Analyse 2 (2023) — TD 2

Exo. 1 On veut montrer l'affirmation

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists n_0\in\mathbb{N}\ ;\ n\geq n_0 \Longrightarrow \left|u_n-\frac{1}{2}\right|\leq \varepsilon,\ \forall n\in\mathbb{N}. \quad (\star)$$

On considère, donc, $\varepsilon>0$ quelconque. On examine la conclusion :

$$\left|u_n-\frac{1}{2}\right| = \left|\frac{n+1}{2n+3}-\frac{1}{2}\right| = \left|\frac{2(n+1)-(2n+3)}{(2n+3)2}\right| = \left|\frac{\cancel{2n}+2-\cancel{2n}-3}{4n+6}\right|$$

$$= \left|\frac{-1}{4n+6}\right| = \frac{1}{4n+6}.$$

On veut $\left|u_n-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$, donc on résout

$$\frac{1}{4n+6}\leq\varepsilon \iff \frac{1}{\varepsilon}\leq 4n+6 \iff \frac{1}{\varepsilon}-6\leq 4n$$

$$\iff \frac{1-6\varepsilon}{\varepsilon}\leq 4n \iff n\geq \frac{1-6\varepsilon}{4\varepsilon}.$$

Ainsi, si on choisit n'importe quel $n_0\geq \frac{1-6\varepsilon}{4\varepsilon}$, alors

$$\left|u_n-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{4n+6}\leq\varepsilon,\ \forall n\geq n_0.$$

Ceci vérifie (1) et montre, ainsi, que $\lim u_n=\frac{1}{2}$. c.q.f.d

Exo. 2 Soit $\varepsilon>0$. On prend $n_0\in\mathbb{N}$ tel que $n_0\geq\frac{3-2\varepsilon}{\varepsilon}$.

Alors, pour tout

$$|u_n-2| = \left|\frac{2n+1}{n+2}-2\right| = \left|\frac{2n+1-2(n+2)}{n+2}\right| = \left|\frac{2n+1-2n-4}{n+2}\right|$$

$$= \left|\frac{-3}{n+2}\right| = \frac{3}{n+2}.$$

On affirme que $\frac{3}{n+2}\leq\varepsilon$. En effet,

2

$$\frac{3}{n+2} \leq \varepsilon \iff 3 \leq \varepsilon(n+2) \iff 3 \leq n\varepsilon + 2\varepsilon$$
$$\iff 3 - 2\varepsilon \leq n\varepsilon \iff n \geqslant \frac{3-2\varepsilon}{\varepsilon}.$$

Puisque $n \geq n_0 \geqslant \frac{3-2\varepsilon}{\varepsilon}$, on conclut que $\frac{3}{n+2} \leq \varepsilon$, donc

$$|u_n - 2| = \frac{3}{n+2} \leq \varepsilon, \ \forall n \geqslant n_0.$$

Par conséquent, $\lim u_n = 2$. c.q.f.d.

<u>Exo.3</u> On définit $(u_n)_n$ par

$$u_n = \frac{1}{4} u_{n-1}.$$

Ainsi,

$$u_n = \frac{1}{4} u_{n-1} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4} u_{n-2}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^2 u_{n-2}$$
$$= \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{1}{4} u_{n-3}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^3 u_{n-3}$$
$$= \cdots = \left(\frac{1}{4}\right)^k u_{n-k} \quad \text{au rang } k.$$

Afin d'obtenir u_n en fonction du premier terme u_1, on regarde le rang k tel que $n-k=1$, soit le rang $k = n-1$. On a

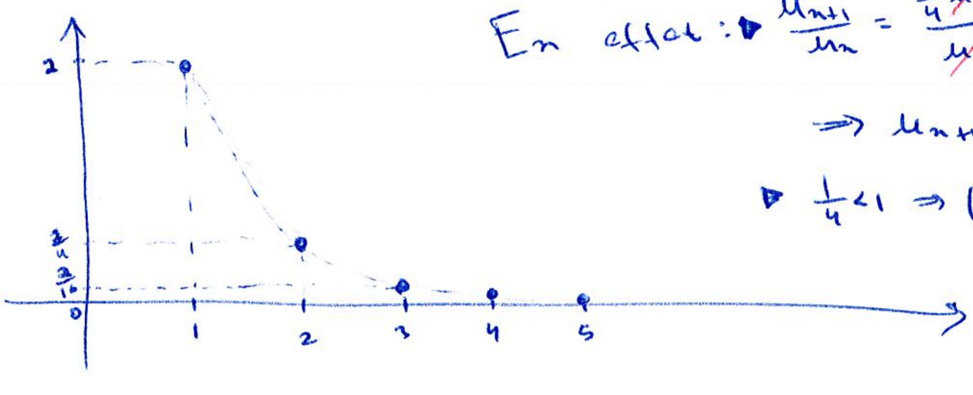
$$u_n = \left(\frac{1}{4}\right)^k u_{n-k} = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} u_1 \overset{*}{=} 2\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \quad (\text{car } u_1 = 2)^*$$

$(u_n)_n$ est donc une suite décroissante avec $\lim u_n = 0$.

En effet : ▸ $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{1}{4}\cancel{u_n}}{\cancel{u_n}} = \frac{1}{4} < 1$, $u_n > 0$

$\Rightarrow u_{n+1} < u_n, \ \forall n \geqslant 1.$

▸ $\frac{1}{4} < 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^n \to 0 \Rightarrow u_n \to 0.$



3

<u>Exo. 4</u> On définit $u_n = u_{n-1} + 5$ et on calcule

$$u_n = u_{n-1} + 5 = (u_{n-2} + 5) + 5 = u_{n-2} + 2\cdot 5$$

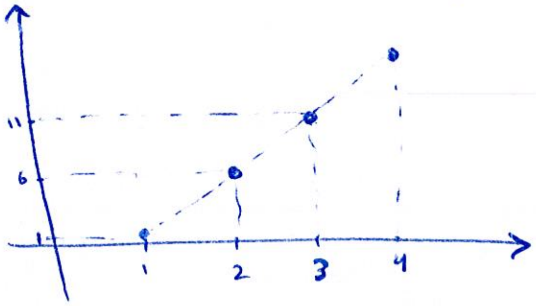
$$= (u_{n-3} + 5) + 2\cdot 5 = u_{n-3} + 3\cdot 5$$

$$= \dots = u_{n-k} + k\cdot 5 = u_{n-k} + 5k.$$

Pour k tel que $n-k=1$, on a $k=n-1$ et

$$u_n = u_{n-k} + 5k = u_1 + 5(n-1) \overset{*}{=} 1 + 5(n-1) \quad (\text{car } u_1 = 1)^*$$

Ainsi, $(u_n)_n$ est croissante et $\lim u_n = +\infty$.



En effet : ▸ $u_{n+1} - u_n = 1 + 5n - (1 + 5(n-1))$

$$= 1 + 5n - 1 - 5(n-1)$$

$$= \cancel{1} + \cancel{5n} - \cancel{1} - \cancel{5n} + 5 > 0$$

$$\Rightarrow u_{n+1} - u_n > 0 \Rightarrow u_{n+1} > u_n.$$

▸ $u_n = 1 + 5(n-1) = 1 + 5n - 5 = 5n - 4$

$$\Rightarrow u_n = \underbrace{n}_{\to +\infty}\Big(5 - \underbrace{\tfrac{4}{n}}_{\to 0}\Big) \longrightarrow +\infty \cdot 5 = +\infty.$$

$$\Rightarrow \lim u_n = +\infty.$$

Exo. 5

On montre que $\frac{\cos n}{n+1} \longrightarrow 0$ lorsque $n \to +\infty$. Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. On prend $n_0 \in \mathbb{N}$ un entier tel que $n_0 \geq \frac{1}{\varepsilon} - 1$. Alors, pour tout $n \geq n_0$, on a

$$n \geq n_0 \geq \frac{1}{\varepsilon} - 1 \Rightarrow n+1 \geq \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{n+1} \leq \varepsilon .$$

Ainsi, si $n \geq n_0$, alors

$$\left| \frac{\cos n}{n+1} - 0 \right| = \frac{|\cos n|}{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \leq \varepsilon .$$

Par conséquent, $\lim_{n \to +\infty} \frac{\cos n}{n+1} = 0$, c.q.f.d.

Exo. 6 Devoir

Solution différente pour les exos 5 et 6.

Propriété : si $u_n \to 0$ et $(v_n)_n$ est bornée, alors $u_n v_n \to 0$

Exo 5 $u_n = \frac{\cos n}{n+1} = \frac{1}{n+1} \cdot \cos n \longrightarrow 0$ car $\frac{1}{n+1} \longrightarrow 0$ et $(\cos(n))_n$ est une suite bornée.

Exo. 6 Devoir

Exo. 7

1) $u_n = \left(\sqrt{n^2+3n+1} - \sqrt{n^2+2n+1}\right) \frac{\left(\sqrt{n^2+3n+1} + \sqrt{n^2+2n+1}\right)}{\sqrt{n^2+3n+1} + \sqrt{n^2+2n+1}}$

$$\Rightarrow u_n = \frac{n^2+3n+1-(n^2+2n+1)}{\sqrt{n^2+3n+1}+\sqrt{n^2+2n+1}} = \frac{n}{\sqrt{n^2\left(1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}+\sqrt{n^2\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}}$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}+\cancel{n}\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}} \Rightarrow u_n = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}} \longrightarrow \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{1}{2}.$$

5

2) $u_n = \frac{1}{n^2} - \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n} \longrightarrow 0 \Rightarrow \lim u_n = 0.$

3) $u_n = \frac{2+n}{1+n}\left(1 + \frac{8}{n^2}\right).$

On a

$$\frac{2+n}{1+n} = \frac{n\left(\frac{2}{n}+1\right)}{n\left(\frac{1}{n}+1\right)} = \frac{\frac{2}{n}+1}{\frac{1}{n}+1} \longrightarrow 1$$

et

$$1 + \frac{8}{n^2} \longrightarrow 1$$

donc, d'après la limite du produit, on a

$$u_n \longrightarrow 1 \cdot 1 = 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = 1.$$

Exo. 8

1) $u_n = \frac{3^n - 2^n}{3^n + 2^n} = \frac{3^n\left(1 - \frac{2^n}{3^n}\right)}{3^n\left(1 + \frac{2^n}{3^n}\right)} = \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n} \longrightarrow \frac{1}{1} = 1$

car $\frac{2}{3} < 1 \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0$. Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1.$

2) $u_n = \frac{1}{n} - \frac{n}{n} = \frac{1}{n} - 1 \longrightarrow -1$ car $\frac{1}{n} \to 0$. Ainsi,

$\lim_{n\to+\infty} u_n = -1.$

3) $n \to +\infty \Rightarrow n^\pi \to +\infty \Rightarrow -n^\pi \longrightarrow -\infty \Rightarrow e^{-n^\pi} \longrightarrow 0.$

Puisque $\cos(\pi/6)$ est constant, on a $\lim u_n = 0.$

" deuxième méthode:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} e^{-n^\pi}\cos(\pi/6) = \cos(\pi/6) \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e^{n^\pi}} = \cos(\pi/6)\cdot 0 = 0.$$ "

<u>Exo. 9</u> On définit $(u_n)_n$ par $u_n = e^{2n-1}$.

1) On pose

$$|u_n| > 10^7 \iff |e^{2n-1}| > 10^7 \iff e^{2n-1} > 10^7$$

$$\iff \ln(e^{2n-1}) > \ln(10^7) \iff 2n-1 > \ln(10^7)$$

$$\iff n > \frac{\ln(10^7)+1}{2} \notin \mathbb{Z}. \qquad (\star)$$

Le plus petit entier satisfaisant $|u_n| > 10^7$ est, donc,

$$n_0 = \left\lceil \frac{\ln(10^7)+1}{2} \right\rceil.$$

2) Soit $N \in \mathbb{N}$ quelconque. On prend $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n_0 > \frac{\ln(N)+1}{2}$. D'après $(\star)$ avec N à la place de 10^7, on a

$$n \geqslant n_0 \Rightarrow n > \frac{\ln(N)+1}{2} \Rightarrow u_n > N.$$

Ainsi, par définition, $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$, c.q.f.d.

<u>Exo. 10</u> $u_n := \ln(2n^2+1)$.

1) On pose, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n| > 10^7 \iff \ln(2n^2+1) > 10^7 \iff 2n^2+1 > e^{10^7}$$

$$\iff n^2 > \frac{e^{10^7}-1}{2} \iff n > \sqrt{\frac{e^{10^7}-1}{2}} \notin \mathbb{Z}.$$

Le plus petit est, donc, $n_0 = \left\lceil \sqrt{\frac{e^{10^7}-1}{2}} \right\rceil$.

2) Soit $N \in \mathbb{N}$ quelconque. On prend

$$n_0 = \left\lceil \sqrt{\frac{e^N - 1}{2}} \right\rceil .$$

D'après la partie 1) avec N à la place de 10^7, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$n \geqslant n_0 \Rightarrow n > \left\lceil \sqrt{\frac{e^N - 1}{2}} \right\rceil \Rightarrow u_n > N.$$

D'après la définition, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Exo. 11

- $$\frac{1-n^2}{n} = \frac{1}{n} - \frac{n^2}{n} = \frac{1}{n} - n \sim -n \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \frac{1-n^2}{n} = -\infty.$$

- $3n - 7 \sim 3n \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} (3n-7) = +\infty$.

- $$\left(\frac{n}{1+n}\right)^{2n} = \left(\frac{1}{\frac{1+n}{n}}\right)^{2n} = \left(\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\right)^2 \longrightarrow \left(\frac{1}{e}\right)^2 = \frac{1}{e^2} \quad \text{car}$$

  $$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n .$$

- $$(n^4 + 2n^2) e^{1-n} = e \, \frac{n^4 + 2n^2}{e^n} \longrightarrow e \cdot 0 = 0 \quad \text{car} \quad \frac{P(n)}{e^n} \to 0$$

  pour n'importe quel polynôme P.

- $n \sin^2(n\pi/2)$ n'a pas de limite car $n \to +\infty$ et $\left(\sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)_n$ oscille. Par exemple: $n_k = 2k$ on a

  $$n_k \sin^2\left(\frac{n_k \pi}{2}\right) = 2k \sin^2\left(\frac{2k\pi}{2}\right) = 2k \sin^2(k\pi) = 0, \ \forall k \in \mathbb{N}$$

  $\Longrightarrow \left(n_k \sin^2\left(\frac{n_k\pi}{2}\right)\right)_{k \in \mathbb{N}}$ est la suite nulle.

  $n_k = 2k+1$ on a $n_k \sin^2\left(\frac{n_k \pi}{2}\right) = (2k+1) \sin^2\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 2k+1 \xrightarrow{k \to +\infty} +\infty$

Donc $(n\sin^2(\frac{n\pi}{2}))_n$ a deux sous-suites avec de limites différentes. Ainsi, $(n\sin^2(\frac{n\pi}{2}))_n$ n'est pas convergente.

▶ $$\frac{2n^3+n^2}{(1+n)^2} = \frac{n^3(2+\frac{1}{n})}{1+2n+n^2} = \frac{n^3(2+\frac{1}{n})}{n^2(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n}+1)} = \overset{\to+\infty}{\cancel{n}} \cdot \overset{\to 2}{\cancel{\left(\frac{2+\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n}+1}\right)}} \longrightarrow +\infty \cdot 2 = +\infty.$$

Exo. 12

▶ $$\frac{1-n}{n^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n} \longrightarrow 0-0 = 0.$$

▶ $$3n^3-2n^2+n-5 = n^3\left(3 - \overset{\to 0}{\cancel{\frac{2}{n}}} + \overset{\to 0}{\cancel{\frac{1}{n^2}}} - \overset{\to 0}{\cancel{\frac{5}{n^3}}}\right) \longrightarrow +\infty \cdot 3 = +\infty$$

▶ $$\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \longrightarrow \frac{1}{+\infty} = 0.$$

▶ $\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} \longrightarrow 0$ car $\frac{\ln(n)}{n^\alpha} \longrightarrow 0$ pour tous $\alpha > 0$.

▶ $\left(n+\frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow +\infty$ car $\left(n+\frac{1}{n}\right)^n \geq \overset{\to+\infty}{\cancel{n}} + \overset{\to 0}{\cancel{\frac{1}{n}}} \longrightarrow +\infty + 0 = +\infty.$

▶ $\boxed{\beta > 0}$ Alors, peu importe $\alpha \in \mathbb{R}$, $\frac{[\ln(n)]^\alpha}{n^\beta} \longrightarrow 0$. En effet,

$$\alpha \leq 0 \Rightarrow u_n = \frac{1}{n^\beta[\ln(n)]^{-\alpha}} = \overset{\to 0}{\cancel{\frac{1}{n^\beta}}} \; \overset{\text{bornée quand } n\to+\infty}{\cancel{\frac{1}{[\ln(n)]^{-\alpha}}}} \longrightarrow 0;$$

$$\alpha > 0 \Rightarrow u_n = \Bigg(\underbrace{\cancel{\frac{\ln(n)}{n^{\beta/\alpha}}}}_{\to 0}\Bigg)^\alpha \longrightarrow 0^\alpha = 0.$$

$\boxed{\beta = 0}$ Alors $u_n = [\ln(n)]^\alpha \longrightarrow \begin{cases} 1, & \text{si } \alpha = 0, \\ +\infty, & \text{si } \alpha > 0, \\ 0, & \text{si } \alpha < 0. \end{cases}$

$\boxed{\beta < 0}$ Alors, peu importe $\alpha \in \mathbb{R}$, $u_n = n^{-\beta}[\ln(n)]^\alpha \longrightarrow +\infty$. En effet

$$\alpha \geq 0 \Rightarrow u_n = \underbrace{\cancel{n^{-\beta}}}_{+\infty} \cdot \cancel{[\ln(n)]^\alpha} \longrightarrow +\infty \cdot \text{bornée}^+ = +\infty$$

$$\alpha < 0 \Rightarrow u_n = \underbrace{n^{-\beta}}_{+\infty} / \underbrace{[\ln(n)]^{-\alpha}}_{\text{bornée quand } n\to+\infty} = \left(\frac{n^{\frac{-\beta}{-\alpha}}}{\ln(n)}\right)^{-\alpha} = \left(\frac{n^{\frac{\beta}{\alpha}}}{\ln(n)}\right)^{-\alpha} \longrightarrow (+\infty)^{-\alpha} = +\infty.$$

Exo. 13

1) Pour $n_k := 2k$ on a

$$\sin\left(n_k \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(2k\frac{\pi}{2}\right) = \sin(k\pi) = 0, \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Donc $\left(\sin\left(n_k\frac{\pi}{2}\right)\right)_k$ est la suite nulle.

Pour $m_k := 4k+1$ on a

$$\sin\left(m_k\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left((4k+1)\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1, \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Donc $\left(\sin\left(m_k\frac{\pi}{2}\right)\right)_k$ est la suite constante égale à 1.

Cela montre déjà que $\left(\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right)$ n'a pas de limite.

Afin d'utiliser dans la suite, on définit $p_k = 4k+3$.

On a

$$\sin\left(p_k\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left((4k+3)\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(2k\pi + \frac{3\pi}{2}\right) = -1, \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Donc $\left(\sin\left(p_k\frac{\pi}{2}\right)\right)_k$ est la suite constante égale à -1.

2) D'après 1), on a

$$u_{n_k} = \sin(k\pi) + \frac{1}{2k} = 0 + \frac{1}{2k} = \frac{1}{2k} \longrightarrow 0,$$

$$u_{m_k} = \sin\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{4k+1} = 1 + \frac{1}{4k+1} \longrightarrow 1,$$

$$u_{p_k} = \sin\left(2k\pi + \frac{3\pi}{2}\right) + \frac{1}{4k+3} = -1 + \frac{1}{4k+3} \longrightarrow -1.$$

Exo. 14

$q \geq 2$, $(u_n)_n$ donnée par $u_n = \cos\left(\frac{2n\pi}{q}\right)$
$(q \in \mathbb{N})$ $(n \geq 0)$.

1) On vérifie $u_{n+q} = u_n$:

$$u_{n+q} = \cos\left(\frac{2(n+q)\pi}{q}\right)$$
$$= \cos\left(\frac{2n\pi + 2q\pi}{q}\right)$$
$$= \cos\left(\frac{2n\pi}{q} + 2\pi\right)$$
$$= \cos\left(\frac{2n\pi}{q}\right) = u_n, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

2) On calcule u_{nq} :

$$u_{nq} = \cos\left(\frac{2nq\pi}{q}\right) = \cos(2n\pi) = 1, \ \forall n \in \mathbb{N}. \qquad (1)$$

On calcule u_{nq+1} :

$$u_{nq+1} = \cos\left(\frac{2(nq+1)\pi}{q}\right) = \cos\left(\frac{2nq\pi + 2\pi}{q}\right) = \cos\left(2n\pi + \frac{2\pi}{q}\right) \qquad (2)$$

$$= \cos\left(\frac{2\pi}{q}\right).$$

<u>Conclusion</u>: pour $q = 2$ par exemple, on a les suites extraites

$$(u_{2n})_n \overset{(1)}{=} (1)_n \text{ donc } \lim_{n \to +\infty} u_{2n} = 1$$

et

$$(u_{2n+1})_n \overset{(2)}{=} (-1)_n \text{ donc } \lim_{n \to +\infty} u_{2n+1} = -1.$$

Par conséquent $(u_n)_n$ n'a pas de limite.