Avignon Université - UFR STS — Année 2022/2023

Portails Math-Info/Math-Physique L1 S1 — Analyse 1

Corrigé du CC3

Exercice 1. On considère les intégrales suivantes.

$$I = \int_1^3 \frac{s^2-3s+3}{s^2}\,ds \quad , \quad J = \int_0^2 \frac{t^2-t+1}{(t+1)^2}\,dt\ .$$

a) Calculer I.

$$\begin{aligned} I &= \int_1^3 \frac{s^2-3s+3}{s^2}\,ds = \int_1^3 1-\frac{3}{s}+\frac{3}{s^2}\,ds = \Big[s-3\ln(s)-\frac{3}{s}\Big]_1^3 \\ &= (3-3\ln(3)-1)-(1-3\ln(1)-3) = 4-3\ln(3)\,. \end{aligned}$$

b) A l'aide d'un changement de variable, montrer l'égalité $J = I$.

Dans J on effectue le changement de variable $t = s-1$ ($s = t+1$). La borne 0 (resp. 2) pour t correspond à la borne 1 (resp. 3) pour s; de plus, $dt = ds$. Donc

$$J = \int_1^3 \frac{(s-1)^2-(s-1)+1}{s^2}\,ds = \int_1^3 \frac{s^2-2s+1-s+1+1}{s^2}\,ds = \int_1^3 \frac{s^2-3s+3}{s^2}\,ds = I\,.$$

Exercice 2. Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale

$$K = \int_0^1 (x+3)e^{2x}\,dx\,.$$

On pose $\begin{cases} u(x) = x+3 \\ v'(x) = e^{2x} \end{cases}$, $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = \dfrac{e^{2x}}{2} \end{cases}$. Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[0,1]$. La formule d'intégration par parties donne

$$\begin{aligned} K &= \int_0^1 u(x)v'(x)\,dx = [u(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 u'(x)v(x)\,dx = \Big[(x+3)\frac{e^{2x}}{2}\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{e^{2x}}{2}\,dx \\ &= (2e^2-\frac{3}{2}) - \Big[\frac{e^{2x}}{4}\Big]_0^1 = (2e^2-\frac{3}{2}) - (\frac{e^2}{4}-\frac{1}{4}) = \frac{7}{4}e^2-\frac{5}{4}\,. \end{aligned}$$

Exercice 3. Résoudre le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = \Big(-t+\dfrac{1}{t}\Big)y \quad \text{sur l'intervalle }]0,+\infty[\\ y(1) = 2 \end{cases} .$$

La fonction $A : t \mapsto -\dfrac{t^2}{2}+\ln(t)$ étant une primitive de la fonction $t \mapsto -t+\dfrac{1}{t}$ sur l'intervalle $I =]0,+\infty[$, les solutions sur I de l'équation différentielle linéaire homogène du premier ordre $y' = \Big(-t+\dfrac{1}{t}\Big)y$ sont les fonctions

$$(*) \qquad t \mapsto \lambda e^{-\frac{t^2}{2}+\ln(t)} = \lambda e^{\ln(t)}e^{-\frac{t^2}{2}} = \lambda t e^{-\frac{t^2}{2}}\ , \text{ avec } \lambda \text{ constante réelle}\,.$$

Pour une fonction y définie par (*), on a

$$y(1) = 2 \iff \lambda e^{-1/2} = 2 \iff \lambda = 2e^{1/2}$$

L'unique solution du problème de Cauchy considéré est la fonction $y : t \mapsto 2e^{1/2} t e^{-\frac{t^2}{2}} = 2te^{\frac{1-t^2}{2}}$.

Exercice 4. Résoudre l'équation différentielle

$$(E1) \qquad y' = 2y + \cos(3t)\,.$$

Indication. On pourra chercher une solution particulière de $(E1)$ de la forme $y_0 : t \mapsto a\cos(3t) + b\sin(3t)$, où a et b sont deux constantes réelles.

$(E1)$ est une équation différentielle linéaire du premier ordre. L'équation différentielle linéaire homogène associée est

$$(EH1) \qquad y' = 2y\,.$$

Les solutions de $(EH1)$ sont les fonctions $y : t \mapsto \lambda e^{2t}$, où λ est une constante réelle.

On cherche à présent une solution particulière de $(E1)$ de la forme $y_0 : t \mapsto a\cos(3t) + b\sin(3t)$, où a et b sont deux constantes réelles. On a alors

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R}\,,\ y_0'(t) - 2y_0(t) &= (-3a\sin(3t) + 3b\cos(3t)) - 2(a\cos(3t) + b\sin(3t)) \\ &= (3b - 2a)\cos(3t) - (3a + 2b)\sin(3t)\,.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_0 \text{ est une solution de } (E1) &\iff \forall t \in \mathbb{R}\,,\ (3b-2a)\cos(3t) - (3a+2b)\sin(3t) = \cos(3t) \\ &\iff \begin{cases} -2a + 3b = 1 \\ 3a + 2b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b = -\dfrac{3}{2}a \\ (-2 - \dfrac{9}{2})a = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -\dfrac{2}{13} \\ b = \dfrac{3}{13} \end{cases}. \end{aligned}$$

Ainsi la fonction

$$y_0 : t \mapsto -\frac{2}{13}\cos(3t) + \frac{3}{13}\sin(3t)$$

est une solution particulière de $(E1)$. L'ensemble des solutions de $(E1)$ est

$$S = \left\{ y : t \mapsto -\frac{2}{13}\cos(3t) + \frac{3}{13}\sin(3t) + \lambda e^{2t}\,;\ \lambda \text{ constante réelle} \right\}.$$

Exercice 5. a) Résoudre l'équation différentielle

$$(E2) \qquad y'' - 2y' + 2y = 0\,.$$

$(E2)$ est une équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants. Le polynôme caractéristique associé est

$$S(X) = X^2 - 2X + 2\,.$$

Son discriminant est $\Delta = 4 - 8 = -4$. Les racines de S sont les nombres complexes conjugués

$$z_1 = \frac{2 + 2i}{2} = 1 + i \quad \text{et} \quad z_2 = 1 - i\,.$$

L'ensemble des solutions de $(E2)$ est donc

$$S = \{y : t \mapsto (\lambda\cos t + \mu\sin t)e^t\ ;\ \lambda, \mu \text{ constantes réelles}\}$$

b) Déterminer l'unique solution de $(E2)$ telle que $\begin{cases} y(0) = 2 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$.

Soit $y : t \mapsto (\lambda \cos t + \mu \sin t)e^t$. On a $y(0) = \lambda$ et

$$\forall t \in \mathbb{R}\,,\ y'(t) = (-\lambda \sin t + \mu \cos t)e^t + (\lambda \cos t + \mu \sin t)e^t\ , \qquad y'(0) = \mu + \lambda\,.$$

$$\begin{cases} y(0) = 2 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 2 \\ \lambda + \mu = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 2 \\ \mu = -2 \end{cases}$$

L'unique solution de $(E2)$ telle que $\begin{cases} y(0) = 2 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$ est la fonction $t \mapsto 2(\cos t - \sin t)e^t$.