《利用鸽巢定理反证 Erdős–Szekeres 定理》

方绍雷 416100210234

2021 年 10 月 22 日

1 问题描述

If m and n are non-negative integers, then any sequence of m * n+1 distinct real numbers either has an increasing subsequence of m + 1 terms, or it has a decreasing subsequence of n + 1 terms.

2 证明思路

利用鸽巢定理的反证法：m,n 都为非负整数，假设 m * n+1 个不同实数最多含有长度为 m 递增序列项或者是长度 n 递减子序列的项。由鸽巢定理导出矛盾，证明原命题。

3 具体证明

对于任意不同 m * n+1 的实数集合。

假设序列为：$x_1, x_2, ..., x_k, ...x_{m*n+1}$(m * n + 1 个不同的实数)

令 g_k 为序号从 1 到 k（包括 k）的递增子序列长度。

令 f_k 为序号从 1 到 k（包括 k）的递减子序列长度。

对于每个实数 x_k, 都有一一对应的序列对: (g_k, f_k) 表示实数 x_k 的递增子序列和递减子序列长度。

则对于每个数字，都可以得出 (1) 中的 m * n+1 个序列对。

$$(g_1, f_1), (g_2, f_2), ..., (g_{m*n+1}, f_{m*n+1}) \tag{1}$$

而对于前提假设所知：$1 \leq g_k \leq m, 1 \leq f_k \leq n$,

根据排列组合得，一共有 $m * n$ 种组合方式，而 (1) 中有 $m * n + 1$ 个序列对。由鸽巢定理所知，说明 (1) 中至少有两个序列对完全相同。

设相同的序列对为 $(g_i, f_i), (g_j, f_j)$

假设序列对重复对应数字项为 x_i, x_j, $i \neq j$, 由于 m * n+1 的实数为不同实数。所以 x_i, x_j 为不同的两个实数。

易知有两种情况：

当 $x_i < x_j$ 时，由于 $x_i < x_j$，得 x_i 的最长递增子序列数目小于 x_j

当 $x_i > x_j$ 时，由于 $x_i > x_j$，得 x_i 的最长递减子序列数目小于 x_j

所以，综上证得 $(g_i, f_i), (g_j, f_j)$ 相同的结论不成立！矛盾

所以结论 m * n+1 个不同实数最多含有长度为 m 递增序列项或者是长度 n 递减子序列的项不成立。对于 m * n + 1 个不同实数，如果有小于 m 个递增子序列或者小于 n 个递减子序列，由鸽巢定理所得，则（1）中序列对中一定有重复。不合题意。

所以，当 $1 \leq g_k \leq m+1$ 或者是 $1 \leq f_k \leq n+1$ 时，(1) 中不存在重复，即由 $m*n+1$ 个实数构成的不同实数序列，一定存在 m + 1 个递增或者 n + 1 个递减。