

CC3

Documents, calculatrices et portables interdits. Chaque réponse doit être accompagnée d'une justification.

Durée : 1h

Exercice 1. On considère les intégrales suivantes.

$$I = \int_1^3 \frac{s^2 - 3s + 3}{s^2} ds \quad , \quad J = \int_0^2 \frac{t^2 - t + 1}{(t+1)^2} dt .$$

a) Calculer I .

b) A l'aide d'un changement de variable, montrer l'égalité $J = I$.

Exercice 2. Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale

$$K = \int_0^1 (x+3)e^{2x} dx .$$

Exercice 3. Résoudre le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = \left(-t + \frac{1}{t}\right)y & \text{sur l'intervalle }]0, +\infty[\\ y(1) = 2 \end{cases} .$$

Exercice 4. Résoudre l'équation différentielle

$$(E1) \quad y' = 2y + \cos(3t) .$$

Indication. On pourra chercher une solution particulière de (E1) de la forme $y_0 : t \mapsto a \cos(3t) + b \sin(3t)$, où a et b sont deux constantes réelles.

Exercice 5. a) Résoudre l'équation différentielle

$$(E2) \quad y'' - 2y' + 2y = 0 .$$

b) Déterminer l'unique solution de (E2) telle que $\begin{cases} y(0) = 2 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$.