1、$X(t)$是二阶矩存在的随机过程

$\Rightarrow$ $X(t)$是宽平稳过程

$EX(t)=m$ $\quad R_X(t,s)=E\{(X(t)-\mu X(t))(X(s)-\mu X(s))\}$

$=E(X(t)X(s))-mE(X(t)+X(s))+m^2$

$=E(X(t)X(s))-m^2$ 只与 $s-t$ 有关

故 $EX(s)X(s+t)$只依赖于 $s+t-s=t$

$\Leftarrow$

$EX(s)$不依赖于 s，故 $EX(s)=m$

$R_X(s,s+t)=EX(s)X(s+t)-m^2$ 仅与 t 有关与 s 无关

故 $R_X(t,s)$ 仅与 $t-s$ 有关，即$\{X(t)\}$是宽平稳过程

2、

$EX(t)=\frac{1}{n}E\left(\sum_{k=1}^{n}I(t,U_k)\right)=E(I(t,U_1))$

$=P(U_1\le t)=t \quad (0\le t\le 1)$

$R_X(t,s)=Cov[X(t),X(s)]$

$=E\{(X(t)-\mu(X(t)))(X(s)-\mu(X(s)))\}$

$=E(X(t)X(s))-ts$

$=\frac{1}{n^2}E\left(\sum_{k=1}^{n}I(t,U_k)\left(\sum_{i=1}^{n}I(s,U_i)\right)\right)-ts$

$=\frac{1}{n^2}E\left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}I(t,U_k)I(s,U_i)\right)-ts$

$= E\left(I(t,U_k)\ I(s,U_i)\right) - ts$

$= \min\{t,s\} - ts$

8、$X_1, X_2, \cdots X_n$是独立同分布的随机变量时

k维随机向量$(X_{n1}, X_{n2}, \cdots X_{nk})$的分布函数为

$F_{(X_{n1}, X_{n2}, \cdots X_{nk})}(x_1, x_2, \cdots x_k)$

$= F_{X_{n1}}(x_1) \cdots F_{X_{nk}}(x_n) = F(x_1) \cdots F(x_k)$

故$\{X_1, X_2, \cdots\}$严平稳

9.

$P(X^2+Y^2 \geq \frac{3}{4} \mid X>Y)$

$$= \frac{P(X^2+Y^2 \geq \frac{3}{4},\ X>Y)}{P(X>Y)} = \frac{(\pi - \frac{3\pi}{4}) \times \frac{1}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}$$

10. $\{T_1 \in I, S=1\} = \{T_1 \in I, T_1+T_2>1\}$

故$P(T_1 \in I, S=1) = P(T_1 \in I, T_1+T_2>1)$

而(T_1, T_2)的联合密度函数为

$f_{(T_1,T_2)}(t_1,t_2) = \lambda^2 e^{-\lambda(t_1+t_2)}$

$$P(T_1\in I, T_1+T_2>1)=\iint_{t_1\in I,\, t_1+t_2>1} f_{(T_1,T_2)}(t_1,t_2)\,dt_1dt_2$$

$$=\lambda^2\iint_{t_1,t_2>0,\; t_1\in I,\; t_1+t_2>1} e^{-\lambda(t_1+t_2)}\,dt_1dt_2$$

$u=t_1,\ v=t_1+t_2$

$$P(T_1\in I, T_1+T_2>1)=\lambda^2\iint_{u\in I,\, v>1} e^{-\lambda v}\,dv=\lambda|I|e^{-\lambda}$$

$$P(S=1)=\lambda e^{-\lambda}$$

$$P(T_1\in I\mid S=1)=|I|$$

17.

$$P(M=m\mid N=n)=\binom{n}{m}p^m(1-p)^{n-m},\quad m=0,1,2,\cdots,n,\ n=0,1,2\cdots$$

$$P(N=n)=\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!},\quad n=1,2,3,\cdots$$

$$P(M=m)=\sum_{n=m}^{\infty}P(M=m\mid N=n)P(N=n)$$

$$=p^m e^{-\lambda}\sum_{n=m}^{\infty}\binom{n}{m}\frac{(1-p)^{n-m}\lambda^n}{n!}$$

$$=\frac{(\lambda p)^m e^{-\lambda p}}{m!},\quad m=0,1,2\cdots$$

说明了Y服从参数为 λp 的 Poisson 分布