随机过程 B
第 3 章 Markov 过程 (上)

Lecturer: 解扬洋

E-mail: xieyclio@ustc.edu.cn

本章提纲

- 考虑随机过程 $\{X_n,\ n=0,1,\cdots\}$
  - 下标 n 通常代表时间
  - 如果 Markov 链的下标取值是连续的, 则称连续时间 Markov 链
- X_n 取值的状态空间为有限集或可列集
  - 如状态空间为 $\{0,1,2,\cdots\}$
  - $X_n=i$ 表明过程在时刻 n 时, 处于状态 i
  - 如果 Markov 链的状态空间为连续的, 则称为 Markov 过程

定义 3.1 离散时间 Markov 链

如果对任意一列状态 $i_0,i_1,\cdots,i_{n-1},i,j$, 及任意时间 $n\ge 0$, 随机过程 $\{X_n,\ n=0,1,\cdots\}$ 满足 Markov 性, 也即

$$\mathbb{P}(X_{n+1}=j|X_0=i_0,\cdots,X_{n-1}=i_{n-1},X_n=i)=\mathbb{P}(X_{n+1}=j|X_n=i),$$

则称 X_n 为离散时间 Markov 链.

- Markov 性的含义: 已知现在, 过去与未来无关
- 马氏性和增量独立性有什么联系?

定义 3.2 一步转移概率

设 $\{X_n\}$ 为一离散时间 Markov 链. 给定 X_n 在状态 i 时, X_{n+1} 处于状态 j 的条件概率 $\mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i)$, 称为 Markov 链的**一步转移概率**, 记作 $P_{i,j}^{n,n+1}$.

- 当一步转移概率**与 n 无关**时, 称该 Markov 链有**平稳转移概率**, 记为 P_{ij}
- 拥有平稳转移概率的 Markov 链是我们后续讨论的主要情形, 也称时间齐性 Markov 链
- 拥有平稳转移概率的 Markov 链是平稳过程吗? 是增量平稳过程吗? 考虑两状态马氏链 $P_{00} = 1$ 且 $P_{10} = 1$, 初始状态 $X_0 = 1$

- 由概率的非负性和正则性可知:

$$P_{ij} \geq 0,\ \forall i,j,\quad \text{且}\quad \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij} = 1,\ \forall i$$

  - ▷ P_{ii} 对应留在当前状态, 也视为一种转移
- 将所有 P_{ij} 排列成一个方阵, 即是概率转移矩阵

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} & \cdots \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \\ P_{i0} & P_{i1} & P_{i2} & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \end{pmatrix}$$

- 矩阵的第 $i+1$ 行, 就是给定 $X_n = i$ 时, X_{n+1} 的条件概率分布
- 若状态空间是可列集, 则方阵是无穷维的
- 若状态空间是有限集, 则方阵的阶数是状态空间中的状态总数

例 3.1 直线上的随机游动

- 一个粒子, 在直线上运动, 每次移动一个单位距离
- 粒子所处的位置坐标, 即是过程的状态
- 当粒子处于位置 j 时, 其游动到 $j+1$ 的概率为 p, 游动到 $j-1$ 的概率为 $1-p$
- 假设 0 时刻粒子处于原点: $X_0 = 0$
- 则粒子在时刻 n 所处的位置 X_n, 就是一个平稳转移概率 Markov 链, 对应的转移概率为

$$P_{jk} = \begin{cases} p, & k = j+1, \\ q, & k = j-1, \\ 0, & \text{其它}k. \end{cases}$$

- 转移概率矩阵是怎样的?
- 若 $p = q = \frac{1}{2}$, 则称该过程为简单对称随机游动

例 3.1(续)

- 简单对称随机游动，可以运用于刻画公平赌博
- 考虑出现正、反面概率均为 $\frac{1}{2}$ 的扔硬币游戏
- 两位赌徒分别赌出现正或反面，每次输赢为 1 元
- X_n 代表赌徒甲在第 n 次赌博后的赌资数
- 假设赌徒甲有赌本 a，乙有赌本 b 元
- 请问赌徒甲在自己输光前使乙输光 (也即甲最终获胜) 的概率有多大?

解:

- 将状态设为赌徒甲的赌资
- 注意到状态 0 和 $a+b$ 都是吸收态: $P_{00} = P_{a+b,a+b} = 1$
- 假设赌徒甲赌资为 a 时，在自己输光前使乙输光的概率为 $\phi(a)$
- 则有 $\phi(0) = 0$, $\phi(a+b) = 1$，以及递推公式

$$\phi(k) = p \cdot \phi(k+1) + q \cdot \phi(k-1), \; 1 \leq k \leq a+b-1$$

例 3.1(续)

- 由于 $p=q=\frac{1}{2}$, 有

$$\phi(k)=\frac{1}{2}\phi(k+1)+\frac{1}{2}\phi(k-1),\ 1\leq k\leq a+b-1$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow\quad & \phi(k+1)-\phi(k)=\phi(k)-\phi(k-1)=c\\ \Rightarrow\quad & \phi(k)=\sum_{i=1}^{k}[\phi(i)-\phi(i-1)]+\phi(0)=ck+d\end{aligned}$$

- 代入边界条件 $\phi(0)=0$, $\phi(a+b)=1$, 解得 $c=\frac{1}{a+b}$ 且 $d=0$, 则

$$\phi(k)=\frac{k}{a+b}$$

- 则甲最终获胜的概率为 $\phi(a)=\frac{a}{a+b}$
  - ▷ 赌本越大的人, 最终获胜的概率越高

- 一个 Markov 链的概率特性 (有限维分布), 可由它的初始状态 (或初始状态的概率分布) 及转移概率矩阵完全确定
- 记初始状态的分布为: $\mathbb{P}(X_0 = i_0) = p_{i_0}$
- 则有限维分布可以如下计算:

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \cdots, X_n = i_n) \\ = & \mathbb{P}(X_0 = i_0, \cdots, X_{n-1} = i_{n-1}) \mathbb{P}(X_n = i_n | X_0 = i_0, \cdots, X_{n-1} = i_{n-1}) \\ = & \mathbb{P}(X_0 = i_0, \cdots, X_{n-1} = i_{n-1}) P_{i_{n-1}, i_n} \end{aligned}$$

由归纳法可得

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \cdots, X_n = i_n) \\ = & p_{i_0} P_{i_0, i_1} P_{i_1, i_2} \cdots P_{i_{n-1}, i_n} \end{aligned}$$

- 也即, 过程的有限维分布, 由初始状态分布 (确定 p_{i_0}) 及转移概率矩阵 (确定 $P_{i_0, i_1} P_{i_1, i_2} \cdots P_{i_{n-1}, i_n}$) 完全确定

- 定义
$$P_{ij}^{(n)} = \mathbb{P}(X_n = j|X_0 = i)$$
为 n 步转移概率
- 表示初始状态为 i, 经过 n 步后, 转移到状态 j 的概率
- 对于平稳转移概率 Markov 链, 有
$$\mathbb{P}(X_{m+n} = j|X_m = i) = P_{ij}^{(n)}$$
- 将 $P_{ij}^{(n)}$ 排成方阵 $\mathbf{P}^{(n)}$, 称为 n 步转移概率矩阵
- 进一步, n 步转移概率矩阵和一步转移概率矩阵的关系为:
$$\mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P} \times \mathbf{P} \times \cdots \times \mathbf{P} = \mathbf{P}^n$$
- n 步转移概率矩阵, 就是 n 个一步转移概率矩阵相乘, 证明见定理 3.1(见下页)

定理 3.1　n 步转移概率递推方程

Markov 链的 n 步转移概率矩阵满足

$$P_{ij}^{(n)} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik} P_{kj}^{(n-1)},$$

其中我们约定 $P_{ii}^{(0)} = 1$ 以及当 $i \neq j$ 时, $P_{ij}^{(0)} = 0$.

证明:

- 注意到从状态 i 经过 n 步转移到 j, 必定在第一步要转移到某状态 k, 再从 k 经 $n-1$ 步转移到 j
- 在第一步转移到不同状态 k 的事件是互不相容的
- 根据以上两点, 有 (接下页)

n 步转移概率 (续)

$$\begin{aligned} P_{ij}^{(n)} &= \mathbb{P}(X_n = j | X_0 = i) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_n = j, X_1 = k | X_0 = i) \quad \text{(分解为互不相容事件)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_1 = k | X_0 = i) \mathbb{P}(X_n = j | X_1 = k, X_0 = i) \quad \text{(利用条件概率定义展开)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik} P_{kj}^{(n-1)} \quad \text{(利用过程的 Markov 性)} \end{aligned}$$

- 上式对应的矩阵形式为 $\mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P} \times \mathbf{P}^{(n-1)}$
- 运用归纳法, 即可证明 $\mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P}^n$
- 更进一步, 对于任意 $m, n \geq 0$, 有 $\mathbf{P}^{(m+n)} = \mathbf{P}^{(n)} \times \mathbf{P}^{(m)}$
- 将其写成元素形式, 即是 Chapman-Kolmogorov 方程

$$P_{ij}^{(m+n)} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}^{(n)} P_{kj}^{(m)}$$

例 3.2 Ehrenfest 模型

- 描述薄膜间分子扩散
- 设想薄膜的两侧为两个罐子, 分子是装在罐子里的小球
- 假定两个罐子总共装有 $2a$ 个球
  - ▷ A 罐有 k 个
  - ▷ B 罐有 $2a-k$ 个
- 分子扩散相当于从 $2a$ 个球中, 每次等概率地任选一球放进另一罐子
- 球会在两罐间来回运动, 且倾向于从球多的罐子移向球少的罐子
  - ▷ 由于球多的罐子, 被选中的概率大
- 记在 n 时刻, A 罐有 Y_n 个球
  - ▷ 则 B 罐有 $2a-Y_n$ 个球
- 定义 $X_n = Y_n - a$ 为 A 罐中比平均球数多出的球的数量
  - ▷ 则 $\{X_n\}$ 是一 Markov 链, 由于其转移概率只与前一时刻 A、B 罐中的球数有关 (也即转移概率分布由 X_{n-1} 取值唯一确定)
  - ▷ X_n 只能取有限个状态: $-a, -a+1, \cdots, -1, 0, 1, \cdots, a-1, a$

例 3.2 (续)

- X_n 的转移概率是平稳的, 为

$$P_{ij} = \begin{cases} \frac{a-i}{2a}, & \text{当 } j = i+1, \\ \frac{a+i}{2a}, & \text{当 } j = i-1, \\ 0, & \text{其它情形.} \end{cases}$$

- 这是由于, $X_n = Y_n - a = i$ 时
  - ▷ A 罐有 $a+i$ 个球
  - ▷ B 罐有 $a-i$ 个球
- 当 $j = i+1$ 时, 意味着分子从 B 罐移向 A 罐
  - ▷ B 罐被选中的概率为 $\frac{a-i}{2a}$
- 当 $j = i-1$ 时, 同理 $\cdots$
- 人们关心系统处于平稳状态时, 分子的概率分布 (平稳分布)
  - ▷ 也即转移前后的概率分布不变: $\boldsymbol{\pi}\mathbf{P} = \boldsymbol{\pi}$

例 3.3 理想化的遗传模型

- 遗传的要素是染色体, 遗传性质的携带者是位于染色体上的基因
- 控制同一生物特征的不同基因称为等位基因, 成对出现, 记为 A 和 a
- 在一个总体中, 基因 A 和 a 所占的比例是基因频率, 记为 p 和 q, 满足 $p+q=1$
- 现假设总体中的个体数为 N, 下一代个体总数与上一代相同
- 则第二代基因型是由 $2N$ 次基因选择的 Bernoulli 试验所确定
- 若第 n 代中 A 型基因出现 j 次, a 型基因出现 $2N-j$ 次
  - ▷ 则 A 基因的频率为 $p_j = \frac{j}{2N}$
  - ▷ 则 a 基因的频率为 $q_j = \frac{2N-j}{2N}$
- 记 X_n 为第 n 代中 A 基因的数量, 则 X_n 是 Markov 链
  - ▷ 因转移概率只与上一代的基因频率有关
  - ▷ 其转移概率是平稳的, 为

$$P_{jk} = C_{2N}^k p_j^k q_j^{2N-k} = C_{2N}^k \left(\frac{j}{2N}\right)^k \left(\frac{2N-j}{2N}\right)^{2N-k}$$

例 3.4 排队问题

- 顾客在服务台排队等候服务
- 每个服务周期，服务一位顾客
- 设第 n 个服务周期中，到达服务台的顾客数为 Y_n，设 Y_n 相互独立，其分布为

$$\mathbb{P}(Y_n = k) = p_k,\ k = 0, 1, 2, \cdots,\ \text{且} \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$$

- 记 X_n 为服务周期 n 开始时，服务台前排队的顾客数，则有

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n - 1 + Y_n, & \text{若} X_n \geq 1, \\ Y_n, & \text{若} X_n = 0. \end{cases}$$

- 先服务、后到达
- 则 X_n 为一 Markov 链，由于

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_0 = i_0, \cdots, X_n = i) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i)$$

例 3.4 (续)

- 排队顾客人数 X_n 的转移概率矩阵为:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & \cdots \\ p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & \cdots \\ 0 & p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & \cdots \\ 0 & 0 & p_0 & p_1 & p_2 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & p_0 & p_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \end{pmatrix}$$

- 为什么第一、二行相同? 从第三行起, 前面的 0 代表什么含义?
- 当平均到达顾客数 $\mathbb{E}Y_n > 1$ 时, 排队长度将趋于无穷大
- 当 $\mathbb{E}Y_n < 1$ 时, 系统可能趋于一个平衡状态 $(n \to \infty)$
  - ▷ 存在平稳分布: $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{P}$
  - ▷ 在平稳分布下, 可计算平均队长: $\sum_{i=0}^{\infty} i \cdot \pi_i$
- $\mathbb{E}Y_n = 1$ 时如何? 考虑实际的服务率小于 1

例 3.5

- 考虑一个包含 {0,1,2} 三个状态的 Markov 链, 其转移概率为

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ p & q & r \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  其中 $p, q, r > 0$ 且 $p + q + r = 1$.
- 注意到当系统进入状态 0 或 2, 状态就不再改变而被吸收了
- 从状态 1 出发, 最终被状态 0 (或 2) 吸收的概率是多少?
- 平均需多长时间, 过程会进入吸收态?

解:

- 定义

$$T = \{\text{过程进入吸收态的时刻}\} = \min\{n \geq 0 | X_n = 0 \text{ 或 } X_n = 2\}$$

- 以状态 0 的吸收概率为例 (状态 2 可类似求解), 我们记

$$u = \mathbb{P}(\{\text{从状态 1 出发, 过程进入状态 0}\}) = \mathbb{P}(X_T = 0 | X_0 = 1)$$

$$v = \mathbb{P}(\{\text{从状态 1 出发, 过程进入吸收态的平均时间}\}) = \mathbb{E}(T | X_0 = 1)$$

- 根据全概率公式

$$\begin{aligned}
u &= \mathbb{P}(X_T = 0 | X_0 = 1) \\
&= \sum_{k=0}^{2} \mathbb{P}(X_T = 0, X_1 = k | X_0 = 1) \quad \text{(根据第一步进入的状态进行事件分解)} \\
&= \sum_{k=0}^{2} \mathbb{P}(X_T = 0 | X_0 = 1, X_1 = k)\mathbb{P}(X_1 = k | X_0 = 1) \quad \text{(根据条件概率定义)} \\
&= \mathbb{P}(X_T = 0 | X_0 = 1, X_1 = 0) \cdot p + \mathbb{P}(X_T = 0 | X_0 = 1, X_1 = 1) \cdot q \\
&\quad + \mathbb{P}(X_T = 0 | X_0 = 1, X_1 = 2) \cdot r \\
&= 1 \cdot p + u \cdot q + 0 \cdot r = p + qu
\end{aligned}$$

- 其中 $\mathbb{P}(X_T = 0 | X_0 = 1, X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_T = 0 | X_0 = 1) = u$, 见讨论
- 根据 $u = p + qu$, 解得 $u = \frac{p}{1-q} = \frac{p}{p+r} < 1$

Markov 链例子 (续)

- 利用同样技巧, 求解从状态 1 出发, 被吸收的平均时间

$$
\begin{aligned}
v &= \mathbb{E}(T|X_0=1) = \sum_{n=0}^{\infty} n\mathbb{P}(T=n|X_0=1) \\
&= \sum_{k=0}^{2}\sum_{n=0}^{\infty} n\mathbb{P}(T=n, X_1=k|X_0=1) \quad \text{(互斥事件分解)} \\
&= \sum_{k=0}^{2}\sum_{n=0}^{\infty} n\mathbb{P}(T=n|X_0=1, X_1=k)\mathbb{P}(X_1=k|X_0=1) \quad \text{(根据条件概率定义)} \\
&= \sum_{k=0}^{2} \mathbb{E}(T|X_0=1, X_1=k)\mathbb{P}(X_1=k|X_0=1) \quad \text{(条件期望定义)} \\
&= \mathbb{E}(T|X_0=1, X_1=0)\cdot p + \mathbb{E}(T|X_0=1, X_1=1)\cdot q + \mathbb{E}(T|X_0=1, X_1=2)\cdot r \\
&= 1\cdot p + (1+v)\cdot q + 1\cdot r = 1 + qv
\end{aligned}
$$

- 其中 $\mathbb{E}(T|X_0=1, X_1=1) = \mathbb{E}(T|X_1=1)+1 = \mathbb{E}(T|X_0=1)+1 = 1+v$
- 根据 $v = 1+qv$, 解得 $v = \frac{1}{1-q} > 1$
- $v = \frac{1}{1-q} > 1$: $q = P_{11}$ 越大, 进入吸收态的平均时间越长

思考与讨论

- 如何利用马氏性说明
$$\mathbb{P}(X_T=0|X_0=1,X_1=1)=\mathbb{P}(X_T=0|X_0=1)$$
- 提示：注意到$\{T=k\}=\{X_0=1,X_1=1,\cdots,X_{k-1}=1,X_k=0\}\bigcup\{X_0=1,X_1=1,\cdots,X_{k-1}=1,X_k=2\}$

$$\mathbb{P}(X_T=0|X_0=1,X_1=1)=\sum_{k=2}^{\infty}\mathbb{P}(X_T=0,T=k|X_0=1,X_1=1)$$

$$\begin{aligned}
&=\sum_{k=2}^{\infty}\mathbb{P}(X_0=1,X_1=1,\cdots,X_{k-1}=1,X_k=0|X_0=1,X_1=1)\\
&=\sum_{k=2}^{\infty}\mathbb{P}(X_2=1,\cdots,X_{k-1}=1,X_k=0|X_1=1)\quad (\text{Markov 性})\\
&=\sum_{k=2}^{\infty}\mathbb{P}(X_1=1,\cdots,X_{k-2}=1,X_{k-1}=0|X_0=1)\quad (\text{转移概率平稳性})\\
&=\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}(X_1=1,\cdots,X_{k-1}=1,X_k=0|X_0=1)\\
&=\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}(X_T=0,T=k|X_0=1)=\mathbb{P}(X_T=0|X_0=1)
\end{aligned}$$

互达性

- 我们根据 Markov 链各状态间的转移概率特点, 对状态进行分类

定义 3.3　可达与互达

(i) 如果存在 $n \geq 0$, 使得 $P_{ij}^{(n)} > 0$, 则称状态 j 是从状态 i 可达的 (accessible), 记作 $i \to j$.

(ii) 两个相互可达的状态 i 和 j 称作互达的 (communicate), 记作 $i \leftrightarrow j$.

- $i \to j$ 表示从状态 i 经过有限步转移可以到达 j
- 若 i 不可达 j, 则意味着 $P_{ij}^{(n)} = 0$ 对任意 $n \geq 0$ 成立

命题 3.1　互达性是等价关系

互达性满足

(i) 自反性: $i \leftrightarrow i$;

(ii) 对称性: 若 $i \leftrightarrow j$, 则 $j \leftrightarrow i$;

(iii) 传递性: 若 $i \leftrightarrow j$ 且 $j \leftrightarrow k$, 则 $i \leftrightarrow k$.

互达性 (续)

命题 3.1 证明

- 自反性: 根据定义证明, 由于 $P_{ii}^{(0)} = 1 > 0$, 故 $i \leftrightarrow i$
- 对称性: $i \leftrightarrow j \ \Rightarrow \ i \to j$ 且 $j \to i \ \Rightarrow \ j \leftrightarrow i$
- 传递性的证明:
  - ▷ 已知 $i \leftrightarrow j$, 故 $\exists n \geq 0$, 使得 $P_{ij}^{(n)} > 0$
  - ▷ 已知 $j \leftrightarrow k$, 故 $\exists m \geq 0$, 使得 $P_{jk}^{(m)} > 0$
  - ▷ 利用 Chapman-Kolmogorov 方程, 有

$$P_{ik}^{(n+m)} = \sum_{r=0}^{\infty} P_{ir}^{(n)} P_{rk}^{(m)} \geq P_{ij}^{(n)} P_{jk}^{(m)} > 0$$

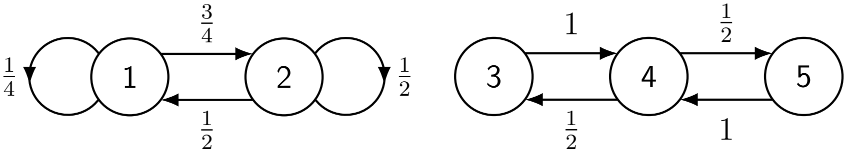
  - ▷ 从而 $i \to k$. 类似可以证明 $k \to i$, 因此 $i \leftrightarrow k$
- 由于互达关系是等价关系
  - ▷ 两个状态如果是互达的, 就可以把他们归为同一类状态
  - ▷ Markov 链中的所有状态, 可以被划分为若干的等价类
  - ▷ 若 Markov 链的所有状态都属于同一个等价类, 也即各状态都是互达的, 则称该 Markov 链为不可约的 (irreducible)

例 3.6

- 已知 Markov 链的状态集为 $\{1,2,3,4,5\}$, 转移概率矩阵如下

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- 则状态 $\{1,2\}$ 是一个等价类, 状态 $\{3,4,5\}$ 是另一个等价类
- 该 Markov 链是可约的, 且可以将其分为两个链来研究 (如下图)



例 3.1 (回顾)

- 回顾之前的赌徒问题, 该 Markov 链是两端带有吸收壁的随机游动
- X_n 表示第 n 次赌博后, 赌徒甲的赌资数
- 赌徒甲、乙的初始赌资分别为 a 和 b
- 状态集为 $\{0, 1, 2, \cdots, a+b\}$
- 则所有状态可分为 3 个等价类

$$\{0\},\ \{1, 2, \cdots, a+b-1\},\ \{a+b\}$$

- 该 Markov 链是可约的

思考与讨论

- 可达性 “$\to$” 是等价关系吗，为什么？
- 你还能说出那些二元关系是等价的 (也即满足自反性、对称性、传递性)

周期性

定义 3.4 状态的周期

设 i 为 Markov 链的一个状态, 使 $P_{ii}^{(n)} > 0$ 成立的所有正整数 n 的最大公约数, 称作是状态 i 的周期, 记作 $d(i)$.

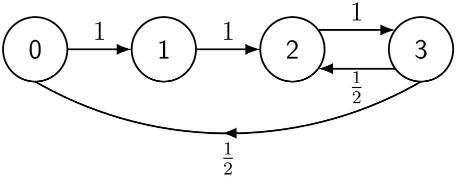
- 如果对所有 $n \geq 1$, 都有 $P_{ii}^{(n)} = 0$, 则约定周期为 ∞
- 当 $d(i) = 1$ 时, 称状态 i 为非周期的
- 由定义可知, 如果整数 n 不能被 $d(i)$ 整除 (也即周期 $d(i)$ 不是 n 的约数), 则必有 $P_{ii}^{(n)} = 0$
- 反之, 即使 n 能被 $d(i)$ 整除, 亦未必有 $P_{ii}^{(n)} > 0$, 见下面的例子

例 3.7

- Markov 链有状态 $0,1,2,3$, 且转移概率矩阵如下:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

- 求状态 0 的周期



解:

- 由图观察可知: $P_{00}^{(2)} = 0$; $P_{00}^{(2n+1)} = 0$, $n \geq 0$; $P_{00}^{(2n)} > 0$, $n \geq 2$
- $\{4, 6, 8, 10, \cdots\}$ 的最大公约数为 2, 也即 $d(0) = 2$
- 本例中状态 0 的周期为 2, 整数 2 能被周期整除, 但 $P_{00}^{(2)} = 0$

- 例 3.7 中, 状态 0 的周期是 2, 那么状态 $1, 2, 3$ 的周期是多少呢?
- 有一种简单的判断方法: 等价类中所有状态的周期相同

命题 3.2 等价类的周期

如果 $i \leftrightarrow j$, 则 $d(i) = d(j)$.

证明:

- 先验证 $d(j) < \infty$ 且 $d(i) < \infty$
- 因为 $i \leftrightarrow j$, 所以 $\exists m, n$ 使得 $P_{ij}^{(m)} > 0$ 和 $P_{ji}^{(n)} > 0$
- 因此, 由 Chapman-Kolmogorov 方程

$$P_{jj}^{(n+m)} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{jk}^{(n)} P_{kj}^{(m)} \geq P_{ji}^{(n)} P_{ij}^{(m)} > 0$$

- 也即 $d(j) < \infty$
- 同理, 一定 $\exists s$ (例如 $s = m + n$), 使得 $P_{ii}^{(s)} > 0$, 也即 $d(i) < \infty$
- 不妨设 s 为能被周期 $d(i)$ 整除的任意正整数, 记作 $d(i)|s$

命题 3.2 证明 (续)

- 已知 $P_{ij}^{(m)} > 0$, $P_{ji}^{(n)} > 0$, $P_{ii}^{(s)} > 0$
- 因此

$$P_{jj}^{(n+s+m)} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} P_{jk}^{(n)} P_{kl}^{(s)} P_{lj}^{(m)} \geq P_{ji}^{(n)} P_{ii}^{(s)} P_{ij}^{(m)} > 0$$

- 由于 $P_{jj}^{(n+m)} > 0$ 且 $P_{jj}^{(n+s+m)} > 0$
  - ▷ 根据周期的定义, 我们得到 $d(j)|(n+m)$ 且 $d(j)|(n+s+m)$
  - ▷ 从而 $d(j)$ 可以整除 $(n+s+m)$ 与 $(n+m)$ 的差, 也即 $d(j)|s$
- 在前述推导中, s 是任意使 $P_{ii}^{(s)} > 0$ 成立的正整数
  - ▷ 因此 $d(j)$ 是所有使 $P_{ii}^{(s)} > 0$ 的 s 的公约数
- 而 $d(i)$ 是使 $P_{ii}^{(s)} > 0$ 成立的所有 s 的最大公约数, 因此有 $d(j)|d(i)$
- 运用同样方法, 我们证明 $d(i)|d(j)$, 从而有 $d(j) = d(i)$

命题 3.3

如果状态 i 的周期为 $d(i)$，则存在正整数 N，使得对所有 $n \geq N$，恒有 $P_{ii}^{(nd(i))} > 0$.

- 虽然并不是每个周期的整数倍步都可以返回初始状态
- 但当 n 足够大时，经过周期的整数倍步的转移，总可返回初始状态
- 证明用到数论知识 (《随机过程引论 (第一版)》，何声武，定理 2.7)

推论 3.1

如果 $P_{ji}^{(m)} > 0$，则存在正整数 N，使得对 $n \geq N$ 恒有 $P_{ji}^{(m+nd(i))} > 0$.

- 如果从状态 j 经过 m 步可以到达状态 i，则 n 足够大时，从 j 经过 $m + nd(i)$ 步也可以到达 i (多走到达状态的周期的整数倍)
- 证明：利用 Chapman-Kolmogorov 方程和命题 3.3

$$P_{ji}^{(m+nd(i))} \geq P_{ji}^{(m)} P_{ii}^{(nd(i))} > 0$$

命题 3.4

若 $\mathbf{P}$ 是不可约、非周期、有限状态的 Markov 链转移概率矩阵, 则存在正整数 N, 使得当 $n \geq N$ 时, n 步转移概率矩阵 $\mathbf{P}^{(n)}$ 的所有元素都非零.

证明:

- 不可约: 任意两个状态 i, j 满足 $i \leftrightarrow j$
  - ▷ $\exists m$ (依赖于 i, j), 使得 $P_{ij}^{(m)} > 0$
- 非周期: $d(i) = d(j) = 1$
- 利用推论 3.1, 存在 N (依赖于 i, j), 使得 $n \geq N(i, j)$ 时, 有

$$P_{ij}^{(m+nd(j))} = P_{ij}^{(m+n\cdot 1)} = P_{ij}^{(m+n)} > 0$$

- 因为状态空间有限, 取

$$N' = \max_{i,j}\{m(i,j) + N(i,j)\}$$

- 则当 $n \geq N'$ 时, 必有 $P_{ij}^{(n)} > 0, \forall i, j$

周期性 (续)

定义 正则 Markov 链

一个具有 k 个状态的 Markov 链, 如果存在正整数 n, 使从任意状态 i 经过 n 次转移都能以大于零的概率到达任意状态 j $(i, j = 1, 2, \cdots, n)$, 则称此 Markov 链为正则链 (Regular Markov Chains).

- 也即, $\exists n$, 使得 $P_{ij}^{(n)} > 0, \forall i, j$
- 由命题 3.4, 不可约、非周期、有限状态的 Markov 链是正则的
- 正则的 Markov 链, 极限分布一定存在:

$$\lim_{n \to \infty} P_{ij}^{(n)} = \pi_j$$

  - 该极限与初始状态 i 无关
  - $\pi_j > 0, \forall j$
  - $\sum_j \pi_j = 1$
- 关于极限和平稳分布, 将在后续章节详细讨论

思考与讨论

- 状态的周期指的是从该状态出发能返回该状态的最小步数吗?
- $d(i) = 1$ 和 $d(i) = \infty$ 分别代表什么含义?

常返态与瞬过态

定义 n 步首达概率

$$f_{ij}^{(n)} = \mathbb{P}(X_n = j, X_k \neq j,\ k = 1, \cdots, n-1 | X_0 = i),\ \forall j$$

- 表示从状态 i 出发, 在第 n 步转移时, 首次到达状态 j 的概率
- 约定 $f_{ij}^{(0)} = 0,\ \forall j$
  - ▷ 一步都没有走, 就无法首次到达, 注意到 $j = i$ 时, 也有 $f_{ii}^{(0)} = 0$

定义 可达概率

$$f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)},\ \forall j$$

- 表示从 i 出发, 最终能够转入状态 j 的概率
- 当 $i \neq j$ 时, $i \to j$ 当且仅当 $f_{ij} > 0$, 如何说明?
- 当 $i = j$ 时, $P_{ii}^{(0)} = 1 > 0$, 故有 $i \to i$, 但 f_{ii} 可能等于 0

定义 3.5 常返态与瞬过态

如果 $f_{ii}=1$, 则我们称状态 i 是**常返的** (recurrent).
一个状态如果不是常返的, 也即 $f_{ii}<1$, 则称其为**瞬过的** (transient).

- 常返指的是, 由一个状态出发, 经有限步转移, **最终能回到初始状态的概率为 1**
- 瞬过指的是, 最终返回初始状态的概率小于 1
- 运用 n **步转移概率**, 可以判断状态是常返的还是瞬过的

定理 3.2 常返与瞬过的充要条件

状态 i 是常返态的充要条件是

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{(n)} = \infty.$$

状态 i 是瞬过态的充要条件是

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{(n)} < \infty.$$

- 证明如下

定理 3.2 证明

- 先考虑瞬过的充要条件: $f_{ii} < 1 \;\Leftrightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{(n)} < \infty$
- 定义随机变量 K 为, 过程返回状态 i 的总次数
  - ▷ 先证 $f_{ii} < 1 \;\Leftrightarrow\; \mathbb{E}(K|X_0 = i) < \infty$, 再证 $\mathbb{E}(K|X_0 = i) = \sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{(n)}$
  - ▷ 也即瞬过相当于返回初始状态的期望次数有限
- 定义随机变量 N 为, 过程首次返回状态 i 时经过的步数

$$
\begin{aligned}
& \mathbb{P}(K \geq 1|X_0 = i) \\
= & \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(K \geq 1, N = n|X_0 = i) \quad \text{(按照首次返回时的步数拆分事件)} \\
= & \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(N = n|X_0 = i) \quad \text{(等价事件)} \\
= & \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)} = f_{ii} \quad (f_{ii}^{(n)} \text{ 定义})
\end{aligned}
$$

- 类似地, 可以推导出 $\mathbb{P}(K \geq k|X_0 = i)$

$$
\begin{aligned}
& \mathbb{P}(K \geq k|X_0 = i) \\
= & \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(K \geq k, N = n|X_0 = i) \quad \text{(互斥事件拆分)} \\
= & \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(K \geq k|N = n, X_0 = i)\mathbb{P}(N = n|X_0 = i) \quad \text{(条件概率定义)} \\
= & \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(K \geq k|X_n = i, X_{n-1} \neq i, \cdots, X_1 \neq i, X_0 = i)\mathbb{P}(N = n|X_0 = i) \\
= & \sum_{n=1}^{\infty} {\color{red}\mathbb{P}(K \geq k-1|X_0 = i)}\mathbb{P}(N = n|X_0 = i) \quad \text{(将 } n \text{ 时刻看作新的 } 0 \text{ 时刻)} \\
= & \mathbb{P}(K \geq k-1|X_0 = i)\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(N = n|X_0 = i) = \mathbb{P}(K \geq k-1|X_0 = i)\sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)} \\
= & \mathbb{P}(K \geq k-1|X_0 = i)f_{ii} \quad (f_{ii} \text{ 定义}) \\
= & \mathbb{P}(K \geq k-2|X_0 = i)f_{ii}^2 = \cdots = f_{ii}^k \quad \text{(递推)}
\end{aligned}
$$

已证 $\mathbb{P}(K \geq k | X_0 = i) = f_{ii}^k$

$$
\begin{aligned}
& \mathbb{E}(K|X_0 = i) \\
= & \sum_{k=1}^{\infty} k\mathbb{P}(K = k|X_0 = i) \\
= & \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{k} \mathbb{P}(K = k|X_0 = i) \\
= & \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=l}^{\infty} \mathbb{P}(K = k|X_0 = i) \qquad \text{(交换求和顺序)} \\
= & \sum_{l=1}^{\infty} \mathbb{P}(K \geq l|X_0 = i) \\
= & \sum_{l=1}^{\infty} f_{ii}^l = \frac{f_{ii}}{1 - f_{ii}}
\end{aligned}
$$

- 因此, 当 $f_{ii} < 1$ 时, $\mathbb{E}(K|X_0 = i) < \infty$

已证 $\mathbb{E}(K|X_0=i)<\infty$, 下面证 $\sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{(n)} = \mathbb{E}(K|X_0=i)$

- 引入示性变量, 记录 n 时刻的状态是否为 i

$$\mathbf{I}_n = \begin{cases} 1, & 若 X_n = i, \\ 0, & 其它情形, \end{cases}$$

- K 的含义是过程返回状态 i 的次数, 因此有

$$K = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{I}_n$$

- 从而有

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{(n)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_n = i | X_0 = i) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(\mathbf{I}_n | X_0 = i) \qquad (\text{示性变量的期望即是事件发生概率}) \\ &= \mathbb{E}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{I}_n | X_0 = i\right) \\ &= \mathbb{E}(K|X_0=i) < \infty \end{aligned}$$

常返态与瞬过态 (续)

- 上述推导都是双向的, 所以有

$$f_{ii} < 1 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{(n)} < \infty$$

- 若状态 i 是常返的, 也即 $f_{ii} = 1$
- 类似地有

$$\begin{aligned} & f_{ii} = 1 \\ \Leftrightarrow \quad & \mathbb{E}(K|X_0 = i) = \frac{f_{ii}}{1 - f_{ii}} = \infty \\ \Leftrightarrow \quad & \sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{(n)} = \mathbb{E}(K|X_0 = i) = \infty \end{aligned}$$

思考与讨论

- 如何利用马氏性和转移概率平稳性简洁地说明

$$\mathbb{P}(K \geq k | X_n = i, X_{n-1} \neq i, \cdots, X_1 \neq i, X_0 = i) = \mathbb{P}(K \geq k-1 | X_0 = i)$$

 其中 K 是过程返回状态 i 的次数
 提示: 考虑事件 $\{K \geq k-1\}$ 依赖于哪些 X_m

- P_{ij}, $P_{ij}^{(n)}$, f_{ij}, $f_{ij}^{(n)}$ 的区别和联系是什么? 特别地, 当 $n=0$ 时, $P_{ij}^{(n)}$ 和 $f_{ij}^{(n)}$ 的取值如何约定?

常返态与瞬过态 (续)

推论 3.2

如果状态 i 是常返的, 且 $i \leftrightarrow j$, 则 j 也是常返的.

- 证明见下页

推论 3.2'

如果状态 i 是瞬过的, 且 $i \leftrightarrow j$, 则 j 也是瞬过的.

- 推论 3.2', 可以利用推论 3.2 及反证法证明
  - ▷ 假设 j 不是瞬过的, 则 j 是常返的
  - ▷ 由于 $j \leftrightarrow i$, 利用推论 3.2, 可知 i 也是常返的, 与题设矛盾
  - ▷ 故反证假设不成立, j 是瞬过的

推论 3.2 证明: 与常返态互达的状态也是常返的

- 由 $i \leftrightarrow j$, 可知 $\exists m, n$, 使得 $P_{ji}^{(m)} > 0$ 且 $P_{ij}^{(n)} > 0$
- 利用 Chapman-Kolmogorov 方程, 对任意 s, 有
$$P_{jj}^{(m+s+n)} \geq P_{ji}^{(m)} P_{ii}^{(s)} P_{ij}^{(n)}$$
- 由于状态 i 是常返的, 根据定理 3.2 的充要条件, 有 $\sum_{s=1}^{\infty} P_{ii}^{(s)} = \infty$, 从而
$$\sum_{s=1}^{\infty} P_{jj}^{(s)} \geq \sum_{s=m+n+1}^{\infty} P_{jj}^{(s)} = \sum_{s=1}^{\infty} P_{jj}^{(m+s+n)} \qquad \text{(替换求和变量 } s\text{)}$$
$$\geq \sum_{s=1}^{\infty} P_{ji}^{(m)} P_{ii}^{(s)} P_{ij}^{(n)} = P_{ji}^{(m)} P_{ij}^{(n)} \sum_{s=1}^{\infty} P_{ii}^{(s)} = \infty$$
- 再利用定理 3.2 的充要性, 可知 j 也是常返的
- 推论 3.2 表明: 同一等价类中的状态, 要么都是常返的, 要么都是瞬过的

例 3.8　随机游动的状态分类

- 考虑整数点上的随机游动: 右移一格的概率为 p, 左移为 $q=1-p$
- 从原点 (状态 0) 出发, 只有转移偶数步才能回到原点, 也即

$$P_{00}^{(2n+1)}=0,\ \ n=1,2,\cdots$$

$$P_{00}^{(2n)}=C_{2n}^{n}p^{n}q^{n},\ \ n=1,2,\cdots$$

- 利用 Stirling 公式进行阶乘的近似

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^{n}}=1$$

有

$$C_{2n}^{n}=\frac{(2n)!}{n!n!}\approx\frac{\sqrt{2\pi(2n)}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{\left(\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^{n}\right)^{2}}=\frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}$$

从而

$$P_{00}^{(2n)}\approx\frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}(pq)^{n}=\frac{(4pq)^{n}}{\sqrt{\pi n}}$$

常返态与瞬过态 (续)

$P_{00}^{(2n)} \approx \frac{(4pq)^n}{\sqrt{\pi n}}$

- 已知
$$pq = p(1-q) \le \frac{1}{4}$$
且等号仅在 $p = q = \frac{1}{2}$ 时成立

- 因此, 当 $p = \frac{1}{2}$ 时, 有
$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} P_{00}^{(n)} &= \sum_{n=1}^{\infty} P_{00}^{(2n)} \\ &\approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4pq)^n}{\sqrt{\pi n}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi n}} = \infty \end{aligned}$$

- 故而, 状态 0 是常返态
- 又有 $0 \leftrightarrow i$, $\forall i$, 所以对称随机游动的所有状态均是常返的

常返态与瞬过态 (续)

- 当 $p \neq \frac{1}{2}$ 时, $pq < \frac{1}{4}$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} P_{00}^{(n)} &\approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4pq)^n}{\sqrt{\pi n}} \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} (4pq)^n \\ &= \frac{4pq}{1-4pq} < \infty \end{aligned}$$

- 因此, 非对称随机游动的所有状态均是瞬过的

- 以上是一维随机游动的结果
  - ▷ 二维对称随机游动的所有状态也是常返的
  - ▷ 三维以上对称随机游动的所有状态是瞬过的

定义 常返时

对于常返状态 i, 定义 T_i 为过程首次返回状态 i 的时刻, 称为常返时.

- T_i 是一个随机量: $\mathbb{P}(T_i = n|X_0 = i) = f_{ii}^{(n)}$
- i 为常返态时, 有 $\mathbb{P}(T_i < \infty|X_0 = i) = f_{ii} = 1$; 否则 $\mathbb{P}(T_i < \infty|X_0 = i) < 1$, T_i 在实数值域上不满足概率的归一性
- 常返时的期望 (也称平均常返时) 为

$$\mu_i = \mathbb{E}(T_i|X_0 = i) = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{(n)}$$

定义 3.6 正常返与零常返

对于常返状态 i, 若 $\mu_i = \infty$, 则称其为零常返的, 若 $\mu_i < \infty$, 则称其为正常返的.

- 有限状态 Markov 链中, 任何状态都是正常返的 (习题 3.15)
- 零常返状态, 只会出现在无穷多状态的 Markov 链中
  - ▷ 如对称随机徘徊, 利用后续的极限定理证明

思考与讨论

- 正常返、零常返、瞬过态各自组成一个等价类吗?
- 零常返状态的周期可能是多少?

第 3 章 (上) 习题

习题 3:

- 3.1 节作业: 3, 4, 6
- 3.2 节作业: 11, 12, 16

上篇结束，接下篇