Avignon Université - UFR STS
Portails Math-Info/Math-Physique L1 S1

Année 2022/2023
Analyse 1

Corrigé du CC1

Exercice 1. a) Exprimer $f(x) = |x| + |x+3|$ sous la forme $ax+b$ en distinguant trois cas, selon la position du nombre réel x par rapport à -3 et 0.

- Premier cas : $x \leq -3$. Alors $x+3 \leq 0$, donc $|x+3| = -(x+3)$. On a de plus $|x| = -x$, car $x \leq 0$. Dans ce cas,
$$f(x) = (-x) + (-(x+3)) = -2x - 3\,.$$
- Deuxième cas : $-3 < x < 0$. On a encore $|x| = -x$; $x+3 > 0$ donc $|x+3| = x+3$. Dans ce cas,
$$f(x) = (-x) + (x+3) = 3\,.$$
- Troisième cas : $x \geq 0$. Alors $|x| = x$ et $|x+3| = x+3$. Dans ce cas,
$$f(x) = x + (x+3) = 2x+3\,.$$

b) Résoudre l'équation $|x| + |x+3| = 4$.
Pour $x \in]-\infty, -3]$, on a les équivalences
$$f(x) = 4 \iff -2x-3 = 4 \iff -2x = 7 \iff x = -7/2\,.$$
L'équation a donc dans l'intervalle $]-\infty,-3]$ une solution, qui est $-7/2$.
Pour $x \in]-3,0[$, $f(x) = 3$ donc l'équation n'a pas de solution dans l'intervalle $]-3,0[$.
Pour $x \in [0,+\infty[$, on a les équivalences
$$f(x) = 4 \iff 2x+3 = 4 \iff 2x = 1 \iff x = 1/2\,.$$
L'équation a donc dans l'intervalle $[0,+\infty[$ une solution, qui est $1/2$.
Conclusion : l'équation a deux solutions dans $\mathbb{R}$: $-7/2$ et $1/2$.

Exercice 2. a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\sqrt{x-2} < 1$.
Pour que $\sqrt{x-2}$ soit défini, on doit avoir $x \geq 2$. La fonction carré étant strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, on a pour $x \geq 2$,
$$\sqrt{x-2} < 1 \iff (\sqrt{x-2})^2 < 1^2 \iff x-2 < 1 \iff x < 3$$
L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc l'intervalle $[2,3[$.

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt[3]{x^2} = 2x$.
On a les équivalences
$$\sqrt[3]{x^2} = 2x \iff x^2 = (2x)^3 \iff x^2 = 8x^3 \iff x^2(8x-1) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } 8x-1 = 0$$
L'équation a donc deux solutions : 0 et $1/8$.

Exercice 3. On considère les fonctions $u : x \mapsto \sqrt{x}$ et $v : x \mapsto x^2 - 4x + 3$.

a) Quels sont les ensembles de définition de u et de v ?

Ensemble de définition de u : $D_u = \mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$; ensemble de définition de v : $D_v = \mathbb{R}$.

b) Déterminer l'ensemble de définition de $v \circ u$ et calculer $v \circ u(x)$.

$D_{v\circ u} = \{x \in D_u \,|\, u(x) \in D_v\} = D_u = \mathbb{R}_+$, car $D_v = \mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}_+$,

$$v \circ u(x) = v(u(x)) = v(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 - 4\sqrt{x} + 3 = x - 4\sqrt{x} + 3\,.$$

c) Déterminer l'ensemble de définition de $u \circ v$ et calculer $u \circ v(x)$.

$D_{u\circ v} = \{x \in D_v \,|\, v(x) \in D_u\} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 - 4x + 3 \geq 0\}$. L'équation du second degré $x^2 - 4x + 3 = 0$ a pour discriminant $\Delta = 16 - 12 = 4$; les solutions de cette équation sont

$$x_1 = \frac{4 - \sqrt{4}}{2} = \frac{4-2}{2} = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{4+\sqrt{4}}{2} = \frac{4+2}{2} = 3$$

On a donc $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$, et $x^2 - 4x + 3 \geq 0$ si et seulement si $x \leq 1$ ou $x \geq 3$. Donc

$$D_{u\circ v} =]-\infty, 1] \cup [3, +\infty[$$

Pour $x \in D_{u\circ v}$, $u \circ v(x) = u(v(x)) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$.

Exercice 4. On considère la fonction rationnelle $g : x \mapsto \dfrac{x^4 - x^3}{(x^2-1)(x^2+2)}$.

a) Déterminer l'ensemble de définition de g.

$D_g = \{x \in \mathbb{R} \,|\, (x^2-1)(x^2+2) \neq 0\}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 2 > 0$, donc

$$(x^2-1)(x^2+2) = 0 \iff x^2 - 1 = 0 \iff (x-1)(x+1) = 0 \iff x = 1 \text{ ou } x = -1\,.$$

Ainsi $D_g = \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$.

b) Déterminer la limite en $-\infty$ de g.

$$g(x) = \frac{x^4(1 - \frac{1}{x})}{x^2(1-\frac{1}{x^2})x^2(1+\frac{2}{x^2})} = \frac{x^4(1-\frac{1}{x})}{x^4(1-\frac{1}{x^2})(1+\frac{2}{x^2})} = \frac{1-\frac{1}{x}}{(1-\frac{1}{x^2})(1+\frac{2}{x^2})}$$

Lorsque x tend vers $-\infty$, $1 - \dfrac{1}{x}$, $1 - \dfrac{1}{x^2}$ et $1 + \dfrac{2}{x^2}$ tendent vers 1, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 1$.

c) Trouver une expression simplifiée de $g(x)$, puis déterminer $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$.

Pour tout $x \in D_g$,

$$g(x) = \frac{x^3(x-1)}{(x-1)(x+1)(x^2+2)} = \frac{x^3}{(x+1)(x^2+2)}.$$

Lorsque x tend vers 1, x^3 tend vers 1, $(x+1)$ tend vers 2 et (x^2+2) tend vers 3, donc $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = \dfrac{1}{6}$.

Exercice 5. On considère la fonction $h : x \mapsto \cos(\arcsin(x))$.

a) Donner l'ensemble de définition D_h de h, et montrer que la fonction h est paire.

L'ensemble de définition de cos étant $\mathbb{R}$, D_h est égal à l'ensemble de définition de arcsin, donc $D_h = [-1, 1]$. Pour tout $x \in [-1, 1]$, $-x \in [-1, 1]$ et

$$\begin{aligned} h(-x) &= \cos(\arcsin(-x)) \\ &= \cos(-\arcsin(x)) \qquad \textit{car la fonction } \arcsin \textit{ est impaire} \\ &= \cos(\arcsin(x)) = h(x) \qquad \textit{car la fonction } \cos \textit{ est paire} \end{aligned}$$

Donc h est paire.

b) Soit $x \in D_h$. On pose $a = \arcsin(x)$. Montrer que

$$(\cos a)^2 = 1 - x^2 \qquad \text{et} \qquad \cos a \geq 0\,.$$

En déduire une expression simplifiée de $h(x)$.

Par définition de $a = \arcsin(x)$, $\sin a = x$ et $a \in [-\pi/2, \pi/2]$. Or $(\cos a)^2 + (\sin a)^2 = 1$, donc

$$(\cos a)^2 = 1 - (\sin a)^2 = 1 - x^2\,.$$

De plus $\cos a \geq 0$, car $a \in [-\pi/2, \pi/2]$. Donc $h(x) = \cos a = \sqrt{1 - x^2}$.