

# Link-cut trees e aplicações em estruturas de dados retroativas

Felipe Castro de Noronha

Orientadora: Cristina Gomes Fernandes

Departamento de Ciência da Computação, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo

## Resumo

Estruturas de dados retroativas permitem a realização de operações que afetam não somente o estado atual da estrutura, mas também qualquer um de seus estados passados. Além disso, uma link-cut tree é uma estrutura de dados que permite a manutenção de uma floresta de árvores enraizadas com peso nas arestas, e onde os nós de cada árvore possuem um número arbitrário de filhos. Tal estrutura é muito utilizada como base para o desenvolvimento de estruturas de dados retroativas, e neste trabalho estudaremos as versões retroativas dos problemas de union-find e floresta geradora mínima. Para isso, implementamos essas estruturas em C++ e descrevemos as ideias por trás de seus funcionamentos. Ademais, apresentamos uma melhoria da solução originalmente apresentada para a floresta geradora mínima retroativa, que retira limitações sem piorar sua performance.

## Retroatividade

Introduzida por Demaine et al., as **estruturas de dados retroativas** fazem com que cada operação possua um instante de tempo associado, o que permite realizar operações em qualquer estado, passado ou presente, da estrutura. Além disso, é possível remover uma operação que aconteceu em um certo instante de tempo, fazendo com que seus efeitos desapareçam da estrutura.

## Link-Cut tree

As link-cut trees são uma estrutura de dados que permite manter uma **floresta de árvores enraizadas com peso nas arestas**, onde os vértices de cada árvore possuem um número arbitrário de filhos. Ademais, a floresta armazenada por essa estrutura não é orientada — isto é, suas arestas não possuem uma direção — e devido à maneira que ela é usada nas implementações a seguir, sua raiz é constantemente redefinida, de modo que perdemos o arranjo original das árvores.

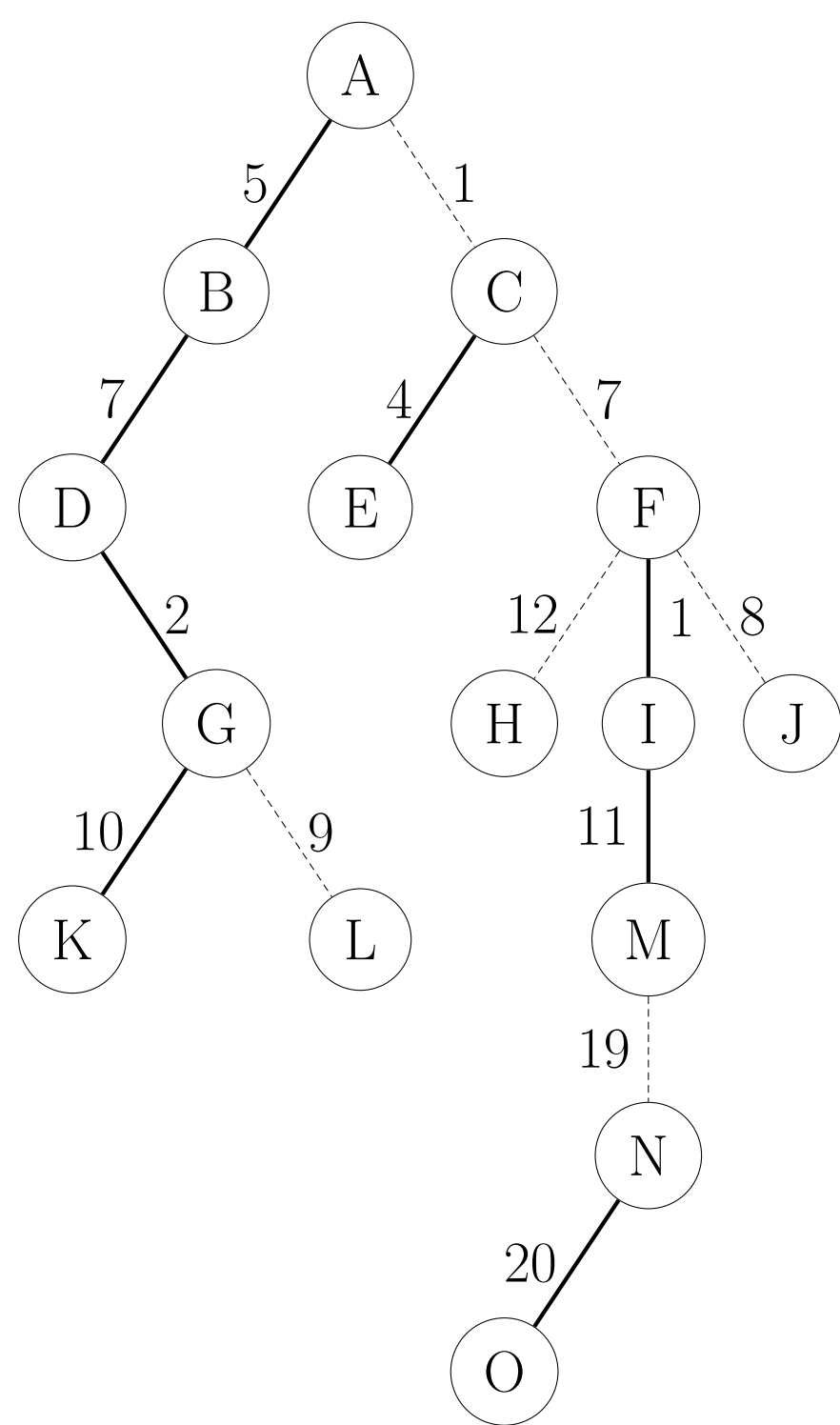


Figura 1: Árvore representada e seus caminhos preferidos, a estrutura interna de uma link-cut tree. Na figura acima, as arestas escuras representam caminhos preferidos, com isso, temos o seguinte conjunto de caminhos vértice-disjuntos  $\{\langle K, G, D, B, A \rangle, \langle E, C \rangle, \langle M, I, F \rangle, \langle L \rangle, \langle H \rangle, \langle J \rangle, \langle O, N \rangle\}$ .

**Ideia:** Dividir a floresta em caminhos vértice-disjuntos, chamados **caminhos preferidos**. Cada um desses caminhos é representado na forma de uma *splay tree*, uma estrutura que nos permite unir e quebrar estes caminhos de forma bastante eficiente.

As link-cut trees fornece a seguinte interface:

- **make\_root(u)**: enraíza no vértice  $u$  a árvore que o contém
- **link(u, v, w)**: dado que os vértices  $u$  e  $v$  estão em árvores separadas, transforma  $v$  em raiz de sua árvore e o liga como filho de  $u$ , colocando peso  $w$  na nova aresta criada
- **cut(u, v)**: retira da floresta a aresta com pontas em  $u$  e  $v$ , quebrando a árvore que continha estes vértices em duas novas árvores
- **is\_connected(u, v)**: retorna **verdadeiro** caso  $u$  e  $v$  pertençam à mesma árvore, **falso** caso contrário
- **maximum\_edge(u, v)**: retorna o peso máximo de uma aresta no caminho entre os vértices  $u$  e  $v$

Todas essas operações consomem tempo  $O(\log n)$  amortizado, onde  $n$  é o número de vértices na floresta.

## Union-Find retroativo

O union-find é uma estrutura de dados utilizada para manter uma **coleção de conjuntos disjuntos**, isto é, conjuntos que não se intersectam.

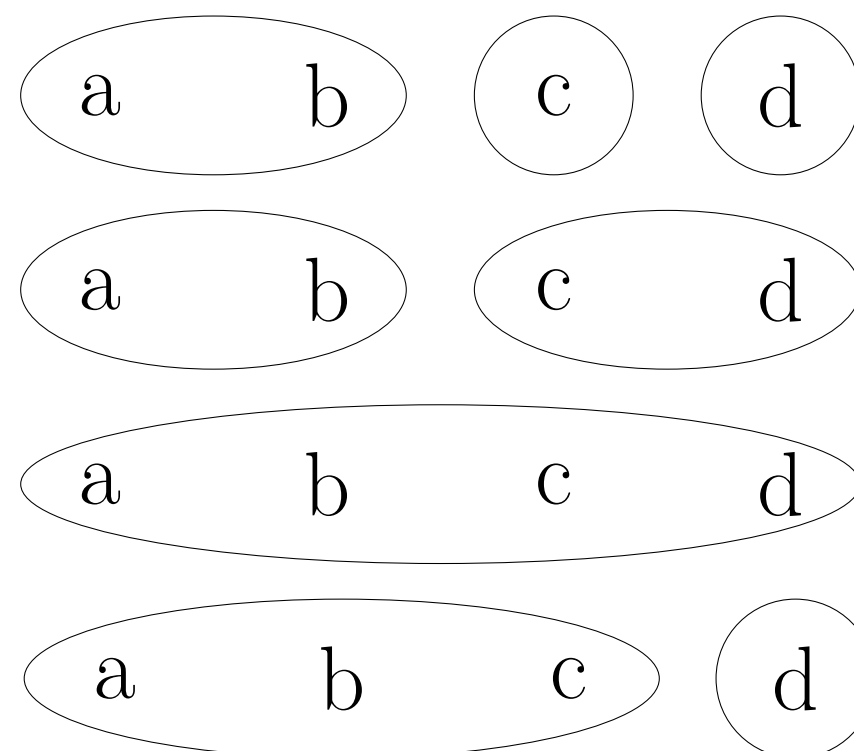


Figura 2: Representação dos conjuntos com os elementos  $\{a, b, c, d\}$  após a seguinte sequência de operações: `create_union(a, b, 2)`, `create_union(c, d, 3)`, `create_union(b, c, 4)` e `delete_union(3)`. Cada linha mostra o estado atual da coleção imediatamente após uma operação.

Na sua versão retroativa, implementamos as seguintes operações:

- **create\_union(a, b, t)**: adiciona a união dos conjuntos que contém  $a$  e  $b$  no instante de tempo  $t$
- **same\_set(a, b, t)**: consulta se dois elementos pertenciam ao mesmo conjunto no instante  $t$
- **delete\_union(t)**: desfaz a união realizada em  $t$

Por exemplo, a Figura 2 mostra o estado de uma coleção de conjuntos disjuntos após quatro operações serem aplicadas. Antes da operação `delete_union(3)`, as consultas `same_set(a, b, 3)` e `same_set(c, d, 3)` retornam **verdadeiro**. Por outro lado `same_set(a, d, 3)` e `same_set(c, d, 3)` retornam **falso** após a chamada da função `delete_union(3)`.

**Ideia:** Fazer com que os elementos dos conjuntos sejam vértices na floresta mantida por uma link-cut tree, onde cada aresta representa uma operação de **union**. Assim, uma chamada `create_union(a, b, 3)` cria uma aresta de valor 3 entre os vértices  $a$  e  $b$ . Da mesma forma, uma chamada `delete_union(t)` simplesmente exclui a aresta criada no instante  $t$ . Para conferir se dois elementos  $a$  e  $b$ , no instante de tempo  $t$ , estão em um mesmo conjunto, basta conferir se eles estão em uma mesma árvore e se o valor da maior aresta no caminho entre eles é menor ou igual a  $t$ , o que significa que todas as uniões já foram realizadas no instante consultado.

## Floresta geradora mínima retroativa

Como passo inicial temos que introduzir a **floresta geradora mínima incremental**, uma estrutura que utiliza as link-cut trees para fornecer uma maneira eficiente de consulta acerca da floresta geradora mínima de um grafo que esta sempre crescendo, isto é, que esta sofrendo a inserção de novas arestas.

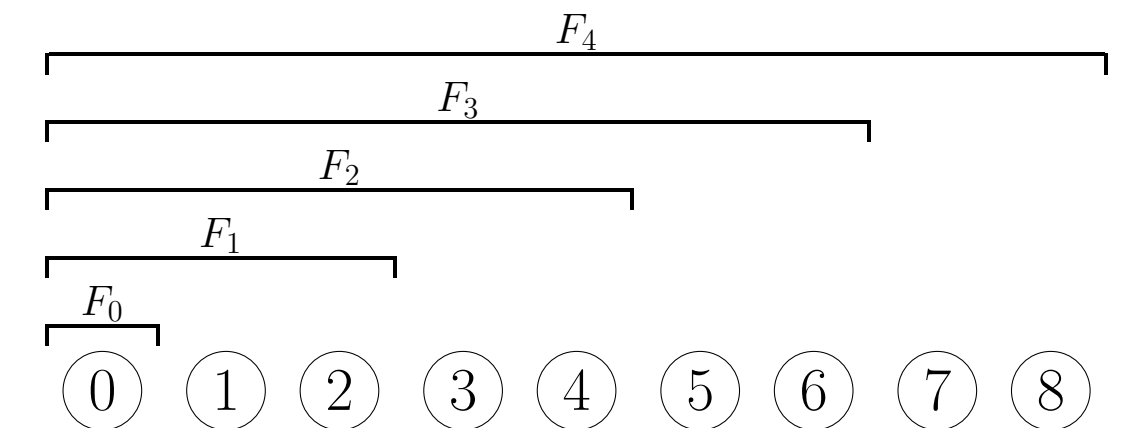


Figura 3: Representação da lista de arestas inseridas com  $m$  igual a 8. Neste caso, cada bloco tem tamanho 2. Assim, por exemplo, a estrutura  $F_3$  contém todas as arestas adicionadas desde o instante 1 até o instante 6.

A **floresta geradora mínima retroativa** tem a seguinte interface:

- **add\_edge(u, v, w, t)**: adiciona no grafo, no instante  $t$ , uma aresta com pontas  $u$  e  $v$  e peso  $w$
- **get\_msf(t)**: retorna a lista com todas as arestas que compõem uma floresta maximal de peso mínimo do grafo no instante  $t$
- **get\_msf\_weight(t)**: retorna o custo de uma floresta maximal de peso mínimo no instante  $t$

**Ideia:** Organizar cada operação retroativa de inserção numa lista ordenada pelo instante de tempo em que a aresta foi inserida. Em seguida, utilizar a técnica de *square-root decomposition* para dividir essa lista em  $\sqrt{m}$  blocos, onde  $m$  é o número total de operações na lista. Essa divisão — ou como chamamos, reconstrução — vai sendo refeita conforme novas operações de inserção vão sendo adicionadas, a fim de manter o tamanho dos blocos aproximadamente constante. Por último, é necessário distribuir as operações de cada bloco em diferentes florestas geradoras mínimas incrementais, fazendo com que uma consulta acerca do instante de tempo  $t$  possa ser realizada de maneira eficiente por uma estrutura que contenha um grafo com um estado próximo ao instante  $t$ .

Por último, além da ideia inicial de Andrade Júnior and Duarte Seabra [1] para a floresta geradora mínima retroativa, foi necessário adaptar ideia apresentada por Demaine et al. [2] para transformar estruturas parcialmente retroativas em estruturas totalmente retroativas. Em particular, realizamos uma melhoria na etapa de reconstrução da estrutura, permitindo que ela seja realizada em tempo  $O(m \log n)$ , onde  $n$  é o número de vértices na floresta. Adicionalmente, escrevemos um artigo descrevendo essa melhoria, visando a sua publicação em algum veículo da área teórica de ciência da computação.

## Informações e contato

Para mais informações, acesse a página do trabalho: <https://linux.ime.usp.br/~felipen/mac0499>

Endereço para contato: [felipe.castro.noronha@usp.br](mailto:felipe.castro.noronha@usp.br)

## Referências

- [1] José Wagner de Andrade Júnior and Rodrigo Duarte Seabra. Fully Retroactive Minimum Spanning Tree Problem. *The Computer Journal*, 65(4):973–982, 12 2020. ISSN 0010-4620. doi: 10.1093/comjnl/bxaa135. URL <https://doi.org/10.1093/comjnl/bxaa135>.
- [2] Erik D. Demaine, John Iacono, and Stefan Langerman. Retroactive data structures. *ACM Trans. Algorithms*, 2007. ISSN 1549-6325. doi: 10.1145/1240233.1240236. URL <https://doi.org/10.1145/1240233.1240236>.