

Q1. (25 分)

Floyd-Warshall 算法的空间需求是 $\Theta(n^3)$ ，因为要计算 $d_{ij}^{(k)}$ ，其中 $i, j, k = 1, 1, 2, \dots, n$ 。有同学提出可以将 Floyd-Warshall 算法修改为如下形式，从而将 Floyd-Warshall 算法的空间需求降低到 $\Theta(n^2)$ 。请问新的 Floyd-Warshall-New 算法是否正确，如正确，请证明，否则，请给出反例。

Algorithm 1 FLOYD-WARSHALL-NEW(W)

```

1:  $n = W.rows$ 
2:  $D = W$ 
3: for  $k = 1$  to  $n$  do
4:   for  $i = 1$  to  $n$  do
5:     for  $j = 1$  to  $n$  do
6:        $d_{ij} = \min(d_{ij}, d_{ik} + d_{kj})$ 
7:     end for
8:   end for
9: end for
10: Return  $D$ 

```

Q2. (25 分)

给定一个带权有向图 $G = (V, E, w)$ 和顶点 $s \in V$ 。图 G 具有以下性质，对于每个顶点 $v \in V$ ，从 s 到 v 的某个最小权重路径最多经过 k 条边，请描述一个时间复杂度为 $O(|V| + k|E|)$ 的算法来计算从 s 到每个 $v \in V$ 的最短路径权重。

Q3. (15 分)

假定在一个权重函数为 w 的有向图 G 上运行 Johnson 算法。证明：如果图 G 包含一条权重为 0 的环路 c ，那么对于环路 c 上的每条边 (u, v) ， $\hat{w}(u, v) = 0$ 。

Q4. (35 分)

小曹同学有一辆自行车，他想参加一年一度的自行车登山赛。他手里有一张地图，上面描绘了：

- n 个站点，每个站点 x_i 都标有其正整数海拔高度 e_i 和是否包含补给站；
- 连接它们之间的 r 条道路，每条道路 r_j 都标有正整数 t_j ，表示小曹沿任一方向行驶所需的行驶时间。

站点连接多条道路, 但每个站点连接的平均道路数小于 5, 即 ($r \leq 5n$)。小曹需要从起点 s 到终点 t , 同时要满足以下条件:

- 小曹的体力值为正整数 $g < n$: 他最多有 g 单位的体力 (开始时体力值是满的)。他可以在沿途任何标有补给站的站点进行休息并恢复体力 (任何整数单位)。他每恢复一单位体力需要休息 t_G 的时间。
- 骑车只有在上坡时才消耗体力。具体来说, 如果他从海拔高度分别为 e_i 和 e_j 的站点 x_i 驾驶到交叉点 x_j , 如果 $e_j > e_i$, 小曹将使用 $e_j - e_i$ 单位的体力值, 否则将不消耗体力。

给定自行车登山赛的地图, 请描述一个 $O(n^2 \log n)$ 时间复杂度的算法, 以返回一条到达终点的最快路线, 并始终保持比赛过程中严格保留正量的体力值 (假定一定存在这样的路线)。