UAPV - UFR STS — Année 2022/2023

Portails Math-Info/Math-Physique L1 S1 — Analyse 1

Corrigé du CC2

Exercice 1. a) Calculer la fonction dérivée de $f : x \mapsto \cos(x^2)$.

f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, $f = \cos \circ u$, où $u : x \mapsto x^2$.

$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\; f'(x) = u'(x)\cos'(u(x)) = 2x\cos'(x^2) = -2x\sin(x^2)\,.$$

b) Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to\sqrt{\pi}} \frac{\cos(x^2)+1}{x-\sqrt{\pi}}$.

$f(\sqrt{\pi}) = \cos(\pi) = -1$ donc $\dfrac{\cos(x^2)+1}{x-\sqrt{\pi}} = \dfrac{f(x)-f(\sqrt{\pi})}{x-\sqrt{\pi}}$ est le taux de variation de la fonction f entre $\sqrt{\pi}$ et x. Donc

$$\lim_{x\to\sqrt{\pi}} \frac{\cos(x^2)+1}{x-\sqrt{\pi}} = f'(\sqrt{\pi}) = -2\sqrt{\pi}\sin(\pi) = 0\,.$$

Exercice 2. a) Résoudre l'inéquation $\ln(4x+1) > 2$.

Remarquons qu'on doit avoir $4x+1 > 0$ pour que $\ln(4x+1)$ soit défini. La fonction ln étant strictement croissante sur $]0,+\infty[$, on a

$$\ln(4x+1) > 2 \iff \ln(4x+1) > \ln(e^2) \iff 4x+1 > e^2 \iff x > \frac{e^2-1}{4}\,.$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation est $S =]\dfrac{e^2-1}{4}, +\infty[$.

b) Résoudre l'équation $\ln(x+1) + \ln(x) = 0$.

On doit avoir $x > 0$ pour que $\ln(x+1)+\ln(x)$ soit défini. Pour $x > 0$,

$$\ln(x+1)+\ln(x) = 0 \iff \ln(x(x+1)) = 0 \iff x(x+1) = 1 \iff x^2+x-1 = 0$$

Le discriminant de l' équation du second degré

$$x^2 + x - 1 = 0 \tag{1}$$

est $\Delta = 1+4 = 5 > 0$. L'équation (1) a deux solutions, qui sont

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\,.$$

Seule la deuxième solution de (1) vérifie la condition $x > 0$. L'équation de départ a donc une unique solution, qui est $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Exercice 3. On considère la fonction $g :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in]0,+\infty[\,,\; g(x) = \frac{e^x}{x}\,.$$

a) Quelles est la limite de g en 0 (à droite)?

Lorsque x tend vers 0 (à droite) $1/x$ tend vers $+\infty$ et e^x tend vers 1, donc $\lim_{x\to 0} g(x) = +\infty$.

b) Calculer $g'(x)$ et étudier son signe. Dresser le tableau de variation de la fonction g. On rappelle que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

On a $g = \dfrac{u}{v}$, avec $u(x) = e^x$ et $v(x) = x$, $u'(x) = e^x$ et $v'(x) = 1$; g est dérivable sur son ensemble de définition et

$$\forall x \in]0,+\infty[\,,\; g'(x) = \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{e^x x - e^x}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2}\,.$$

Pour $x \in]0,+\infty[$, $g'(x)$ est du signe de $x-1$, car $e^x > 0$ et $x^2 > 0$: $g'(1) = 0$, $g'(x) < 0$ si $x \in]0,1[$ et $g'(x) > 0$ si $x \in]1,+\infty[$. D'où le tableau de variation

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

c) La fonction g admet-elle un minimum global? Un maximum global?

D'après son tableau de variation, la fonction g admet un minimum global, atteint en 1 et valant e. Elle n'a pas de maximum global (elle n'est pas majorée puisque sa limite en 0 est $+\infty$).

d) Trouver une condition nécessaire et suffisante sur le réel λ pour que l'équation $e^x = \lambda x$ ait au moins une solution dans l'intervalle $]0,+\infty[$.

L'équation $e^x = \lambda x$ dans l'intervalle $]0,+\infty[$ est équivalente à $g(x) = \lambda$. D'après le tableau de variation de g :

- si $\lambda < e$, cette équation n'a pas de solution car $g(x) \geq e$ pour tout $x \in]0,+\infty[$;
- si $\lambda \geq e$, cette équation a au moins une solution. En effet, g étant continue et vérifiant $g(1) = e$, $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $g(x) = \lambda$ a au moins une solution pour tout réel $\lambda \geq e$.

La CNS cherchée est $\lambda \geq e$.

Exercice 4. On considère la fonction $h : x \mapsto (1+x)^{1/4}$.

a) Quel est l'ensemble de définition de h?

$(1+x)^{1/4}$ est défini si $1+x \geq 0$, donc $D_h = [-1,+\infty[$.

b) Calculer la fonction dérivée et la fonction dérivée seconde de h, et préciser l'ensemble de définition de chacune de ces fonctions.

$$h'(x) = \frac{1}{4}(1+x)^{\frac{1}{4}-1} = \frac{1}{4}(1+x)^{-3/4} \quad , \qquad h''(x) = \frac{1}{4} \times \Big(-\frac{3}{4}\Big)(1+x)^{-\frac{3}{4}-1} = -\frac{3}{16}(1+x)^{-7/4} .$$

$D_{h'} = D_{h''} =]-1,+\infty[$.

c) Ecrire la formule de Taylor-Young en 0 à l'ordre 2 pour la fonction h.

Cette formule s'écrit :

$$h(x) = h(0) + h'(0)x + \frac{h''(0)}{2!}x^2 + x^2\epsilon(x)\,, \quad \text{avec } \lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 0\,.$$

On a $h(0) = 1$ et d'après b), $h'(0) = \dfrac{1}{4}$ et $h''(0) = -\dfrac{3}{16}$. D'où

$$(1+x)^{1/4} = 1 + \frac{1}{4}x - \frac{3}{32}x^2 + x^2\epsilon(x)\,, \quad \text{avec } \lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 0\,.$$

d) Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{4(1+x)^{1/4} - 4 - x}{x^2}$.

La formule de c) donne

$$4(1+x)^{1/4} - 4 - x = 4\Big(1 + \frac{1}{4}x - \frac{3}{32}x^2 + x^2\epsilon(x)\Big) - 4 - x = -\frac{3}{8}x^2 + 4x^2\epsilon(x) = x^2\Big(-\frac{3}{8} + 4\epsilon(x)\Big)\,,$$

avec $\lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 0$. Donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{4(1+x)^{1/4} - 4 - x}{x^2} = \lim_{x\to 0} -\frac{3}{8} + 4\epsilon(x) = -\frac{3}{8}\,.$$