Cálculo diferencial e integral

NOVENA EDICIÓN

PEARSON
Prentice Hall

Purcell Varberg Rigdon

CAPÍTULO 7

Técnicas de integración

7.1 Reglas básicas de integración

Ahora, nuestro repertorio de funciones incluye a todas las funciones elementales. Éstas son las funciones constantes, las funciones potencias, las funciones algebraicas, las funciones logarítmica y exponencial, las funciones trigonométricas y trigonométricas inversas y todas las funciones obtenidas a partir de ellas por medio de suma, resta, multiplicación, división y composición. Así,

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

$$g(x) = (1 + \cos^4 x)^{1/2}$$

$$h(x) = \frac{3^{x^2-2x}}{\ln(x^2+1)} - \operatorname{sen}[\cos(\cosh x)]$$

son funciones elementales.

La derivación de una función elemental es directa, sólo requiere de un uso sistemático de las reglas que hemos aprendido. Y el resultado siempre es una función elemental. La integración (antiderivación) es un asunto muy diferente. Implica unas cuantas técnicas y una gran cantidad de trucos; y lo que es peor, no siempre se obtiene una función elemental. Por ejemplo, se sabe que las antiderivadas de e^{-x^2} y $(\operatorname{sen} x)/x$ no son funciones elementales.

Las dos principales técnicas para integración son *sustitución* e *integración por partes*. El método de sustitución se introdujo en la sección 4.4; que en varias ocasiones hemos usado en los capítulos anteriores.

Formas estándar El uso eficaz del método de sustitución depende de la pronta disponibilidad de una lista de integrales conocidas. Una de tales listas (pero demasiado grande para memorizarla) aparece dentro de la contraportada de este libro. La lista más breve, que se muestra a continuación, es tan útil que pensamos que todo estudiante de cálculo debe memorizarla.

Formas integrales estándar

Constantes, potencias

1. $\int k\,du = ku + C$

2. $\int u^r\,du = \begin{cases} \dfrac{u^{r+1}}{r+1} + C & r \neq -1 \\ \ln|u| + C & r = -1 \end{cases}$

Exponenciales

3. $\int e^u\,du = e^u + C$

4. $\int a^u\,du = \dfrac{a^u}{\ln a} + C, a \neq 1, a > 0$

Funciones trigonométricas

5. $\int \operatorname{sen} u\,du = -\cos u + C$

6. $\int \cos u\,du = \operatorname{sen} u + C$

7. $\int \sec^2 u\,du = \tan u + C$

8. $\int \csc^2 u\,du = -\cot u + C$

9. $\int \sec u \tan u\,du = \sec u + C$

10. $\int \csc u \cot u\,du = -\csc u + C$

11. $\int \tan u\,du = -\ln|\cos u| + C$

12. $\int \cot u\,du = \ln|\operatorname{sen} u| + C$

Funciones algebraicas

13. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{sen}^{-1}\left(\dfrac{u}{a}\right) + C$

14. $\int \dfrac{du}{a^2 + u^2} = \dfrac{1}{a}\tan^{-1}\left(\dfrac{u}{a}\right) + C$

15. $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left(\frac{|u|}{a}\right) + C = \frac{1}{a}\cos^{-1}\left(\frac{a}{|u|}\right) + C$

Funciones hiperbólicas 16. $\displaystyle\int \operatorname{senh} u\, du = \cosh u + C$ 17. $\displaystyle\int \cosh u\, du = \operatorname{senh} u + C$

Sustitución en integrales indefinidas Suponga que se enfrenta a una integral indefinida. Si es una forma estándar, basta con escribir la respuesta. Si no, busque una sustitución que la cambie a una forma estándar. Si la primera sustitución que intente no funciona, pruebe con otra. Tener habilidad en esto, al igual que en la mayoría de las actividades que valen la pena, depende de la práctica.

El método de sustitución se dio en el teorema 4.4B y se vuelve a establecer aquí para una fácil referencia.

Teorema A Sustitución en integrales indefinidas

Sea g una función derivable y supóngase que F es una antiderivada de f. Entonces, si $u = g(x)$,

$$\int f(g(x))g'(x)\, dx = \int f(u)\, du = F(u) + C = F(g(x)) + C$$

EJEMPLO 1 Encuentre $\displaystyle\int \frac{x}{\cos^2(x^2)}dx$.

SOLUCIÓN Analice esta integral por unos momentos. Como $1/\cos^2 x = \sec^2 x$, puede recordarla de la forma estándar $\int \sec^2 u\, du$. Sea $u = x^2$, $du = 2x\, dx$. Entonces

$$\int \frac{x}{\cos^2(x^2)}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\cos^2(x^2)}\cdot 2x\, dx = \frac{1}{2}\int \sec^2 u\, du$$

$$= \frac{1}{2}\tan u + C = \frac{1}{2}\tan(x^2) + C$$

■

EJEMPLO 2 Encuentre $\displaystyle\int \frac{3}{\sqrt{5 - 9x^2}}dx$.

SOLUCIÓN Considere $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}}$. Sea $u = 3x$, por lo que $du = 3dx$. Entonces,

$$\int \frac{3}{\sqrt{5 - 9x^2}}\, dx = \int \frac{1}{\sqrt{5 - u^2}}\, du = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{u}{\sqrt{5}}\right) + C$$

$$= \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{3x}{\sqrt{5}}\right) + C$$

■

EJEMPLO 3 Encuentre $\displaystyle\int \frac{6e^{1/x}}{x^2}\, dx$.

SOLUCIÓN Considere $\int e^u\, du$. Sea $u = 1/x$, así $du\ (-1/x^2)\ dx$. Entonces,

$$\int \frac{6e^{1/x}}{x^2}\, dx = -6\int e^{1/x}\left(\frac{-1}{x^2}\, dx\right) = -6\int e^u\, du$$

$$= -6e^u + C = -6e^{1/x} + C$$

■

EJEMPLO 4 Encuentre $\displaystyle\int \frac{e^x}{4+9e^{2x}}\,dx$.

SOLUCIÓN Considere $\displaystyle\int \frac{1}{a^2+u^2}\,du$. Sea $u = 3e^x$, por lo que $du = 3e^x\,dx$. Entonces,

$$\int \frac{e^x}{4+9e^{2x}}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{4+9e^{2x}}(3e^x\,dx) = \frac{1}{3}\int \frac{1}{4+u^2}\,du$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{u}{2}\right) + C = \frac{1}{6}\tan^{-1}\left(\frac{3e^x}{2}\right) + C \qquad \blacksquare$$

Ninguna ley dice que usted tiene que escribir de manera explícita la sustitución de u. Si usted puede hacerla mentalmente, está bien. He aquí dos ilustraciones.

EJEMPLO 5 Encuentre $\displaystyle\int x\cos x^2\,dx$

SOLUCIÓN Mentalmente, sustituya $u = x^2$.

$$\int x\cos x^2\,dx = \frac{1}{2}\int(\cos x^2)(2x\,dx) = \frac{1}{2}\operatorname{sen} x^2 + C \qquad \blacksquare$$

EJEMPLO 6 Encuentre $\displaystyle\int \frac{a^{\tan t}}{\cos^2 t}\,dt$.

SOLUCIÓN Mentalmente, sustituya $u = \tan t$.

$$\int \frac{a^{\tan t}}{\cos^2 t}\,dt = \int a^{\tan t}(\sec^2 t\,dt) = \frac{a^{\tan t}}{\ln a} + C \qquad \blacksquare$$

Sustitución en integrales definidas Este tema se cubrió en la sección 4.4. Es igual al de la sustitución en integrales indefinidas, pero debemos recordar llevar a cabo el cambio apropiado en los límites de integración.

EJEMPLO 7 Evalúe $\displaystyle\int_2^5 t\sqrt{t^2-4}\,dt$.

SOLUCIÓN Sea $u = t^2 - 4$, con lo que $du = 2t\,dt$; observe que cuando $t = 2$, $u = 0$, y cuando $t = 5$, $u = 21$. Así,

$$\int_2^5 t\sqrt{t^2-4}\,dt = \frac{1}{2}\int_2^5 (t^2-4)^{1/2}(2t\,dt)$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{21} u^{1/2}\,du$$

$$= \left[\frac{1}{3}u^{3/2}\right]_0^{21} = \frac{1}{3}(21)^{3/2} \approx 32.08 \qquad \blacksquare$$

EJEMPLO 8 Determine $\displaystyle\int_1^3 x^3\sqrt{x^4+11}\,dx$.

SOLUCIÓN En forma mental sustituya $u = x^4 + 11$.

$$\int_1^3 x^3\sqrt{x^4+11}\,dx = \frac{1}{4}\int_1^3 (x^4+11)^{1/2}(4x^3\,dx)$$

$$= \left[\frac{1}{6}(x^4+11)^{3/2}\right]_1^3$$

$$= \frac{1}{6}[92^{3/2} - 12^{3/2}] \approx 140.144 \qquad \blacksquare$$

Revisión de conceptos

1. La diferenciación de una función elemental es directa, pero existen casos en donde la antiderivada de una función elemental no puede expresarse como un(a) _______.

2. La sustitución $u = 1 + x^3$ transforma $\int 3x^2(1 + x^3)^5\, dx$ en _______.

3. La sustitución $u =$ _______ transforma $\int e^x/(4 + e^{2x})\, dx$ a $\int 1/(4 + u^2)\, du$.

4. La sustitución $u = 1 + \operatorname{sen} x$ transforma $\int_0^{\pi/2} (1 + \operatorname{sen} x)^3 \cos x\, dx$ en ________.

Conjunto de problemas 7.1

En los problemas del 1 al 54 realice las integraciones indicadas.

1. $\int (x - 2)^5\, dx$

2. $\int \sqrt{3x}\, dx$

3. $\int_0^2 x(x^2 + 1)^5\, dx$

4. $\int_0^1 x\sqrt{1 - x^2}\, dx$

5. $\int \frac{dx}{x^2 + 4}$

6. $\int \frac{e^x}{2 + e^x}\, dx$

7. $\int \frac{x}{x^2 + 4}\, dx$

8. $\int \frac{2t^2}{2t^2 + 1}\, dt$

9. $\int 6z\sqrt{4 + z^2}\, dz$

10. $\int \frac{5}{\sqrt{2t + 1}}\, dt$

11. $\int \frac{\tan z}{\cos^2 z}\, dz$

12. $\int e^{\cos z} \operatorname{sen} z\, dz$

13. $\int \frac{\operatorname{sen} \sqrt{t}}{\sqrt{t}}\, dt$

14. $\int \frac{2x\, dx}{\sqrt{1 - x^4}}$

15. $\int_0^{\pi/4} \frac{\cos x}{1 + \operatorname{sen}^2 x}\, dx$

16. $\int_0^{3/4} \frac{\operatorname{sen}\sqrt{1 - x}}{\sqrt{1 - x}}\, dx$

17. $\int \frac{3x^2 + 2x}{x + 1}\, dx$

18. $\int \frac{x^3 + 7x}{x - 1}\, dx$

19. $\int \frac{\operatorname{sen}(\ln 4x^2)}{x}\, dx$

20. $\int \frac{\sec^2(\ln x)}{2x}\, dx$

21. $\int \frac{6e^x}{\sqrt{1 - e^{2x}}}\, dx$

22. $\int \frac{x}{x^4 + 4}\, dx$

23. $\int \frac{3e^{2x}}{\sqrt{1 - e^{2x}}}\, dx$

24. $\int \frac{x^3}{x^4 + 4}\, dx$

25. $\int_0^1 t\, 3^{t^2}\, dt$

26. $\int_0^{\pi/6} 2^{\cos x} \operatorname{sen} x\, dx$

27. $\int \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{\operatorname{sen} x}\, dx$

28. $\int \frac{\operatorname{sen}(4t - 1)}{1 - \operatorname{sen}^2(4t - 1)}\, dt$

29. $\int e^x \sec e^x\, dx$ *Sugerencia:* véase el problema 56.

30. $\int e^x \sec^2(e^x)\, dx$

31. $\int \frac{\sec^3 x + e^{\operatorname{sen} x}}{\sec x}\, dx$

32. $\int \frac{(6t - 1)\operatorname{sen}\sqrt{3t^2 - t - 1}}{\sqrt{3t^2 - t - 1}}\, dt$

33. $\int \frac{t^2 \cos(t^3 - 2)}{\operatorname{sen}^2(t^3 - 2)}\, dt$

34. $\int \frac{1 + \cos 2x}{\operatorname{sen}^2 2x}\, dx$

35. $\int \frac{t^2 \cos^2(t^3 - 2)}{\operatorname{sen}^2(t^3 - 2)}\, dt$

36. $\int \frac{\csc^2 2t}{\sqrt{1 + \cot 2t}}\, dt$

37. $\int \frac{e^{\tan^{-1} 2t}}{1 + 4t^2}\, dt$

38. $\int (t + 1)e^{-t^2 - 2t - 5}\, dt$

39. $\int \frac{y}{\sqrt{16 - 9y^4}}\, dy$

40. $\int \cosh 3x\, dx$

41. $\int x^2 \operatorname{senh} x^3\, dx$

42. $\int \frac{5}{\sqrt{9 - 4x^2}}\, dx$

43. $\int \frac{e^{3t}}{\sqrt{4 - e^{6t}}}\, dt$

44. $\int \frac{dt}{2t\sqrt{4t^2 - 1}}$

45. $\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x}{16 + \cos^2 x}\, dx$

46. $\int_0^1 \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{e^{2x} + e^{-2x}}\, dx$

47. $\int \frac{1}{x^2 + 2x + 5}\, dx$

48. $\int \frac{1}{x^2 - 4x + 9}\, dx$

49. $\int \frac{dx}{9x^2 + 18x + 10}$

50. $\int \frac{dx}{\sqrt{16 + 6x - x^2}}$

51. $\int \frac{x + 1}{9x^2 + 18x + 10}\, dx$

52. $\int \frac{3 - x}{\sqrt{16 + 6x - x^2}}\, dx$

53. $\int \frac{dt}{t\sqrt{2t^2 - 9}}$

54. $\int \frac{\tan x}{\sqrt{\sec^2 x - 4}}\, dx$

55. Encuentre la longitud de la curva $y = \ln(\cos x)$ entre $x = 0$ y $x = \pi/4$.

56. Establezca la identidad

$$\sec x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \frac{\cos x}{1 + \operatorname{sen} x}$$

y después utilícela para deducir la fórmula

$$\int \sec x\, dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$$

57. Evalúe $\int_0^{2\pi} \frac{x|\operatorname{sen} x|}{1 + \cos^2 x}\, dx$. *Sugerencia:* haga la sustitución $u = x - \pi$ en la integral definida y después utilice propiedades de la simetría.

58. Sea R la región acotada por $y = \operatorname{sen} x$ y $y = \cos x$ entre $x = -\pi/4$ y $x = 3\pi/4$. Encuentre el volumen del sólido obtenido cuando se hace girar R alrededor de $x = -\pi/4$. *Sugerencia:* use cascarones cilíndricos para escribir una sola integral, haga la sustitución $u = x - \pi/4$ y aplique propiedades de la simetría.

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** función elemental **2.** $\int u^5\, du$ **3.** e^x **4.** $\int_1^2 u^3\, du$

7.2 Integración por partes

Si la integración por sustitución falla, es posible utilizar una doble sustitución, mejor conocida como *integración por partes*. Este método tiene como base la integración de la fórmula para la derivada de un producto de dos funciones.

Sean $u = u(x)$ y $v = v(x)$. Entonces

$$D_x[u(x)v(x)] = u(x)v'(x) + v(x)u'(x)$$

o

$$u(x)v'(x) = D_x[u(x)v(x)] - v(x)u'(x)$$

Al integrar ambos miembros de esta ecuación, obtenemos

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,dx$$

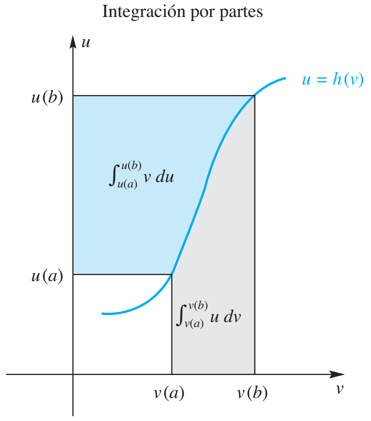
Ya que $dv = v'(x)dx$ y $du = u'(x)dx$, por lo común, la ecuación anterior se escribe de manera simbólica como sigue:

Integración por partes: integrales indefinidas

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

La fórmula correspondiente para integrales definidas es

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)\,dx$$



$\int_{v(a)}^{v(b)} u\,dv = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_{u(a)}^{u(b)} v\,du$

Figura 1

La figura 1 ilustra una interpretación geométrica de la integración por partes. Abreviamos esto como sigue:

Integración por partes: integrales definidas

$$\int_a^b u\,dv = \Big[uv\Big]_a^b - \int_a^b v\,du$$

Estas fórmulas nos permiten transformar el problema de integrar $u\,dv$ al de integrar $v\,du$. El éxito depende de la elección apropiada de u y dv, la cual viene con la práctica.

EJEMPLO 1 Encuentre $\int x \cos x\,dx$.

SOLUCIÓN Deseamos escribir $x \cos x\,dx$ como $u\,dv$. Una posibilidad es hacer $u = x$ y $dv = \cos x\,dx$. Entonces, $du = dx$ y $v = \int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x$ (en este paso podemos omitir la constante arbitraria). He aquí un resumen de esta doble sustitución en un formato conveniente.

$$\begin{aligned} u &= x & dv &= \cos x\,dx \\ du &= dx & v &= \operatorname{sen} x \end{aligned}$$

La fórmula para integración por partes da

$$\begin{aligned} \int \underbrace{x}_{u}\,\underbrace{\cos x\,dx}_{dv} &= \underbrace{x}_{u}\,\underbrace{\operatorname{sen} x}_{v} - \int \underbrace{\operatorname{sen} x}_{v}\,\underbrace{dx}_{du} \\ &= x \operatorname{sen} x + \cos x + C \end{aligned}$$

Tuvimos éxito en nuestro primer intento. Otra sustitución sería

$$u = \cos x \qquad dv = x\,dx$$

$$du = -\text{sen}\,x\,dx \qquad v = \frac{x^2}{2}$$

Esta vez la fórmula para la integración por partes da

$$\int \underbrace{\qquad\quad}\,\underbrace{\qquad} \qquad \underbrace{\qquad\quad}\,\underbrace{\frac{x^2}{2}} \int \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{v}\,\underbrace{\qquad\qquad\quad}$$

lo cual es correcto pero no es útil. La nueva integral del lado derecho es más complicada que la original. Así, vemos la importancia de una buena elección para u y dv. ■

EJEMPLO 2 Encuentre $\displaystyle\int_1^2 \ln x\,dx$.

SOLUCIÓN Hacemos las sustituciones siguientes:

$$u = \ln x \qquad dv = dx$$

$$du = \left(\frac{1}{x}\right)dx \qquad v = x$$

Entonces

$$\begin{aligned}\int_1^2 \ln x\,dx &= [x \ln x]_1^2 - \int_1^2 x\frac{1}{x}dx \\ &= 2\ln 2 - \int_1^2 dx \\ &= 2\ln 2 - 1 \approx 0.386\end{aligned}$$

■

EJEMPLO 3 Encuentre $\displaystyle\int \text{arcsen}\,x\,dx$.

SOLUCIÓN Hacemos las sustituciones

$$u = \text{arcsen}\,x \qquad dv = dx$$

$$du = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}dx \qquad v = x$$

Entonces

$$\begin{aligned}\int \text{arcsen}\,x\,dx &= x\,\text{arcsen}\,x - \int \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx \\ &= x\,\text{arcsen}\,x + \frac{1}{2}\int (1 - x^2)^{-1/2}(-2x\,dx) \\ &= x\,\text{arcsen}\,x + \frac{1}{2}\cdot 2(1 - x^2)^{1/2} + C \\ &= x\,\text{arcsen}\,x + \sqrt{1 - x^2} + C\end{aligned}$$

■

EJEMPLO 4 Determine $\displaystyle\int_1^2 t^6 \ln t\,dt$.

SOLUCIÓN Hacemos las siguientes sustituciones

$$u = \ln t \qquad dv = t^6\,dt$$
$$du = \frac{1}{t}dt \qquad v = \frac{1}{7}t^7$$

Entonces

$$\int_1^2 t^6 \ln t\,dt = \left[\frac{1}{7}t^7 \ln t\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{7}t^7\left(\frac{1}{t}dt\right)$$
$$= \frac{1}{7}(128 \ln 2 - \ln 1) - \frac{1}{7}\int_1^2 t^6\,dt$$
$$= \frac{128}{7}\ln 2 - \frac{1}{49}[t^7]_1^2$$
$$= \frac{128}{7}\ln 2 - \frac{127}{49} \approx 10.083$$

■

Integración repetida por partes Algunas veces es necesario aplicar la integración por partes varias veces.

EJEMPLO 5 Encuentre $\int x^2 \operatorname{sen} x\,dx$.

SOLUCIÓN Sea

$$u = x^2 \qquad dv = \operatorname{sen} x\,dx$$
$$du = 2x\,dx \qquad v = -\cos x$$

Entonces

$$\int x^2 \operatorname{sen} x\,dx = -x^2 \cos x + 2\int x \cos x\,dx$$

Hemos mejorado nuestra situación (el exponente en x ha bajado de 2 a 1), lo cual sugiere volver a aplicar la integración por partes a la integral de la derecha. En realidad, hicimos esta integración en el ejemplo 1, de modo que haremos uso del resultado obtenido allí.

$$\int x^2 \operatorname{sen} x\,dx = -x^2 \cos x + 2(x \operatorname{sen} x + \cos x + C)$$
$$= -x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x + 2 \cos x + K$$

■

EJEMPLO 6 Encuentre $\int e^x \operatorname{sen} x\,dx$.

SOLUCIÓN Tome $u = e^x$ y $dv = \operatorname{sen} x\,dx$. Entonces $du = e^x\,dx$ y $v = -\cos x$. Así,

$$\int e^x \operatorname{sen} x\,dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x\,dx$$

que no parece haber mejorado las cosas, aunque no nos deja algo peor. Así que no lo desechemos e intentemos otra vez la integración por partes. En la integral de la derecha, sea $u = e^x$ y $dv = \cos x\,dx$, de modo que $du = e^x\,dx$ y $v = \operatorname{sen} x$. Entonces,

$$\int e^x \cos x\,dx = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x\,dx$$

Cuando sustituimos esto en nuestro primer resultado, obtenemos

$$\int e^x \operatorname{sen} x\, dx = -e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x\, dx$$

Pasando el último término al lado izquierdo y reduciendo términos, obtenemos

$$2\int e^x \operatorname{sen} x\, dx = e^x(\operatorname{sen} x - \cos x) + C$$

de la cual

$$\int e^x \operatorname{sen} x\, dx = \frac{1}{2}e^x(\operatorname{sen} x - \cos x) + K \qquad ■$$

El hecho de que la integral que queríamos encontrar vuelva a aparecer en el lado derecho es lo que hace que funcione el ejemplo 6.

Fórmulas de reducción Una fórmula de la forma

$$\int f^n(x)g(x)\, dx = h(x) + \int f^k(x)\, g(x)\, dx$$

donde $k < n$, se denomina **fórmula de reducción** (el exponente en f se reduce). Con frecuencia, tales fórmulas pueden obtenerse por medio de la integración por partes.

EJEMPLO 7 Deduzca una fórmula de reducción para $\int \operatorname{sen}^n x\, dx$.

SOLUCIÓN Sea $u = \operatorname{sen}^{n-1} x$ y $dv = \operatorname{sen} x\, dx$. Entonces

$$du = (n-1)\operatorname{sen}^{n-2} x \cos x\, dx \quad \text{y} \quad v = -\cos x$$

de lo cual

$$\int \operatorname{sen}^n x\, dx = -\operatorname{sen}^{n-1} x \cos x + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2} x \cos^2 x\, dx$$

Si reemplazamos $\cos^2 x$ por $1 - \operatorname{sen}^2 x$ en la última integral, obtenemos

$$\int \operatorname{sen}^n x\, dx = -\operatorname{sen}^{n-1} x \cos x + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2} x\, dx - (n-1)\int \operatorname{sen}^n x\, dx$$

Después de combinar las integrales primera y última y despejando a $\int \operatorname{sen}^n x\, dx$, obtenemos la fórmula de reducción (válida para $n \geq 2$),

$$\int \operatorname{sen}^n x\, dx = \frac{-\operatorname{sen}^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} x\, dx \qquad ■$$

EJEMPLO 8 Utilice la fórmula de reducción anterior para evaluar $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^8 x\, dx$.

SOLUCIÓN Observe primero que

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x\, dx = \left[\frac{-\operatorname{sen}^{n-1} x \cos x}{n}\right]_0^{\pi/2} + \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{n-2} x\, dx$$

$$= 0 + \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{n-2} x\, dx$$

Así,

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^8 x\,dx &= \frac{7}{8}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^6 x\,dx \\ &= \frac{7}{8}\cdot\frac{5}{6}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^4 x\,dx \\ &= \frac{7}{8}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x\,dx \\ &= \frac{7}{8}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} 1\,dx \\ &= \frac{7}{8}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{35}{256}\pi\end{aligned}$$ ■

La fórmula general para $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x\,dx$ puede encontrarse de una manera análoga (fórmula 113 en la parte posterior del libro).

Revisión de conceptos

1. La fórmula de integración por partes dice que $\int u\,dv =$ ____.

2. Para aplicar esta fórmula a $\int x \operatorname{sen} x\,dx$, se hace $u =$ _____ y $dv =$ ______.

3. Al aplicar la fórmula de integración por partes se obtiene el valor ________ para $\int_0^{\pi/2} x \operatorname{sen} x\,dx$.

4. Una fórmula que expresa $\int f^n(x)\,g(x)\,dx$ en términos de $\int f^k(x)\,g(x)\,dx$, donde $k < n$, se denomina fórmula de ______.

Conjunto de problemas 7.2

En los problemas del 1 al 36 utilice la integración por partes para evaluar cada integral.

1. $\int xe^x\,dx$

2. $\int xe^{3x}\,dx$

3. $\int te^{5t+\pi}\,dt$

4. $\int (t+7)e^{2t+3}\,dt$

5. $\int x\cos x\,dx$

6. $\int x \operatorname{sen} 2x\,dx$

7. $\int (t-3)\cos(t-3)\,dt$

8. $\int (x-\pi)\operatorname{sen} x\,dx$

9. $\int t\sqrt{t+1}\,dt$

10. $\int t\sqrt[3]{2t+7}\,dt$

11. $\int \ln 3x\,dx$

12. $\int \ln(7x^5)\,dx$

13. $\int \arctan x\,dx$

14. $\int \arctan 5x\,dx$

15. $\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx$

16. $\int_2^3 \frac{\ln 2x^5}{x^2}\,dx$

17. $\int_1^e \sqrt{t}\ln t\,dt$

18. $\int_1^5 \sqrt{2x}\ln x^3\,dx$

19. $\int z^3 \ln z\,dz$

20. $\int t\arctan t\,dt$

21. $\int \arctan(1/t)\,dt$

22. $\int t^5\ln(t^7)\,dt$

23. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} x\csc^2 x\,dx$

24. $\int_{\pi/6}^{\pi/4} x\sec^2 x\,dx$

25. $\int x^5\sqrt{x^3+4}\,dx$

26. $\int x^{13}\sqrt{x^7+1}\,dx$

27. $\int \frac{t^7}{(7-3t^4)^{3/2}}\,dt$

28. $\int x^3\sqrt{4-x^2}\,dx$

29. $\int \frac{z^7}{(4-z^4)^2}\,dz$

30. $\int x\cosh x\,dx$

31. $\int x \operatorname{senh} x\,dx$

32. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$

33. $\int x(3x+10)^{49}\,dx$

34. $\int_0^1 t(t-1)^{12}\,dt$

35. $\int x\,2^x\,dx$

36. $\int z\,a^z\,dz$

En los problemas del 37 al 48 aplique dos veces la integración por partes para evaluar cada integral (véanse los ejemplos 5 y 6).

37. $\int x^2e^x\,dx$

38. $\int x^5e^{x^2}\,dx$

39. $\int \ln^2 z\,dz$

40. $\int \ln^2 x^{20}\,dx$

41. $\int e^t\cos t\,dt$

42. $\int e^{at}\operatorname{sen} t\,dt$

43. $\int x^2\cos x\,dx$

44. $\int r^2\operatorname{sen} r\,dr$

45. $\int \operatorname{sen}(\ln x)\,dx$

46. $\int \cos(\ln x)\,dx$

47. $\int (\ln x)^3\,dx$ *Sugerencia:* use el problema 39.

48. $\int (\ln x)^4\, dx$ *Sugerencia:* utilice los problemas 39 y 47.

En los problemas del 49 al 54 utilice integración por partes para deducir la fórmula que se da.

49. $$\int \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 3x\, dx = -\tfrac{3}{8}\operatorname{sen} x \cos 3x + \tfrac{1}{8}\cos x \operatorname{sen} 3x + C$$

50. $$\int \cos 5x \operatorname{sen} 7x\, dx = -\tfrac{7}{24}\cos 5x \cos 7x - \tfrac{5}{24}\operatorname{sen} 5x \operatorname{sen} 7x + C$$

51. $$\int e^{\alpha z}\operatorname{sen}\beta z\, dz = \frac{e^{\alpha z}(\alpha \operatorname{sen}\beta z - \beta\cos\beta z)}{\alpha^2 + \beta^2} + C$$

52. $$\int e^{\alpha z}\cos\beta z\, dz = \frac{e^{\alpha z}(\alpha \cos\beta z + \beta\operatorname{sen}\beta z)}{\alpha^2 + \beta^2} + C$$

53. $$\int x^\alpha \ln x\, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ln x - \frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2} + C,\ \alpha \neq -1$$

54. $$\int x^\alpha(\ln x)^2\, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}(\ln x)^2 - 2\frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2}\ln x + 2\frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^3} + C,\ \alpha \neq -1$$

En los problemas del 55 al 61 deduzca la fórmula de reducción que se da utilizando integración por partes.

55. $$\int x^\alpha e^{\beta x}\, dx = \frac{x^\alpha e^{\beta x}}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta}\int x^{\alpha-1}e^{\beta x}\, dx$$

56. $$\int x^\alpha \operatorname{sen}\beta x\, dx = -\frac{x^\alpha\cos\beta x}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta}\int x^{\alpha-1}\cos\beta x\, dx$$

57. $$\int x^\alpha \cos\beta x\, dx = \frac{x^\alpha\operatorname{sen}\beta x}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta}\int x^{\alpha-1}\operatorname{sen}\beta x\, dx$$

58. $$\int (\ln x)^\alpha\, dx = x(\ln x)^\alpha - \alpha\int(\ln x)^{\alpha-1}\, dx$$

59. $$\int (a^2 - x^2)^\alpha\, dx = x(a^2 - x^2)^\alpha + 2\alpha\int x^2(a^2 - x^2)^{\alpha-1}\, dx$$

60. $$\int \cos^\alpha x\, dx = \frac{\cos^{\alpha-1} x \operatorname{sen} x}{\alpha} + \frac{\alpha-1}{\alpha}\int\cos^{\alpha-2} x\, dx$$

61. $$\int \cos^\alpha \beta x\, dx = \frac{\cos^{\alpha-1}\beta x\operatorname{sen}\beta x}{\alpha\beta} + \frac{\alpha-1}{\alpha}\int\cos^{\alpha-2}\beta x\, dx$$

62. Utilice el problema 55 para deducir

$$\int x^4 e^{3x}\, dx = \tfrac{1}{3}x^4e^{3x} - \tfrac{4}{9}x^3e^{3x} + \tfrac{4}{9}x^2e^{3x} - \tfrac{8}{27}xe^{3x} + \tfrac{8}{81}e^{3x} + C$$

63. Utilice los problemas 56 y 57 para deducir

$$\int x^4\cos 3x\, dx = \tfrac{1}{3}x^4\operatorname{sen} 3x + \tfrac{4}{9}x^3\cos 3x - \tfrac{4}{9}x^2\operatorname{sen} 3x - \tfrac{8}{27}x\cos 3x + \tfrac{8}{81}\operatorname{sen} 3x + C.$$

64. Utilice el problema 61 para deducir

$$\int \cos^6 3x\, dx = \tfrac{1}{18}\operatorname{sen} 3x\cos^5 3x + \tfrac{5}{72}\operatorname{sen} 3x\cos^3 3x + \tfrac{5}{48}\operatorname{sen} 3x\cos 3x + \tfrac{5}{16}x + C.$$

65. Encuentre el área de la región acotada por la curva $y = \ln x$, el eje x y la recta $x = e$.

66. Encuentre el volumen del sólido generado al hacer girar la región del problema 65 alrededor del eje x.

67. Encuentre el área de la región acotada por las curvas $y = 3e^{-x/3}$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = 9$. Haga un dibujo.

68. Encuentre el volumen del sólido generado al hacer girar la región descrita en el problema 67, alrededor del eje x.

69. Encuentre el área de la región acotada por las gráficas de $y = x\operatorname{sen} x$ y $y = x\cos x$, desde $x = 0$ hasta $x = \pi/4$.

70. Encuentre el volumen del sólido que se obtiene al hacer girar la región bajo la gráfica de $y = \operatorname{sen}(x/2)$ desde $x = 0$ hasta $x = 2\pi$ alrededor del eje y.

71. Encuentre el centroide (véase la sección 5.6) de la región acotada por $y = \ln x^2$ y el eje x desde $x = 1$ hasta $x = e$.

72. Evalúe la integral $\int \cot x\csc^2 x\, dx$ por partes de dos maneras diferentes:

(a) Derivando $\cot x$ (b) Derivando $\csc x$

(c) Demuestre que los dos resultados son equivalentes, salvo por una constante.

73. Si $p(x)$ es un polinomio de grado n y $G_1, G_2, \ldots, G_{n+1}$ son antiderivadas sucesivas de una función g, entonces por medio de repetidas integraciones por partes,

$$\int p(x)g(x)\, dx = p(x)G_1(x) - p'(x)G_2(x) + p''(x)G_3(x) - \cdots + (-1)^n p^{(n)}(x)G_{n+1}(x) + C$$

Utilice este resultado para encontrar cada una de las siguientes integrales:

(a) $\int (x^3 - 2x)e^x\, dx$ (b) $\int (x^2 - 3x + 1)\operatorname{sen} x\, dx$

74. La gráfica de $y = x\operatorname{sen} x$ para $x \geq 0$ se bosqueja en la figura 2.

(a) Encuentre una fórmula para el área de n-ésimo arco.

(b) El segundo arco se hace girar alrededor del eje y. Encuentre el volumen del sólido resultante.

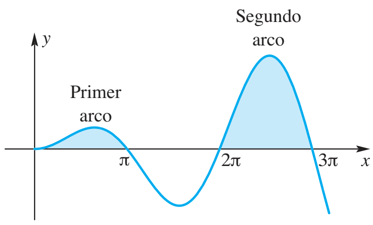


Figura 2

75. La cantidad $a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen} nx\, dx$ desempeña un papel importante en matemáticas aplicadas. Demuestre que si $f'(x)$ es continua en $[-\pi, \pi]$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. *Sugerencia:* integración por partes.

76. Sea $G_n = \sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}$.. Demuestre que $\lim\limits_{n\to\infty}(G_n/n) = 4/e$. *Sugerencia:* considere $\ln(G_n/n)$, identifíquela como una suma de Riemann y utilice el ejemplo 2.

77. Encuentre el error en la siguiente "demostración" de que $0 = 1$. En $\int (1/t)\, dt$, haga $u = 1/t$ y $dv = dt$. Entonces $du = -t^{-2}\, dt$ y $uv = 1$. La integración por partes da

$$\int (1/t)\, dt = 1 - \int (-1/t)\, dt$$

o $0 = 1$.

78. Suponga que quiere evaluar la integral

$$\int e^{5x}(4\cos 7x + 6\operatorname{sen} 7x)\,dx$$

y por su experiencia sabe que el resultado será de la forma $e^{5x}(C_1 \cos 7x + C_2 \operatorname{sen} 7x) + C_3$. Calcule C_1 y C_2 derivando el resultado y hágala igual al integrando.

Muchos resultados teóricos sorprendentes pueden deducirse mediante el uso de integración por partes. En todos los casos, uno inicia con una integral. Aquí exploramos dos de estos resultados.

79. *Demuestre que*

$$\int_a^b f(x)\,dx = [xf(x)]_a^b - \int_a^b xf'(x)\,dx$$

$$= [(x-a)f(x)]_a^b - \int_a^b (x-a)f'(x)\,dx$$

80. Utilice el problema 79 y reemplace f por f' para demostrar que

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)\,dx$$

$$= f'(b)(b-a) - \int_a^b (x-a)f''(x)\,dx$$

$$= f'(a)(b-a) - \int_a^b (x-b)f''(x)\,dx$$

81. Demuestre que

$$f(t) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(t-a)^i + \int_a^t \frac{(t-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x)\,dx,$$

siempre que f pueda derivarse $n+1$ veces.

82. La *función beta*, que es importante en muchas ramas de las matemáticas, está definida como

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx,$$

con la condición de que $\alpha \ge 1$ y $\beta \ge 1$.

(a) Por medio de un cambio de variables, demuestre que

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\beta-1}(1-x)^{\alpha-1}\,dx = B(\beta, \alpha)$$

(b) Integrando por partes demuestre que

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\alpha-1}{\beta} B(\alpha-1, \beta+1) = \frac{\beta-1}{\alpha} B(\alpha+1, \beta-1)$$

(c) Ahora, suponga que $\alpha = n$ y $\alpha = m$ y que n y m son enteros positivos. Utilizando, de manera repetida, el resultado de la parte (b) demuestre que

$$B(n, m) = \frac{(n-1)!\,(m-1)!}{(n+m-1)!}$$

Este resultado es válido incluso para el caso en donde n y m no son enteros, con tal que podamos dar significado a $(n-1)!$, $(m-1)!$ y $(n+m-1)!$

83. Suponga que $f(t)$ tiene la propiedad de que $f'(a) = f'(b) = 0$ y que $f(t)$ tiene dos derivadas continuas. Utilice integración por partes para demostrar que $\int_a^b f''(t)f(t)\,dt \le 0$. *Sugerencia:* use integración por partes derivando $f(t)$ e integrando $f''(t)$. Este resultado tiene muchas aplicaciones en el campo de las matemáticas aplicadas y en ecuaciones diferenciales parciales.

84. Deduzca la fórmula

$$\int_0^x \left(\int_0^t f(z)\,dz\right) dt = \int_0^x f(t)(x-t)\,dt$$

utilizando la integración por partes.

85. Generalice la fórmula dada en el problema 84 a uno para una integral iterada n-veces

$$\int_0^x \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_{n-1}} f(t_n)\,dt_n \ldots dt_1 = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x f(t_1)(x-t_1)^{n-1}\,dt_1$$

86. Si $P_n(x)$ es un polinomio de grado n, demuestre que

$$\int e^x P_n(x)\,dx = e^x \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \frac{d^j P_n(x)}{dx^j}$$

87. Utilice el resultado del problema 86 para evaluar

$$\int (3x^4 + 2x^2)e^x\,dx$$

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** $uv - \int v\,du$ **2.** x; $\operatorname{sen} x\,dx$ **3.** 1 **4.** reducción

7.3 Algunas integrales trigonométricas

Cuando hemos combinado el método de sustitución con un uso adecuado de identidades trigonométricas, podemos integrar una gran variedad de formas trigonométricas. Consideremos tres tipos encontrados comúnmente.

1. $\int \operatorname{sen}^n x\,dx$ y $\int \cos^n x\,dx$
2. $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\,dx$
3. $\int \operatorname{sen} mx \cos nx\,dx$, $\int \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\,dx$, $\int \cos mx \cos nx\,dx$
4. $\int \tan^n x\,dx$, $\int \cot^n x\,dx$
5. $\int \tan^m x \sec^n x\,dx$, $\int \cot^m x \csc^n x\,dx$