

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA  
BACHARELADO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

**Estruturas de dados retroativas**  
*Um estudo sobre Union-Find e ...*

Felipe Castro de Noronha

MONOGRAFIA FINAL  
MAC 499 — TRABALHO DE  
FORMATURA SUPERVISIONADO

Supervisora: Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Cristina G. Fernandes

São Paulo  
2022

*O conteúdo deste trabalho é publicado sob a licença CC BY 4.0  
(Creative Commons Attribution 4.0 International License)*

*Esta seção é opcional e fica numa página separada;  
ela pode ser usada para uma dedicatória ou epígrafe.*



[illegible]



## Resumo

Felipe Castro de Noronha. **Estruturas de dados retroativas: Um estudo sobre Union-Find e ...**. Monografia (Bacharelado). Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2022.

[illegible]

**Palavras-chave:** Palavra-chave1. Palavra-chave2. Palavra-chave3.





# Abstract

Felipe Castro de Noronha. **Retroactive data structures: A study about Union-Find** *and*. Capstone Project Report (Bachelor). Institute of Mathematics and Statistics, University of São Paulo, São Paulo, 2022.

[illegible]

**Keywords:** Keyword1. Keyword2. Keyword3.



## Lista de Abreviaturas

CFT	Transformada contínua de Fourier ( <i>Continuous Fourier Transform</i> )
DFT	Transformada discreta de Fourier ( <i>Discrete Fourier Transform</i> )
EIIP	Potencial de interação elétron-íon ( <i>Electron-Ion Interaction Potentials</i> )
STFT	Transformada de Fourier de tempo reduzido ( <i>Short-Time Fourier Transform</i> )
ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
URL	Localizador Uniforme de Recursos ( <i>Uniform Resource Locator</i> )
IME	Instituto de Matemática e Estatística
USP	Universidade de São Paulo

## Lista de Símbolos

$\omega$	Frequência angular
$\psi$	Função de análise <i>wavelet</i>
$\Psi$	Transformada de Fourier de $\psi$
$O$	Notação O-grande

## **Lista de Figuras**

## **Lista de Tabelas**

## **Lista de Programas**

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Retroatividade Parcial . . . . .	1
1.2	Retroatividade Total . . . . .	1
<b>2</b>	<b>Link-Cut Trees</b>	<b>3</b>
2.1	Splay Trees . . . . .	3

## Apêndices

## Anexos

	<b>Referências</b>	<b>9</b>
	<b>Índice Remissivo</b>	<b>11</b>



# Capítulo 1

## Introdução

Estruturas de dados retroativas bla bla bla

### 1.1 Retroatividade Parcial

### 1.2 Retroatividade Total





## Capítulo 2

# Link-Cut Trees

Neste capítulo, apresentaremos a estrutura de dados chamada de Link-Cut Tree. Introduzida por **SLEATOR e TARJAN (1981)**, essas árvores nos permitem realizar três operações principais, são elas:

- $make\_root(u)$ : enraíza no vértice  $u$  a árvore que o contém.
- $link(u, v)$ : dado que  $u$  e  $v$  estão em árvores separadas, transforma  $v$  em raiz e o liga como filho de  $u$ .
- $cut(u, v)$ : retira da árvore a aresta com pontas em  $u$  e  $v$ , criando duas novas árvores.

Além disso, a Link-Cut Tree possui a capacidade de realizar operações agregadas nos vértices, isto é, consultas acerca de propriedades de uma sub-árvore ou de um caminho entre dois vértices. Em particular, para as estruturas que estudaremos nos próximos capítulos, vamos utilizar a função  $maximum\_edge(u, v)$ , que nos informa o valor máximo de uma aresta entre os vértices  $u$  e  $v$ .

Para que essas operações sejam realizadas de maneira rápida, usamos a ideia de *preferred paths*. No artigo original, os autores utilizam uma árvore binária enviesada para cuidar destes caminhos, porém, 4 anos depois, os autores apresentam a Splay Tree, que possibilita realizarmos as operações necessárias para manter os *preferred paths* em tempo  $O(\log n)$  amortizado.

## 2.1 Splay Trees

Também introduzida por **SLEATOR e TARJAN (1985)**, a Splay Tree é uma árvore binária de busca auto-ajustável, capaz de realizar as operações de inserção, deleção e busca em tempo  $O(\log n)$  amortizado.



**Insira o conteúdo dos apêndices do seu trabalho no arquivo “`apendices.tex`” do diretório “`conteudo`” (ou comente a linha correspondente em `tese.tex`).**



**Insira o conteúdo dos anexos do seu trabalho no arquivo “`anexos.tex`” do diretório “`conteudo`” (ou comente a linha correspondente em `tese.tex`).**



## Referências

- [SLEATOR e TARJAN 1981] Daniel D. SLEATOR e Robert Endre TARJAN. “A data structure for dynamic trees”. Em: *Proceedings of the Thirteenth Annual ACM Symposium on Theory of Computing*. STOC '81. Milwaukee, Wisconsin, USA: Association for Computing Machinery, 1981, pgs. 114–122. ISBN: 9781450373920. DOI: [10.1145/800076.802464](https://doi.org/10.1145/800076.802464). URL: <https://doi.org/10.1145/800076.802464> (citado na pg. 3).
- [SLEATOR e TARJAN 1985] Daniel D. SLEATOR e Robert Endre TARJAN. “Self-adjusting binary search trees”. Em: *J. ACM* 32.3 (jul. de 1985), pgs. 652–686. ISSN: 0004-5411. DOI: [10.1145/3828.3835](https://doi.org/10.1145/3828.3835). URL: <https://doi.org/10.1145/3828.3835> (citado na pg. 3).





# Índice Remissivo

## C

Captions, *veja* Legendas

Código-fonte, *veja* Floats

## E

Equações, *veja* Modo Matemático

## F

Figuras, *veja* Floats

Floats

Algoritmo, *veja* Floats, Ordem

Fórmulas, *veja* Modo Matemático

## I

Inglês, *veja* Língua estrangeira

## P

Palavras estrangeiras, *veja* Língua es-

trangeira

## R

Rodapé, notas, *veja* Notas de rodapé

## S

Subcaptions, *veja* Subfiguras

Sublegendas, *veja* Subfiguras

## T

Tabelas, *veja* Floats

## V

Versão corrigida, *veja* Tese/Dissertação,  
versões

Versão original, *veja* Tese/Dissertação,  
versões