

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA  
BACHARELADO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

**Estruturas de dados retroativas**  
*Um estudo sobre Union-Find e ...*

Felipe Castro de Noronha

MONOGRAFIA FINAL  
MAC 499 — TRABALHO DE  
FORMATURA SUPERVISIONADO

Supervisora: Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Cristina Gomes Fernandes

São Paulo  
2022

*O conteúdo deste trabalho é publicado sob a licença CC BY 4.0  
(Creative Commons Attribution 4.0 International License)*

*Dedico este trabalho a meus pais e todos aqueles que me ajudaram durante esta caminhada.*



## Agradecimentos

*Eu sou quem sou porque estou aqui.*

— Paul Atreides

[illegible]



## Resumo

Felipe Castro de Noronha. **Estruturas de dados retroativas: Um estudo sobre Union-Find e ...**. Monografia (Bacharelado). Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2022.

[illegible]

**Palavras-chave:** Palavra-chave1. Palavra-chave2. Palavra-chave3.





# Abstract

Felipe Castro de Noronha. **Retroactive data structures: A study about Union-Find** *and*. Capstone Project Report (Bachelor). Institute of Mathematics and Statistics, University of São Paulo, São Paulo, 2022.

[illegible]

**Keywords:** Keyword1. Keyword2. Keyword3.



# Lista de Programas

2.1	Rotina Access . . . . .	6
2.2	Rotina Make Root . . . . .	7
2.3	Rotina Link . . . . .	8
2.4	Rotina Cut . . . . .	8
2.5	Consulta Is Connected . . . . .	9
2.6	Consulta Maximum Edge . . . . .	9
2.7	Rotina Splay . . . . .	12
2.8	Rotina Split . . . . .	13
2.9	Rotina Join . . . . .	13
2.10	Rotina Reverse Path . . . . .	14
2.11	Consulta Get Path End Node . . . . .	14
2.12	Consulta Get Parent Path Node . . . . .	14
2.13	Consulta Get Maximum Path Value . . . . .	15



# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Retroatividade Parcial . . . . .	1
1.2	Retroatividade Total . . . . .	1
<b>2</b>	<b>Link-Cut Tree</b>	<b>3</b>
2.1	Ideia . . . . .	3
2.2	Definições . . . . .	4
2.3	Operações . . . . .	4
2.3.1	Rotina Access . . . . .	6
2.3.2	Rotinas Make Root, Link e Cut . . . . .	6
2.3.3	Consultas Is Connected e Maximum Edge . . . . .	9
2.4	Splay Tree . . . . .	9
2.4.1	Rotina Splay . . . . .	11
2.4.2	Rotinas Split e Join . . . . .	13
2.4.3	Métodos auxiliares . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Union-Find</b>	<b>17</b>
3.1	Ideia . . . . .	17
3.2	Consultas Same Set . . . . .	18
3.3	Rotinas Create Union e Delete Union . . . . .	18
	<b>Referências</b>	<b>19</b>



# Capítulo 1

## Introdução

Estruturas de dados retroativas bla bla bla

### **1.1 Retroatividade Parcial**

### **1.2 Retroatividade Total**





## Capítulo 2

# Link-Cut Tree

Neste capítulo, apresentaremos a estrutura de dados link-cut tree, introduzida por **SLEATOR e TARJAN (1981)**. Esta árvore serve como base para as estruturas retroativas apresentadas nos próximos capítulos.

### 2.1 Ideia

A link-cut tree é uma estrutura de dados que nos permite manter uma floresta de árvores enraizadas com peso nas arestas, onde os nós de cada árvore possuem um número arbitrário de filhos. Ademais, essa estrutura nos fornece o seguinte conjunto de operações:

- `make_root(u)`: enraíza no vértice  $u$  a árvore que o contém.
- `link(u, v, w)`: dado que os vértices  $u$  e  $v$  estão em árvores separadas, transforma  $v$  em raiz de sua árvore e o liga como filho de  $u$ , colocando peso  $w$  na nova aresta criada.
- `cut(u, v)`: retira da árvore a aresta com pontas em  $u$  e  $v$ , efetivamente separando estes vértices e resultando duas novas árvores.
- `is_connected(u, v)`: retorna verdadeiro caso  $u$  e  $v$  pertençam à mesma árvore, falso caso contrário.

Por último, a link-cut tree possui a capacidade de realizar operações agregadas nos vértices, isto é, consultas acerca de propriedades de uma sub-árvore ou de um caminho entre dois vértices. Em particular, estamos interessados na rotina `maximum_edge(u, v)`, que nos informa o peso máximo de uma aresta no caminho entre os vértices  $u$  e  $v$ .

Todas essas operações consomem tempo  $O(\log n)$  amortizado, onde  $n$  é o número de vértices na floresta.

## 2.2 Definições

Primeiramente, precisamos fazer algumas definições acerca da estrutura que vamos estudar.

Chamamos de *árvores representadas* as componentes da floresta armazenada na link-cut tree. Para a representação que a link-cut tree utiliza, internamente dividimos uma árvore representada em caminhos vértice-disjuntos, os chamados *caminhos preferidos*. Todo caminho preferido vai de um vértice a um ancestral deste vértice na árvore representada. Por conveniência, definimos o início de um caminho preferido como o vértice mais profundo contido nele.

Se uma aresta faz parte de um caminho preferido, a chamamos de *aresta preferida*. Ademais, mantemos a propriedade de que um vértice pode ter no máximo uma aresta preferida com a outra ponta em algum de seus filhos. Caso tal aresta exista, ela liga um vértice a seu *filho preferido*.

Finalmente, para cada caminho preferido, elegemos um *vértice identificador*. A manutenção deste vértice será importante para a estrutura auxiliar que utilizaremos para manter os caminhos preferidos, dado que tais vértices serão responsáveis por guardar um ponteiro para o vértice do caminho preferido imediatamente acima do caminho que o contém.

Ademais, para armazenar os pesos das arestas da floresta, a estrutura usada terá nós para vértices e para arestas da floresta. O nó correspondente à aresta  $uv$  tem o nó  $u$  como seu pai e  $v$  como seu único filho.

## 2.3 Operações

Nessa seção, apresentaremos o código por trás das operações que estamos interessados em implementar na link-cut tree. Em um primeiro momento, assumiremos que já sabemos como implementar alguns métodos que lidam com os caminhos preferidos. Desta forma, a implementação dos métodos abaixo fica reservada para a próxima seção.

- `make_identifier(u)`: transforma um vértice  $u$  em identificador de seu caminho preferido.
- `split(u)`: recebe um nó  $u$  e separa o caminho preferido que contém este nó em dois, quebrando a conexão entre  $u$  e seu filho preferido, caso exista. Ao final, tanto  $u$  quanto o seu filho preferido inicial serão os identificadores de seus caminhos.
- `join(u, v)`: recebe dois nós,  $u$  e  $v$  — identificadores de seus caminhos e sendo  $v$  um filho de  $u$  na árvore representada — e concatena os respectivos caminhos preferidos, transformando  $uv$  em aresta preferida. Com isso, separa  $u$  da parte mais profunda de seu caminho preferido inicial, deixando o identificador de tal caminho com um ponteiro para  $u$ . Ao final da operação,  $u$  será o identificador do novo caminho criado.
- `reverse_path(u)`: recebe  $u$ , o identificador de um caminho preferido, e inverte a orientação desse caminho, isto é, o fim se transforma no começo e o começo no fim.



**Figura 2.1:** Árvore representada e seus caminhos preferidos. Na figura acima, as arestas escuras representam caminhos preferidos, com isso, temos o seguinte conjunto de caminhos vértice-disjuntos  $\{\langle K, G, D, B, A \rangle, \langle E, C \rangle, \langle M, I, F \rangle, \langle L \rangle, \langle H \rangle, \langle J \rangle, \langle O, N \rangle\}$ .

- `get_path_end_node(u)`: retorna o vértice menos profundo do caminho preferido de  $u$ , em outras palavras, o vértice no fim do caminho preferido que contém  $u$ . Na árvore da figura 2.1, a chamada `get_path_end_node(G)` retorna o vértice A.
- `get_parent_path_node(u)`: retorna o vértice na floresta imediatamente acima do fim do caminho preferido que contém  $u$ ; caso tal caminho contenha a raiz da árvore representada, este método retorna `null`. Aqui, na árvore da figura 2.1, `get_parent_path_node(M)` retorna o vértice C.
- `get_maximum_path_value(u)`: recebe  $u$ , o identificador de um caminho preferido, e retorna o maior valor de uma aresta neste caminho.

Com tal conjunto de funções, podemos avançar para os métodos da link-cut tree.

### 2.3.1 Rotina Access

Uma rotina utilizada por todos os métodos da link-cut tree que vamos implementar é a `access(u)`. A partir dela conseguimos reorganizar a estrutura interna da árvore representada a nosso favor. Basicamente, a operação `access(u)` cria um caminho preferido que parte de  $u$  e vai até a raiz da árvore representada. Com isso, todas as arestas preferidas que tinham somente uma das pontas fazendo parte deste novo caminho são destruídas e  $u$  termina sem nenhum filho preferido.

Para isso, começamos uma sequência de iterações, que vão crescendo um caminho preferido desde  $u$  até que tal caminho contemple a raiz da árvore representada. A cada iteração, fazemos com que uma variável `current_root`, que inicialmente corresponde ao vértice  $u$ , vire o identificador de seu caminho preferido. Além disso, mantemos uma variável `last`, que corresponde a `current_root` da iteração anterior, no início com valor igual a `null`.

Com estes valores em mãos, podemos ir criando um caminho preferido através de sucessivas concatenações, unindo o caminho que `current_root` identifica à parte superior do caminho mantido por `last`. Ao final dessa concatenação, temos que `current_root` é o identificador deste caminho que está sendo construído, e após guardarmos seu valor em `last`, podemos prosseguir para o próximo passo, onde `current_root` agora corresponde ao nó imediatamente em cima do caminho preferido que estamos construindo.

---

#### Programa 2.1 Rotina Access

---

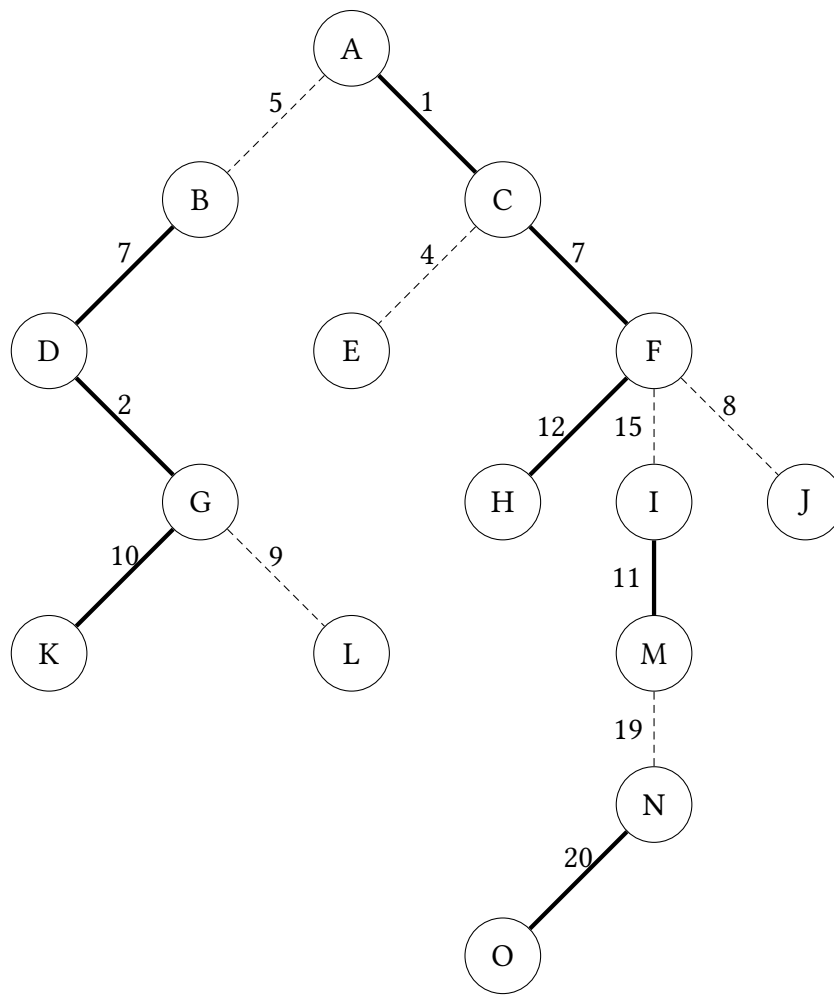
```
function ACCESS( $u$ )
   $last \leftarrow NULL$ 
   $current\_root \leftarrow u$ 
  ▷ concatena todos os caminhos preferidos de  $u$  até a raiz da árvore representada
  while  $current\_root \neq NULL$  do
     $make\_identifier(current\_root)$ 
    ▷ concatena um novo pedaço de caminho preferido ao caminho em que  $last$  é
    identificador
     $join(current\_root, last)$ 
     $last \leftarrow current\_root$ 
     $current\_root \leftarrow get\_parent\_path\_node(current\_root)$ 
     $make\_identifier(u)$ 
  end while
end function
```

---

Ao final da iteração, colocamos o vértice  $u$  como identificador deste novo caminho preferencial, simplificando as operações a seguir.

### 2.3.2 Rotinas Make Root, Link e Cut

Em seguida, temos a função `make_root(u)`, que enraíza em  $u$  a árvore representada que o contém. Para isso, criamos um caminho preferencial que vai da raiz dessa árvore até  $u$ , utilizando `access(u)`. Em seguida, utilizamos a rotina `reverse_path(u)`, que inverte a orientação deste caminho preferido recém-criado. Tal inversão coloca  $u$  como o vértice



**Figura 2.2:** Caminhos preferidos na árvore da figura 2.1 após uma operação de *access* no nó *H*. Com isso temos o novo conjunto de caminhos vértice-disjuntos  $\{\langle H, F, C, A \rangle, \langle K, G, D, B \rangle, \langle M, I \rangle, \langle E \rangle, \langle J \rangle, \langle L \rangle, \langle O, N \rangle\}$ .

de menor profundidade da sua árvore representada, o que se traduz neste sendo a nova raiz.

---

**Programa 2.2** Rotina Make Root

---

```

function MAKE_ROOT(u)
    access(u)
    reverse_path(u)
end function

```

---

Como rotinas que dão nome a nossa estrutura, temos  $\text{link}(u, v, w)$  e  $\text{cut}(u, v)$ .

A primeira delas recebe dois vértices  $u$  e  $v$  que estão em árvores distintas, e cria uma aresta de peso  $w$ , conectando-os. Primeiramente, devemos lembrar que as arestas da floresta representada viram vértices em nossa representação interna. Com isso, o primeiro passo é criar um vértice que tem seu valor definido como  $w$ ; vamos chamá-lo  $uv\_edge$ .

Dessa forma, criaremos as seguintes conexões:  $u$  torna-se o pai de  $uv\_edge$  e  $uv\_edge$  o pai de  $v$ .

Inicialmente, colocamos  $v$  como raiz de sua árvore representada, e criamos um caminho preferido que só possui este vértice como integrante. Com isso, conseguimos concatenar este caminho preferido de tamanho unitário com o caminho que  $uv\_edge$  constitui. A seguir, aplicamos a mesma ideia, criando um caminho unitário que contém  $u$  em sua árvore e o concatenamos com um caminho que possui  $v$  e  $uv\_edge$ .

---

### Programa 2.3 Rotina Link

---

**Require:**  $u$  e  $v$  em árvores distintas

```
function LINK( $u, v, w$ )
   $uv\_edge := newNode(w)$  ▷ cria nó com peso  $w$ , representando a aresta
  ▷ ligando  $(v) - (uv\_edge)$ 
   $make\_root(v)$ 
   $access(v)$ 
   $join(v, uv\_edge)$ 
  ▷ ligando  $(uv\_edge) - (u)$ 
   $make\_root(u);$ 
   $access(u)$ 
   $access(uv\_edge)$ 
   $join(uv\_edge, u)$ 
end function
```

---

Já a operação  $cut(u, v)$ , que separa dois nós ligados por uma aresta, é um pouco mais simples. Note que, temos que separar as conexões entre  $u$  e  $uv\_edge$ , assim como entre  $uv\_edge$  e  $v$ . O processo de separação é igual para as duas partes, por isso vamos explicar somente a separação de  $u$  e  $uv\_edge$ .

A ideia é colocarmos  $u$  como raiz de nossa árvore representada. Com isso, podemos criar um caminho preferido que vai de  $uv\_edge$  até  $u$ . Agora, basta usarmos nossa operação  $u$  e  $split(uv\_edge)$ , que separa  $uv\_edge$  da parte superior de seu caminho preferido, efetivamente quebrando sua conexão com  $u$ .

---

### Programa 2.4 Rotina Cut

---

**Require:**  $u$  e  $v$  na mesma árvore

```
function CUT( $u, v$ )
  ▷ cortando  $(u) - (uv\_edge)$ 
   $make\_root(u)$ 
   $access(uv\_edge)$ 
   $split(uv\_edge)$ 
  ▷ cortando  $(v) - (uv\_edge)$ 
   $make\_root(v)$ 
   $access(uv\_edge)$ 
   $split(uv\_edge)$ 
end function
```

---

### 2.3.3 Consultas Is Connected e Maximum Edge

A função `is_connected( $u$ ,  $v$ )`, que nos informa se  $u$  e  $v$  pertencem a mesma árvore, funciona da seguinte maneira. Primeiro acessamos  $u$ , criando um caminho deste até a raiz da árvore. Em seguida, guardamos o vértice que esta no fim desse caminho, isto é, guardamos a raiz da árvore que contém  $u$ . A seguir, repetimos o mesmo processo com o vértice  $v$ . Agora, basta compararmos se ambos os valores que guardamos são iguais.

---

#### Programa 2.5 Consulta Is Connected

---

```
function IS_CONNECTED( $u$ ,  $v$ )
    access( $u$ )
     $u\_tree\_root \leftarrow get\_path\_end\_node(u)$ 
    access( $v$ )
     $v\_tree\_root \leftarrow get\_path\_end\_node(v)$ 
    return ( $u\_tree\_root = v\_tree\_root$ )
end function
```

---

Por último, temos a função `maximum_edge( $u$ ,  $v$ )`, que retorna o peso da maior aresta no caminho simples entre  $u$  e  $v$ . Como transformamos as arestas em vértices na nossa representação interna, precisamos procurar o maior valor de um vértice no caminho preferido entre  $u$  e  $v$ . Para isso, transformamos  $v$  na raiz de nossa árvore e acessamos  $u$ . Com isso, podemos utilizar `get_maximum_path_value( $u$ )` para obter o maior valor contido neste caminho preferido.

---

#### Programa 2.6 Consulta Maximum Edge

---

**Require:**  $u$  e  $v$  na mesma árvore

```
function MAXIMUM_EDGE( $u$ ,  $v$ )
    make_root( $v$ )
    access( $u$ )
    return get_maximum_path_value( $u$ )
end function
```

---

Assim, encerramos a explicação da implementação dos métodos da link-cut tree.

## 2.4 Splay Tree

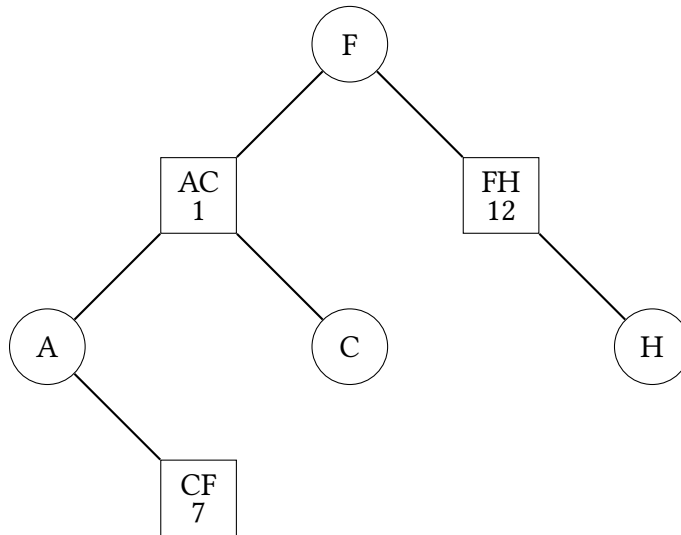
No artigo original, Sleator e Tarjan propuseram a utilização de uma árvore binária enviesada como estrutura para os caminhos preferidos. Porém, quatro anos depois, eles apresentaram a splay tree (SLEATOR e TARJAN, 1985), que possibilita realizarmos as operações necessárias para a manipulação dos caminhos preferidos em tempo  $O(\log n)$  amortizado, onde  $n$  é o número de nós da floresta representada, com uma implementação muito mais elegante do que a da versão original. Portanto, usaremos as splay trees para armazenar os caminhos preferidos.

Uma splay tree é uma árvore binária de busca auto-balanceável. Estas árvores utilizam rotações para se auto-balancear, através de uma operação chamada splay. A operação

splay traz um nó para a raiz da árvore através de sucessivas rotações. Mas antes de nos aprofundarmos neste método, examinaremos como os caminhos preferidos são representados aqui.

Primeiramente, em nosso uso, a ordenação dos nós na splay tree é dada pela profundidade destes na link-cut tree. Note que, para garantir a eficiência, não guardamos explicitamente esses valores. Em vez disso, utilizamos a ideia de chave implícita, isto é, só nos preocupamos em manter a ordem relativa dos nós após as operações de separação e união das árvores, apresentadas a seguir. Em contrapartida, com este método, perdemos a capacidade de realizarmos buscas por chave na splay tree, porém não necessitamos dessa operação.

Ademais, para implementar eficientemente a operação `get_maximum_path_value`, mantemos o peso máximo dos nós em cada sub-árvore de uma splay tree.



**Figura 2.3:** Uma possível configuração da splay tree que armazena o caminho preferido  $\langle H, F, C, A \rangle$  da figura 2.2, onde  $F$  é identificador do caminho. Os nós em formato retangular mostram as arestas da árvore representada, com o peso de tal aresta na parte inferior.

Além disso, como usamos a profundidade dos nós na árvore representada como chave para a árvore auxiliar, temos que todos os nós na sub-árvore esquerda da raiz de uma splay tree têm uma profundidade menor que a raiz, enquanto os nós à direita têm uma profundidade maior. Contudo, ao realizamos uma operação `make_root(u)`, fazemos com que todos os nós que estavam acima de  $u$  na árvore representada se tornem parte de sua sub-árvore. Para isso, incluímos na splay tree um mecanismo para inverter a ordem de todos os nós de uma árvore auxiliar, efetivamente invertendo a orientação de um caminho preferido.

Com isso, os nós da árvore auxiliar têm os seguintes campos:

- `parent`: apontador para o pai na splay tree.
- `left_child` e `right_child`: apontadores para os filhos esquerdo e direito de um nó na splay tree.



- `value`: se o nó representa uma aresta da árvore representada guarda o peso desta aresta, senão guarda 0.
- `max_subtree_value`: guarda o valor máximo armazenado na sub-árvore do nó.
- `is_reversed`: valor booleano para sinalizar se a sub-árvore do nó está com sua ordem invertida ou não, isto é, se todas as posições de filhos esquerdos e direitos estão invertidas nessa sub-árvore.

Em particular, caso o nó seja a raiz da árvore auxiliar, o campo `parent` armazena um ponteiro para o vértice que está logo acima do fim deste caminho preferido na árvore representada. Ou seja, a raiz de uma árvore auxiliar aponta para um nó de outra árvore auxiliar, aquela que contém o vértice a que seu caminho preferencial se liga na sua árvore representada.

### 2.4.1 Rotina Splay

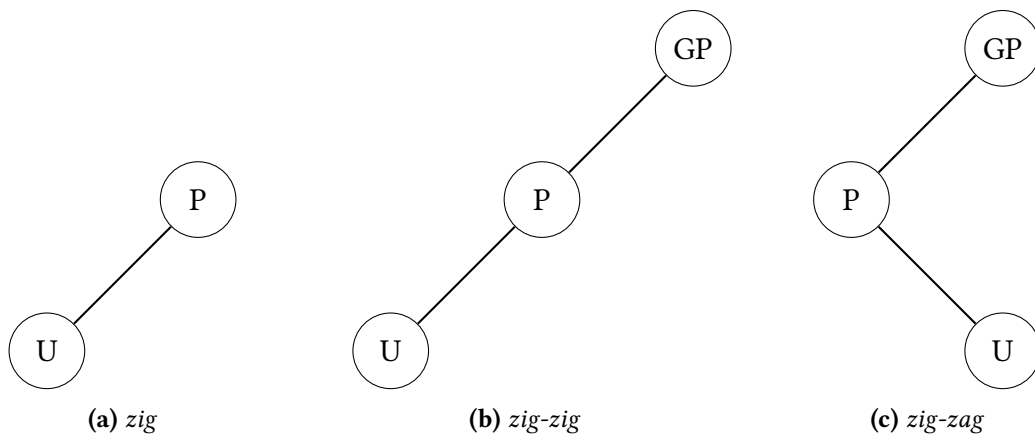
A rotina `splay` é o que garante o auto-balanceamento de uma `splay tree`. Como já mencionamos, seu efeito é trazer um dado nó para a raiz da árvore por meio de uma série de rotações. Para que o custo de  $m$  operações em uma `splay` seja  $O(m \log n)$  amortizado, a implementação deve garantir que o método `splay` é sempre acionado no nó acessado mais profundo da `splay tree`, em toda operação. Ademais, as rotações que trazem o nó para a raiz da árvore devem seguir uma ordem particular, descrita através dos *passos de splay*, que aplicam as rotações duplas ou unitárias, até que o nó que estamos aplicando a operação chegue à raiz. Por último, devido ao bit que indica a inversão da sub-árvore de cada nó, temos que tomar alguns cuidados extras na nossa implementação dos passos de `splay`.

Em particular, podemos dizer que esta operação é responsável por transformar um vértice em identificador de seu caminho, ou seja, entendemos como sinônimos os métodos `make_identifier` e `splay`.

De modo a facilitarmos nossa explicação detalhada, chamamos `parent` o pai de um nó  $u$  e de `grandparent` o pai de `parent`. Como dissemos, uma operação de `splay` consiste em realizamos diversos *passos de splay*, que trazem  $u$  cada vez mais próximo à raiz da árvore, isto é, em cada um desses passos, realizamos uma ou duas rotações que diminuam a profundidade de  $u$ . Porém, ao realizar estes passos, temos que nos preocupar com dois fatores:

- A propagação do valor booleano `is_reversed` de `grandparent` e em seguida o de `parent`, fazendo as devidas reversões caso necessário. Isso nos fornece a invariante de que iremos fazer comparações entre os filhos corretos para determinar qual rotação fazer.
- A orientação que `grandparent`, `parent` e  $u$  se encontram, isto é, se estão em uma orientação de *zig*, *zig-zig* ou *zig-zag*, como exemplificadas na figura 2.4. Dependendo da orientação, fazemos uma rotação em  $u$  ou em `parent`, sempre com a ideia de diminuirmos em 1 a profundidade de  $u$ .

Ao sair da função `splay`, o nó  $u$  estará na raiz de sua árvore auxiliar. Além disso, seu



**Figura 2.4:** Orientações zig, zig-zig e zig-zag na splay tree. Aqui, *P* e *GP* abreviam *parent* e *grand-parent*, respectivamente.

valor booleano *is\_reversed* estará nulo, pois as reversões já terão sido propagadas aos seus filhos, e seu *max\_subtree\_value* estará atualizado, contendo o maior valor presente na splay tree.

---

#### Programa 2.7 Rotina Splay

---

```

function SPLAY(u)
  while !u.is_root() do ▷ u não ser raiz da LCT e nem da Splay
    parent ← u.parent
    grandparent ← parent.parent
    if !parent.is_root() then
      grandparent.push_reversed_bit()
      parent.push_reversed_bit()
      if (grandparent.r_child = parent) = (parent.r_child = u) then
        rotate(parent) ▷ zig-zig ou zag-zag
      else
        rotate(u) ▷ zig-zag
      end if
    end if
    rotate(u)
  end while
  u.push_reversed_bit()
end function

```

---

Assim como a operação acima, o restante da nossa implementação de uma splay tree é bastante tradicional. Com isso, nossos únicos cuidados extras são a manutenção do bit *is\_reversed*, do valor máximo das sub-árvores e da manutenção das chaves implícitas. Por exemplo, no método *rotate(u)*, temos como primeiro passo a propagação do bit *is\_reversed* de *grandparent* até *u* e como última etapa o cálculo dos novos valores de *max\_subtree\_value*.

### 2.4.2 Rotinas Split e Join

Temos também dois métodos importantes das splay trees usados na manutenção dos caminhos preferidos: `split` e `join`, responsáveis por separar e concatenar caminhos preferidos, respectivamente.

---

#### Programa 2.8 Rotina Split

---

```
function SPLIT(u)
  if u.l_child ≠ NULL then
    u.l_child.parent ← NULL
  end if
  u.l_child ← NULL
end function
```

---

Primeiramente, falaremos do método `split(u)`, que recebe um nó *u* e separa o caminho preferido que o contém em dois: um com os vértices menos profundos que *u* em seu caminho, e outro com *u* e os vértices mais profundos que *u*. Para isso, o método simplesmente separa a sub-árvore esquerda de *u*, como mostrado acima. Vale notar que, este método é destrutivo, removendo tanto o ponteiro para o filho preferido de *u* quanto o ponteiro `parent` que tal filho possui para *u*. Logo, usamos essa rotina apenas para o `cut()` da link-cut tree.

---

#### Programa 2.9 Rotina Join

---

**Require:** *u* e *v* identificadores de seus caminhos preferidos

```
function JOIN(u, v)
  if v ≠ NULL then
    v.parent ← u
  end if
  u.r_child ← v
  ▸ atualiza max_subtree_value com o máximo entre o value dos dois filhos de u
  u.recalculate_max_subtree_value()
end function
```

---

De maneira complementar, temos a rotina `join(u, v)` que recebe dois nós e concatena os respectivos caminhos preferidos. Para isso, assume-se que ambos os nós sejam identificadores de seus caminhos preferidos, ou seja, que eles sejam as raízes de suas splay trees. Com isso, simplesmente colocamos a splay tree em que *v* é raiz como a sub-árvore direita de *u*, atualizando os respectivos apontadores e recalculando o valor máximo na splay tree de *u*.

Note que, o vértice *u* poderia ter uma sub-árvore direita, correspondendo à parte mais profunda de seu caminho preferido. Após a operação `join`, esse trecho de seu velho caminho preferido torna-se um novo caminho preferido que aponta — através do ponteiro `parent` — para o novo caminho preferido de *u*, que acabou de ser concatenado ao de *v*.

### 2.4.3 Métodos auxiliares

Para finalizar, nossa splay tree possui quatro métodos auxiliares, o `reverse_path`, `get_path_end_node`, `get_parent_path_node` e `get_maximum_path_value`.

Primeiramente, o `reverse_path(u)` recebe o identificador de um caminho e inverte a orientação desse caminho. Tal tarefa é realizada invertendo o valor do bit `is_reversed` de  $u$ . Com isso, nas próximas operações realizadas neste nó, seus filhos serão trocados de posição e o bit será propagado na sua sub-árvore.

---

#### Programa 2.10 Rotina Revese Path

---

**Require:**  $u$  identificador de seu caminho preferido

```
function REVESE_PATH( $u$ )
     $u.is\_reversed \leftarrow !u.is\_reversed$ 
     $u.push\_reversed\_bit()$   $\triangleright$  inverte os filhos de  $u$  e propaga a inversão do bit
end function
```

---



---

#### Programa 2.11 Consulta Get Path End Node

---

```
function GET_PATH_END_NODE( $u$ )
     $splay(u)$ 
     $smallest\_value \leftarrow u$ 
    while  $smallest\_value.l\_child \neq NULL$  do
         $smallest\_value \leftarrow smallest\_value.l\_child$ 
    end while
     $splay(smallest\_value)$ 
    return  $smallest\_value$ 
end function
```

---



---

#### Programa 2.12 Consulta Get Parent Path Node

---

```
function GET_PARENT_PATH_NODE( $u$ )
     $splay(u)$ 
    return  $u.parent$ 
end function
```

---

A seguir, os métodos `get_path_end_node(u)` e `get_parent_path_node(u)` são usados para acessar o fim e o pai do caminho preferido que contém  $u$ . Em particular, a primeira rotina retorna o vértice menos profundo do caminho preferido de  $u$ , fazendo isso ao acessar o vértice mais à esquerda na sua splay tree. Já o segundo método é responsável por retornar o vértice imediatamente acima do fim do caminho preferido que contém  $u$ . Caso tal caminho contenha a raiz da árvore representada, este método retorna `null`. Para fazer isso, efetuamos uma operação `splay` em  $u$  e retornamos o valor de `parent`.

Por último, temos a função `get_maximum_path_value(u)`, que recebe um vértice  $u$  identificador de caminho e retorna o maior valor de uma aresta no caminho preferencial de  $u$ . Em termos práticos, retorna o valor de `max_subtree_value`.

---

**Programa 2.13** Consulta Get Maximum Path Value

---

**Require:**  $u$  identificador de seu caminho preferido**function** GET\_MAXIMUM\_PATH\_VALUE( $u$ )**return**  $u.max\_subtree\_value$ **end function**

---

Com isso, temos todas as ferramentas necessárias para manipularmos a splay tree em seu uso como árvore auxiliar nas link-cut trees.



# Capítulo 3

## Union-Find

Neste capítulo falaremos do union-find retroativo, introduzida por [DEMAINE et al. \(2007\)](#), ela será primeira estrutura retroativa que vamos implementar usando a link-cut tree.

### 3.1 Ideia

O union-find é uma estrutura de dados utilizada para manter uma coleção de conjuntos disjuntos, isto é, que não se intersectam. Para isso, ela fornece duas operações principais, são elas:

- `same_set(a, b)`: retorna *verdadeiro* caso *a* e *b* estejam no mesmo conjunto, *falso* caso contrario.
- `union(a, b)`: se *a* e *b* estão em conjuntos distintos, realiza a união destes conjuntos.

A primeira versão do union-find foi apresentada por [GALLER e FISHER \(1964\)](#). Posteriormente, [TARJAN e LEEUWEN \(1984\)](#), utilizam a técnica de compressão de caminhos para mostrar uma implementação com complexidade de  $O(\alpha(n))$ , onde  $n$  é o número total de elementos nos conjuntos que estamos representando e  $\alpha()$  é o inverso da função de Ackermann.

Na versão retroativa, estamos interessados em realizar as operações em uma linha de tempo, isto é, conseguirmos adicionar e remover operações union em certos instantes de tempo, assim como checar se dois elementos pertenciam a dado conjunto em um certo instante  $t$ .

Para isso, vamos trocar a operação `union(a, b)` por duas novas rotinas, `create_union(a, b, t)` e `delete_union(t)`. A primeira delas é responsável por criar uma união dos conjuntos que contém *a* e *b* no instante de tempo  $t$ , enquanto a segunda desfaz a união realizada em  $t$ . Além disso, colocamos um terceiro parâmetro  $t$  na operação `same_set`, com isso, conseguimos especificar o instante que estamos interessados em consultar.

Note que, em nenhum momento podemos fazer uma operação que seria invalida em

qualquer instante de tempo. Em outras palavras, não podemos remover uma união que não aconteceu, assim como não podemos criar uma união em dois elementos que já pertencem ao mesmo conjunto.

## **3.2 Consultas Same Set**

## **3.3 Rotinas Create Union e Delete Union**



# Referências

- [DEMAINE *et al.* 2007] Erik D. DEMAINE, John IACONO e Stefan LANGERMAN. “Retroactive data structures”. Em: *ACM Trans. Algorithms* 3.2 (2007), 13–es. ISSN: 1549-6325. DOI: [10.1145/1240233.1240236](https://doi.org/10.1145/1240233.1240236). URL: <https://doi.org/10.1145/1240233.1240236> (citado na pg. 17).
- [GALLER e FISHER 1964] Bernard A. GALLER e Michael J. FISHER. “An improved equivalence algorithm”. Em: *Commun. ACM* 7.5 (1964), pgs. 301–303. ISSN: 0001-0782. DOI: [10.1145/364099.364331](https://doi.org/10.1145/364099.364331). URL: <https://doi.org/10.1145/364099.364331> (citado na pg. 17).
- [SLEATOR e TARJAN 1981] Daniel D. SLEATOR e Robert Endre TARJAN. “A data structure for dynamic trees”. Em: *Proceedings of the Thirteenth Annual ACM Symposium on Theory of Computing*. STOC ’81. Milwaukee, Wisconsin, USA: Association for Computing Machinery, 1981, pgs. 114–122. ISBN: 9781450373920. DOI: [10.1145/800076.802464](https://doi.org/10.1145/800076.802464). URL: <https://doi.org/10.1145/800076.802464> (citado na pg. 3).
- [SLEATOR e TARJAN 1985] Daniel D. SLEATOR e Robert Endre TARJAN. “Self-adjusting binary search trees”. Em: *J. ACM* 32.3 (1985), pgs. 652–686. ISSN: 0004-5411. DOI: [10.1145/3828.3835](https://doi.org/10.1145/3828.3835). URL: <https://doi.org/10.1145/3828.3835> (citado na pg. 9).
- [TARJAN e LEEUWEN 1984] Robert Endre TARJAN e Jan van LEEUWEN. “Worst-case analysis of set union algorithms”. Em: *J. ACM* 31.2 (1984), pgs. 245–281. ISSN: 0004-5411. DOI: [10.1145/62.2160](https://doi.org/10.1145/62.2160). URL: <https://doi.org/10.1145/62.2160> (citado na pg. 17).