【PyCFA】Derivative No.1远期合约、远期利率及FRA相关计算

NAU Analysts 2020-04-20 20:11

以下文章来源于一个特立独行的猫猫头 ，作者李清宇

一个特立独行的猫猫头
Keep Learning

1 衍生品概述

定义：衍生产品是一种金融工具，一般表现为两个主体间的一个*协议*，其价格由其他基础产品的价格决定，并且有相应的现货资产作为标的物，成交时不需立即交割，而可在未来时点交割。
典型的衍生品包括远期(Forward)，期货(Futures)、期权(Option)和互换(Swap)等。

核心特点：

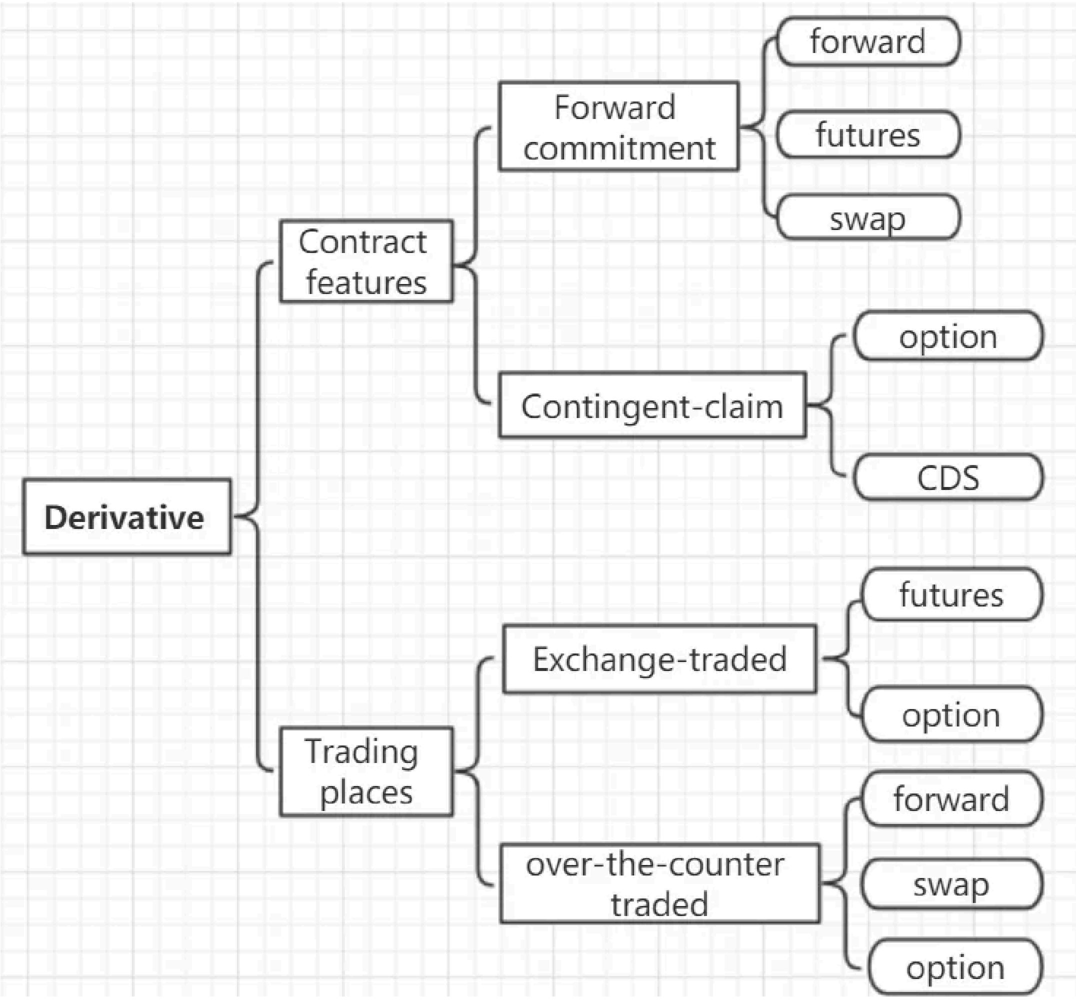
（1）一个合约

（2）衍生品表现由标的资产表现决定

（3）将来的交易行为

（4）对冲风险 VS 投机

分类：



2 远期合约

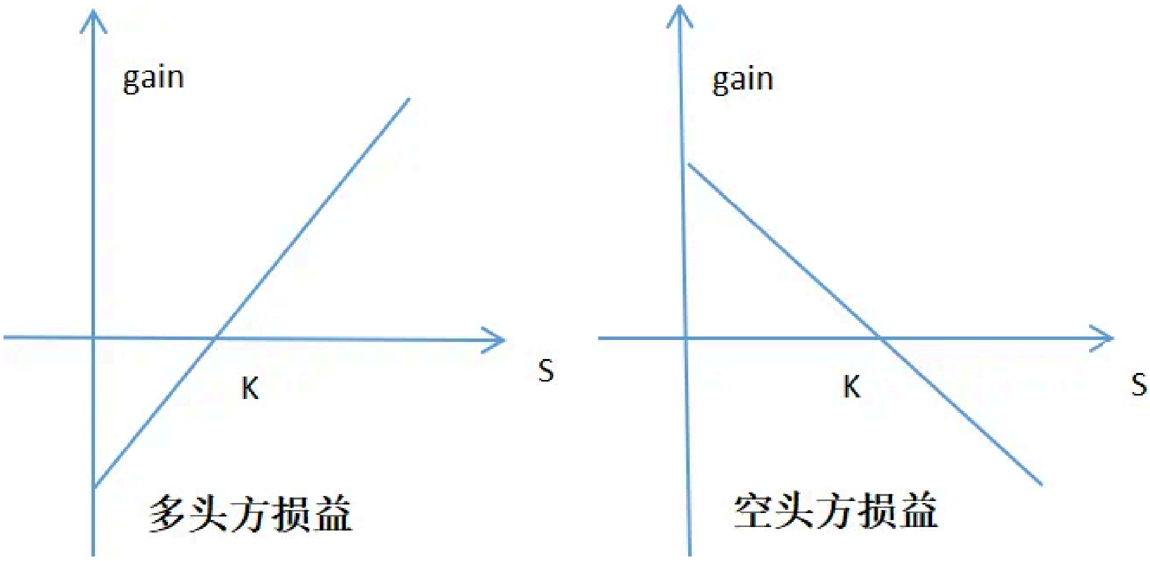
01 远期合约定义及其要素

*远期合约*是交易双方约定在未来的某一确定时间，以确定的价格买卖一定数量某种资产的合约。主要功能为：保值、投机和价值发现。

长头寸(多头)： 在远期合约中，同意在将来某一时刻以某一约定价格买入资产的一方。
短头寸(空头)：远期合约中，同意在将来某一时刻以同一约定价格卖出资产的一方。
交割价格：合约确定的未来交付资产时的价格。
到期日：合约约定的交割日。

02 远期合约的损益

我们用T表示到期日，S表示到期日商品价格，K表示交割价格。远期合约损益情况如下图所示：



03 无收益资产远期合约定价

定义：
*无收益资产远期合约*是指远期合约的标的资产从当前时刻到到期时刻之间不产生现金流。

无套利定价法

基本假设：

1、没有交易费用和税收；

2、市场参与者能以相同的无风险利率借入和贷出资金；

3、远期合约没有违约风险；

4、允许现货卖空行为；

5、当套利机会出现时，市场参与者将参与套利活动，从而使套利机会消失，我们算出的理论价格就是在没有套利机会下的均衡价格；

思路：

构建两种投资组合，令其终值相等，则其现值一定相等。否则就会出现套利行为，套利者卖出现值较高的投资组合，买入现值较低的投资组合，并持有到期末，套利者就可赚取无风险收益。众多套利者这样做的结果，将使较高现值的投资组合价格下降，而较低现值的投资组合价格上升，直至套利机会消失，此时两种组合的现值相等。这样，我们就可根据两种组合现值相等的关系求出远期价格。

公式：

$$f=S-Ke^{-r(T-t)}$$

T：远期合约的到期时间，单位为年。

t：现在的时间，单位为年。变量T和t是从合约生效之前的某个日期开始计算的，T-t代表远期合约中以年为单位的距离到期的剩下时间。

f：远期合约多头在t时刻的价值

S：标的资产在时间t时的价格

K：远期合约中的交割价格

r：T时刻到期的以连续复利计算的t时刻的无风险利率(年利率)，在此，如无特别说明，利率均为连续复利

该公式表明无收益资产远期合约多头的价值等于标的资产现货价格与交割价格现值的差额。

Example 1:

设一份标的证券为一年期贴现债券，剩余期限为6个月的远期合约多头，其交割价格为$960，6个月期的无风险年利率（连续复利）为6%，该债券现价为$940，那么该远期合约多头的价值为多少？

解：利用无套利定价法公式

$$f=S-Ke^{-r(T-t)}$$

```
#定义公式如下
def g(S, K, r, a):
    f = S-K*(numpy.exp((-r)*a))
    return (f)

#带入数据
S = 940     #标的资产现价
K = 960     #交割价格
a = 6/12    #期限，即公式中的（T-t）
r = 0.06    #年利率

print('远期合约多头价值为${:.2f}'.format(g(S, K, r, a)))

运行结果：远期合约多头价值为$8.37
```

现货—远期平价定理

基于无套利定价法，可得现货—远期平价定理，由于远期价格就是使远期合约价值为零的交割价格，即令F为交割价格，则当f=0时，使K=F，得公式：

$$F=Se^{r(T-t)}$$

Example 2:

2007年8月31日，美元3个月无风险年利率为3.99%。市场上正在交易一个期限为3个月的股票远期合约，标的股票不支付红利且当时市价为$40，那么这份远期合约的合理交割价格应为多少？

解：利用现货—远期平价定理

$$F = Se^{r(T-t)}$$

```
#定义公式如下
def f(S, r, a,):
    F = S*(numpy.exp(r*a))
    return (F)

S = 40     #标的资产现价
a = 3/12     #期限，即公式中的（T-t）
r = 0.0399     #年利率

print('远期合约合理交割价格为${:.2f}'.format(f(S, r, a)))

运行结果：远期合约合理交割价格为$40.40
```

04 远期价格期限结构

远期价格的期限结构描述的是不同期限远期价格之间的关系。
设F为T时刻交割的远期价格，F*为在T*时刻交割的远期价格。可得不同期限远期价格之间的关系如下：

$$F = F^* e^{r(T-t)-r^*(T^*-t)}$$

Example 3：
2007年8月31日，美元3个月期和6个月期的无风险年利率为3.99%与4.17%，某只不付红利股票3个月远期合约的远期价格为$20，该股票6个月期的远期价格应为多少？

解：

将远期价格期限结构表达式$F = F^* e^{r(T-t)-r^*(T^*-t)}$ 据题意变换可得：

$$F_6 = F_3 e^{r_6(T_6-t)-r_3(T_3-t)}$$ ¶

```
def z(A, B, C, D, E):
    F = A*numpy.exp(B*D-C*E)
    return(F)

A = 20     #F3 股票3个月期远期合约的远期价格
B = 0.0417     #r6 六个月期年利率
C = 0.0399     #r3 三个月期年利率
D = 6/12     #（T6-t）
E = 3/12     #（T3-t）

```

```
print('股票6个月期的远期价格为${:.2f}'.format(z(A, B, C, D, E)))

运行结果：股票6个月期的远期价格为$20.22
```

3 远期利率

01 定义

远期利率是隐含在给定的即期利率中从未来的某一时点到另一时点的利率水平。所有远期利率都可以根据即期利率（零息利率）求得。

02 计算方法

假设在某一个交易日，当天投资100元，求各年的远期利率是多少？债券市场上对应于不同期限的零息利率的报价如下：（假定零息利率均是复利）

期限	1年	2年	3年	4年	5年
零息利率	2.50%	2.80%	3.20%	3.70%	4.50%

解：
设Rf2、Rf3、Rf4、Rf5分别为第2、3、4、5年的远期利率。
若设一年零息利率为r1，两年零息利率为r2，则第2年远期利率可以通过如下等式求得：

$$100e^{r_1*1}e^{R_{F_2}*1} = 100e^{r_2*2}$$

以此类推可知：

```
from scipy.optimize import fsolve

zero_rate = numpy.array([0.025,0.028,0.032,0.037,0.045])  #零息利率
def func(Rf):
    Rf2,Rf3,Rf4,Rf5 = Rf
    year2 = 100*numpy.exp(zero_rate[1]*2)-100*numpy.exp(zero_rate[0]*1)*numpy
    year3 = 100*numpy.exp(zero_rate[2]*3)-100*numpy.exp(zero_rate[1]*2)*numpy
    year4 = 100*numpy.exp(zero_rate[3]*4)-100*numpy.exp(zero_rate[2]*3)*numpy
    year5 = 100*numpy.exp(zero_rate[4]*5)-100*numpy.exp(zero_rate[3]*4)*numpy
    return numpy.array([year2,year3,year4,year5])
forward_rates = fsolve(func,[0.1,0.1,0.1,0.1])

print('第2年远期利率',round(forward_rates[0],6))
print('第3年远期利率',round(forward_rates[1],6))
print('第4年远期利率',round(forward_rates[2],6))
```

```
print('第5年远期利率',round(forward_rates[3],6))

运行结果：第2年远期利率 0.031
          第3年远期利率 0.04
          第4年远期利率 0.052
          第5年远期利率 0.077
```

据上述案例总结得远期利率计算的数学表达式：

$$R_F = R_2 + \frac{(R_2 - R_1)T_1}{T_2 - T_1}$$

```
zero_rate = numpy.array([0.025,0.028,0.032,0.037,0.045])

def RF(R1,R2,T1,T2):
    return R2+(R2-R1)*T1/(T2-T1)

T_list = numpy.arange(1,6)
RF_result = RF(R1 = zero_rate[0:4],R2 = zero_rate[1:],T1 = T_list[0:4],T2 = 
RF_result  #得到的第2、3、4、5年远期利率结果同上

运行结果：array([0.031, 0.04 , 0.052, 0.077])
```

4 远期利率协议

01 远期利率协议相关概念

定义：

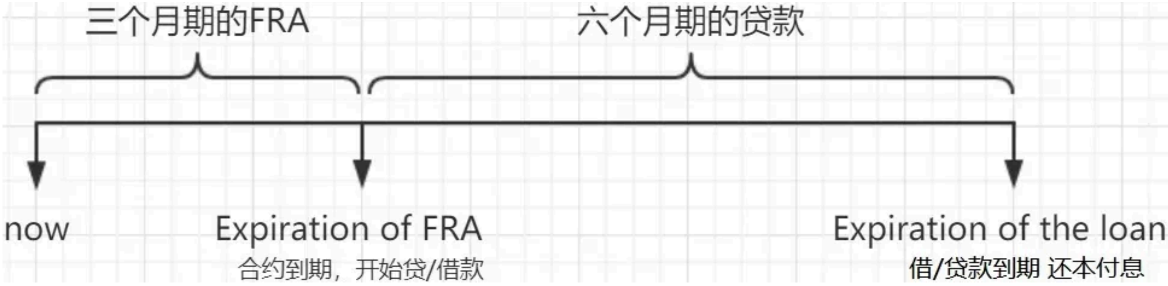
远期利率协议（FRA Forward Rate Agreement）是买卖双方同意从未来某一商定的时期开始在某一特定时期内按照协议利率借贷一笔数额确定、以具体货币表示的名义本金的协议。

其中，没有实际的借贷款发生，仅是买卖双方在未来某以协定的时间内参照某市场利率（如：LIBOR、Shibor）和协议利率对整个合约进行结算。综上，该协议是买卖双方对未来利率变动进行*保值* 或*投机* 而签订的远期合约。

具体操作流程即是借贷关系确立以后，由借贷双方签订一项 "远期利率协议"，约定起算利息的日期，并在起算利息之日，将签约时的协议利率与参考利率比较。倘若协议约定利率低于参考利率，所发生的差额由贷方（空头）付给借方（多头）；如果协议约定利率高于参考利率，则由借方（多头）将超过部分付给贷方（空头）。

报价方法：

以 3x9FRA 为例



02 远期利率协议现金流及定价

交割金额公式（以一年360天为例）：

$$(\text{Notional principal})\left[\frac{(\text{Floating rate at settlement-forward rate})\left[\dfrac{\text{days}}{360}\right]}{1+\text{Floating rate at settlement}\left[\dfrac{\text{days}}{360}\right]}\right]$$

Example 4:

假定某公司预期在第1年末向银行贷款1千万，贷款期为3个月，为了规避利率风险，该公司当前与银行签订了一份FRA，约定该公司在第一年末能够获取3%的3个月固定利率，参考利率为3个月期的Shibor利率（假定第一年末为3.5%），求该公司在合约交割日可获得结算金为多少？

解：

设远期利率协议的买入方（多头，规避利率上升风险）支付按固定利率 k 计算的固定利息，卖出方（空头，规避利率下降风险）支付以参考利率 f 计算的浮动利息，且设k，f分别代表固定利率和 [T1,T2] 区间内的参照利率，L为本金。约定若k>f，则多头要支付空头的金额等于固定利率与参考利率的利差乘以本金的贴现值，反之亦然。

①f是在T1时确定并在T2时支付；

②实践中习惯在期初T1就支付T2时刻的现金流经过f贴现后的现值；

③Shibor利率为单利。

由于FRA是签订日期0~T1时期持有，提前确认并交换了T2时刻的现金流，因此合约签订时需要将T2时刻的现金流折现到0时刻。

```
def cashflow(L,f,k,T2,T1,when):  # 根据收益公式定义函数
    if when=='t1':
        c=L*(f-k)*(T2-T1)  #贷款到期的还本付息日需支付的利息
    else:
        c=L*(f-k)*(T2-T1)/(1+f*(T2-T1))  #将利息折现成合约交割日需支付的现金，即为

    return c

cashflow(1000,0.035,0.03,1.25,1,when='t1')
cashflow(1000,0.035,0.03,1.25,1,when='t2') #该公司为多头方，且在合约交割日可得结算

运行结果：1.2391573729863703  #结算金额（t2）
```

远期利率协议定价:

延续Example 4中信息，继续对远期利率协议分析可知

对于FRA的多头，合约价值为:

$$L(f-k)(T_2-T_1)e^{-r*T_2}$$

对于FRA的空头，合约价值为:

$$L(k-f)(T_2-T_1)e^{-r*T_2}$$

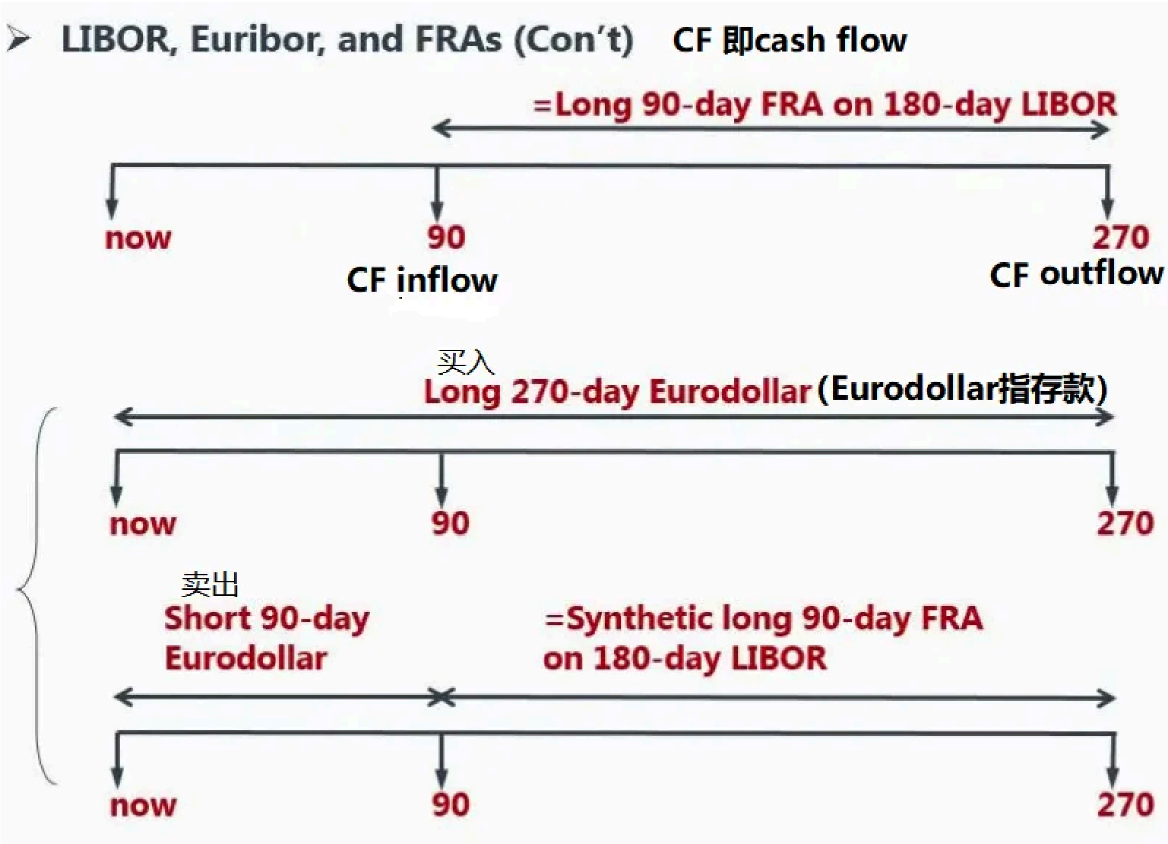
r是期限长度为 T2的无风险利率,且是连续复利

假设1.25年的无风险利率为4%，计算题中FRA对公司（多头方）的价值:

```
def f(L,f,k,r,T2,T1):
    return L*(f-k)*(T2-T1)*numpy.exp(-r*T2)
print('对于该公司而言，签订时的FRA价值为{:.4f}万元'.format(f(1000,0.035,0.03,0.04,

运行结果：对于该公司而言，签订时的FRA价值为1.1890万元
```

5 FRA的合成



PyCFA Derivative负责人：李清宇

南京审计大学2018级CFA3班

邮箱：577271264@qq.com

公众号：一个特立独行的猫猫头