

# Introduction à l'analyse des séries temporelles

## Banque d'exercices corrigés

Cette banque d'exercices corrigés a pour vocation d'illustrer les propriétés du cours, et la rigueur demandée dans la résolution des exercices. Les exercices présentés sont généralement plus difficiles que ce qui est attendu au moment des devoirs. Il existe vraisemblablement des erreurs dans les corrigés des exercices, n'hésitez pas à m'en informer le cas échéant.

## Partie 1 : stationnarité, fonction d'autocovariance

### Exercice 1

**Motivation** On montre que le modèle de régression linéaire simple ne produit pas un processus stationnaire, et que la différenciation à l'ordre 1 est une technique suffisante pour retirer une tendance linéaire du modèle.

On considère la série temporelle définie par

$$x_t = \beta_0 + \beta_1 t + w_t,$$

où  $\beta_0$  et  $\beta_1$  désignent des constantes, et  $w_t$  un bruit blanc gaussien de variance  $\sigma^2$ .

1.  $x_t$  est-elle stationnaire ?
2. Montrer que le processus  $y_t = x_t - x_{t-1}$  est stationnaire.
3. \*\* Montrer que l'espérance du processus moyenne mobile

$$y_t = \frac{1}{2q+1} \sum_{j=-q}^q x_{t-j}$$

est  $\beta_0 + \beta_1 t$  et donner une expression simplifiée de sa fonction d'autocorrélation.

### Solution

1. L'espérance de la série, donnée par  $\mathbb{E}[x_t] = \beta_0 + \beta_1 t$ , n'est pas constante (elle dépend de  $t$ ). La série n'est donc pas stationnaire.
2. On a

$$y_t = (\beta_0 + \beta_1 t + w_t) - (\beta_0 + \beta_1(t-1) + w_{t-1}) = \beta_1 + w_t - w_{t-1}.$$

Cette série est d'espérance constante, égale à  $\mathbb{E}[y_t] = \beta_1$ , et sa fonction d'autocovariance vaut :

$$\begin{aligned} \gamma(t, t-1) &= \mathbb{E}[(w_t - w_{t-1})(w_{t-1} - w_{t-2})] = \mathbb{E}[w_{t-1}^2] = -\sigma^2, \\ \gamma(t, t-k) &= \mathbb{E}[(w_t - w_{t-1})(w_{t-k} - w_{t-k-1})] = 0 \quad \text{si } k > 1, \end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que, pour  $s \neq t$ ,  $\mathbb{E}[w_s w_t] = \mathbb{E}[w_s] \mathbb{E}[w_t] = 0$ . Comme la fonction d'autocovariance  $\gamma(s, t)$  ne dépend que du décalage  $|s - t|$  (en effet, soit  $|s - t| = 1$  et l'autocovariance vaut  $\sigma^2$ , soit  $|s - t| > 1$  et l'autocovariance vaut 0), on conclut que la série est stationnaire.

3. On écrit

$$\begin{aligned}
y_t &= \frac{1}{2q+1} \sum_{j=-q}^q \beta_0 + \beta_1(t-j) + w_{t-j} \\
&= \frac{1}{2q+1} \left( (2q+1)\beta_0 + (2q+1)\beta_1 t + \beta_1 \sum_{j=-q}^q (-j) + \sum_{j=-q}^q w_{t-j} \right) \\
&= \beta_0 + \beta_1 t + \frac{1}{2q+1} \sum_{j=-q}^q w_{t-j},
\end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que pour la somme sur  $(-j)$ , chaque terme et son opposé apparaissent une fois :  $\sum_{j=-q}^q (-j) = \sum_{j=1}^q (-j) + \sum_{j=1}^q (+j) = 0$ .

On en déduit que  $\mathbb{E}[y_t] = \beta_0 + \beta_1 t$ , et que

$$\gamma(t, t+h) = \frac{1}{(2q+1)^2} \text{Cov} \left( \sum_{i=-q}^q w_{t-i}, \sum_{j=-q}^q w_{t+h-j} \right).$$

Les seuls termes non nuls sont ceux tels que  $t-i = t+h-j$ , c'est-à-dire  $j = i+h$ . Il y en a  $2q+1-h$ . Il vient que

$$\gamma(t, t+h) = \frac{2q+1-h}{(2q+1)^2} \sigma^2.$$

On peut ensuite calculer la fonction d'autocorrélation :

$$\rho(t, t+h) = \frac{\gamma(t, t+h)}{\sqrt{\gamma(t, t) \gamma(t+h, t+h)}},$$

où  $\gamma(t, t) = \gamma(t+h, t+h) = \frac{1}{2q+1} \sigma^2$ . Il vient que

$$\rho(t, t+h) = \frac{2q+1-h}{2q+1} = 1 - \frac{h}{2q+1}.$$

## Exercice 2

**Motivation** On étudie les propriétés de moment (espérance, variance, fonction d'autocovariance) de la marche aléatoire avec dérive.

On considère une marche aléatoire avec dérive,

$$x_t = \delta + x_{t-1} + w_t,$$

où la condition initiale est donnée par  $x_0 = 0$ , et  $w_t$  désigne un bruit blanc gaussien de variance  $\sigma^2$ .

1. \* Montrer que le modèle peut être écrit comme  $x_t = \delta t + \sum_{k=1}^t w_k$ .
2. \* Calculer l'espérance et la fonction d'autocovariance de  $x_t$ .
3.  $x_t$  est-elle stationnaire ?
4. \*\* Montrer que, pour  $h$  fixé,  $\rho(t-h, t) = \sqrt{\frac{t-h}{t}} \rightarrow 1$  lorsque  $t \rightarrow \infty$ . Comment cela se manifeste-t-il ?
5. Suggérer une transformation pour rendre la série stationnaire.

## Solution

1. On montre que :

$$\begin{aligned}x_t &= \delta + x_{t-1} + w_t \\&= \delta + (\delta + x_{t-2} + w_{t-1}) + w_t \\&= 2\delta + x_{t-2} + w_{t-1} + w_t.\end{aligned}$$

Puis, par récurrence :

$$\begin{aligned}x_t &= \delta + x_{t-1} + w_t \\&= 2\delta + x_{t-2} + w_{t-1} + w_t \\&= 3\delta + x_{t-3} + w_{t-2} + w_{t-1} + w_t \\&= \dots \\&= \delta t + x_0 + w_1 + w_2 + \dots + w_t \\&= \delta t + \sum_{k=1}^t w_k.\end{aligned}$$

2. On a, pour tout  $t \geq 1$ ,

$$\mathbb{E}[x_t] = \mathbb{E}\left[\delta t + \sum_{k=1}^t w_k\right] = \delta t + \sum_{k=1}^t \mathbb{E}[w_k] = \delta t,$$

où la deuxième égalité découle de la linéarité de l'espérance.

Pour la fonction d'autocovariance, on considère  $s \neq t$ . On a

$$\begin{aligned}\gamma(s, t) &= \text{Cov}(x_s, x_t) = \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^s w_k, \sum_{l=1}^t w_l\right] \\&= \sum_{k=1}^s \sum_{l=1}^t \mathbb{E}[w_k w_l] \\&= \sum_{k=1}^{\min(s, t)} \mathbb{E}[w_k] = \min(s, t) \sigma^2.\end{aligned}$$

3. Comme l'espérance de  $x_t$  n'est pas constante pour  $\delta \neq 0$ , la série n'est pas stationnaire. Par ailleurs, si on avait  $\delta = 0$ , la fonction d'autocovariance de la série n'est pas invariante par translation. Par exemple, on a  $\gamma(1, 2) = \sigma^2 \neq \gamma(2, 3) = 2\sigma^2$ , alors que dans les deux cas, le décalage entre les deux pas de temps considérés est de 1. En conséquence, la série n'est pas stationnaire (quelque soit la valeur de  $\delta$ ).

4. On commence par calculer la variance de la série :

$$\text{Var}(x_t) = \text{Var}\left(\delta t + \sum_{k=1}^t w_k\right) = \sum_{k=1}^t \text{Var}(w_k) = t\sigma^2,$$

où la deuxième égalité découle du fait que les  $w_k$  sont indépendants.

Ensuite, la fonction d'autocorrélation se calcule directement :

$$\rho(t-h, t) = \frac{\gamma(t-h, t)}{\sqrt{\gamma(t-h, t-h)\gamma(t, t)}} = \frac{(t-h)\sigma^2}{\sqrt{(t-h)\sigma^2 \cdot t\sigma^2}} = \sqrt{\frac{t-h}{t}}.$$

Par ailleurs, pour  $h$  fixé, comme  $h/t \rightarrow 0$ ,

$$\rho(t-h, t) = \sqrt{\frac{t-h}{t}} = \sqrt{1 - \frac{h}{t}} \rightarrow \sqrt{1} = 1.$$

Cela a pour conséquence que, lorsqu'on regarde la fonction d'autocorrélation (ACF) d'une marche aléatoire avec dérive, les pics d'autocorrélation tendent vers 1 lorsque le nombre d'observations est grand.

5. En effectuant une différentiation d'ordre 1, c'est-à-dire en étudiant les variations de la série, on obtient  $\nabla x_t = x_t - x_{t-1} = \delta + w_t$ . Il s'agit d'une série stationnaire, de fonction d'autocovariance  $\gamma(h)$  nulle pour tout  $h \neq 0$ .

### Exercice 3

**Motivation** On montre qu'un processus autorégressif d'ordre 1 peut s'écrire comme un processus moyenne mobile, ce qui permet d'établir un certain nombre de propriétés intéressantes.

On considère un processus AR(1) de la forme  $x_t = \phi x_{t-1} + w_t$ , avec  $|\phi| < 1$  une constante,  $w_t$  un bruit blanc gaussien de variance  $\sigma^2$  et condition initiale  $x_0 = w_0$ .

1. \* Montrer que l'on peut écrire  $x_t = \sum_{j=0}^t \phi^j w_{t-j}$ .
2. En déduire l'espérance de  $x_t$ .
3. Calculer la variance de  $x_t$ .
4. \* Montrez que, pour  $h \geq 0$ ,  $\text{Cov}(x_{t+h}, x_t) = \phi^h \text{Var}(x_t)$ .
5. La série est-elle stationnaire ?
6. \* Argumenter que, lorsque  $t \rightarrow \infty$ , le processus devient "asymptotiquement stationnaire".
7. \* Discuter comment ces résultats peuvent être utilisés pour simuler  $n$  observations d'un processus **stationnaire** AR(1) à partir d'un vecteur de gaussiennes  $\mathcal{N}(0, 1)$  i.i.d.
8. \* On suppose désormais que  $x_0 = w_0 / \sqrt{1 - \phi^2}$ . Ce processus est-il stationnaire ?

### Solution

1. On procède par récurrence. On a :

$$\begin{aligned} x_t &= \phi x_{t-1} + w_t = \phi(\phi x_{t-2} + w_{t-1}) + w_t \\ &= \phi^2 x_{t-2} + \phi w_{t-1} + w_t \\ &= \phi^2(\phi x_{t-3} + w_{t-2}) + \phi w_{t-1} + w_t \\ &= \phi^3 x_{t-3} + \phi^2 w_{t-2} + \phi w_{t-1} + w_t \\ &= \dots \\ &= \phi^t x_0 + \phi^{t-1} w_1 + \dots + \phi w_{t-1} + w_t \\ &= \sum_{j=0}^t \phi^j w_{t-j}. \end{aligned}$$

2. Directement, il vient  $\mathbb{E}[x_t] = \sum_{j=0}^t \mathbb{E}[w_{t-j}] = 0$ .
3. Comme les  $w_{t-j}$  sont indépendants, on a

$$\text{Var}(x_t) = \sum_{j=0}^t \phi^{2j} \sigma^2 = \sigma^2 \frac{1 - \phi^{2(t+1)}}{1 - \phi^2},$$

où la dernière égalité provient du fait que  $\sum_{j=0}^t \phi^{2j}$  est la somme d'une suite géométrique de raison  $\phi^2$ .

4. En utilisant les résultats de la question 1, on a

$$\text{Cov}(x_{t+h}, x_t) = \text{Cov} \left( \sum_{i=0}^{t+h} \phi^i w_{t+h-i}, \sum_{j=0}^t \phi^j w_{t-j} \right).$$

Les seuls termes non nuls sont ceux tels que  $t+h-i = t-j$ , c'est-à-dire  $j+h=i$ . On en déduit que

$$\text{Cov}(x_{t+h}, x_t) = \sum_{j=0}^t \phi^{j+h} \phi^j \sigma^2 = \phi^h \sum_{j=0}^t \phi^{2j} \sigma^2.$$

On reconnaît dans le terme de droite la variance de  $x_t$ , d'où le résultat souhaité.

5. Comme la variance dépend de  $t$ , la série n'est pas stationnaire.

*Note* : Bien que ce résultat puisse surprendre, il est à noter ici que la série commence à  $x_0 = w_0$ , alors que dans le cas des séries définies dans le cours, la série "ne commence pas" : on l'observe uniquement à partir de  $t = 0$ , ou  $t = 1$ , mais en réalité elle existe déjà depuis une infinité de pas de temps.

6. Lorsque  $t \rightarrow \infty$ , on a  $\text{Var}(x_t) = \sigma^2 \frac{1-\phi^{2(t+1)}}{1-\phi^2} \rightarrow \sigma^2 \frac{1}{1-\phi^2}$  (car  $|\phi| < 1$ ). La variance est alors asymptotiquement constante, et la fonction d'autocovariance est asymptotiquement indépendante par translation. On en déduit que, en un sens, le processus devient stationnaire lorsque  $t \rightarrow \infty$ .
7. Comme la série devient asymptotiquement stationnaire, on peut simuler  $N$  observations de la série, avec  $N > n$ , puis retirer les  $N - n$  premières observations. Lorsque  $N$  est grand, alors les  $n$  dernières observations de la série seront presque stationnaires. Plus précisément : (i) on génère  $N$  variables gaussiennes  $v_t$  i.i.d. suivant la loi normale  $\mathcal{N}(0, 1)$  ; (ii) on multiplie ces variables par  $\sigma$ ,  $w_t = \sigma v_t$ , pour obtenir des réalisations d'une loi normale  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$  ; (iii) puis on utilise soit la formule de récurrence de l'AR(1), soit celle établie en question 1 pour simuler des observations  $x_t$  du modèle ; (iv) enfin, on retire les  $N - n$  premières observations et on ne garde que les  $n$  dernières.

*Note* : cette technique de simulation est en pratique souvent utilisée. Les  $N - n$  observations qui sont retirées sont appelées réalisations de *burn-in* (on parle aussi de période de *burn-in*).

8. En reprenant la démonstration de la question 1, on obtient que  $x_t = \phi^t x_0 + \sum_{j=1}^t \phi^j w_{t-j}$ . On peut désormais reprendre le calcul de la variance de la série dans ce cas, en notant que  $x_0$  est indépendant des  $w_j$ , pour  $j \geq 1$  :

$$\begin{aligned} \text{Var}(x_t) &= \phi^{2t} \text{Var}(x_0) + \sum_{j=1}^t \phi^{2j} \sigma^2 \\ &= \sigma^2 \frac{\phi^{2t}}{1-\phi^2} + \sigma^2 \frac{1-\phi^{2t}}{1-\phi^2} \\ &= \sigma^2 \frac{1}{1-\phi^2}. \end{aligned}$$

On remarque que cette fois, la variance est constante. La série est donc stationnaire.

*Note* : lorsque  $x_0 = w_0 / \sqrt{1-\phi^2}$ , cela donne à  $x_0$  la même distribution que si la série avait commencé depuis une infinité de pas de temps. Cela permet alors de simuler  $x_0$  comme si la série existait dans le passé, ce qui confère à l'ensemble de la série sa stationnité.

## Exercice 4

**Motivation** On met en évidence que le pic d'autocorrélation d'un MA(1) ne dépasse pas 1/2 en amplitude.

Pour un MA(1),  $x_t = w_t + \theta w_{t-1}$ , montrer que  $|\rho(1)| \leq 1/2$  pour toute valeur de  $\theta$ . Pour quelle valeur de  $\theta$  est-ce que  $\rho(1)$  atteint son maximum ? son minimum ?

## Solution

On calcule la variance et la fonction d'autocovariance de la série :

$$\begin{aligned}\gamma(0) &= \text{Var}(w_t + \theta w_{t-1}) = \sigma^2 + \theta^2 \sigma^2 = (1 + \theta^2) \sigma^2 \\ \gamma(1) &= \text{Cov}(w_t + \theta w_{t-1}, w_{t-1} + \theta w_{t-2}) = \theta \sigma^2.\end{aligned}$$

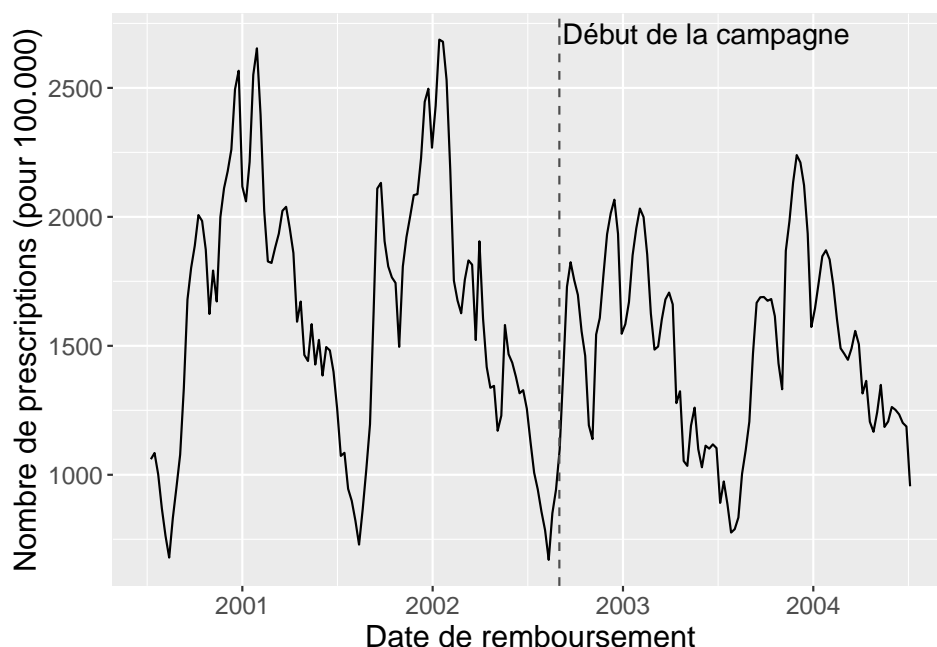
Il vient ensuite que

$$\rho(1) = \frac{\gamma(1)}{\gamma(0)} = \frac{\theta}{1 + \theta^2}.$$

La fonction  $\theta \mapsto \theta/(1 + \theta^2)$  est impaire, vaut 0 en  $\theta = 0$  et lorsque  $\theta \rightarrow \infty$ . Par ailleurs, sa dérivée est  $\theta \mapsto (1 - \theta)^2/(1 + \theta^2)^2$ , est positive sur  $[-1, 1]$  et négative ailleurs. On en déduit que  $\theta \mapsto \theta/(1 + \theta^2)$  est décroissante sur  $[-\infty, -1]$ , croissante sur  $[-1, 1]$  puis décroissante sur  $[1, +\infty]$ , et donc qu'elle atteint son minimum en  $\theta = -1$ , auquel cas elle vaut  $-1/2$ , et son maximum en  $\theta = 1$ , auquel cas elle vaut  $1/2$ .

## Partie 2 : analyse de modèles ARIMA

**Motivation** On cherche à étudier l'impact de la campagne de sensibilisation “Les antibiotiques, c'est pas automatique !”, débutée en 2002 et reconduite chaque hiver jusqu'en 2005. Pour cela, on dispose de la série hebdomadaire du nombre de prescriptions de bêta-lactamines et macrolides au niveau métropolitain (pour 100 000 habitants), et on cherche à déterminer de combien le nombre de prescriptions a diminué entre la période pré-campagne, et la période post-campagne.



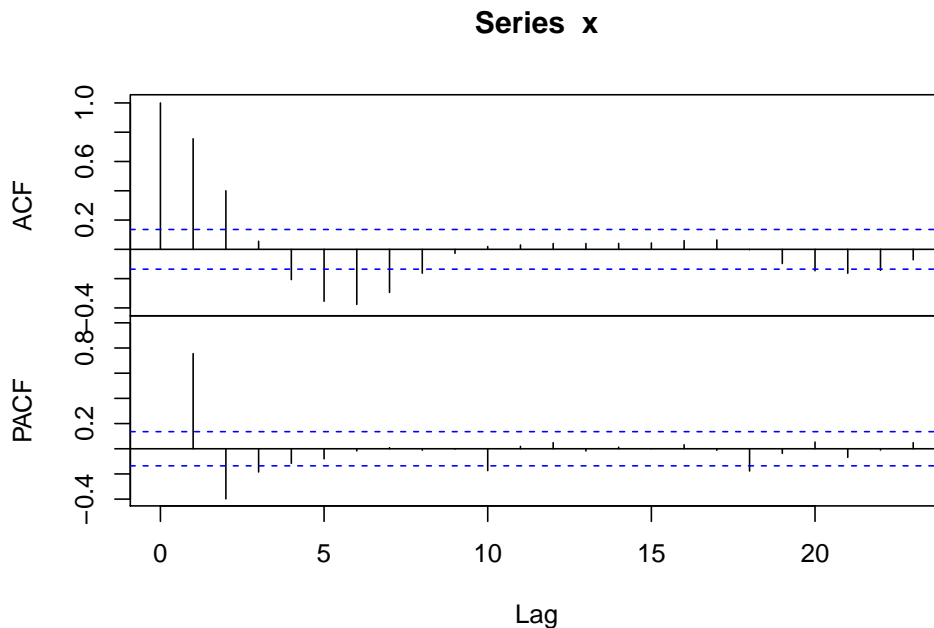
Pour étudier l'évolution du nombre de prescriptions antibiotiques, on propose d'effectuer une analyse statistique de la série en ajustant un modèle de régression périodique de la forme :

$$x_t = \beta_0 + \beta'_0 1_{\{t > \tau\}} + (\beta_1 + \beta'_1 1_{\{t > \tau\}}) \cos\left(\frac{2\pi t}{52}\right) + (\beta_2 + \beta'_2 1_{\{t > \tau\}}) \sin\left(\frac{2\pi t}{52}\right) + \varepsilon_t,$$

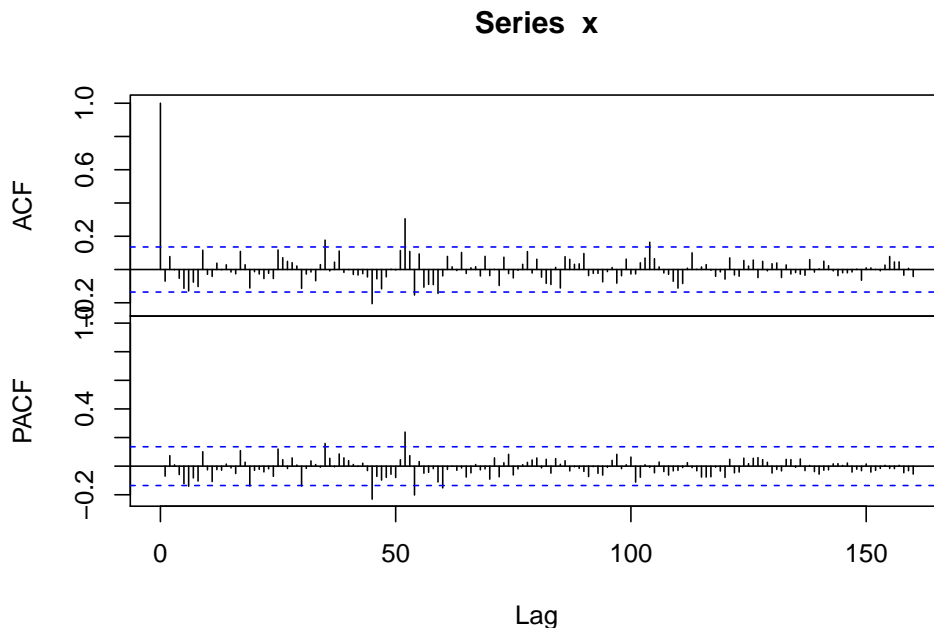
où les  $\beta_i$  et  $\beta'_i$  désignent des paramètres du modèle,  $\tau$  la date de début de la campagne de sensibilisation, et  $(\varepsilon_t)$  un bruit gaussien.

1. Dans le modèle, les termes associés à  $\cos(2\pi t/52)$  et  $\sin(2\pi t/52)$  permettent de modéliser la saisonnalité de la série. Proposer une autre méthode qui aurait pu permettre de retirer la saisonnalité de la série. Quel défaut peut présenter cette autre méthode ?

2. \* Comment interpréter les paramètres  $\beta'_0$ ,  $\beta'_1$  et  $\beta'_2$  ?
3. Dans un premier temps, on ajuste le modèle présenté plus haut sans imposer de structure de dépendance sur le bruit  $\varepsilon_t$ . Les fonctions d'autocorrélation et d'autocorrélation partielle des résidus du modèle sont données sur la figure suivante. Comment doit-être ajusté le modèle pour tenir compte de la structure de dépendance du bruit ?



4. On ajoute au modèle la structure de dépendance identifiée. Le modèle est estimé de nouveau, et les fonctions d'autocorrélation et d'autocorrélation partielle correspondantes sont données par la figure suivante. Un test de Ljung-Box est effectué pour déterminer si les résidus du modèle sont décorrés.
  - a. Rappeler l'hypothèse nulle testée.
  - b. En s'aidant du test effectué sous R, déterminer combien de décalages ont été testés.
  - c. A l'aide des figures et du test de Ljung-Box, déterminer si la structure de dépendance doit être ajustée et, le cas échéant, comment l'ajuster.



```
##
## Box-Ljung test
##
## data: model$residuals
## X-squared = 121.12, df = 58, p-value = 2.371e-06
```

5. Au final, deux modèles sont retenus, dont les sorties R sont données ci-dessous.

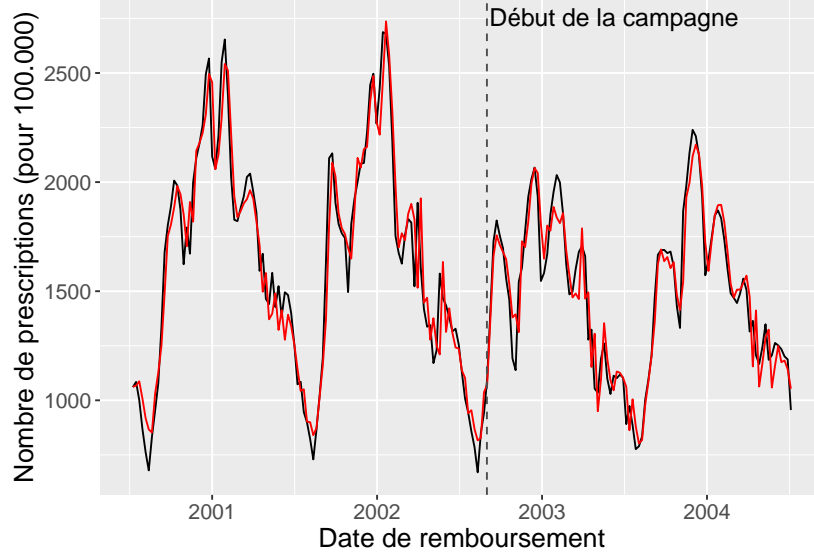
- Comment choisir lequel des deux modèles retenir ?
- Ecrire l'équation de récurrence vérifiée par le bruit  $\varepsilon_t$  du modèle retenu.

```
##
## Call:
## arima(x = presc, order = c(2, 0, 0), seasonal = list(order = c(1, 0, 0), period = 52),
##       xreg = cbind(cos, sin, cst_post, cos_post, sin_post))
##
## Coefficients:
##          ar1          ar2          sar1  intercept           cos           sin      cst_post
##      0.9272   -0.2580   0.4387  1676.4594   -609.1530   -75.8045   -214.6475
## s.e.  0.0717   0.0724  0.0716   46.5317    64.9081    65.4765    52.5274
##      cos_post  sin_post
##      187.0339   89.5180
## s.e.   75.0849   72.5432
##
## sigma^2 estimated as 15402:  log likelihood = -1310.19,  aic = 2640.39
##
## Call:
## arima(x = presc, order = c(2, 0, 0), seasonal = list(order = c(0, 0, 1), period = 52),
##       xreg = cbind(cos, sin, cst_post, cos_post, sin_post))
##
## Coefficients:
##          ar1          ar2          sma1  intercept           cos           sin      cst_post
##      0.9835   -0.3147   0.3305  1673.4115   -612.9778   -81.4485   -211.5181
## s.e.  0.0677   0.0687   0.0727   42.9291    60.0755    60.8501    56.1242
##      cos_post  sin_post
##      193.9411  102.7965
## s.e.   80.4549   77.7429
##
## sigma^2 estimated as 16483:  log likelihood = -1314.78,  aic = 2649.57
```

6. À supposer que la diminution du nombre de prescriptions peut être attribuée à la campagne de sensibilisation, donner un intervalle de confiance sur le nombre de prescriptions annuelles qui ont pu être ainsi évitées.

Remarque : la figure ci-dessous représente graphiquement l'ajustement du modèle retenu (en rouge par rapport à la série initiale représentée en noir).





### Solution

1. Une différentiation d'ordre 52 (puisque la série est hebdomadaire) aurait permis de retirer la saisonnalité de la série. Cependant, la série des variations posséderait alors 52 pas de temps de moins que la série originelle, puisque les variations ne peuvent être calculées pour les 52 premiers pas de temps.
2. Ces paramètres correspondent à des modifications des paramètres  $\beta_0$ ,  $\beta_1$  et  $\beta_2$  après que la campagne de sensibilisation a commencé. Ils peuvent donc être interprétés comme les différences entre les périodes pré- et post-campagne, sur le niveau moyen (pour  $\beta'_0$ ) et sur la structure périodique (pour  $\beta'_1$  et  $\beta'_2$ ) de la série.
3. L'autocorrélation du bruit est non nulle pour des décalages faibles, et décroît rapidement vers 0. L'autocorrélation partielle est non nulle pour les décalages 1 et 2, puis s'annule. Il faut donc ajouter au modèle de régression linéaire une structure d'autodépendance de type AR(2).

4. a. Dans le test de Ljung-Box, l'hypothèse nulle testée est la suivante :

$$\mathcal{H}_0 : \quad \forall h = 1, \dots, H, \quad \rho(h) = \text{Corr}(x_t, x_{t-h}) = 0,$$

où  $H$  détermine le nombre de décalages testés et est choisi par l'utilisateur.

- b. La statistique du test de Ljung-Box suit une loi du chi-deux à  $H - p - q - P - Q$  degrés de liberté, où  $p$ ,  $q$ ,  $P$  et  $Q$  désignent les ordres des processus AR et MA estimés dans la structure de dépendance. Ici, la sortie R donne `df = 58`, et le modèle ajusté sur le bruit est un AR(2). On en déduit que 60 décalages ont été testés.
- c. Pour un seuil  $\alpha$  donné (par exemple 0.01), le test de Ljung-Box rejette l'hypothèse nulle. Par ailleurs, l'ACF et la PACF révèlent un pic d'autocorrélation non nul à l'ordre 52 et il existe peut-être un pic non nul à l'ordre 104 sur l'ACF. Ces observations incitent à ajuster le modèle en ajoutant une structure résiduelle saisonnière au bruit, du type  $AR(1)_{52}$ , de sorte que le modèle de dépendance sur le bruit  $\varepsilon_t$  est un  $ARIMA(2, 0, 0)(1, 0, 0)_{52}$ .
5. a. Si les fonctions d'autocorrélation des deux modèles ne présentent plus de pics significativement différents de 0, alors le modèle retenu est déterminé par l'AIC, qui est une mesure de l'ajustement du modèle, pénalisée par le nombre de paramètres. Ici, l'AIC du premier modèle est inférieure de 9 points. On retiendra donc ce modèle.
- b. Le modèle retenu pour  $\varepsilon_t$  est un  $ARIMA(2, 0, 0)(1, 0, 0)_{52}$  qui vérifie la formule de récurrence

$$(1 - \varphi_1 B^{52})(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2)\varepsilon_t = w_t,$$

où  $B$  désigne l'opérateur retard et  $w_t$  un bruit blanc gaussien.

6. Pour déterminer l'impact de la campagne de sensibilisation, il faut s'intéresser au paramètre  $\beta'_0$  qui rend compte de la diminution de l'espérance de la série (il existe aussi une diminution de l'amplitude des termes périodiques, mais à l'échelle d'une année, ces termes périodiques se compensent). Comme  $\beta'_0$  est estimé par maximum de vraisemblance, la loi limite de l'estimateur est donnée par

$$\frac{\widehat{\beta}'_0 - \beta'_0}{\sqrt{\widehat{\text{Var}}(\widehat{\beta}'_0)}} \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

On en déduit donc un intervalle de confiance asymptotique au niveau  $1 - \alpha$  pour  $\beta'_0$  (voir note de bas de page <sup>1</sup>) :

$$\text{IC}_{1-\alpha}(\beta'_0) = \left[ \widehat{\beta}'_0 \pm u_{1-\alpha/2} \sqrt{\widehat{\text{Var}}(\widehat{\beta}'_0)} \right],$$

où  $u_\gamma$  désigne le quantile d'ordre  $\gamma$  de la loi normale centrée réduite. Avec  $\alpha = 0.05$ , et les sorties du modèle retenu, on trouve

$$\text{IC}_{0.95}(\beta'_0) = [-318; -112].$$

C'est-à-dire, à l'échelle d'une année, la campagne de sensibilisation a permis d'éviter  $-52\widehat{\beta}'_0 = 11\,162$  prescriptions antibiotiques pour 100 000, avec un intervalle de confiance donné par

$$\text{IC}_{0.95}(-52\beta'_0) = [5\,808; 16\,515].$$

---

<sup>1</sup>Cet intervalle de confiance est construit de manière usuelle : par conséquence de la loi limite de l'estimateur, on a, lorsque le nombre d'observations tend vers l'infini,

$$\mathbb{P} \left( -u_{1-\alpha/2} \leq \frac{\widehat{\beta}'_0 - \beta'_0}{\sqrt{\widehat{\text{Var}}(\widehat{\beta}'_0)}} \leq u_{1-\alpha/2} \right) = 1 - \alpha.$$

En manipulant l'inégalité à l'intérieur de la probabilité, on obtient :

$$\mathbb{P} \left( \widehat{\beta}'_0 - u_{1-\alpha/2} \sqrt{\widehat{\text{Var}}(\widehat{\beta}'_0)} \leq \beta'_0 \leq \widehat{\beta}'_0 + u_{1-\alpha/2} \sqrt{\widehat{\text{Var}}(\widehat{\beta}'_0)} \right) = 1 - \alpha,$$

ce qui correspond à l'intervalle de confiance souhaité.