随机过程 B
第 4 章 平稳过程

解扬洋, 殷哲

E-mails: xieyclio@ustc.edu.cn; yinzhe@ustc.edu.cn

本章提纲

1. 平稳过程的定义和例子
   - 平稳过程的定义
   - 周期平稳过程
2. 遍历性定理
   - 遍历性的定义
   - 均值遍历性定理
   - 协方差函数遍历性定理
   - 遍历性定理的应用
3. 协方差函数与功率谱密度
   - 协方差函数的性质
   - 均方导数
   - 常见随机信号的协方差函数
   - 确定信号的功率谱密度
   - 平稳过程的功率谱密度
   - 功率谱密度的例子

§4.1 平稳过程的定义和例子

- 我们称概率性质在时间平移下不变的过程为平稳过程
- 研究此类过程，不需要固定的时间 (空间) 起点
- 在通信、天文、生物、生态、经济学等各领域有广泛应用

- 本节中，我们所讨论的随机过程时间指标集关于加法运算封闭:
  - ▷ 若 $t_1, t_2 \in T$，则 $t_1 + t_2 \in T$
- 常见的指标集有
  (a) $T = \{0, 1, 2, \cdots\} = \mathbb{N}_0$
  (b) $T = \{0, \pm 1, \pm 2, \cdots\} = \mathbb{Z}$
  (c) $T = \{t : t \geq 0\} = \mathbb{R}_0^+$
  (d) $T = \{t : -\infty < t < \infty\} = \mathbb{R}$
- 时间指标集也可表示空间位置

平稳过程的定义

回忆第 1 章中的定义

定义 4.1 严平稳过程

设 $\{X(t),\ t \in T\}$ 是一随机过程, 若对任意正整数 k, T 中任意 k 个时刻 $t_1 < t_2 < \cdots < t_k$, 及 $\forall h \in T$, 有

$$(X(t_1), \cdots, X(t_k)) \overset{d}{=} (X(t_1+h), \cdots, X(t_k+h)),$$

则称其为严平稳过程. 这里 "d" 表示随机向量同分布

- 如果 $T = \mathbb{Z}$, 我们一般称 $X(t)$ 为随机序列
  - 如果过程还是严平稳的, 则称严平稳序列
- 定义过程的均值函数
$$m(t) = \mathbb{E}X(t),\ t \in T$$
- 过程的方差函数
$$\mathrm{Var}\,(X(t)) = \mathbb{E}[X(t) - m(t)]^2,\ t \in T$$
- 过程的均值和方差有可能不存在

平稳过程的定义 (续)

- 对于严平稳过程，因 $X(t) \overset{d}{=} X(s),\ \forall t,s \in T$ (不妨设 $s < t$)，则
- 如其均值存在，则是常数，即

$$m(t) = m(s) = m$$

- 如其方差存在，也是常数，即

$$\mathrm{Var}\,(X(t)) = \mathbb{E}[X(t) - m]^2 = \mathrm{Var}\,(X(s)) = \sigma^2$$

- 协方差函数满足

$$\mathbb{E}(X(t) - \mathbb{E}X(t))(X(s) - \mathbb{E}X(s)) \quad = \quad \mathbb{E}(X(t-s) - m)(X(0) - m)$$

即过程的协方差只依赖于时间差 $t - s$，与时间起点无关
记 $h = t - s$，协方差函数可记为

$$R(h) = \mathbb{E}(X(t+h) - m)(X(t) - m) = \mathbb{E}(X(h) - m)(X(0) - m)$$

注意 $R(0) = \mathrm{Var}\,(X(t))$

平稳过程的定义 (续)

- 定义平稳过程的**自相关函数**

$$r(h) = \mathbb{E}X(t+h)X(t)$$

标准自相关函数

$$\rho(h) = \frac{\mathbb{E}(X(t+h) - \mathbb{E}X(t+h))(X(t) - \mathbb{E}X(t))}{\sqrt{\mathrm{Var}(X(t+h))\mathrm{Var}(X(t))}} = \frac{R(h)}{\sigma^2} = \frac{R(h)}{R(0)}$$

- 这些函数值均与时间起点 t 无关

- 标准自相关函数 $\rho(h) = \frac{R(h)}{R(0)}$ 有如下性质:

$$\rho(0) = \frac{R(0)}{R(0)} = 1$$

$$|\rho(h)| \leq 1$$

- 证明: 记 $X(t+h) = Y$, $X(t) = Z$, 严平稳过程下 Y 与 Z 同分布

$$\rho(h) = \frac{\mathbb{E}(Y - \mathbb{E}Y)(Z - \mathbb{E}Z)}{\sqrt{\mathrm{Var}Y \cdot \mathrm{Var}Z}}$$

- 其中

$$\mathbb{E}(Y - \mathbb{E}Y)(Z - \mathbb{E}Z) = \mathbb{E}(YZ) - \mathbb{E}Y\mathbb{E}Z = \mathbb{E}(YZ) - m^2$$

$$\mathrm{Var}Y \cdot \mathrm{Var}Z = [\mathbb{E}Y^2 - (\mathbb{E}Y)^2][\mathbb{E}Z^2 - (\mathbb{E}Z)^2] = (\mathbb{E}Y^2 - m^2)(\mathbb{E}Z^2 - m^2)$$

平稳过程的定义 (续)

- 证明 $|\rho(h)| \le 1$ 等同于证明

$$[\mathbb{E}(YZ) - m^2]^2 \le (\mathbb{E}Y^2 - m^2)(\mathbb{E}Z^2 - m^2)$$

化简得

$$\begin{aligned} & [\mathbb{E}(YZ) - m^2]^2 - (\mathbb{E}Y^2 - m^2)(\mathbb{E}Z^2 - m^2) \\ = \ & [\mathbb{E}(YZ)]^2 - \mathbb{E}Y^2\mathbb{E}Z^2 - m^2[2\mathbb{E}(YZ) + \mathbb{E}Y^2 + \mathbb{E}Z^2] \\ = \ & [\mathbb{E}(YZ)]^2 - \mathbb{E}Y^2\mathbb{E}Z^2 - m^2\mathbb{E}(Y+Z)^2 \end{aligned}$$

上式中 $-m^2\mathbb{E}(Y+Z)^2 \le 0$

- 因此，证明 $|\rho(h)| \le 1$ 可转化为证明其充分条件

$$[\mathbb{E}(YZ)]^2 \le \mathbb{E}Y^2\mathbb{E}Z^2$$

- 由 Cauchy–Schwarz 不等式可证得

平稳过程的定义 (续)

- 严平稳过程要求所有维有限分布都与时间起点无关，条件较为严格
- 前二阶矩已能反映过程的很多概率性质，故我们引入要求较宽松的宽平稳过程定义

定义 4.2　宽平稳过程

设 $\{X(t),\ t\in T\}$ 是一实值随机过程．若对 $\forall t\in T$，有 (i) $\mathbb{E}X(t)=m$，(ii) $\mathbb{E}X^2(t)<\infty$，且 (iii) 协方差函数 $\mathbb{E}(X(t)-m)(X(s)-m)$ **仅与** $t-s$ **有关**，则称其为宽平稳过程．

- 若 $X(t)$ 是复值随机过程，只需在平稳过程的定义中将协方差函数改为 $\mathbb{E}(X(t)-m)\overline{(X(s)-m)}$，其中 $\overline{(X(s)-m)}$ 表示 $X(s)-m$ 的共轭
- 一般来说，宽严平稳过程互不包含．我们已于第 1 章中证明：对于二阶矩存在的过程，若其是严平稳过程，则也必是宽平稳过程
- 实平稳过程的协方差函数是偶函数，也即

$$R(t-s)=\mathbb{E}(X(t)-m)(X(s)-m)=\mathbb{E}(X(s)-m)(X(t)-m)=R(s-t)$$

例 4.4

- 设 Z 为非零随机变量, 试考察 $X(t)=tZ,\ t\in T$ 与 $Y(t)=Z,\ t\in T$ 的平稳性

解:

- 先看 $Y(t)$, 由于 $Y(t)$ 的取值与 t 无关

$$\begin{aligned}(Y(t_1),Y(t_2),\cdots,Y(t_k)) &\overset{d}{=} (Z,Z,\cdots,Z)\\ &\overset{d}{=} (Y(t_1+h),Y(t_2+h),\cdots,Y(t_k+h))\end{aligned}$$

故过程是严平稳的

- 如果同时 $\mathbb{E}Z^2<\infty$, 也即过程的二阶矩存在, 则 $Y(t)$ 也是宽平稳的

- 对于 $X(t)$, 由于其一维分布关于时间已不是同分布的:

$$X(t)=tZ\overset{d}{\neq}(t+h)Z=X(t+h)$$

故过程不是严平稳的

平稳过程的例子 (续)

- 同时, 注意到过程的一阶矩

$$\mathbb{E}X(t) = t\mathbb{E}Z$$

- 如果 $\mathbb{E}Z \neq 0$, 则一阶矩不是常数, 因此过程不是宽平稳的
- 如果 $\mathbb{E}Z = 0$, 过程的协方差函数

$$\mathbb{E}(X(t) - 0)(X(s) - 0) = \mathbb{E}X(t)X(s) = ts\mathbb{E}Z^2$$

- Z 是非零随机变量, 故 $\mathbb{E}Z^2 > 0$
- 从而协方差函数依赖于 ts 而非 $t - s$
- $X(t)$ 仍不是宽平稳的

- 有没有一类过程, 其宽平稳性和严平稳性是等价的呢?

平稳过程的例子 (续)

定义 4.3 高斯 (Gauss) 过程

设 $\{G(t),\ -\infty < t < \infty\}$ 是一随机过程，如果对任意正整数 k 及 k 个时刻 $t_1 \le t_2 \le \cdots \le t_k$，$(G(t_1), G(t_2), \cdots, G(t_k))$ 的联合分布为 k 维正态分布，则称其为高斯过程.

- k 维正态分布由协方差矩阵和均值向量唯一确定确定
- 因此，其概率性质只依赖于过程的一、二阶矩，且二阶矩必然存在
- 从而，对高斯过程而言，宽平稳和严平稳的定义是等价的

- 以下，我们主要研究宽平稳过程，我们简称宽平稳过程为平稳过程

平稳过程的例子 (续)

例 4.5 平稳白噪声序列

- 设 $\{X_n,\ n=0,1,\cdots\}$ 是一列随机序列
- 满足

$$\mathbb{E}X_n = 0,\ n = 0,1,\cdots$$

$$\mathbb{E}X_n^2 = \sigma^2,\ n = 0,1,\cdots$$

$$\mathbb{E}X_mX_n = 0,\ \text{当 } m \neq n \text{ 时}$$

- 则 X_n 是一个平稳序列, 因为其协方差函数

$$\mathrm{Cov}(X_m, X_n) = \mathbb{E}X_mX_n = \begin{cases} \sigma^2, & m-n=0, \\ 0, & m-n\neq 0, \end{cases}$$

仅与 $m-n$ 有关, 与时间起点无关

平稳过程的例子 (续)

例 4.6 三角多项式过程

- 设 A 和 B 是满足 $\mathbb{E}A=\mathbb{E}B=0$, $\mathrm{Var}A=\mathrm{Var}B=\sigma^2$, $\mathrm{Cov}(A,B)=\mathbb{E}AB=0$ 的随机变量
- 给定频率 $\omega\in[0,\pi]$, 定义

$$X_t=A\cos\omega t+B\sin\omega t$$

- 则 $\{X_t,\quad -\infty<t<\infty\}$ 是一个平稳过程

证明:

- 过程的均值

$$\mathbb{E}X_t=\mathbb{E}A\cos\omega t+\mathbb{E}B\sin\omega t=0$$

- 利用 $\mathbb{E}AB=0$ 与和角公式, 过程的协方差函数

$$\begin{aligned}\mathbb{E}X_{t+\tau}X_t &= \mathbb{E}[A\cos\omega(t+\tau)+B\sin\omega(t+\tau)][A\cos\omega t+B\sin\omega t]\\ &= \mathbb{E}A^2\cos\omega(t+\tau)\cos\omega t+\mathbb{E}B^2\sin\omega(t+\tau)\sin\omega t\\ &\quad +\mathbb{E}AB[\cos\omega(t+\tau)\sin\omega t+\sin\omega(t+\tau)\cos\omega t]\\ &= \sigma^2\cos(\omega(t+\tau)-\omega t)=\sigma^2\cos\omega\tau\end{aligned}$$

只依赖于时间差 τ

平稳过程的例子 (续)

- 我们可以对上述结果进行推广
- 设 $A_0, A_1, \cdots, A_m$, $B_0, B_1, \cdots, B_m$ 为两两不相关的随机变量
- 且 $\mathbb{E}A_i = \mathbb{E}B_i = 0$, $\mathbb{E}A_i^2 = \mathbb{E}B_i^2 = \sigma_i^2$, $i = 0, 1, \cdots, m$
- 记 $\omega_0, \omega_1, \cdots, \omega_m$ 为 $[0, \pi]$ 中的不同频率，定义

$$X_t = \sum_{k=0}^{m} (A_k \cos w_k t + B_k \sin w_k t)$$

- 则有，过程的均值

$$\mathbb{E}X_t = \sum_{k=0}^{m} (\mathbb{E}A_k \cos w_k t + \mathbb{E}B_k \sin w_k t) = 0$$

- 利用之前单个 A、B 时的结果，过程的协方差函数

$$\mathbb{E}X_{t+\tau}X_t = \sum_{k=0}^{m} \sigma_k^2 \cos \omega_k \tau$$

只依赖于 τ

平稳过程的例子 (续)

$\mathbb{E}X_{t+\tau}X_t = \sum_{k=0}^{m} \sigma_k^2 \cos\omega_k\tau$

- 因此，推广后的过程，仍然是平稳过程
- 注意到 $A_k \cos w_k t$ 和 $B_k \sin w_k t$ 表示，时刻 t 时，角频率为 ω_k，随机振幅为 A_k 和 B_k 的简谐振动质点的位置
- 当随机振幅两两不相关时，经叠加而成的过程仍是平稳过程
- 记 $\sigma^2 = \sum_{k=0}^{m} \sigma_k^2$ 和 $p_k = \frac{\sigma_k^2}{\sigma^2}$，则协方差函数可写为

$$R(\tau) = \sigma^2 \sum_{k=0}^{m} p_k \cos\omega_k\tau$$

- 其中 p_k 表示频率 ω_k 对协方差函数的贡献份额
- 注意到 $\{p_k,\ k=0,1,\cdots,m\}$ 可看作一个离散频率的概率质量函数
- 若将其推广到连续频率的形式，则有

$$R(\tau) = \sigma^2 \int_0^{\pi} \cos\omega\tau dF(\omega)$$

其中 F 是定义在 $[0,\pi]$ 上的某个连续频率的分布函数

平稳过程的例子 (续)

例 4.7 滑动平均序列

- 设 $\{\varepsilon_n,\ n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots\}$ 为一列不相关的 (也即 $\mathrm{Cov}(\varepsilon_n,\varepsilon_l)=0,\ \forall n\neq l$), 有相同均值 m 和方差 σ^2 的随机变量
- $a_1,\cdots,a_k$ 为任意 k 个实数, 定义

$$X_n=\sum_{i=1}^{k}a_i\varepsilon_{n+1-i}=a_1\varepsilon_n+a_2\varepsilon_{n-1}+\cdots+a_k\varepsilon_{n+1-k}$$

- 若 $\sum\limits_{i=1}^{k}a_i=1$, 则相当于对从 n 开始的最近的过去 k 个时刻的信号值进行加权平均
- 过程的均值:

$$\mathbb{E}X_n=\left(\sum_{i=1}^{k}a_i\right)m$$

关于时间指标 n 是常数

平稳过程的例子 (续)

- 记 $\xi_i = \varepsilon_i - m$, 则过程 $n+\tau$ 时刻与 n 时刻的协方差函数为

$$
\begin{aligned}
R(n+\tau, n) &= \mathbb{E}[X_n - \mathbb{E}X_n][X_{n+\tau} - \mathbb{E}X_{n+\tau}] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{k} a_i(\varepsilon_{n+1-i} - m)\right]\left[\sum_{j=1}^{k} a_j(\varepsilon_{n+\tau+1-j} - m)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{k} a_i \xi_{n+1-i}\right]\left[\sum_{j=1}^{k} a_j \xi_{n+\tau+1-j}\right] \\
&= \begin{cases} \sigma^2 \sum\limits_{i=1}^{k-\tau} a_i a_{i+\tau}, & 0 \le \tau \le k-1 \\ 0, & \tau \ge k \end{cases}
\end{aligned}
$$

- 其中 $j = i + \tau$ 时, 有 $\xi_{n+1-i} = \xi_{n+\tau+1-j}$, 故 $\mathbb{E}\xi_{n+1-i}\xi_{n+\tau+1-j} = \sigma^2$
- 当 $j \neq i + \tau$ 时, $\mathrm{Cov}(\varepsilon_n, \varepsilon_l) = 0,\ \forall n \neq l \ \Rightarrow\ \mathbb{E}\xi_{n+1-i}\xi_{n+\tau+1-j} = 0$
- 协方差函数只依赖于时间间隔 τ, 记为 $R(n+\tau, n) = R(\tau)$, 故 X_n 是平稳过程
- 对于 $\tau < 0$, 利用 $R(n+\tau, n) = R(n, n+\tau) = R(n-\tau, n) = R(-\tau)$
- 故有 $R(\tau) = R(-\tau) = R(|\tau|)$

例 4.8 随机电报信号

- 设信号流 $\{X(t),\ t \geq 0\}$ 为随机过程，且对任意时刻 t 有

$$P(X(t) = I) = P(X(t) = -I) = \frac{1}{2}$$

- 在 $[t, t+\tau]$ 时间内，信号正负号变化的次数 N 服从速率为 λ 的 Poisson 过程，也即

$$P(N(\tau) = k) = e^{-\lambda\tau}\frac{(\lambda\tau)^k}{k!}, \quad \lambda > 0$$

- 试讨论信号流的平稳性

解:

- 首先，过程的均值

$$\mathbb{E}X(t) = I \cdot \frac{1}{2} + (-I) \cdot \frac{1}{2} = 0,\ \forall t \geq 0$$

- 过程的协方差: $\mathbb{E}X(t+\tau)X(t)$
  - ▷ 注意到 $X(t+\tau)X(t)$ 只能取 I^2 或 $-I^2$ 两个值
  - ▷ 接下页

平稳过程的例子 (续)

- 当信号在 $[t, t+\tau]$ 时间段内，变号偶数次时，有 $X(t+\tau)X(t) = I^2$
- 相应的概率为

$$
\begin{aligned}
& P(\text{信号在 } [t, t+\tau] \text{ 内变号偶数次}) \\
= \ & \sum_{k=0}^{\infty} P(N(t+\tau) - N(t) = 2k) = \sum_{k=0}^{\infty} P(N(\tau) = 2k) \\
= \ & \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda\tau} \frac{(\lambda\tau)^{2k}}{(2k)!} = e^{-\lambda\tau} \cosh(\lambda\tau)
\end{aligned}
$$

- 由于 Poisson 过程的时间齐次性，概率只依赖于时间差 τ
- 同理，在 $[t, t+\tau]$ 内变号奇数次时，有 $X(t+\tau)X(t) = -I^2$ 以及

$$P(\text{信号在 } [t, t+\tau] \text{ 内变号奇数次}) = e^{-\lambda\tau} \sinh(\lambda\tau)$$

平稳过程的例子 (续)

- 从而，协方差函数

$$\begin{aligned}
&R(t+\tau,t)=\mathbb{E}X(t+\tau)X(t)\\
=\ &I^2\cdot P(\text{信号在 } [t,t+\tau] \text{ 内变号偶数次})\\
&-I^2\cdot P(\text{信号在 } [t,t+\tau] \text{ 内变号奇数次})\\
=\ &I^2e^{-\lambda\tau}[\cosh(\lambda\tau)-\sinh(\lambda\tau)]\\
=\ &I^2e^{-2\lambda\tau}
\end{aligned}$$

- 对于 $\tau<0$ 时，可以类似得到

$$\begin{aligned}
&R(t+\tau,t)=R(t,t+\tau)=R(t-\tau,t)\\
=\ &I^2e^{-2\lambda(-\tau)}\\
=\ &I^2e^{-2\lambda|\tau|}
\end{aligned}$$

- 协方差函数只与时间间隔 τ 有关，因此随机电报信号流是平稳过程
- 也可不计算具体概率，直接利用 Poisson 过程的时间齐次性，得出结论

周期平稳过程

定义 4.4　周期平稳过程

设 $\{X(t),\ t \in T\}$ 为平稳过程，若存在正常数 κ，使得

$$X(t+\kappa) = X(t),\ \forall t,$$

则称过程为周期平稳过程，κ 为过程的周期.

- 若一个过程是周期平稳过程，则其协方差函数是周期函数，且与过程的周期相同
- 证明:

$$\begin{aligned} R(\tau+\kappa) &= \mathbb{E}[X(t+\tau+\kappa)-m][X(t)-m] \\ &= \mathbb{E}[X(t+\tau)-m][X(t)-m] \\ &= R(\tau) \end{aligned}$$

例 4.9 周期振动

- 设 $X(t) = Y \cdot f(t)$
- 其中 Y 为一实值随机变量, $\mathbb{E}Y = 0$, $\mathbb{E}Y^2 = \sigma^2$
- $f(t)$ 为一非随机的复值函数
- 考虑 $\{X(t), \quad -\infty < t < \infty\}$, 试证明其为平稳过程的充要条件是 $f(t) = Ce^{i(\lambda t+\theta)}$, 其中 $i = \sqrt{-1}$, C, λ, θ 均为实常数 (周期为 $\frac{2\pi}{\lambda}$)

证明:

- 验证一阶矩为常数:

$$\mathbb{E}X(t) = \mathbb{E}Y f(t) = 0, \quad -\infty < t < \infty$$

- 充分性: 若 $f(t) = Ce^{i(\lambda t+\theta)}$, 则过程二阶矩

$$\begin{aligned} \mathbb{E}X(t+\tau)\overline{X(t)} &= \mathbb{E}Y^2 f(t+\tau)\overline{f(t)} \\ &= \sigma^2 Ce^{i[\lambda(t+\tau)+\theta]} Ce^{-i(\lambda t+\theta)} \\ &= \sigma^2 C^2 e^{i\lambda\tau} \end{aligned}$$

- 只依赖于 τ, 故是平稳过程

周期平稳过程 (续)

- 必要性: 若过程是平稳的, 则

$$\mathbb{E}X(t+\tau)\overline{X(t)} = \mathbb{E}Y^2 f(t+\tau)\overline{f(t)} = \sigma^2 f(t+\tau)\overline{f(t)}$$

  只依赖于 τ
- 也即 $f(t+\tau)\overline{f(t)}$ 的取值与 t 无关
- 取 $\tau = 0$, 有

$$f(t+\tau)\overline{f(t)} = |f(t)|^2$$

- 也即 $f(t)$ 的模长与 t 无关, 是一实常数, 记为 C, 故有

$$f(t) = Ce^{i\psi(t)}$$

  其中 $\psi(t)$ 是一实函数
- 因此, 有

$$f(t+\tau)\overline{f(t)} = C^2 e^{i[\psi(t+\tau)-\psi(t)]}$$

  与 t 无关
- 也即 $\psi(t+\tau) - \psi(t)$ 与 t 无关

周期平稳过程 (续)

- 从而

$$\frac{d}{dt}[\psi(t+\tau)-\psi(t)]=0$$

  对任意 t 和 τ 成立
- 也就是

$$\frac{d}{dt}\psi(t+\tau)=\frac{d}{dt}\psi(t),\ \forall t,\tau$$

- $\psi(t)$ 的一阶导是常数, 记为 λ
- 解一阶微分方程 $\psi'(t)=\lambda$, 得

$$\psi(t)=\lambda t+\theta,$$

  其中 θ 是一个实常数
- 所以有

$$f(t)=Ce^{i\psi(t)}=Ce^{i(\lambda t+\theta)}$$

- 必要性得证

考虑如下两个平稳过程:

- $\{X_n,\ n=0,1,2,\cdots\}$, 其中 X_n 独立同分布, $\mathbb{E}X_n=m$
- $\{Y_n,\ n=0,1,2,\cdots\}$, 其中 $Y_n=Y,\ \forall n,\ Y$ 是随机变量

- 对于过程 X_n, 由大数定律可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(X_0+X_1+\cdots+X_{n-1})\overset{p}{=}m$$

- 该过程时间均值的随机性, 随着时间推移而不断减小, 最终收敛于 m
- 而对于过程 Y_n,

$$\frac{1}{n}(Y_0+Y_1+\cdots+Y_{n-1})=Y$$

- 过程时间均值的随机性, 不随时间推移而改变

- 因此, 在怎样的条件下, 平稳过程关于时间的平均值 $\frac{1}{n}(X_0+X_1+\cdots+X_{n-1})$ 收敛于过程的平均值 $\mathbb{E}X_n$

遍历性定理 (续)

- 这个问题意味着是否可以通过观测随机过程，来估计过程的均值和协方差
- 以 $X_i(t)$ 表示第 i 次对随机过程的观测中，时刻 t 的取值
- 根据大数定律，可以用下式来估计过程的均值 m

$$\hat{m}_n = \frac{1}{n}[X_1(t) + X_2(t) + \cdots + X_n(t)]$$

- 注意到这是对同一过程，同一时刻，进行的多次观测，因而每次观测是独立同分布的，因而可以运用大数定律
- 由于协方差 $\mathbb{E}X(t+\tau)X(t)$ 本质上是一种期望，可以类似地对协方差函数进行估计

$$\hat{R}_n(\tau) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}[X_k(t+\tau) - \hat{m}_n][X_k(t) - \hat{m}_n]$$

- 但实践中的困难在于，难以对随机过程的同一时刻进行多次观测
- 比较容易的是，观测随机过程的一条样本路径

遍历性定理 (续)

- 我们期待, 通过一条样本路径的观测 (而无需观测多条路径), 就可以较好地估计出 m 和 $R(\tau)$
- 对于一般随机过程来说, 这是难以做到的
- 例如, 记 n 为观测次数, k 为欲估计的时刻, 当 $n \to \infty$ 时, 一般来说

$$\frac{1}{n}[X_1(0) + X_1(1) + \cdots + X_1(n-1)] \quad \text{(可能趋向于某个平稳状态 } X_1(\infty))$$

$$\text{不趋向于} \quad \frac{1}{n}[X_1(k) + X_2(k) + \cdots + X_n(k)] \to m(k)$$

- 但对于平稳过程来说, 在较宽松的条件下, 就可以基于一条样本路径的观测, 得出较好的估计

定义 4.5 平稳过程的遍历性

设 $\{X(t), \ -\infty < t < \infty\}$ 为一平稳过程, (a) 若

$$\overline{X} \triangleq \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} X(t)dt \overset{L_2}{=} m$$

则称过程的均值有遍历性.

遍历性定理 (续)

定义 4.5(续)

(b) 若

$$\hat{R}(\tau) \triangleq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} [X(t+\tau)-m][X(t)-m]dt \overset{L_2}{=} R(\tau)$$

则称过程的**协方差函数有遍历性**.
(c) 若随机过程的均值和协方差函数都具有遍历性, 则称此**随机过程具有遍历性**.

- 对于平稳**序列** $\{X(n),\ n=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$, 将上述定义中的 $\overline{X}$ 和 $\hat{R}(\tau)$ 替换为下式即可

$$\overline{X} \triangleq \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{N} X(k) \overset{L_2}{=} m$$

$$\hat{R}(\tau) \triangleq \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{N} [X(k+\tau)-m][X(k)-m]dt \overset{L_2}{=} R(\tau)$$

遍历性定理 (续)

- 对于非负随机过程 (序列), 将定义中的积分 (求和) 限制在 $[0, \infty)$, 例如

$$\overline{X} \triangleq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t)dt \stackrel{L_2}{=} m$$

- 遍历性的直观理解: 考虑有限状态的平稳序列, 各状态相互可达
  - ▷ 记其状态空间为 $E = \{e_1, e_2, \cdots, e_b\}$
  - ▷ 令 $A_N = \{X_n : -N \leq n \leq N\}$
  - ▷ 当 N 足够大时, A_N 中的元素几乎经历了 E 中的各个状态 (遍历性)
  - ▷ 当 $N \to \infty$ 时, A_N 中元素为 e_i 的频率趋于 p_i, 相当于平稳分布下状态 e_i 出现的概率
  - ▷ 从而, 对 A_N 中的元素, 有 按时间取均值 $\to$ 按状态取均值

$$\overline{X}_N = \frac{1}{2N} \sum_{n=-N}^{N} X_n \quad \to \quad \sum_{i=1}^{b} p_i e_i$$

  - ▷ 又因为过程是平稳的, 故在平稳分布下按状态取均值, 等于在任意时刻按状态取均值, 也即

$$\overline{X}_N \quad \to \quad \sum_{i=1}^{b} p_i e_i = m$$

遍历性定理 (续)

- 我们已经了解了遍历性的定义，那么在怎样的条件下，平稳过程才具备遍历性呢？

定理 4.1　均值遍历性定理

(a) 设 $\{X_n,\ n=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$ 为平稳序列，其协方差函数为 $R(\tau)$，则过程有**均值遍历性**的充要条件是

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{\tau=0}^{N-1}R(\tau)=0.$$

(b) 设 $\{X(t),\ -\infty<t<\infty\}$ 为平稳过程，其协方差函数为 $R(\tau)$，则过程有均值遍历性的充要条件是

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}(1-\frac{\tau}{2T})R(\tau)d\tau=0$$

遍历性定理 (续)

定理 4.1 证明

- 我们仅证明连续时间的情形, 离散时间的证明思路相同
- 记

$$\overline{X}_T = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X(t)dt$$

- 均值遍历性成立, 相当于随机变量 $\overline{X}_T$ **均方收敛于** m, 也即 $\mathbb{E}(\overline{X}_T - m)^2$ 收敛于 0
- 先计算均值, 有

$$\mathbb{E}\overline{X}_T = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \mathbb{E}X(t)dt = m$$

- 则证明 $\overline{X}_T$ **均方收敛于** m 等价于证 $\mathrm{Var}\overline{X}_T$ 收敛于 0, 计算方差

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\overline{X}_T &= \mathbb{E}\overline{X}_T^2 - (\mathbb{E}\overline{X}_T)^2 \\ &= \mathbb{E}\left[\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X(t)dt\right]^2 - m^2 \quad \text{(接下页)}\end{aligned}$$

遍历性定理 (续)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}\overline{X}_T &= \mathbb{E}\left[\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X(t)dt\right]^2 - m^2 \\
&= \frac{1}{4T^2}\mathbb{E}\int_{-T}^{T} X(t)dt\int_{-T}^{T} X(s)ds - m^2 \\
&= \frac{1}{4T^2}\mathbb{E}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} X(t)X(s)dtds - \frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} m^2 dtds \\
&= \frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} [\mathbb{E}X(t)X(s) - m^2]dtds \\
&= \frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} \mathbb{E}[X(t)-m][X(s)-m]dtds \\
&= \frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} R(t-s)dtds
\end{aligned}
$$

遍历性定理 (续)

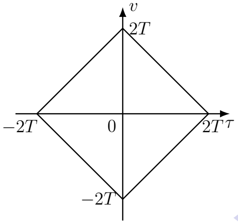
- 对上式进行变量代换，令 $\tau = t - s,\ v = t + s$
- 由于 $t = \frac{\tau+v}{2},\ s = \frac{v-\tau}{2}$，积分区域由 $\{-T \le t \le T,\ \ -T \le s \le T\}$ 变为 $\{-2T \le \tau + v \le 2T,\ \ -2T \le \tau - v \le 2T\}$
- 利用 τ-v 关于 t-s 的Jacobi 行列式，可得 $d\tau dv = |J| ds dt$，其中

$$|J| = \begin{pmatrix} \frac{\partial\tau}{\partial t} & \frac{\partial\tau}{\partial s} \\ \frac{\partial v}{\partial t} & \frac{\partial v}{\partial s} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

- 经过变量代换，得到

$$\mathrm{Var}\overline{X}_T = \frac{1}{4T^2} \int\int_{-2T \le \tau \pm v \le 2T} \frac{R(\tau)}{|J|} d\tau dv$$

- 积分区域如图所示



- 由于 $R(\tau)=R(-\tau)$ 是**偶函数**, 有

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\overline{X}_T &= \frac{2}{4T^2}\int_0^{2T}\int_{\tau-2T}^{2T-\tau}\frac{R(\tau)}{|J|}dvd\tau \qquad \text{(右半平面积分的 2 倍)}\\ &= \frac{1}{2T^2}\int_0^{2T}\frac{R(\tau)}{2}(4T-2\tau)d\tau = \frac{1}{T}\int_0^{2T}R(\tau)(1-\frac{\tau}{2T})d\tau\end{aligned}$$

- 平稳过程是否具有均值遍历性, 等价于 $\lim_{T\to\infty}\mathrm{Var}\overline{X}_T=0$ 是否成立
- 也即, 均值遍历性的等价条件为

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}R(\tau)(1-\frac{\tau}{2T})d\tau=0$$

定理 4.1 得证

- 基于定理 4.1，可以推出若干判断平稳过程均值遍历性的充分条件

推论 4.1

对平稳过程而言，若 $\int_{-\infty}^{\infty}|R(\tau)|d\tau < \infty$，则均值遍历性成立.

证明:

- 当 $0 \le \tau \le 2T$ 时，$\left|R(\tau)(1-\frac{\tau}{2T})\right| \le |R(\tau)|$
- 因此，当 $T \to \infty$ 时

$$\left|\frac{1}{T}\int_0^{2T} R(\tau)(1-\frac{\tau}{2T})d\tau\right| \le \frac{1}{T}\int_0^{2T}|R(\tau)|d\tau \le \frac{1}{T}\int_0^{\infty}|R(\tau)|d\tau \to 0$$

推论 4.2

对平稳**序列**而言，若 $\lim_{\tau\to\infty} R(\tau) = 0$，则均值遍历性成立.

证明：利用定理 4.1(a)，并由 Stoltz 定理可知

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} R(\tau) = \lim_{N\to\infty} R(N-1) = 0$$

得证

- 上面我们讨论了均值遍历性，接下来我们考虑**协方差函数 $R(\tau)$ 的遍历性**
- 考虑随机过程

$$Y_\tau(t) = [X(t+\tau) - m][X(t) - m]$$

- 给定 t 时，$Y_\tau(t)$ 可以看作对协方差函数 $R(\tau)$ 的一次采样
- 有 $\mathbb{E}Y_\tau(t) = R(\tau)$

遍历性定理 (续)

- 我们已证明, 均值遍历性等价于 $\lim_{T\to\infty} \mathrm{Var}\overline{X}_T = 0$, 其中

$$\overline{X}_T = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X(t)dt$$

- 类似地, 协方差函数遍历性, 等价于 $\lim_{T\to\infty} \mathrm{Var}\overline{Y}_\tau^T = 0$, 其中

$$\overline{Y}_\tau^T = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} Y_\tau(t)dt = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}[X(t+\tau)-m][X(t)-m]dt$$

- 通过证明 $\lim_{T\to\infty} \mathrm{Var}\overline{Y}_\tau^T = 0$, 我们得到如下协方差遍历性定理

遍历性定理 (续)

定理 4.2 协方差函数遍历性定理

(a) 设 $\{X(t), \in \mathbb{R}\}$ 为平稳过程，且对于给定的 τ, $\{X(t)X(t+\tau),\ t \in \mathbb{R}\}$ 是平稳过程，则过程协方差函数有遍历性的充要条件是

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^{2T}(1-\frac{\tau_1}{2T})[B(\tau_1)-R^2(\tau)]d\tau_1 = 0,$$

其中 $B(\tau_1) = \mathbb{E}X(t+\tau+\tau_1)X(t+\tau_1)X(t+\tau)X(t)$.

(b) 对平稳序列 $\{X(n),\ n=0,\pm1,\cdots\}$，若$\{X(n)X(n+\tau),\ n \in \mathbb{Z}\}$ 是平稳过程，则协方差函数遍历性的充要条件为

$$\lim_{N\to\infty} \frac{4}{2N+1}\sum_{i=0}^{2N}\left(1-\frac{2i+1}{2(2N+1)}\right)\left[\mathbb{E}X(i+\tau)X(i)X(\tau)X(0)-R^2(\tau)\right] = 0$$

- 注意到过程的均值是一个常数，而协方差 $R(\tau)$ 是 τ 的函数，因此协方差函数的遍历性需在给定 τ下讨论

遍历性定理 (续)

- 协方差函数遍历性的验证, 牵涉到过程的**四阶混合矩**, 一般不易检验
- 而对于某些特殊过程 (如 Gauss 过程), 结论要简单的多

定理 4.3 Gauss 平稳过程协方差函数的遍历性

设 $\{X_n,\ n=0,\pm 1,\cdots\}$ 是均值为 0 的 Gauss 平稳过程, 如果

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}R^2(k)=0,$$

则其协方差函数有遍历性.

- 宽平稳的 Gauss 过程也是严平稳的
- Gauss 过程的**四阶矩也具有平稳性** (一般宽平稳过程只保证二阶矩的平稳性)
- **不再需要对任意给定 m, $\{X_nX_{n+m},\ n\in\mathbb{Z}\}$ 是平稳过程这一假设**
- 再利用联合 Gauss 分布的混合四阶矩满足

$$\mathbb{E}(X_1X_2X_3X_4)=\mathbb{E}(X_1X_2)\mathbb{E}(X_3X_4)+\mathbb{E}(X_1X_3)\mathbb{E}(X_2X_4)+\mathbb{E}(X_1X_4)\mathbb{E}(X_2X_3)-2\mathbb{E}X_1\mathbb{E}X_2\mathbb{E}X_3\mathbb{E}X_4$$

例 4.10

- 设 $X(t) = a\cos(\omega t + \Theta)$, $\Theta \sim U(0, 2\pi)$, $\omega \neq 0$
- 则 $\{X(t), \ -\infty < t < \infty\}$ 的均值具有遍历性
- 先验证过程是平稳的, 过程均值:

$$\mathbb{E}X(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} a\cos(\omega t + \theta)d\theta = 0$$

- 过程协方差函数:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}X(t+\tau)X(t) &= \mathbb{E}a^2\cos(\omega(t+\tau)+\Theta)\cos(\omega t+\Theta) \\
&= \frac{a^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(\omega(t+\tau)+\theta)\cos(\omega t+\theta)d\theta \\
&= \frac{a^2}{4\pi}\int_0^{2\pi}[\cos(\omega(2t+\tau)+2\theta)+\cos\omega\tau]d\theta \\
&= \frac{a^2}{2}\cos\omega\tau
\end{aligned}$$

- 协方差函数只依赖于 τ, 因此过程是平稳的

遍历性定理 (续)

- 再利用定理 4.1 验证遍历性

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{T}\int_0^{2T}(1-\frac{\tau}{2T})R(\tau)d\tau \\
= \quad & \frac{a^2}{2T}\int_0^{2T}(1-\frac{\tau}{2T})\cos\omega\tau d\tau \qquad (\text{由于} R(\tau)=\frac{a^2}{2}\cos\omega\tau) \\
= \quad & \frac{a^2}{2\omega T}\sin\omega\tau|_{\tau=0}^{2T}-\frac{a^2}{4\omega T^2}\int_{\tau=0}^{2T}\tau d\sin\omega\tau \\
= \quad & \frac{a^2}{2\omega T}\sin 2\omega T-\frac{a^2}{4\omega T^2}\left[2T\sin 2\omega T-\int_0^{2T}\sin\omega\tau d\tau\right] \\
= \quad & \frac{a^2}{4\omega T^2}\int_0^{2T}\sin\omega\tau d\tau
\end{aligned}
$$

- 取 $T\to\infty$, 有

$$
\begin{aligned}
& \lim_{T\to\infty}\left|\frac{1}{T}\int_0^{2T}(1-\frac{\tau}{2T})R(\tau)d\tau\right| \\
\leq \quad & \lim_{T\to\infty}\frac{a^2}{4\omega T^2}\int_0^{2T}|\sin\omega\tau|\,d\tau \;\leq\; \lim_{T\to\infty}\frac{a^2}{2\omega T}=0
\end{aligned}
$$

- 从而, 过程具有均值遍历性

例 4.11

- 设随机变量序列 $\{X_n,\ n=0,\pm1,\cdots\}$ 满足

$$X_n=\sum_{k=1}^{m}(A_k\cos\omega_k n+B_k\sin\omega_k n),$$

  - ▷ 其中 $A_1,\cdots,A_m,\ B_1,\cdots,B_m$ 是两两不相关的随机变量
  - ▷ $\mathbb{E}A_k=\mathbb{E}B_k=0,\ \mathbb{E}A_k^2=\mathbb{E}B_k^2=\sigma^2,\ 1\le k\le m$
  - ▷ $\omega_k\in(0,2\pi)$
- 试考察序列均值的遍历性

解:

- 先验证序列的平稳性, 再验证均值的遍历性
- 基于例 4.6 的结果, 利用题设条件与和角公式, 可得过程是平稳的

$$\mathbb{E}X_n=0,\ \ n=0,\pm1,\cdots$$

$$R(n+\tau,n)=R(\tau)=\sum_{k=1}^{m}\sigma_k^2\cos\omega_k\tau,\ \ n=0,\pm1,\cdots$$

遍历性定理 (续)

- 再利用定理 4.1, 验证均值的遍历性

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{N}\left|\sum_{\tau=0}^{N-1} R(\tau)\right| &= \frac{1}{N}\left|\sum_{\tau=0}^{N-1}\sum_{k=1}^{m}\sigma_k^2\cos\omega_k\tau\right| \\
&\le \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{m}\sigma_k^2\left|\sum_{\tau=0}^{N-1}\cos\omega_k\tau\right|
\end{aligned}
$$

- 由三角求和公式 $\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx=\frac{\sin(n+1/2)x}{2\sin(x/2)}$, 得

$$
\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\left|\sum_{\tau=0}^{N-1} R(\tau)\right| &\le \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{m}\sigma_k^2\left|\sum_{\tau=0}^{N-1}\cos\omega_k\tau\right| \\
&= \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{m}\sigma_k^2\left|\frac{1}{2}+\frac{\sin\omega_k\frac{2N-1}{2}}{2\sin\frac{\omega_k}{2}}\right| \\
&\le \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{m}\sigma_k^2\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2|\sin\frac{\omega_k}{2}|}\right]=0
\end{aligned}
$$

因此, 过程均值有遍历性

遍历性定理 (续)

例 4.12

- 回顾例 4.7 中的滑动平均序列

$$X_n = \sum_{i=1}^{k} a_i \varepsilon_{n+1-i} = a_1 \varepsilon_n + a_2 \varepsilon_{n-1} + \cdots + a_k \varepsilon_{n+1-k}$$

- 已算出

$$R(\tau) = \begin{cases} \sigma^2 \sum_{i=1}^{k-\tau} a_i a_{i+\tau}, & 0 \le \tau \le k-1 \\ 0, & \tau \ge k \end{cases}$$

- 利用推论 4.2, 有

$$\lim_{\tau \to \infty} R(\tau) = 0,$$

故序列具有均值遍历性

例 4.13

- 回顾例 4.8 中的随机电报信号: $P(X(t)=I)=P(X(t)=-I)=\frac{1}{2}$, 且在 $[t,t+\tau]$ 时间内, 信号正负号变化的次数 N 服从速率为 $\lambda>0$ 的 Poisson 过程
- 已算出
$$R(\tau)=I^2e^{-2\lambda|\tau|}$$
- 利用推论 4.1 及 $R(\tau)$ 是偶函数, 有
$$\int_{-\infty}^{\infty}R(\tau)d\tau=2I^2\int_0^{\infty}e^{-2\lambda\tau}d\tau=\frac{I^2}{\lambda}<\infty$$
- 因此, 该信号具有均值的遍历性

遍历性定理 (续)

- 在实际中，很多时候过程的表达式是未知的
- 假设我们只观测了过程 $X(t)$ 在时间段 $[0,T]$ 上的一条实验记录 (样本轨道)$x(t)$
- 基于此实验记录和遍历性理论的结果，我们对过程的均值和协方差函数进行如下估计:

$$\hat{m}_T = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt$$

$$\begin{aligned}\hat{R}_T(\tau) &= \frac{1}{T-\tau}\int_0^{T-\tau}[x(t)-\hat{m}_{T-\tau}][x(t+\tau)-\hat{m}_{T-\tau}]dt \\ &\approx \frac{1}{T-\tau}\int_0^{T-\tau}x(t)x(t+\tau)dt-\hat{m}_{T-\tau}^2,\ 0\le\tau<T\end{aligned}$$

- 进一步来说，实践中的采样过程通常是离散的
- 此时，我们将采样时段 $[0,T]$ 等分为 N 个长度为 $\Delta t=\frac{T}{N}$ 的时间间隔，然后在时刻 $t_k=(k-\frac{1}{2})\Delta t,\ k=1,2,\cdots,N$ 进行采样
- 得到 N 个样本，记为 $x_k=x(t_k),\ k=1,2,\cdots,N$

遍历性定理 (续)

- 进行离散采样后，上述连续形式的估计函数，可以如下离散形式近似 (也即用求和号替代积分号)
- 均值:

$$\hat{m}_T = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt \approx \frac{1}{T}\sum_{k=1}^{N} x_k \Delta t = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k$$

- 协方差函数，当 $\tau_r = r\Delta t$ 时:

$$\begin{aligned}
\hat{R}_T(\tau_r) &\approx \frac{1}{T-\tau_r}\int_0^{T-\tau_r} x(t)x(t+\tau_r)dt - \hat{m}^2_{T-\tau_r} \\
&\approx \frac{1}{T-\tau_r}\sum_{k=1}^{N-r} x_k x_{k+r}\Delta t - \left[\frac{1}{T-\tau_r}\sum_{k=1}^{N-r} x_k \Delta t\right]^2 \\
&= \frac{1}{N-r}\sum_{k=1}^{N-r} x_k x_{k+r} - \left[\frac{1}{N-r}\sum_{k=1}^{N-r} x_k\right]^2
\end{aligned}$$

遍历性定理 (续)

- 上述估计公式，很容易用计算机实现
- 需要注意**采样间隔 Δt 的选择**
  - ▷ 原则上来说，Δt 越小，级数逼近积分的效果越好
  - ▷ 但由于技术原因 (成本和精度等)，通常无法取到很小

采样定理

如果 $\{x(t),\ 0 \le t \le T\}$ 的 Fourier 变换 $H(j\omega)$ 有截止角频率 ω_c，则当**采用间隔 $\Delta t \le \frac{\pi}{\omega_c}$** 时，$\{x_k = x\left((k-\frac{1}{2})\Delta t\right),\ k = 1, 2, \cdots, N\}$ 可代表函数 $x(t)$ 在 $[0, T]$ 上的**全部信息**.

- ▷ **截止角频率** ω_c 指的是，在频率域上，$\omega \le \omega_c$ 时 $H(j\omega)$ 非零，$\omega > \omega_c$ 时 $H(j\omega) = 0$
- ▷ 采样间隔 $\Delta t \le \frac{\pi}{\omega_c}$ 的等价表述为，采样次数 $N \ge \frac{\omega_c}{\pi T}$
- ▷ $j = \sqrt{-1}$ 是单位虚数

- 在工程实践中遇到的平稳过程
  - ▷ 遍历性定理所需的条件一般都能满足
  - ▷ 但验证比较困难，所以通常**先假设过程具有遍历性**，再检验假设是否合理

- 平稳过程遍历性的应用
  - ▷ 通过一次样本轨道, 估计过程的均值和协方差函数
  - ▷ 求解电子系统中信号和噪声过程的直流分量、平均功率

例如:

- 若 $X(t)$ 表示噪声电压 (或电流)
- $x(t)$ 表示某次观测到的噪声电压
- 若过程有遍历性, 噪声电压的直流分量为

$$m = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt$$

- 噪声电压消耗在 1 欧姆上的交流功率为

$$\sigma^2 = R(0) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T [x(t) - m]^2 dt$$

其中 σ 也是电压的有效值

§4.3 协方差函数与功率谱密度

- 类似于确定性信号，对平稳的随机信号，我们可以利用 Fourier 变换，在频率域上研究其性质
- 本节我们讨论平稳过程协方差函数 $R(\tau) = \mathbb{E}[X(t+\tau)-m][X(t)-m]$ 及其对应频率域上的结构功率谱密度 $S(\omega) = \int R(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$
- 讨论对自相关函数 $r(\tau) = \mathbb{E}X(t+\tau)X(t)$ 同样适用，当 $m = 0$ 时，自相关函数即是协方差函数
- 在 4.1 节中，我们已证明实平稳过程的协方差函数具有如下性质
  - 对称性：$R(-\tau) = R(\tau)$
  - 有界性：$|R(\tau)| \leq R(0)$
  - 此外，还有非负定性：$\mathbf{a}^T\Sigma\mathbf{a} \geq 0$，其中 $\mathbf{a} = [a_1, a_2, \cdots, a_N]^T$ 为任意实数向量，$t_1, t_2, \cdots, t_N$ 为任意时刻，

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \mathrm{Cov}(X(t_1), X(t_1)) & \mathrm{Cov}(X(t_1), X(t_2)) & \cdots & \mathrm{Cov}(X(t_1), X(t_N)) \\ \mathrm{Cov}(X(t_2), X(t_1)) & \mathrm{Cov}(X(t_2), X(t_2)) & \cdots & \mathrm{Cov}(X(t_2), X(t_N)) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathrm{Cov}(X(t_N), X(t_1)) & \mathrm{Cov}(X(t_N), X(t_2)) & \cdots & \mathrm{Cov}(X(t_N), X(t_N)) \end{pmatrix}$$

非负定性的证明:

- 根据协方差定义，有

$$\mathrm{Cov}(X(t_n), X(t_k)) = \mathbb{E}[X(t_n) - m][X(t_k) - m]$$

- 从而

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}^T \Sigma \mathbf{a} &= \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} a_n a_k \mathrm{Cov}(X(t_n), X(t_k)) \\
&= \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} \mathbb{E} a_n [X(t_n) - m] a_k [X(t_k) - m] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N} a_n [X(t_n) - m]\right]\left[\sum_{k=1}^{N} a_k [X(t_k) - m]\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N} a_n [X(t_n) - m]\right]^2 \geq 0
\end{aligned}$$

- 非负定性得证

协方差函数 (续)

定义 平稳过程的均方导数

对于平稳过程 $\{X(t),\ t \in T\}$, 如果存在随机变量 $Y(t)$, 使得

$$\lim_{h\to 0} \mathbb{E}\left|\frac{X(t+h)-X(t)}{h} - Y(t)\right|^2 = 0,$$

则称 $Y(t)$ 为过程 $X(t)$ 在 t 点的**均方导数**, 简称导数, 记作 $X'(t)$ 或 $\frac{dX(t)}{dt}$.

平稳过程均方导数存在的充要条件

平稳过程均方导数存在的**充要条件**是二重极限

$$\lim_{h\to 0, k\to 0} \frac{R(0)-R(h)-R(k)+R(h-k)}{hk} \quad \text{存在且有限}$$

证明: 见下页

协方差函数 (续)

- 根据均方收敛准则, $\lim_{h\to 0}\mathbb{E}\left|\frac{X(t+h)-X(t)}{h}-Y(t)\right|^2=0$ 等价于

$$\lim_{h\to 0,k\to 0}\mathbb{E}\frac{X(t+h)-X(t)}{h}\cdot\frac{X(t+k)-X(t)}{k}\quad \text{存在且有限}$$

- 进一步地, 对于平稳过程, 有

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\frac{X(t+h)-X(t)}{h}\cdot\frac{X(t+k)-X(t)}{k}\\
=\;&\frac{\mathbb{E}[X(t+h)-m-(X(t)-m)][X(t+k)-m-(X(t)-m)]}{hk}\\
=\;&\frac{R(t+h,t+k)-R(t,t+k)-R(t+h,t)+R(t,t)}{hk}\\
=\;&\frac{R(h-k)-R(k)-R(h)+R(0)}{hk}\qquad \text{(协方差只取决于时间差)}
\end{aligned}$$

- 得证

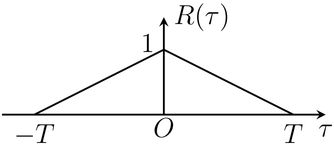
- 假定平稳过程 $X(t)$ 是 n **阶均方可导**的, 且其协方差函数 $2n$ 阶可导, 则过程 n 阶导的协方差函数有如下性质:

$$\mathrm{Cov}(X^{(n)}(t), X^{(n)}(t+\tau)) = (-1)^n R^{(2n)}(\tau)$$

一些工程中常见的协方差函数 (教材 表 4.1)

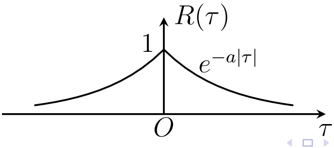
(1) 线性型: $R(\tau)=\begin{cases}1-\frac{|\tau|}{T}, & |\tau|\le T,\\ 0, & |\tau|>T\end{cases}$

- 在 $\tau=0$ 处连续, 但不可微
- 由前述充要条件可知, 均方导数 $X'(t)$ 不存在



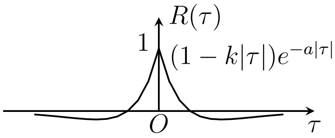
(2) 指数型: $R(\tau)=e^{-a|\tau|},\ a>0$

- 在 $\tau=0$ 处连续不可微, $X'(t)$ 不存在
- 除 0 点外是凸函数 (二阶导为正)



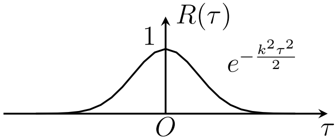
(4) 线性指数混合型: $R(\tau) = (1 - k|\tau|)e^{-k|\tau|}$, $k > 0$

- 当 $|\tau| > \frac{1}{k}$ 时, $R(\tau)$ 取负值, 且在 $|\tau| = \frac{2}{k}$ 时取到最小值
- 在 $\tau = 0$ 处连续不可微, $X'(t)$ 不存在



(5) 正态型: $R(\tau) = e^{-\frac{k^2\tau^2}{2}}$

- 函数形式与均值为 0, 方差为 $\frac{1}{k}$ 的正态密度函数仅相差一个常数因子
- 在 $\tau = 0$ 处任意次可微, $X^{(n)}(t)$ 存在



几种常见随机信号的协方差函数

例 1 振幅调制波:

- 设 $\{Y(t),\ t \in \mathbb{R}\}$ 是一个零均值的实平稳过程
- 则 $\{Z(t) = Y(t)e^{j\lambda_0 t},\ t \in \mathbb{R}\}$ 是一复平稳过程，证明见协方差函数
  - ▷ 其中 λ_0 代表角频率，是一个实数
  - ▷ $j = \sqrt{-1}$ 代表单位虚数
- 称 $Z(t)$ 是由 $Y(t)$ 确定的振幅调制信号
- 以 $R_Z(\tau)$ 和 $R_Y(\tau)$ 分别表示过程 Z 和 Y 的协方差函数，则有

$$\begin{aligned} R_Z(\tau) &\triangleq \mathbb{E}Z(t+\tau)\overline{Z(t)} \\ &= \mathbb{E}Y(t+\tau)e^{j\lambda_0(t+\tau)}Y(t)\overline{e^{j\lambda_0 t}} = R_Y(\tau)e^{j\lambda_0 \tau} \end{aligned}$$

- 协方差函数只依赖于 τ，故过程是平稳的
- 注意对于复平稳过程，我们定义

$$R_Z(\tau) \triangleq \mathbb{E}Z(t+\tau)\overline{Z(t)} \neq \mathbb{E}Z(t)\overline{Z(t+\tau)}$$

  - ▷ 上述不等号两边的式子互为共轭
- 复平稳过程的协方差函数是共轭对称函数(通常不再是偶函数)

$$R(\tau) = \mathbb{E}Z(t+\tau)\overline{Z(t)} = \mathbb{E}Z(t)\overline{Z(t-\tau)} = \overline{\mathbb{E}Z(t-\tau)\overline{Z(t)}} = \overline{R(-\tau)}$$

实振幅调制波:

- 实数形式的振幅调制波:

$$X(t) = Y(t)\cos(\omega t + \Theta), \ t \in \mathbb{R}$$

- 其中随机相位 $\Theta \sim U[0, 2\pi]$, 且与 $Y(t)$ 独立
- 当 $\mathbb{E}Y(t) = 0$ 时, 协方差函数为

$$\begin{aligned}
& R_X(\tau) = \mathbb{E}X(t)X(t+\tau) \\
= \ & \mathbb{E}Y(t)\cos(\omega t + \Theta)Y(t+\tau)\cos(\omega(t+\tau) + \Theta) \\
= \ & \mathbb{E}Y(t)Y(t+\tau)\mathbb{E}\cos(\omega t + \Theta)\cos(\omega(t+\tau) + \Theta) \\
= \ & R_Y(\tau)\mathbb{E}\frac{\cos(\omega t + \Theta + [\omega(t+\tau) + \Theta]) + \cos(\omega t + \Theta - [\omega(t+\tau) + \Theta])}{2} \\
= \ & \frac{1}{2}R_Y(\tau)\cos\omega\tau
\end{aligned}$$

其中由于 $\Theta \sim U[0, 2\pi]$, 有 $\mathbb{E}\cos(\omega t + \Theta + [\omega(t+\tau) + \Theta]) = 0$

- 协方差函数只依赖于 τ, 故 $X(t)$ 是平稳过程

例 2 频率调制波:

- 设 $\{Y(t),\ t \in \mathbb{R}\}$ 是零均值的平稳 Gauss 过程
  - ▷ $\mathrm{Var}Y(t) = \mathbb{E}^2 Y(t) = R_Y(0)$
  - ▷ 因此, $Y(t) \sim N(0, R_Y(0))$
- 由 $Y(t)$ 确定的**相位调制信号**为

$$X(t) = \cos Y(t),\ \ t \in \mathbb{R}$$

- 求过程均值, 运用 Euler 公式

$$\mathbb{E}X(t) = \mathbb{E}\cos Y(t) = \mathbb{E}\frac{e^{jY(t)} + e^{-jY(t)}}{2}$$

- 利用**特征函数**求解. 类似矩母函数, 随机变量 Z 的特征函数定义为

$$g(a) = \mathbb{E}e^{jaZ}$$

几种常见随机信号的协方差函数 (续)

- 查表知, 服从 $N(\mu,\sigma^2)$ 随机变量的特征函数为

$$g(a) = e^{j\mu a - \frac{1}{2}\sigma^2 a^2}$$

- 由于 $Y(t)$ 服从 $N(0, R_Y(0))$, 因此, $\mathbb{E}e^{jY(t)} = g(1) = e^{-\frac{1}{2}R_Y(0)}$
- 由于特征函数满足性质 $g(-a) = \overline{g(a)}$, 因此,

$$\mathbb{E}e^{-jY(t)} = \overline{g(-1)} = e^{-\frac{1}{2}R_Y(0)}$$

- 从而有

$$\mathbb{E}X(t) = \mathbb{E}\frac{e^{jY(t)} + e^{-jY(t)}}{2} = e^{-\frac{1}{2}R_Y(0)}$$

- 再计算协方差函数, 注意 $X(t)$ 是实值随机过程

$$\mathbb{E}X(t)X(t+\tau) = \mathbb{E}\frac{[e^{jY(t)} + e^{-jY(t)}][e^{jY(t+\tau)} + e^{-jY(t+\tau)}]}{4}$$

$$= \mathbb{E}\frac{e^{j[Y(t)+Y(t+\tau)]} + e^{j[Y(t)-Y(t+\tau)]} + e^{-j[Y(t)-Y(t+\tau)]} + e^{-j[Y(t)+Y(t+\tau)]}}{4}$$

几种常见随机信号的协方差函数 (续)

- 根据定义 4.3 中 Gauss 过程的定义, $(Y(t), Y(t+\tau))$ 的联合分布服从二维正态分布, 即

$$\begin{pmatrix} Y(t) \\ Y(t+\tau) \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} R_Y(0) & R_Y(\tau) \\ R_Y(\tau) & R_Y(0) \end{pmatrix}\right)$$

根据二维正态分布 $N(\mu_1, \sigma_1; \mu_2, \sigma_2; \rho)$ 的特征函数

$$g(a_1, a_2) = e^{j(\mu_1 a_1 + \mu_2 a_2) - \frac{1}{2}(\sigma_1^2 a_1^2 + 2\sigma_1\sigma_2\rho a_1 a_2 + \sigma_2^2 a_2^2)}$$

$(Y(t), Y(t+\tau))$ 的特征函数可以表示为

$$g(a_1, a_2) = e^{-\frac{1}{2}[R_Y^2(0)a_1^2 + 2R_Y(\tau)a_1 a_2 + R_Y^2(0)a_2^2]}$$

- 根据二维随机变量特征函数的性质, 随机变量 $b_1 Y_t + b_2 Y(t+\tau)$ 的特征函数满足

$$g(a) = \mathbb{E}e^{j[b_1 Y(t) + b_2 Y(t+\tau)]} = g(b_1 a, b_2 a)$$

几种常见随机信号的协方差函数 (续)

- 因此，有

$$\mathbb{E}e^{j[Y(t)+Y(t+\tau)]} = g(1,1) = e^{-[R_Y(0)+R_Y(\tau)]}$$
$$\mathbb{E}e^{-j[Y(t)+Y(t+\tau)]} = g(-1,-1) = e^{-[R_Y(0)+R_Y(\tau)]}$$
$$\mathbb{E}e^{j[Y(t)-Y(t+\tau)]} = g(1,-1) = e^{-[R_Y(0)-R_Y(\tau)]}$$
$$\mathbb{E}e^{-j[Y(t)-Y(t+\tau)]} = g(-1,1) = e^{-[R_Y(0)-R_Y(\tau)]}$$

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}X(t)X(t+\tau) \\
= \ & \mathbb{E}\frac{e^{j[Y(t)+Y(t+\tau)]} + e^{j[Y(t)-Y(t+\tau)]} + e^{-j[Y(t)-Y(t+\tau)]} + e^{-j[Y(t)+Y(t+\tau)]}}{4} \\
= \ & e^{-R_Y(0)}\frac{e^{R_Y(\tau)} + e^{-R_Y(\tau)}}{2} \\
= \ & e^{-R_Y(0)}\cosh(R_Y(\tau))
\end{aligned}$$

- 过程 $X(t)$ 的协方差函数

$$R_X(\tau) = \mathbb{E}X(t)X(t+\tau) - [\mathbb{E}X(t)]^2 = e^{-R_Y(0)}[\cosh(R_Y(\tau)) - 1]$$

只依赖于 τ，因此 $X(t) = \cos Y(t)$ 是平稳过程

例 3 平方检波:

- 设 $\{Y(t),\ t \in \mathbb{R}\}$ 是均值为 0 的平稳 Gauss 过程
- 令 $X(t) = Y^2(t),\ t \in \mathbb{R}$
- 则有

$$\mathbb{E}X(t) = \mathbb{E}Y^2(t) = \mathbb{E}Y^2(0) = R_Y(0)$$

$$\mathbb{E}X(t)X(t+\tau) = \mathbb{E}Y^2(t)Y^2(t+\tau)$$

- 利用 Gauss 过程四阶混合矩公式

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_1X_2X_3X_4) &= \mathbb{E}(X_1X_2)\mathbb{E}(X_3X_4) + \mathbb{E}(X_1X_3)\mathbb{E}(X_2X_4) \\ &\quad + \mathbb{E}(X_1X_4)\mathbb{E}(X_2X_3) - 2\mathbb{E}X_1\mathbb{E}X_2\mathbb{E}X_3\mathbb{E}X_4\end{aligned}$$

- 计算可得 $R_X(\tau) = 2R_Y^2(\tau)$

功率谱密度

- 本小节我们研究协方差函数的频率结构
- 我们先介绍确定性时间函数的能量、能谱密度、功率谱的概念
- 设 $x(t)$ 是以 $2T$ 为周期的函数，且在 $[-T,T]$ 上只有有限个第一类间断点 (左右极限都存在)
- 则 $x(t)$ 有 Fourier 展开

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A(n)e^{jn\omega t},$$

其中 $\omega = \frac{2\pi}{2T} = \frac{\pi}{T}$,

$$A(n) = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)e^{-jn\omega t}dt$$

- 系数 $A(n)$ 一般为复数，由定义知其具有共轭对称性

$$\overline{A(-n)} = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)e^{\,j(-n)\omega t}dt = A(n)$$

功率谱密度 (续)

- 系数 $A(n) = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)e^{-jn\omega t}dt$
  - 通常，将 $\frac{1}{2}A(0)$ 称为直流分量
  - $|A(1)| = |A(-1)|$ 称为基波 ω 的振幅
  - $|A(n)| = |A(-n)|$ 称为谐波 $n\omega$ 的振幅
- 将 $x(t)$ 在一个周期 $[-T, T]$ 上的能量，按频率进行分解
  - 可将 $x(t)$ 看作加在 1 欧姆电阻上的电压
- 若周期信号一周期内的总能量有限，也即

$$\int_{-T}^{T} x^2(t)dt < \infty$$

则 Parseval 等式成立:

$$\int_{-T}^{T} x^2(t)dt = 2T\sum_{n=-\infty}^{\infty}|A(n)|^2$$

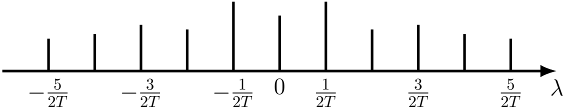
即

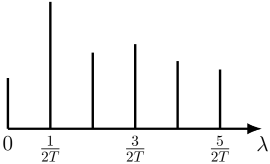
$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x^2(t)dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|A(n)|^2$$

- 平均功率 = 直流、基波和各谐波的功率和

功率谱密度 (续)

- 记 $\omega_n = n\omega = 2\pi\frac{n}{2T}$ 为各谐波的角频率, $\lambda_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{n}{2T}$ 为线频率
- 下图是 $x(t)$ 功率谱的示例: 左图为功率谱, 右图为半功率谱





- 除 0 外, 半功率谱的值为功率谱在同处的两倍
- 上述信号是周期的, 功率谱是离散的

功率谱密度 (续)

- 对于非周期信号，如果总能量 $\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt < \infty$，则 $x(t)$ 的 Fourier 变换存在，频谱为
$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$
- $F(\omega) = \overline{F(-\omega)}$，是非离散的，且 Parseval 等式仍然成立
$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$
- $|F(\omega)|^2$ 称为能量谱密度

功率谱密度 (续)

- 总能量有限的信号，称为能量型信号，也即 $\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt < \infty$
- 总能量无限但平均功率有限的信号，称为功率型信号，也即

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x^2(t)dt < \infty$$

- 正弦信号、平稳过程的样本函数等都不是能量型信号，但正弦信号显然是功率型信号
- 为利用 Fourier 变换，求出平均功率的谱表达式，我们引入如下记号

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t), & |t| \le T, \\ 0, & |t| > T \end{cases}$$

- 由于区间有限，$x_T(t)$ 的总能量总是有限的，因此 Fourier 变换存在，记为

$$F(\omega, T) = \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t) e^{-j\omega t} dt$$

功率谱密度 (续)

- 对于 $x_T(t)$, Parseval 等式成立

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_T^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega, T)|^2 d\omega$$

- $x(t)$ 的**平均功率**可表示为

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{\infty} x_T^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\lim_{T\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2T}|F(\omega, T)|^2 d\omega$$

- 记

$$S(\omega) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}|F(\omega, T)|^2$$

- 如果 $S(\omega)$ 存在 (Lesbegue 控制收敛定理), 则平均攻率中的**极限号和积分号可交换**, 也即

$$\lim_{T\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2T}|F(\omega, T)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}|F(\omega, T)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)d\omega$$

功率谱密度 (续)

- 在可交换的前提下，平均功率

$$
\begin{aligned}
\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x^2(t)dt &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x_T^2(t)dt \\
&= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{\infty}x_T^2(t)dt = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2T}|F(\omega,T)|^2d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S(\omega)d\omega
\end{aligned}
$$

- 我们称 $S(\omega)$ 为 $x(t)$ 的**平均功率谱密度**
- $S(\omega)\Delta\omega$ 表示 $x(t)$ 的频率在 $[\omega,\omega+\Delta\omega]$ 的成分，对 $x(t)$ 总功率的贡献
- 在 $S(\omega)$ 存在的假设下，我们将确定性函数的平均功率谱密度的概念，推广到平稳 (**随机**) 过程上

功率谱密度 (续)

- 设 $\{X(t), -\infty < t < \infty\}$ 为平稳过程, 对其每条样本轨道, 有

$$F(\omega, T) = \int_{-T}^{T} X(t) e^{-j\omega t} dt$$

- 注意到 $F(\omega, T)$ 是一个随机变量
- 相应的 Parseval 等式为

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2T}|F(\omega, T)|^2 d\omega$$

- 定义过程 $X(t)$ 的平均功率谱密度为 (若存在)

$$S(\omega) = \lim_{T\to\infty} \mathbb{E}\frac{1}{2T}|F(\omega, T)|^2$$

- 定义过程的平均功率为 (假设期望和无穷积分可交换)

$$P = \lim_{T\to\infty} \mathbb{E}\left[\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X^2(t)dt\right] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi}\mathbb{E}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2T}|F(\omega, T)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)d\omega$$

- 为表示方便, 假设 $\mathbb{E}X(t) = 0$
- 对于平稳过程, 有 $\mathbb{E}X^2(t) = R(0)$, 可得平均功率

$$\begin{aligned} P &= \lim_{T\to\infty} \mathbb{E}\left[\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X^2(t)dt\right] \\ &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \mathbb{E}X^2(t)dt \\ &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} R(0)dt = R(0) \end{aligned}$$

- 利用 Parseval 等式, 有 (假设极限期望与无穷积分可交换)

$$\begin{aligned} R(0) &= \lim_{T\to\infty} \mathbb{E}\left[\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X^2(t)dt\right] = \lim_{T\to\infty} \mathbb{E}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2T}|F(\omega,T)|^2 d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T\to\infty} \mathbb{E}\frac{1}{2T}|F(\omega,T)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)d\omega \end{aligned}$$

- 上式称为平稳过程的平均功率的谱表示式
- 当平稳过程协方差函数满足 $\int_{-\infty}^{\infty} |R(\tau)|d\tau < \infty$ 时, 上述运算次序交换都是合法的

功率谱密度 (续)

平均功率谱密度: $S(\omega) = \lim_{T\to\infty} \mathbb{E}\frac{1}{2T}\left|\int_{-T}^{T} X(t)e^{-j\omega t}dt\right|^2$

- 由 $S(\omega)$ 定义式可知
  - ▷ $S(\omega) \geq 0$
  - ▷ $S(\omega) = \overline{S(\omega)}$, 是实数
  - ▷ $S(\omega) = S(-\omega)$, 是偶函数
- $S(\omega)$ 和自相关函数 $r(\tau)$(也即 $\mathbb{E}X(t) = 0$ 时的 $R(\tau)$) 是一对 Fourier 变换

定理 4.4 Wiener-Khintchine 公式

假设 $\mathbb{E}X(t) = 0$ 且 $\int_{-\infty}^{\infty} |R(\tau)|d\tau < \infty$, 则

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega$$

功率谱密度 (续)

定理 4.4 证明

- 由 $\mathbb{E}X(t)=0$, 有 $R(t-s)=\mathrm{Cov}(X(t),X(s))=\mathbb{E}X(t)X(s)$, 从而

$$
\begin{aligned}
S(\omega) &= \lim_{T\to\infty}\mathbb{E}\frac{1}{2T}\left|\int_{-T}^{T}X(t)e^{-j\omega t}dt\right|^2 \\
&= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\mathbb{E}\int_{-T}^{T}X(t)e^{-j\omega t}dt\overline{\int_{-T}^{T}X(s)e^{-j\omega s}ds} \\
&= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}\mathbb{E}X(t)X(s)e^{-j\omega(t-s)}dtds \\
&= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}R(t-s)e^{-j\omega(t-s)}dtds
\end{aligned}
$$

- 仿照定理 4.1 的证明, 进行变量代换 $u=t+s$, $\tau=t-s$, Jacobi 行列式 $|J|=2$

- 代换后, 积分区域变为$D_1 = \{-2T \le u+\tau \le 2T, -2T \le u-\tau \le 2T\}$

$$
\begin{aligned}
S(\omega) &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int\int_{D_1} R(\tau) e^{-j\omega\tau} \frac{1}{|J|} du d\tau \\
&= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{4T} \int_{-2T}^{2T} \int_{-2T+|\tau|}^{2T-|\tau|} R(\tau) e^{-j\omega\tau} du d\tau \\
&= \lim_{T\to\infty} \int_{-2T}^{2T} \frac{4T-2|\tau|}{4T} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau
\end{aligned}
$$

- 定义 $R_T(\tau) = \begin{cases} \frac{2T-|\tau|}{2T} R(\tau), & |\tau| \le 2T, \\ 0, & |\tau| > 2T, \end{cases}$ 由题设可交换极限和积分号, 得

$$
\begin{aligned}
S(\omega) &= \lim_{T\to\infty} \int_{-2T}^{2T} R_T(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \lim_{T\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R_T(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T\to\infty} R_T(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau
\end{aligned}
$$

- 因此, $S(\omega)$ 是 $R(\tau)$ 的 Fourier 变换, $R(\tau)$ 是 $S(\omega)$ 的逆变换, 得证

- 由于 $R(\tau)$ 和 $S(\omega)$ 都是偶函数, Wiener-Khintchine 公式可进一步写为偶 Fourier 变换形式:

$$S(\omega) = 2\int_0^\infty R(\tau)\cos\omega\tau d\tau$$

$$R(\tau) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty S(\omega)\cos\omega\tau d\omega$$

- 对平稳序列来说, 若 $\sum_{\tau=-\infty}^{\infty}|R(\tau)| < \infty$, 其 Wiener-Khintchine 公式 (DTFT) 为

$$S(\omega) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} R(\tau)e^{-j\omega\tau}$$

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega$$

- 当 $\mathbb{E}X(t) = m$ 时, $S(\omega)$ 和自相关函数 $r(\tau)$ 是一对 Fourier 变换:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} r(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$r(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

- 为方便起见, 以下我们总假定 $\mathbb{E}X(t) = 0$
- 最为常见的谱密度形式, 是有理谱密度, 也即 $S(\omega) = \frac{P(\omega)}{Q(\omega)}$ 是两个多项式的比
- 由谱密度是 ω 的非负实值偶函数知, 其形式如下:

$$S(\omega) = \frac{\omega^{2n} + a_{2n-2}\omega^{2n-2} + \cdots + a_2\omega^2 + a_0}{\omega^{2m} + b_{2m-2}\omega^{2m-2} + \cdots + b_2\omega^2 + b_0} s_0, \quad s_0 \neq 0$$

- 因 $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega = R(0) = \mathbb{E}X^2(0) > 0$, 故 $S(\omega)$ 当在 $[0, \infty)$ 上可积
  - ▷ 可积性要求分母多项式 $Q(\omega) = 0$ 没有实根
  - ▷ 可积性要求 $m > n$
  - ▷ $S(\omega) \geq 0, \forall \omega$ 要求 $s_0 > 0$

例 4.14

- 已知谱密度为

$$S(\omega) = \frac{\omega^2 + 2}{\omega^4 + 5\omega^2 + 4}$$

- 求对应平稳过程的**协方差函数**和**方差**

解:

- 运用 Wiener-Khintchine 公式

$$\begin{aligned} R(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^2 + 2}{\omega^4 + 5\omega^2 + 4} e^{j\omega\tau} d\omega \end{aligned}$$

- 再使用**留数定理**计算上述积分值

功率谱密度 (续)

利用留数定理计算 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{jmz} dz$ 型积分

设 $g(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, 其中 $P(z)$ 及 $Q(z)$ 是互质多项式, 且符合条件:
(1) $Q(z)$ 的次数比 $P(z)$ 的次数高;
(2) 在实轴上 $Q(z) \neq 0$;
(3) $m > 0$.
函数 $g(z)e^{jmz}$ 有 n 个孤立奇点 a_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$. 根据 Jordan 引理有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(z)e^{jmz} dz = 2\pi j \sum_{\mathrm{Im}\ a_k > 0} \operatorname*{Res}_{z=a_k} [g(z)e^{jmz}]$$

- $\mathrm{Im}\ a_k > 0$ 表示函数 $g(z)e^{jmz}$ 在上半平面的所有孤立奇点, 即满足虚部大于 0
- $\operatorname*{Res}_{z=a_k} [g(z)e^{jmz}]$ 表示函数 $g(z)e^{jmz}$ 在孤立奇点 a_k 处的留数
- $m = 0$ 时, 若 $Q(z)$ 比 $P(z)$ 至少高两次方, 该求法依然适用

留数的求法

设 a 为 $f(z)$ 的 n 阶极点, 即

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-a)^n},$$

其中 $\varphi(z)$ 在 a 处解析且 $\varphi(a) \neq 0$. 则,

$$\operatorname*{Res}_{z=a}[f(z)] = \frac{\varphi^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}.$$

注意 $\varphi(z) = (z-a)^n f(z)$, $\varphi^{(0)}(a)$ 代表 $\varphi(a)$, 且

$$\varphi^{(n-1)}(a) = \lim_{z \to a} \varphi^{(n-1)}(z)$$

.

功率谱密度 (续)

- 在本例中, 先考虑 $\tau \geq 0$, 则

$$g(z) = \frac{1}{2\pi}\frac{z^2+2}{z^4+5z^2+4}e^{j\tau x} = \frac{(z^2+2)e^{j\tau z}}{2\pi(z-j)(z+j)(z-2j)(z+2j)}.$$

- 满足 $\mathrm{Im}\ a_k > 0$ 的孤立奇点有
  - ▷ $x = j$(一阶极点)
  - ▷ $x = 2j$(一阶极点)
- $z = j$ 是一阶极点, 则 $\varphi(z) = (z-j)g(z)e^{j\tau z}$, 其留数为

$$\operatorname*{Res}_{z=j}[g(z)e^{j\tau z}] = \lim_{z\to j}\varphi(z) = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{6j}e^{-\tau}$$

- $z = 2j$ 也是一阶极点, 则 $\varphi(z) = (z-2j)g(z)e^{j\tau z}$, 其留数为

$$\operatorname*{Res}_{z=2j}[g(z)e^{j\tau z}] = \lim_{z\to j}\varphi(z) = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{6j}e^{-2\tau}$$

- 进一步地, 对 $\tau \geq 0$, 有

$$
\begin{aligned}
R(\tau) &= 2\pi j \sum_{\mathrm{Im}\ a_k > 0} \operatorname*{Res}_{z=a_k}\left[g(z)e^{jmz}\right] \\
&= 2\pi j \cdot \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{6j}e^{-\tau} + \frac{1}{6j}e^{-2\tau}\right) = \frac{1}{6}(e^{-\tau} + e^{-2\tau})
\end{aligned}
$$

- 由于 $R(\tau)$ 是实函数且是共轭对称函数, 故其是偶函数, 因而

$$R(\tau) = \frac{1}{6}(e^{-|\tau|} + e^{-2|\tau|}), \ \ \tau \in \mathbb{R}$$

- 过程的方差

$$R(0) = \frac{1}{6}(1+1) = \frac{1}{3}$$

例 4.15

- 已知平稳序列的协方差函数为

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi}\rho^{|\tau|}, \ \tau = 0, \pm 1, \cdots$$

其中 $|\rho| < 1$, 求其谱密度函数

解: 运用平稳序列的 Wiener-Khintchine 公式

$$\begin{aligned}
S(\omega) &= \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} R(\tau)e^{-j\omega\tau} = \frac{1}{2\pi}\left[\sum_{\tau=0}^{\infty}(\rho e^{-j\omega})^{\tau} + \sum_{\tau=0}^{\infty}(\rho e^{j\omega})^{\tau} - 1\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{1-\rho e^{-j\omega}} + \frac{1}{1-\rho e^{j\omega}} - 1\right) \qquad (\text{复数项级数}, |\rho e^{-j\omega}| < 1, |\rho e^{j\omega}| < 1) \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{2-\rho e^{-j\omega}-\rho e^{j\omega}-|1-\rho e^{j\omega}|^2}{|1-\rho e^{j\omega}|^2} \qquad (\text{通分}) \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{2-2\rho\cos\omega-[1-2\rho\cos\omega+\rho^2]}{|1-\rho\cos\omega-j\rho\sin\omega|^2} \qquad (\text{Eular 公式}) \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos\omega+\rho^2} \qquad (\text{分母实数化})
\end{aligned}$$

例 4.16

- 已知平稳过程的协方差函数为

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi}\rho^{|\tau|}, \ \tau \in \mathbb{R}$$

其中 $0 < \rho < 1$, 求其谱密度函数

解: 运用 Wiener-Khintchine 公式

$$\begin{aligned}
S(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{\infty} (\rho e^{-j\omega})^{\tau} d\tau + \int_0^{\infty} (\rho e^{j\omega})^{\tau} d\tau\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{(\rho e^{-j\omega})^{\tau}}{\ln(\rho e^{-j\omega})}\bigg|_{\tau=0}^{\infty} + \frac{(\rho e^{j\omega})^{\tau}}{\ln(\rho e^{j\omega})}\bigg|_{\tau=0}^{\infty}\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(-\frac{1}{\ln\rho + j\omega} - \frac{1}{\ln\rho - j\omega}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{-2\ln\rho}{\ln^2\rho + \omega^2} = -\frac{\ln\rho}{\pi(\ln^2\rho + \omega^2)}
\end{aligned}$$

- 注意到 $0 < \rho < 1$, 故有 $S(\omega) > 0$ (根据定义, 功率谱密度总是非负)

功率谱密度 (续)

- 求解协方差函数或谱密度时，可以利用 Fourier 变换的性质，例如
  - 卷积：卷积的变换等于变换的乘积

$$\mathbb{F}[x(t) * y(t)] = \mathbb{F}[x(t)]\mathbb{F}[y(t)], \quad \mathbb{F}^{-1}[\mathbb{F}[x(t)] * \mathbb{F}[y(t)]] = 2\pi x(t)y(t)$$

  - 微分：微分的变换等于变换乘 $j\omega$

$$\mathbb{F}[\frac{d^n}{dt^n}x(t)] = (j\omega)^n\mathbb{F}[x(t)], \quad \mathbb{F}^{-1}[\frac{d^n}{d\omega^n}\mathbb{F}[x(t)]] = (-jt)^n x(t)$$

- 在实践中，可能会遇到协方差或谱密度函数的变换不存在的情形
  - 例如常数或正弦型函数
  - 此时需要引入 Dirac delta 函数

$$\delta(t) = 0 \text{当} t \neq 0, \quad \text{并且} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

  - δ 函数具备如下性质：对任意连续函数 $f(\tau)$，

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - \tau_0) f(\tau) d\tau = f(\tau_0)$$

  - 基于此性质，可知 δ 函数和常数 1 是一对 Fourier 变换

$$\mathbb{F}[\delta(\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = e^{-j\omega\tau}|_{\tau=0} = 1$$

  - 从而

$$\mathbb{F}^{-1}[1] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot e^{j\omega\tau} d\omega = \delta(\tau)$$

功率谱密度 (续)

- 在包含 δ 函数的广义 Fourier 变换下, Wiener-Khintchine 公式仍成立
- 若平稳过程的协方差函数为常数 $R(\tau)=1,\ \tau\in\mathbb{R}$, 其谱密度函数为

$$S(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}R(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}e^{j\omega\tau}d\tau=2\pi\delta(\omega)$$

- 若过程的谱密度为常数 $S(\omega)=1,\ \omega\in\mathbb{R}$, 则其协方差函数为

$$R(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega=\delta(\tau)$$

$\delta(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{j\omega t}d\omega$

- 若谱密度为余弦型函数 $S(\omega)=a\cos\omega\tau_0$，其对应的协方差函数为

$$\begin{aligned}R(\tau) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}a\cos\omega\tau_0 e^{j\omega\tau}d\omega \\ &= \frac{a}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{j\omega\tau_0}+e^{-j\omega\tau_0}}{2}e^{j\omega\tau}d\omega \\ &= \frac{a}{4\pi}\left[\int_{-\infty}^{\infty}e^{j\omega(\tau+\tau_0)}d\omega+\int_{-\infty}^{\infty}e^{j\omega(\tau-\tau_0)}d\omega\right] \\ &= \frac{a}{2}[\delta(\tau+\tau_0)+\delta(\tau-\tau_0)]\end{aligned}$$

- 类似有，正弦型谱密度函数 $S(\omega)=a\sin\omega\tau_0$ 对应的协方差函数为

$$R(\tau)=\frac{a}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{j\omega\tau_0}-e^{-j\omega\tau_0}}{2j}e^{j\omega\tau}d\omega=-\frac{ja}{2}[\delta(\tau+\tau_0)-\delta(\tau-\tau_0)]$$

例　白噪声过程

- 谱密度为常数 S_0 的平稳过程称为白噪声过程 (白光的谱)
- 由上述计算结果可知, 白噪声的协方差函数为 δ 函数 (脉冲函数)

$$R(\tau) = \mathbb{F}^{-1}[S_0] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_0 e^{j\omega\tau} d\omega = S_0\delta(\tau)$$

- 当 $\tau > 0$ 时, $R(\tau) = 0$, 也即白噪声过程中, 不同时刻间是不相关的
- 根据推论 4.1, 可验证白噪声过程是遍历的:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |R(\tau)| d\tau = S_0 \int_{-\infty}^{\infty} |\delta(\tau)| d\tau = S_0 < \infty$$

- 白噪声过程的平均功率为无穷大, 因此在物理上无法实现:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \mathbb{E}X^2(t)dt = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} R(0)dt = R(0) = \infty$$

功率谱密度 (续)

- 实践中，若某类噪声在比所关注的有用带宽宽得多的范围内，具有较平坦密度谱时，可近似当作白噪声来处理，例如
  - ▷ 电子管中的散弹噪声
  - ▷ 电子设备的热噪声
- 类似地，在离散时间下，若平稳序列的谱密度为常数 S_0，则称为白噪声序列，其协方差函数为

$$R(\tau) = \mathbb{F}^{-1}[S_0] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_0 \cos\omega\tau d\omega = \begin{cases} S_0, & \tau = 0, \\ 0, & \tau = \pm 1, \pm 2, \cdots \end{cases}$$

- 因此，过程的不同时刻不相关
- 若进一步假定 $X(n)$ 为正态分布，则称其为 Gauss 白噪声序列，方差为 S_0
- 由 $R(\tau) = 0,\ \forall\tau \neq 0$ 可知，不同时刻的 $X(n)$ 是不相关的
- 进而由多维正态分布性质知，$X(n),\ n \in \mathbb{Z}$，是相互独立的
  - ▷ 注意：一般过程下，不相关仅代表相互间没有线性关系，未必独立
  - ▷ 独立 $\Rightarrow$ 不相关

例 4.17

- 设输入信号 $\{\varepsilon_n,\ n = 0, 1, \cdots\}$ 是一列均值为 0、方差为 1 的 Gauss 白噪声
- 输出信号

$$X_n = a_1\varepsilon_n + a_2\varepsilon_{n-1},\ n = 1, 2, \cdots$$

- 求 X_n 的谱密度

解:

- 先求 X_n 的协方差函数: 基于 $\{\varepsilon_n,\ n \in \mathbb{Z}\}$ 是相互独立的, 有

$$\begin{aligned} & R(\tau) = \mathbb{E}X_nX_{n+\tau} \\ = \ & a_1^2\mathbb{E}\varepsilon_n\varepsilon_{n+\tau} + a_1a_2[\mathbb{E}\varepsilon_n\varepsilon_{n+\tau-1} + \mathbb{E}\varepsilon_{n+\tau}\varepsilon_{n-1}] + a_2^2\mathbb{E}\varepsilon_{n-1}\varepsilon_{n+\tau-1} \\ = \ & \begin{cases} a_1^2 + a_2^2, & \tau = 0, \\ a_1a_2, & \tau = \pm 1, \\ 0, & \text{其它情形} \end{cases} \end{aligned}$$

功率谱密度 (续)

$$R(\tau)=\begin{cases} a_1^2+a_2^2, & \tau=0,\\ a_1a_2, & \tau=\pm 1,\\ 0, & \text{其它情形}\end{cases}$$

- 再求谱密度

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \mathbb{F}[R(\tau)]=\sum_{\tau=-\infty}^{\infty} R(\tau)e^{-j\omega\tau}\\ &= R(-1)e^{j\omega}+R(0)+R(1)e^{-j\omega}\\ &= a_1a_2(e^{j\omega}+e^{-j\omega})+a_1^2+a_2^2\\ &= a_1^2+2a_1a_2\cos\omega+a_2^2 \end{aligned}$$

- 输出信号的谱密度是一个以 2π 为周期的周期函数

例 4.18

- 设复值信号 $X(t) = ae^{j(Wt-\varphi)}$ 是一个平稳过程
- 其中 W 是概率密度为 $f_W(\omega)$ 的实随机变量, a 和 φ 是实数
- 则其自相关函数为 (注意 $\mathbb{E}X(t)$ 可能不为 0, 故不是协方差函数)

$$
\begin{aligned}
r(\tau) &= \mathbb{E}X(t+\tau)\overline{X(t)} \\
&= a\mathbb{E}e^{j[W(t+\tau)-\varphi]} \cdot ae^{-j(Wt-\varphi)} \\
&= a^2\mathbb{E}e^{jW\tau} \\
&= a^2\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega\tau} f_W(\omega)d\omega = 2\pi a^2\mathbb{F}^{-1}[f_W(\omega)]
\end{aligned}
$$

- 其谱密度为

$$
S(\omega) = \mathbb{F}[r(\tau)] = \mathbb{F}\left[2\pi a^2\mathbb{F}^{-1}[f_W(\omega)]\right] = 2\pi a^2 f_W(\omega)
$$

- 上述结果可应用于物理中的 Doppler 效应

例 Doppler 效应

- 设一谐波振荡器位于 x 轴的点 P 上
- 该振荡器以速度 v 沿 x 轴正方向移动, v 是一个随机变量, 概率密度为 $f_v(u)$
- 振荡器发射的信号为 $ae^{j\omega_0 t}$
- 位于坐标轴原点的接收器, 收到的信号为

$$s(t) = ae^{j\omega_0(t-\frac{r_0+vt}{c})} = ae^{j\left[\omega_0(1-\frac{v}{c})t-\frac{\omega_0 r_0}{c}\right]}$$

- 其中 r_0 是 OP 的距离, c 是信号的传播速度
- 则可套用例 4.18 的结果:

$$s(t) = ae^{j(Wt-\varphi)}, \quad W = \omega_0(1-\frac{v}{c}), \quad \varphi = \frac{\omega_0 r_0}{c}$$

- W 的概率密度为 $f_W(\omega) = \frac{c}{\omega_0} f_v\left(\frac{\omega_0-\omega}{\omega_0}c\right)$

功率谱密度 (续)

- 接收信号的谱密度为

$$S(\omega) = 2\pi a^2 f_W(\omega) = \frac{2\pi a^2 c}{\omega_0} f_v\left(\frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0} c\right)$$

- 若振荡器沿与 x 轴成一定角度方向移动，则上式仍然成立，只是此时 v 表示速度在 x 轴的分量
- 注意到若 $v = 0$，也即 $P(v = 0) = 1$，则 $f_v(\omega) = \delta(\omega)$，利用

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(k\omega) d(k\omega) = 1 \Rightarrow \; k\delta(k\omega) = \delta(\omega)$$

$$\Rightarrow S(\omega) = \frac{2\pi a^2 c}{\omega_0} \delta\left(\frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0} c\right) = 2\pi a^2 \delta(\omega_0 - \omega) = 2\pi a^2 \delta(\omega - \omega_0)$$

- 此时，频谱汇聚于 ω_0 这一点
- $v > 0$ 且为确定值时，$f_v(\omega) = \delta(\omega - v)$：频谱仍汇聚于一点，但汇聚频率改变
- 当 v 为随机变量时，由于信号源运动的随机性，谱密度会变宽

习题 4:

- 4.1 节作业: 2, 4, 5, 7, 9, 12
- 4.2 节作业: 16, 17
- 4.3 节作业: 20, 22, 24, 25, 28(3)(5), 29