_{2j} & ... & T_{2n} \\
 & & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\
 & & & T_{ii} & ... & T_{ij} & ... & T_{in} \\
 & & & & ... & ... & ... & ... \\
 & & & & & T_{jj} & ... & T_{jn} \\
 & & & & & & ... & ... \\
 & & & & & & & T_{nn}
\end{array}
$$

3.2 Teorema de Proyeccion

3.3 Distribución exacta de los estadísticos del test de Mann-Whitney-Wilcoxon (MWW) bajo H_0

4 Apendice

Condiciones suficientes de consistencia

Definicion:

Sea $X_1, ..., X_n$ una muestra aleatoria tal que $\forall \ i=1,..., n \Rightarrow\ X_i \stackrel{iid}{\sim} F \in \Omega$. Se dice que la sucesion de tests $\{\Phi_n\}$ de nivel asintotico α es consistente para las hipotesis $H_0 : F \in \Omega_{0} \subset \Omega\text{ vs. } H_1 : F \in \Omega_1\subset \Omega$, si - $\alpha \geq E_{F_0}(\Phi_n) \geq \gamma > 0 \quad \forall \ F_0 \in \Omega_0$, y - $E_{F_1}(\Phi_n) \to 1 \quad \forall \ F_1 \in \Omega_1$, donde $E_G(T(X_1, ..., X_n)) = E(T | F = G)$. Es decir, que el nivel de significacion del test se mantiene acotado encima del cero para la sucesion, mientras que la potencia tiende a 1 para la alternativa, a medida que aumenta el tamano muestral.

El conjunto de todas las distribuciones para las cuales $\{\Phi_n\}$ es consistente se denomina _clase de consistencia_ $\Omega_c \subset \Omega_1$.

El siguiente teorema es util para determinar la clase de consistencia en ciertos test comunes.

Teorema Sea Φ_n un test de nivel asintotico α basado en T_n que rechaza H_0 para valores grandes, para las hipotesis previamente

definidas. Si

$$ T_n \stackrel{p}{\to} \mu(F) = \begin{cases} \mu_0 &\forall F \in \Omega_0 \\ > \mu_0 &\forall F \in \Omega_c \\ \end{cases} $$ y ademas existe σ_0 tal que

$$ \sqrt{n}\frac{T_n - \mu_0}{\sigma_0} \stackrel{D}{\to} N(0,1) \quad \forall F \in \Omega_0 $$ entonces existe una sucesion de valores k_n tal que la sucesion de tests $\Phi_n = I(T_n \geq k_n)$ es consistente para la clase Ω_c.

Demostracion

Part I
Demostraciones

Part II
Anexo