Processamento Digital de Sinais e Aplicações em Acústica
Tutorial 03 - Amostragem e Aliasing

https://github.com/fchirono/Aulas_PDS_Acustica

Objetivos do Tutorial

Ao final desta sessão, você será capaz de:

- Compreender a diferença entre sinais em tempo discreto e tempo contínuo
- Aplicar o Teorema de Shannon para reconstrução de sinais
- Identificar e visualizar o fenômeno de aliasing
- Reconhecer as limitações da frequência de amostragem

Sumário

1 Conceitos Básicos

1.1 Amostragem Temporal

A conversão de sinais analógicos (tempo contínuo) para digitais (tempo discreto) é realizada através da amostragem:

$$x[n] = x(t)|_{t=n \cdot T_s}, \ n \in [0, \dots N-1], \tag{1}$$

onde T_s é o intervalo de amostragem em segundos e $f_s = 1/T_s$ é a frequência de amostragem em Hertz. O sinal discreto $x[n]$ representa o sinal contínuo $x(t)$ nos instantes $t = nT_s$.

1.2 Teorema de Nyquist-Shannon (Teorema da Amostragem)

Para que um sinal seja perfeitamente reconstruído a partir de suas amostras, a frequência de amostragem f_s deve ser pelo menos duas vezes maior que a maior frequência presente no sinal:

$$f_s \geq 2f_{\max}. \tag{2}$$

Em outras palavras, o sinal deve ser de *banda limitada*. A frequência $f_s/2$ é conhecida como *frequência de Nyquist*, e define a largura de banda máxima para que um sinal seja amostrado corretamente.

Quando a condição do Teorema de Nyquist-Shannon não é satisfeita ($f_s < 2f_{\max}$), componentes de alta frequência aparecem "disfarçadas" como componentes de baixa frequência no sinal amostrado. Este fenômeno é chamado de *aliasing*.

1.3 Interpolação usando funções sinc

Assumindo um sinal de banda limitada amostrado sem *aliasing*, a reconstrução ideal do sinal de tempo contínuo a partir de suas amostras discretas é dada por:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot \operatorname{sinc}\left((t - n \cdot T_s) \cdot f_s\right), \tag{3}$$

onde $\operatorname{sinc}(x) = \sin(\pi x)/(\pi x)$ é a função interpolante ideal. Esta função tem a propriedade importante de valer 1 em $x = 0$ e zero em todos os outros valores inteiros de x.

2 Exercícios

2.1 Visualização do sinal discreto vs contínuo

Crie um script que:

1. Defina uma frequência de amostragem $f_{s,d} = 1000$ Hz para tempo discreto
2. Defina uma frequência muito maior $f_{s,c} = 20 \times f_{s,d}$ para simular tempo "contínuo"
3. Gere um sinal cosenoidal com frequência $f_0 = 53$ Hz e duração $T = 1.0$ s em ambas as frequências de amostragem
4. Plote ambos os sinais (discreto com marcadores, contínuo com linha).

Questão: O que você observa sobre a relação entre as amostras discretas e o sinal contínuo?

2.2 Propriedades da função sinc

1. Crie um sinal de tempo discreto com 1 segundo de duração, com valor unitário na 15a amostra e zero em todas as outras amostras
2. Interpole esta amostra usando a função sinc para o tempo "contínuo"
3. Plote ambos os sinais, novamente com marcadores para o sinal discreto e com linhas para o sinal "contínuo"
4. Limite a visualização ao início do sinal para melhor visualização.

Questão: Qual é a relação entre o sinal discreto e o sinal "contínuo"? A função sinc é causal? O que isso implica para sistemas físicos reais?

2.3 Reconstrução ideal de sinais (Teorema de Shannon)

Implemente a reconstrução de um sinal usando o somatório de funções sinc:

1. Para as primeiras 15 amostras do sinal discreto do Exercício 1:
   - Calcule a função sinc "contínua" correspondente a cada amostra
   - Plote cada contribuição individual no tempo contínuo
   - Some todas as contribuições para obter o sinal reconstruído
2. Compare visualmente o sinal reconstruído ("contínuo") com o original (discreto)

2.4 Aliasing por sub-amostragem

Demonstre o *aliasing* quando um sinal de alta taxa de amostragem é dizimado:

1. Gere sinais senoidais contínuos ($f_{s,c} = 20000$ Hz) com frequências 250, 450 e 750 Hz
2. Para cada sinal, plote:
   - O sinal em tempo "contínuo"
   - O sinal amostrado com amostras tomadas a cada 20 pontos (equivalente a $f_{s,d} = 1000$ Hz)
3. Para o sinal de 750 Hz, sobreponha um sinal senoidal de 250 Hz
4. Use `sounddevice.play()` para auralizar o sinal em tempo "contínuo" em $f_{s,c} = 20000$ Hz, e o sinal sub-amostrado em $f_{s,d} = 1000$.

Questões:

- Sob quais condições o sinal "contínuo" e o sinal sub-amostrado resultam na mesma frequência?

2.5 Visualização de Aliasing no Domínio do Tempo e Frequência

Para cada uma das frequências $f_1 = [150, 350, 550, 750]$ Hz:

1. Gere sinais cossenoidais amostrados a $f_{s,d} = 1000$ Hz
2. Calcule a FFT de cada sinal
3. Para cada sinal, crie uma figura com dois subplots:
   - Superior: sinal discreto (marcadores) e "contínuo" (linha tracejada)
   - Inferior: magnitude da FFT centrada em $f = 0$ Hz, e réplicas espectrais em $\pm f_s$. Marque também as frequências $\pm f_1$ da onda senoidal com linhas verticais (Sugestão: use `matplotlib.pyplot.vlines`)
4. Para frequências acima de $f_s/2$, plote também o sinal senoidal da frequência "alias" correspondente no tempo "contínuo".

Questões:

- Quais frequências sofrem *aliasing*? Por quê?
- Qual é a relação entre a frequência real e sua versão "aliased"?

3 Observações Finais

- Use `plt.grid()` para facilitar a leitura dos gráficos
- Sempre inclua legendas e rótulos nos eixos
- Experimente com diferentes valores de frequências e taxas de amostragem