1. Modelo de la catapulta

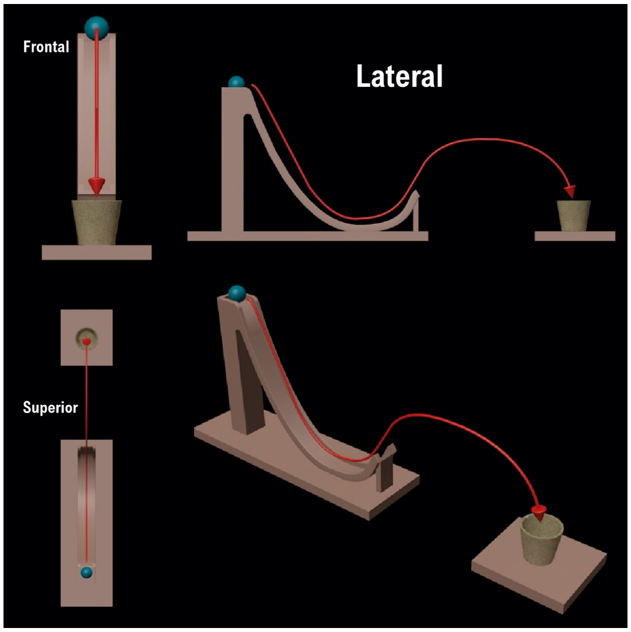

Figura 1: Modelo de la catapulta

2. Variables

Las variables iniciales son:

$$m = 0{,}1\text{kg}$$

$$g = 9{,}81\text{m/s}^2$$

$$h_A = 0{,}5\text{m}$$

$$h_B = 0{,}05\text{m}$$

$$\theta_B = 25°$$

3. Cálculos (sin fricción)

En este caso, se asume que no hay fricción entre el proyectil y la rampa ni entre el proyectil y el aire, por lo que la energía mecánica se conserva a lo largo de todo el trayecto, desde que se suelta el proyectil en el punto A hasta que cae al suelo.

3.1. Velocidad en el punto B

Para calcular la velocidad con la que el proyectil sale disparado de la rampa, o la velocidad en el punto B, se utiliza la conservación de la energía mecánica.

$$E = K + U$$

Donde:

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$
$$U = mgh$$

Como no hay fricción, la energía mecánica se conserva, y la energía en los puntos A y B es la misma:

$$E_A = E_B$$
$$K_A + U_A = K_B + U_B$$
$$\frac{1}{2}mv_A^2 + mgh_A = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgh_B$$

Dado que en el punto A, el proyectil parte del reposo, $v_A = 0$:

$$mgh_A = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgh_B$$

Despejando v_B:

$$v_B = \sqrt{v_A^2 + 2g(h_A - h_B)}$$

Sustituyendo los valores, tenemos:

$$v_B = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot (0{,}5 - 0{,}05)}$$

$$v_B = 2{,}97\,\mathrm{m/s}$$

3.2. Funciones de posición

Las funciones de posición en función del tiempo de un movimiento parabólico son:

$$x(t) = x_B + v_{xB}t$$

$$y(t) = h_B + v_{yB}t - \frac{1}{2}gt^2$$

Para descomponer v_B en sus componentes v_{xB} y v_{yB}, se tiene:

$$v_{xB} = v_B\cos(\theta_B)$$

$$v_{yB} = v_B\sin(\theta_B)$$

Sustituyendo los valores, tenemos:

$$v_{xB} = 2{,}97\cos(25)$$

$$v_{yB} = 2{,}97\sin(25)$$

Resolviendo, se tiene:

$$v_{xB} = 2{,}69\mathrm{m/s}$$

$$v_{yB} = 1{,}26\mathrm{m/s}$$

Sustiyendo las velocidades en las funciones de posición, se obtiene:

$$x(t) = 2{,}69t$$

$$y(t) = 0{,}05 + 1{,}26t - \frac{1}{2}9{,}81t^2$$

Para graficar la trayectoria, parametrizamos las funciones de posición en función del tiempo:

$$\begin{cases} x(t) = 2{,}69t \\ y(t) = 0{,}05 + 1{,}26t - \frac{1}{2}9{,}81t^2 \end{cases}$$

Graficando la ecuación paramétrica, se obtiene:

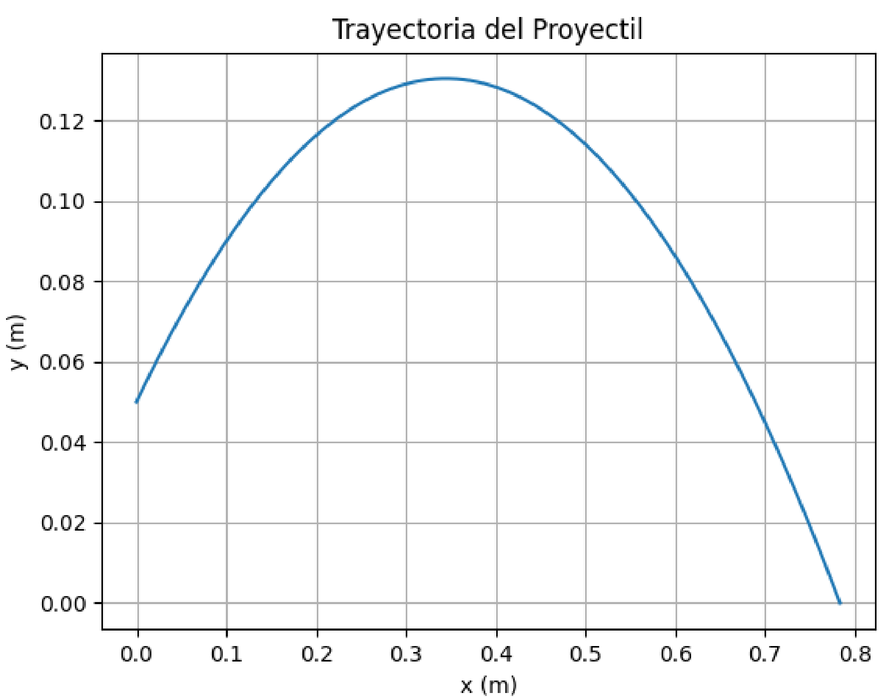

Figura 2: Trayectoria del proyectil

3.3. Funciones de energía

Las funciones de energía en función del tiempo del proyectil son:

$$K(t) = \frac{1}{2}m(v_x(t)^2 + v_y(t)^2)$$

$$U(t) = mgy(t)$$

$$E(t) = K(t) + U(t)$$

Graficando las energías:

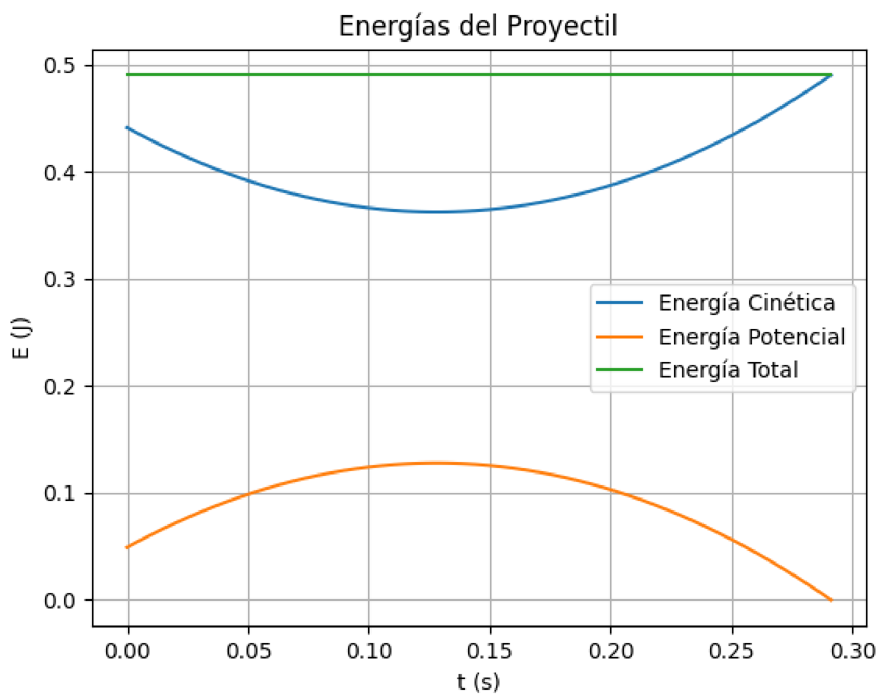

Figura 3: Energías del proyectil

Como se observa en el gráfico, la energía mecánica se conserva a lo largo de todo el trayecto.

3.4. Funciones de velocidad

Para calcular la velocidad en función del tiempo, derivamos las funciones de posición con respecto al tiempo:

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = v_{xB}$$
$$v_y(t) = \frac{dy}{dt} = v_{yB} - gt$$

Sustituyendo los valores:

$$v_x(t) = 2{,}69$$

$$v_y(t) = 1{,}26 - 9{,}81t$$

Graficando las velocidades:

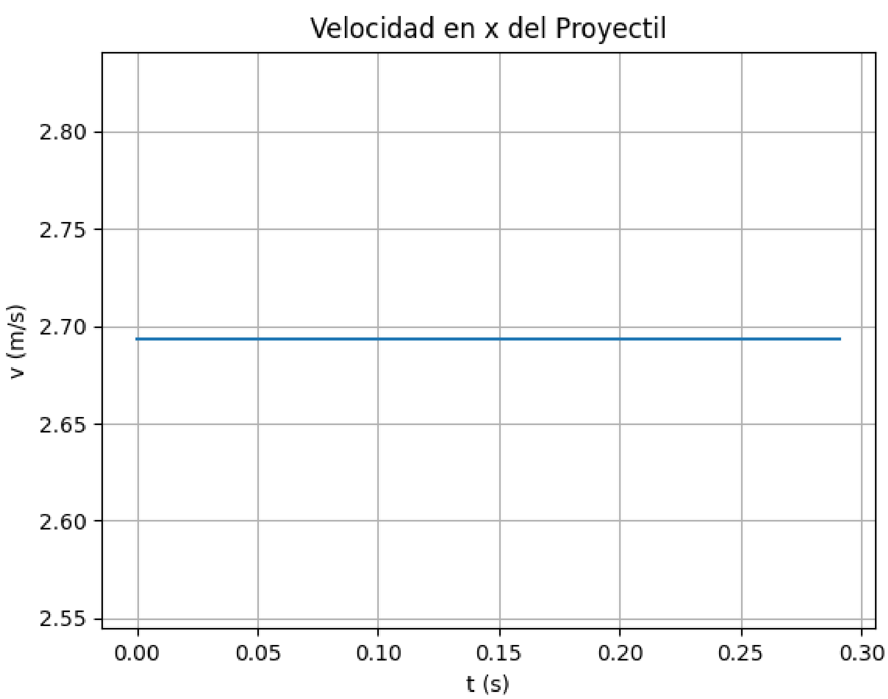

Figura 4: Velocidad en x del proyectil

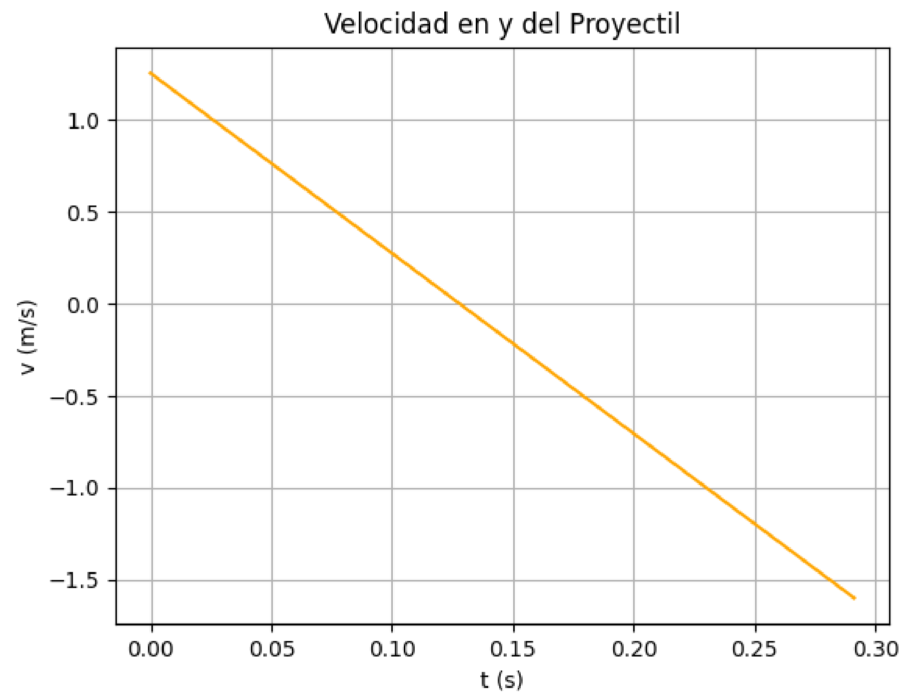

Figura 5: Velocidad en y del proyectil

3.5. Tiempo de vuelo

El tiempo de vuelo del proyectil es:

$$t = \frac{v_{yB} + \sqrt{v_{yB}^2 + 2gh_B}}{g}$$

Sustituyendo los valores:

$$t = \frac{1{,}26 + \sqrt{1{,}26^2 + 2 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}05}}{9{,}81}$$

$$t = 0{,}29\,\mathrm{s}$$

3.6. Alcance

El alcance del proyectil es:

$$R = v_{xB}\frac{v_{yB} + \sqrt{v_{yB}^2 + 2gh_B}}{g}$$

Sustituyendo los valores:

$$R = 2{,}69 \frac{1{,}26 + \sqrt{1{,}26^2 + 2 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}05}}{9{,}81}$$

$$R = 0{,}78\,\mathrm{m}$$

3.7. Altura máxima

La altura máxima alcanzada por el proyectil es:

$$h_{\max} = h_B + \frac{v_B^2 \sin^2(\theta_B)}{2g}$$

Sustituyendo los valores:

$$h_{\max} = 0{,}05 + \frac{2{,}97^2 \sin^2(25)}{2 \cdot 9{,}81}$$

$$h_{\max} = 0{,}13\,\mathrm{m}$$