Processamento Digital de Sinais e Aplicações em Acústica
Soluções para Tutorial 03 - Amostragem e Aliasing

https://github.com/fchirono/Aulas_PDS_Acustica

2.1 Visualização do sinal discreto vs contínuo

A Figura 1 mostra o sinal discreto amostrado a $f_s, d = 1000$ Hz com círculos vermelhos, e o sinal "contínuo" com uma linha cinza pontilhada. Nota-se que as amostras do sinal discreto são igualmente espaçadas no tempo, e coincidem com o sinal "contínuo" nos instantes amostrados.

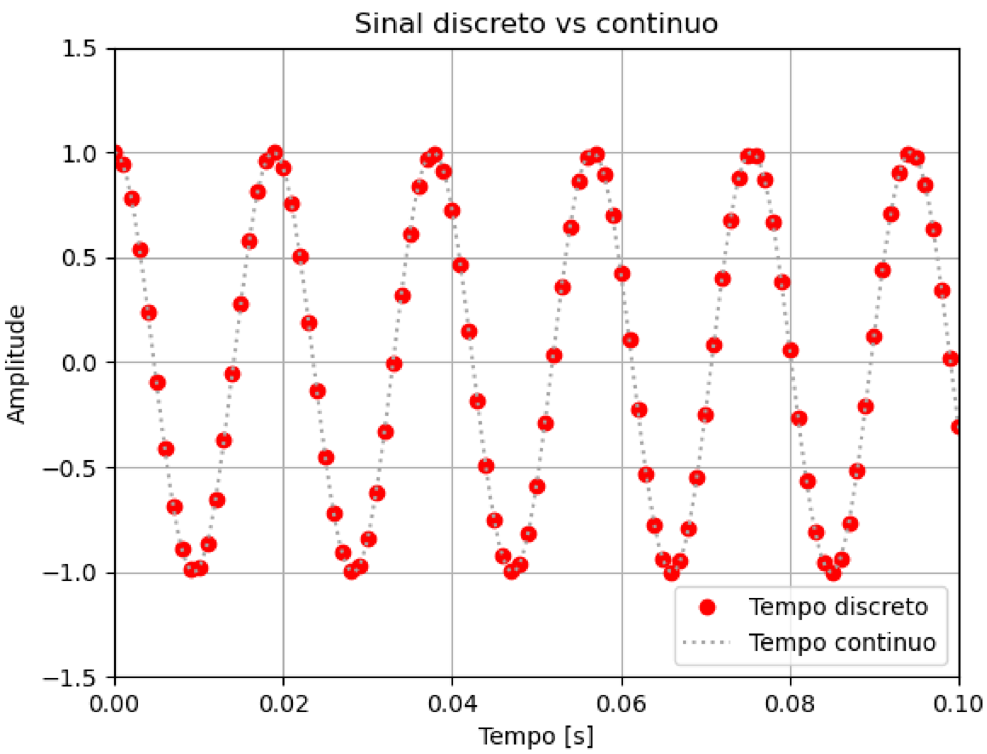


Figura 1: Visualização de sinal senoidal de tempo "contínuo" e tempo discreto.

2.2 Propriedades da função sinc

A Figura 2 mostra o sinal discreto com amostra unitária na 15a amostra ($t = 15$ ms), e o sinal "contínuo" interpolado desta amostra através da função sinc. Nota-se que a função $\text{sinc}(x - x_0)$ assume valor zero em todas as amostras discretas exceto a amostra $x = x_0$, sendo assim uma opção natural para interpolação de sinais discretos.

A função sinc **NÃO** é causal, pois valores no presente são afetados por valores no futuro - note como o sinal "contínuo" apresenta oscilações mesmo antes do pico aos 15 ms. Como sistemas físicos reais devem ser causais, não é possível realizar uma interpolação ou reconstrução digital-analógica utilizando funções sinc ideais. Porém, a função sinc pode ser utilizada em pós-processamento de dados

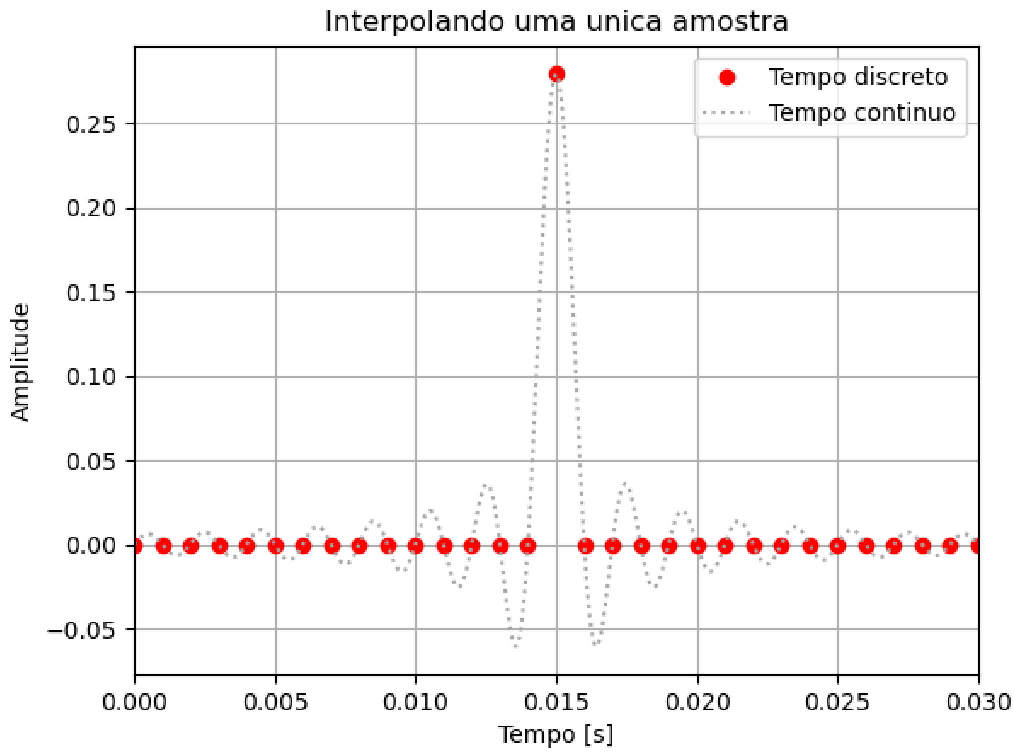


Figura 2: Visualização da função sinc em tempo "contínuo" e tempo discreto.

2.3 Reconstrução ideal de sinais (Teorema de Shannon)

A Figura 3 mostra a reconstrução do sinal em tempo contínuo através das amostras discretas utilizando funções sinc. Nota-se que a soma das funções sinc se aproxima do sinal senoidal original, interpolando o valor da função de tempo contínuo nos períodos entre as amostras discretas.

2.4 Aliasing por sub-amostragem

A Figura 4 demonstra os sinais amostrados a $f_{s,c} = 20000$ Hz e $f_{s,d=1000}$ Hz. O sinal de 750 Hz possui frequência acima de $f_{s,d}/2$, e portanto sua versão discreta não obedece o Teorema da Amostragem e apresenta *aliasing* - note como este sinal e o sinal de 250 Hz possuem a mesma representação em tempo discreto.

Ao auralizar os sinais usando `sounddevice.play` (lembre-se de usar as frequências de amostragem corretas!), não será possível notar diferença alguma nos primeiros dois casos, já que ambos obedecem o Teorema da Amostragem no caso discreto e portanto não há perda de informação. Já o terceiro sinal, que apresenta aliasing, não pode ser reproduzido corretamente, e ouvimos então o resultado do aliasing: perde-se a frequência correta do sinal amostrado, e apresenta-se uma outra frequência mais baixa.

2.5 Visualização de Aliasing no Domínio do Tempo e Frequência

A Figura 5 demonstra o mesmo fenômeno de aliasing, mas desta vez representando os domínios do tempo e da frequência simultaneamente. O espectro em frequência azul demonstra frequências centradas em $f = 0$, enquanto as réplicas espectrais em $\pm f_s$ são indicadas em linhas cinza tracejadas. Finalmente, a frequência f_1 do sinal senoidal está indicada com linhas verticais pretas.

Nota-se aqui que quando a frequência f_1 encontra-se dentro do domínio $[-f_s/2, +f_s/2]$, as amostras discretas correspondem diretamente à frequencia do sinal contínuo. Quando a frequência f_1 sai deste

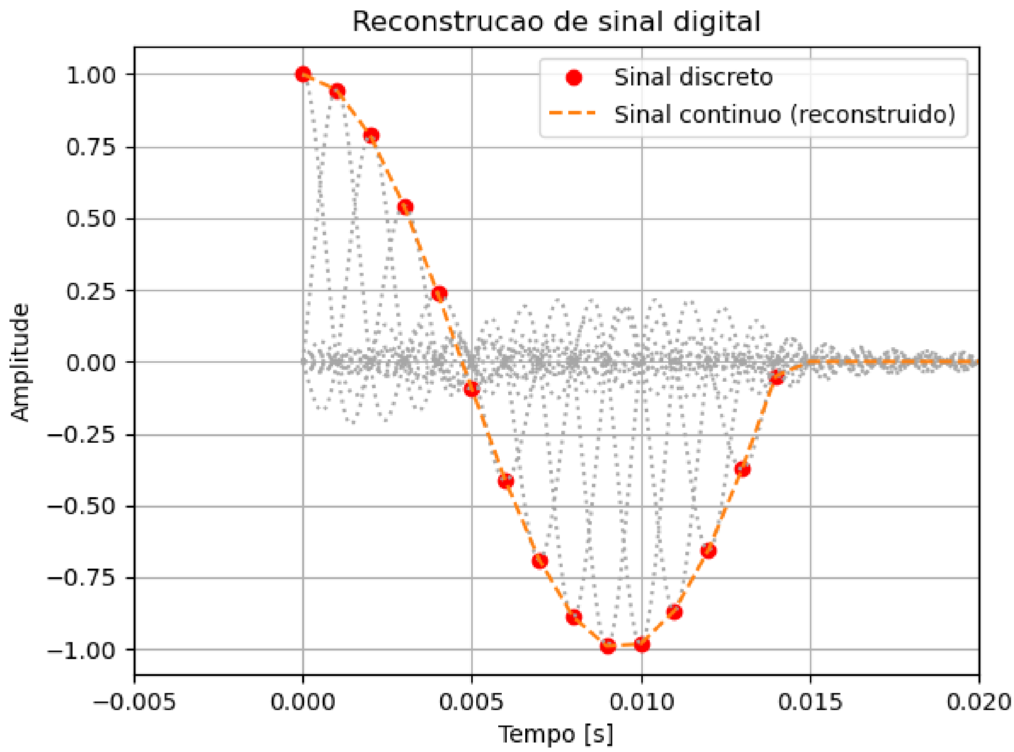


Figura 3: Visualização da reconstrução de sinal "contínuo" a partir das amostras em tempo discreto.

domínio e entra no domínio das réplicas espectrais, o sinal passa a apresentar *aliasing* devido às componentes de frequência originalmente pertencentes às réplicas espectrais que adentram o domínio original centrado em $f = 0$. Nota-se, assim, que a frequência real f_1 e a frequência da componente "aliased" f_a estão relacionadas da forma $f_a = |f_1 - m \cdot f_s|$, onde m é um número inteiro.

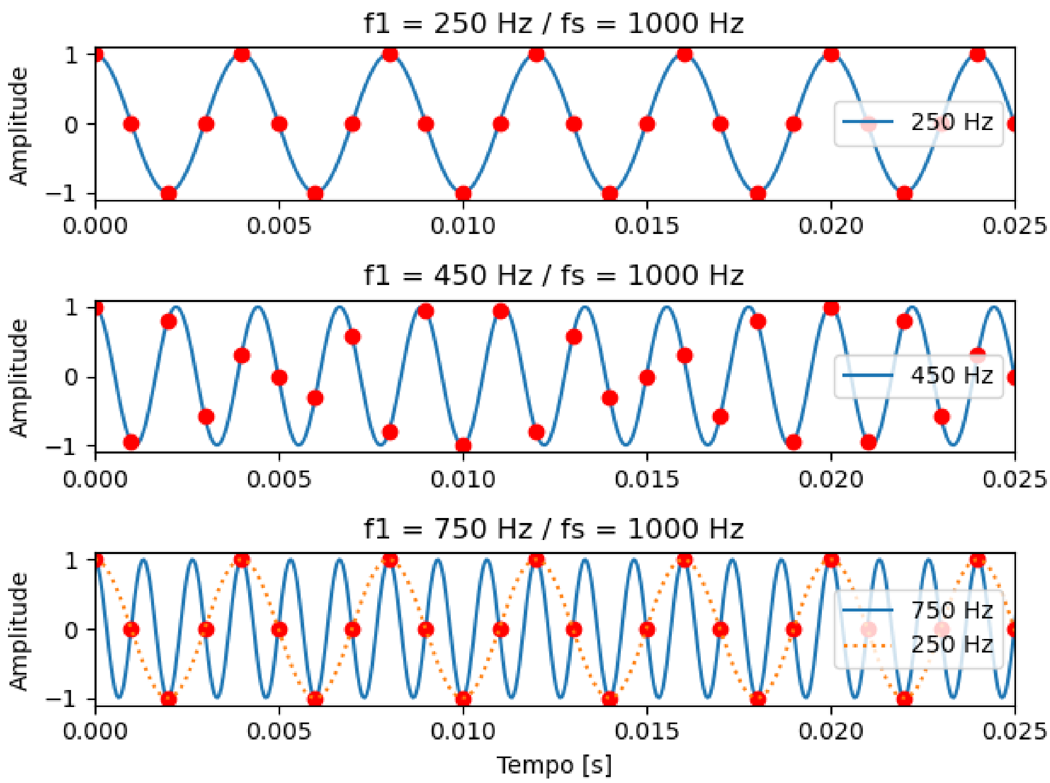
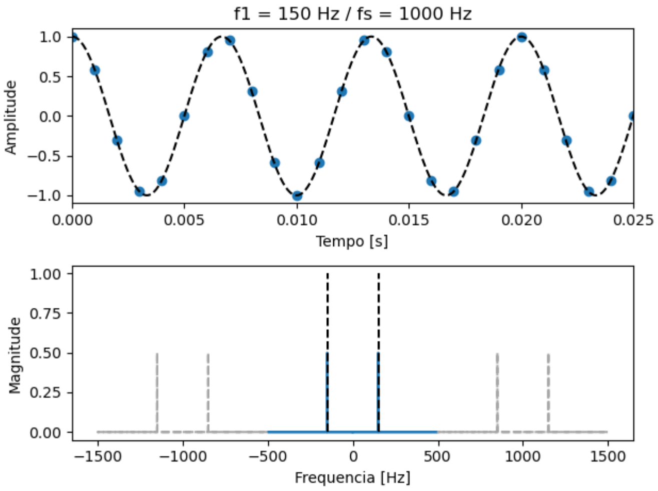
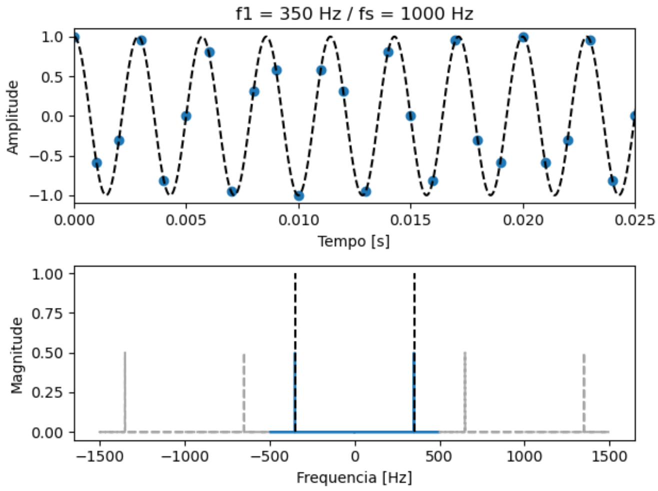


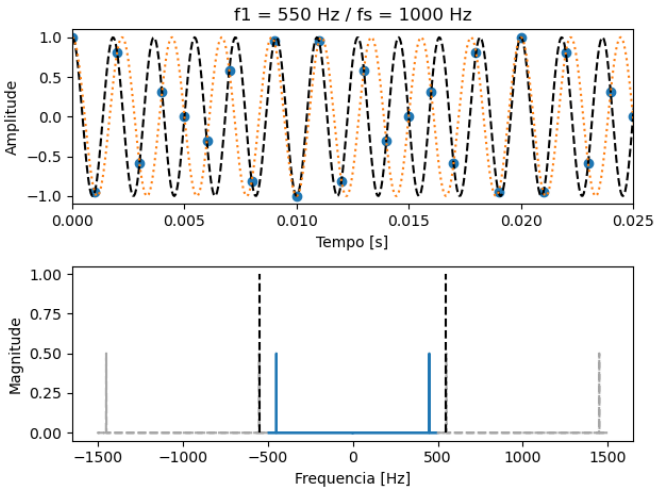
Figura 4: Visualização de aliasing.



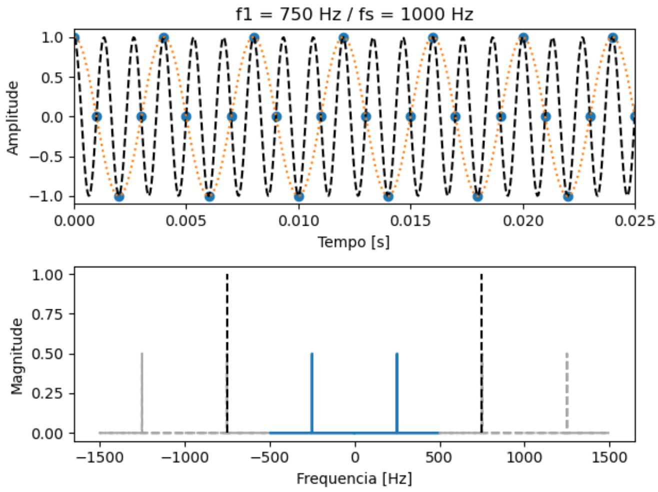
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 5: Sinais senoidais no tempo e na frequência: (a) $f_1 = 150$ Hz; (b) $f_1 = 350$ Hz; (c) $f_1 = 550$ Hz; e (d) $f_1 = 750$ Hz;.