随机过程 B
第 2 章 Poisson 过程

Lecturer: 解扬洋

E-mail: xieyclio@ustc.edu.cn

本章提纲

1. Poisson 过程
   - Poisson 过程的定义
   - Poisson 过程等价定义
2. 间隔时间与到达时间
   - 间隔时间与到达时间的分布
   - 到达时间的有限维条件分布
3. Poisson 过程的推广
   - 非齐次 Poisson 过程
   - 复合 Poisson 过程
   - 更新过程

Poisson 过程的定义

- Poisson 过程的应用场景:
  - ▷ 盖革计数器 (电离辐射强度探测器) 上的粒子流
  - ▷ 空袭的着弹点
  - ▷ 交通流中的事故数
  - ▷ 染色体的交换次数
- 特点
  - ▷ 时间或空间上的均匀性
  - ▷ 未来的变化与过去的变化无关

定义 2.1　Poisson 过程

一个整数值随机过程 $\{N(t),\ t \geq 0\}$, 满足下述三个条件时, 即称为强度为 $\lambda > 0$ 的 Poisson 过程:

(i) $N(0) = 0$

(ii) $N(t)$ 是独立增量过程

(iii) 对任意 $t > 0$, $s \geq 0$, 增量 $N(s+t) - N(s)$ 服从参数为 λt 的 Poisson 分布, 即

$$\mathbb{P}(N(s+t) - N(s) = k) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}, \quad k = 0, 1, \cdots$$

Poisson 过程的定义 (续)

- 由条件 (i) $N(0)=0$ 和条件 (iii) $\mathbb{P}(N(s+t)-N(s)=k)=\frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}$, 取 $s=0$, 可得过程的一维分布是 Poisson 分布

$$\mathbb{P}(N(t)=k)=\mathbb{P}(N(t)-N(0)=k)=\frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!},\ k=0,1,\cdots$$

  也即$N(t)\sim$ Poisson(λt)
- 从而, 基于 Poisson 分布的数字特征, 有

$$\mathbb{E}N(t)=\mathrm{Var}N(t)=\lambda t$$

- 增量 $N(s+t)-N(s)$ 代表时间区间 $(s,s+t]$ 中发生的随机事件数
  - ▷ 条件 (iii) 中增量的分布与 s 无关, 因此增量具有平稳性
  - ▷ 平稳意味着时间上的均匀性
  - ▷ 条件 (ii) 保障增量独立, 因而 Poisson 过程是平稳独立增量过程
- 强度 λ 有时也称为速率, 反映了随机事件发生的频繁程度

例 2.1

- 顾客依 Poisson 过程到达某商店
- 速率 $\lambda = 4$ 人/小时
- 已知商店在上午 9:00 开门
- 求到 9:30 时仅有 1 位顾客达到 (不考虑顾客离开的数量), 而到 11:30 时已累计有 5 位顾客到达的概率

解:

- 令时间 t 的单位为小时
- 以 9 点 (开门时间) 为起始时刻 $t = 0$
- 所求事件可表示为

$$\{N(0.5) = 1,\ N(2.5) = 5\}$$

例 2.1 (续):

- 到达速率: $\lambda = 4$
- t 时刻累计有 k 位顾客到达的概率: $\mathbb{P}(N(t)=k)=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}$
- 利用增量独立性和增量平稳性, 可得

$$
\begin{aligned}
& \mathbb{P}(N(0.5)=1,\ N(2.5)=5) \\
= \ & \mathbb{P}(N(0.5)=1,\ N(2.5)-N(0.5)=5-1) \\
= \ & \mathbb{P}(N(0.5)=1)\cdot\mathbb{P}(N(2.5)-N(0.5)=4) \\
= \ & \mathbb{P}(N(0.5)=1)\cdot\mathbb{P}(N(2)=4) \\
= \ & \frac{e^{-\lambda\cdot 0.5}\cdot(\lambda\cdot 0.5)^1}{1!}\cdot\frac{e^{-\lambda\cdot 2}\cdot(\lambda\cdot 2)^4}{4!} \\
\approx \ & 0.0155
\end{aligned}
$$

思考与讨论

- Poisson 过程与 Poisson 分布有什么关系?
- Poisson 过程是宽/严平稳过程吗? 为什么?

Poisson 过程等价定义

考虑二项分布与 Poisson 分布的关系

- 记 n 为试验总次数, p 为成功概率, N 为试验成功次数
- 则 N 服从二项分布:

$$\mathbb{P}(N=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}$$

- Poisson 分布:

$$\mathbb{P}(X=k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

- 若 $np=\lambda$, 二项分布的极限趋于 Poisson 分布:

$$\frac{\mathbb{P}(N=k)}{\mathbb{P}(X=k)}=\frac{\frac{n!}{(n-k)!}(\frac{\lambda}{n})^k(1-\frac{\lambda}{n})^{n-k}}{\lambda^k e^{-\lambda}}$$

$$=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}\frac{(1-\frac{\lambda}{n})^{n-k}}{e^{-\lambda}}$$

- 令 $n\to\infty$ (也即 p 很小时), 利用 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ (由于 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$), 得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathbb{P}(N=k)}{\mathbb{P}(X=k)}=\lim_{n\to\infty}\frac{[(1-\frac{\lambda}{n})^{-\frac{n}{\lambda}}]^{-\lambda}(1-\frac{\lambda}{n})^{-k}}{e^{-\lambda}}=1$$

Poisson 过程等价定义 (续)

- 将二项分布的极限是 Poisson 分布, 推广到随机过程的情形
- 独立重复试验随机过程的极限, 是 Poisson 过程

假定:

(1) 增量独立: 对 $\forall n \in \mathbb{N}^+$ 及 $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, $N(t_1) - N(t_0)$, $N(t_2) - N(t_1)$, $\cdots$, $N(t_n) - N(t_{n-1})$ 相互独立
  - ▷ 对应二项分布中, 各次试验是独立的

(2) 增量平稳: 对任意 $t \geq 0, h > 0$, $N(t+h) - N(t)$ 的分布只依赖于 h
  - ▷ 每个长度相同的小区间上, 事件发生有相同的概率, 时间齐次性
  - ▷ 对应二项分布中, 各次试验成功概率相同

(3) 足够短时间内, 发生事件的概率正比于区间长度:
存在 $\lambda > 0$, 当 $h \downarrow 0$ 时,

$$\mathbb{P}(N(t+h) - N(t) \geq 1) = \lambda h + o(h)$$

  - ▷ 事件发生的概率 $p \approx \lambda h$, 不发生的概率 $\approx 1 - \lambda h$, 事件是稀有的
  - ▷ 对应二项分布取极限时, p 足够小

(4) 足够短时间内, 发生两次或更多次事件的概率可以忽略

$$\mathbb{P}(N(t+h)-N(t)\geq 2)=o(h)$$

▷ 事件是一件一件发生的, 称为相继性 (orderliness)
▷ 对应二项分布中, 试验是相继进行的

命题 2.1 Poisson 过程的等价定义

满足假定 $(1)\sim(4)$ 的初值为 0 的随机过程 $N(t)$ 是 Poisson 过程.

- Poisson 过程的定义要求
  (i) $N(0)=0$
  (ii) $N(t)$ 是独立增量过程
  (iii) 对任意 $t>0,\ s\geq 0,$

$$\mathbb{P}(N(s+t)-N(s)=k)=\frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!},\ \ k=0,1,\cdots$$

- 易验证等价定义满足条件 (i)(ii) 已满足, 下面仅验证条件 (iii)
- 由等价定义的假定 (2) 增量平稳性, 得 $N(s+t)-N(s)$ 与 $N(t)$ 同分布, 下面验证该分布即是 Poisson 分布

证法一: 利用递推公式, 通过常微分方程求解 $N(t)$ 分布

- 记 $P_m(t) = \mathbb{P}(N(t) = m)$, 即 $(0, t]$ 上发生 m 次事件的概率
- 记 $p(h) = \mathbb{P}(N(h) \geq 1) = 1 - P_0(h) = \sum_{m=1}^{\infty} P_m(h)$, 即 $(0, h]$ 上发生一次或一次以上事件的概率
- 由增量独立性

$$P_0(t+h) = P_0(t)P_0(h) = P_0(t)[1 - p(h)]$$

得到

$$\frac{P_0(t+h) - P_0(t)}{h} = -P_0(t)\frac{p(h)}{h}$$

- 令 $h \downarrow 0$, 并由假定 (3) $p(h) = \mathbb{P}(N(h) \geq 1) = \lambda h + o(h)$, 得

$$P_0'(t) = -\lambda P_0(t)$$

- 已知初始条件 $P_0(0) = 1$, 求得微分方程的解为 $P_0(t) = e^{-\lambda t}$

已得 $P_0(t)=e^{-\lambda t}$, 再由 $P_0(t)$ 求 $P_1(t)$:

- $(0,t+h]$ 发生一次事件, 则要么发生在 $(0,t]$, 要么发生在 $(t,t+h]$

$$P_1(t+h)=P_1(t)P_0(h)+P_0(t)P_1(h)$$

$$\Rightarrow \frac{P_1(t+h)-P_1(t)}{h}=-P_1(t)\frac{1-P_0(h)}{h}+P_0(t)\frac{P_1(h)}{h}$$

- 考虑 $\frac{1-P_0(h)}{h}$ 和 $\frac{P_1(h)}{h}$
- 由 $p(h)=\lambda h+o(h)$, 得 $P_0(h)=1-p(h)=1-\lambda h+o(h)$
- 由假定 (4) $\mathbb{P}\left(N(t+h)-N(t)\geq 2\right)=o(h)$, 得

$$\begin{aligned} P_1(h) &= p(h)-\mathbb{P}\left(N(t+h)-N(t)\geq 2\right) \\ &= \lambda h+o(h) \end{aligned}$$

- 代入后取 $h\downarrow 0$, 得

$$P_1'(t)=-\lambda P_1(t)+\lambda P_0(t)=-\lambda P_1(t)+\lambda e^{-\lambda t}$$

$P_1'(t) = -\lambda P_1(t) + \lambda e^{-\lambda t}$, 初始条件 $P_1(0) = 0$

- 运用 Laplace 变换 (点击参考) $\mathcal{L}[f](s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$ (或一阶线性常微分方程通解公式, 点击参考), 求解一阶非齐次线性微分方程, 得

$$s\mathcal{L}[P_1](s) - P_1(0) = -\lambda\mathcal{L}[P_1](s) + \frac{\lambda}{s+\lambda}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}[P_1](s) = \frac{\lambda}{(s+\lambda)^2}$$

- 逆变换, (查表) 得

$$P_1(t) = \mathcal{L}^{-1}[\frac{\lambda}{(s+\lambda)^2}] = \lambda t e^{-\lambda t}$$

- 类似地, 对于 $P_m(t)$ 有

$$P_m(t+h) = P_m(t)P_0(h) + P_{m-1}(t)P_1(h) + \sum_{i=2}^{m} P_{m-i}(t)P_i(h)$$

- 在 $(t, t+h]$ 时间段内, 同时发生两次或以上事件的概率为无穷小, 即

$$\sum_{i=2}^{m} P_{m-i}(t)P_i(h) \le \sum_{i=2}^{m} P_i(h) = o(h)$$

Poisson 过程等价定义 (续)

$P_m(t+h) = P_m(t)P_0(h) + P_{m-1}(t)P_1(h) + o(h)$

- 从而

$$\frac{P_m(t+h) - P_m(t)}{h} = P_m(t)\frac{P_0(h)-1}{h} + P_{m-1}(t)\frac{P_1(h)}{h} + \frac{o(h)}{h}$$

- 令 $h \downarrow 0$, 得

$$P_m'(t) = -\lambda P_m(t) + \lambda P_{m-1}(t)$$

- 采用归纳法递推, 设已知

$$P_{m-1}(t) = \frac{\lambda^{m-1}t^{m-1}}{(m-1)!}e^{-\lambda t}$$

- 求解一阶非齐次微分方程, 初始条件 $P_m(0) = 0$, 得

$$P_m(t) = \frac{\lambda^m t^m}{m!}e^{-\lambda t}$$

- 得证 $N(t) \sim \text{Poisson}(\lambda t)$, 从而命题 2.1 得证

Poisson 过程等价定义 (续)

证法二: 也可利用概率母函数, 通过求解偏微分方程来证明命题 2.1

- $N(t)$ 的概率母函数为

$$g_{N(t)}(u)=\mathbb{E}e^{uN(t)}=\sum_{k=0}^{\infty}e^{uk}\mathbb{P}(N(t)=k)$$

- 由于其概率母函数也是时间 t 的函数, 将其记为

$$g(u,t)=g_{N(t)}(u)=\sum_{k=0}^{\infty}e^{uk}P_k(t)$$

- 两边对 t 求导, 并利用 $P'_m(t)=-\lambda P_m(t)+\lambda P_{m-1}(t)$, $m\geq 1$, 及 $P'_0(t)=-\lambda P_0(t)$, 得

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}g(u,t) &= \sum_{k=0}^{\infty}e^{uk}P'_k(t)=-\lambda\sum_{k=0}^{\infty}e^{uk}P_k(t)+\lambda\sum_{k=1}^{\infty}e^{uk}P_{k-1}(t)\\ &= -\lambda\sum_{k=0}^{\infty}e^{uk}P_k(t)+\lambda\sum_{k=0}^{\infty}e^{u(k+1)}P_k(t)\\ &= -\lambda g(u,t)+\lambda e^{u}g(u,t)\end{aligned}$$

用概率母函数的方法来证明命题 2.1(续)

- 求解 $g(u,t)$ 关于 t 的偏微分方程

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} g(u,t) = \lambda(e^u - 1) g(u,t) \\ \Rightarrow \quad & \frac{\partial}{\partial t} \ln g(u,t) = \lambda(e^u - 1) \\ \Rightarrow \quad & \ln g(u,t) = \lambda(e^u - 1)t + C \\ \Rightarrow \quad & g(u,t) = C e^{\lambda t(e^u - 1)} \end{aligned}$$

- 边界条件 $g(u,0) = \mathbb{E} e^{uN(0)} = 1$
- 解得 $C = 1$, 也即 $g(u,t) = e^{\lambda t(e^u-1)}$
- 查表可知, $g(u,t)$ 对应参数为 λt 的 Poisson 分布的概率母函数
- 得证 $N(t) \sim \text{Poisson}(\lambda t)$

思考与讨论

- 什么是 Poisson 过程?
- Poisson 过程具备哪些性质?

间隔时间与到达时间

- Poisson 过程的样本路径一般是跃度为 1 的阶梯函数
- 第 $n-1$ 次与第 n 次事件发生的间隔时间记为 X_n
- $W_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ 称为第 n 次事件的到达时间或等待时间

命题 2.2　间隔时间与到达时间的分布

(i) 间隔时间 $X_n,\ n = 1, 2, \cdots$ 是独立同分布的均值为 $\frac{1}{\lambda}$ 的指数分布随机变量. (ii) 到达时间 W_n 服从参数为 n 和 λ 的 Γ 分布.

证明: 利用等价事件

- $\{X_1 > t\}$ 表示首次事件发生在 t 时刻之后
- 等价于在 $(0, t]$ 时间区间内没有事件发生, 也即

$$\{X_1 > t\} = \{N(t) = 0\}$$

- 从而

$$\mathbb{P}(X_1 > t) = \mathbb{P}(N(t) = 0) = \left.\frac{\lambda^m t^m}{m!} e^{-\lambda t}\right|_{m=0} = e^{-\lambda t},$$

也即 $X_1 \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$

- 下面考察 X_2 的分布, 先证 X_2 与 X_1 独立
- 考虑等价事件 $\{X_1 = s\} = \{N(s) = 1, N(s-) = 0\}$,

$$\{X_2 > t, X_1 = s\} = \{N(t+s) - N(s) = 0, N(s) = 1, N(s-) = 0\}$$

- 从而

$$\{X_2 > t | X_1 = s\} = \{N(t+s) - N(s) = 0 | N(s) = 1, N(s-) = 0\}$$

- 因此

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(X_2 > t | X_1 = s) \\ = \; & \mathbb{P}(N(t+s) - N(s) = 0 | N(s) = 1, N(s-) = 0) \\ = \; & \mathbb{P}(N(t+s) - N(s) = 0) \qquad \text{(增量独立性)} \\ = \; & \mathbb{P}(N(t) = 0) = e^{-\lambda t} \qquad \text{(增量平稳性)} \end{aligned}$$

- 该条件分布与 X_1 的取值 s 无关, 即条件分布等于无条件分布
  - ▷ 故 X_2 与 X_1 独立, 从而

$$\mathbb{P}(X_2 > t) = \mathbb{P}(X_2 > t | X_1 = s) = e^{-\lambda t},$$

也即 $X_2 \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$

间隔时间与到达时间 (续)

- 再考察 X_i 的分布，可以类比 X_2 进行证明

$$
\begin{aligned}
& \mathbb{P}(X_i > t | X_{i-1} = s_{i-1}, \cdots, X_1 = s_1) \\
= \quad & \mathbb{P}(N(t + s_{i-1}) - N(s_{i-1}) = 0 | N(s_{i-1}) = i - 1, \\
& N(s_{i-1}-) = i - 2, \cdots, N(s_1) = 1, N(s_1-) = 0) \\
= \quad & \mathbb{P}(N(t + s_{i-1}) - N(s_{i-1}) = 0) \qquad \text{(增量独立性)} \\
= \quad & \mathbb{P}(N(t) = 0) = e^{-\lambda t} \qquad \text{(增量平稳性)}
\end{aligned}
$$

- 故 $X_i \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$，且与 $X_{i-1}, X_{i-2}, \cdots, X_1$ 独立
- 独立同分布指数分布随机变量的和，服从 Gamma 分布
  - ▷ 故到达时间

$$W_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathrm{Gamma}(n, \lambda)$$

  - ▷ 也即

$$f_{W_n}(t) = \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} t^{n-1} e^{-\lambda t} = \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

间隔时间与到达时间 (续)

- 也可以利用下式证明 W_n 的分布

$$\{W_n \leq t\} = \{N(t) \geq n\}$$

$$\{\text{第 } n \text{ 次事件发生在 } t \text{ 时刻 (含) 前}\} = \{t \text{ 时刻时至少发生了 } n \text{ 次事件}\}$$

- 由于 $N(t) \sim \mathrm{Poisson}(\lambda t)$, 故有

$$F_{W_n}(t) = \mathbb{P}(W_n \leq t) = \mathbb{P}(N(t) \geq n) = \sum_{j=n}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!}$$

- 对 $F_{W_n}(t)$ 求导 (一致收敛保障可交换), 即得 W_n 密度函数, 恰好是 Gamma 分布密度函数

$$\begin{aligned} f_{W_n}(t) &= \sum_{j=n}^{\infty} (-\lambda) e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!} + \sum_{j=n}^{\infty} e^{-\lambda t} (j\lambda) \frac{(\lambda t)^{j-1}}{j!} \\ &= \lambda e^{-\lambda t} \left[-\sum_{j=n}^{\infty} \frac{(\lambda t)^j}{j!} + \sum_{j=n}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{j-1}}{(j-1)!} \right] = \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} \end{aligned}$$

思考与讨论

- 什么是间隔时间？什么是到达时间？
- 两者间的关系是什么？

到达时间的有限维条件分布

定理 2.1 到达时间的有限维条件分布

设 $\{N(t),\ t \geq 0\}$ 为 Poisson 过程. 给定 $N(t) = n$ 时, 到达时间 $W_1, \cdots, W_n$ 的有限维联合分布的密度函数为

$$f_{W_1,\cdots,W_n|N(t)=n}(w_1, \cdots, w_n|n) = \frac{n!}{t^n},\quad 0 < w_1 < \cdots < w_n \leq t.$$

- 给定当前已发生了 n 次事件, 各个事件发生时刻的联合分布
- 同分布于 n 个 $[0, t]$ 上均匀分布次序统计量 $\left(U_{(1)}, U_{(2)}, \cdots, U_{(n)}\right)$ 的联合分布, 其中 $U_{(1)} \leq U_{(2)} \leq \cdots \leq U_{(n)}$

证明:

- 设 n 次事件的到达时间为 $W_i = w_i,\ i = 1, \cdots, n$
- 对于充分小的 Δw_i, 区间 $[w_i, w_i + \Delta w_i)$ 互不相交
  - 每个区间内, 恰好发生一次事件
  - 其它区间内无事件发生

到达时间的有限维条件分布 (续)

- 概率密度等于概率除以其对应状态空间的超体积(一维即区间长度)

$$
\begin{aligned}
& f_{W_1,\cdots,W_n|N(t)}(w_1,\cdots,w_n|n) \\
= & \lim_{\Delta w_1\cdots\Delta w_n\downarrow 0} \frac{\mathbb{P}(w_i \le W_i < w_i+\Delta w_i,\ i=1,2,\cdots,n|N(t)=n)}{\Delta w_1\cdots\Delta w_n},
\end{aligned}
$$

- 从而有

$$
\begin{aligned}
& f_{W_1,\cdots,W_n|N(t)}(w_1,\cdots,w_n|n)\Delta w_1\cdots\Delta w_n \\
= & \mathbb{P}(w_i \le W_i < w_i+\Delta w_i,\ i=1,2,\cdots,n|N(t)=n)+o(\Delta w_1\cdots\Delta w_n) \\
= & \frac{\mathbb{P}(w_i \le W_i < w_i+\Delta w_i,\ i=1,2,\cdots,n,\ N(t)=n)}{\mathbb{P}(N(t)=n)}+o(\Delta w_1\cdots\Delta w_n)
\end{aligned}
$$

- 其中事件 $\{w_i \le W_i < w_i+\Delta w_i,\ i=1,2,\cdots,n,\ N(t)=n\}$ 等价于

$$
\left\{
\begin{array}{l}
N(w_i+\Delta w_i)-N(w_i)=1,\ i=1,2,\cdots,n, \\
N(w_{i+1})-N(w_i+\Delta w_i)=0,\ i=1,2,\cdots,n-1, \\
N(w_1)=0,\ N(t)-N(w_n+\Delta w_n)=0
\end{array}
\right\}
$$

到达时间的有限维条件分布 (续)

- 由增量独立性, 上述事件的发生概率

$$\mathbb{P}\left(\left\{\begin{array}{l} N(w_i+\Delta w_i)-N(w_i)=1,\ i=1,2,\cdots,n, \\ N(w_{i+1})-N(w_i+\Delta w_i)=0,\ i=1,2,\cdots,n-1, \\ N(w_1)=0,\ N(t)-N(w_n+\Delta w_n)=0 \end{array}\right\}\right)$$

$$\begin{aligned} = & \prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}(N(w_i+\Delta w_i)-N(w_i)=1) \quad \text{(第一行)} \\ & \times\prod_{i=1}^{n-1}\mathbb{P}(N(w_{i+1})-N(w_i+\Delta w_i)=0) \quad \text{(第二行)} \\ & \times\mathbb{P}(N(w_1)=0)\times\mathbb{P}(N(t)-N(w_n+\Delta w_n)=0) \quad \text{(第三行)} \end{aligned}$$

- 基于 Taylor 展开, 第一行中

$$\begin{aligned} & {\color{red}\mathbb{P}(N(w_i+\Delta w_i)-N(w_i)=1)}=\mathbb{P}(N(\Delta w_i)=1) \\ = & \lambda\Delta w_i e^{-\lambda\Delta w_i}=\lambda\Delta w_i(1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-\lambda\Delta w_i)^k}{k!})=\lambda\Delta w_i+o(\Delta w_i) \end{aligned}$$

- 从而, 第一行

$$\prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}(N(w_i+\Delta w_i)-N(w_i)=1)=\lambda^n\prod_{i=1}^{n}\Delta w_i+o(\prod_{i=1}^{n}\Delta w_i)$$

到达时间的有限维条件分布 (续)

- 根据过程的增量平稳性, 第二行中

$$
\begin{aligned}
& \mathbb{P}(N(w_{i+1}) - N(w_i + \Delta w_i) = 0) \\
= \quad & \mathbb{P}(N(w_{i+1} - w_i - \Delta w_i) = 0) \\
= \quad & e^{-\lambda(w_{i+1} - w_i - \Delta w_i)}
\end{aligned}
$$

- 从而, 第二、三行

$$
\begin{aligned}
& \left[\prod_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}(N(w_{i+1}) - N(w_i + \Delta w_i) = 0)\right] \\
& \times \mathbb{P}(N(w_1) = 0) \times \mathbb{P}(N(t) - N(w_n + \Delta w_n) = 0) \\
= \quad & \left[\prod_{i=1}^{n-1} e^{-\lambda(w_{i+1} - w_i - \Delta w_i)}\right] e^{-\lambda w_1} \cdot e^{-\lambda(t - w_n - \Delta w_n)} \\
= \quad & e^{-\lambda(t - \sum_{i=1}^{n} \Delta w_i)}
\end{aligned}
$$

- 综上

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}(w_i \le W_i < w_i + \Delta w_i,\ i = 1, 2, \cdots, n,\ N(t) = n) \\
= &\left[\lambda^n \prod_{i=1}^{n} \Delta w_i + o(\prod_{i=1}^{n} \Delta w_i)\right] \cdot e^{-\lambda(t - \sum_{i=1}^{n} \Delta w_i)} \\
= &\lambda^n e^{-\lambda t} e^{\lambda \sum_{i=1}^{n} \Delta w_i} \prod_{i=1}^{n} \Delta w_i + o(\prod_{i=1}^{n} \Delta w_i)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&f_{W_1, \cdots, W_n | N(t)}(w_1, \cdots, w_n | n) \prod_{i=1}^{n} \Delta w_i \\
= &\frac{\mathbb{P}(w_i \le W_i < w_i + \Delta w_i,\ i = 1, 2, \cdots, n,\ N(t) = n)}{\mathbb{P}(N(t) = n)} + o(\prod_{i=1}^{n} \Delta w_i) \\
= &\frac{\lambda^n e^{-\lambda t} e^{\lambda \sum_{i=1}^{n} \Delta w_i} \prod_{i=1}^{n} \Delta w_i + o(\prod_{i=1}^{n} \Delta w_i)}{e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}} + o(\prod_{i=1}^{n} \Delta w_i) \\
= &\frac{n!}{t^n} e^{\lambda \sum_{i=1}^{n} \Delta w_i} \prod_{i=1}^{n} \Delta w_i + o(\prod_{i=1}^{n} \Delta w_i)
\end{aligned}
$$

$$f_{W_1,\cdots,W_n|N(t)}(w_1,\cdots,w_n|n)\prod_{i=1}^{n}\Delta w_i = \frac{n!}{t^n}e^{\lambda\sum_{i=1}^{n}\Delta w_i}\prod_{i=1}^{n}\Delta w_i + o(\prod_{i=1}^{n}\Delta w_i)$$

- 等式两边同除 $\prod_{i=1}^{n}\Delta w_i$, 并令 $\Delta w_i \downarrow 0,\ \forall i$, 得到

$$\begin{aligned}
& f_{W_1,\cdots,W_n|N(t)}(w_1,\cdots,w_n|n) \\
= & \lim_{\Delta w_i\downarrow 0,\ \forall i}\frac{\frac{n!}{t^n}e^{\lambda\sum_{i=1}^{n}\Delta w_i}\prod_{i=1}^{n}\Delta w_i + o(\prod_{i=1}^{n}\Delta w_i)}{\prod_{i=1}^{n}\Delta w_i} \\
= & \frac{n!}{t^n}\lim_{\Delta w_i\downarrow 0,\ \forall i} e^{\lambda\sum_{i=1}^{n}\Delta w_i} \\
= & \frac{n!}{t^n}
\end{aligned}$$

- 得证
- 各个事件发生的联合时刻的密度是均匀的 (二维情形对应均匀分布于三角形 $0 < w_1 < w_2 \le t$ 中), 与 $w_1,\cdots,w_n$ 的取值无关
- 该密度函数, 恰好是从 $[0,t]$ 区间上的均匀分布中, 独立抽取 n 个样本 $U_1,\cdots,U_n$, 并组成次序统计量 $U_{(1)} \le \cdots \le U_{(n)}$ 的联合分布

思考与讨论

- 如何理解 Poisson 过程到达时间 $\{W_n\}$ 的有限维条件分布满足

$$f_{W_1,\cdots,W_n|N(t)}(w_1,\cdots,w_n|n)=\frac{n!}{t^n}$$

- 在其证明过程中主要用到了 Poisson 过程的哪些性质?

例 2.2

- 顾客依速率为 λ 的 Poisson 过程到达火车站
- 火车在时刻 t 离站
- 求在 $(0, t]$ 区间里到达顾客的平均总等待时间是多少?

解:

- 记第 i 位顾客的到达时间为 W_i
- 则其等待至发车的时间为 $t - W_i$
- 在 $(0, t]$ 时间段内, 总共到达的顾客人数为 $N(t)$
- 总等待时间为

$$\sum_{i=1}^{N(t)} (t - W_i)$$

- 求其期望可以分两步走, 先求条件期望

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{N(t)} (t - W_i) \middle| N(t) = n \right)$$

例 2.2(续)

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\Big(\sum_{i=1}^{N(t)}(t-W_i)\Big|N(t)=n\Big) \\ = \quad & \mathbb{E}\Big(\sum_{i=1}^{\color{red}{n}}(t-W_i)\Big|N(t)=n\Big) \\ = \quad & nt-\mathbb{E}\Big(\sum_{i=1}^{n}W_i\Big|N(t)=n\Big) \end{aligned}$$

- 利用定理 2.1 关于到达时间的有限维条件分布的结论
$$(W_1,\cdots,W_n|N(t)=n)\stackrel{d}{=}(U_{(1)},\cdots,U_{(n)}),$$
其中 $(U_{(1)},\cdots,U_{(n)})$ 是 $[0,t]$ 上的均匀分布中, 抽取 n 个样本组成的次序统计量
- 因此有
$$\mathbb{E}\Big(\sum_{i=1}^{n}W_i\Big|N(t)=n\Big)=\mathbb{E}\sum_{i=1}^{n}U_{(i)}=\mathbb{E}\sum_{i=1}^{n}U_i=\frac{nt}{2}$$

到达时间的有限维条件分布 (续)

总到达时间的条件期望: $\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n W_i \middle| N(t)=n\right) = \frac{nt}{2}$

- 从而, 总等待时间的条件期望

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N(t)}(t-W_i)\middle| N(t)=n\right] = nt - \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} W_i \middle| N(t)=n\right) = \frac{nt}{2}$$

- 利用条件期望, 求期望

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N(t)}(t-W_i)\right] \\
= \quad & \mathbb{E}\left\{\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N(t)}(t-W_i)\middle| N(t)\right]\right\} \\
= \quad & \mathbb{E}\frac{N(t)t}{2} = \frac{t}{2}\mathbb{E}N(t) = \frac{\lambda t^2}{2}
\end{aligned}$$

- 乘客的平均总等待时间与 t^2 成正比, 比例因子大小取决于 Poisson 过程的强度 λ

在标准 Poisson 过程的基础上, 有很多形式的推广

- 非齐次 Poisson 过程:
  - ▷ 到达率 λ 不再是常数, 而是 t 的函数
- 复合 Poisson 过程:
  - ▷ 每发生一次事件, 附带一个随机变量 (如费用, 损失等)
  - ▷ 记录总费用的随机过程
- 更新过程:
  - ▷ 当两次事件发生的间隔时间 X_i, 不再服从指数分布, 而是服从一般分布
- $\cdots$

非齐次 Poisson 过程

- 对于齐次 Poisson 过程, 强度 λ 是事件发生概率与区间长度的比例因子

$$\mathbb{P}(N(t+h)-N(t)=1)=\lambda h\cdot e^{-\lambda h}=\lambda h+o(h)$$

- 如果允许这一比例因子依赖于时间 t, 就得到了非齐次 Poisson 过程, 也即将 Poisson 过程等价定义中的假定 (3) 改为假定 (3'):

$$\mathbb{P}(N(t+h)-N(t)\geq 1)=\lambda(t)h+o(h)$$

- 假设 (1)(4) 保持, 假设 (2) 不再需要, 见后续讨论
- 命题 2.3 在非齐次假定下, 可以推导出

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(N(t+h)-N(t)=k)\\=\ &\frac{\left(\int_t^{t+h}\lambda(u)du\right)^k e^{-\int_t^{t+h}\lambda(u)du}}{k!},\quad k=0,1,\cdots\end{aligned}$$

- 证明方法与前类似, 用 $\int_t^{t+h}\lambda(u)du$ 替代原先的 λh

例 2.3 记录值

- 设 $X_1, X_2, \cdots$ 是一系列独立同分布的连续型随机变量
- 其分布函数为 $F(t)$, 密度函数为 $f(t)$
- 若用 X_i 代表某元件的寿命长度, 则可以定义元件的失效率为

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)}$$

注意到 $\lambda(t)\Delta t = \frac{f(t)\Delta t}{1 - F(t)} \approx \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{1 - F(t)} = \mathbb{P}(X_1 \in (t, t + \Delta t] | X_1 \geq t)$

- 也即给定元件在时刻 t 仍正常工作的条件下, 在时刻 t 下一瞬间失效的条件概率密度 (对应非齐次泊松过程的强度函数)

- 记 $X_0 \equiv 0$, 当 $X_m > \max\{X_0, \cdots, X_{m-1}\}$ 时, 则称创造了一次记录, X_m 即为相应的寿命记录值 (注意区分 m 与记录次数)
- 以 $N(t)$ 记小于或等于 t 的记录值个数, 则 $N(t)$ 是一个计数过程
- 若有寿命记录值取值为 t, 则称在 (计数过程的连续的) 时刻 t 发生了一次事件

例 2.3 (续)

- 若第 n 次记录值小于 t, 则记录值达到 t 或 t 以上所需的记录次数一定大于 n, 也即
$$N(t) > n$$
- 试证明 $N(t)$ 是一个以 $\lambda(t) = \frac{f(t)}{1-F(t)}$ 为强度函数的非齐次 Poisson 过程

证明:

- 从定义出发, 这里仅证明假定 (3'):
$$\mathbb{P}(N(t+h) - N(t) \geq 1) = \lambda(t)h + o(h)$$
- 过程 $N(t)$ 在 $(t, t+h]$ 上发生了事件, 等价于首个取值大于 t 的 X_i 落在 $(t, t+h]$ 上

$$\{N(t+h) - N(t) \geq 1\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \left\{X_i \in (t, t+h],\ X_j \leq t,\ j = 0, 1, \cdots, i-1\right\}$$

例 2.3 (续)

$$
\begin{aligned}
& \mathbb{P}\left(N(t+h)-N(t) \geq 1\right) \\
= \ & \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}\left\{X_i \in (t, t+h],\ X_j \leq t,\ j=0,1,\cdots,i-1\right\}\right) \quad \text{(等价事件)} \\
= \ & \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(X_i \in (t, t+h],\ X_j \leq t,\ j=1,\cdots,i-1\right) \quad \text{(利用事件的不相容性)} \\
= \ & \sum_{i=1}^{\infty} [F(t+h)-F(t)] F^{i-1}(t) \quad (\{X_i\}\ \text{是相互独立的}) \\
= \ & \frac{F(t+h)-F(t)}{1-F(t)} \\
= \ & \frac{f(t)h+o(h)}{1-F(t)} \quad \text{(利用概率密度定义)} \\
= \ & \lambda(t)h+o(h)
\end{aligned}
$$

得证

思考与讨论

- 非齐次 Poisson 过程与齐次 Poisson 过程的区别是什么?
- 非齐次 Poisson 过程的增量服从 Poisson 分布吗? 其增量是平稳独立的吗? 可结合上例说明

复合 Poisson 过程

- 事件的发生依从于一个通常的 Poisson 过程 $N(t)$
- 每一次事件附带一个随机变量 Y_i, 代表该次事件对应的费用、损失或收益
- 假设 Y_i 为独立同分布的, 分布函数为 $G(y)$
- 累计值过程

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$$

  就是复合 Poisson 过程
- 在第 1 章的例 1.12 中, 我们计算过 $S(t)$ 的均值和方差

$$\mathbb{E}S(t) = \lambda t \cdot \mathbb{E}Y_1, \quad \mathrm{Var}S(t) = \lambda t[\mathrm{Var}Y_1 + (\mathbb{E}Y_1)^2]$$

- 若取 $Y_i \equiv 1, \ \forall i$, 则复合 Poisson 过程退化为通常的 Poisson 过程

复合 Poisson 过程 (续)

例 2.4

- 假设股票交易市场中, 某只股票的被交易次数是以 λ 为速率的 Poisson 过程
- 记第 $k-1$ 次与第 k 次易手期间, 股票价格的变化为 Y_k
- 假设 Y_k 是独立同分布随机变量, 分布函数为 $G(y)$, 与 $N(t)$ 独立
- 复合 Poisson 过程

$$S(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k$$

代表了到时刻 t 为止, 历次交易的股票总价格变化, 求 $S(t)$ 的分布

解: 可推导出, 独立同分布随机变量和的分布, 是自身分布函数的卷积

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y_1+Y_2\le y) &= \mathbb{E}\mathbf{I}_{\{Y_1+Y_2\le y\}} = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left(\mathbf{I}_{\{Y_1+Y_2\le y\}}|Y_2\right)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbb{P}(Y_1+Y_2\le y|Y_2)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty}\mathbb{P}(Y_1\le y-Y_2|Y_2=z)dz \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} G(y-z)dG(z) \triangleq G*G(y) \triangleq G^{(2)}(y) \end{aligned}$$

- 利用

$$\mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k \le y\right) = G^{(n)}(y) = G * G^{(n-1)}(y) = \underbrace{G * \cdots * G}_{n个}(y)$$

- 两步走求 $S(t)$ 的分布

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S(t) \le x) &= \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{N(t)} Y_k \le x\right) = \mathbb{E}\left[\mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{N(t)} Y_k \le x\right) \middle| N(t)\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{N(t)} Y_k \le x \middle| N(t) = n\right) \mathbb{P}(N(t) = n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k \le x\right) \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} \qquad (N(t) \text{ 与 } \{Y_k\} \text{ 独立}) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} G^{(n)}(x)
\end{aligned}$$

思考与讨论

- 复合 Poisson 过程与 Poisson 过程的关系是什么?
- 复合 Poisson 过程的增量服从 Poisson 分布吗? 其增量是平稳独立的吗?

▷ 提示: 考虑

$$S(t)-S(u)=\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i-\sum_{i=1}^{N(u)} Y_i=\sum_{i=N(u)+1}^{N(t)} Y_i$$

其中 Y_i 是独立同分布的

Poisson 过程等价定义 2

若计数过程 $\{N(t),\ t \geq 0\}$ 每次事件发生的时间间隔相互独立, 且均服从参数为 λ 的指数分布, 则该过程是强度为 λ 的 Poisson 过程.

- Poisson 过程事件发生的间隔时间 $X_i \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$
- 更新过程将间隔时间分布推广到一般分布

定义 2.3 更新过程

如果 $X_i,\ i = 1, 2, \cdots$ 为一系列独立同分布的非负随机变量. 记 $W_0 = 0$, $W_n = \sum_{i=1}^n X_i$. W_n 表示第 n 次事件的发生时刻, 则称

$$N(t) = \max\{n : W_n \leq t\}$$

为更新过程.

- $N(t)$ 代表到时刻 t 时, 发生事件的总次数
- $m(t) \triangleq \mathbb{E}N(t)$ 称为更新函数: 到 t 时刻为止, 事件发生的平均次数
- W_i 被称为更新点: 在这些点上, 过程重新开始

命题 2.4 更新过程的一维分布

设 $F(t)$ 是事件发生间隔时间 X_i 的分布函数. 则更新过程 $N(t)$ 的一维分布为

$$\mathbb{P}(N(t)=n)=F^{(n)}(t)-F^{(n+1)}(t).$$

更新函数 $m(t)=\mathbb{E}N(t)=\sum_{n=1}^{\infty}F^{(n)}(t)$.

- $F^{(n)}(t)$ 表示 $F(t)$ 的 n 重卷积, 也即 $W_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$ 的分布函数

证明:

- 与 Poisson 过程类似, 对于更新过程也有

$$\{N(t)\geq n\}=\{W_n\leq t\}$$

- {时刻 t 时已发生过 n 次更新} $=$ {第 n 次更新的发生时刻在 t (含) 之前}

命题 2.4 证明 (续)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N(t)=n) &= \mathbb{P}(N(t)\geq n)-\mathbb{P}(N(t)\geq n+1)\\ &= \mathbb{P}(W_n\leq t)-\mathbb{P}(W_{n+1}\leq t)\\ &= F^{(n)}(t)-F^{(n+1)}(t)\end{aligned}$$

- 为求解更新函数 $m(t)=\mathbb{E}N(t)$, 引入示性函数

$$\mathbf{I}_n=\begin{cases}1, & \text{若第 } n \text{ 次更新发生在 } (0,t] \text{ 中}\\ 0, & \text{其它情形}\end{cases}$$

- 于是有 $N(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{I}_n$, 且注意到 $\{\mathbf{I}_n=1\}=\{N(t)\geq n\}$. 故更新函数

$$\begin{aligned}m(t) &= \mathbb{E}N(t)=\mathbb{E}\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{I}_n=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{E}\mathbf{I}_n\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(\mathbf{I}_n=1)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(N(t)\geq n)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(W_n\leq t)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}F^{(n)}(t)\end{aligned}$$

例 2.5 从 Poisson 过程等价定义 2 推导其分布函数和更新函数

- 对于 Poisson 过程 $N(t)$, 其间隔时间 $X_i \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, 间隔时间的分布函数为 $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$
- 第 n 次更新的发生时刻: $W_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ 服从 Gamma 分布

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(N(t) \geq n) &= \mathbb{P}(W_n \leq t) \\
&= F^{(n)}(t) = \sum_{j=n}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!}
\end{aligned}
$$

- 再运用命题 2.4, 得

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(N(t) = n) &= \mathbb{P}(N(t) \geq n) - \mathbb{P}(N(t) \geq n+1) \\
&= F^{(n)}(t) - F^{(n+1)}(t) \\
&= \sum_{j=n}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!} - \sum_{j=n+1}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!} \\
&= e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}
\end{aligned}
$$

也即 $N(t) \sim \mathrm{Poisson}(\lambda t)$

例 2.5 (续)

- 运用命题 2.4, Poisson 过程的更新函数:

$$
\begin{aligned}
m(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} F^{(n)}(t) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=n}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!} \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{j} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!} \qquad \text{(交换求和顺序)} \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} j \cdot e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!} = \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{(j-1)!} \\
&= \lambda t \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} = \lambda t
\end{aligned}
$$

- 得证

- 根据上述例子观察到, 对于 Poisson 过程, 有
$$\frac{m(t)}{t} = \frac{\mathbb{E}N(t)}{t} = \frac{\lambda t}{t} = \lambda = \frac{1}{\mathbb{E}X_1}$$
其中 $X_1 \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ 是事件发生的间隔时间

- 对于更新过程, 上式在极限情况下成立

基本更新定理

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathbb{E}N(t)}{t} = \frac{1}{\mathbb{E}X_1}$$

- 单位时间内事件 (更新) 发生的平均次数 $\frac{\mathbb{E}N(t)}{t}$, 趋近于单个事件发生的平均时间的倒数 $\frac{1}{\mathbb{E}X_1}$
- 由于一般分布不具备无记忆性, 故两者并不总是相等, 而取决于时间区间的起止点
- 证明见 Ross 的随机过程 (第二版) 定理 3.3.4

思考与讨论

- 更新过程与 Poisson 过程的关系是什么?
- 更新过程的增量服从 Poisson 分布吗? 其增量是平稳独立的吗?

$$N(t) - N(s) = \max\{n : \sum_{i=1}^{n} X_i \leq t\} - \max\{n : \sum_{i=1}^{n} X_i \leq s\}$$

其中 X_i 是独立同分布的非负随机变量

▷ 提示: 考虑 $X_i \sim U(1, 2)$

$$\mathbb{P}(N(1) - N(0)) \text{ 与 } \mathbb{P}(N(2) - N(1))$$

$$\mathbb{P}(N(2)-N(1.1) = 1|N(1.1)-N(1) = 1) \text{ 与 } \mathbb{P}(N(2)-N(1.1) = 1|N(1.1)-N(1) = 0)$$

习题 2:

- 2.1 节作业: 3, 4, 5
- 2.2 节作业: 8, 9, 10
- 2.3 节作业: 11, 13, 14