Calcolo Scientifico e Metodi Numerici

Corso di Laurea in Informatica, A.A. 2014-2015

Domande di ripasso

Idee di base e richiami

1. Qual è lo scopo della Matematica Numerica?

- La risoluzione numerica (al calcolatore) e l'analisi della soluzione trovata.

2. Attraverso quali fasi si passa nel risolvere un problema reale?

- 1 definizione del problema reale (Quanto impiego a raggiungere X?)
- 2 costruzione del modello (Distanza = tot, velocità media = tot2)
- 3 formulazione del problema matematico (formula $s = v \cdot t$)
- 4 risoluzione (al calcolatore) del problema matematico (solve $t = s \; / \; v$)
- 5 analisi della soluzione trovata (errori, approssimazioni, conversioni)
- 6 verifica che la soluzione trovata risolva il problema reale

3. Dove si colloca la Matematica Numerica nel processo di risoluzione di un problema reale?

- (4) risoluzione del problema al calcolatore
- (5) analisi della soluzione trovata

4. Cosa è uno spazio lineare, detto anche spazio vettoriale?

- Uno spazio lineare è un insieme dotato delle seguenti proprietà:
  - chiusura rispetto all'addizione: $v1 + v2 = v3$, con $v1, v2, v3 \in \boldsymbol{V}$, con $\boldsymbol{V}$ spazio lineare;
  - chiusura rispetto al prodotto per uno scalare: $a \in \boldsymbol{K}$, campo di scalari, $a \cdot v1 = v2$, con $v1, v2 \in \boldsymbol{V}$
  - commutatività dell'addizione
  - associatività dell'addizione
  - associatività del prodotto per uno scalare: $a \cdot (b \cdot v) = (a \cdot b) \cdot v$
  - proprietà distributiva del prodotto per uno scalare rispetto alla somma di vettori: $a \cdot (v1 + v2) = a \cdot v1 + a \cdot v2$
  - proprietà distributiva del prodotto per uno scalare rispetto alla somma di scalari: $(a + b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v$

– esistenza dello zero come elemento neutro dell'addizione
– esistenza dell'1 come elemento neutro del prodotto per uno scalare
– esistenza dell'opposto: $\forall v \in \boldsymbol{V}\ \exists$-$v$

5. Dai tre esempi di spazio lineare.

- Vettori di dimensione n
- Matrici di dimensione m×n
- Funzioni continue in un intervallo [a, b] che ammettono derivata n-esima
- Polinomi di grado massimo n

6. Dimostra che l'insieme C[a,b] di tutte le funzioni continue nell'intervallo [a,b] è uno spazio lineare sull'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$.

- *N.B. sono dimostrate solo alcune proprietà a scopo esplicativo*
- Sia **F** l'insieme delle funzioni continue in [a,b] e siano $f()$ e $g() \in \boldsymbol{F}$, $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ quindi $(f + g)() \in \boldsymbol{F}$
- Sia **K** un campo di scalari e $a \in \boldsymbol{K}$, $a \cdot f(x) = af(x)$ quindi $af() \in \boldsymbol{F}$

7. Dimostra che l'insieme P^n di tutti i polinomi di grado minore o uguale a n è uno spazio lineare sull'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$.

- *N.B. sono dimostrate solo alcune proprietà a scopo esplicativo*
-

8. Quando n elementi x 1 , x 2 , . . . ,x n di uno spazio lineare su $\mathbb{R}$ si dicono linearmente indipendenti.

- N elementi si dicono linearmente indipendenti se la loro combinazione lineare è *0* **solo** se tutti i coefficienti sono *0*.

9. Dai un esempio di tre elementi nello spazio lineare $\mathbb{R}^2$ linearmente dipendenti.

- $\mathbb{R}^2$ ha dimensione 2, quindi presi tre elementi questi saranno sempre dipendenti: *(0, 1)*, *(1, 0)*, *(1, 1)*

10. Dai un esempio di tre elementi nello spazio lineare $\mathbb{R}^3$ linearmente dipendenti.

- $v_1=(1, 0, 0)$, $v_2=(0, 1, 1)$, $v_3=(6, 4, 4)$ perchè $6v_1 + 4v_2 = v_3$.

11. Dai un esempio di tre elementi linearmente indipendenti nello spazio lineare C[a,b] di tutte le funzioni continue in [a,b].

- *f()=sin(x), g()=cos(x),* $h()=x^2$

12. Le tre funzioni $y_1(x)=cos(x)$, $y_2(x)=-sen(x)$ **e** $y_3(x)=2cos(x)+4sen(x)$ **sono linearmente indipendenti? Giustifica la risposta.**

- No, poichè $2y_1 + (-4y_2) = y_3$.

13. Le tre funzioni $y_1(x)=e^x$ **,** $y_2(x)=3x^2$ **e** $y_3(x)=x-3ln(x)$ **sono linearmente indipendenti? Giustifica la risposta.**

- Si, poiché nessuna di esse può essere espressa come combinazione lineare delle altre.

14. Che cosa è una base di uno spazio lineare?

- Sia **S** uno spazio lineare (vettoriale) di dimensione *n*, si dice base di **S** l'insieme di n elementi di **S** che siano generatori e linearmente indipendenti.

15. Cosa significa dire che uno spazio lineare ha dimensione finita.

- $\exists$ un *n* tale che presi *n+1* elementi, questi saranno necessariamente linearmente dipendenti.

16. Dai tre esempi di spazi lineari di dimensione 3.

- Vettori su $\mathbb{R}^3$
- Polinomi di grado al più 3
- ???

17. L'insieme di tutti i polinomi di grado < 4 è uno spazio lineare di dimensione finita? Se sì, fornisci una sua base.

- Si, $a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$

18. L'insieme di tutti le matrici 2X2 è uno spazio lineare di dimensione finita? Se sì, fornisci una sua base.

- $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

- $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

19. I vettori *(1, 2)* e *(2, 0)* costituiscono una base per lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$, ovvero con una combinazione lineare di *(1, 2)* e *(2, 0)* puoi formare una qualsiasi coppia di numeri reali?

- Proviamo ad ottenere la base canonica *(0, 1)*, *(1, 0)*.
- $\frac{1}{2}v_1$ - $\frac{1}{4}v_2$ = *(0, 1)*.
- *0*v_1 - $\frac{1}{2}v_2$ = *(1, 0)*
- Quindi è una base per $\mathbb{R}^2$.

20. Cosa è l'autovalore di una matrice.

- Dato uno spazio lineare V ed un'applicazione lineare (endomorfismo) $F\colon V \to V$ esistono particolari vettori tali che $F(v) = \lambda v$. Chiamiamo λ autovalore e v autovettore associato a tale autovalore. Si definisce autospazio relativo all'autovalore l'insieme dei vettori generati generati da tale autovalore.