Processamento Digital de Sinais e Aplicações em Acústica
Tutorial 03 - Amostragem e Aliasing

https://github.com/fchirono/Aulas_PDS_Acustica

Objetivos do Tutorial

Ao final desta sessão, você será capaz de:

- Compreender a diferença entre sinais em tempo discreto e tempo contínuo
- Aplicar o Teorema de Shannon para reconstrução de sinais
- Identificar e visualizar o fenômeno de aliasing
- Reconhecer as limitações da frequência de amostragem

Sumário

1 Conceitos Básicos **1**
- 1.1 Amostragem Temporal 1
- 1.2 Teorema de Shannon (Teorema da Amostragem) 2
- 1.3 Interpolação usando funções sinc 2
- 1.4 Aliasing 2

2 Exercícios **2**
- 2.1 Exercício 1: Visualização de Sinal Discreto vs Contínuo 2
- 2.2 Exercício 2: Propriedade da Função sinc 2
- 2.3 Exercício 3: Reconstrução Ideal de Sinais (Teorema de Shannon) 3
- 2.4 Exercício 4: Visualização de Aliasing no Domínio do Tempo e Frequência 3
- 2.5 Exercício 5: Aliasing por Sub-amostragem 3
- 2.6 Exercício 6 (Opcional): Aliasing em Séries de Fourier 4

3 Referências **4**

4 Observações Finais **4**

1 Conceitos Básicos

1.1 Amostragem Temporal

A conversão de sinais analógicos (tempo contínuo) para digitais (tempo discreto) é realizada através da amostragem a uma frequência $f_s = 1/T_s$, onde T_s é o intervalo de amostragem. O sinal discreto $x[n]$ representa o sinal contínuo $x(t)$ nos instantes $t = nT_s$.

1.2 Teorema de Shannon (Teorema da Amostragem)

Para que um sinal seja perfeitamente reconstruído a partir de suas amostras, a frequência de amostragem f_s deve ser pelo menos duas vezes maior que a maior frequência presente no sinal:

$$f_s \geq 2f_{\max} \tag{1}$$

A frequência $f_N = f_s/2$ é conhecida como frequência de Nyquist.

1.3 Interpolação usando funções sinc

A reconstrução ideal de um sinal contínuo a partir de suas amostras discretas é dada por:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot \mathrm{sinc}((t - nT_s)f_s) \tag{2}$$

onde $\mathrm{sinc}(x) = \sin(\pi x)/(\pi x)$. Esta função tem a propriedade importante de valer 1 em $x = 0$ e zero em todos os outros valores inteiros de x.

1.4 Aliasing

Quando a condição do Teorema de Shannon não é satisfeita ($f_s < 2f_{\max}$), componentes de alta frequência aparecem "disfarçadas" como componentes de baixa frequência no sinal amostrado. Este fenômeno é chamado de *aliasing*.

2 Exercícios

2.1 Exercício 1: Visualização de Sinal Discreto vs Contínuo

Crie um script que:

1. Defina uma frequência de amostragem $f_{s,d} = 1000$ Hz para tempo discreto
2. Defina uma frequência muito maior $f_{s,c} = 20 \times f_{s,d}$ para simular tempo "contínuo"
3. Gere um sinal cosenoidal com frequência $f_0 = 53$ Hz e duração $T = 1.0$ s
4. Plote ambos os sinais (discreto com marcadores, contínuo com linha)
5. Limite o eixo x para visualizar apenas os primeiros 0.1 segundos

Questão: O que você observa sobre a relação entre as amostras discretas e o sinal contínuo?

2.2 Exercício 2: Propriedade da Função sinc

Demonstre numericamente que a interpolação tipo sinc de uma única amostra possui valor zero nos instantes das outras amostras:

1. Crie um vetor contendo zeros exceto na 15ª posição
2. Interpole esta amostra usando a função sinc no tempo "contínuo"
3. Plote o resultado mostrando que a função vale zero nas outras amostras
4. Limite a visualização aos primeiros 0.03 segundos

Questão: A função sinc é causal? O que isso implica para sistemas físicos reais?

2.3 Exercício 3: Reconstrução Ideal de Sinais (Teorema de Shannon)

Implemente a reconstrução de um sinal usando o somatório de funções sinc:

1. Para as primeiras 15 amostras do sinal discreto do Exercício 1:
   - Calcule a função sinc correspondente a cada amostra
   - Plote cada contribuição individual no tempo contínuo
   - Some todas as contribuições para obter o sinal reconstruído
2. Compare visualmente o sinal reconstruído com o original
3. Limite o eixo x ao intervalo $[-0.005, 0.02]$ segundos

Questões:

- Por que as funções sinc não interferem entre si nos instantes de amostragem?
- Qual é a principal limitação prática do uso de funções sinc para interpolação?

2.4 Exercício 4: Visualização de Aliasing no Domínio do Tempo e Frequência

Para cada uma das frequências $f_1 = [150, 350, 550, 750]$ Hz:

1. Gere sinais cossenoidais amostrados a $f_{s,d} = 1000$ Hz
2. Calcule a FFT de cada sinal
3. Para cada sinal, crie uma figura com dois subplots:
   - Superior: sinal discreto (marcadores) e contínuo (linha tracejada)
   - Inferior: magnitude da FFT mostrando réplicas espectrais em $\pm f_s$
4. Para frequências acima de $f_s/2$, plote também a frequência "alias"

Questões:

- Quais frequências sofrem *aliasing*? Por quê?
- Qual é a relação entre a frequência real e sua versão "aliased"?
- Como as réplicas espectrais ajudam a visualizar o *aliasing*?

2.5 Exercício 5: Aliasing por Sub-amostragem

Demonstre o *aliasing* quando um sinal de alta taxa de amostragem é dizimado:

1. Gere sinais contínuos ($f_{s,c} = 20000$ Hz) com frequências 250, 450 e 750 Hz
2. Para cada sinal, plote:
   - O sinal em tempo "contínuo"
   - Amostras tomadas a cada 20 pontos (equivalente a $f_{s,d} = 1000$ Hz)
3. Para o sinal de 750 Hz, sobreponha um cosseno de 250 Hz

Questão: Por que os sinais de 250 Hz e 750 Hz produzem as mesmas amostras quando amostrados a 1000 Hz?

2.6 Exercício 6 (Opcional): Aliasing em Séries de Fourier

Crie um sinal composto por múltiplas componentes senoidais e observe o efeito do *aliasing*:

1. Defina amplitudes $A = [1, 0.6, 0.4]$ e frequências $f = [150, 300, 600]$ Hz
2. Crie um sinal somando as três componentes
3. Compare os sinais em tempo discreto ($f_{s,d}$) e contínuo ($f_{s,c}$)
4. Use `sounddevice.play()` para ouvir ambos os sinais (**OPCIONAL**)

Questão: Como o *aliasing* afeta a percepção sonora do sinal?

3 Referências

K. Shin, J. Hammond. *Fundamentals of Signal Processing for Sound and Vibration Engineers.* John Wiley and Sons, 2008.

4 Observações Finais

- Use `plt.grid()` para facilitar a leitura dos gráficos
- Sempre inclua legendas e rótulos nos eixos
- Experimente com diferentes valores de frequências e taxas de amostragem
- Lembre-se: $f_s/2$ (frequência de Nyquist) é o limite teórico!