Avignon Université - UFR STS
Portails Math-Info/Math-Physique L1 S1

Année 2021/2022
Analyse 1

Corrigé du CC3

Exercice 1. a) Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_2^4 (t-2)^2 + \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt.$

$$I = \left[\frac{(t-2)^3}{3} + 2\sqrt{t}\right]_2^4 = \frac{2^3}{3} + 2\sqrt{4} - 2\sqrt{2} = \frac{8}{3} + 4 - 2\sqrt{2} = \frac{20}{3} - 2\sqrt{2}\,.$$

b) Calculer l'intégrale $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+e^{-t}}\, dt.$

Indication : pour l'intégrale J, on peut utiliser le changement de variable $x = e^t$.

On effectue le changement $x = e^t$. La borne 0 (resp. 1) pour t correspond à la borne 1 (resp. e) pour x. De plus $dx = e^t dt = x dt$: dt sera remplacé par $\frac{1}{x}dx$ dans l'intégrale. Enfin $e^{-t} = 1/x$. On obtient

$$J = \int_1^e \frac{1}{1+\frac{1}{x}}\,\frac{1}{x}\, dx = \int_1^e \frac{1}{x+1}\, dx = [\ln(x+1)]_{x=1}^{x=e} = \ln(e+1) - \ln(2)\,.$$

Exercice 2. En utilisant une intégration par parties, calculer l'intégrale

$$K = \int_1^2 (3t^2 - 2t)\ln(t)\, dt\,.$$

On pose $\begin{cases} u(t) = \ln(t) \\ v'(t) = 3t^2 - 2t \end{cases}$, $\begin{cases} u'(t) = 1/t \\ v(t) = t^3 - t^2 \end{cases}$ (u et v sont de classe C^1, et on applique la formule d'intégration par parties).

$$\begin{aligned} K &= \int_1^2 v'(t)u(t)\, dt = [v(t)u(t)]_1^2 - \int_1^2 v(t)u'(t)\, dt \qquad \text{avec } v(t)u'(t) = \frac{t^3-t^2}{t} = t^2 - t \\ &= \Big[(t^3 - t^2)\ln(t)\Big]_1^2 - \int_1^2 (t^2 - t)\, dt = 4\ln(2) - \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2}\right]_1^2 \\ &= 4\ln(2) - \left(\frac{8}{3} - 2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) = 4\ln(2) - \frac{5}{6}\,. \end{aligned}$$

Exercice 3. a) Résoudre sur l'intervalle $]0, +\infty[$ l'équation différentielle

$$y' - \frac{2}{t}y = 0\,. \tag{1}$$

L'équation différentielle (1) s'écrit $y' = \frac{2}{t}y$. La fonction $A : t \mapsto 2\ln(t)$ étant une primitive sur l'intervalle $]0, +\infty[$ de la fonction $t \mapsto \frac{2}{t}$, les solutions de (1) sont les fonctions

$$y : t \mapsto \lambda e^{2\ln(t)} = \lambda t^2\,, \quad \text{avec } \lambda \text{ constante réelle}\,.$$

b) Déterminer l'unique solution de (1) telle que $y(2) = 1$.

Soit $y : t \mapsto \lambda t^2$. On a

$$y(2) = 1 \iff \lambda 2^2 = 1 \iff \lambda = \frac{1}{4}\,.$$

L'unique solution de (1) telle que $y(2) = 1$ est donc la fonction $t \mapsto \dfrac{t^2}{4}$.

c) Résoudre sur l'intervalle $]0, +\infty[$ l'équation différentielle

$$y' - \frac{2}{t}y = t^2 e^{3t}\,. \tag{2}$$

Indication : on pourra utiliser la méthode de variation de la constante pour trouver une solution particulière de (2).

(2) est une équation différentielle linéaire du premier ordre, l'équation homogène associée est l'équation (1).

Cherchons une solution particulière de (2), sous la forme $y_0(t) = k(t)t^2$ (méthode de variation de la constante). On a alors

$$y_0'(t) - \frac{2}{t}y_0(t) = k'(t)t^2 + 2k(t)t - 2k(t)t = k'(t)t^2.$$

Donc y_0 est une solution de (2) si $\forall t \in]0, +\infty[\,,\ k'(t) = e^{3t}$. La fonction k définie par $k(t) = e^{3t}/3$ convient. La fonction $y_0 : t \mapsto \dfrac{e^{3t}}{3}t^2$ est donc une solution particulière de (2) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

On peut conclure que l'ensemble des solutions de (2) est

$$\mathcal{S} = \left\{ y : t \mapsto \frac{e^{3t}}{3}t^2 + \lambda t^2 \ ;\ \lambda \text{ constante réelle} \right\}$$

Exercice 4. a) Résoudre l'équation différentielle

$$y'' + 2y' + y = 0\,. \tag{3}$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du second ordre, homogène à coefficients constants. Le polynôme caractéristique est

$$S(X) = X^2 + 2X + 1 = (X + 1)^2\,.$$

S a une racine réelle double, -1. L'ensemble des solutions de (3) est

$$\mathcal{S}_H = \{t \mapsto (\lambda + \mu t)e^{-t}\,;\ \lambda, \mu \text{ constantes réelles}\}$$

b) On considère l'équation différentielle

$$y'' + 2y' + y = \sin(2t)\,. \tag{4}$$

Déterminer une solution particulière de (4) de la forme $y_0(t) = a\cos(2t) + b\sin(2t)$ où a et b sont deux constantes réelles.

Posons $y_0(t) = a\cos(2t) + b\sin(2t)$. On a $y_0'(t) = -2a\sin(2t) + 2b\cos(2t)$, $y_0''(t) = -4a\cos(2t) - 4b\sin(2t)$.

$$\begin{aligned}
\forall t \in \mathbb{R}\,,\ y_0''(t) + 2y_0'(t) + y_0(t) &= (-4a\cos(2t) - 4b\sin(2t)) + (-4a\sin(2t) + 4b\cos(2t)) \\
&+ (a\cos(2t) + b\sin(2t)) \\
&= (-3a + 4b)\cos(2t) + (-4a - 3b)\sin(2t)\,.
\end{aligned}$$

$$y_0 \text{ est une solution de } (4) \iff \forall t \in \mathbb{R}\,,\ (-3a+4b)\cos(2t) + (-4a-3b)\sin(2t) = \sin(2t)$$

$$\iff \begin{cases} -3a+4b=0 \\ -4a-3b=1 \end{cases} \iff \begin{cases} b = 3a/4 \\ (-4-\dfrac{9}{4})a = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a=-4/25 \\ b=-3/25 \end{cases}$$

La fonction $y_0 : t \mapsto -\dfrac{4}{25}\cos(2t) - \dfrac{3}{25}\sin(2t)$ est une solution particulière de (4).

c) Déduire des questions précédentes l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (4).

L'ensemble des solutions de (4) est

$$\mathcal{S} = \left\{ y : t \mapsto -\frac{4}{25}\cos(2t) - \frac{3}{25}\sin(2t) + (\lambda + \mu t)e^{-t}\,;\ \lambda, \mu \text{ constantes réelles} \right\}.$$