

Processamento Digital de Sinais e Aplicações em Acústica

Soluções para Tutorial 6 - Transformada de Fourier de Tempo Discreto (DTFT) e Transformada Discreta de Fourier (DFT)

https://github.com/fchirono/Aulas_PDS_Acustica

1 DTFT

Tarefa 1

Mostre que a DTFT é periódica:

$$\begin{aligned}X(\Omega + 2\pi) &= \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} x[n] \cdot e^{-jn(\Omega+2\pi)} \\&= \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} x[n] \cdot e^{-jn\Omega} \cdot e^{-jn2\pi} \\&= \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} x[n] \cdot e^{-jn\Omega} \cdot \cancel{e^{-jn2\pi}} \cdot 1 \\&= \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} x[n] \cdot e^{-jn\Omega} = X(\Omega)\end{aligned}$$

Tarefa 2

Não, o segundo arquivo possui uma frequência fundamental mais alta.

Tarefa 3

-

Tarefa 4

Ver Figura 1.

Tarefa 5

$$\Delta f = \frac{f_s}{4096-1} = 5.38 \text{ Hz} = 0.00153 \text{ rad/amostra.}$$

Tarefa 6

Sim, o espectro harmônico de A2.wav está mais espalhado, comparado ao espectro de A1.wav. Uma outra pista é que a frequência fundamental é mais alta.

Tarefa 7

Ver Figura 2.

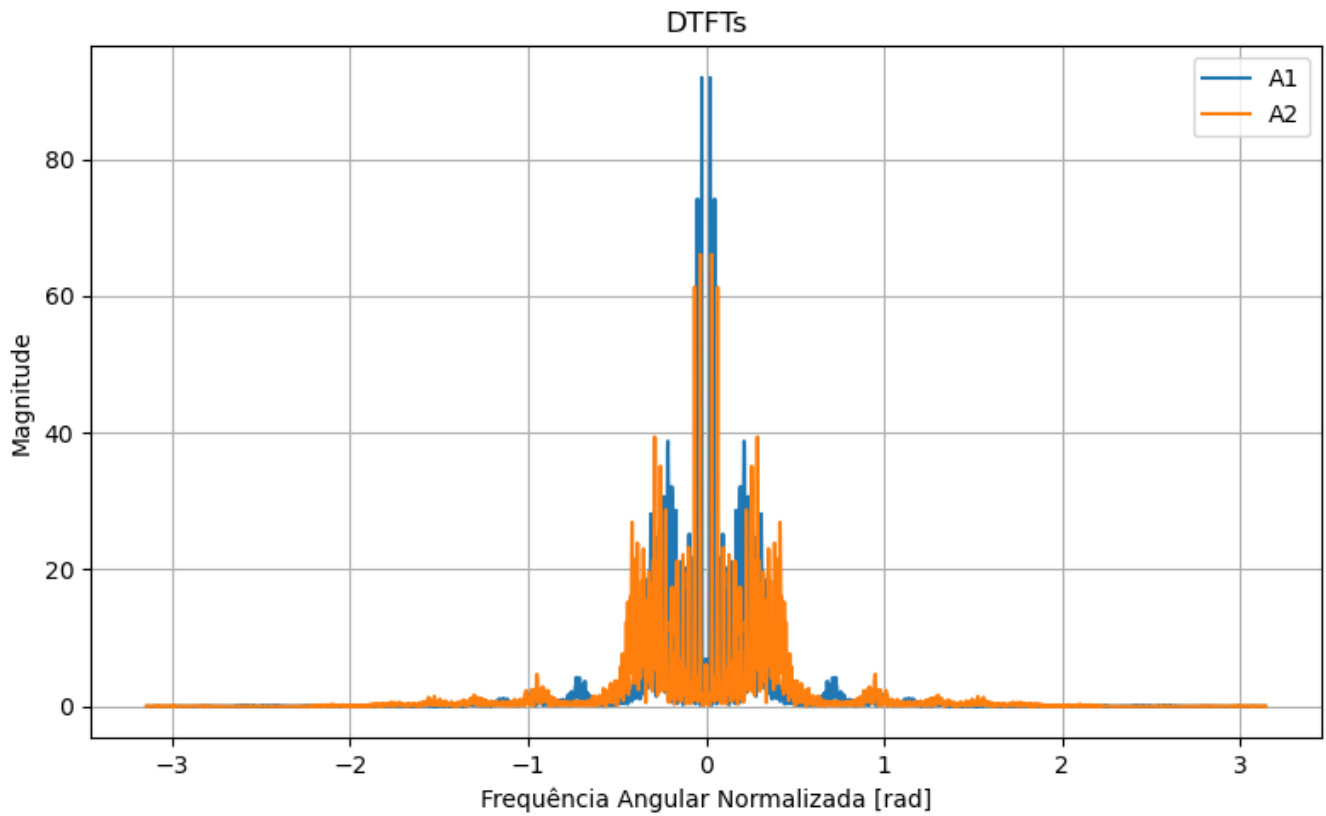


Figura 1: DTFT dos sinais A1 .wav e A2 .wav.

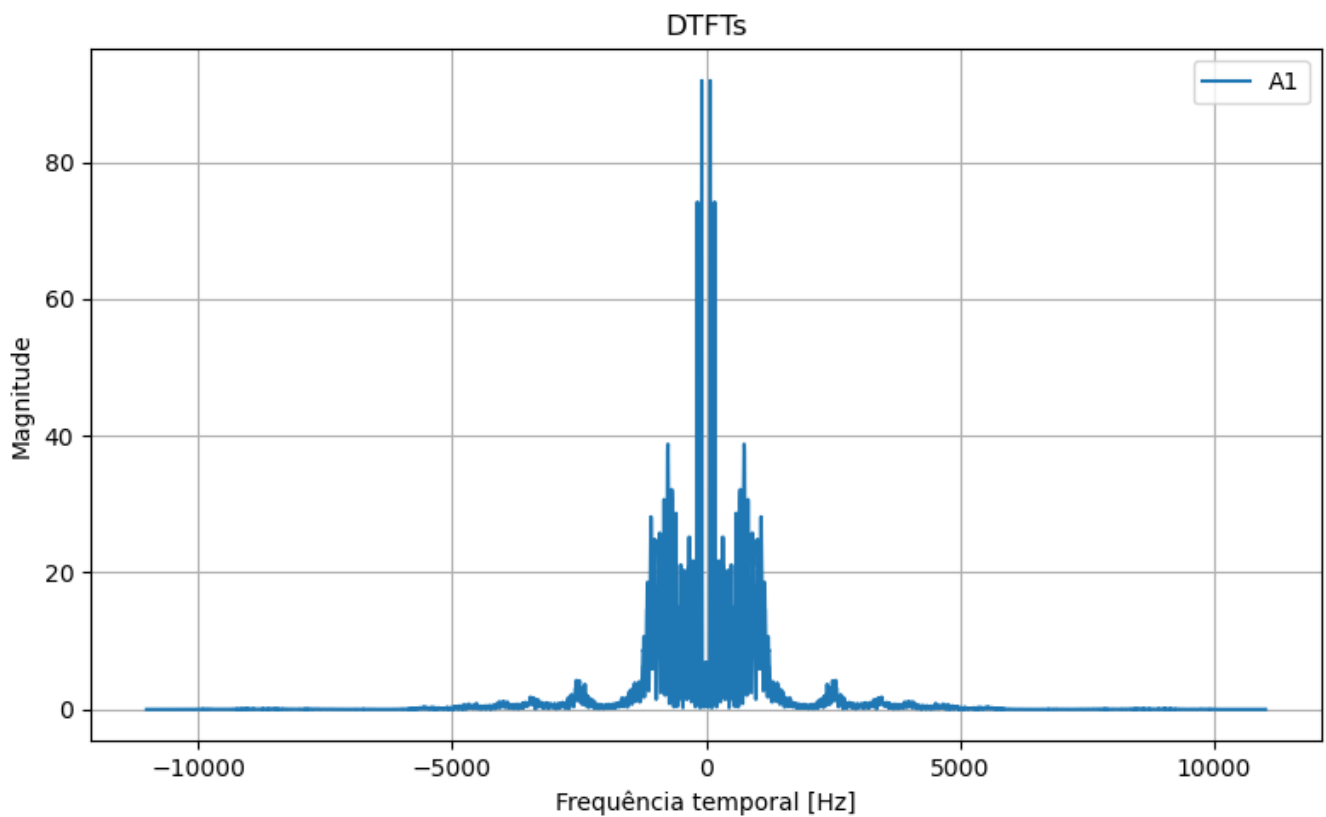


Figura 2: DTFT do sinal A1 .wav plotado em função da frequência temporal (em Hz).

Tarefa 8

Devido à periodicidade da DTFT, o espectro de amplitude se repete nos intervalos $[-3\pi, -\pi]$ e $[\pi, 3\pi]$, conforme visto na Figura 3.

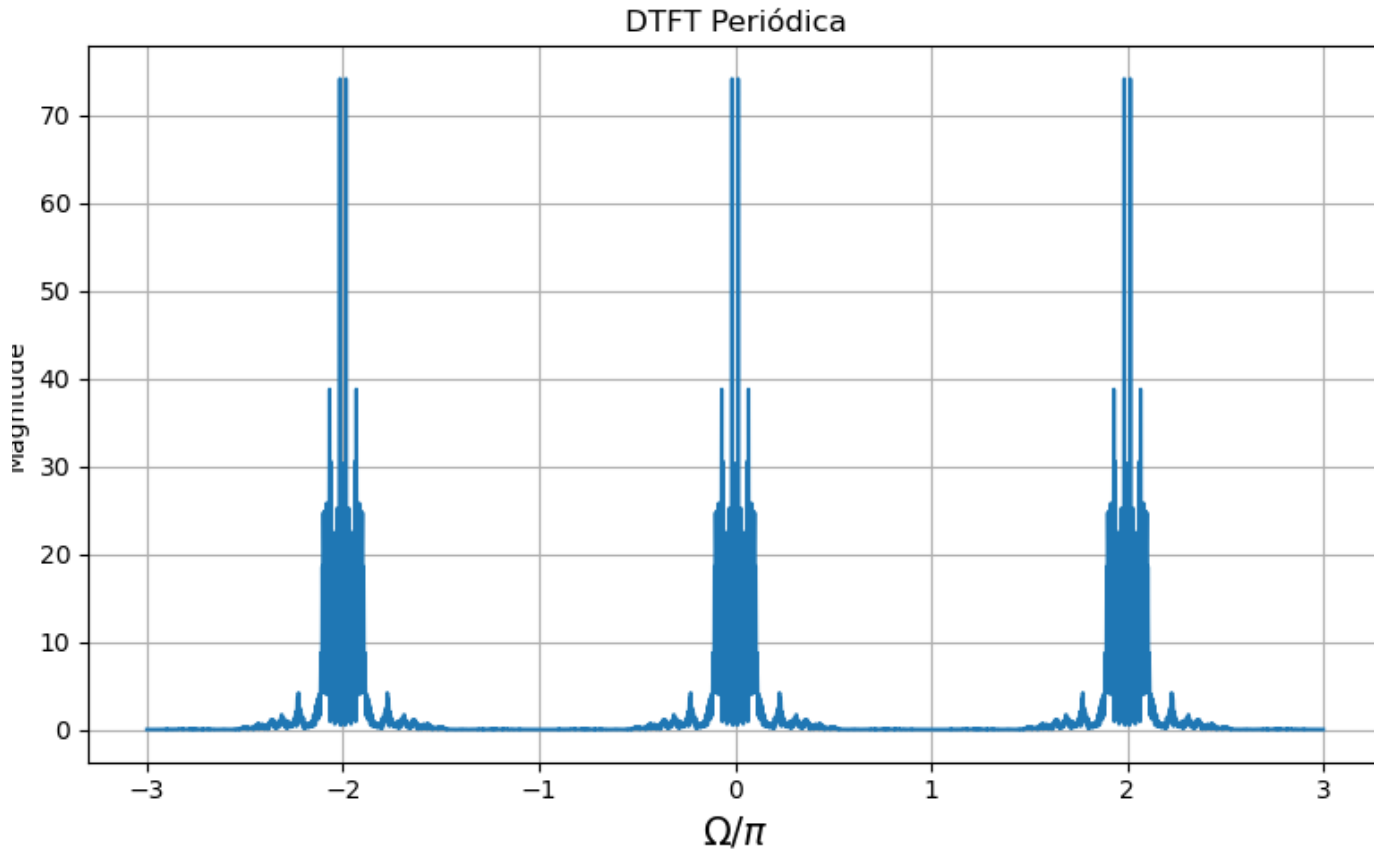


Figura 3: DTFT do sinal A1 .wav plotado no intervalo $[-3\pi, 3\pi]$ rad/amostra.

Como o número de elementos em Omega é o mesmo mas a faixa de frequência triplicou, a resolução em frequência é apenas um terço da resolução anterior, resultando em $\Delta f = \frac{3f_s}{4096-1} = 16.15 \text{ Hz} = 0.0046 \text{ rad/amostra}$.

2 DFT e IDFT

Tarefa 1

Mostre que a DFT é periódica

$$\begin{aligned}
 X[k + N] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}(k+N)n} \\
 &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \cdot e^{-j2\pi n} \\
 &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \cdot \cancel{e^{-j2\pi n}} \cdot 1 \\
 &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = X[k]
 \end{aligned}$$

Mostre que a DFT assume que $x[n]$ é periódica:

$$\begin{aligned}
x[n + N] &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}k(n+N)} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \cdot e^{j2\pi k} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \cdot \cancel{e^{j2\pi k}}^1 \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = x[n]
\end{aligned}$$

Tarefa 2

-

Tarefa 3

Vamos criar uma sequência de valores aleatória (com distribuição Gaussiana) e calcular a DFT para os três casos:

```
# Gerar sequencia aleatoria
L = 20
ruído = np.random.randn(L)

# Usar DFTs de comprimento diferentes
DFT_Ruido1 = DFT(ruido, L)
DFT_Ruido2 = DFT(ruido, L-1)
DFT_Ruido3 = DFT(ruido, L+1)
```

Tarefa 4

As três subfiguras na Figura 4 mostram o resultado para a magnitude e fase da DFT da sequência aleatória ruído para os três valores de N_{DFT} :

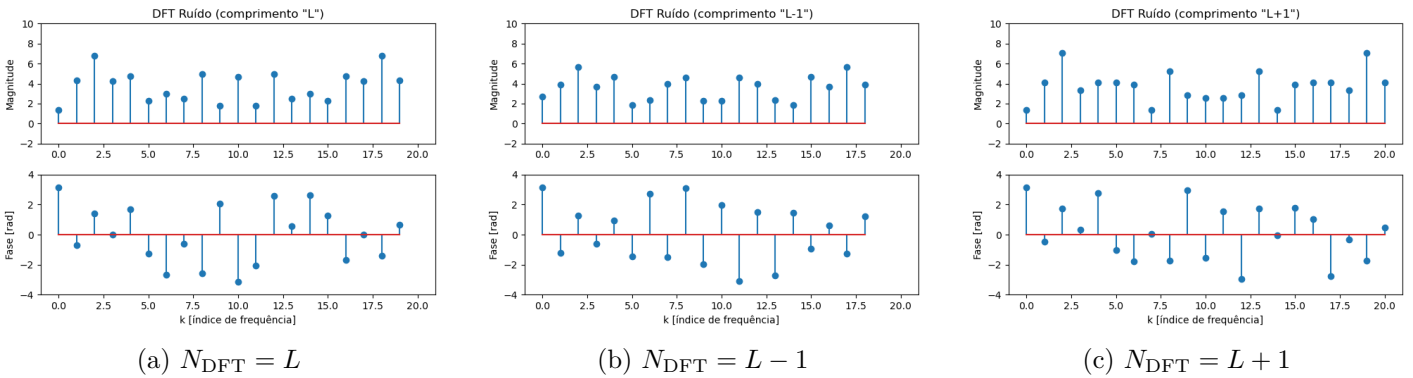


Figura 4: DFT da sequência aleatória ruído para os três valores de N_{DFT} .

Pode-se observar que a alteração do comprimento da DFT também altera o resultado da DFT, embora características claramente proeminentes possam permanecer muito semelhantes entre os dois resultados.

Tarefa 5

Pela definição, a DFT de uma sequência x real, com L par, resultará em valores reais para $\Omega = 0$ rad/amostra e $\Omega = \pi$ rad/amostra. Portanto, a fase para estas amostras deve ser 0 ou $\pm\pi$ radianos, como pode ser visto no gráfico da fase na Figura 4a. Certifique-se de entender porquê isto acontece!

Tarefa 6

A comparação entre as Figuras 4 e 5 mostra que o resultado da DFT para $N_{\text{DFT}} = L$ é o mesmo que o da FFT correspondente, como era esperado.

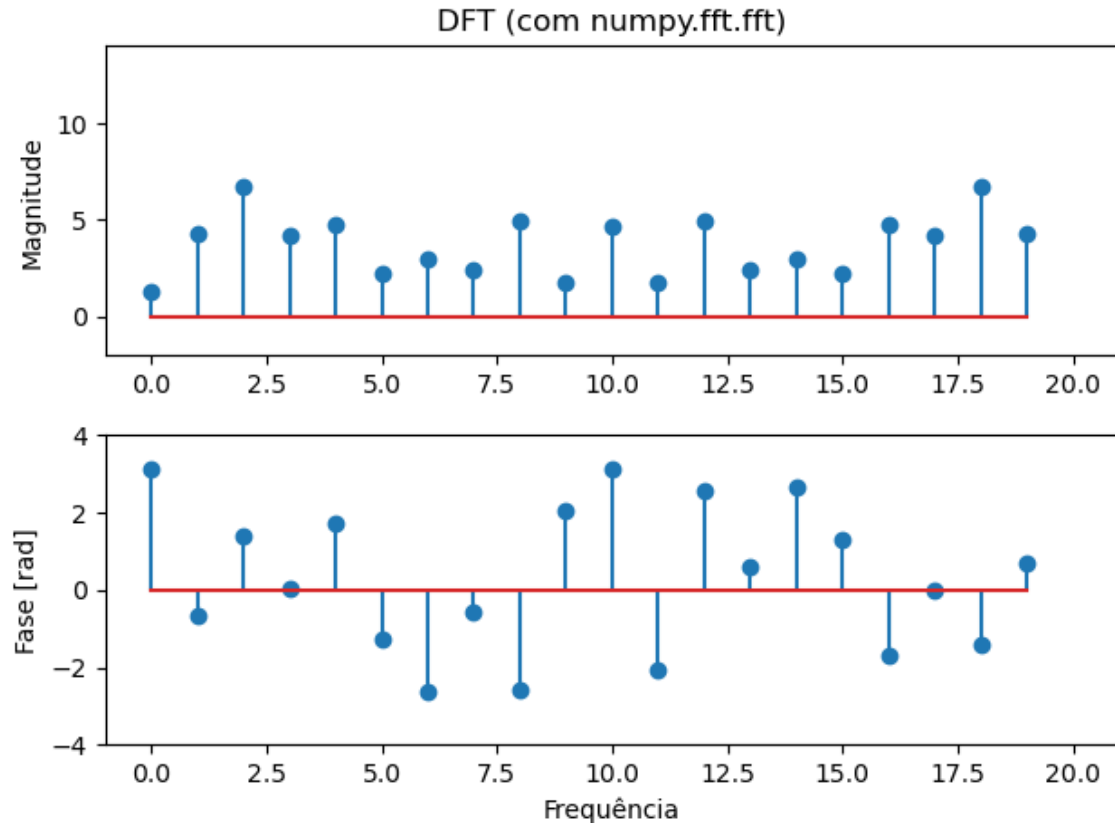


Figura 5: Resultado da FFT da sequência aleatória para $N_{\text{DFT}} = L$.

Tarefa 7

-

Tarefa 8

Como pode ser visto na Figura 6, as sequências obtidas pela operação IDFT são todas iguais até $n = 18$. O resultado da IDFT para o espectro calculado com $N_{\text{DFT}} = L - 1$ termina na 19ª amostra, devido à limitação de dados previamente imposta. O resultado da IDFT para o comprimento de dados L produz exatamente o mesmo resultado que a sequência original, e o resultado para o comprimento de dados $L = 1$ adiciona um único zero à sequência original, visto que esse zero foi adicionado anteriormente durante a operação DFT com $N_{\text{DFT}} = L + 1$.

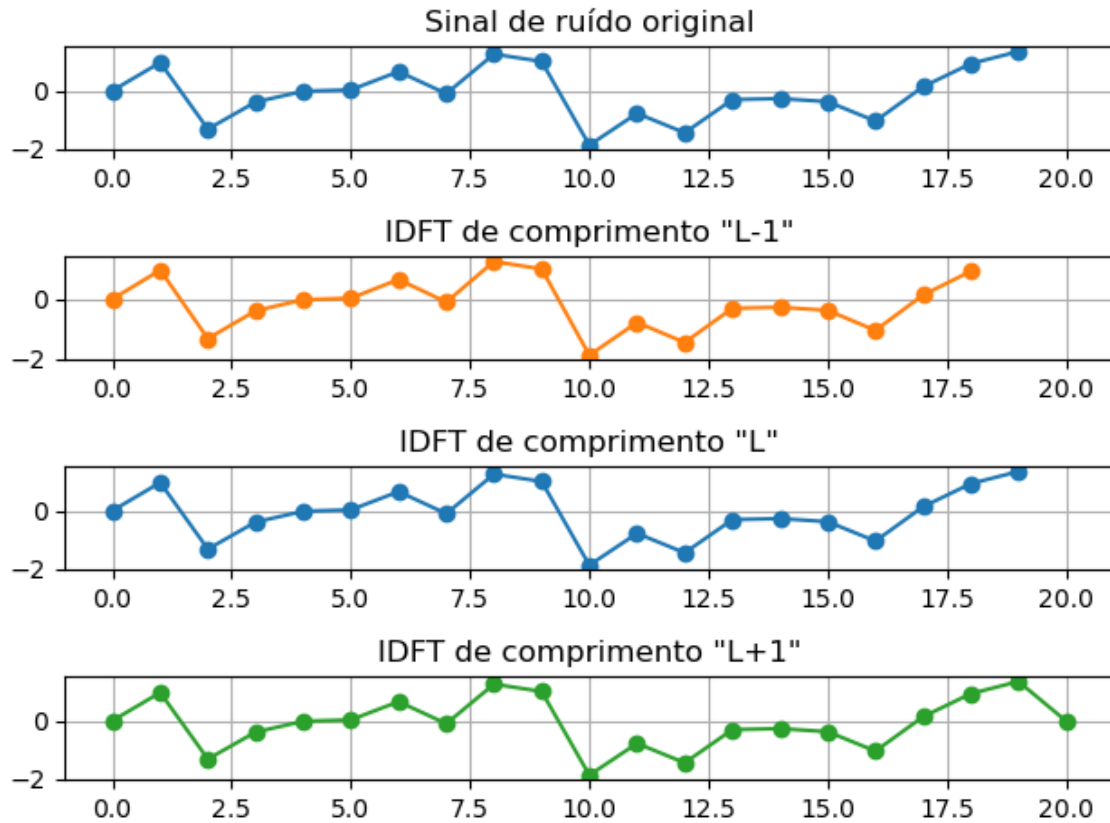


Figura 6: Resultados da IDFT aplicada aos três espectros DFT diferentes.

3 DTFT vs. DFT

Tarefa 1

```
# Ler o sinal 'A1' entre 5100 e 6400 amostras
d = a1[5099:6400]
```

Tarefas 2-5

Pode-se observar no trecho da Figura 7 que os intervalos da DFT são “amostras” do resultado da DTFT, que é contínua em relação à frequência. A resolução de frequência da DFT depende claramente do número de amostras, enquanto a DTFT pode, em teoria, ter uma resolução de frequência infinita.

No entanto, também se observa que as 4096 amostras usadas para criar Omega não fornecem resolução suficiente para que ambas as representações sejam visualmente alinhadas; um resultado muito melhor pode ser obtido recriando o vetor Omega com cerca de 10000 pontos ou mais, embora isso não seja estritamente necessário.

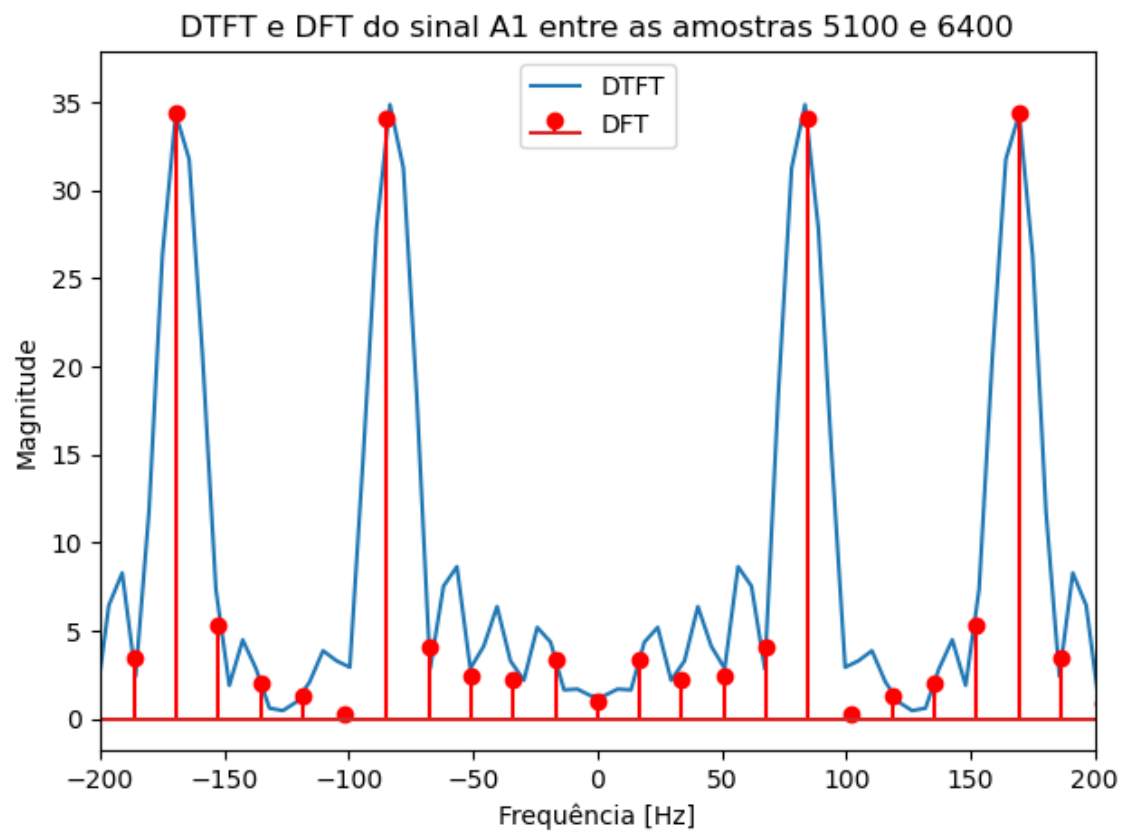


Figura 7: DTFT (azul) e DFT (hastes vermelhas) de d para as frequências no intervalo $[-200, 200]$ Hz.