Facultad de Ingeniería, Universidad de la República

Montevideo, Uruguay

INFORME LABORATORIO 3

INDIVIDUAL

Métodos de Monte Carlo

Autor

Francisco Casarotti - 4.595.179-7

Supervisor

Ing. Hector Cancela

23/03/2021

ÍNDICE

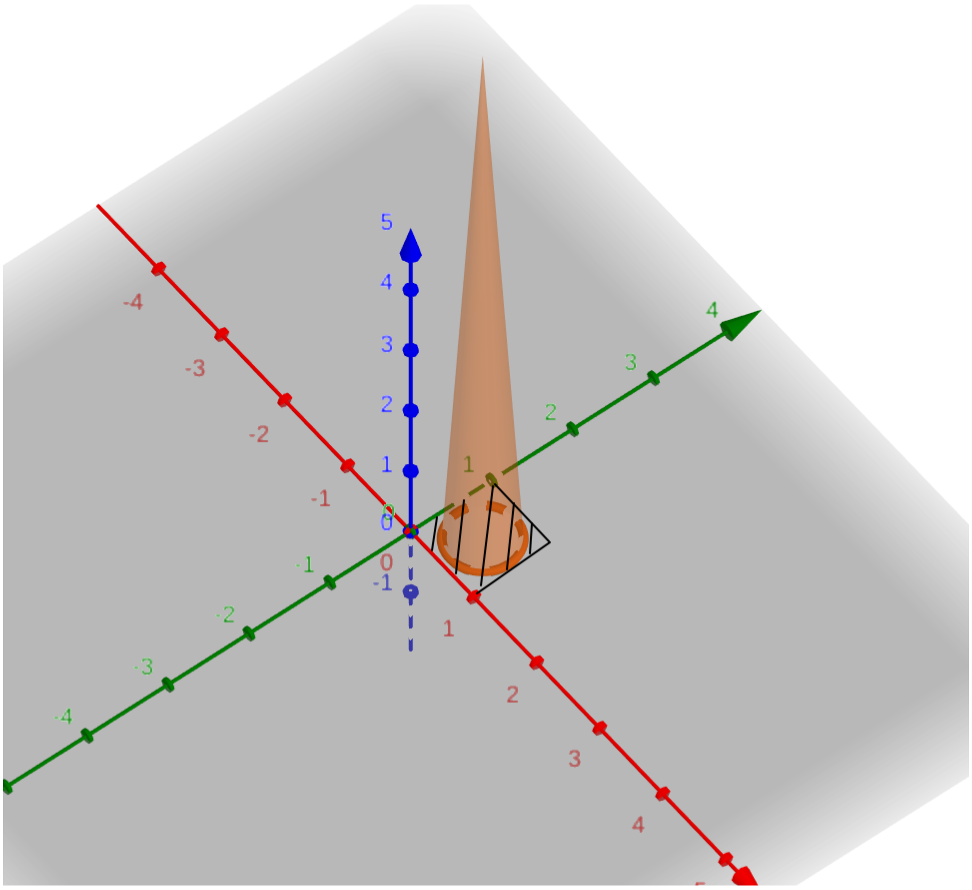
Ejercicio 6.1

Problema

Se idealiza una montaña como un cono inscrito en una región cuadrada de lado 1 km. La base de la montaña es circular, con centro en (0.5, 0.5) y radio r = 0.4km, y la altura es H = 8km. La altura de cada punto (x, y) de la montaña está dada por la función

$$f(x, y) = H - \frac{H}{r}\sqrt{(x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2}$$

en la zona definida por el círculo, y 0 fuera del círculo. El volumen total de la montaña (en km cúbicos) puede verse como la integral de la función altura en la región.



Especificaciones del computador

Para la realización de los cálculos en todas las partes del problema se utilizó una computadora ACER Aspire 5 A515-51-563W, con un procesador Intel® Core™ i5-7200U CPU @ 2.50GHz × 4, un disco duro de 240GB SSD, y una memoria de 8GB. Además, se utilizó el sistema operativo Ubuntu 20.04.

Parte a

Escribir un programa para calcular el volúmen por Monte Carlo. Realizar 10^6 replicaciones y estimar el valor de ζ y el error cometido (con nivel de confianza 0.95), utilizando como criterio la aproximación normal.

Resolución

Se siguió el esquema básico de estimación por Monte Carlo para la integración del volumen del cono. Los datos obtenidos con 10^6 replicaciones fueron los siguientes:

$$\overline{\zeta_n} = 1.339555667520569$$

$$\widehat{\sigma^2_n} = 3.5614050139206364$$

$$V[\overline{\zeta_n}] = 3.5614050139206365 \; x \; 10^{-6}$$

Los cuales corresponden a el estimador puntual del volumen, el estimador puntual de la varianza de la función que se utilizó en Monte Carlo (f(x,y)) y el estimador puntual de la varianza del estimador $\overline{\zeta_n}$ respectivamente.

En cuanto al error cometido, dado el cálculo de un intervalo de confianza empleando la aproximación normal y un nivel de confianza de 1 - δ, este error no puede ser mayor a:

$$\Phi^{-1}(1 - \frac{\delta}{2})\sqrt{\frac{\widehat{\sigma^2_n}}{n}}$$

Tomando un nivel de confianza 0.95 se obtiene el siguiente error cometido:

$$\varepsilon = 0.0036987823273058004$$

Parte b - c

En base al valor estimado en la parte a, calcular el número de replicaciones necesario para obtener un error absoluto menor a 10^{-3} (con nivel de confianza 0.95).
Realizar esa cantidad de replicaciones y estimar ζ y su intervalo de confianza.

Resolución

Para el cálculo de replicación necesaria se utiliza la aproximación normal. Para ello se toma el δ y el σ^2_n calculado en la parte anterior y se utiliza la siguiente fórmula:

$$n_N(\varepsilon, \delta) = ceiling(\Phi^{-1}(1 - \frac{\delta}{2})^2 \frac{\sigma^2_n}{n})$$

n = 13.680.991 replicaciones

Las estimaciones con estas replicaciones y con una semilla distinta son:

$$\overline{\zeta_n} = 1.340746708661506$$

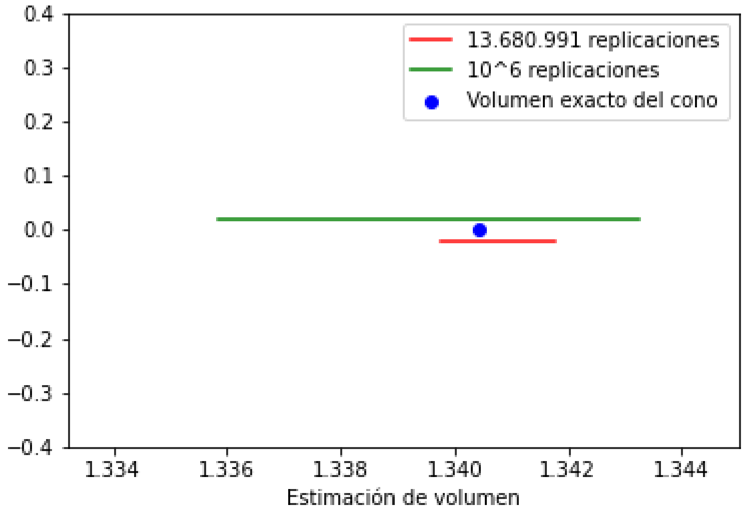
$$\widehat{\sigma^2_n} = 3.5672320401397197$$

$$V[\overline{\zeta_n}] = 2.607436873644402 \, x \, 10^{-7}$$

Tomando un nivel de confianza 0.95 se obtiene el siguiente error cometido:

$$\varepsilon = 0.0010008177345383325$$

que es un valor muy cercano a 10^{-3}.



El intervalo de confianza al que se llegó es:

[1.3397458909269, 1.341747526396]

Comparando ambos intervalos, se puede ver una clara reducción entre uno y otro, se acotó el error significativamente. A su vez, en ambos intervalos se encuentra contenido el valor exacto del volumen del cono.