Correction TD3

L1 S2, Analyse 2, 2020-2021

Exercice 1.

Enoncé.

Déterminer la nature et la limite éventuelle des suites de termes généraux :

1) $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$;

2) $u_n = 2 + \cos\left(\dfrac{(-1)^n}{n}\right) + \dfrac{1}{n^2}\tan\left(\sin(n^2 - n + 1)\right)$;

Solution.

1) Pour $n \geq 1$,

$$0 < u_n = \frac{n!}{n^n} = \underbrace{\frac{n}{n}\frac{(n-1)}{n}\cdots\frac{(2)}{n}}_{\leq 1}\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n}.$$

D'après le théorème des gendarmes $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

2) Ecrivons $u_n = 2 + v_n + w_n$ ou $v_n = \cos\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$ et $w_n = \dfrac{1}{n^2}\tan\left(\sin\left(n^2 - n + 1\right)\right)$.

Etudions la convergence des suites (v_n) et (w_n).

<u>Convergence de (v_n)</u> : il est clair que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} = 0$ (car $(-1)^n$ est bornée et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$).

Vu que

$$\lim_{h\to 0} \cos(h) = \cos(0)$$

(car cos(.) est continue en 0) alors

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \cos(0) = 1.$$

Convergence de (w_n) : $\sin(.)$ étant bornée par -1 et 1 on a

$$-1 \leq \sin\left(n^2 - n + 1\right) \leq 1, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

D'autre part, $\tan(.)$ est croissante sur $]-\pi/2, \pi/2[$ donc

$$\tan(-1) \leq \tan(y) \leq \tan(1), \ \forall y \in [-1, 1]$$

et donc

$$\tan(-1) \leq \tan\left(\sin\left(n^2 - n + 1\right)\right) \leq \tan(1), \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 0$ comme produit d'une suite bornée et d'une suite convergeant vers 0.
En conclusion, la suite (u_n) converge car (v_n) et (w_n) convergent et

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 2 + \lim_{n \to +\infty} v_n + \lim_{n \to +\infty} w_n = 2 + 1 + 0 = 3.$$

Exercice 2.

Enoncé.

Déterminer la nature et la limite éventuelle des suites de termes généraux :

1) $u_n = -2n^2 + n^2 \cos(3n)$;

2) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k}$.

Solution.

1) Etant donné que $\cos(3n) \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors

$$u_n = -2n^2 + n^2 \cos 3n \leq -n^2.$$

La suite (u_n) est majorée par une suite qui tend vers $-\infty$.

2) Si $1 \leq k \leq n$ alors $n^2 \leq n^2 + 1 \leq n^2 + k \leq n^2 + n$ et donc

$$\frac{n}{n^2+n} \leq \frac{n}{n^2+k} \leq \frac{n}{n^2}.$$

En sommant ces encadrements pour k variant de 1 à n, on en déduit

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+n} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2}.$$

Comme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+n} = \frac{n^2}{n^2+n} = \frac{1}{1+1/n}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2} = \frac{n^2}{n^2} = 1$ alors

$$\frac{1}{1+1/n} \leq u_n \leq 1.$$

D'après le théorème des gendarmes $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 1.$

Exercice 3.

Enoncé.

Soit la suite de premier terme u_0 définie par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = u_n - u_n^2.$$

1) Montrer qu'elle est décroissante.

2) Tracer la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto x - x^2$. En déduire la nature (convergence ou divergence) de cette suite selon le choix du premier terme.

3) Quelles sont les limites possibles ?

Solution.

1) Etant donné que $u_{n+1} - u_n = -u_n^2 \leq 0$, la suite est décroissante. Cette dernière admet donc une limite l qui est finie ou égale à $-\infty$ ($l \in \mathbb{R}$ ssi (u_n) est minorée).

Une étude des variations de f est utile pour la suite.

$f(x) = x - x^2 \Rightarrow f'(x) = 1 - 2x$ ce qui conduit le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	$-\infty$

2) En testant quelques valeurs de u_0 (cf. fig. 1, 2 et 3), on constate que trois cas sont à distinguer :

Cas 1. $\underline{u_0 < 0}$: la suite (u_n) étant décroissante alors $u_n \leq u_0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et donc

$$l = \lim_{n \to +\infty} u_n \leq u_0 < 0.$$

On conclura quant à la nature de la suite plus loin.

Cas 2. $\underline{u_0 > 1}$: dans ce cas

$$u_1 = f(u_0) < f(1) = 0$$

(f est strictement décroissante sur $]1/2, +\infty[$). On se retrouve dans la même situation que dans le cas précédent à savoir

$$l = \lim_{n \to +\infty} u_n < 0.$$

Cas 3. $\underline{u_0 \in [0,1]}$: du tableau de variation de f on déduit que

$$f([0,1]) = f([0,1/2] \cup [1/2,1]) = f([0,1/2]) \cup f([1/2,1]) = \\ [f(0), f(1/2)] \cup [f(1), f(1/2)] = [0,1/4] \subset [0,1].$$

On vérifie alors par une simple récurrence que si $u_0 \in [0,1]$ alors $u_n \in [0,1]$, $\forall n \in \mathbb{N}$:

- $u_0 \in [0,1]$ (vrai)

- supposons que $u_n \in [0,1]$:

$$u_{n+1} = f(u_n) \in f([0,1]) \subset [0,1].$$

D'où $u_{n+1} \in [0,1]$.
La suite (u_n) est décroissante (d'après 1.) et majorée (par 1) elle est donc convergente.

3) Supposons $l := \lim_{n\to+\infty} u_n$ existe et est finie. La suite (u_n) vérifie l'égalité

$$u_{n+1} = u_n - u_n^2.$$

En passant à la limite, on obtient

$$l = l - l^2$$

c'est-à-dire $l = 0$. Donc si $\lim_{n\to+\infty} u_n \in \mathbb{R}$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.
Ce n'est pas le cas lorsque $u_0 < 0$ (cas 1) et $u_0 > 1$ (cas 2) car on a vu que dans les deux cas $\lim_{n\to+\infty} u_n < 0$. Donc

si $\underline{u_0 < 0}$ ou $\underline{u_0 > 1}$ alors (u_n) diverge et $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

si $\underline{u_0 \in [0,1]}$, la suite (u_n) converge et $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Exercice 4.

Enoncé.

Etudier la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}^+$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 + \frac{2}{3} u_n$.

Solution.

Posons $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + \frac{2}{3}x$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie donc la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Observons que

$$f'(x) = 2x + \frac{2}{3} > 0, \qquad \forall x \geq 0,$$

donc f est une fonction strictement croissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

Posons donc

$$g(x) = f(x) - x = x^2 - \frac{x}{3} = x(x - \frac{1}{3}).$$

On sait que $g(x) > 0$ si et seulement si $x > \frac{1}{3}$ ou bien $x < 0$, mais puisqu'on se place sur l'intervalle $[0, +\infty[$ on a donc que

$$\begin{array}{lcl} g(x) > 0 & \Leftrightarrow & x > \frac{1}{3}, \\ g(x) < 0 & \Leftrightarrow & 0 < x < \frac{1}{3}, \\ g(x) = 0 & \Leftrightarrow & x = 0, \quad \text{ou bien} \quad x = \frac{1}{3}. \end{array}$$

On distingue donc quatre cas pour étudier la nature de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

- Si $u_0 > \frac{1}{3}$ on a que $u_1 - u_0 = g(u_0) > 0$. Posons la propriété :

$$\mathcal{P}(n) : \qquad \frac{1}{3} < u_n < u_{n+1}.$$

<u>Initialisation</u> : si $u_0 > \frac{1}{3}$, alors clairement $\frac{1}{3} < u_0 < u_1$, donc $\mathcal{P}(0)$ est satisfaite.

Hérédité : supposons $\mathcal{P}(n)$ satisfaite pour un certain $n \in \mathbb{N}$, donc $\frac{1}{3} < u_n < u_{n+1}$. Puisque f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ et $f(\frac{1}{3}) = \frac{1}{3}$ on aura que

$$f(\frac{1}{3}) = \frac{1}{3} < u_{n+1} = f(u_n) < u_{n+2} = f(u_{n+1}),$$

donc $\mathcal{P}(n+1)$ est également vérifiée.

Grâce au Théorème de la recurrence on peut donc affirmer que $\mathcal{P}(n)$ est vérfiée pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante et minorée par $\frac{1}{3}$.

Le Théorème de la limite monotone nous permet d'affirmer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a toujours une limite. Il reste à determiner si cette limite est finie ou si c'est $+\infty$. Notons $l = \lim_{n\to+\infty} u_n$.

Si $l < +\infty$ alors puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante, forcement $l > \frac{1}{3}$, et puisque $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, en passant à la limite pour $n \to +\infty$ on obtient

$$l = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(l),$$

mais $f(l) = l$ si et seulement si $g(l) = 0$, ce qui est vrai si et seulement si $l = 0$ ou bien $l = \frac{1}{3}$, et on sait que $l > \frac{1}{3}$, donc on arrive à une contradiction. La limite l ne peut donc pas être finie, donc si $u_0 > \frac{1}{3}$ on a que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty,$$

donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente.

- Si $0 < u_0 < \frac{1}{3}$ on a que $u_1 - u_0 = g(u_0) < 0$.

Posons la propriété :

$$\mathcal{P}(n) : \qquad 0 < u_{n+1} < u_n < \frac{1}{3}.$$

<u>Initialisation</u> : puisque $0 < u_0 < \frac{1}{3}$, on a vu que $u_1 - u_0 < 0$, donc $u_1 < u_0 < \frac{1}{3}$, mais par ailleurs $u_1 = f(u_0)$ et la fonction f est strictement croissante, donc

$$0 = f(0) < f(u_0) = u_1,$$

d'où on peut en déduire que $0 < u_1 < u_0 < \frac{1}{3}$, alors clairement $\mathcal{P}(0)$ est satisfaite.
<u>Hérédité</u> : supposons $\mathcal{P}(n)$ satisfaite pour un certain $n \in \mathbb{N}$, donc $0 < u_{n+1} < u_n < \frac{1}{3}$. Puisque f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ et $f(0) = 0$ ainsi que $f(\frac{1}{3}) = \frac{1}{3}$ on aura que

$$0 = f(0) < f(u_{n+1}) = u_{n+2} < f(u_n) = u_{n+1} < f(\frac{1}{3}) = \frac{1}{3},$$

donc $\mathcal{P}(n+1)$ est également vérifiée.

Grâce au Théorème de la recurrence on peut affirmer que $\mathcal{P}(n)$ est vérfiée pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement decroissante, minorée par 0 et majorée par $\frac{1}{3}$.

Le Théorème de la limite monotone nous permet d'affirmer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a toujours une limite, notée l. Puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et $u_n \in]0, 1/3[$ pour tout n, on sait que $0 \leq l < \frac{1}{3}$. En passant à la limite pour $n \to +\infty$ on obtient

$$l = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(l),$$

mais on sait que $f(l) = l$ si et seulement si $l = 0$ ou bien $l = \frac{1}{3}$, et puisque $0 \leq l < \frac{1}{3}$ on en déduit que $l = 0$, donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et sa limite est égale à 0.

- Si $u_0 = 0$ alors on a vu que $u_1 - u_0 = g(0) = 0$, donc on montre immediatement que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à 0, par conséquent elle converge est sa limite est 0.
- Si $u_0 = \frac{1}{3}$ alors on a vu que $u_1 - u_0 = g(\frac{1}{3}) = 0$, donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à $\frac{1}{3}$, donc elle converge et sa limite est $\frac{1}{3}$.

Exercice 5.

Enoncé.

Soit la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = \sqrt{6 - u_n}$.

1) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, (u_n) est bien définie.

2) La suite (u_n) est-elle monotone ?

3) Montrer que si (u_n) converge, alors sa limite est égale à 2.

4) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - 2| \leq \dfrac{1}{2}|u_n - 2|$. Conclusion ?

Solution.

1) Vérifions par récurrence que $u_n \in [0,6]$ $\forall n \in \mathbb{N}$:

- $u_0 = 0 \in [0,6]$.

- Supposons que $u_n \in [0,6]$. Vérifions que $u_{n+1} \in [0,6]$:

$u_{n+1} = \sqrt{6-u_n}$ est bien défini car $u_n \leq 6$.

De plus,

$$0 \leq u_{n+1} = \sqrt{6-u_n} \leq \sqrt{6} \leq 6 \quad \text{car } u_n \geq 0.$$

Donc $u_n \leq 6$, $\forall n \in \mathbb{N}$ ce qui implique que la suite (u_n) est bien définie.

2) Calculons les premiers termes de la suite (u_n) :

$$u_0 = 0,\ u_1 = \sqrt{6},\ u_2 = \sqrt{6-\sqrt{6}},\ u_3 = \sqrt{6-\sqrt{6-\sqrt{6}}}.$$

On constate que

$$u_0 < u_1 > u_2 < u_3.$$

La suite (u_n) n'est donc pas monotone.

3) Supposons que (u_n) converge et notons $l = \lim_{n \to +\infty} u_n$. En passant à la limite dans l'égalité

$$u_{n+1} = \sqrt{6 - u_n},$$

on obtient l'égalité

$$l = \sqrt{6 - l}.$$

En élevant au carré, cette équation s'écrit :

$$l^2 + l - 6 = 0, \quad l \in [0, 6].$$

L'équation $l^2 + l - 6 = 0$ admet deux solutions : -3 et 2 dont une seule appartient à $[0, 6]$.

Donc $l = 2$.

4) Ecrivons

$$u_{n+1}-2=\frac{(\sqrt{6-u_n}-2)(\sqrt{6-u_n}+2)}{\sqrt{6-u_n}+2}=\frac{2-u_n}{\sqrt{6-u_n}+2}.$$

D'où

$$|u_{n+1}-2|=\frac{|u_n-2|}{|\sqrt{6-u_n}+2|}\leq\frac{1}{2}|u_n-2|.$$

Par conséquent,

$$0\leq|u_n-2|\leq\frac{1}{2}|u_{n-1}-2|\leq\frac{1}{2^2}|u_{n-2}-2|\leq\ldots\leq\frac{1}{2^n}|u_0-2|$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}=0$ alors d'après le théorème des gendarmes

$$\lim_{n\to+\infty}|u_n-2|=0$$

ce qui équivaut (cf. exercice 1) à $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=2.$

Exercice 6.

Enoncé.

Soit la suite définie par $u_0 \in [0, 2]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n}$.

1) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et $u_n \in [0, 2]$.

2) Représenter graphiquement les premières termes de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Que pouvez-vous dire quant au sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

3) Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $|u_n - 1| \leq a^{n-1}|a_1 - 1|$ où $a = \frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}+1}$. Conclusion ?

Solution.

1) Posons la propriété

$$\mathcal{P}(n) \quad : \qquad u_n \quad \text{est bien défini et } u_n \in [0,2].$$

<u>Initialisation</u> : si $n = 0$ alors par définition u_0 est bien défini et appartient à l'intervalle $[0,2]$, donc $\mathcal{P}(0)$ est satisfaite.

<u>Hérédité</u> : supposons $\mathcal{P}(n)$ satisfaite pour un certain naturel n, donc u_n est bien défini et appartient à l'intervalle $[0,2]$. Alors $0 \leq 2 - u_n \leq 2$, donc $u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n}$ est bien défini. La fonction $x \mapsto \sqrt{2-x}$ étant décroissante, on a

$$0 \leq u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n} \leq \sqrt{2},$$

donc $u_{n+1} \in [0,2]$. La propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est donc satisfaite.

Grâce au Théorème de la récurrence on peut affirmer que $\mathcal{P}(n)$ est satisfaite pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'où la conclusion.

2) On sait que $u_0 \in [0,2]$, et $u_{n+1} = \sqrt{2-u_n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Afin d'étudier l'ordre des u_n pour les premiers termes, posons $g(x) = \sqrt{2-x} - x$, pour $x \in [0,2]$, ainsi $u_{n+1} - u_n = g(u_n)$. Puisque

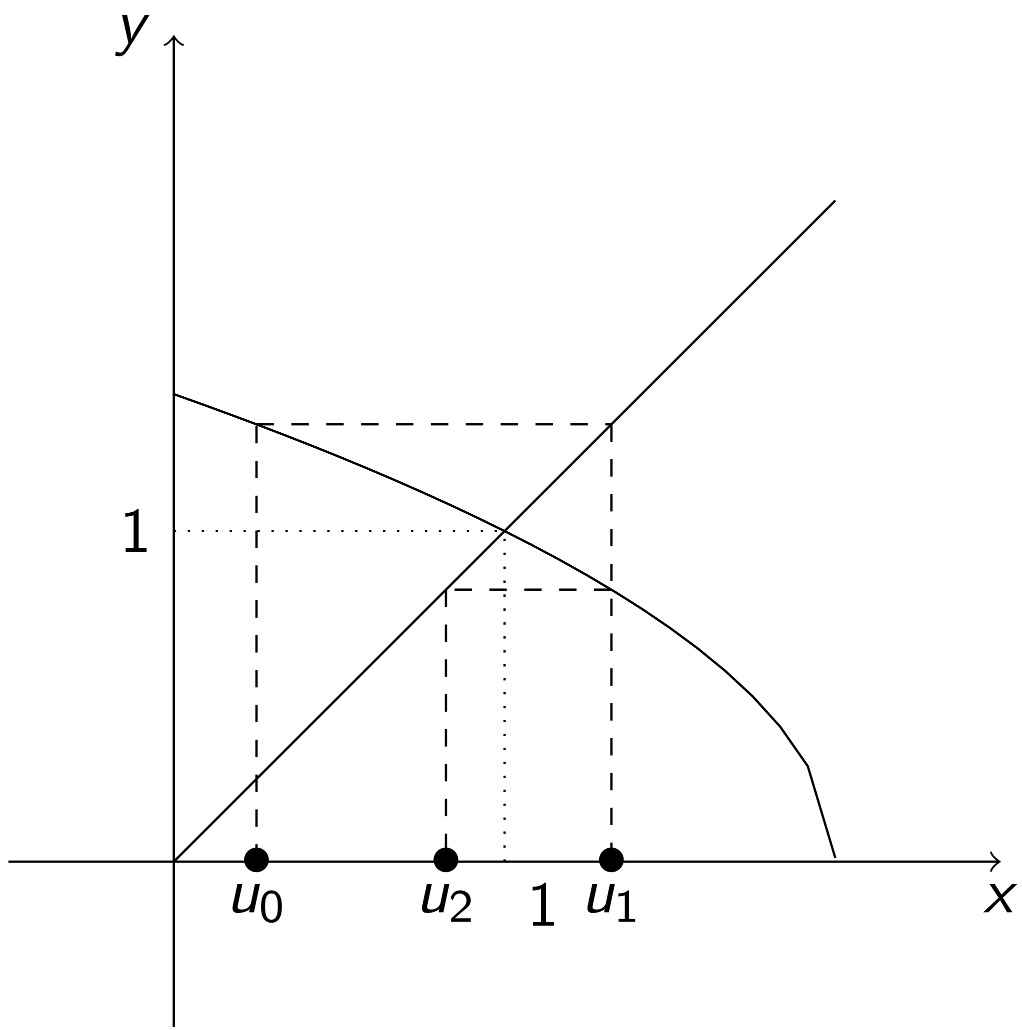
$$g'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{2-x}} - 1 < 0,$$

la fonction g est strictement décroissante, de plus $g(1) = \sqrt{2-1} - 1 = 0$, donc $g(x) > 0$ (respectivement $g(x) < 0$) si $x \in [0,1[$ (respectivement si $x \in]1,2]$), et $g(1) = 0$. Par conséquent :

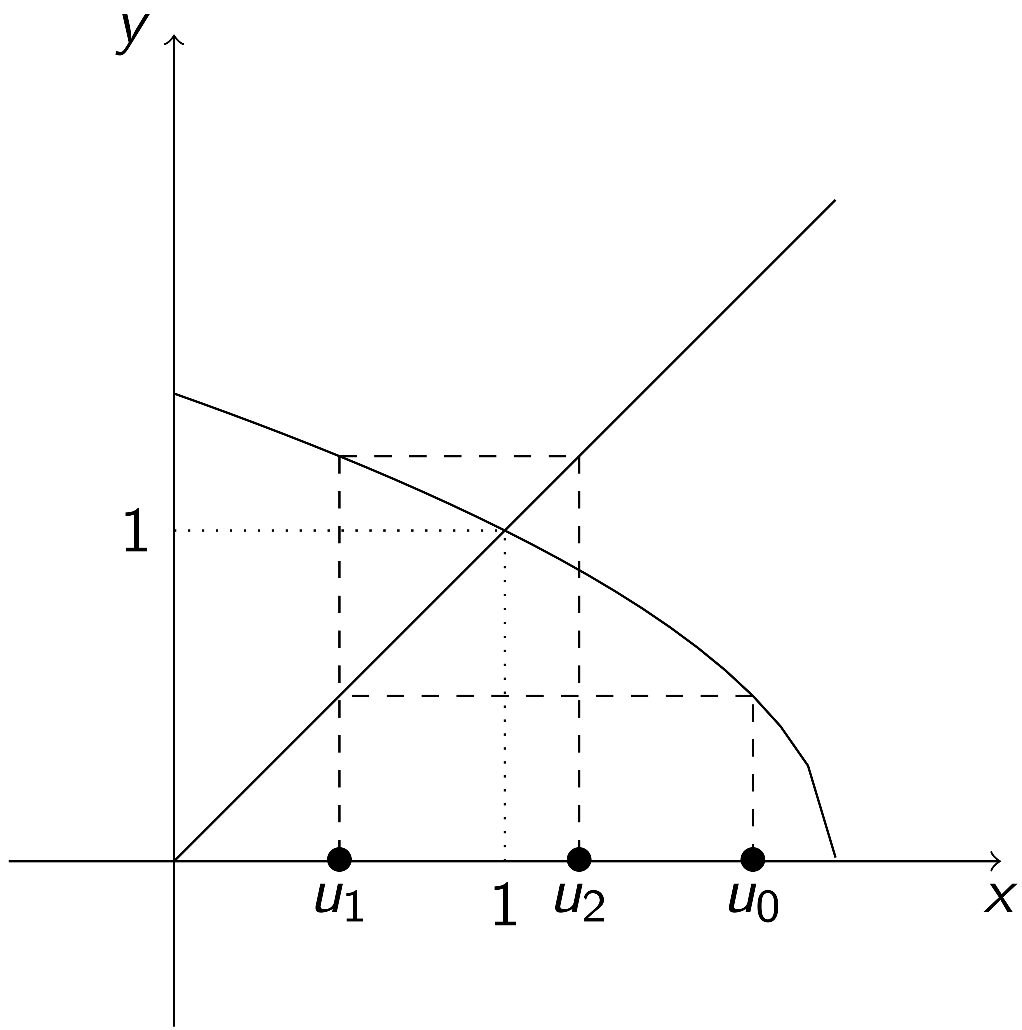
- si $u_n \in [0,1[$ alors $u_{n+1} > u_n$. De plus, puisque $f(1) = \sqrt{2-1} = 1$ et f est décroissante, on a $u_{n+1} = f(u_n) > f(1) = 1$, donc $u_n < 1 < u_{n+1}$.
- si $u_n \in]1,2]$ alors $u_{n+1} < u_n$. De plus, puisque $f(1) = 1$ et f est décroissante, on a $u_{n+1} = f(u_n) < f(1) = 1$, donc $u_{n+1} < 1 < u_n$.
- si $u_n = 1$ alors $u_{n+1} = f(u_n) = f(1) = 1 = u_n$.

On peut donc affirmer que :

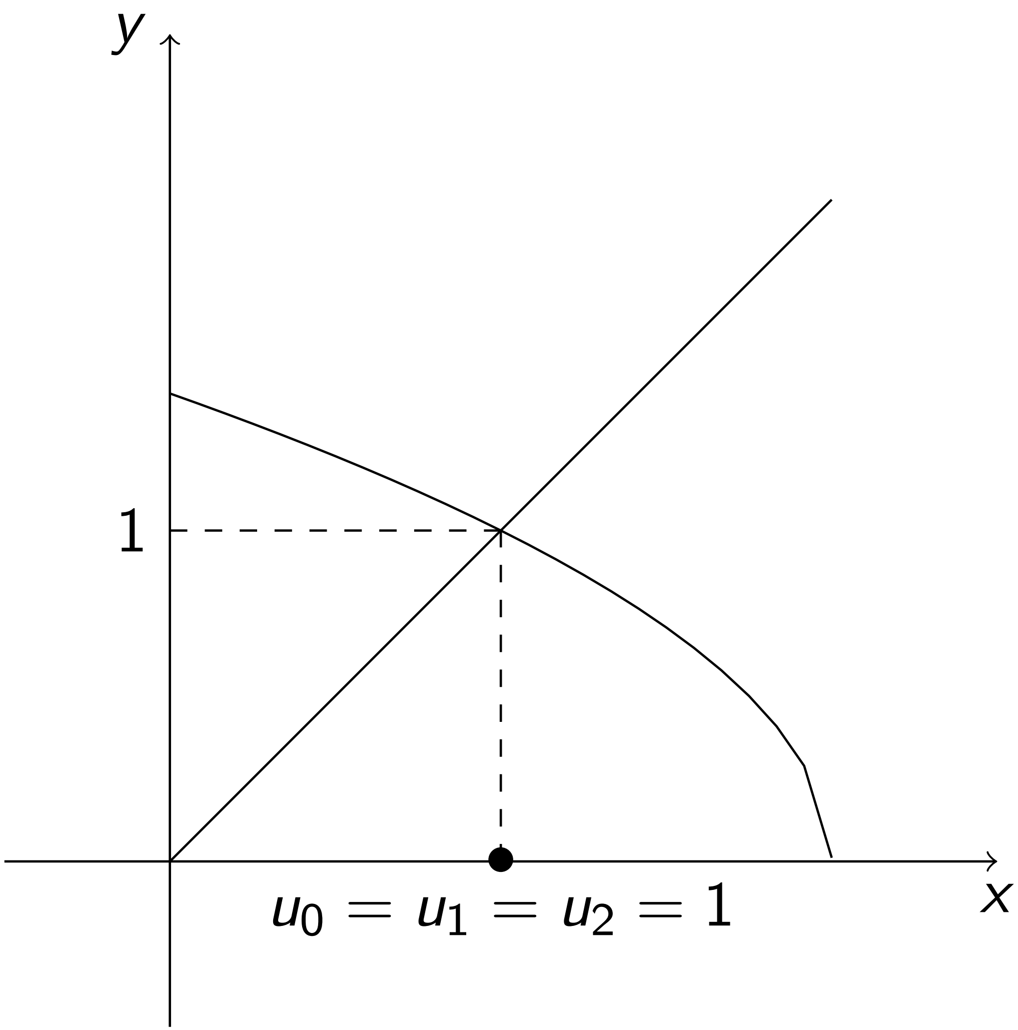
- si $u_0 \in [0,1[$ alors $u_1 > 1$ et $u_2 < 1$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas monotone. Voici la représentation graphique des termes u_0, u_1 et u_2 quand $u_0 \in [0,1[$.



- si $u_0 \in]1, 2]$ alors $u_1 < 1$ et $u_2 > 1$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est toujours pas monotone. La représentation graphique est la suivante :



- si $u_0 = 1$ alors $u_1 = u_2 = u_0 = 1$. On montre aisément que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à 1. Voici la représentation graphique.



3) Il s'agit de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $|u_n - 1| \leq a^{n-1}|u_1 - 1|$, où $a = \frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}+1}$.
On envisage une preuve par récurrence.

<u>Initialisation</u> : si $n = 1$ alors $a^{n-1} = a^0 = 1$ et donc les deux membres de l'inegalité sont égaux à $|u_1 - 1|$, donc l'inegalité est satisfaite si $n = 1$.

<u>Hérédité</u> : supposons l'inegalité vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque $u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n}$ alors :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - 1 &= \sqrt{2-u_n} - 1 = (\sqrt{2-u_n} - 1) \times \frac{\sqrt{2-u_n}+1}{\sqrt{2-u_n}+1} \\ &= \frac{2-u_n-1}{\sqrt{2-u_n}+1} = \frac{1-u_n}{\sqrt{2-u_n}+1}, \end{aligned}$$

donc

$$|u_{n+1} - 1| = \frac{|u_n - 1|}{\sqrt{2-u_n}+1}. \tag{1}$$

Mais on a déjà vu que $u_k \in [0, 2]$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, donc en particulier $u_{n-1} \in [0, 2]$. La fonction $x \mapsto f(x) = \sqrt{2-x}$ étant décroissante on a

$$0 = f(2) \leq u_n = f(u_{n-1}) \leq f(0) = \sqrt{2},$$

donc

$$\sqrt{2-u_n}+1 \geq \sqrt{2-\sqrt{2}}+1,$$

et par conséquent

$$0 < \frac{1}{\sqrt{2-u_n}+1} \leq \frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}+1} = a.$$

En remplaçant dans (1) et en utilisant l'hypothèse de récurrence on obtient

$$|u_{n+1}-1| \leq a|u_n-1| \leq a \times a^{n-1}|u_1-1| = a^n|u_1-1|,$$

donc l'inegalité est encore vrai quand on remplaçe n par $n+1$. En utilisant le Théorème de la récurrence on peut affirmer que l'inegalité $|u_n-1| \leq a^{n-1}|u_1-1|$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Puisque $a < 1$ on a donc que $\lim_{n\to+\infty} a^{n-1} = 0$, donc $\lim_{n\to+\infty} a^{n-1}|u_1-1| = 0$.

Grâce au Théorème des gendarmes on peut affirmer que $\lim_{n\to+\infty} |u_n - 1| = 0$, donc

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 1.$$

Exercice 7.

Enoncé.

Etudier la suite définie par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = \dfrac{4u_n + 5}{u_n + 3}$.

Indications.

- Etudier les variations de $f(x) = \dfrac{4x+5}{x+3}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$;
- Vérifier par récurrence que $0 \leq u_{n+1} \leq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;
- Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l \in \mathbb{R}$ quelles sont les valeurs possibles pour l ?
- Conclure.

Solution.

Déterminons la monotonie de f. Si $x \neq -3$ on a :

$$f'(x) = \frac{4(x+3) - (4x+5)}{(x+3)^2} = \frac{7}{(x+3)^2} > 0$$

ce qui conduit au tableau de variation :

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|$	$+$	
$f(x)$	4	$\nearrow$	$+\infty \;\|\; -\infty$	$\nearrow$	4

Vérifions par récurrence

$$\mathcal{P}(n): \quad 0 \leq u_{n+1} \leq u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Initialisation : On a $0 \leq u_1 = 3 \leq u_0 = 4$ ($\mathcal{P}(0)$ est vraie).

Hérédité : Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{P}(n): \quad 0 \leq u_{n+1} \leq u_n.$$

La fonction f est croissante sur $[0, +\infty[$,
on en déduit que

$$0 < 5/3 = f(0) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n),$$

soit

$$0 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1},$$

donc $\mathcal{P}(n+1)$ est aussi satisfaite.
$\mathcal{P}(n)$ est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

La suite (u_n) est convergente car décroissante et minorée par 0. Notons l sa limite. Comme

$$u_{n+1} = \frac{4u_n + 5}{u_n + 3} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

En passant en la limite, on obtient

$$l = \frac{4l + 5}{l + 3}$$

Comme

$$\frac{4l + 5}{l + 3} = l \quad \Leftrightarrow \quad l^2 - l - 5 = 0, \quad l \neq -3.$$

on en déduit que

$$l = \frac{1 - \sqrt{21}}{2} \quad \text{ou} \quad l = \frac{1 + \sqrt{21}}{2}$$

Comme $u_n \geq 0$ alors $l \geq 0$. Or $\dfrac{1 - \sqrt{21}}{2} < 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \dfrac{1 + \sqrt{21}}{2}$.

Exercice 8.

Enoncé.

Etudier la suite définie par $u_0 = -1$ et $u_{n+1} = \dfrac{3 + 2u_n}{2 + u_n}$.

Indications.

- Etudier les variations de $f(x) = \dfrac{3 + 2x}{2 + x}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$;
- Vérifier par récurrence que $-1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;
- Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l \in \mathbb{R}$ quelles sont les valeurs possibles pour l ?
- Conclure.

Solution.

Etudions les variations de f sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$. Si $x \neq -2$ on a :

$$f'(x) = \frac{2(2+x) - (3+2x)}{(2+x)^2} = \frac{1}{(2+x)^2} > 0$$

ce qui conduit au tableau de variation :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$+$	
$f(x)$	2	$\nearrow$	$+\infty \;\Vert\; -\infty$	$\nearrow$	2

Vérifions par récurrence

$$\mathcal{P}(n): \quad -1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Initialisation : On a $-1 \leq u_0 = -1 \leq u_1 = 1 \leq 2$ ($\mathcal{P}(0)$ est vraie).

Hérédité : Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{P}(n): \quad -1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2.$$

La fonction f est croissante sur $]-2, +\infty[$,
on en déduit que

$$-1 \leq 1 = f(-1) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(2) = \frac{7}{4} \leq 2,$$

soit

$$-1 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 2,$$

donc $\mathcal{P}(n+1)$ est aussi satisfaite.
$\mathcal{P}(n)$ est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

La suite (u_n) est convergente car croissante et majorée par 2. Notons l sa limite. Comme

$$u_{n+1} = \frac{3+2u_n}{2+u_n} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

En passant en la limite, on obtient

$$l = \frac{3+2l}{2+l}$$

Comme

$$\frac{3+2l}{2+l} = l \quad \Leftrightarrow \quad l^2 - 3 = 0, \quad l \neq -2.$$

on en déduit que

$$l = \sqrt{3} \quad \text{ou} \quad l = -\sqrt{3}$$

Comme $u_n \geq -1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors $l \geq -1$. Or $-\sqrt{3} < -1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \sqrt{3}$.

Exercice 9.

Enoncé.

Montrer que les suites de termes $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $v_n = u_n + \dfrac{2}{n+1}$, sont adjacentes.

Solution.

La suite (u_n) est clairement croissante car $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Étudions maintenant la suite (v_n). Nous avons

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} - u_n + \tfrac{2}{n+2} - \tfrac{2}{n+1} = \tfrac{1}{(n+1)^2} + \tfrac{2}{n+2} - \tfrac{2}{n+1} \\ &= \tfrac{n+2+2(n+1)^2-2(n+1)(n+2)}{(n+2)(n+1)^2} \\ &= -\tfrac{n}{(n+2)(n+1)^2} \leq 0, \end{aligned}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc la suite (v_n) est décroissante. De plus

$$\lim_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n+1} = 0,$$

donc les suites (u_n) et (v_n) sont bien adjacentes.

Exercice 10.

Enoncé.

On considère les deux suites définies par, $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n!}$. Montrer que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergent vers la même limite. Montrer que cette limite est un élément de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.