Processamento Digital de Sinais e Aplicações em Acústica
Soluções para Tutorial 06 - Transformada de Fourier de Tempo Discreto (DTFT) e Transformada Discreta de Fourier (DFT)

https://github.com/fchirono/Aulas_PDS_Acustica

1 DTFT

Tarefa 1

Mostre que a DTFT é periódica:

$$\begin{aligned}
X(\Omega + 2\pi) &= \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} x[n] \cdot e^{-jn(\Omega+2\pi)} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} x[n] \cdot e^{-jn\Omega} \cdot e^{-jn2\pi} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} x[n] \cdot e^{-jn\Omega} \cdot \cancelto{1}{e^{-jn2\pi}} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} x[n] \cdot e^{-jn\Omega} = X(\Omega)
\end{aligned}$$

Tarefa 2

Não, o segundo arquivo possui uma freqência fundamental mais alta.

Tarefa 3

-

Tarefa 4

Ver Figura 1.

Tarefa 5

$\Delta f = \frac{f_S}{4096-1} = 5.38$ Hz $= 0.00153$ rad/amostra.

Tarefa 6

Sim, o espectro harmônico de `A2.wav` está mais espalhado, comparado ao espectro de `A1.wav`. Uma outra pista é que a frequência fundamental é mais alta.

Tarefa 7

Ver Figura 2.

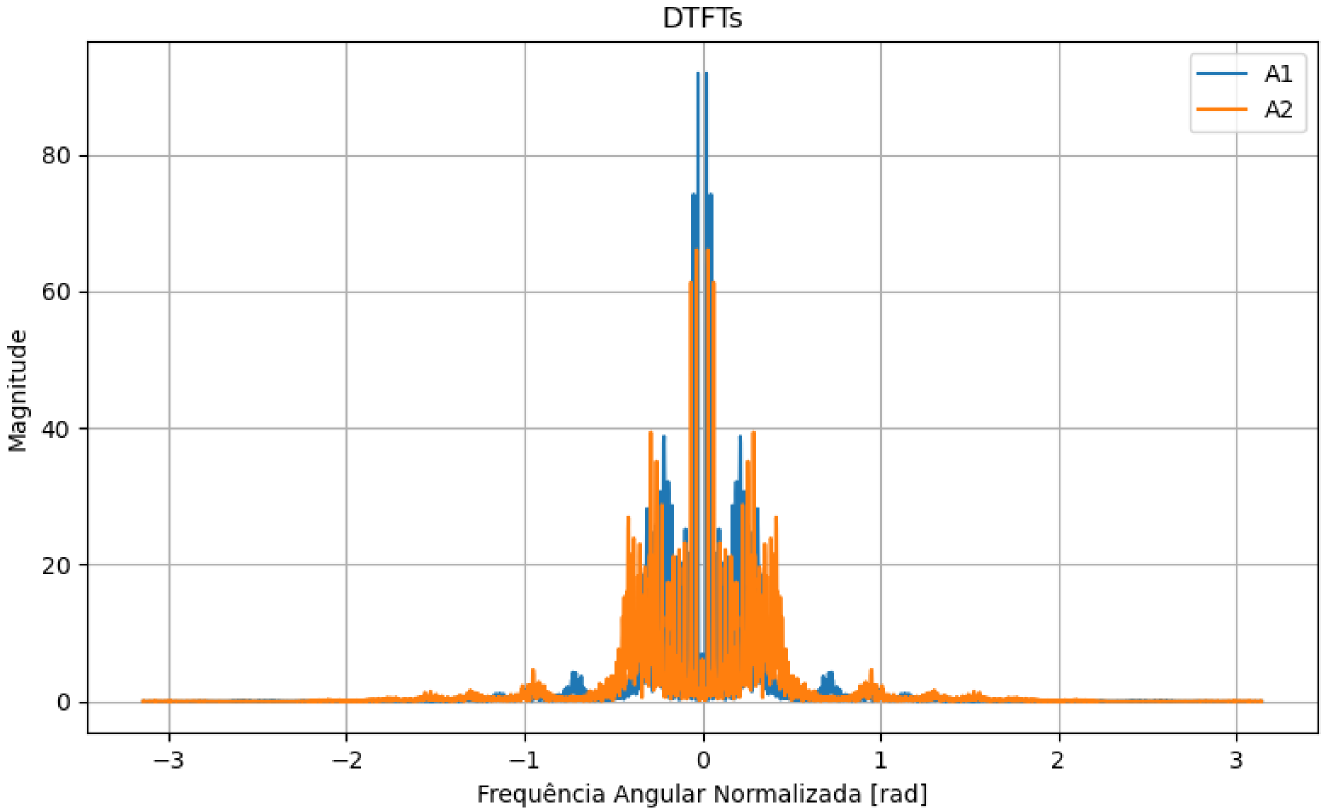


Figura 1: DTFT dos sinais `A1.wav` e `A2.wav`.

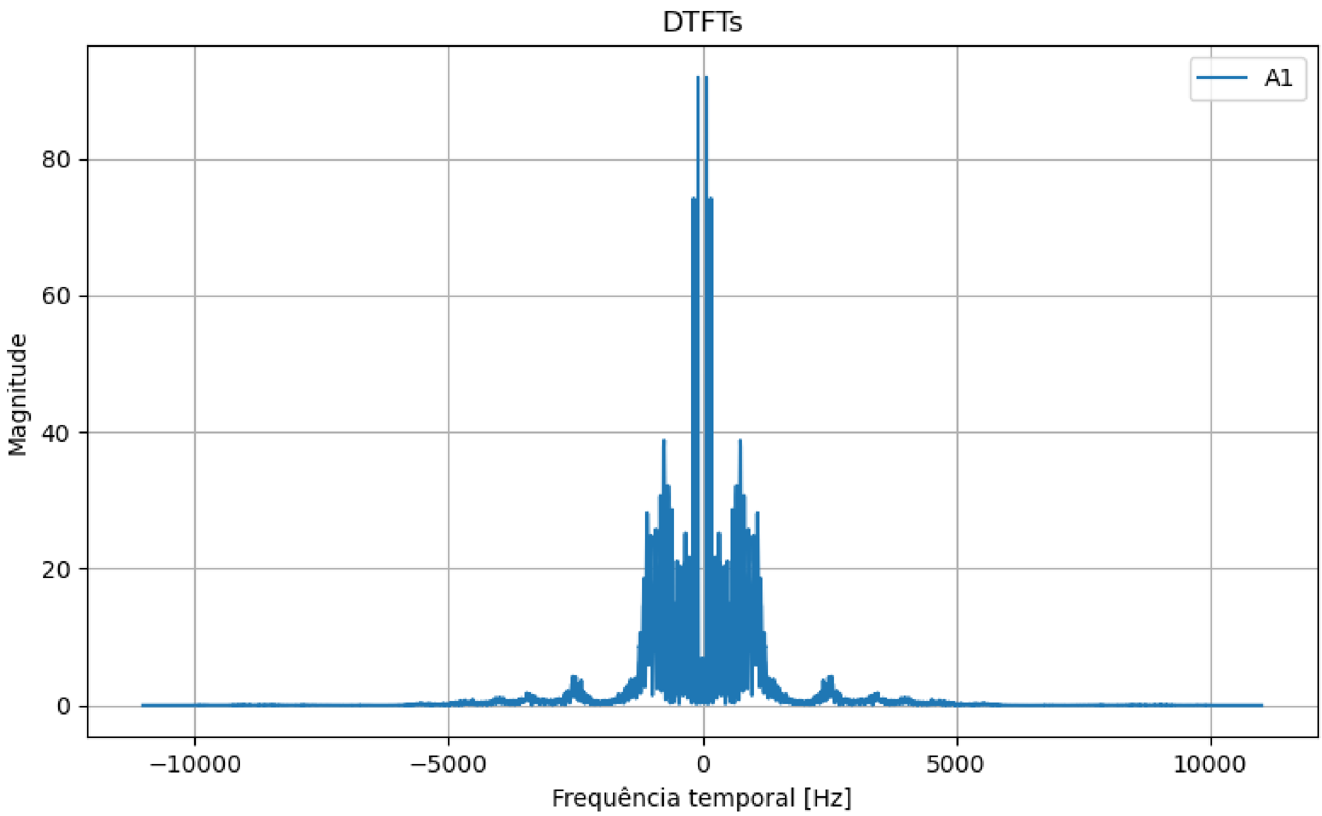


Figura 2: DTFT do sinal `A1.wav` plotado em função da frequência temporal (em Hz).

Tarefa 8

Devido à periodicidade da DTFT, o espectro de amplitude se repete nos intervalos $[-3\pi, -\pi]$ e $[\pi, 3\pi]$, conforme visto na Figura 3.

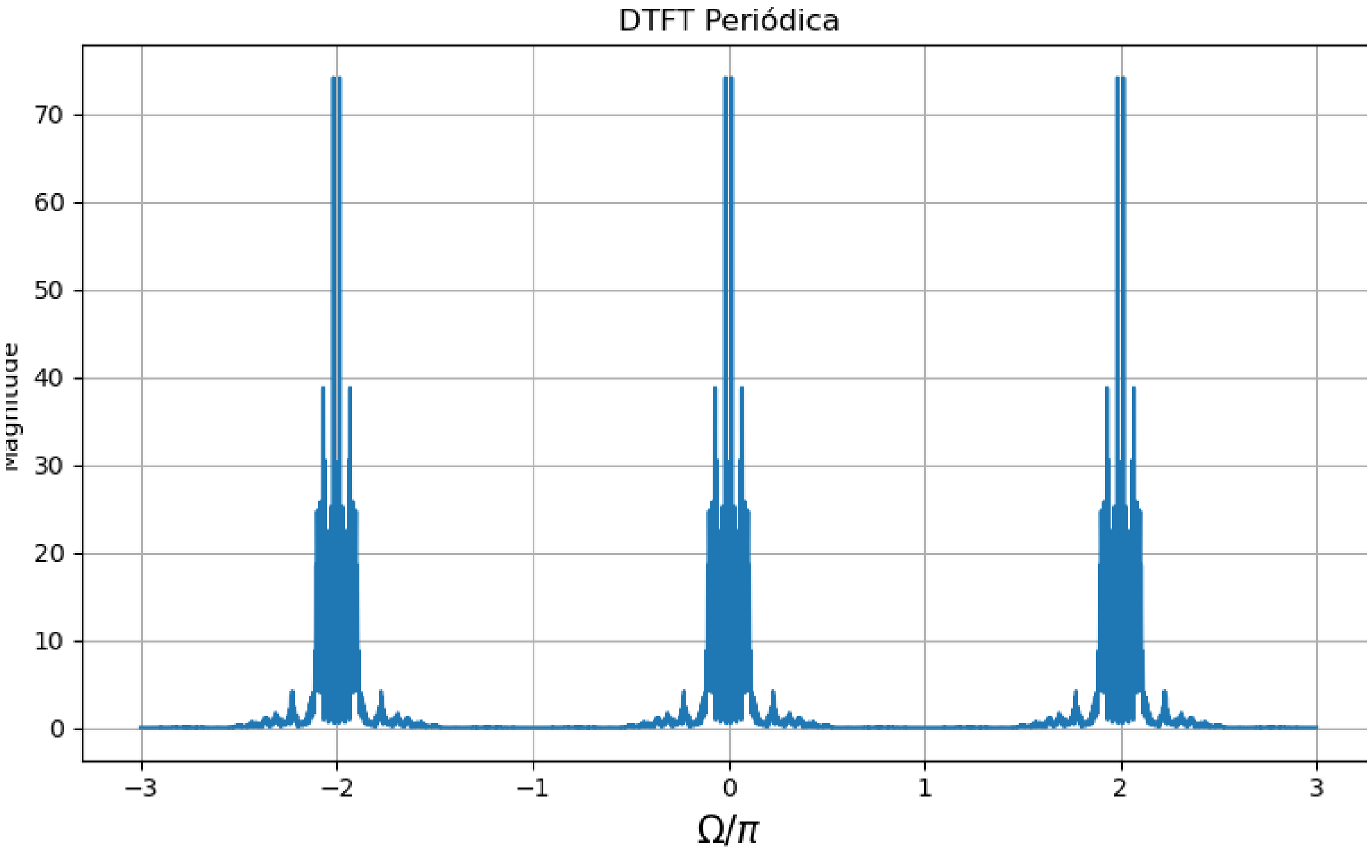


Figura 3: DTFT do sinal `A1.wav` plotado no intervalo $[-3\pi, 3\pi]$ rad/amostra.

Como o número de elementos em `Omega` é o mesmo mas a faixa de frequência triplicou, a resolução em frequência é apenas um terço da resolução anterior, resultando em $\Delta f = \frac{3f_S}{4096-1} = 16.15$ Hz $= 0.0046$ rad/amostra.

2 DFT e IDFT

Tarefa 1

Mostre que a DFT é periódica

$$\begin{aligned} X[k+N] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}(k+N)n} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \cdot e^{-j2\pi n} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \cdot \cancelto{1}{e^{-j2\pi n}} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = X[k] \end{aligned}$$

Mostre que a DFT assume que $x[n]$ é periódica:

$$
\begin{aligned}
x[n+N] &= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X[k]\cdot e^{j\frac{2\pi}{N}k(n+N)} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X[k]\cdot e^{j\frac{2\pi}{N}kn}\cdot e^{j2\pi k} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X[k]\cdot e^{j\frac{2\pi}{N}kn}\cdot \cancelto{1}{e^{j2\pi k}} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X[k]\cdot e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = x[n]
\end{aligned}
$$

Tarefa 2

-

Tarefa 3

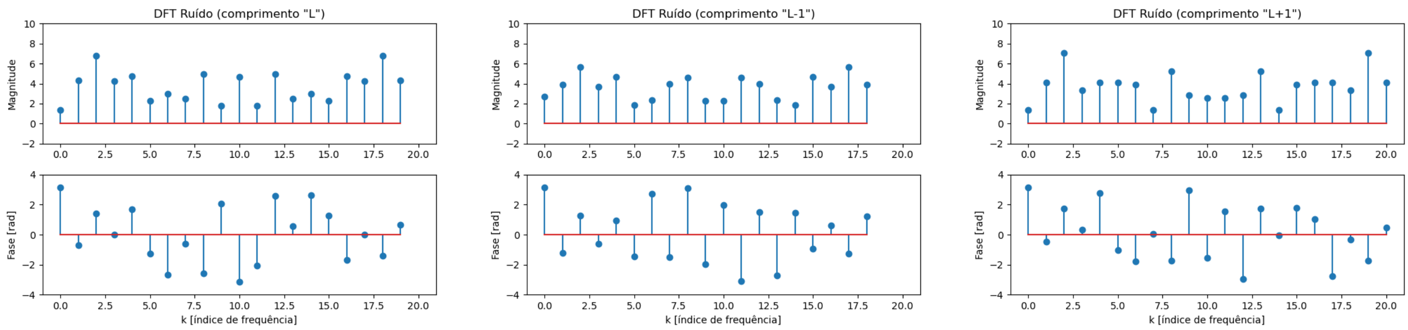
Vamos criar uma sequência de valores aleatória (com distribuição Gaussiana) e calcular a DFT para os três casos:

```
# Gerar sequencia aleatoria
L = 20
ruido = np.random.randn(L)

# Usar DFTs de comprimento diferentes
DFT_Ruido1 = DFT(ruido, L)
DFT_Ruido2 = DFT(ruido, L-1)
DFT_Ruido3 = DFT(ruido, L+1)
```

Tarefa 4

As três subfiguras na Figura 4 mostram o resultado para a magnitude e fase da DFT da sequência aleatória `ruido` para os três valores de `N_DFT`:



(a) $N_{\mathrm{DFT}} = L$ (b) $N_{\mathrm{DFT}} = L-1$ (c) $N_{\mathrm{DFT}} = L+1$

Figura 4: DFT da sequência aleatória `ruido` para os três valores de `N_DFT`.

Pode-se observar que a alteração do comprimento da DFT também altera o resultado da DFT, embora características claramente proeminentes possam permanecer muito semelhantes entre os dois resultados.

Tarefa 5

Pela definição, a DFT de uma sequência x real, com L par, resultará em valores reais para $\Omega = 0$ rad/amostra e $\Omega = \pi$ rad/amostra. Portanto, a fase para estas amostras deve ser 0 ou $\pm\pi$ radianos, como pode ser visto no gráfico da fase na Figura 4a. Certifique-se de entender porquê isto acontece!

Tarefa 6

A comparação entre as Figuras 4 e 5 mostra que o resultado da DFT para $N_{\text{DFT}} = L$ é o mesmo que o da FFT correspondente, como era esperado.

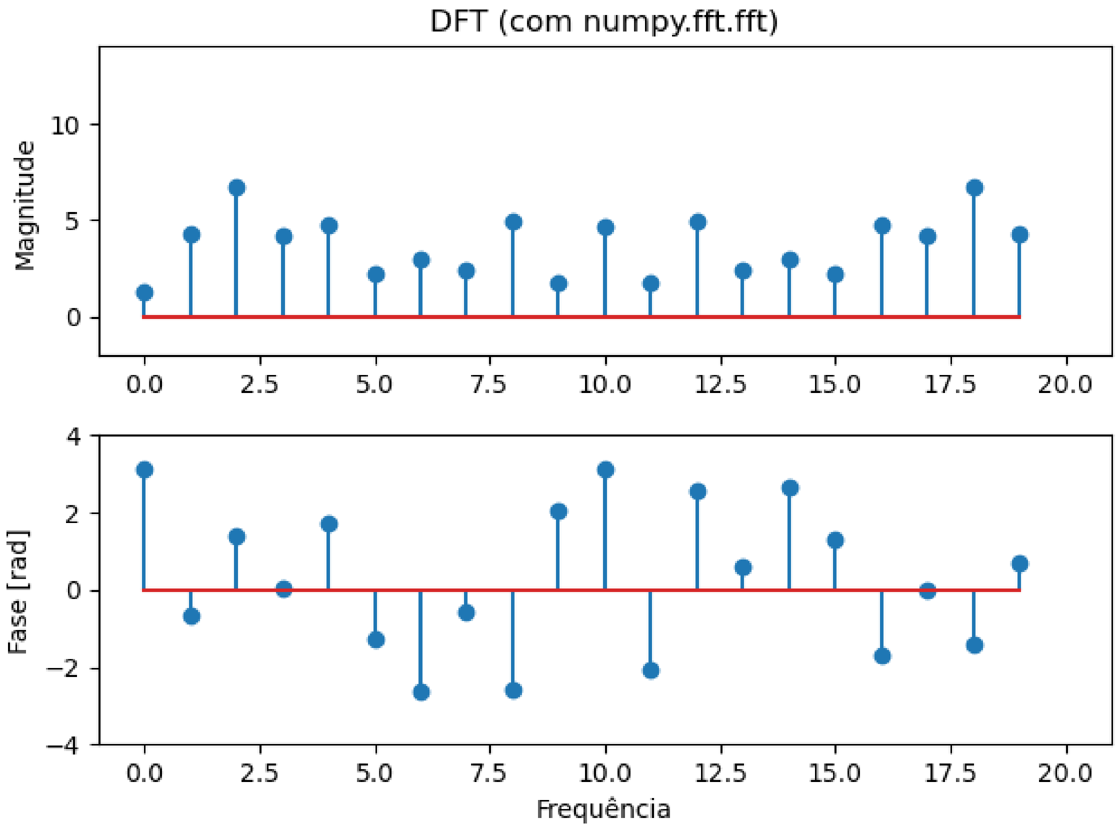


Figura 5: Resultado da FFT da sequência aleatória para $N_{\text{DFT}} = L$.

Tarefa 7

-

Tarefa 8

Como pode ser visto na Figura 6, as sequências obtidas pela operação IDFT são todas iguais até $n = 18$. O resultado da IDFT para o espectro calculado com $N_{\text{DFT}} = L - 1$ termina na 19ª amostra, devido à limitação de dados previamente imposta. O resultado da IDFT para o comprimento de dados L produz exatamente o mesmo resultado que a sequência original, e o resultado para o comprimento de dados $L = 1$ adiciona um único zero à sequência original, visto que esse zero foi adicionado anteriormente durante a operação DFT com $N_{\text{DFT}} = L + 1$.

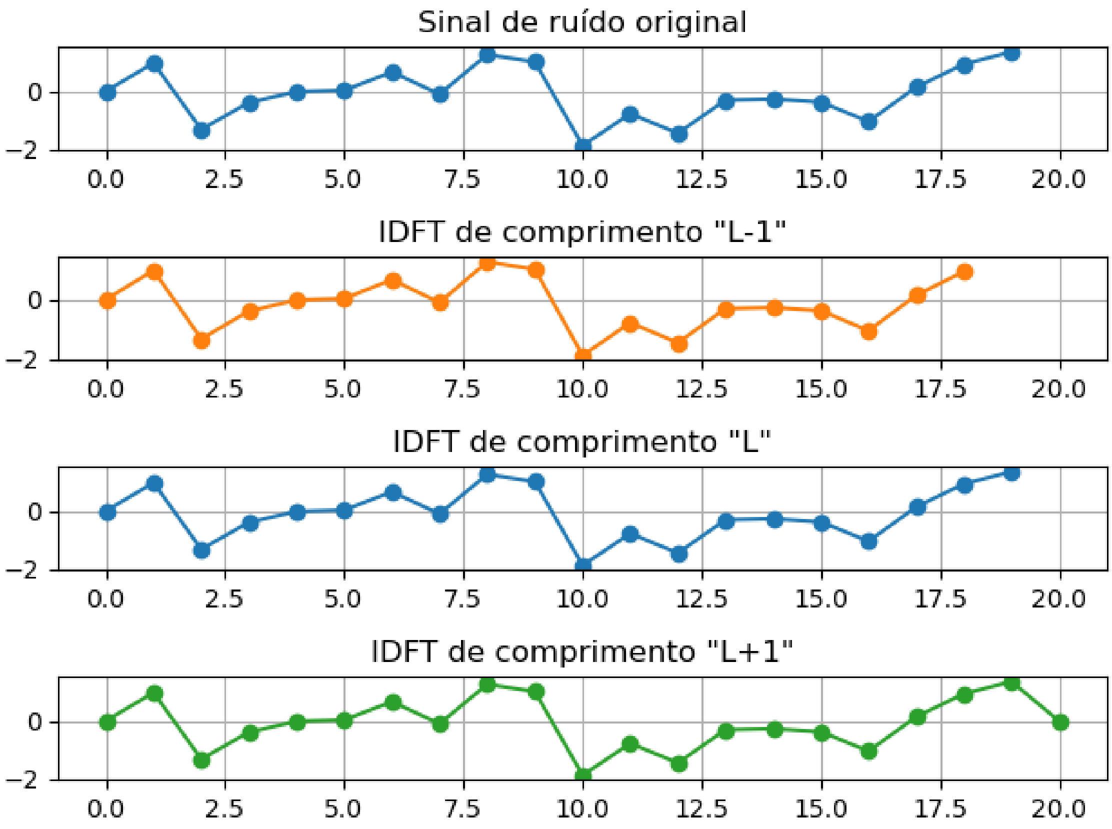


Figura 6: Resultados da IDFT aplicada aos três espectros DFT diferentes.

3 DTFT vs. DFT

Tarefa 1

```
# Ler o sinal 'A1' entre 5100 e 6400 amostras
d = a1[5099:6400]
```

Tarefas 2-5

Pode-se observar no trecho da Figura 7 que os intervalos da DFT são "amostras" do resultado da DTFT, que é contínua em relação à frequência. A resolução de frequência da DFT depende claramente do número de amostras, enquanto a DTFT pode, em teoria, ter uma resolução de frequência infinita.

No entanto, também se observa que as 4096 amostras usadas para criar `Omega` não fornecem resolução suficiente para que ambas as representações sejam visualmente alinhadas; um resultado muito melhor pode ser obtido recriando o vetor `Omega` com cerca de 10000 pontos ou mais, embora isso não seja estritamente necessário.

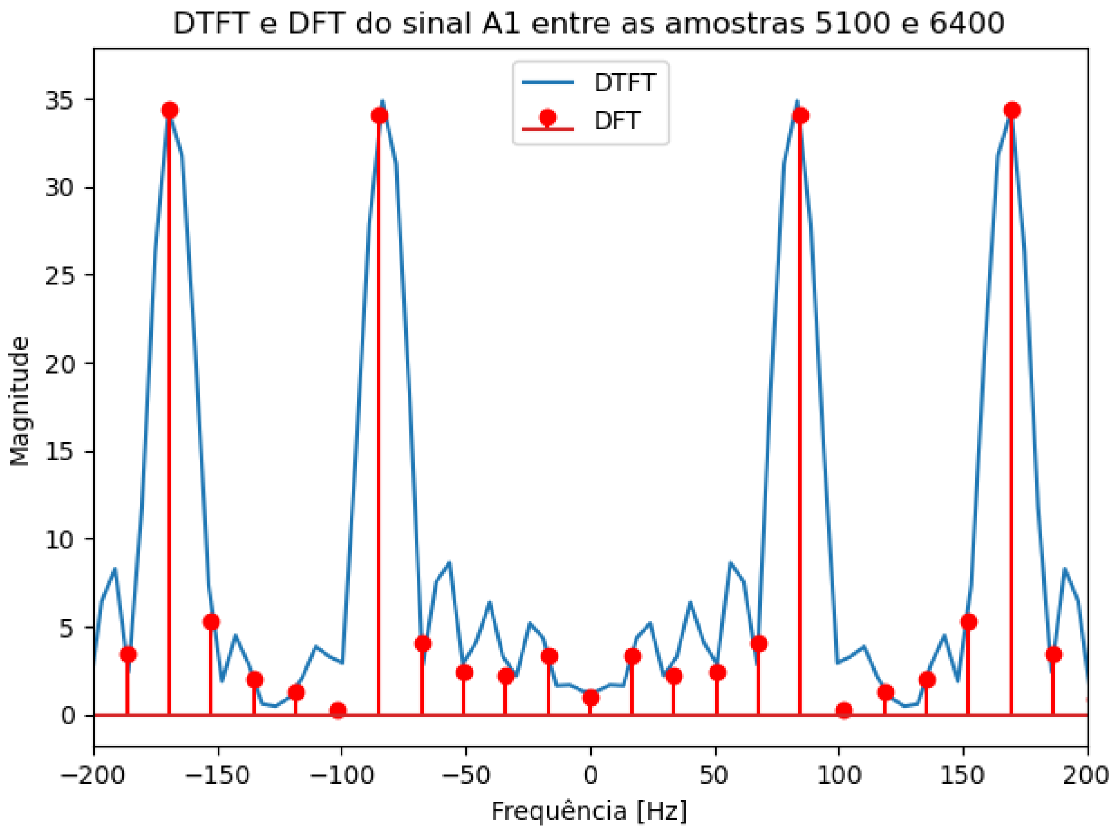


Figura 7: DTFT (azul) e DFT (hastes vermelhas) de `d` para as frequências no intervalo $[-200, 200]$ Hz.