

Q1. (25 分) 若正整数序列 a_1, a_2, \dots, a_n 满足:

1. $a_1 = 1$;
2. $a_j \leq \max_{1 \leq i \leq j-1} a_i + 1, \forall j \in [2, n]$,

我们称这个正整数序列具有限制增性质。

请设计一个多项式时间复杂度的动态规划算法，计算长度为 n 的正整数序列中满足限制增性质的序列数目。

简述算法过程，给出递归式，并简单分析算法复杂度。不需要说明算法正确性。

Q2. (25 分) 小牛在输入英文语句时可能会忽视空格，我们想对这种情形进行更正。比如，小牛输入的“weloveUSTC”的语句应被空格划分为“we love USTC”，而不是划分为如“welo veU STC”这样意义不明的语句。假设我们可以访问对字符串划分质量打分的函数 q ：其为每个字符串返回一个分值。比如，如果将字符串 $x = x_1x_2 \cdots x_n$ 用空格划分为 $x = y_1y_2 \cdots y_k$ （每个 y_k 本身都是字符串）。这种划分的质量分值为 $\sum_{i=1}^k q(y_i)$ 。

请设计一个时间复杂度为 $O(n^3)$ 的动态规划算法，计算字符串 x 划分的最高质量分值。（对 q 的计算视为一次运算）

简述算法过程，给出递归式，并简单分析算法复杂度。不需要说明算法正确性。

Q3. (25 分) 小牛最近在小红书上做副业赚钱。假设每次小牛转变副业策略，ta 都可以赚得更多。现在小牛有 n 种副业策略，转变为策略 i 时会有对应的开销 c_i ，以及 ta 的账号在转变为该策略后将获得的年利润 p_i 。（目前小牛采取的策略为副业 1）小牛想为自己在小红书的副业制定未来 m 年的发展计划。最初，小牛的积蓄为 0。每一年，小牛只能在以下操作中进行二选一：1. 将挣得的年利润 p_i 存入积蓄（如果当前采取的副业策略为 i ）；2. 从积蓄中付出 c_j 将副业策略改变为 j 。（当然，只有小牛至少有 c_j 积蓄时才有可能这么做；另外，这一年小红书的副业无法为小牛带来收益）

请设计一个动态规划算法，为小牛在未来 m 年内于小红书做副业制定计划，以在 m 年后最大化小牛的积蓄。

简述算法过程，给出递归式，并简单分析算法复杂度。不需要说明算法正确性。

注意， p_i, c_i 均为正数。

Q4. (25 分) 小牛在赚钱的道路上永不停歇。于肥西路进行过多次调研（吃

宵夜)后,小牛决定自己当老板,在肥西路上开一批夜宵摊。目前一共有 n 个可供选择的位置,假设这些位置 m_i 与肥西路路口开始的距离以米为单位,且 $m_1 < m_2 < \dots < m_n$ 。

小牛得知,当老板开夜宵摊只有以下两个要求:

1. 在每个可供选择的位置 i , 小牛只能开一个夜宵摊,且每晚的期望收入是 p_i ;
2. 任意两个夜宵摊之间的距离至少为 k 米远。(k 为正整数)

请设计一个动态规划算法,为小牛老板设计如何开夜宵摊以最大化其每晚收益。

简述算法过程,给出递归式,并简单分析算法复杂度。不需要说明算法正确性。