



Facultad de Ingeniería, Universidad de la República

Montevideo, Uruguay

INFORME LABORATORIO 2

Métodos de Monte Carlo

Autor

Francisco Casarotti - 4.595.179-7

Supervisor

Ing. Hector Cancela

23/03/2021

ÍNDICE

Ejercicio 3.1	3
Parte a	3
Problema a Resolver	3
Resolución	3
Parte b	6
Problema a Resolver	6
Resolución	6
Ejercicio 4.1	7
Parte 1	7
Desigualdad de Chebyshev (nC)	7
Teorema Central del Límite (nN)	9
Hoeffding (1963)	11
Parte 2	12
Cálculo de valores	12

Ejercicio 3.1

Se desea estimar el volumen de una región R de $[0, 1]^6$ definida por todos los puntos de la hiper-esfera de centro $(0.45, 0.5, 0.6, 0.6, 0.5, 0.45)$ y radio 0.35 , que además cumplan las restricciones siguientes:

- $3x_1 + 7x_4 \leq 5$
- $x_3 + x_4 \leq 1$
- $x_1 - x_2 - x_5 + x_6 \geq 0$.

Parte a

Problema a Resolver

Se debe implementar un programa que reciba como parámetro la cantidad de replicaciones “ n ” a realizar, y emplee Monte Carlo para calcular (e imprimir) la *estimación del volumen de R , y la desviación estándar de este estimador*.

Se debe incluir código para calcular el tiempo de cálculo empleado por el programa, además de utilizar el programa con $n=10^4$ y luego con $n=10^6$ para estimar el volumen de R y discutir si los dos valores obtenidos parecen consistentes.

Resolución

Dado un volumen de 6-dimension contenido en el hiper-cubo $[0,1]^6$ (en este problema se cumple, sino se puede redimensionar el volumen), y un procedimiento que genere una secuencia de puntos $X_{6,n} = \{x^{(j)} = (x_1^{(j)}, \dots, x_6^{(j)}) \in [0,1]^6; j=1, \dots, n\}$ es posible aproximar $\lambda(R)$. Para ello se debe disponer de un generador de n puntos de $X_{6,n}$, por ejemplo: $X_{6,n} = \{x = (x_1, \dots, x_6) : x_i = (z_i + 1/2)/k; z_i = 0, 1, \dots, k-1; i = 1, \dots, 6; n = k^m\}$. Cada uno de estos puntos $X_{6,n}$ es el centro de un hiper-cubo de 6 dimensiones y volumen $1/k^6 = 1/n$, denotando como S el volumen de cada uno de estos 6-cubos con centro en R , entonces S/n es una aproximación de $\lambda(R)$.

Para la estimación del volumen de R y su correspondiente desviación estándar mediante Monte Carlo, se cambiará el empleo de una secuencia determinística $X_{6,n}$ por una muestra aleatoria $(X^{(1)}, \dots, X^{(n)})$ donde cada $X^{(j)} = (X_1^{(j)}, \dots, X_6^{(j)})$ que se sortea de acuerdo a la distribución uniforme $\tau^6 = [0,1]^6$.

El código para estimar el área es el siguiente:

```
def area(n):
    punto = [0,0,0,0,0,0]
    centro = [0.45,0.5,0.6,0.6,0.5,0.45]
    radio = 0.35
    esp = 0
    des_med = 0
    for i in range(0,n):
        # sorteo 1 y 4
        punto[0] = np.random.uniform(0,1)
        punto[3] = np.random.uniform(0,1)
        if (3*punto[0] + 7*punto[3] <= 5):
            # sorteo 3
            punto[2] = np.random.uniform(0,1)
            if (hipercubo[3] + hipercubo[2] <= 1):
                # sorteo el resto
                punto[1] = np.random.uniform(0,1)
                punto[4] = np.random.uniform(0,1)
                punto[5] = np.random.uniform(0,1)
                if (pertenece(punto,centro,radio)):
                    esp +=1
    esp = esp / n
    des_med = math.sqrt(esp*(1-esp)/(n-1))
    return [esp,des_med]
```

Aplicando el código se obtuvieron los siguientes datos:

Con 10^4 replicaciones

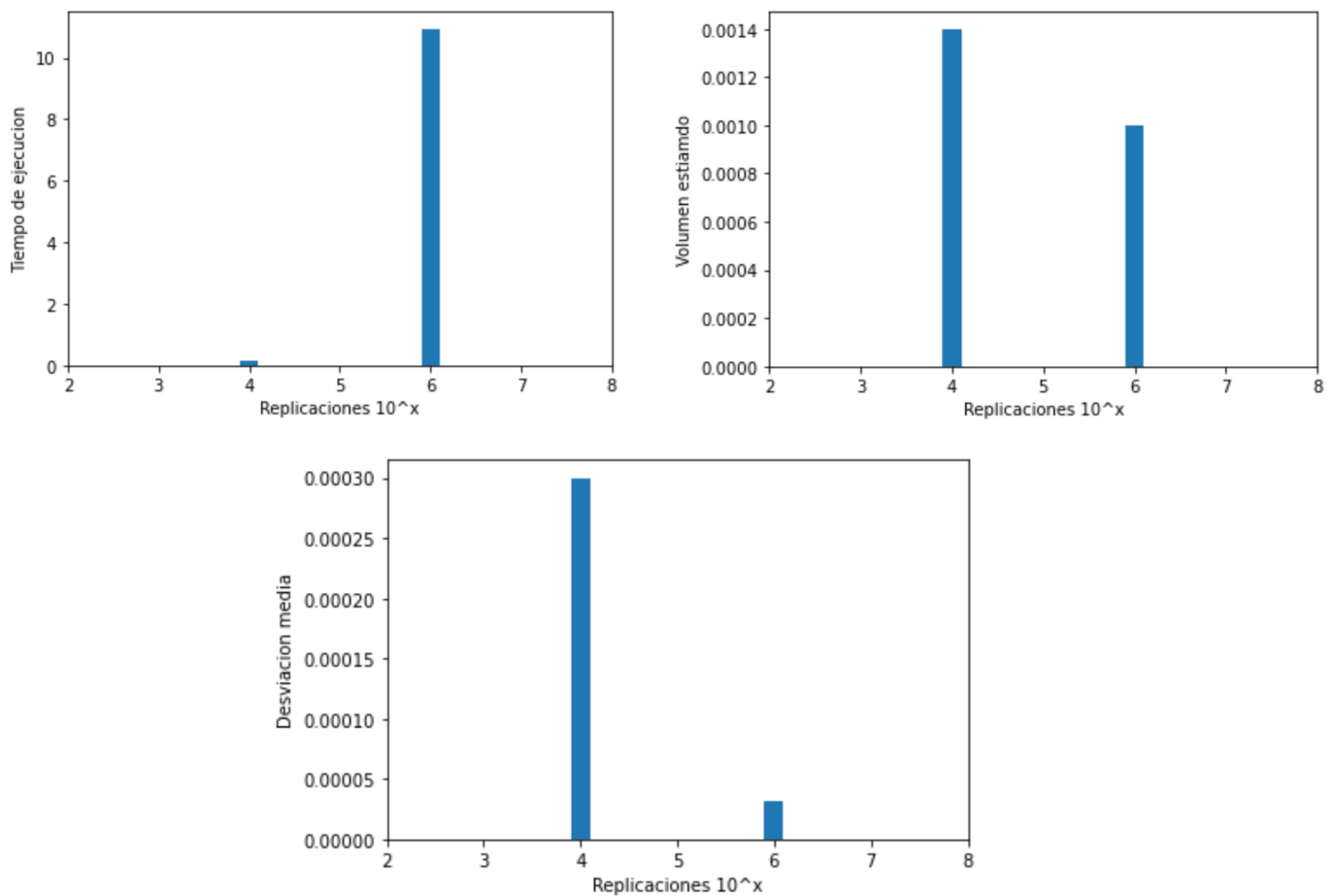
El estimador del area es 0.000900 con una desviación media de 0.000300

La ejecución tardó 0.17 segundos

Con 10^6 replicaciones

El estimador del área es 0.000984 con una desviación media de 0.000031

La ejecución tardó 10.94 segundos

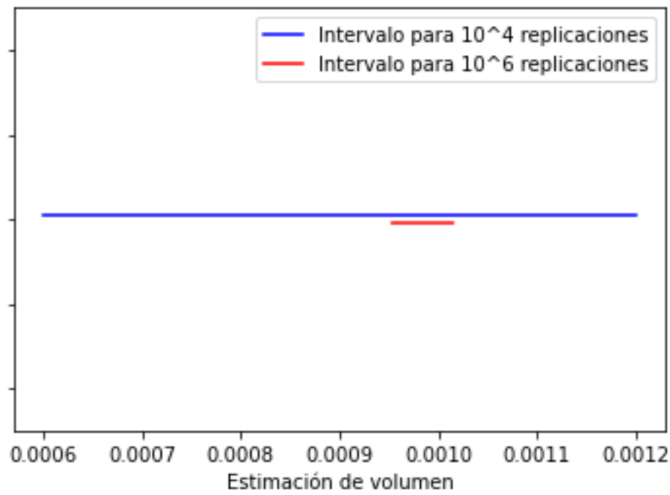


En principio los datos parecen consistentes, ya que ambas regiones se solapan. Para la primera estimación osea en 10^4 replicaciones se obtuvo qué el área se encuentra entre

$$0.0009 \pm 0.0003$$

y para 10^6 replicaciones

$$0.000984 \pm 0.000031$$



Parte b

Problema a Resolver

Ahora se pretende validar la forma de resolución para encontrar el volumen de la Parte a. Para esto se eliminan las restricciones de desigualdades y se compara el volumen calculado por Monte Carlo (con 10^6 replicaciones) con el valor exacto del volumen de una hiperesfera de dimensión 6, la cual tiene como fórmula:

$$\frac{\pi^3 r^6}{6}$$

Resolución

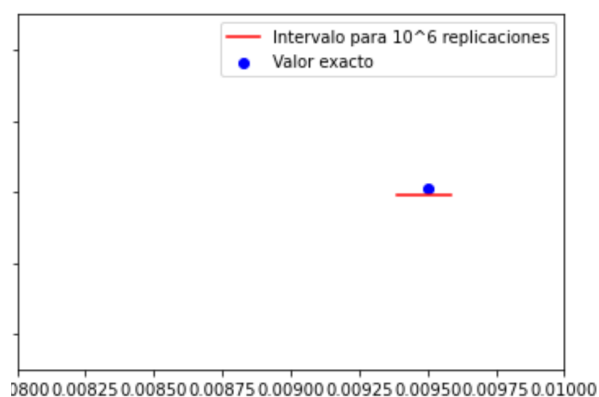
Se modifica el algoritmo para la parte anterior, para ello se le quitan las restricciones de desigualdad y se estima el volumen.

En el caso del valor exacto, el volumen es:

Volumen = 0.0094996

En el caso de Monte Carlo:

Volumen_Monte_Carlo = 0.009486 \pm 0.000096933



A partir de los datos obtenidos se puede deducir que la región obtenida a partir del algoritmo efectivamente retorna un rango de valores en los cuales está contenido el volumen a estimar.

Ejercicio 4.1

En el método de Monte Carlo, a medida que el muestreo aumenta, osea que n aumenta, el error que se comete en la estimación disminuye. Para evitar errores es conveniente realizar el cálculo de un intervalo de confianza en lugar del cálculo de una estimación puntual.

$[I_1(S, n, \delta), I_2(S, n, \delta)]$ es un intervalo de nivel $(1-\delta)$ para la medida λ
siii

I_1 e I_2 son dos variables aleatorias tal que $\text{Prob}(I_1 \leq \lambda \leq I_2) \geq 1 - \delta$

Es posible derivar utilizando distintos métodos un tamaño de muestra que permita mantener el error dentro de los límites deseados. Dado un mismo nivel de error al que se aspira, dependiendo del método que se use, el tamaño de muestra se obtendrá. Aquí se tienen 3 ejemplos de métodos de cómo obtener un tamaño de muestra a partir de un nivel de confianza y un error determinado.

- Basada en la desigualdad de Chebyshev
- Basada en el Teorema del Límite Central
- Basada en un teorema demostrado por Hoeffding en 1963

Parte 1

Comparar y discutir la dependencia de los criterios de peor caso n_C , n_N , n_H frente a los parámetros ϵ y δ .

Desigualdad de Chebyshev (n_C)

Sea Z una v.a. con distribución F_Z definida en $(-\infty, \infty)$, $E(Z) = 0$ y $\sigma^2 = \text{Var}(Z) = E(Z^2) < \infty$. Entonces, para todo $\beta > 0$,

$$\text{Prob}\left(\frac{|Z|}{\sigma} \geq \beta\right) \leq \frac{1}{\beta^2}$$

Para este caso

$$Z = \frac{S}{n} - \lambda; \sigma^2 = \frac{\lambda(1-\lambda)}{n\epsilon^2}$$

y sustituyendo

$$\text{Prob}\left(\left|\frac{S}{n} - \lambda\right| < \epsilon\right) \geq 1 - \frac{\lambda(1-\lambda)}{n\epsilon^2}$$

Dada la cota de error ϵ se quiere garantizar y el nivel de confianza $1 - \delta$

$$\text{Prob}\left(\left|\frac{S}{n} - \lambda\right| < \epsilon\right) \geq 1 - \delta$$

Por lo que se llega a que

$$\delta \geq \frac{\lambda(1-\lambda)}{n\epsilon^2}$$

Despejando n

$$n_c(\epsilon, \lambda, \delta) = \text{ceiling}\left(\frac{\lambda(1-\lambda)}{\delta\epsilon^2}\right)$$

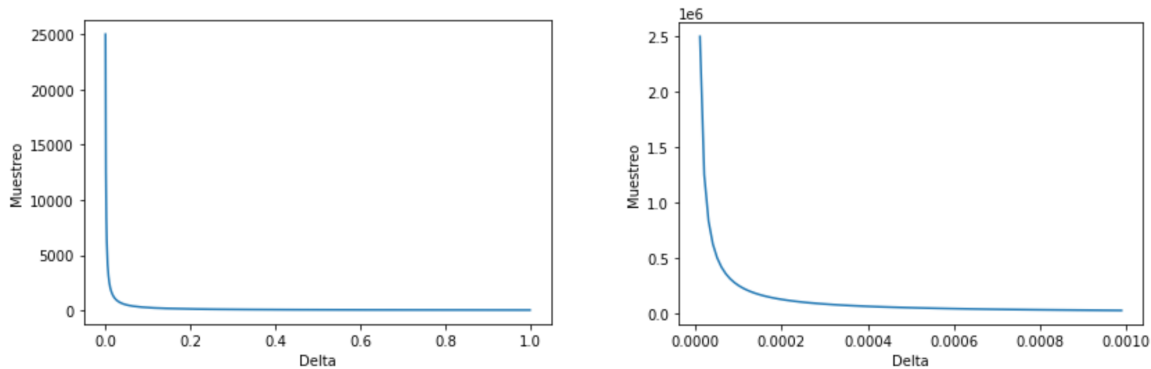
λ es desconocido, sin embargo al encontrarse en $[0,1]$ se puede acotar su valor

$$\lambda(1 - \lambda) \leq \frac{1}{4}$$

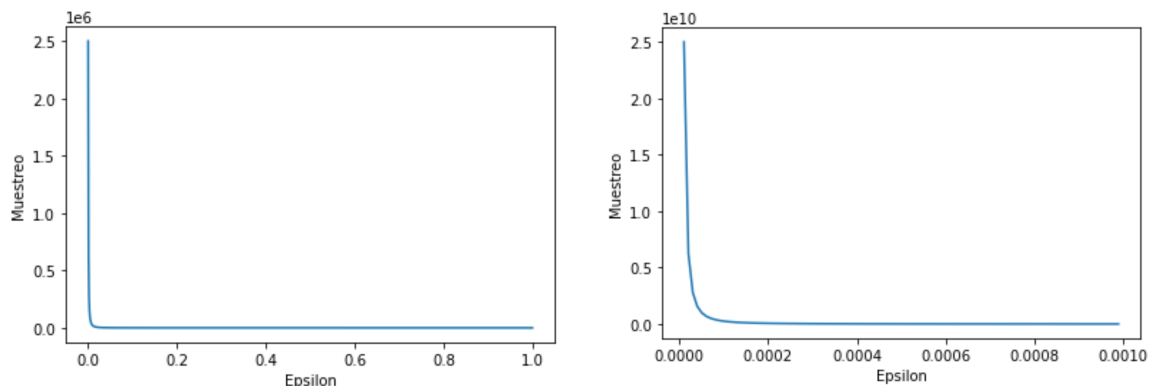
Por lo que el peor caso de muestra será

$$n_c(\epsilon, \delta) = \text{ceiling}\left(\frac{1}{4\delta\epsilon^2}\right)$$

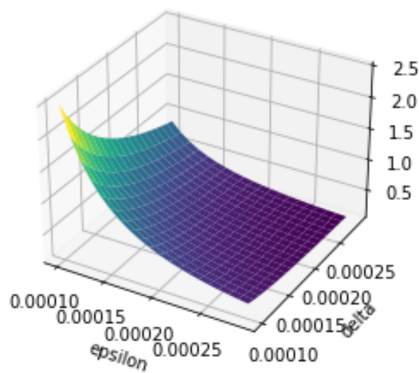
El número de muestras con δ y con ϵ pueden ser analizados de forma independiente y a su vez puede ser analizado conjuntamente.



Estas dos gráficas pertenecen ambas a la misma función, el muestreo en función de δ dejando un error fijo en 0.1, una de ellas posee una escala mas cercana y otro está más lejano. En ambas se puede distinguir que cuando δ toma valores más lejanos al cero, osea cuando se buscan errores no tan “chicos”, el número de muestreo baja considerablemente. En cambio, para valores de δ cercanos a ceros el número de muestreo crece bastante rápido.



Este caso es similar al anterior, también se tienen dos gráficas escaladas de forma distinta pero se puede ver qué es más pronunciado el crecimiento del muestreo, esto debido a que el error crece más rápido cuando el error tienda cero con respecto a delta.



En esta última gráfica se puede ver como el delta y el epsilon afectan al muestreo, se puede ver que el crecimiento es pronunciado cuando ambos tienden a cero al mismo tiempo.

Teorema Central del Límite (n_N)

La distribución de probabilidad

$$\frac{S - n\lambda}{\sqrt{n\lambda(1-\lambda)}}$$

La cual converge a la distribución normal con $n \rightarrow \infty$

$$\Phi(z)$$

Esta distribución tiene media 0 y varianza 1, se escribe $N(0, 1)$

Dado el supuesto de un

$$n_N(\epsilon, \lambda, \delta) = \text{ceiling}(\lambda(1 - \lambda) \left(\frac{\Phi^{-1}(1 - \frac{\delta}{2})}{\epsilon} \right)^2)$$

Siendo Φ^{-1} la función inversa de la distribución normal $N(0,1)$

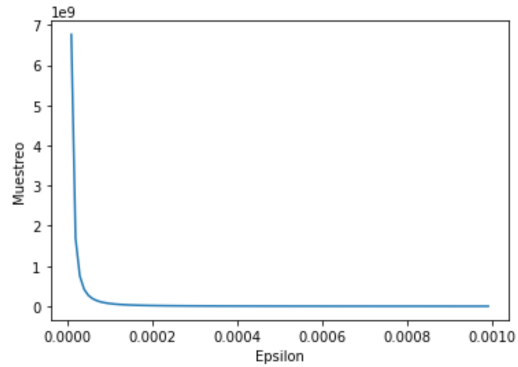
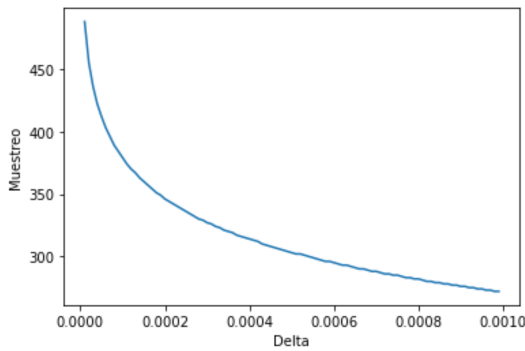
Cuando $\epsilon \rightarrow 0$, si se toma como tamaño de muestra el dado por $n_N(\epsilon, \lambda, \delta)$, se llega a la siguiente propiedad

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \text{Prob}\left(\left| \frac{S}{n_N(\epsilon, \lambda, \delta)} - \lambda \right| \leq \epsilon\right) = 1 - \delta$$

Por lo que el tamaño muestral en el peor caso corresponde a la siguiente fórmula

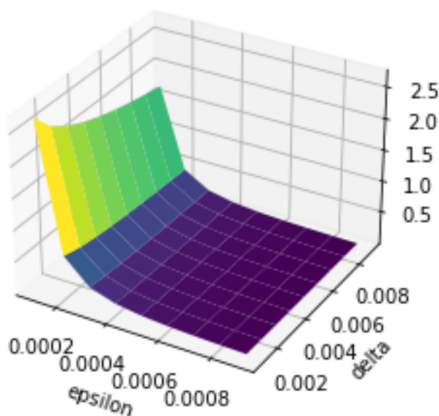
$$n_N(\epsilon, \delta) = \text{ceiling}\left(\left(\frac{\Phi^{-1}(1 - \frac{\delta}{2})}{2\epsilon} \right)^2\right)$$

Se realiza el mismo análisis similar que el caso anterior.



La Gráfica del lado izquierdo representa el muestreo en función de δ dejando el error fijo, mientras que la función del lado derecho representa el muestreo en función del error dejando el δ fijo. En ambas funciones se puede apreciar que el muestreo crece conforme el valor de δ y ϵ decrecen, pero se puede apreciar una marcada diferencia en las velocidad de crecimiento. En el caso de ϵ , cuando esté decrece a niveles cada vez más cercanos a cero, crece mucho el muestreo y mientras que con δ , cuando este decrece, no crece tan rápido el muestreo, esto se puede apreciar en las gráficas.

Numero de Muestreos vs (epsilon,delta)



Cuando ambos valores ϵ y δ se aproximan a cero entonces el muestreo tiende a crecer, pero ahí se puede notar un pronunciamiento de ϵ con respecto a δ , en el sentido de que ϵ “domina” sobre la variable δ . Conforme δ decrece, el muestreo decrece, pero no tan rápido como en el caso de ϵ .

Hoeffding (1963)

Sea Z_1, \dots, Z_n un conjunto de v.a.independientes, tales que $\mu_i = E(Z_i) \in (0, 1)$ y que $\text{Prob}(0 \leq Z_i \leq 1) = 1$, para $i = 1, \dots, n$. Sea $\mu = (\mu_1 + \dots + \mu_n)/n$.

Entonces, para $0 < \epsilon \leq 1 - \mu$ y $\bar{Z}_n = (Z_1 + \dots + Z_n)/n$,

$$\text{Prob}(\bar{Z}_n - \mu \geq \epsilon) \leq e^{-nw(\epsilon, \mu)} \leq e^{-ng(\mu)\epsilon^2} \leq e^{-2n\epsilon^2}$$

donde

$$w(\epsilon, \mu) = (\mu + \epsilon)\ln\left(\frac{\mu}{\mu + \epsilon}\right) + (1 - \mu - \epsilon)\ln\left(\frac{1 - \mu}{1 - \mu - \epsilon}\right)$$

Para $g(\mu)$ se tiene que

si $0 < \mu < 1/2$

entonces

$$g(\mu) = \frac{1}{1 - 2\mu} \ln\left(\frac{1 - \mu}{\mu}\right)$$

si $\frac{1}{2} \leq \mu < 1$

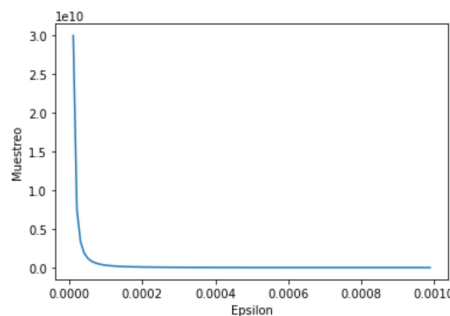
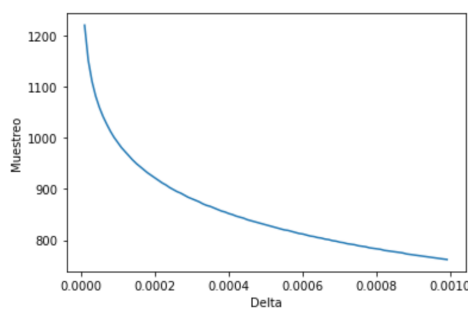
entonces

$$g(\mu) = \frac{1}{2\mu(1 - \mu)}$$

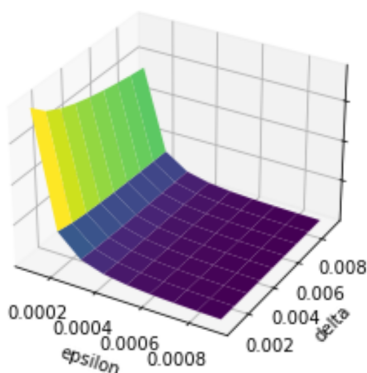
De lo que se deriva el siguiente criterio de muestra para el peor caso.

$$n_N(\epsilon, \lambda, \delta) = \text{ceiling}\left(\ln\left(\frac{2}{\delta}\right)\frac{1}{2\epsilon^2}\right) = \text{ceiling}\left(2\ln\left(\frac{2}{\delta}\right)\frac{1}{4\epsilon^2}\right)$$

Se realiza un análisis similar al de los caso anterior.



Numero de Muestras vs (epsilon,delta)



Al igual que en el caso anterior, la Gráfica del lado izquierdo representa el muestreo en función de δ dejando el error fijo, mientras que la función del lado derecho representa el muestreo en función del error dejando el δ fijo. Los resultados obtenidos son análogos al del Teorema Central.

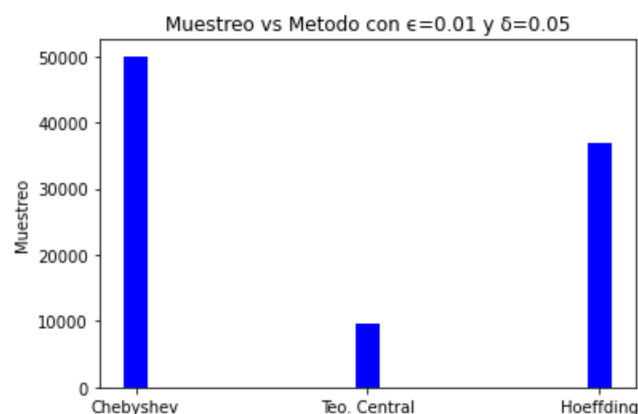
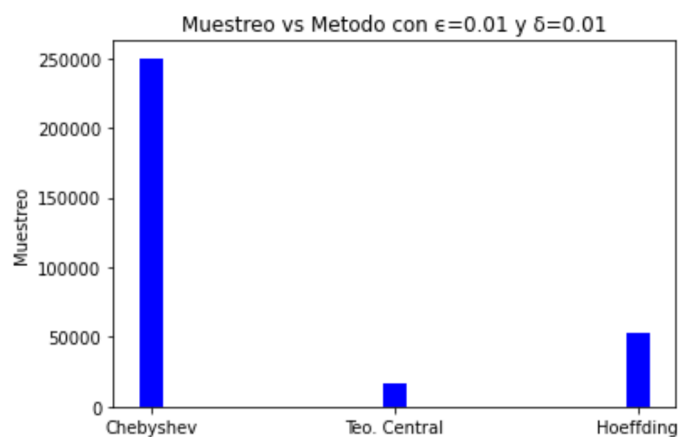
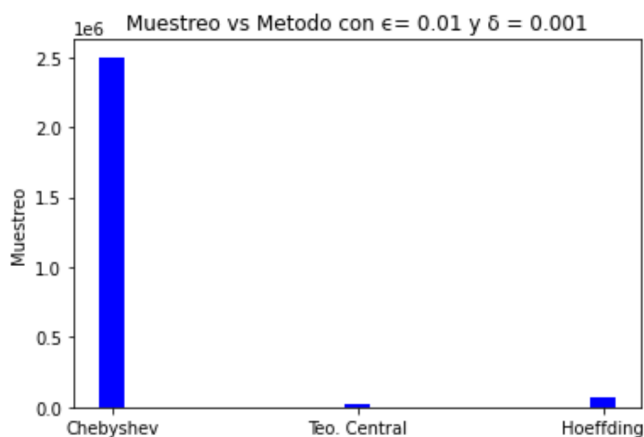
Parte 2

Calcular n_C , n_N , n_H para $\epsilon = 0.01$, $\delta = 0.001, 0.01, 0.05$

Cálculo de valores

Con $\epsilon = 0.01$ se estudia los distintos valores que toman las muestras para los distintos δ .

Metodo/ δ	0.001	0.01	0.05
(Chebyshev) n_C	2.500.000	250.000	50.000
(Teo. Central) n_N	27.069	16.588	9.604
(Hoeffding) n_H	76.010	52.984	36.889



Analizando las gráficas, queda en evidencia que los dos métodos que menos elementos de muestreo generan son el basado en el Teorema Central del Límite y el basado en el Teorema de Hoeffding, mientras que el método basado en el desigualdad de Chebyshev, cuando el δ se aproxima a cero, tiende a generar un muestreo demasiado grande comparado con los otros dos métodos.