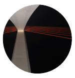
【PyCFA】FI No.2 关于债券久期的计算

NAU Analysts 2020-04-28 12:19

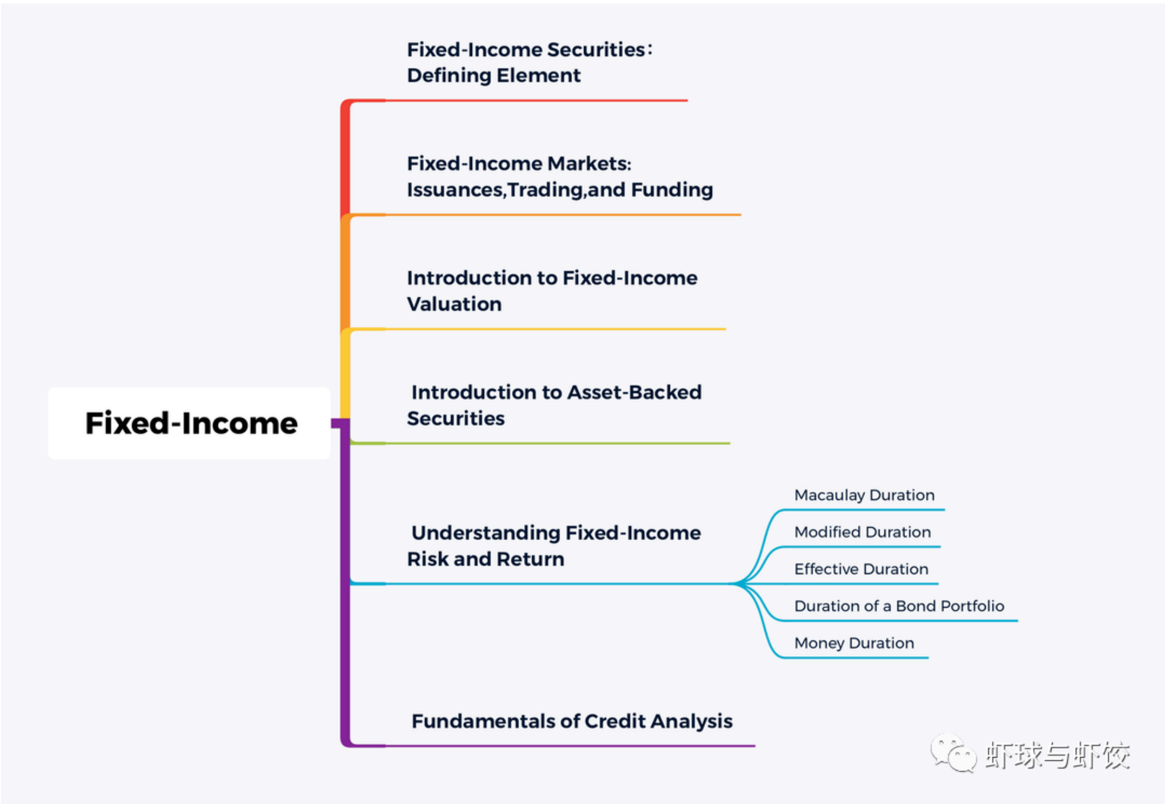
以下文章来源于虾球与虾饺 ，作者阿茶



虾球与虾饺

来啦，喝杯茶先?

Understanding Fixed-Income Risk and Return



上一期介绍了债券价格以及到期收益率的计算，本期将为介绍久期的概念及计算

久期

Duration

定义

久期也称持续期，最早是由麦考利于1938年提出的一种衡量债券利率风险的方法。它可以直接反映投资者收回所有回报的平均时间。

久期的计算包括麦考利久期、修正久期、有效久期

麦考利久期

以未来时间发生的现金流，按照目前的收益率折现成现值，再用每笔现值乘以现在距离该笔现金流发生时间点的时间年限，然后进行求和，以这个总和除以债券目前的价格得到的数值就是久期

下列公式是计算麦考利久期的一般公式

$$MacDur = \frac{\sum_{n=1}^{N} \frac{(N-t/T)*PMT}{(1+r)^{(N-t/T)}} + \frac{(N-t/T)*PV}{(1+r)^{(N-t/T)}}}{\sum_{n=1}^{N} \frac{PMT}{(1+r)^{(N-t/T)}} + \frac{FV}{(1+r)^{(N-t/T)}}}$$

t = 从上次付息日到结算日的天数，T = 付息天数，PMT = 每期付款额，FV = 债券价格，r = 市场利率，N = 付息期数

上式中的分母是包括应计利息在内的债券的全价（Full Price），是息票利息与本金按照相同的市场利率折现的现值

$$PV^{Full} = \sum_{n=1}^{N} \frac{PMT}{(1+r)^{(N-t/T)}} + \frac{FV}{(1+r)^{(N-t/T)}}$$

t = 从上次付息日到结算日的天数，T = 付息天数，PMT = 每期付款额，FV = 债券价格，r = 市场利率，N = 付息期数

综合得出：

$$MacDur = \sum_{n=1}^{N} (N - t/T)\left[\frac{\frac{PMT}{(1+r)^{(N-t/T)}}}{PV^{Full}}\right] + (N - t/T)\left[\frac{\frac{FV}{(1+r)^{(N-t/T)}}}{PV^{Full}}\right]$$

t = 从上次付息日到结算日的天数，T = 付息天数，PMT = 每期付款额，FV = 债券价格，r = 到期收益率，N = 付息期数

因此麦考利久期的一个重要的特征是：该期限是债券在未来产生现金流的时间的**加权平均**,其权重是各期现金流量与债券价格之比

EX 1. 假设有一个面值为100元，票面利率为8%，10年期的债券，每年付息一次,在付息日结算。已知其到期收益率为10.4%，计算其麦考利久期

```
import numpy as np

def price(PV,C,r,N):
    sum = []
    for i in range(N-1):
        i=i+1
        sum.append((PV*C)/((1+r)**i))
    return (np.sum(sum)+(PV*(1+C)/(1+r)**N))
```

```

def MacDuration(PV,C,r,N,PV_Full):
    sum = []
    for i in range(N-1):
        i=i+1
        sum.append((((PV*C)/((1+r)**i))/PV_Full)*i)
    return (np.sum(sum)+(((PV*(1+C)/(1+r)**N))/PV_Full)*N)

PV=100
C=0.08
r=0.104
N=10

PV_Full=price(PV,C,r,N)
MacDur=MacDuration(PV,C,r,N,PV_Full)
print(round(MacDur,4))
```

由于该债券在付息日结算，所以t/T=0,得到麦考利久期为7.0029

当处在两个付息期之间的债券，其t/T不为0，例题如下：

EX 2. 假设在2014年4月11日购买了一个到期日为2022年2月14日的8年期债券，该债券面值为100元，票面利率为6%，付息日期是每年的2月14日与8月14日。已知其到期收益率为6%，计算其麦考利久期

```
import numpy as np

def price(PV,C,r,N,t,T):
    sum = []
    for i in range(N):
        i=i+1
        TR=i-t/T
        sum.append((PV*C)/((1+r)**TR))
    return (np.sum(sum)+(PV/(1+r)**(N-t/T)))

def MacDuration(PV,C,r,N,PV_Full,t,T):
    sum = []
    for i in range(N):
        i=i+1
        TR=i-t/T
        sum.append((((PV*C)/((1+r)**TR))/PV_Full)*TR)
    return (np.sum(sum)+(((PV/(1+r)**(N-t/T)))/PV_Full)*(N-t/T))

PV=100
C=0.03
```

```
r=0.03
N=16
t=57
T=180

PV_Full=price(PV,C,r,N,t,T)
MacDur=MacDuration(PV,C,r,N,PV_Full,t,T)
print(round(MacDur,4))
```

由于此题中t=57，T=180，计算得到的麦考利久期为12.6213

麦考利久期还有另一种变形公式

$$MacDur = \frac{1+r}{r} - \frac{1+r+[N*(c-r)]}{c*[(1+r)^N-1]+r} - (t/T)$$

t=从上次付息日到结算日的天数，T=付息天数，c=息票利率，r=到期收益率，N=付息期数

可以看出，麦考利久期是一个还款时间的期限值，为了进一步观察债券价格对收益率的敏感程度，引入修正久期的概念

修正久期

修正久期是在麦考利久期的基础上做了调整，它等于麦考利久期除以一加每期收益率

$$ModDur = \frac{MacDur}{1+r}$$

仍然以例题一为例计算的到其修正久期为6,3432

```
def Duration_Modified(MacDur,r):
    Dur=MacDur/(1+r)
    return(Dur)

MacDur=7.0029
r=0.104

ModDur=Duration_Modified(MacDur,r)
```

```
print(round(ModDur,4))
```

尽管修正久期只是在麦考利久期的基础上做了小的调整，但它在风险衡量中有着重要的作用，**修正久期可以根据债券的到期收益率来估计其债券价格变动的百分比**

在麦考利久期已知的情况下可以便捷的求出固定利率债券的修正久期。同样的，还可以利用近似修正久期来计算

$$ApproxModDur = \frac{PV_{-} - PV_{+}}{2*(Yield)*PV_0}$$

EX 3. 假设在2014年4月11日购买了一个到期日为2022年2月14日的8年期债券，该债券面值为100元，票面利率为6%，付息日期是每年的2月14日与8月14日。已知其到期收益率为6%，当到期收益率分布上升与下降5个基点时，计算其修正久期

```
import numpy as np

def price(PV,C,r,N,t,T):
    sum = []
    for i in range(N):
        i=i+1
        TR=i-t/T
        sum.append((PV*C)/((1+r)**TR))
    return (np.sum(sum)+(PV/(1+r)**(N-t/T)))

def ApproxModDur(PV_0,PV_1,PV_2,Yield):
    Duration=(PV_2-PV_1)/(2*Yield*PV_0)
    return (Duration)

PV_0 = price(100,0.03,0.03,16,57,180)
PV_1 = price(100,0.03,0.03025,16,57,180)
PV_2 = price(100,0.03,0.02975,16,57,180)

ApproxModDur=ApproxModDur(PV_0,PV_1,PV_2,0.0005)
print(round(ApproxModDur,4))
```

得到其修正久期为6.1268

修正久期适用于到期收益率变化不会带来引起未来现金流的改变，即对于不含权债券的久期计算。

有效久期

对于嵌入期权的债券，未来现金流由于取决于未来利率所以是不确定的。也就是说，含权债券没有明确的到期收益率，这些债券的利率风险敏感度的更适当的衡量标准是有效久期。

$$EffDur = \frac{PV_{-} - PV_{+}}{2*(Curve)*PV_0}$$

有效久期与修正久期最大的不同在于分母，用基准收益曲线率的变化替代了到期收益率的变化。

由于基准收益率的变化与流动性风险中收益率带来的利差变化分开，有效久期仅表现债券价值对于基准收益率曲线变化的敏感性。

有效久期不止应用在债券中，也有很多在金融债券中

EX 4.英国的一项定额养老金计划需要衡量其业务因市场利率变化时的敏感性，模拟了三种利率情况下其负债的现值，基本利率为5%，在基本利率基础上提高100个基点与下降100个基点

Interest Rate Assumption	Present Value of Liabilities
4%	GBP973.5 million
5%	GBP926.1 million
6%	GBP871.8 million

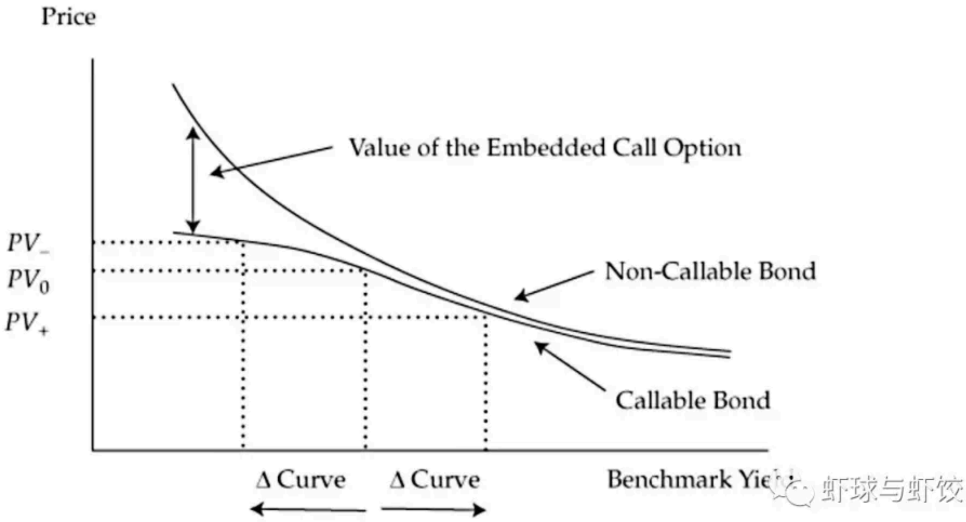
```
import numpy as np

def Duration_Effective(PV_0,PV_1,PV_2,Curve):
    Duration=(PV_1-PV_2)/(2*Curve*PV_0)
    return (Duration)

PV_0 = 926.1
PV_1 = 973.5
PV_2 = 871.8
Curve=0.01

EffDur=Duration_Effective(PV_0,PV_1,PV_2,Curve)
print(round(EffDur,4))
```

得到其有效久期为5.49

嵌入期权的债券债券常见的有可转换债券和可赎回债券

以可赎回债券与不可赎回为例，不可赎回债券价格与收益率的关系可以用一条向下弯曲的曲线来表示，这条曲线的曲率就是债券的凸性。当预期收益率波动较大时，较高的凸性有利于投资者提高债券投资收

益。



图片来源：《Equity and Fixed Income》

不可赎回债券价格总是比可赎回债券价格高，它们之间的差距在于嵌入的看涨期权的值。

在基准收益率很高时，可赎回债券被赎回的可能性很小，嵌入的期权价值变小，使得可赎回债券与不可赎回债券的有效久期非常接近，可近似看作相等。

在基准收益率很小时，可赎回债券被赎回的可能性变大，嵌入的期权价值增加，但看涨期权会限制可赎回债券价格的上升，不会超过可赎回价格。

债券组合的久期

债券组合的久期是由组合中单个债券的久期乘以该债券价值在总组合价值之比计算得来

$$Dur_{portfolio} = \sum_{n=1}^{N} W_N * D_N$$

各个债券的到期收益率不同，则它们的久期也不相同。该公式也可以计算组合中含有含权债券的久期计算

EX 5.计算以下债券组合的修正久期

	Bond A	Bond B	Bond C
Par value	EUR25,000,000	EUR25,000,000	EUR50,000,000
Coupon rate	9%	11%	8%
Time-to-maturity	6 years	8 years	12 years
Yield-to-maturity	9.10%	9.38%	9.62%
Market value	EUR24,886,343	EUR27,243,887	EUR44,306,787
Macaulay duration	4.761	5.633	7.652

```
import numpy as np
```

```

def Weight(n,total):
    sum1 = []
    for i in (n):
        i=i+1
        sum1.append(i/total)
    return (list(sum1))

def Duration_porforlio():
    sum2 = []
    for (i,j) in zip(W,D):
        sum2.append(i*j)
    return (np.sum(sum2))


n=[24886343,27243887,44306787]
total=sum(n)
W=Weight(n,total)
D=[4.761,5.633,7.652]
Dur=Duration_porforlio()
print(Dur)
```

得到其债券组合的修正久期为6.0495

货币久期

货币久期也称作美元久期（Dollar Duration）

修正久期可以用于衡量债券到期收益率变化时其价格变化的百分比。与它有关的一个数据就是货币久期，货币久期是衡量债券价格金额的变化

$$\text{MoneyDur} = \text{AnnModDur} \times PV^{Full}$$

利用修正久期可以得到货币久期，从而算出债券价格随着到期收益率变化的值

$$\Delta PV^{Full} \approx -\text{MoneyDur} \times \Delta \text{Yield}$$

货币久期的另一种变形是基点的价格值（Price Value of the Basis Point),PVBP是指在到期收益率变化1个基点（0.01%）时债券全价的变化的估计

PVBP也称“PV01”、“DV01”，其中“01”表示1bp

$$PVBP = \frac{PV_{-} - PV_{+}}{2}$$

EX 6. 假设有一个票面利率为0.625%的一年付息两次的债券，其到期收益率为0.723368%，结算日在两个付息日183天中的第22天，当到期收益率分别上涨与下跌1个基点时，计算其PVBP

```
import numpy as np

def price(PV,C,R,N,t,T):
    sum = []
    r=R/2
    for i in range(N):
        i=i+1
        TR=i-t/T
        sum.append((PV*C)/((1+r)**TR))
    return (np.sum(sum)+(PV/(1+r)**(N-t/T)))

def PVBP_(PV_1,PV_2):
    PVBP=(PV_1-PV_2)/2
    return (PVBP)

PV_1 = price(100,0.003125,0.00713368,10,22,183)
print(PV_1)
PV_2 = price(100,0.003125,0.00733368,10,22,183)
print(PV_2)
PVBP=PVBP_(PV_1,PV_2)
print(round(PVBP,4))
```

计算得到其PVBP为0.0483

以上是关于久期的概念与计算，如果有不当的地方，还请大家多多指正。

本期撰写人：孙天佑
南京审计大学2018级CFA1班
邮箱：1161114204@qq.com

南京审计大学CFA

推进CFA学术交流，集聚南审CFA校友资源