

Primera Edición

# Cálculo Diferencial e Integral

## Con aplicaciones

Actualización: Mayo 23, 2013.

*Prof. Elsie Hernández S.*



Revista digital Matemática, Educación e Internet

[www.tec-digital.itcr.ac.cr/revistamatematica/](http://www.tec-digital.itcr.ac.cr/revistamatematica/)

# 6

## INTEGRAL DEFINIDA

---

### 6.1 Introducción

---

Antes de abocarnos al estudio de la integral definida y de la integral indefinida, daremos una pequeña semblanza histórica de la relación entre el cálculo diferencial y el integral.

A continuación transcribiremos algunos de los párrafos al respecto tomados del libro La Matemática: su contenido, métodos y significado (que se menciona en la bibliografía).

Durante la segunda mitad del siglo XVII, Newton y Leibniz dieron un paso decisivo en la matemática de las magnitudes variables, al sentar las bases del cálculo diferencial e integral. “Este fue el verdadero comienzo del análisis, puesto que el objeto de este cálculo son las propiedades de las funciones mismas, distinto del objeto de la geometría analítica que son las figuras geométricas. De hecho, lo que hicieron Newton y Leibniz fue completar esa cantidad inmensa de trabajo que habían desarrollado hasta entonces muchos matemáticos y que se extendía hasta los métodos de determinación de áreas y volúmenes empleados por los antiguos griegos”.

“Aquí solo queremos llamar la atención acerca de los orígenes de este cálculo, que fueron principalmente los nuevos problemas de la mecánica y los viejos problemas de la geometría, consistentes estos últimos en la determinación de tangentes a una curva dada y el cálculo de áreas y volúmenes. Estos problemas geométricos habían sido ya estudiados por los antiguos (basta mencionar a Arquímidés), y también por Kepler, Cavalieri, y otros, a principios del siglo XVII. Pero el factor decisivo fue el descubrimiento de una notable relación entre estos dos tipos de problemas y la formulación de un método general para resolverlos; tal fue la obra de Newton y Leibniz.

Esta relación, que permitió conectar los problemas de la mecánica con los de la geometría, fue descubierta gracias a la posibilidad (brindada por el método de coordenadas) de hacer una representación gráfica de la dependencia de una variable respecto a la otra, o, en otras palabras, de una función. Con la ayuda de esta representación gráfica es fácil formular la relación antes mencionada entre los problemas de la mecánica y la geometría (relación que fue el origen del cálculo diferencial e integral) y describir así el contenido general de estos dos tipos de cálculo.

El cálculo diferencial es, básicamente, un método para encontrar la velocidad de un movimiento cuando se conoce la distancia recorrida en un tiempo dado. Este problema se resuelve por “derivación” y es completamente equivalente al problema de dibujar una tangente a la curva que representa la dependencia de la distancia respecto del tiempo. La velocidad en el instante  $t$  es igual a la pendiente de la tangente a la curva en el punto correspondiente a  $t$ .

El cálculo integral es en esencia un método para encontrar la distancia recorrida cuando se conoce la velocidad, y en general, de encontrar el resultado total de la acción de una magnitud variable. Evidentemente, este problema es recíproco del problema de cálculo diferencial (el problema de encontrar la velocidad), y se resuelve por “integración”. Resulta que el problema de la integración es en todo equivalente al de encontrar el área bajo la curva

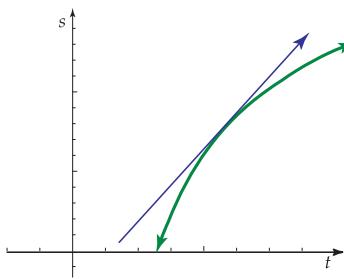


Figura 6.1

que representa la dependencia de la velocidad respecto al tiempo. La distancia recorrida en el intervalo de tiempo  $t_1$  a  $t_2$  es igual al área bajo la curva entre las rectas que corresponden en la gráfica a los valores  $t_1$  a  $t_2$ .

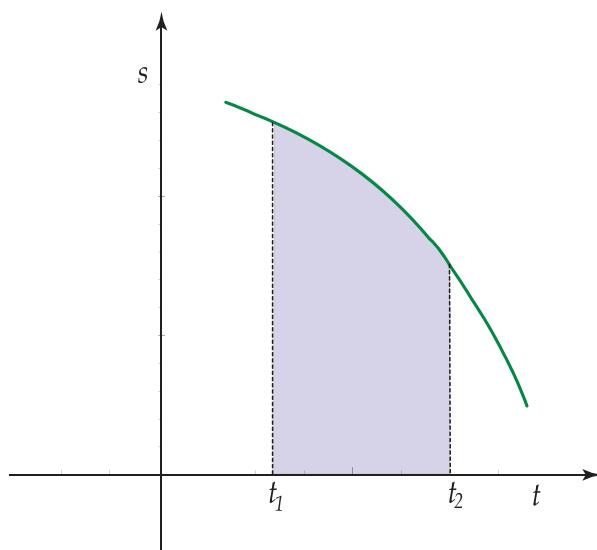


Figura 6.2

Haciendo abstracción de la formulación mecánica de los problemas y operando con funciones en vez de dependencias de distancia o velocidad respecto al tiempo se obtienen los problemas de cálculo diferencial e integral en forma abstracta.

Fundamental para el cálculo como para todo el desarrollo posterior del análisis, es el concepto de límite, que fue formulado algo más tarde que los otros conceptos fundamentales de variable y función. En los primeros días del análisis el papel que más tarde desempeñaría el límite, corrió a cargo de ese concepto algo nebuloso que es el infinitésimo. Los métodos para el cálculo real de la velocidad, conocida la distancia recorrida (a saber, la derivación), y de la distancia, conocida la velocidad (integración), se basaban en la unión del álgebra con el concepto de límite. El análisis se originó por la aplicación de estos conceptos y métodos a los referidos problemas de la mecánica y la geometría (y también a otros problemas: por ejemplo, los de máximos y mínimos). El análisis fue a su vez absolutamente necesario para el desarrollo de la mecánica, en la formulación de cuyas leyes ya se encontraban los conceptos analíticos en forma latente. Por ejemplo la segunda Ley de Newton, tal como él la formuló, establece que "la variación de la cantidad de movimiento es proporcional a la fuerza actuante" (con más precisión: el ritmo

de variación del impulso es proporcional a la fuerza). Por consiguiente, si deseamos hacer uso de esta ley debemos estar en condiciones de definir el ritmo de variación de una variable, esto es, de derivarla. (Si establecemos la ley diciendo que la aceleración es proporcional a la fuerza, el problema es el mismo, porque la aceleración es proporcional al ritmo de variación del impulso). También está perfectamente claro que, para establecer la ley que rige un movimiento cuando la fuerza es variable (en otras palabras, cuando el movimiento tiene lugar con aceleración variable), es preciso resolver el problema inverso de encontrar una magnitud dado su ritmo de variación; en otras palabras, es preciso integrar. Así, pues, se puede decir que Newton se vio simplemente obligado a inventar la derivación y la integración con el fin de poder desarrollar la mecánica".  
 (Aleksandrov, 1979, 71).

## 6.2 La integral definida

Hemos visto entonces, "que el concepto de integral y en general del cálculo integral tuvo su origen histórico en la necesidad de resolver problemas concretos, uno de cuyos ejemplos más característicos es el cálculo del área de una figura curvilínea" (AlekSandrov, 1979, 163).

Consideremos una curva situada sobre el eje X que representa la gráfica de la función con ecuación  $y = f(x)$ . Se desea encontrar el área  $S$  de la superficie limitada por la curva con ecuación  $y = f(x)$ , el eje X y las rectas paralelas al eje Y con ecuaciones  $x = a$  y  $x = b$ . Para tal efecto, dividimos el intervalo  $[a, b]$  en  $n$  partes, no necesariamente iguales como se muestra a continuación:

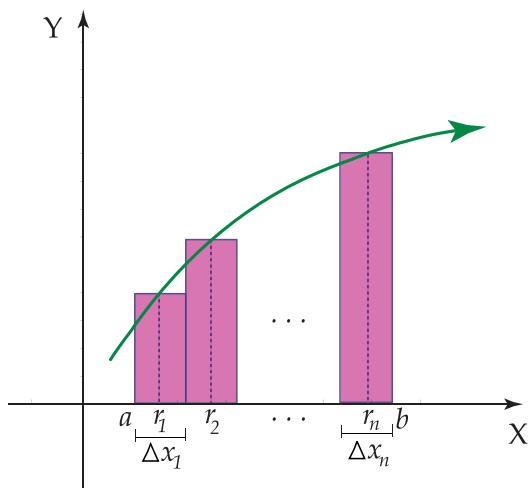


Figura 6.3

Denotamos con  $\Delta x_1$  la longitud de la primera parte, la de la segunda parte con  $\Delta x_2$  y así sucesivamente hasta la última  $\Delta x_n$ . En cada parte elegimos puntos  $r_1, r_2, \dots, r_n$ , de tal forma que  $f(r_1) \cdot \Delta x_1$  nos da el área del primer rectángulo, ( $\Delta x_1$  es la base y  $f(r_1)$  la altura),  $f(r_2) \Delta x_2$  da el área del segundo rectángulo y por lo tanto  $f(r_n) \cdot \Delta x_n$  da el área del enésimo rectángulo. Luego se tiene que:

$$S_n = f(r_1) \cdot \Delta x_1 + f(r_2) \cdot \Delta x_2 + \dots + f(r_n) \cdot \Delta x_n$$

es la suma de las áreas de los rectángulos de la figura anterior.

Obsérvese que cuanto más fina sea la subdivisión de segmento  $[a, b]$ , más próxima estará  $S_n$  al área  $S$ . Si se considera una sucesión de tales valores por división del intervalo  $[a, b]$  en partes cada vez más pequeñas, entonces la suma  $S_n$  tenderá a  $S$ . Al decir subdivisiones cada vez más pequeñas, estamos suponiendo no solo, que  $n$  crece indefinidamente, sino también que la longitud del mayor de los  $\Delta x_i$ , en la enésima división tiende a cero.

Luego:

$$\begin{aligned} S &= \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} [f(r_1) \cdot \Delta x_1 + f(r_2) \cdot \Delta x_2 + \dots + f(r_n) \cdot \Delta x_n] \\ S &= \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \left( \sum_{i=1}^n f(r_i) \cdot \Delta x_i \right) \end{aligned} \quad (6.1)$$

Por lo que el cálculo del área buscada se ha reducido a calcular el límite 6.1.

El cálculo del límite 6.1 también se presenta en otros problemas; por ejemplo, cuando se desea determinar la distancia  $S$  recorrida por un cuerpo que se mueve a lo largo de una línea recta, con velocidad variable  $v = f(t)$ , en el intervalo de tiempo entre  $t = a$  y  $t = b$ .

Supongamos que la función  $f(t)$  es continua, o sea, que en intervalos pequeños de tiempo la velocidad solo varía ligeramente. Se divide el intervalo  $[a, b]$  en  $n$  partes de longitudes  $\Delta t_1, \Delta t_2, \dots, \Delta t_n$ . Para calcular un valor aproximado de la distancia recorrida en cada intervalo  $\Delta t_i$ , (con  $i = 1, 2, \dots, n$ ) vamos a suponer que la velocidad en este intervalo de tiempo es constante e igual a su verdadero valor en algún punto intermedio  $r_i$ . Luego, la distancia total recorrida estará expresada aproximadamente por la siguiente suma:

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(r_i) \Delta t_i$$

siendo el verdadero valor de la distancia  $S$  recorrida en el tiempo  $b - a$ , el límite de tales sumas para subdivisiones cada vez más finas, o sea, que será el límite 6.1:

$$S = \lim_{\max \Delta t_i \rightarrow 0} \left( \sum_{i=1}^n f(r_i) \cdot \Delta t_i \right)$$

Es necesario determinar ahora la conexión entre el cálculo diferencial y el integral, pero antes calculemos el área de la región limitada por la curva en ecuación  $y = x^2$  y las rectas con ecuación  $y = 0$ ,  $x = 3$ .

Dividimos el intervalo  $[0, 3]$  en  $n$  partes iguales de tal forma que la longitud de cada  $\Delta x$  esté dado por  $\frac{3-0}{n} = \frac{3}{n}$ , y tomamos como puntos  $r_i$  los extremos derechos de cada segmento, por lo que

$$r_0 = 0, r_1 = 0 + \Delta x, r_2 = 0 + 2\Delta x, \dots, r_n = b = n\Delta x$$

Luego:

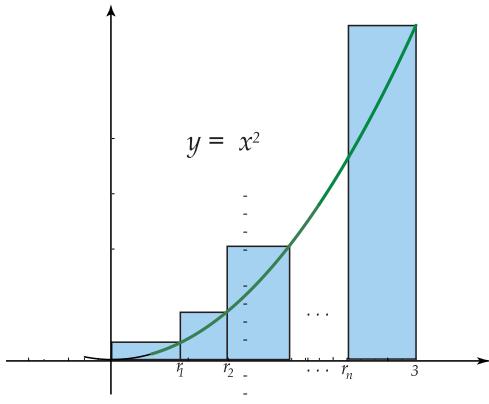


Figura 6.4

$$\begin{aligned}
 S_n &= f(r_1) \cdot \Delta x + f(r_2) \cdot \Delta x + f(r_3) \cdot \Delta x + \dots + f(r_n) \cdot \Delta x \\
 &= (\Delta x)^2 \Delta x + (2\Delta x)^2 \Delta x + (3\Delta x)^2 \Delta x + \dots + (n\Delta x)^2 \Delta x \\
 &= (\Delta x)^3 (1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) \\
 &= (\Delta x)^3 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \tag{6.2}
 \end{aligned}$$

La igualdad  $1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$  puede comprobarse utilizando el método de inducción matemática.

$$\begin{aligned}
 S_n &= \left(\frac{3}{n}\right)^3 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
 &= \frac{27}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
 &= \frac{9}{2} \cdot \frac{(n+1)(2n+1)}{n^2} \\
 &= \frac{9}{2} \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \frac{2n+1}{n} \\
 &= \frac{9}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right)
 \end{aligned}$$

Entonces:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{9}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right) = \frac{9}{2}(1+0)(2+0) = 9$$

Por lo tanto, el área de la región es 9 unidades cuadradas.

Puede observarse que el procedimiento utilizado es bastante laborioso y depende del conocimiento de una serie de fórmulas como la señalada con 6.2. Es necesario por tanto establecer un procedimiento que agilice el cálculo del área de una región curvilínea y para ello, vamos a establecer la relación existente entre el cálculo diferencial e integral.

El límite (A) recibe el nombre de integral definida de la función  $f(x)$  en el intervalo  $[a, b]$  y se denota por  $\int_a^b f(x) dx$ , donde  $f(x) dx$  se llama integrando, los límites de integración son  $a$  y  $b$ , con “ $a$ ” como límite inferior y “ $b$ ” como límite superior. Debemos contar con un método general que permita el cálculo de las integrales definidas.

“Históricamente esta cuestión interesó a los matemáticos durante mucho tiempo, por la utilidad que ello suponía para el cálculo de áreas de figuras curvilíneas, volúmenes de cuerpos limitados por superficies curvas, etc.

El número de problemas particulares que se consiguió resolver (cálculo de áreas, volúmenes, centros de gravedad de sólidos, etc.) fue creciendo gradualmente, pero los progresos en lo referente a encontrar un método general fueron, al principio, extremadamente lentos. Dicho método sólo fue descubierto cuando se hubo acumulado suficiente material teórico y práctico, proporcionado por la experiencia diaria. El trabajo de recoger y generalizar este material avanzó muy lentamente hasta el final de la Edad Media; y su rápido desarrollo posterior fue una consecuencia directa del acelerado crecimiento del poder productivo de Europa como resultado de la desaparición de los primitivos métodos (feudales) de producción, y la aparición de otros nuevos (capitalistas).

La acumulación de datos relacionados con las integrales definidas marchó paralela a la investigación de problemas relacionados con la derivada de una función.

Esta inmensa labor preparatoria fue coronada con el éxito en el siglo XVIII por los trabajos de Newton y Leibniz. En este sentido se puede decir que Newton y Leibniz son los creadores del cálculo diferencial e integral.

Una de las contribuciones fundamentales de Newton y Leibniz fue que aclararon finalmente la profunda conexión entre el cálculo diferencial e integral, que proporciona, en particular, un método general para calcular las integrales definidas de una clase bastante amplia de funciones.

Para calcular esta conexión, analicemos un ejemplo tomado de la mecánica. Supongamos que un punto material se mueve a lo largo de una línea recta con velocidad  $y = f(t)$ , donde  $t$  es el tiempo. Se sabe que la distancia  $\delta$  recorrida por el punto en el intervalo de tiempo desde  $t = t_1$  a  $t = t_2$  viene expresada por la integral definida:

$$\delta = \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt$$

Supongamos conocida la ecuación del movimiento del punto material; esto es, la función  $s = F(t)$ , que expresa la dependencia de la distancia  $s$  respecto al tiempo  $t$  a partir de un punto inicial  $A$  sobre la recta. La distancia recorrida en el intervalo de tiempo  $[t_1, t_2]$  es evidentemente igual a la diferencia  $\delta = F(t_2) - F(t_1)$

De este modo, consideraciones físicas llevan a la igualdad:

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t) dt = F(t_2) - F(t_1)$$

que expresa la conexión entre la ecuación del movimiento del punto material y su velocidad.

Desde un punto de vista matemático la función  $F(t)$  puede definirse como una función cuya derivada para todos los valores de  $t$  del intervalo dado es igual a  $f(t)$ , esto es:

$$F'(t) = f(t)$$

Una tal función se llama **primitiva** de  $f(t)$ .

Hay que tener en cuenta que si la función  $f(t)$  tiene al menos una primitiva, entonces tiene un número infinito de ellas; porque si  $F(t)$  es una primitiva de  $f(t)$ ; entonces  $F(t) + C$  (donde  $C$  es una constante arbitraria) es también una primitiva. Además de este modo obtenemos todas las primitivas de  $f(t)$  puesto que si  $F_1(t)$  y  $F_2(t)$  son primitivas de la misma función  $f(t)$  entonces su diferencia  $\phi(t) = F_1(t) - F_2(t)$ , tiene una derivada  $\phi'(t)$  que es igual a cero en todo punto del intervalo dado, por lo que  $\phi'(t)$  es constante.

**Nota:** Por el teorema del valor medio  $\phi(t) - \phi(t_0) = \phi'(v)(t - t_0) = 0$  donde  $v$  se encuentra entre  $t$  y  $t_0$ . Así  $\phi(t_0) = \phi(t_0) = \text{constante}$  para todo  $t$ .

Desde un punto de vista físico los diferentes valores de la constante  $C$  determinan movimiento que sólo difieren entre sí en el hecho de que corresponden a todas las posibles elecciones del punto inicial del movimiento.

Se llega así al resultado de que para una clase muy amplia de funciones  $f(x)$ , que incluye todos los casos en los que la función  $f(x)$  puede ser considerada como velocidad de un punto en el instante  $x$  se verifica la siguiente igualdad.

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad (6.3)$$

donde  $F(x)$  es una primitiva cualquiera de  $f(x)$ .

Esta desigualdad es la famosa fórmula da Leibniz y Newton que reduce el problema de calcular la integral definida de una función a la obtención de una primitiva de la misma, y constituye así un enlace entre el cálculo diferencial e integral.

Muchos de los problemas concretos estudiados por los más grandes matemáticos se resuelven automáticamente con esta fórmula que establece sencillamente que la integral definida de la función  $f(x)$  en el intervalo  $[a, b]$  es igual a la diferencia entre los valores de cualquiera de sus primitivas en los extremos superior e inferior del intervalo. La diferencia 6.3 se acostumbra escribir así:

$$F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

(Aleksandrov, 1979, 166 – 169)

Por ejemplo, utilizando la fórmula de Newton-Leibniz puede calcularse  $\int_0^3 x^2 dx$ , que determina el área de la región limitada por la curva con ecuación  $y = x^2$  y las rectas con ecuaciones  $y = 0$ ,  $x = 3$  y  $x = 0$ , de la siguiente manera:

$$\int_0^3 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{0^3}{3} = 9 - 0 = 9(u l)^2$$

Observe que  $D_x \left( \frac{x^3}{3} \right) = \frac{3x^2}{3} = x^2$ , por lo que  $\frac{x^3}{3}$  es una primitiva de  $x^2$ .

Veamos otro ejemplo en el que utilizamos esta fórmula:

### Ejemplo 6.1

$$\begin{aligned} & \int_2^4 (x^2 + 1) dx \\ &= \left( \frac{x^3}{3} + x \right) \Big|_2^4 = \frac{4^3}{3} + 4 - \left( \frac{2^3}{3} + 2 \right) = \frac{62}{3} \end{aligned}$$

Note que:

$$Dx \left( \frac{x^3}{3} + x \right) = x^2 + 1 \text{ por lo que } \frac{x^3}{3} + x \text{ es una primitiva de } x^2 + 1$$

“De los razonamientos hechos al exponer la fórmula de Newton y Leibniz se desprende, claramente que esta fórmula es la expresión matemática a una conexión auténtica del mundo real. Es un bello e importante ejemplo de cómo la matemática da expresión a las leyes objetivas. Debemos observar que en sus investigaciones matemáticas Newton siempre adoptó un punto de vista físico. Sus trabajos sobre los fundamentos del cálculo diferencial e integral no pueden ser separados de sus trabajos sobre los principios de la mecánica.

Los conceptos de análisis matemático -como la derivada o la integral- tal como se presentaban a Newton y sus contemporáneos, aún no había “roto” del todo con sus orígenes físico y geométrico (velocidad y área). De hecho era de un carácter mitad matemático y mitad físico. Las condiciones existentes en esa época no eran todavía las apropiadas para lograr una definición puramente matemática de esos conceptos. Por consiguiente, el investigador sólo podía manejarlos correctamente en situaciones complejas si permanecía en contacto inmediato con los aspectos prácticos del problema incluso durante las etapas intermedias (matemáticas) de su razonamiento.

Desde este punto de vista el trabajo creador de Newton tuvo un carácter diferente del de Leibniz, ya que sus descubrimientos tuvieron lugar independientemente. Newton se djó guiar siempre por el enfoque físico de los problemas. En cambio las investigaciones de Leibniz no tienen una conexión tan inmediata con la física, hecho que, en ausencia de definiciones matemáticas precisas, le condujo a veces a conclusiones equivocadas. Por otra parte el rasgo más característico de la actividad creadora de Leibniz fue su esfuerzo por generalizar su búsqueda de los métodos más generales de resolución de los problemas del análisis matemático.

El mayor mérito de Leibniz fue la creación de un simbolismo matemático que expresaba lo esencial de la cuestión. Las notaciones por conceptos fundamentales del análisis matemático tales como la diferencial  $dx$ , la diferencial segunda  $d^2x$ , la integral  $\int y dx$ , y la derivada  $d/dx$  fueron propuestas por Leibniz. El hecho de que estas notaciones se utilicen todavía muestra lo acertado de su elección.

Una de las ventajas de un simbolismo bien elegido es que hace las demostraciones y cálculos más cortos y fáciles, y evita también, a veces, conclusiones equivocadas. Leibniz, quien no ignoraba esto, prestó especial atención en todo su trabajo a la elección de notaciones.

La evolución de los conceptos del análisis matemático (derivada, integra, etc.) continuó, naturalmente, después de Newton y Leibniz y continúa todavía en nuestros días; pero hay una etapa en esta evolución que merece ser destaca-

cada. Tuvo lugar a comienzos del siglo pasado y está particularmente relacionado con el trabajo de Cauchy.

Cauchy dio una definición formal precisa del concepto de límite y la utilizó como base para sus definiciones de continuidad, derivada, diferencial e integral. Estos conceptos se emplean constantemente en el análisis moderno. La gran importancia de estos resultados reside en el hecho de que gracias a ellos es posible operar de un modo puramente formal y llegar a conclusiones correctas no sólo en la aritmética, el álgebra y la geometría elemental, sino también en esa nueva y extensa rama de la matemática, el análisis matemático.

En cuanto a los resultados prácticos del análisis matemático se puede decir hoy lo siguiente: si los datos originales se toman del mundo real entonces el resultado de los razonamientos matemáticos también se verificará en él.

Y, si estamos completamente seguros de la precisión de los datos originales, no hay necesidad de hacer una comparación práctica de la exactitud de los resultados matemáticos, hasta comprobar la exactitud de los razonamientos formales.

Esta afirmación tiene naturalmente la siguiente limitación. En los razonamientos matemáticos los datos originales que tomamos del mundo real sólo son verdaderos con una cierta precisión. Esto significa que en cada etapa de razonamiento matemático los resultados obtenidos contendrán ciertos errores que, conforme avanza el razonamiento (Por ejemplo de  $a = b$  y  $b = c$  sigue formalmente que  $a = c$ . Pero en la práctica esta relación aparece como sigue: del hecho de que  $a = b$  con un error igual a  $\epsilon$  y  $b = c$  con un error también  $\epsilon$  se sigue que  $a = c$  con un error igual a  $2\epsilon$ ) puede irse acumulando.

Volviendo ahora a la integral definida, consideremos una cuestión de capital importancia. ¿Para qué funciones  $f(x)$  definidas sobre el intervalo  $[a, b]$  es posible garantizar la existencia de la integral definida  $\int_a^b f(x) dx$ , es decir, un número para el cual la suma  $\sum_{i=1}^n f(r_i) \Delta x_i$  tenga límite cuando  $\max \Delta x_i \rightarrow 0$ ? Debe tenerse en cuenta que este número será el mismo para todas las subdivisiones del intervalo  $[a, b]$  y para cualquier elección de puntos  $r_i$ . Las funciones para las cuales la integral definida es decir, el límite (A) existe se dicen integrables en el intervalo  $[a, b]$ . Investigaciones realizadas en el último siglo demostraron que todas las funciones continuas son integrables. Pero hay también funciones discontinuas que son integrables y entre ellas figuran por ejemplo las funciones que son acotadas y crecientes (o decrecientes) en el intervalo  $[a, b]$ .

La función que es igual a cero en los puntos racionales de  $[a, b]$  e igual a uno en los puntos irracionales puede servir de ejemplo de función no integrable, puesto que para una subdivisión arbitraria la suma  $s_n$  será igual a cero o a uno según elijamos los puntos  $r_i$  entre los números irracionales o racionales.

Señalamos que en muchos casos la fórmula de Newton y Leibniz proporciona la solución al problema de calcular una integral definida. Pero surge entonces el problema de encontrar una primitiva de una función dada, esto es, de encontrar una función que tenga por derivada la función dada.

Procedemos ahora a discutir este punto.

Observemos de paso que el problema de encontrar una primitiva tiene gran importancia entre otras ramas de la matemática particularmente en la solución de ecuaciones diferenciales.

(Aleksandrov, 1979, 170,173)

### 6.2.1 Propiedades fundamentales de la integral definida

**Propiedad 6.1** Si  $k$  es un número real constante, y  $f$  es una función integrable en el intervalo cerrado  $[a,b]$ , entonces:

$$\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$$

**Propiedad 6.2** Si  $f$  y  $g$  son dos funciones integrables en  $[a,b]$  entonces  $f+g$  también es integrable en  $[a,b]$  y:

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

**Propiedad 6.3** Si  $f$  y  $g$  son dos funciones integrables en  $[a,b]$  (con  $a < b$ ) y además  $f(x) \leq g(x) \forall x \in [a,b]$  entonces:

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

Podemos ilustrar geométricamente la propiedad 6.3 como sigue:

Sea  $f(x) > 0$  y  $g(x) > 0$  para  $x \in [a,b]$ , además  $g(x) \geq f(x)$  para cada  $x \in [a,b]$ , como se muestra en la figura siguiente:

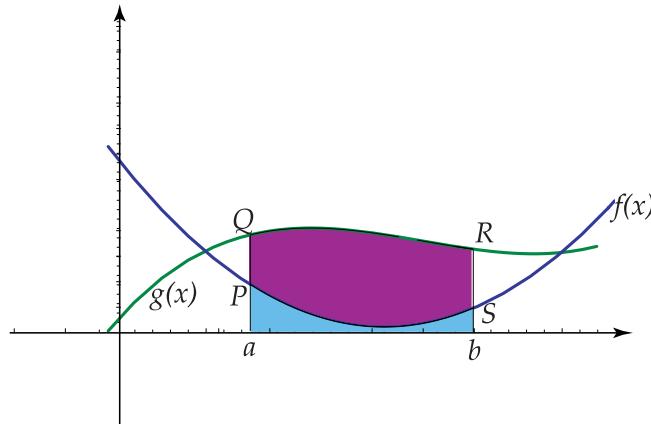


Figura 6.5

Note que el área del trapecio curvilíneo  $a Q R b$  es mayor que el trapecio curvilíneo  $a P S b$ , por lo que:

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

**Propiedad 6.4** Si  $M$  y  $m$  son los valores máximo y mínimo respectivamente de la función  $f(x)$  en el intervalo  $[a,b]$ , con  $a \leq b$ , y además  $f$  es integrable en  $[a,b]$  entonces:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

Puede ilustrarse la propiedad 6.4 geométricamente como sigue: sea  $f(x) \geq 0$  para  $x \in [a,b]$  ( $a < b$ ) y consideremos la siguiente representación gráfica:

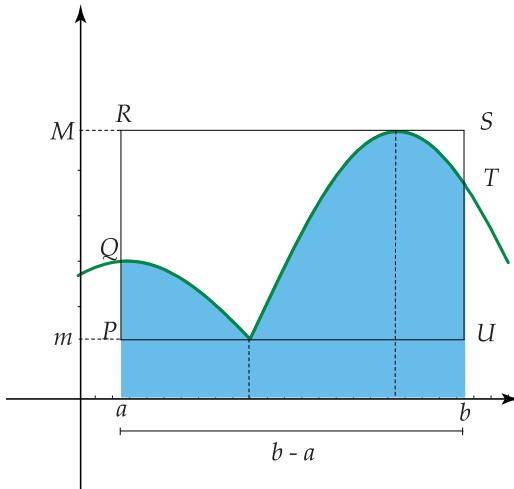
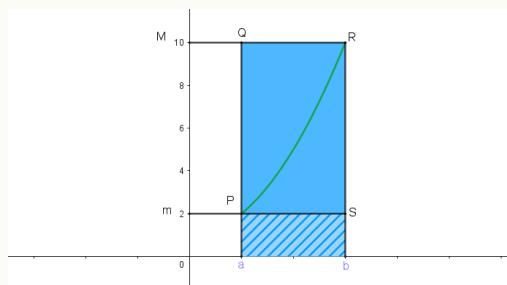


Figura 6.6

Note que el área del trapecio curvilíneo  $a Q T b$  está comprendida entre las áreas de los rectángulos  $a P U b$  y  $a R S b$ . (El área del rectángulo  $a P U b$  es  $m(b - a)$ , la del rectángulo  $a R S b$  es  $M(b - a)$  y la del trapecio curvilíneo es  $\int_a^b f(x) dx$

### Ejemplo 6.2

Consideremos la región limitada por la curva con ecuación  $y = x^2 + 1$  y las rectas cuyas ecuaciones son  $x = 1$ ,  $x = 3$ ; la representación gráfica es la siguiente:



Note que el valor mínimo que toma la función es 2 y el máximo es 10. El área del rectángulo  $a P S b$  es  $4(ul)^2$ , la del rectángulo  $a Q R b$  es  $20(ul)^2$  y la del trapecio curvilíneo  $a P R b$  es:

$$\int_1^3 (x^2 + 1) dx = \frac{x^3}{3} + x \Big|_1^3 = \left(\frac{3^3}{3} + 3\right) - \left(\frac{1^3}{3} + 1\right) = 12 - \frac{4}{3} = \frac{32}{3}(ul)^2$$

Observe que  $4 < \frac{32}{3} < 20$  y por tanto  $2(3-1) < \int_1^3 (x^2 + 1) dx < 10(3-1)$

**Teorema 6.1**

Si  $f$  es una función continua en el intervalo  $[a, b]$ , entonces existe en éste un punto  $\alpha$  tal que se verifique la siguiente igualdad:

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a)f(\alpha)$$

Podemos dar una interpretación geométrica como sigue: consideremos una función  $f$  tal que  $f(x) \geq 0$ , para todos los valores de  $x$  en el intervalo  $[a, b]$ .

Entonces  $\int_a^b f(x) dx$  es el área de la región limitada por la curva con ecuación  $y = f(x)$ , el eje X y las rectas con ecuaciones  $x = a$ ,  $x = b$

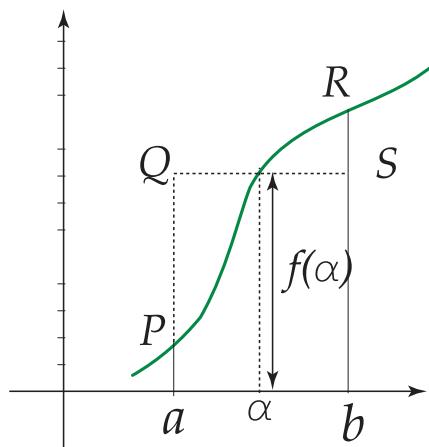


Figura 6.7

El teorema 6.1, establece que existe un número  $\alpha$  en  $[a, b]$  tal que el área del rectángulo  $a Q S b$ , cuya altura es  $f(\alpha)$  y que tiene ancho de  $(b - a)$  unidades, es igual al área de la región  $a P R b$ .

El valor de  $\alpha$  no es necesariamente único.

Aunque el teorema no establece un método para determinar  $\alpha$ , sí garantiza que existe un valor de  $\alpha$ , lo cual se utiliza para demostrar otros teoremas.

**Ejemplo 6.3**

Determinar, en cada caso, el valor de  $\alpha$  tal que:

i.  $\int_1^2 x^3 dx = f(\alpha)(2 - 1)$

ii.  $\int_1^4 (x^2 + 4x + 5) dx = f(\alpha)(4 - 1)$

iii.  $\int_{-2}^2 (x^2 + 1) dx = f(\alpha)(2 + 2)$  (Ejercicio para el estudiante)

**Solución:**

i. Calculemos primero  $\int_1^2 x^3 dx$

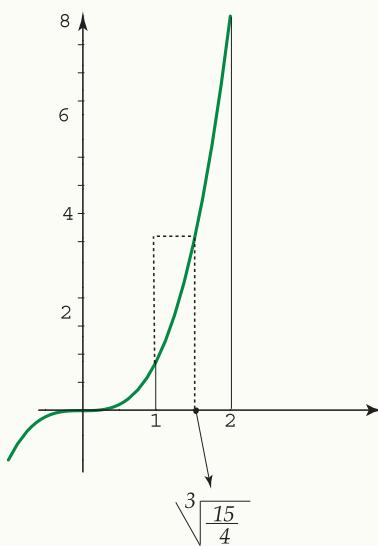
$$\text{Como } D_x \left( \frac{x^4}{4} \right) = x^3 \text{ entonces } \int_1^2 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_1^2 = \frac{16}{4} - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$$

Luego  $\int_1^2 x^3 dx = \frac{15}{4} = f(\alpha)(2 - 1)$  de donde:

$$f(\alpha) = \frac{15}{4} \text{ (en este caso } f(x) = x^3)$$

$$\alpha^3 = \frac{15}{4} \text{ y por último } \alpha = \sqrt[3]{\frac{15}{4}} \simeq 1,55$$

Gráficamente se tiene:



ii. Calculemos  $\int_1^4 (x^2 + 4x + 5) dx$

**Ejemplo 6.3 (continuación).**

Como  $D_x \left( \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 5x \right) = x^2 + 4x + 5$  entonces:

$$\int_1^4 (x^2 + 4x + 5) dx = \left( \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 5x \right) \Big|_1^4 = \frac{4^3}{3} + 2(4)^2 + 5 \cdot 4 - \left( \frac{1^3}{3} + 2(1)^2 + 5 \cdot 1 \right) = 66$$

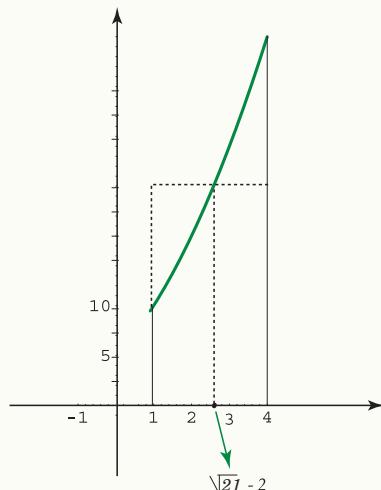
Luego:  $\int_1^4 (x^2 + 4x + 5) dx = 66 = f(\alpha)(4 - 1)$

de donde  $f(\alpha) = 22$ , como  $f(x) = x^2 + 4x + 5$  entonces:

$\alpha^2 + 4\alpha + 5 = 22$  y los valores de  $\alpha$  que satisfacen la ecuación son  $\alpha_1 = -2 + \sqrt{21}$ ,  $\alpha_2 = -2 - \sqrt{21}$ ; este último valor se descarta pues no pertenece al intervalo  $[1, 4]$

Luego el valor de  $\alpha$  que satisface el teorema del valor medio para integrales es  $\alpha = \sqrt{21} - 2$

Gráficamente se tiene:



**Propiedad 6.5** Si  $f$  es una función integrable en los intervalos cerrados  $[a, b]$ ,  $[a, c]$  y  $[c, b]$  con  $a < c < b$  entonces:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Asumimos la propiedad 6.5 sin demostración.

**Ejemplo 6.4**

Sea  $[a, b] = [0, 3]$  y  $c = 2$

$$\int_0^3 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^3 = 9$$

$$\text{Ahora: } \int_0^2 x^2 dx + \int_2^3 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 + \frac{x^3}{3} \Big|_2^3 = \frac{8}{3} + 9 - \frac{8}{3} = 9$$

$$\text{Luego: } \int_0^3 x^2 dx = \int_0^2 x^2 dx + \int_2^3 x^2 dx$$

Geométricamente podemos interpretar la propiedad 6.5 como sigue:

Si  $f(x) \geq 0$  para  $x \in [a, b]$  entonces la propiedad 6.5 anterior establece que, el área de la región limitada por la curva con ecuación  $y = f(x)$ , el eje  $X$  las rectas con ecuación  $x = a$ ,  $x = b$ , es igual a la suma de las áreas de las regiones desde “ $a$ ” hasta  $c$  y desde  $c$  hasta  $b$ .

El resultado anterior es válido para cualquier orden de  $a$ ,  $b$  y  $c$ , como se establece a continuación.

**Teorema 6.2**

Sea  $f$  una función integrable en un intervalo cerrado que contiene los tres números  $a$ ,  $b$  y  $c$ .

Entonces:  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$  sin importar cuál es el orden de  $a$ ,  $b$  y  $c$ .

Para la prueba del teorema se necesitan las siguientes definiciones:

**Definición 6.1**

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

**Ejemplo 6.5**

$$\int_1^3 x dx \frac{x^2}{2} \Big|_1^3 = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4$$

$$\int_3^1 x dx \frac{x^2}{2} \Big|_3^1 = \frac{1}{2} - \frac{9}{2} = -4$$

$$\text{Luego: } \int_1^3 x dx = - \int_3^1 x dx$$

**Definición 6.2**

$\int_a^a f(x) dx = 0$ , en este caso note que la longitud del trapecio curvilíneo es cero por lo que se área también es igual a cero.

Las definiciones 6.1 y 6.2 anteriores serán de gran utilidad al calcular el área de diversas regiones, como estudiaremos en el apartado de aplicaciones de la integral definida.