

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
BACHARELADO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

Estruturas de dados retroativas
Um estudo sobre Union-Find e ...

Felipe Castro de Noronha

MONOGRAFIA FINAL
MAC 499 — TRABALHO DE
FORMATURA SUPERVISIONADO

Supervisora: Prof^a. Dr^a. Cristina Gomes Fernandes

São Paulo
2022

*O conteúdo deste trabalho é publicado sob a licença CC BY 4.0
(Creative Commons Attribution 4.0 International License)*

Dedico este trabalho a meus pais e todos aqueles que me ajudaram durante esta caminhada.

Agradecimentos

Resumo

Felipe Castro de Noronha. **Estruturas de dados retroativas: Um estudo sobre Union-Find e ...**. Monografia (Bacharelado). Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2022.

[illegible]

Palavras-chave: Palavra-chave1. Palavra-chave2. Palavra-chave3.

Abstract

Felipe Castro de Noronha. **Retroactive data structures: A study about Union-Find** *and*. Capstone Project Report (Bachelor). Institute of Mathematics and Statistics, University of São Paulo, São Paulo, 2022.

[illegible]

Keywords: Keyword1. Keyword2. Keyword3.

Lista de Programas

2.1	Rotina Access	6
2.2	Rotina Make Root	7
2.3	Rotina Link	8
2.4	Rotina Cut	8
2.5	Consulta Is Connected	9
2.6	Consulta Maximum Edge	9
2.7	Rotina Splay	13
2.8	Rotina Split	14
2.9	Rotina Join	14
2.10	Rotina Reverse Path	15
2.11	Consulta Get Path End Node	15
2.12	Consulta Get Parent Path Node	15
2.13	Consulta Get Maximum Path Value	16
3.1	Consulta Same Set	19
3.2	Rotina Create Union	20
3.3	Rotina Delete Union	20
4.1	Consulta Get MSF	23
4.2	Consulta Get MSF Weight	23
4.3	Rotina Add Edge	24
5.1	Rotina Apply Rollback	28
5.2	Rotina Get MSF After Operations	28

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Persistência Parcial	1
1.2	Persistência Total	1
1.3	Retroatividade Parcial	1
1.4	Retroatividade Total	1
2	Link-Cut Tree	3
2.1	Ideia	3
2.2	Definições	4
2.3	Operações	4
2.3.1	Rotina Access	6
2.3.2	Rotinas Make Root, Link e Cut	7
2.3.3	Consultas Is Connected e Maximum Edge	9
2.4	Splay Tree	9
2.4.1	Rotina Splay	11
2.4.2	Rotinas Split e Join	14
2.4.3	Métodos auxiliares	15
3	Union-Find Retroativo	17
3.1	Ideia	17
3.2	Estrutura interna	18
3.3	Consultas Same Set	19
3.4	Rotinas Create Union e Delete Union	19
4	Floresta Geradora Mínima Incremental	21
4.1	Ideia	21
4.2	Estrutura interna	22
4.3	Consultas Get MSF e Get MST Weight	22
4.4	Rotina Add Edge	23

4.5	Versão Dinâmica	24
5	Floresta Geradora Mínima Semi-Retroativa	25
5.1	Nomenclatura	25
5.2	Square-root decomposition	25
5.3	Rotinas extras para a versão incremental	27
5.4	Ideia	28
5.4.1	Versão original	29
5.4.2	Versão melhorada	31
5.4.3	Complexidade	32
5.5	Rotina Build Decomposition	34
5.6	Consultas Get MSF e Get MST Weight	34
5.7	Rotina Add Edge	34
	Referências	35

Capítulo 1

Introdução

Estruturas de dados retroativas bla bla bla

1.1 Persistência Parcial

1.2 Persistência Total

1.3 Retroatividade Parcial

1.4 Retroatividade Total

Capítulo 2

Link-Cut Tree

Neste capítulo, apresentaremos as *link-cut trees*, introduzida por [SLEATOR e TARJAN \(1981\)](#). Esta estrutura de dados serve como base para as estruturas retroativas apresentadas nos próximos capítulos.

2.1 Ideia

As *link-cut trees* são uma estrutura de dados que nos permite manter uma floresta de árvores enraizadas com peso nas arestas, onde os nós de cada árvore possuem um número arbitrário de filhos. Ademais, a floresta armazenada por essa estrutura não é orientada — isto é, suas arestas não possuem uma direção — e devido à maneira que ela é usada para nas implementações a seguir, sua raiz é constantemente redefinida, de modo que perdemos o arranjo original das árvores. Com isso, essa estrutura nos fornece o seguinte conjunto de operações:

- `make_root(u)`: enraíza no vértice u a árvore que o contém.
- `link(u, v, w)`: dado que os vértices u e v estão em árvores separadas, transforma v em raiz de sua árvore e o liga como filho de u , colocando peso w na nova aresta criada.
- `cut(u, v)`: retira da floresta a aresta com pontas em u e v , quebrando a árvore que continha estes vértices em duas novas árvores.
- `is_connected(u, v)`: retorna verdadeiro caso u e v pertençam à mesma árvore, falso caso contrário.

Por último, as *link-cut trees* possuem a capacidade de realizar operações agregadas nos vértices, isto é, consultas acerca de propriedades de uma sub-árvore ou de um caminho entre dois vértices. Em particular, estamos interessados na rotina `maximum_edge(u, v)`, que nos informa o peso máximo de uma aresta no caminho entre os vértices u e v .

Todas essas operações consomem tempo $O(\log n)$ amortizado, onde n é o número de vértices na floresta.

2.2 Definições

Primeiramente, precisamos apresentar algumas definições acerca da estrutura que vamos estudar.

Chamamos de *árvores representadas* as componentes da floresta armazenada nas *link-cut trees*. Para a representação que as *link-cut trees* utilizam internamente, dividimos uma árvore representada em caminhos vértice-disjuntos, os chamados *caminhos preferidos*. Todo caminho preferido vai de um vértice a um ancestral deste vértice na árvore representada. Por conveniência, definimos o início de um caminho preferido como o vértice mais profundo contido nele.

Se uma aresta faz parte de um caminho preferido, a chamamos de *aresta preferida*. Ademais, mantemos a propriedade de que um vértice pode ter no máximo uma aresta preferida com a outra ponta em algum de seus filhos. Caso tal aresta exista, ela liga um vértice a seu *filho preferido*.

Finalmente, para cada caminho preferido, elegemos um *vértice identificador*. A manutenção deste vértice será importante para a estrutura auxiliar que utilizaremos para manter os caminhos preferidos, dado que o vértice identificador de um caminho preferido será responsável por guardar um ponteiro para um vértice da árvore imediatamente acima do caminho preferido.

Ademais, para armazenar os pesos das arestas da floresta, a estrutura usada terá nós para vértices e para arestas da floresta. O nó correspondente à aresta uv tem o vértice u como seu pai e v como seu único filho, e armazena o peso de uv .

2.3 Operações

Nessa seção, apresentaremos o código por trás das operações que estamos interessados em implementar nas *link-cut trees*. Em um primeiro momento, assumiremos que já sabemos como implementar alguns métodos que lidam com os caminhos preferidos. Desta forma, a implementação dos métodos abaixo fica reservada para a próxima seção.

- `make_identifier(u)`: transforma um nó u em identificador de seu caminho preferido.
- `split(u)`: separa o caminho preferido em que o nó u é identificador em dois, quebrando a conexão entre u e seu filho preferido, caso exista. Ao final, tanto u quanto o seu filho preferido inicial serão os identificadores de seus caminhos preferidos.
- `join(u, v)`: recebe dois nós, u e v — identificadores de seus caminhos e sendo v um filho de u na árvore representada — e concatena os respectivos caminhos preferidos, transformando uv em aresta preferida. Com isso, separa u da parte mais profunda de seu caminho preferido inicial, deixando o identificador de tal caminho com um ponteiro para u . Ao final da operação, u será o identificador do novo caminho criado.
- `reverse_path(u)`: recebe u , o identificador de um caminho preferido, e inverte a orientação desse caminho na árvore representada, isto é, o fim se transforma no

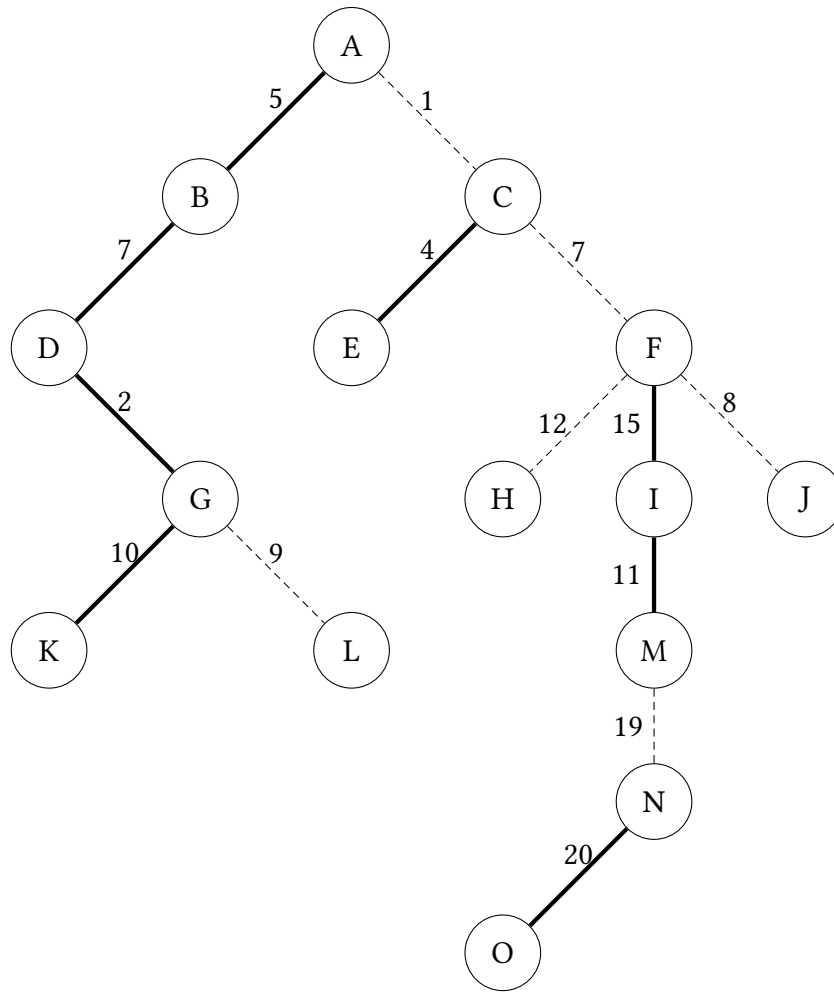


Figura 2.1: Árvore representada e seus caminhos preferidos. Na figura acima, as arestas escuras representam caminhos preferidos, com isso, temos o seguinte conjunto de caminhos vértice-disjuntos $\{\langle K, G, D, B, A \rangle, \langle E, C \rangle, \langle M, I, F \rangle, \langle L \rangle, \langle H \rangle, \langle J \rangle, \langle O, N \rangle\}$.

começo e o começo no fim.

- `get_path_end_node(u)`: retorna o vértice menos profundo do caminho preferido de u , em outras palavras, o vértice no fim do caminho preferido que contém u . Na árvore da Figura 2.1, a chamada `get_path_end_node(G)` retorna o vértice A.
- `get_parent_path_node(u)`: retorna o vértice na floresta imediatamente acima do fim do caminho preferido que contém u ; caso o caminho preferido de u contenha a raiz da árvore representada, este método retorna `null`. Aqui, na árvore da Figura 2.1, `get_parent_path_node(M)` retorna o vértice C `get_parent_path_node(L)` retorna G.
- `get_maximum_path_value(u)`: recebe u , o identificador de um caminho preferido, e retorna o maior valor de uma aresta neste caminho.

Além disso, de modo a determinarmos a complexidade dos métodos das *link-cut trees*, temos que `split`, `join`, `reverse_path` e `get_maximum_path_value` consomem tempo constante, enquanto `make_idenfifier`, `get_path_end_node` e `get_parent_path_node`

gastam tempo proporcional a $O(\log n)$ amortizado, onde n é o número de elementos nos caminhos preferidos.

2.3.1 Rotina Access

Uma rotina utilizada por todos os métodos das *link-cut trees* que vamos implementar é a *access*. A partir dela conseguimos reorganizar a estrutura interna de uma árvore representada a nosso favor. Basicamente, a operação *access* (u) cria um caminho preferido que parte de u e vai até a raiz da árvore representada de u . Com isso, todas as arestas preferidas que tinham somente uma das pontas fazendo parte deste novo caminho deixam de ser preferidas e u termina sem nenhum filho preferido.

Para isso, começamos uma sequência de iterações, que vão crescendo um caminho preferido desde u até que tal caminho contemple a raiz da árvore representada. Inicialmente, separamos a parte superior do caminho preferido de u da parte inferior, fazendo com que este caminho comece pelo vértice u .

Com isso, a rotina agora realiza uma série de iterações, mantendo a seguinte invariante: u é identificador de um caminho preferido que começa nele e vai até um dos filhos de *above_path*. Com essa invariante, conseguimos concatenar o caminho que começa em u com o caminho preferido imediatamente acima dele, o qual é representado por *above_path*. Desta maneira, sabemos que atingimos a raiz da árvore quando o caminho imediatamente acima é vazio, ou seja, *above_path* é nulo.

Programa 2.1 Rotina Access

```

1: function ACCESS( $u$ )
2:   make_idenfier( $u$ )
3:   join( $u$ , NULL)
4:   above_path  $\leftarrow$  get_parent_path_node( $u$ )
5:   ▷ concatena todos os caminhos preferidos de  $u$  até a raiz da árvore representada
6:   while above_path  $\neq$  NULL do
7:     make_idenfier(above_path)
8:     ▷ concatena a parte superior do caminho de above_path ao caminho de  $u$ 
9:     join(above_path,  $u$ )
10:    make_idenfier( $u$ )
11:    above_path  $\leftarrow$  get_parent_path_node( $u$ )
12:   end while
13: end function

```

Logo, fica claro que o consumo de tempo dessa rotina é algo proporcional ao número de iterações realizadas vezes o custo das chamadas que operam sob os caminhos preferidos. Em particular, [DEMAINE, HOLMGREN et al. \(2012\)](#) usam a técnica de *heavy-light decomposition* para mostrar que, em uma sequência de m operações *access*, são realizadas $O(m \log n)$ iterações. Ademais, eles mostram que as chamadas realizadas a cada iteração custam $O(1)$ amortizado. Portanto, a rotina *access* consome tempo $O(\log n)$ amortizado.

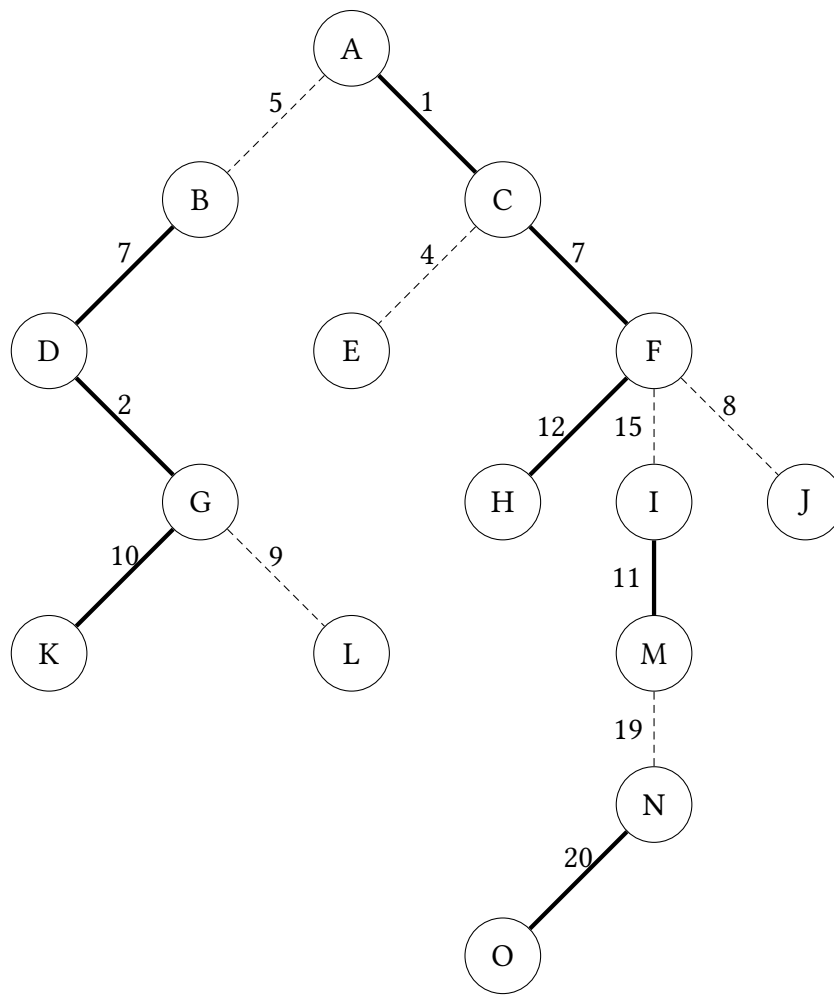


Figura 2.2: Caminhos preferidos na árvore da Figura 2.1 após uma operação de *access* no nó *H*. Com isso temos o novo conjunto de caminhos vértice-disjuntos $\{\langle H, F, C, A \rangle, \langle K, G, D, B \rangle, \langle M, I \rangle, \langle E \rangle, \langle J \rangle, \langle L \rangle, \langle O, N \rangle\}$.

2.3.2 Rotinas Make Root, Link e Cut

Em seguida, temos a função `make_root(u)`, que enraíza em *u* a árvore representada que o contém. Para isso, criamos um caminho preferencial que vai de *u* até a raiz dessa árvore, utilizando `access(u)`. Em seguida, utilizamos a rotina `reverse_path(u)`, que inverte a orientação deste caminho preferido recém-criado. Tal inversão coloca *u* como o vértice de menor profundidade da sua árvore representada, o que se traduz neste sendo a nova raiz.

Programa 2.2 Rotina Make Root

```

1: function MAKE_ROOT(u)
2:   access(u)
3:   reverse_path(u)
4: end function

```

Como rotinas que dão nome à estrutura, temos `link(u, v, w)` e `cut(u, v)`.

A primeira delas recebe dois nós u e v que estão em árvores distintas, e cria uma aresta de peso w , conectando-os. Primeiramente, devemos lembrar que as arestas da floresta representada viram nós em nossa representação interna. Com isso, o primeiro passo é criar um nó que tem seu valor definido como w ; vamos chamá-lo uv_edge . Dessa forma, criaremos as seguintes conexões: u torna-se o pai de uv_edge e uv_edge o pai de v .

Inicialmente, colocamos v como raiz de sua árvore representada, e criamos um caminho preferido que só possui este vértice como integrante. Com isso, conseguimos concatenar este caminho preferido de tamanho unitário com o caminho que uv_edge constitui. A seguir, aplicamos a mesma ideia, criando um caminho unitário que contém u em sua árvore e o concatenamos com um caminho que possui v e uv_edge .

Programa 2.3 Rotina Link

Require: u e v em árvores distintas

```

1: function LINK( $u, v, w$ )
2:    $uv\_edge \leftarrow new\ Node(w)$   $\triangleright$  cria nó com peso  $w$ , representando a aresta
3:    $\triangleright$  ligando  $(v) - (uv\_edge)$ 
4:    $make\_root(v)$ 
5:    $access(v)$ 
6:    $join(v, uv\_edge)$ 
7:    $\triangleright$  ligando  $(uv\_edge) - (u)$ 
8:    $make\_root(u)$ 
9:    $access(u)$ 
10:   $access(uv\_edge)$ 
11:   $join(uv\_edge, u)$ 
12: end function

```

Já a operação $cut(u, v)$, que separa dois nós ligados por uma aresta, é um pouco mais simples. Note que temos que separar as conexões entre u e uv_edge , assim como entre uv_edge e v . O processo de separação é igual para as duas partes, por isso vamos explicar somente a separação de u e uv_edge .

Programa 2.4 Rotina Cut

Require: u e v na mesma árvore e uv uma aresta da floresta representada

```

1: function CUT( $u, v$ )
2:    $\triangleright$  cortando  $(u) - (uv\_edge)$ 
3:    $make\_root(u)$ 
4:    $access(uv\_edge)$ 
5:    $split(uv\_edge)$ 
6:    $\triangleright$  cortando  $(v) - (uv\_edge)$ 
7:    $make\_root(v)$ 
8:    $access(uv\_edge)$ 
9:    $split(uv\_edge)$ 
10: end function

```

A ideia é colocarmos u como raiz de nossa árvore representada. Com isso, podemos criar um caminho preferido que vai de uv_edge até u . Agora, basta usarmos nossa opera-

ção `split(uv_edge)`, que separa `uv_edge` da parte superior de seu caminho preferido, efetivamente quebrando sua conexão com u .

2.3.3 Consultas Is Connected e Maximum Edge

A função `is_connected(u , v)`, que nos informa se u e v pertencem à mesma árvore, funciona da seguinte maneira. Primeiro acessamos u , criando um caminho deste até a raiz da sua árvore. Em seguida, guardamos o vértice que está no fim desse caminho, isto é, guardamos a raiz da árvore que contém u . A seguir, repetimos o mesmo processo com o vértice v . Agora, basta compararmos se ambos os valores que guardamos são iguais.

Programa 2.5 Consulta Is Connected

```

1: function IS_CONNECTED( $u$ ,  $v$ )
2:   access( $u$ )
3:    $u\_tree\_root \leftarrow get\_path\_end\_node(u)$ 
4:   access( $v$ )
5:    $v\_tree\_root \leftarrow get\_path\_end\_node(v)$ 
6:   return ( $u\_tree\_root = v\_tree\_root$ )
7: end function
```

Por último, temos a função `maximum_edge(u , v)`, que supõe que u e v estão na mesma árvore da floresta representada e retorna o peso da maior aresta no caminho simples entre u e v . Como transformamos as arestas em vértices na nossa representação interna, precisamos procurar o maior valor de um vértice no caminho preferido entre u e v . Para isso, transformamos v na raiz de nossa árvore e acessamos u . Com isso, podemos utilizar `get_maximum_path_value(u)` para obter o maior valor contido neste caminho preferido.

Programa 2.6 Consulta Maximum Edge

Require: u e v na mesma árvore

```

1: function MAXIMUM_EDGE( $u$ ,  $v$ )
2:   make_root( $v$ )
3:   access( $u$ )
4:   return get_maximum_path_value( $u$ )
5: end function
```

Assim, encerramos a explicação da implementação dos métodos das *link-cut trees*. Além disso, podemos perceber que todos os métodos executam simplesmente chamadas para os modificadores de caminhos preferidos e para a rotina `access`. Portanto, temos que as funções apresentadas até agora consomem tempo proporcional a $O(\log n)$ amortizado.

2.4 Splay Tree

No artigo original, Sleator e Tarjan propuseram a utilização de uma árvore binária enviesada como estrutura para os caminhos preferidos. Porém, quatro anos depois,

eles apresentaram a splay tree (SLEATOR e TARJAN, 1985), que possibilita realizarmos as operações necessárias para a manipulação dos caminhos preferidos em tempo $O(\log n)$ amortizado, onde n é o número de nós da floresta representada, com uma implementação muito mais elegante do que a da versão original. Portanto, usaremos as splay trees para armazenar os caminhos preferidos.

Uma splay tree é uma árvore binária de busca auto-balanceável. Estas árvores utilizam rotações para se auto-balancear, através de uma operação chamada splay. A operação splay traz um nó para a raiz da árvore através de sucessivas rotações. Mas antes de nos aprofundarmos neste método, examinaremos como os caminhos preferidos são representados aqui.

Primeiramente, em nosso uso, a ordenação dos nós na splay tree é dada pela profundidade destes nas *link-cut trees*. Note que, para garantir a eficiência, não guardamos explicitamente esses valores. Em vez disso, utilizamos a ideia de chave implícita, isto é, só nos preocupamos em manter a ordem relativa dos nós após as operações de separação e união das árvores, apresentadas a seguir. Em contrapartida, com este método, eventualmente perdemos a capacidade de realizarmos buscas por chave na splay tree, porém não necessitamos dessa operação.

Ademais, para implementar eficientemente a operação `get_maximum_path_value`, mantemos o peso máximo dos nós em cada sub-árvore de uma splay tree.

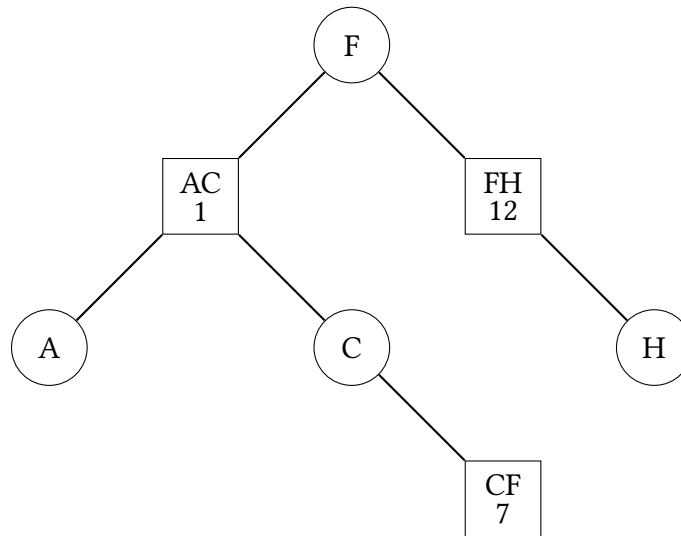


Figura 2.3: Uma possível configuração da splay tree que armazena o caminho preferido $\langle H, F, C, A \rangle$ da Figura 2.2, onde F é identificador do caminho. Os nós em formato retangular mostram as arestas da árvore representada, com o peso de tal aresta na parte inferior.

Além disso, como usamos a profundidade dos nós na árvore representada como chave para a splay tree, temos que todos os nós na sub-árvore esquerda da raiz têm uma profundidade menor que a raiz, enquanto os nós à direita têm uma profundidade maior. Contudo, ao realizamos uma operação `make_root(u)`, fazemos com que todos os nós que estavam acima de u na árvore representada se tornem parte de sua sub-árvore. Para isso, incluímos na splay tree um mecanismo para inverter a ordem de todos os seus nós, efetivamente invertendo a orientação de um caminho preferido.

Com isso, os nós da splay tree têm os seguintes campos:

- `parent`: apontador para o pai na splay tree.
- `left_child` e `right_child`: apontadores para os filhos esquerdo e direito de um nó na splay tree.
- `value`: se o nó representa uma aresta da árvore representada guarda o peso desta aresta, senão guarda 0.
- `max_subtree_value`: guarda o valor máximo armazenado na sub-árvore do nó.
- `is_reversed`: valor booleano para sinalizar se a sub-árvore do nó está com sua ordem invertida ou não, isto é, se todas as posições de filhos esquerdos e direitos estão invertidas nessa sub-árvore.

Ademais, caso o nó seja a raiz da splay tree, o campo `parent` armazena um ponteiro para o vértice que está logo acima do fim deste caminho preferido na árvore representada. Ou seja, a raiz de uma splay tree aponta para um nó de outra splay tree, aquela que contém o vértice a que seu caminho preferencial se liga na sua árvore representada.

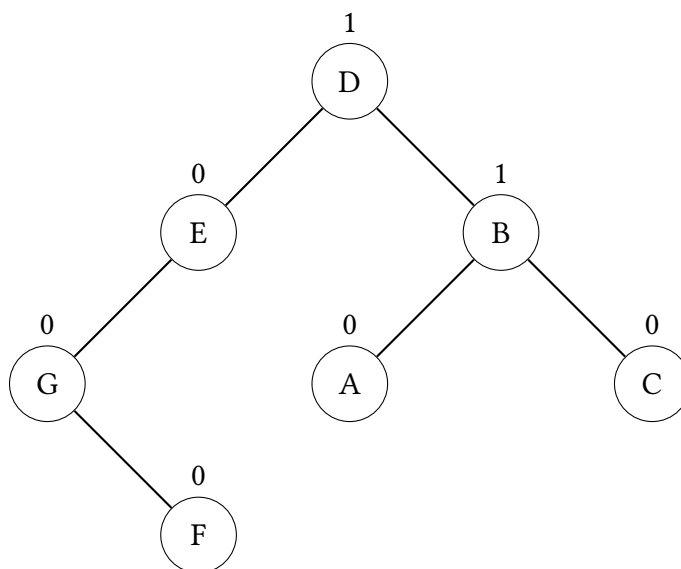
2.4.1 Rotina Splay

A rotina `splay` é o que garante o auto-balanceamento de uma splay tree. Como já mencionamos, seu efeito é trazer um dado nó para a raiz da árvore por meio de uma série de rotações. Para que o custo total de m operações em uma splay seja $O(m \log n)$, resultando num custo $O(\log n)$ amortizado por operação, a implementação deve garantir que o método `splay` é sempre acionado no nó acessado mais profundo da splay tree, em toda operação. Ademais, as rotações que trazem o nó para a raiz da árvore devem seguir uma ordem particular, descrita através dos *passos de splay*, que aplicam rotações duplas ou unitárias, até que o nó que estamos aplicando a operação chegue à raiz. Por último, devido ao bit que indica a inversão da sub-árvore de cada nó, temos que tomar alguns cuidados extras na nossa implementação dos passos de splay.

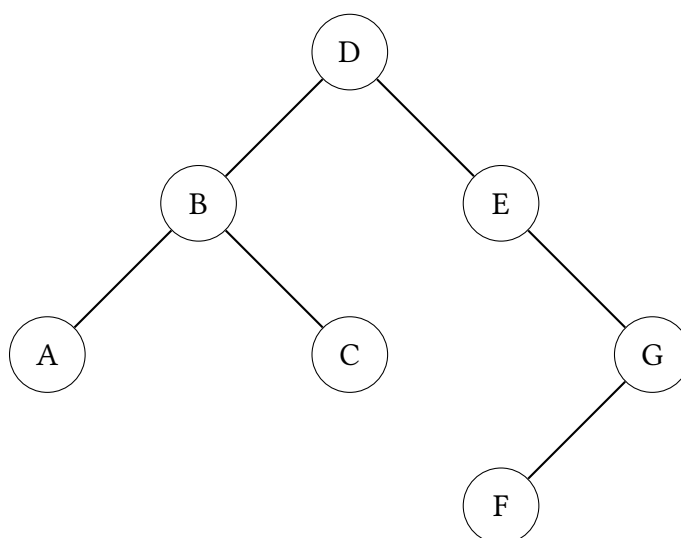
Em particular, podemos dizer que esta operação é responsável por transformar um vértice em identificador de seu caminho, ou seja, entendemos como sinônimos os métodos `make_identifier` e `splay`.

De modo a facilitarmos nossa explicação detalhada, chamamos `parent` o pai de um nó u e de `grandparent` o pai de `parent`. Como dissemos, uma operação de `splay` consiste em realizamos diversos *passos de splay*, que trazem u cada vez mais próximo à raiz da árvore, isto é, em cada um desses passos, realizamos uma ou duas rotações que diminuem a profundidade de u . Porém, ao realizar estes passos, temos que nos preocupar com dois fatores:

- A propagação do valor booleano `is_reversed` de `grandparent` e em seguida o de `parent`, fazendo as devidas reversões caso necessário. Isso nos fornece a invariante de que iremos fazer comparações entre os filhos corretos para determinar qual rotação fazer.
- A orientação que `grandparent`, `parent` e u se encontram, isto é, se estão em uma



(a) splay tree com valores *is_reversed*



(b) splay tree após a propagação de todos os valores *is_reversed*

Figura 2.4: A árvore em (a) mostra os valores do booleano *is_reversed* acima do rótulo de cada nó. Já a árvore em (b) mostra a splay tree resultante após todas as inversões serem resolvidas.

orientação de *zig*, *zig-zig* ou *zig-zag*, como exemplificadas na Figura 2.5. Dependendo da orientação, fazemos uma rotação em *u* ou em *parent*, sempre com a ideia de diminuirmos em 1 a profundidade de *u*.

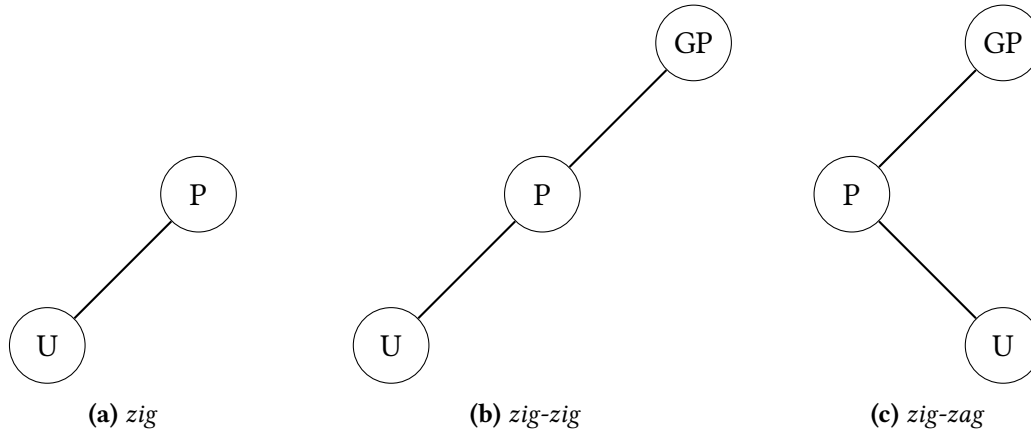


Figura 2.5: Orientações *zig*, *zig-zig* e *zig-zag* na *splay tree*. Aqui, *P* e *GP* abreviam *parent* e *grand-parent*, respectivamente. As orientações *zag*, *zag-zag* e *zag-zig* são simétricas à estas.

Ao sair da função `splay`, o nó *u* estará na raiz da *splay tree* que o contém. Além disso, seu valor booleano `is_reversed` estará nulo, pois as reversões já terão sido propagadas aos seus filhos, e seu `max_subtree_value` estará atualizado, contendo o maior valor presente na *splay tree*.

Programa 2.7 Rotina Splay

```

1: function SPLAY(u)
2:   while not u.is_root() then ▷ u não é raiz da LCT e nem da Splay
3:     parent ← u.parent
4:     grandparent ← parent.parent
5:     if not parent.is_root() then
6:       grandparent.push_reversed_bit()
7:       parent.push_reversed_bit()
8:       if (grandparent.r_child = parent) = (parent.r_child = u) then
9:         rotate(parent) ▷ zig-zig ou zag-zag
10:      else
11:        rotate(u) ▷ zig-zag
12:      end while
13:    end while
14:    rotate(u)
15:  end while
16:  u.push_reversed_bit()
17: end function

```

Assim como a operação acima, o restante da nossa implementação de uma *splay tree* é bastante tradicional. Com isso, nossos únicos cuidados extras são a manutenção do bit `is_reversed`, do valor máximo das sub-árvores e da manutenção das chaves implícitas. Por exemplo, no método `rotate(u)`, temos como primeiro passo a propagação do bit

is_reversed de grandparent até u e como última etapa o cálculo dos novos valores de max_subtree_value.

2.4.2 Rotinas Split e Join

Temos também dois métodos importantes das splay trees usados na manutenção dos caminhos preferidos: split e join, responsáveis por separar e concatenar caminhos preferidos, respectivamente.

Primeiramente, falaremos do método split(u), que recebe um nó u , identificador de seu caminho preferido, e separa o caminho preferido que o contém em dois: um com os vértices menos profundos que u em seu caminho, e outro com u e os vértices mais profundos que u . Para isso, o método simplesmente separa a sub-árvore esquerda de u , como mostrado acima. Vale notar que, este método é destrutivo, removendo tanto o ponteiro para o filho preferido de u quanto o ponteiro parent que tal filho possui para u . Logo, usamos essa rotina apenas para o cut() das *link-cut trees*.

Programa 2.8 Rotina Split

Require: u é identificador de seu caminho preferido

```

1: function SPLIT( $u$ )
2:   if  $u.l\_child \neq \text{NULL}$  then
3:      $u.l\_child.parent \leftarrow \text{NULL}$ 
4:   end while
5:    $u.l\_child \leftarrow \text{NULL}$ 
6: end function
```

De maneira complementar, temos a rotina join(u, v), que recebe dois nós e concatena a parte superior do caminho preferido de u ao caminho preferido de v . Para isso, assume-se que v seja filho de u na árvore representada que os contém, além de que ambos os nós sejam identificadores de seus caminhos preferidos, ou seja, que eles sejam as raízes de suas splay trees. Com isso, simplesmente colocamos a splay tree em que v é raiz como a sub-árvore direita de u , atualizando os respectivos apontadores e recalculando o valor máximo na splay tree de u .

Programa 2.9 Rotina Join

Require: u e v são identificadores de seus caminhos preferidos

```

1: function JOIN( $u, v$ )
2:   if  $v \neq \text{NULL}$  then
3:      $v.parent \leftarrow u$ 
4:   end while
5:    $u.r\_child \leftarrow v$ 
6:   ▸ atualiza max_subtree_value com o máximo entre o value dos dois filhos de  $u$ 
7:    $u.recalculate\_max\_subtree\_value()$ 
8: end function
```

Note que o vértice u poderia ter uma sub-árvore direita, correspondendo à parte mais profunda de seu caminho preferido. Após a operação join, esse trecho de seu velho

caminho preferido torna-se um novo caminho preferido que aponta — através do ponteiro `parent` — para o novo caminho preferido de u , que acabou de ser concatenado ao de v .

2.4.3 Métodos auxiliares

Para finalizar, nossa splay tree possui quatro métodos auxiliares: o `reverse_path`, `get_path_end_node`, `get_parent_path_node` e `get_maximum_path_value`.

Primeiramente, o `reverse_path(u)` recebe o identificador u de um caminho e inverte a orientação desse caminho. Tal tarefa é realizada invertendo o valor do bit `is_reversed` de u . Com isso, nas próximas operações realizadas neste nó, seus filhos serão trocados de posição e o bit será propagado na sua sub-árvore.

Programa 2.10 Rotina Reverse Path

Require: u identificador de seu caminho preferido

```

1: function REVERSE_PATH( $u$ )
2:    $u.is\_reversed \leftarrow \neg u.is\_reversed$ 
3:    $u.push\_reversed\_bit() \triangleright$  inverte os filhos de  $u$  e propaga a inversão do bit
4: end function
```

A seguir, os métodos `get_path_end_node(u)` e `get_parent_path_node(u)` são usados para acessar o fim e o pai do caminho preferido que contém u . Em particular, a primeira rotina retorna o vértice menos profundo do caminho preferido de u , fazendo isso ao acessar o vértice mais à esquerda na sua splay tree. Já o segundo método é responsável por retornar o vértice imediatamente acima do fim do caminho preferido que contém u . Caso tal caminho contenha a raiz da árvore representada, este método retorna `null`. Para fazer isso, efetuamos uma operação `splay` em u e retornamos o valor de `parent`.

Programa 2.11 Consulta Get Path End Node

```

1: function GET_PATH_END_NODE( $u$ )
2:    $splay(u)$ 
3:    $smallest\_value \leftarrow u$ 
4:   while  $smallest\_value.l\_child \neq NULL$  do
5:      $smallest\_value \leftarrow smallest\_value.l\_child$ 
6:   end while
7:    $splay(smallest\_value)$ 
8:   return  $smallest\_value$ 
9: end function
```

Programa 2.12 Consulta Get Parent Path Node

```

1: function GET_PARENT_PATH_NODE( $u$ )
2:    $splay(u)$ 
3:   return  $u.parent$ 
4: end function
```

Por último, temos a função `get_maximum_path_value(u)`, que recebe um vértice u identificador de caminho e retorna o maior valor de uma aresta no caminho preferencial de u . Em termos práticos, retorna o valor de `max_subtree_value`.

Programa 2.13 Consulta Get Maximum Path Value

Require: u identificador de seu caminho preferido

```
1: function GET_MAXIMUM_PATH_VALUE( $u$ )  
2:   return  $u.max\_subtree\_value$   
3: end function
```

Com isso, temos todas as ferramentas necessárias para manipularmos a splay tree em seu uso representando os caminhos preferidos nas *link-cut trees*.

Capítulo 3

Union-Find Retroativo

Neste capítulo falaremos do union-find retroativo, introduzido por [DEMAINE, IACONO et al. \(2007\)](#). Ele será a primeira estrutura retroativa que vamos implementar usando as *link-cut trees*.

3.1 Ideia

O union-find é uma estrutura de dados utilizada para manter uma coleção de conjuntos disjuntos, isto é, conjuntos que não se intersectam. Para isso, ela fornece duas operações principais:

- `same_set(a, b)`: retorna *verdadeiro* caso *a* e *b* estejam no mesmo conjunto, *falso* caso contrário.
- `union(a, b)`: se *a* e *b* estão em conjuntos distintos, realiza a união destes conjuntos.

A primeira versão do union-find foi apresentada por [GALLER e FISHER \(1964\)](#). Posteriormente, [TARJAN e LEEUWEN \(1984\)](#) utilizaram a técnica de compressão de caminhos para mostrar uma implementação com complexidade $O(\alpha(n))$ amortizada por operação, onde n é o número total de elementos nos conjuntos que estamos representando e α é o inverso da função de Ackermann.

Como já dissemos, na versão retroativa, estamos interessados em realizar as operações em uma linha de tempo, isto é, conseguirmos adicionar ou remover operações do tipo `union` em certos instantes de tempo. Ademais, queremos conseguir checar se dois elementos pertencem a um mesmo conjunto num instante arbitrário.

Para isso, vamos trocar a operação `union(a, b)` da estrutura original por duas novas rotinas, `create_union(a, b, t)` e `delete_union(t)`. A primeira delas é responsável por adicionar uma união dos conjuntos que contém *a* e *b* no instante de tempo *t*, enquanto a segunda desfaz a união realizada em *t*. Além disso, colocamos um terceiro parâmetro *t* na operação `same_set`, para com isso conseguirmos consultar se dois elementos pertenciam ao mesmo conjunto neste dado instante *t*.

Por exemplo, a Figura 3.1 mostra uma coleção de conjuntos disjuntos em quatro

instantes de tempo. Neste caso, as consultas `same_set(a, b, 3)` e `same_set(c, d, 3)` retornariam *verdadeiro*, enquanto `same_set(a, d, 3)` e `same_set(c, d, 5)` retornariam *falso*.

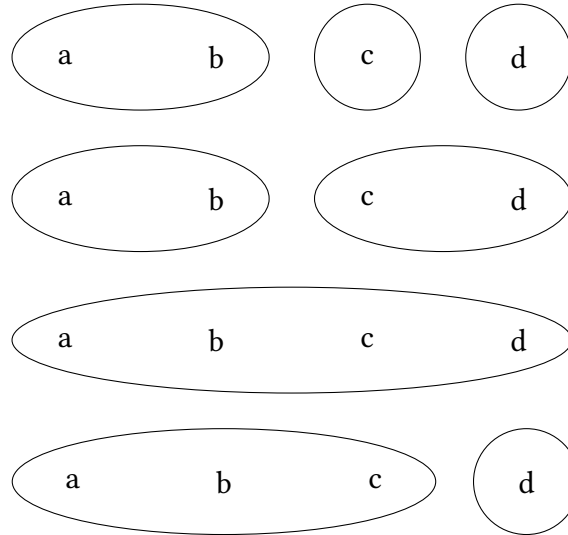


Figura 3.1: Representação dos conjuntos com os elementos $\{a, b, c, d\}$ após a seguinte sequência de operações: `create_union(a, b, 2)`, `create_union(c, d, 3)`, `create_union(b, c, 4)` e `delete_union(3)`. Cada linha mostra o estado atual da coleção imediatamente após uma operação.

Assumiremos que em nenhum momento podemos fazer uma operação que seria inválida em algum instante de tempo. Em outras palavras, não podemos remover uma união que não aconteceu, assim como não podemos criar uma união em dois elementos que já pertencem ao mesmo conjunto, sempre visando que a sequência de uniões possam ser traduzidas em uma árvore.

Por exemplo, a sequência de operações `create_union(a, b, 1)`, `create_union(b, c, 2)`, `create_union(d, c, e)` e `create_union(a, d, 5)` seria inválida, pois, a última operação tenta criar uma união entre elementos que já pertencem ao mesmo conjunto. Entretanto, caso a operação `delete_union(1)` fosse adicionada logo antes de `create_union(a, d, 5)`, faríamos com que a sequência se tornasse válida.

3.2 Estrutura interna

Para implementarmos o union-find retroativo, vamos utilizar as *link-cut trees* como estrutura interna. Para isso, fazemos com que os elementos dos conjuntos sejam vértices na floresta mantida pelas *link-cut trees* e que cada aresta das *link-cut trees* represente uma operação de union. Com isso, cada conjunto de nossa coleção será uma árvore na floresta. Note que, essa simples ideia já pode ser utilizada para implementar uma versão não retroativa do union-find, visto que a operação de union pode ser traduzida para uma chamada de `link`, assim como `same_set` para `is_connected`.

Para introduzirmos o caráter retroativo da estrutura, vamos utilizar o atributo `value` nas arestas das *link-cut trees*. Este campo será usado para guardar o tempo em que uma operação de union aconteceu, isto é, uma chamada `create_union(a, b, 3)`, cria uma

aresta de valor 3 entre os vértices a e b da *link-cut tree*. Este valor poderá então ser utilizado para checar se dois elementos já pertenciam a um certo conjunto em um dado instante de tempo.

Ademais, como estamos simplesmente usando métodos já implementados pelas *link-cut trees*, basicamente sem nenhuma computação adicional, podemos perceber que o union-find retroativo tem uma complexidade de $O(\log n)$ por operação, tanto em consultas quanto em atualizações, onde n é o número total de elementos nos conjuntos da coleção.

A seguir, mostramos mais detalhadamente como essas operações são realizadas.

3.3 Consultas Same Set

Primeiramente, para checarmos se dois elementos a e b , no instante de tempo t , estão em um mesmo conjunto de nossa coleção, temos que conferir se eles estão na mesma árvore da floresta representada pelas *link-cut trees*. Para essa verificação inicial, podemos usar a consulta `is_connected`. Caso esta consulta retorne *verdadeiro*, prosseguimos para checar se eles já pertenciam ao mesmo conjunto no instante t .

Para isso, devemos lembrar que: cada aresta das *link-cut trees* representa uma operação de union; e que existe apenas um único caminho entre dois nós quaisquer de uma árvore. Logo, todas as arestas que compõem o caminho entre os vértices que representam os elementos a e b se traduzem na sequência de uniões que resultaram no conjunto que contém estes vértices. Portanto, caso alguma dessas uniões tenha acontecido em um instante maior que t , os elementos a e b ainda não fariam parte do mesmo conjunto no tempo t . Finalmente, para realizar esta checagem, basta usarmos o método `maximum_edge` para obter o valor da maior aresta entre a e b , e com isso checar se a união mais recente aconteceu em um instante menor ou igual a t .

Programa 3.1 Consulta Same Set

```

1: function SAME_SET( $a, b, t$ )
2:   if not linkCutTree.is_connected( $a, b$ ) then
3:     return false
4:   end while
5:   return linkCutTree.maximum_edge( $a, b$ )  $\leq t$ 
6: end function

```

3.4 Rotinas Create Union e Delete Union

Por último, temos as rotinas de inserção e deleção de uniões. Aqui, as implementações são bem diretas, uma vez que essas operações se traduzem na inserção e deleção de uma aresta nas *link-cut trees*, respectivamente. Com isso, temos apenas que nos preocupar com dois detalhes extras.

O primeiro deles é a transformação de elementos dos conjuntos em nossa coleção para vértices da *link-cut tree*. No pseudo-código abaixo, a função `create_node(x)` cria um

vértice para o elemento x se e somente se ele ainda não possui um vértice correspondente na árvore. Ademais, para dar suporte a deleção de uma união criada em um instante t , precisamos criar um mapeamento que guarda o par de elementos unidos tendo como chave o instante em que a união ocorreu. No pseudo-código esse mapeamento é realizado pela estrutura `edges_by_time`, que, caso seja uma *hash table*, não muda a complexidade da rotina.

Programa 3.2 Rotina Create Union

```

1: function CREATE_UNION( $a, b, t$ )
2:   linkCutTree.create_node( $a$ )
3:   linkCutTree.create_node( $b$ )
4:   linkCutTree.link( $a, b, t$ )
5:   edges_by_time[ $t$ ]  $\leftarrow (a, b)$ 
6: end function

```

Programa 3.3 Rotina Delete Union

```

1: function DELETE_UNION( $t$ )
2:   ( $u, v$ )  $\leftarrow$  edges_by_time[ $t$ ]
3:   linkCutTree.cut( $u, v$ )
4:   edges_by_time.erase( $t$ )
5: end function

```

Capítulo 4

Floresta Geradora Mínima Incremental

Neste capítulo, falaremos do problema da floresta geradora mínima incremental — *incremental minimum spanning forest*, em inglês. A solução deste problema é utilizada por [ANDRADE JÚNIOR e DUARTE SEABRA \(2020\)](#) para implementar uma versão semi-retroativa da floresta geradora mínima, que estudaremos no próximo capítulo.

4.1 Ideia

O *problema da árvore geradora mínima* consiste no seguinte: dado um grafo conexo G , com um peso associado a cada aresta, determinar uma árvore geradora de peso mínimo. Note que, este problema admite tanto pesos positivos quanto negativos nas arestas, mas ao admitir pesos negativos, é necessário exigir que o grafo em questão seja acíclico. Caso o grafo de entrada seja desconexo, buscamos uma floresta maximal de peso mínimo, que consiste em uma árvore geradora mínima de cada componente conexa do grafo.

Algoritmos como o de [PRIM \(1957\)](#) ou o de [KRUSKAL \(1956\)](#) são famosos por resolver este problema de maneira eficiente, ambos com complexidade de $O(|E| \log |E|)$, onde E é o conjunto de arestas do grafo.

Já na versão incremental do problema, inicialmente sabemos apenas o número de vértices do grafo, que começa sem nenhuma aresta. Em seguida, uma a uma as arestas são inseridas, com um dado peso. Devemos, sempre que for requisitado, fornecer eficientemente uma floresta maximal de peso mínimo do grafo corrente.

Uma solução ingênua para esta versão seria acionar o algoritmo de Prim ou o de Kruskal a cada consulta. Porém, essa alternativa seria muito cara, pois ela não considera que entre uma consulta e outra o grafo pode ter mudado muito pouco. A ideia então é utilizar a versão apresentada por [FREDERICKSON \(1985\)](#) para mantermos informações sobre grafo, de modo a conseguirmos responder às consultas de maneira eficiente.

Desta forma, a estrutura de dados que vamos apresentar da suporta à seguinte interface:

- `add_edge(u, v, w)`: adiciona no grafo a aresta com pontas em u e v com peso w .
- `get_msf()`: retorna a lista com todas as arestas que compõem uma floresta maximal de peso mínimo do grafo corrente.
- `get_msf_weight()`: retorna o custo de uma floresta maximal de peso mínimo do grafo corrente.

A partir destes métodos, é possível construir um grafo de maneira incremental, isto é, adicionando aresta por aresta, com o advento de termos sempre em mãos a sua respectiva floresta geradora mínima. Em particular, a rotina `add_edge` consumirá tempo proporcional à $O(\log n)$ amortizado por operação — onde n é o número de vértices do grafo, a rotina `get_msf` consumirá tempo proporcional a $O(\log n)$ e `get_msf_weight` será executada em tempo constante.

4.2 Estrutura interna

Assim como no union-find retroativo, vamos utilizar as *link-cut trees* como estrutura interna da solução deste problema. Para isso, queremos que as *link-cut trees* sejam utilizadas para manter uma floresta maximal de peso mínimo do grafo corrente, de modo que, ao adicionarmos uma nova aresta, com peso w e pontas em u e v , ao grafo, podemos usar as rotinas `is_connected(u, v)` e `maximum_edge(u, v)` para decidir se incluímos ou não a aresta à floresta maximal de peso mínimo.

Um detalhe importante é que, para essa implementação, necessitamos de uma maneira de consultar qual a aresta com maior peso no caminho entre dois vértices na árvore, não apenas o seu peso. Para isso, modificamos a implementação das *link-cut trees* para incluir um novo parâmetro opcional `id` na rotina `link`, além de um novo método `maximum_edge_id`, que retorna o `id` de uma aresta de peso máximo no caminho entre dois vértices. Este `id` será definido por nossa estrutura, e a partir dele, utilizando um mapa `edges_by_id`, conseguimos recuperar em quais vértices tal aresta incide.

Finalmente, mantemos uma lista `current_msf` de `id`'s das arestas que compõem uma floresta maximal de peso mínimo, assim como um inteiro `current_msf_weight`, que armazena o seu custo. Estes atributos nos permitem responder de maneira eficiente às consultas, como mostraremos a seguir.

4.3 Consultas Get MSF e Get MST Weight

Primeiramente, para realizarmos a consulta acerca da composição de uma floresta maximal de peso mínimo, simplesmente percorremos a lista dos `id`'s das arestas que compõem a floresta armazenadas nas *link-cut trees* e criamos uma nova lista com as arestas em si, utilizando o mapeamento fornecido pelo `edges_by_id`.

Já a consulta sobre o custo de uma floresta maximal de peso mínimo pode ser facilmente respondida retornando o inteiro `current_msf_weight`, mantido pela rotina `add_edge`.

Programa 4.1 Consulta Get MSF

```

1: function GET_MSF
2:    $msf \leftarrow []$ 
3:   for each  $id$  in  $current\_msf$  do
4:      $msf.append(edges\_by\_id[id])$ 
5:   end for
6:   return  $msf$ 
7: end function

```

Programa 4.2 Consulta Get MSF Weight

```

1: function GET_MSF_WEIGHT
2:   return  $current\_msf\_weight$ 
3: end function

```

Com isso, a consulta `get_msf` tem um custo proporcional a $O(m)$, onde m é o número de arestas inseridas no grafo, pois no pior caso o grafo pode ser a própria floresta maximal de peso mínimo, e a consulta `get_msf_weight` tem um custo $O(1)$.

4.4 Rotina Add Edge

Como a parte mais importante da estrutura, a rotina `add_edge(u , v , w)` é responsável por adicionar uma nova aresta ao grafo, com extremos em u e v e peso w , possivelmente tendo que atualizar a floresta maximal de peso mínimo. Este processo pode ser dividido em dois casos.

O primeiro deles ocorre quando u e v pertencem a componentes distintas do grafo. Neste caso, simplesmente adicionamos a aresta uv à floresta maximal de peso mínimo, ou seja, à floresta representada pelas *link-cut trees*.

O segundo caso ocorre quando u e v fazem parte da mesma componente do grafo. Neste caso, devemos decidir se essa aresta uv deve ou não substituir alguma aresta na árvore geradora mínima dessa componente. Note que, se adicionarmos essa nova aresta na árvore, criaremos um ciclo, que consiste em todas as arestas no caminho de u até v na árvore, mais uv . Ademais, a adição da aresta uv somente faz sentido caso ela diminua o custo total da árvore, em outras palavras, caso ela não seja a maior aresta deste ciclo. Dessa forma podemos simplesmente excluir a aresta com maior peso do ciclo, preservando a estrutura de árvore e possivelmente contribuindo para uma diminuição de seu custo total.

Com isso, como esta rotina usa apenas os métodos fornecidos pelas *link-cut trees*, podemos concluir que ela consome tempo amortizado proporcional a $O(\log n)$, onde n é o número de vértices do grafo representado.

Programa 4.3 Rotina Add Edge

```

1: function ADD_EDGE( $u, v, w$ )
2:    $edge\_id \leftarrow create\_unique\_edge\_id()$ 
3:    $edges\_by\_id[edge\_id] \leftarrow new\ edge(u, v, w, edge\_id)$ 
4:   if not linkCutTree.is_connected( $u, v$ ) then
5:     linkCutTree.link( $u, v, w, edge\_id$ )
6:     current_msf.append( $edge\_id$ )
7:     current_msf_weight +=  $w$ 
8:   else if linkCutTree.maximum_edge( $u, v$ ) >  $w$  then
9:     maximum_edge_id ← linkCutTree.maximum_edge_id( $u, v$ )
10:    maximum_edge ← edges_by_id[maximum_edge_id]
11:    linkCutTree.cut(maximum_edge.u, maximum_edge.v)
12:    current_msf.erase(maximum_edge.id)
13:    current_msf_weight -= maximum_edge.w
14:    linkCutTree.link( $u, v, w, edge\_id$ )
15:    current_msf.append( $edge\_id$ )
16:    current_msf_weight +=  $w$ 
17:   end while
18: end function

```

4.5 Versão Dinâmica

Além da versão incremental do problema, que apresentamos neste capítulo, existe uma versão dinâmica, onde é permitida também a remoção de arestas do grafo. O trabalho de [HANAUER et al. \(2021\)](#) cita algumas soluções para essa versão do problema. Em particular, [HOLM et al. \(2001\)](#) propõem uma solução com custo $O(\log^4 n)$, onde n é o número de vértices do grafo. Porém, essa solução é bastante sofisticada e seu estudo fugiria do escopo deste trabalho.

Capítulo 5

Floresta Geradora Mínima Semi-Retroativa

Neste capítulo, descreveremos uma versão aprimorada solução apresentada por [ANDRADE JÚNIOR e DUARTE SEABRA \(2020\)](#) para o problema da floresta geradora mínima retroativa — *retroactive minimum spanning forest*, em inglês. Esta versão utiliza a técnica de *square-root decomposition* junto com a estrutura do Capítulo 4 para solucionar o problema.

5.1 Nomenclatura

Tendo em vista as definições acerca de estruturas de dados parcialmente e totalmente retroativas, mostradas no Capítulo 1, decidimos nos referir tanto a solução de Andrade Júnior e Duarte Seabra quanto a versão aqui apresentada como *semi-retroativas*. Isto se da pelo fato de ambas suportarem inserções e consultas em qualquer instante de tempo, porém nenhuma delas suporta a remoção de uma operação, o que as exclui de qualquer uma das duas definições.

Vale notar que [HENZINGER e WU \(2019\)](#) apresentam ainda outra definição, a de *estrutura de dados incremental totalmente retroativa*. Neste contexto, uma operação retroativa pode criar ou cancelar uma inserção, fazendo com que, no segundo caso, a operação cancelada seja totalmente removida da estrutura de dados. Entretanto, não se pode criar uma remoção, isto é, não existe suporte para que uma operação seja cancelada somente após um certo instante de tempo. Portanto, apesar de um nome sugestivo, essa definição também não contempla a solução que vamos estudar neste capítulo.

5.2 Square-root decomposition

Inicialmente, vamos conhecer a técnica de *square-root decomposition*, utilizada para transformar soluções que consomem tempo $O(\log n)$ — onde n é o número de elementos no problema em questão — em soluções com custo $O(\sqrt{n})$. Para nossa explicação, vamos

utilizar o seguinte problema como exemplo: dado uma lista de inteiros $[a_1, a_2, a_3, \dots, a_n]$, queremos conseguir efetuar as duas operações a seguir:

- $\text{find_sum}(l, r)$: determina a soma de todos os valores no intervalo $[l, r]$;
- $\text{update_value}(i, x)$: atualiza para x o valor do elemento na posição i .

Este problema possui duas soluções *ingênuas*, cada uma favorecendo uma das operações. A primeira, e mais simples, consiste em utilizar um *loop* para responder consultas find_sum , o que acaba custando $O(n)$, e apenas atualizando a respectiva posição para a operação update_value , o que consome tempo $O(1)$.

Já a segunda solução se resume a utilizarmos um vetor de soma de prefixos — isto é, um vetor tal que $\text{prefix_sum}[i]$ equivale a $\sum_{j=1}^i a_j$ — para respondermos as consultas find_sum em tempo constante, porém, acarretando na reconstrução de prefix_sum em toda chamada de update_value , o que consome $O(n)$.

Todavia, utilizando a *square-root decomposition*, podemos responder consultas do primeiro tipo em tempo $O(\sqrt{n})$ e executa rotinas do segundo tipo em tempo constante, um bom meio termo. O cerne desta técnica consiste em duas etapas. Primeiramente, dividimos a estrutura de interesse — neste caso, a lista de inteiros — em d blocos de tamanho b . Sem perda de generalidade, assumimos que n , o tamanho da lista, é um múltiplo de b , com $d = \frac{n}{b}$. Em seguida, para cada um dos blocos, pré-calculamos alguma informação auxiliar. No problema utilizado como exemplo, isso se traduz em pré-calcular a soma de todos os elementos dentro de um bloco.

Com isso, podemos explicar como adaptamos as operações para funcionarem utilizando esta divisão em blocos. Apesar de estarmos focados em resolver o problema de soma em um intervalo, a *receita* por trás dessa adaptação pode ser facilmente utilizada em outros contextos, como veremos na próxima seção.

Para respondermos consultas do tipo $\text{find_sum}(l, r)$, utilizaremos o pré-cálculo realizado nos blocos para eliminar a necessidade de percorrer todos os elementos no intervalo entre l e r . Primeiramente, iteramos sob todos os blocos completamente contidos no intervalo e acumulamos a respectiva soma em uma variável y . Com isso em mãos, podemos nos concentrar para calcular a soma x e z das *pontas* do intervalo, isto é, os pedaços que fazem parte de um bloco não totalmente contido no intervalo, utilizando um simples *loop*. Esta tarefa está representada na Figura 5.1 e podemos perceber que a resposta para a consulta é simplesmente a soma $x + y + z$.

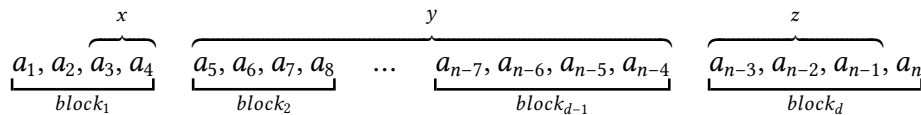


Figura 5.1: Divisão de uma lista de tamanho n em d blocos de tamanho b , mostrando que a soma de x , y e z responde a consulta feita por $\text{find_sum}(3, n-1)$.

Já a rotina $\text{update_value}(i, x)$ é um pouco mais simples. Ao atualizarmos o valor da posição i , temos simplesmente que atualizar o valor pré-calculado do bloco que o contém,

e isso é o suficiente.

Note que a segunda operação tem um custo constante, dado que apenas atualizamos um único valor, porém a primeira operação requer uma análise mais cuidadosa. Para encontrar os valores das *pontas*, x e z , somos obrigados a realizar um *loop* sob estes elementos, e como no pior caso podemos acabar percorrendo $b - 1$ elementos, esta etapa tem custo $O(b)$. Já para encontrar y , iteramos sob os blocos em si, portanto, no pior caso, gastamos $O(d)$ para o seu cálculo. Com isso, temos que a consulta `find_sum` tem um custo final $O(\max(b, d))$.

Com o intuito de maximizarmos a eficiência desta função, queremos encontrar um tamanho de bloco b ótimo que minimize o valor de $\max(b, d)$, isto é, que tornem b e d os mais próximos possível. Para isso, podemos fazer:

$$b = d \Rightarrow b = \frac{n}{b} \Rightarrow b^2 = n \Rightarrow b = \pm\sqrt{n} \quad (5.1)$$

Portanto, \sqrt{n} é o tamanho ótimo para um bloco, o que implica que a nossa lista será dividida em \sqrt{n} blocos, daí o nome da técnica. Finalmente, temos agora que a consulta `find_sum` consome tempo $O(\sqrt{n})$.

5.3 Rotinas extras para a versão incremental

Antes de seguirmos adiante com a explicação versão do problema, temos que apresentar duas funções extras adicionadas na nossa solução para a versão incremental do problema. Em particular, ambas possuem o mesmo objetivo: possibilitar consultas acerca da floresta maximal de peso mínimo após a adição de um conjunto de arestas sem que tais modificações persistam na estrutura original. Em outras palavras, elas simulam o que poderia ser consultado caso fizéssemos estas adições de arestas em uma cópia da estrutura, porém, sem o custo adicional que tal cópia implica.

Essas rotinas são as `get_msf_after_operations(edges[])` e `get_msf_weight_after_operations(edges[])`, que recebem uma lista de arestas e retornam, respectivamente, as arestas que fazem parte de uma floresta maximal de peso mínimo e seu peso caso as arestas da lista fornecida fossem adicionadas ao grafo. Desta forma, a execução destes métodos consiste em três etapas: adição das arestas na estrutura; realização da consulta que estamos interessados; reversão da estrutura para o seu estado inicial.

Para a realização da primeira etapa, criamos o método `apply_add_edge_operations`, que recebe uma lista de arestas, e realiza a adição delas na estrutura, de maneira muito similar ao que acontece na rotina `add_edge`. Entretanto, este método retorna uma lista de pares {operação, aresta}, indicando quais operações foram realizadas na *link-cut tree* — `link` ou `cut` — assim como as arestas envolvidas em cada uma delas. Como este método é muito semelhante à rotina `add_edge`, não mostraremos seu pseudo-código.

Logo, após realizarmos as consultas que estamos interessados, precisamos reverter as operações realizadas na *link-cut tree*. Para isso, criamos o método `apply_rollback`, que recebe a lista criada pela rotina acima e desfaz as operações. Note que, para mantermos a

consistência da *link-cut tree* durante este processo, precisamos percorrer esta lista de trás para frente, revertendo uma operação de cada vez.

Programa 5.1 Rotina Apply Rollback

```

1: function APPLY_ROLLBACK(operations_list[])
2:   revert(operations_list)
3:   for each (operation, edge) in operations_list do
4:     if operation = link then
5:       linkCutTree.cut(edge.u, edge.v)
6:       current_msf.erase(edge.id)
7:       current_msf_weight -= edge.w
8:     else
9:       linkCutTree.link(edge.u, edge.v, edge.w, edge.id)
10:      current_msf.append(edge.id)
11:      current_msf_weight += edge.w
12:    end while
13:  end for
14: end function

```

Finalmente, com estes métodos em mãos, podemos implementar as rotinas extras que estávamos interessados. Vamos mostrar somente o pseudo-código da rotina *get_msf_after_operations*, dado que a única diferença entre as duas implementações seria a chamada na terceira linha.

Programa 5.2 Rotina Get MSF After Operations

```

1: function GET_MSF_AFTER_OPERATIONS(edges[])
2:   rollback_operations ← apply_add_edge_operations(edges)
3:   msf ← get_msf()
4:   apply_rollback(rollback_operations)
5:   return msf
6: end function

```

Além disso, podemos perceber que a complexidade destes métodos é proporcional à $O(q \log m)$, onde q é o número de arestas na lista *edges*[].

5.4 Ideia

Agora, com todas as peças necessárias em mãos, podemos partir para a explicação da solução. Assim como no Capítulo 4, estamos interessados em resolver o *problema da floresta geradora maximal de peso mínimo*, porém agora em sua versão semi-retroativa.

Em particular, queremos ser capazes de adicionar uma aresta ao grafo em certo estante de tempo, assim como realizar consultas acerca da floresta geradora maximal de peso mínimo em algum momento do presente ou do passado. Para isso, a estrutura deve conseguir dar suporte a seguinte interface:

- `add_edge(u, v, w, t)`: adiciona no grafo a aresta com pontas em u e v com peso w no instante t ;
- `get_msf(t)`: retorna a lista com todas as arestas que compõem uma floresta maximal de peso mínimo do grafo no instante t ;
- `get_msf_weight(t)`: retorna o custo de uma floresta maximal de peso mínimo do grafo no instante t .

A seguir, vamos apresentar duas soluções para este problema: a primeira delas é a versão original de Andrade Júnior e Duarte Seabra, que fornece os métodos acima com um custo de $O(\sqrt{m} \log n)$ por operação — onde m é o número de operações realizadas até o instante atual e n é o número de vértices do grafo, porém essa abordagem apresenta uma restrição em relação a quantidade de operações que podem ser realizadas na estrutura; já a segunda solução corresponde a uma melhoria da versão original, onde eliminamos a restrição acerca da quantidade de operações, oferecendo um custo amortizado de $O(\sqrt{m} \log n)$ por operação.

5.4.1 Versão original

Inicialmente, vamos pensar em como resolver este problema de uma maneira ingênua, isto é, sem usar as técnicas mais sofisticadas que vimos até agora. Para isso, podemos manter uma lista ordenada `edges_by_time`, onde cada posição corresponde a uma operação `add_edge(u, v, w, t)`, com a aresta (u, v, w) sendo armazenada como valor e t sendo usado como chave de ordenação para a lista. Assim, podemos responder às consultas da seguinte maneira: separamos todas as arestas inseridas até o instante de tempo t fornecido para a consulta e executamos, por exemplo, o algoritmo de Kruskal para determinar a floresta geradora maximal de custo mínimo. Dessa maneira, o consumo de tempo da rotina `add_edge` é $O(\log m)$ — sendo m o número de inserções realizadas, e o consumo de tempo das consultas `get_msf` e `get_msf_weight` é de $O(m \log m)$, pois no pior caso executamos o algoritmo de Kruskal para todas as arestas na lista.

Como podemos perceber, a solução acima gasta muito tempo construindo a resposta do zero para cada uma das consultas. Para melhorar isso, Andrade Júnior e Duarte Seabra sugerem uma maneira de acelerar esta etapa de construção de resposta, mas comprometendo um pouco o custo da rotina de inserção de novas arestas, através do uso da técnica de *square root decomposition*.

Para procedermos com a explicação, precisamos assumir duas coisas: que m é um inteiro conhecido de antemão, representando o número total de arestas a serem inseridas no grafo; e que o instante de tempo fornecido a toda operação esteja no intervalo $[1, m]$. Esses dois detalhes representam uma grande restrição para a versão original, e buscamos eliminá-los na versão melhorada da solução. Além disso, sem perda de generalidade, vamos assumir que m é um quadrado perfeito.

Primeiramente, utilizando a ideia de *square root decomposition*, vamos dividir a lista `edges_by_time` em \sqrt{m} blocos. Além disso, definimos os *checkpoints* $c_1, c_2, \dots, c_{\sqrt{m}}$, que correspondem aos instantes de tempo no fim de cada bloco, assim temos que c_i corresponde ao instante de tempo $i\sqrt{m}$. Em seguida, atribuímos uma floresta geradora mínima

incremental t_i a cada *checkpoint*, onde t_i é incrementada com todas as arestas inseridas em um instante de tempo menor ou igual a c_i .

Em outras palavras, podemos descrever esta construção da seguinte maneira: dividimos a lista de inserções em \sqrt{m} blocos de tamanho \sqrt{m} , onde cada bloco possui uma estrutura para resolver o problema da floresta geradora mínima incremental. Dessa forma, fazemos com que a estrutura em cada bloco possua todas as arestas inseridas desde o instante de tempo inicial até o instante de tempo máximo contido naquele bloco

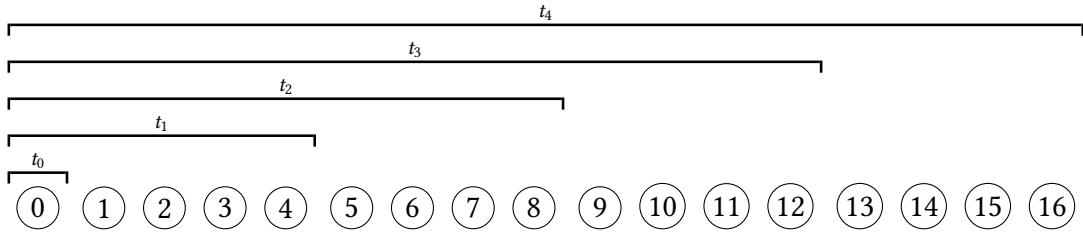


Figura 5.2: Representação da lista *edges_by_time* com m igual a 16. Neste caso, cada bloco tem tamanho 4 e os instantes 0, 4, 8, 12 e 16 são c_0, c_1, c_2, c_3 e c_4 , respectivamente. Assim, por exemplo, a estrutura t_3 contém todas as arestas adicionadas desde o instante 1 até o instante 12.

A partir dessa construção, podemos responder uma consulta acerca do estado da floresta geradora maximal de peso mínimo no instante de tempo t utilizando a seguinte abordagem:

- para começar, precisamos encontrar o último bloco da decomposição que não possui a aresta adicionada no instante de tempo t , ou o bloco que a possui em seu extremo. Mais formalmente, isso corresponde a encontrarmos o maior i tal que $c_i \leq t$ vale;
- em seguida, vamos *aumentar* este bloco até que ele possua todas as operações de inserção até o instante t , isto é, com a estrutura t_i em mãos, incrementamos ela com todas as arestas adicionadas entre os instantes $c_i + 1$ e t ;
- finalmente, basta retornar a consulta de interesse, isto é, as arestas que compõem a floresta geradora ou o seu respectivo peso.

Vale notar que, caso a consulta aconteça no primeiro bloco, não existe uma estrutura inicial a qual podemos utilizar para incrementar a resposta final. Por isso, vamos definir o *checkpoint* $c_0 = 0$ e sua respectiva estrutura t_0 , uma floresta geradora mínima incremental de um grafo vazio.

Agora, para executarmos uma rotina `add_edge(u, v, w, t)` fazemos o seguinte:

- inicialmente, encontramos o primeiro bloco em que a aresta adicionada no instante t deve ser passada para a estrutura incremental, ou seja, o menor i tal que $t \leq c_i$ é verdade;
- por último, basta adicionarmos esta aresta nas estruturas de cada bloco daqui para frente, o que se traduz em realizarmos uma operação de `add_edge(u, v, w)` em todas as t_j , com $j \in [i, \sqrt{m}]$.

Finalmente, podemos analisar a complexidade desta solução, onde m é o número de operações realizadas e n é o número de vértices do grafo.

Para as consultas, podemos perceber que o primeiro passo tem custo $O(\sqrt{m})$, dado que temos que percorrer todos os blocos até encontrarmos o i de interesse. Já a segundo passo implica um custo amortizado de $O(\sqrt{m} \log n)$, dado que, no pior caso, teremos que adicionar quase todas as arestas de um bloco na estrutura incremental. Assim, a consulta `get_msf` fica com um custo amortizado de $O(m + \sqrt{m} \log n) = O(m)$ e a consulta `get_msf_weight` fica com custo amortizado de $O(1 + \sqrt{m} \log n) = O(\sqrt{m} \log n)$.

Além disso, na rotina `add_edge`, podemos ter que adicionar a aresta na estrutura incremental de quase todos os blocos da decomposição, com isso, seu custo amortizado também será de $O(\sqrt{m} \log n)$.

5.4.2 Versão melhorada

Como podemos ver acima, a versão original de Andrade Júnior e Duarte Seabra oferece uma solução para o problema que estamos interessados em resolver, porém, as restrições que a acompanham acabam se tornando um grande inconveniente. Logo, ao refletirmos sobre maneiras de melhorar a ideia apresentada, rapidamente notamos que a construção inicial da decomposição acaba se tornando um limitante para a estrutura.

Em particular, a construção realizada na versão original se baseia no artigo proponente da ideia de estruturas de dados retroativas, de Demaine, Iacono et al., que mostra uma receita para transformar estruturas parcialmente retroativas em estruturas totalmente retroativas — traduzindo para o nosso caso, uma maneira para transformar a floresta geradora mínima incremental em uma retroativa. Entretanto, na abordagem sugerida pelo artigo, são realizadas diversas reconstruções da decomposição, conforme novas aresta vão sendo adicionadas. Mais especificamente, os autores sugerem uma reconstrução a cada $\frac{\sqrt{m}}{2}$ operações, de modo a garantir que nenhum bloco tenha tamanho maior que $\frac{3\sqrt{m}}{2}$.

Além disso, assumindo que a reconstrução possui um custo de $O(m \log n)$, podemos distribuir este gasto de maneira amortizada em cada operação, fazendo com que o custo amortizado de cada uma continue sendo $O(\sqrt{m} \log n)$. Todavia, para que a reconstrução tenha este custo, é necessário que estrutura parcialmente retroativa tenha uma versão persistente, de modo a podermos utilizar uma única cópia para representar $t_0, t_1, \dots, t_{\sqrt{m}}$. Por sua vez, uma versão persistente da floresta geradora mínima incremental requer a implementação de uma *link-cut tree* persistente, como a apresentada por [DEMAINE, LANGERMAN et al. \(2008\)](#). Porém, essa implementação é bastante sofisticada, e seu estudo fugiria do escopo deste trabalho.

Logo, estaremos interessados em resolver este problema utilizando uma versão não persistente da floresta geradora mínima incremental, criando uma cópia da estrutura para cada t_i . Desse modo, durante uma reconstrução, as operações do último bloco serão inseridas em $t_{\sqrt{m}}$, as operações do penúltimo bloco serão inseridas em $t_{\sqrt{m}-1}$ e $t_{\sqrt{m}}$, e assim por diante. Portanto, podemos calcular o custo dessa reconstrução da seguinte maneira:

$$\sum_{i=1}^{\sqrt{m}} (i\sqrt{m} \log n) = \frac{m \log n (\sqrt{m} + 1)}{2} \Rightarrow O(m \log n \sqrt{m}). \quad (5.2)$$

Ou seja, com o custo da reconstrução apresentado acima, cada operação teria agora um custo amortizado de $O(m \log n)$, o que está longe do ideal. Neste ponto, nossa abordagem para solucionar o problema fica bastante criativa, com a apresentação de uma maneira totalmente nova de realizar tal tarefa.

O principal ponto a ser notado é que, entre uma reconstrução e outra, gastamos muito tempo para reconstruir as t_i a partir do zero, e que talvez exista uma maneira para reaproveitar as estruturas da decomposição anterior durante a reconstrução da nova. Para facilitar as coisas, vamos diferenciar a notação relativa à nova decomposição em relação a antiga. Deste modo, definimos m^* e $\sqrt{m^*}$ como o número de operações e o tamanho dos blocos na nova versão, além de $c_0^*, c_1^*, \dots, c_{\sqrt{m^*}}^*$ e $t_0^*, t_1^*, \dots, t_{\sqrt{m^*}}^*$ como as novas listas de *checkpoints* e florestas geradoras mínimas incrementais.

Assim, nossa versão melhorada funciona da seguinte maneira:

- primeiramente, uma reconstrução vai ser realizada toda vez que m for um quadrado perfeito, fazendo com que $\sqrt{m^*}$ seja igual a $\sqrt{m} + 1$;
- em cada reconstrução, faremos com que t_0^* e t_1^* sejam uma floresta geradora incremental de um grafo vazio, além disso, definimos $t_i^* = t_{i-2}$, para $i \in [2, \sqrt{m^*}]$;
- por último, deslocamos cada t_i^* para o seu respectivo c_i^* , isto é, incluímos todas as arestas adicionadas desde o instante c_{i-2} até o instante c_i^* — caso $i - 2$ seja menor que 0 incluímos todas as arestas desde o início da lista de operações.

A partir dessa versão, a reconstrução consome o mesmo tempo da reconstrução sugerida por Demaine, Iacono et al., porém agora sem a necessidade de uma estrutura persistente. Além disso, o funcionamento das outras rotinas continuam iguais ao da versão original.

5.4.3 Complexidade

Antes de adentrarmos nos detalhes de como são as implementações dos métodos da nossa estrutura, vamos analisar a complexidade da versão aqui proposta. Primeiramente, precisamos obter um resultado relativamente simples, porém muito útil para nossa análise: o número de operações realizadas entre duas reconstruções.

Corolário 5.1. *Seja m , a quantidade atual de operações realizadas, um quadrado perfeito. Então o número de operações a serem realizadas até a próxima reconstrução é de $2\sqrt{m} + 1$.*

Demonstração. Como sabemos, uma nova reconstrução acontece quando m for um quadrado perfeito. Desse modo, na próxima reconstrução teremos um novo m^* igual a $(\sqrt{m} + 1)^2$.

Logo, podemos calcular a diferença entre estes dois valores como:

$$\begin{aligned} m^* - m &= (\sqrt{m} + 1)^2 - m \\ &= (m + 2\sqrt{m} + 1) - m \\ &= 2\sqrt{m} + 1 \end{aligned}$$

Portanto, temos que $2\sqrt{m} + 1$ operações serão realizadas entre duas reconstruções. \square

Agora, precisamos descobrir qual o número máximo de posições que cada uma das t_i^* pode ser deslocada, ou seja, o número máximo de arestas que podem existir entre um instante c_{i-2} e c_i^* , para $i \in [2, \sqrt{m^*}]$.

Teorema 5.1. *Durante uma reconstrução, a transformação de t_{i-2} em t_i^* sempre consiste na adição de novas arestas, e no máximo $3\sqrt{m^*}$ arestas são adicionadas a cada t_i^* .*

Demonstração. Primeiramente, temos que cuidar de t_0^* e t_1^* , criadas durante a fase inicial da reconstrução. Como $c_0^* = 0$, nenhuma aresta é adicionada em t_0^* . Já para t_1^* , é necessário que todas as $\sqrt{m^*}$ arestas até c_1^* sejam adicionadas, porem isso ainda se encontra dentro do custo apresentado. Agora vamos cuidar do restante das t_i^* .

Vamos chamar p_i a posição de c_i na lista `edges_by_time` durante a última reconstrução, em particular, sabemos que $p_i = i\sqrt{m}$ para $i \in [0, \sqrt{m}]$. Analogamente, definimos $p_i^* = i\sqrt{m^*}$, para $i \in [0, \sqrt{m^*}]$.

Estamos interessados em descobrir o intervalo que teremos que deslocar t_i^* , buscando entender qual o número mínimo de arestas a serem adicionadas — o que é atingindo quando todas as operações são inseridas antes de c_i — e também o respectivo número máximo — o que acontece quando todas as operações são inseridas apos c_i .

No primeiro caso, para $i \in [0, \sqrt{m}]$, temos:

$$\begin{aligned} p_i &= i\sqrt{m} \\ &< i\sqrt{m} + 2\sqrt{m} + 1 \\ &= (i + 2)\sqrt{m} \\ &< (i + 2)\sqrt{m^*} \\ &= p_{i+2}^* \end{aligned}$$

Portanto, a transformação de t_{i-2} em t_i^* funciona, pois, o deslocamento de c_i para c_{i+2}^* sempre adiciona mais arestas a estrutura.

Por último, podemos medir o deslocamento no pior caso, onde nenhuma aresta sera adicionada em no i -ésimo bloco ou em algum de seus antecessores, assim, para $i \in [0, \sqrt{m}]$,

temos:

$$\begin{aligned}
 p_i^* - p_{i-2} &= i\sqrt{m^*} - (i-2)\sqrt{m} \\
 &= i(\sqrt{m} + 1) - (i-2)\sqrt{m} \\
 &= i\sqrt{m} + i - i\sqrt{m} + 2\sqrt{m} \\
 &= i + 2\sqrt{m} \\
 &\leq \sqrt{m} + 2\sqrt{m} \\
 &< 3\sqrt{m^*}
 \end{aligned}$$

□

Finalmente, devido ao deslocamento que sera realizado em cada t_i^* e utilizando os resultados acima, podemos ver que o custo total amortizado de uma reconstrução é de $O(m^* \log n)$ — onde n é o número de vértices do grafo. Além disso, podemos amortizar este custo em cada uma das $2\sqrt{m} + 1$ operações que levaram a essa reconstrução, assim o custo amortizado em cada uma delas é de $O(\sqrt{m^*} \log n)$.

5.5 Rotina Build Decomposition

5.6 Consultas Get MSF e Get MST Weight

5.7 Rotina Add Edge

Referências

- [ANDRADE JÚNIOR e DUARTE SEABRA 2020] José Wagner de ANDRADE JÚNIOR e Rodrigo DUARTE SEABRA. “Fully Retroactive Minimum Spanning Tree Problem”. Em: *The Computer Journal* 65.4 (dez. de 2020), pgs. 973–982. ISSN: 0010-4620. DOI: [10.1093/comjnl/bxaa135](https://doi.org/10.1093/comjnl/bxaa135). eprint: <https://academic.oup.com/comjnl/article-pdf/65/4/973/43377476/bxaa135.pdf>. URL: <https://doi.org/10.1093/comjnl/bxaa135> (citado nas pgs. 21, 25).
- [DEMAINE, HOLMGREN *et al.* 2012] Erik D. DEMAINE, Justin HOLMGREN, Jing JIAN, Maksim STEPANENKO e Mashhood ISHAQUE. *6.851: Advanced Data Structures Spring 2012 - Lecture 19*. 2012. URL: <https://courses.csail.mit.edu/6.851/spring12/scribe/L19.pdf> (citado na pg. 6).
- [DEMAINE, IACONO *et al.* 2007] Erik D. DEMAINE, John IACONO e Stefan LANGERMAN. “Retroactive data structures”. Em: *ACM Trans. Algorithms* 3.2 (2007), 13–es. ISSN: 1549-6325. DOI: [10.1145/1240233.1240236](https://doi.org/10.1145/1240233.1240236). URL: <https://doi.org/10.1145/1240233.1240236> (citado na pg. 17).
- [DEMAINE, LANGERMAN *et al.* 2008] Erik D. DEMAINE, Stefan LANGERMAN e Eric PRICE. “Confluently persistent tries for efficient version control”. Em: *Algorithm Theory – SWAT 2008*. Ed. por Joachim GUDMUNDSSON. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2008, pgs. 160–172. ISBN: 978-3-540-69903-3 (citado na pg. 31).
- [FREDERICKSON 1985] Greg N FREDERICKSON. “Data structures for on-line updating of minimum spanning trees, with applications”. Em: *SIAM Journal on Computing* 14.4 (1985), pgs. 781–798 (citado na pg. 21).
- [GALLER e FISHER 1964] Bernard A. GALLER e Michael J. FISHER. “An improved equivalence algorithm”. Em: *Commun. ACM* 7.5 (1964), pgs. 301–303. ISSN: 0001-0782. DOI: [10.1145/364099.364331](https://doi.org/10.1145/364099.364331). URL: <https://doi.org/10.1145/364099.364331> (citado na pg. 17).
- [HANAUER *et al.* 2021] Kathrin HANAUER, Monika HENZINGER e Christian SCHULZ. “Recent advances in fully dynamic graph algorithms”. Em: *arXiv preprint arXiv:2102.11169* (2021) (citado na pg. 24).

- [HENZINGER e WU 2019] Monika HENZINGER e Xiaowei WU. “Upper and lower bounds for fully retroactive graph problems”. Em: *CoRR* abs/1910.03332 (2019). arXiv: 1910.03332. URL: <http://arxiv.org/abs/1910.03332> (citado na pg. 25).
- [HOLM *et al.* 2001] Jacob HOLM, Kristian de LICHTENBERG e Mikkel THORUP. “Polylogarithmic deterministic fully-dynamic algorithms for connectivity, minimum spanning tree, 2-edge, and biconnectivity”. Em: *J. ACM* 48.4 (jul. de 2001), pgs. 723–760. ISSN: 0004-5411. DOI: 10.1145/502090.502095. URL: <https://doi.org/10.1145/502090.502095> (citado na pg. 24).
- [KRUSKAL 1956] Joseph B KRUSKAL. “On the shortest spanning subtree of a graph and the traveling salesman problem”. Em: *Proceedings of the American Mathematical society* 7.1 (1956), pgs. 48–50 (citado na pg. 21).
- [PRIM 1957] R. C. PRIM. “Shortest connection networks and some generalizations”. Em: *The Bell System Technical Journal* 36.6 (1957), pgs. 1389–1401. DOI: 10.1002/j.1538-7305.1957.tb01515.x (citado na pg. 21).
- [SLEATOR e TARJAN 1981] Daniel D. SLEATOR e Robert Endre TARJAN. “A data structure for dynamic trees”. Em: *Proceedings of the Thirteenth Annual ACM Symposium on Theory of Computing*. STOC ’81. Milwaukee, Wisconsin, USA: Association for Computing Machinery, 1981, pgs. 114–122. ISBN: 9781450373920. DOI: 10.1145/800076.802464. URL: <https://doi.org/10.1145/800076.802464> (citado na pg. 3).
- [SLEATOR e TARJAN 1985] Daniel D. SLEATOR e Robert Endre TARJAN. “Self-adjusting binary search trees”. Em: *J. ACM* 32.3 (1985), pgs. 652–686. ISSN: 0004-5411. DOI: 10.1145/3828.3835. URL: <https://doi.org/10.1145/3828.3835> (citado na pg. 10).
- [TARJAN e LEEUWEN 1984] Robert Endre TARJAN e Jan van LEEUWEN. “Worst-case analysis of set union algorithms”. Em: *J. ACM* 31.2 (1984), pgs. 245–281. ISSN: 0004-5411. DOI: 10.1145/62.2160. URL: <https://doi.org/10.1145/62.2160> (citado na pg. 17).