

Groupe 4

LES GOBELETS

Un enseignant a retrouvé un problème dans un cahier de l'élève de la collection ERMEL CP (éd. HATIER 1996, p. 121). Voir ci-dessous.

Il décide de l'étudier du point de vue des mathématiques pour être sûr que le problème ait toujours une solution avant de le proposer à ses élèves et pouvoir varier des données suivant les connaissances de ses élèves.

Les gobelets dessinés contiennent des jetons. Ils ne contiennent pas tous le même nombre de jetons. Des étiquettes sur chaque gobelet indiquent le nombre de jetons qu'ils contiennent.

Dans la boîte, il reste des jetons qu'on n'a pas eu le temps de mettre dans les gobelets. L'étiquette collée sur la boîte indique le nombre de jetons qu'elle contient.

Tu dois répartir tous les jetons que contient la boîte de manière à ce qu'il y ait le même nombre de jetons dans chaque gobelet.

On doit comprendre ce que tu as fait en lisant ta feuille.

Écris les nombres que l'enseignant t'a donné, sur les gobelets et sur la boîte.



Dans la situation proposée, le nombre de jetons par gobelet et dans la boîte est laissé au libre arbitre de l'enseignant. Il s'agit pour ce dernier de bien comprendre qu'il doit anticiper sa situation pour ne pas se retrouver devant une situation insoluble. Il s'agit donc de comprendre que certains choix de données numériques peuvent conduire à une absence de résultat.

Partie A : Exemples de situations

1. Dans cette question, les gobelets contiennent respectivement 25, 14, 19 et 21 jetons. La boîte contient 37 jetons. Le problème possède-t-il une solution ? si oui, laquelle ? si non, pourquoi ?
2. Dans cette question, les gobelets contiennent respectivement 17, 11, 9 et 22 jetons. La boîte contient 25 jetons. Le problème possède-t-il une solution ? si oui, laquelle ? si non, pourquoi ?
3. Dans cette question, les gobelets contiennent respectivement 14, 12, 18 et 21 jetons. La boîte contient 22 jetons. Le problème possède-t-il une solution ? si oui, laquelle ? si non, pourquoi ?
4. Dans cette question, les gobelets contiennent respectivement 13, 17, 5 et 16 jetons. Donner deux quantités distinctes de jetons que l'enseignant peut mettre dans la boîte et qui donnent des solutions au problème posé. Résoudre ces problèmes.

Partie B : Etude théorique de la situation

On appelle a , b , c , d les nombres respectifs de jetons dans les gobelets, et A le nombre de jetons dans la boîte.

1. On propose $a=15$, $b=12$, $c=18$ et $d=11$. Donner toutes les valeurs qu'il est possible de donner à A pour que le problème puisse être résolu. Justifier.

Question 1. Il s'agit de vérifier que le candidat a bien compris la situation en lui faisant résoudre un exemple.

Question 2. Premier problème, le nombre de jetons dans la boîte n'est pas assez grand pour compléter les gobelets.

Question 3. Second problème, le nombre de jetons dans la boîte ne permet pas un partage équitable.

Question 4. Il s'agit pour le candidat d'identifier que le nombre de jetons dans la boîte qui donne une solution au problème n'est pas unique. Cela prépare à l'étude théorique de la situation (Partie B).

Dans cette partie, le candidat est amené à généraliser les résultats de la partie A. Cette étude permet également d'envisager des procédures de résolution qui seront abordées dans la partie suivante.

Question 1. Il s'agit de généraliser la

2. On suppose que a est le plus grand des nombres a, b, c, d . Donner toutes les valeurs possibles de A en fonction de a, b, c et d .
3. Le nombre total N de jetons peut-il être quelconque ? Justifier.
4. On suppose que la situation admet une solution. Le nombre écrit au début sur chacun des gobelets peut-il être quelconque par rapport à N ?
5. On suppose que la situation admet une solution. Quel est le nombre de jetons par gobelet après répartition en fonction de N ?
6. Exprimer, en fonction de N, a, b, c et d , le nombre de jetons à ajouter dans chaque gobelet.

question 4 de la partie A.

Question 2. Il s'agit d'exprimer de manière générale (algèbre) les valeurs admissibles de A , pour anticiper une procédure élève (voir question C.1 et C.2).

Question 3. Généralisation sur le nombre total de jetons pour que la situation admette une solution.

Question 4. Généralisation sur le nombre de jeton initial par gobelet.

Question 5. Généralisation des situations admettant une solution. Cette question permet d'anticiper une procédure (voir, dans la partie C, les questions 1c et 2).

Question 6. Encore une généralisation qui permet de donner de façon théorique une procédure.

Partie C : Différentes mises en situation

1. L'enseignant propose les valeurs suivantes : $a=25, b=14, c=19, d=21$ et $A=37$.

Dans un premier temps, les élèves peuvent manipuler effectivement les jetons de la boîte A **sans pourtant pouvoir retirer ceux qui sont déjà présents dans les gobelets**.

- a) Décrire une procédure attendue des élèves basée sur la manipulation.
- b) Quels sont les moyens de validation dont dispose un élève pour s'assurer qu'il a réussi ?

Dans un second temps, les élèves n'ont plus recours à la manipulation effective, ils doivent simuler la situation.

- c) Décrire une procédure attendue des élèves et la traduire en calcul.
2. Quelle connaissance mathématique permet de résoudre le problème avec les données suivantes : $a=25, b=14, c=19, d=21$ et $A=1\ 337$?
3. L'enseignant ajoute un gobelet vide en plus des quatre déjà partiellement remplis et il change la valeur de A en ajoutant ou enlevant des jetons à ceux qui sont déjà dans la boîte.
- a) Quelle serait la valeur minimale de A pour que le problème admette une solution ?
- b) Discuter le cas où l'enseignant ajouterait 100 jetons dans la boîte.
4. À l'aide des exemples étudiés, citer trois éléments de la situation qui peuvent avoir une influence sur les procédures mises en œuvre par les élèves.

Dans cette partie, le candidat est amené à réfléchir sur les procédures mathématiques pouvant être mises en œuvre par les élèves selon leurs connaissances.

Question 1a. La manipulation est une procédure intéressante car elle permet effectivement de trouver une solution et de créer une image mentale en vue d'abstraire le résultat compléter les gobelets pour avoir égalité puis répartir ce qu'il reste équitablement.

Question 1b Il est important que l'élève vise une autonomie en ayant des moyens de validation de ses résultats.

Question 1c. La manipulation n'est plus possible. Les élèves doivent anticiper le résultat par calcul. Quels langages ? Quels calculs ? cette question est en écho de la question 2 de la partie B.

Question 2. Il s'agit pour le candidat de reconnaître que cette procédure correspond à l'étude théorique (partie B, question 5).

Question 3: changement sur deux paramètres: nombre de gobelets et quantité dans la réserve, on retrouve un cas où il n'y a pas de solution (étude théorique partie B, questions 3, 'et 5)

Question 4: bilan de la situation qui peut être proposé à différents niveaux de connaissances suivant les éléments choisis.