MUCMC
MÁSTER UNIVERSITARIO EN CÁLCULO Y MODELIZACIÓN CIENTÍFICA
UNIVERSIDAD DE ALICANTE

Análisis Matemático Avanzado y Aplicaciones

Propiedades fundamentales de las funciones analíticas a partir de su visualización gráfica

UNIVERSITAT D'ALACANT
Facultat de Ciències
Facultad de Ciencias

© Juan Matías Sepulcre

Departamento de Matemáticas

Contenidos

Contenidos

Introducción

Mientras que las gráficas de las funciones reales de variable real se pueden representar en el plano, y las gráficas de las funciones reales de dos variables reales se pueden representar en el espacio, la gráfica de una función compleja de una variable compleja $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, dada por

$$\{(z, f(z)) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} : z \in D\},$$

está en $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ que tiene 4 dimensiones reales. Sin embargo, nuestra imaginación está entrenada para 3 dimensiones. Por tanto, para permanecer en 3 dimensiones, necesitamos un sustituto de la cuarta dimensión.

Contenidos

Gráfica de la transformación

Dado $f : S \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, dado que la representación gráfica de un número complejo $z = x + iy$ en un plano resulta un punto de coordenadas (x, y), para visualizar la relación funcional $z \mapsto w = f(z)$ se hace necesario contar con dos planos: uno para los valores complejos del dominio S y otro para el conjunto de las imágenes obtenidas al aplicar $w = f(z)$ a dicho conjunto S. Al primer plano se le denomina *plano z* y al segundo, *plano w.*

Gráfica de la transformación

Dado $f : S \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, dado que la representación gráfica de un número complejo $z = x + iy$ en un plano resulta un punto de coordenadas (x, y), para visualizar la relación funcional $z \mapsto w = f(z)$ se hace necesario contar con dos planos: uno para los valores complejos del dominio S y otro para el conjunto de las imágenes obtenidas al aplicar $w = f(z)$ a dicho conjunto S. Al primer plano se le denomina *plano z* y al segundo, *plano w*.

Cuando z varía o describe una trayectoria sobre un conjunto S en el *plano z*, el conjunto de puntos que son imágenes en el *plano w* muestra cómo actúa la función f en dicha trayectoria o en los puntos de S. A este proceso por el cual una función compleja transforma los puntos del plano se le llama transformación o mapeo.

Ejemplo

Consideremos la función $f(z) = z^2$. Si $z = x + iy$, sabemos que

$$z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi \;\rightarrow\; \operatorname{Re} z = x^2 - y^2, \;\; \operatorname{Im} z = 2xy.$$

De esta manera, las rectas $x = k,\; k \in \mathbb{R}$ se transforman en

$$u = k^2 - y^2,\; v = 2ky \text{ con } y \in \mathbb{R}.$$

Se obtienen pues parábolas de tipo

$$u = k^2 - \left(\frac{v}{2k}\right)^2 \;\text{ si } k \neq 0 \quad \text{y} \quad u \leq 0,\; v = 0 \;\text{ si } k = 0.$$

Análogamente, las rectas $y = k,\; k \in \mathbb{R}$, se transforman en

$$u = x^2 - k^2,\; v = 2kx \;\text{ con } x \in \mathbb{R},$$

obteniendo parábolas de tipo

$$u = \left(\frac{v}{2k}\right)^2 - k^2 \;\text{ si }\; k \neq 0 \quad \text{y} \quad u \leq 0,\; v = 0 \text{ si } k = 0.$$

Dicho de otra manera, la función $z \mapsto z^2$ transforma rectángulos de lados paralelos en rectángulos de lados parabólicos.

El punto débil de este tipo de representaciones (gráfica de la transformación) es que no está claro simplemente mirando el dibujo qué punto de las curvas originales (las rectas) corresponde a los puntos de las imágenes (los situados en las parábolas).

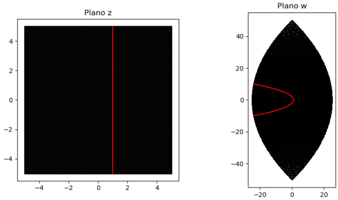

Figura: Transformación del plano mediante la función $f(z) = z^2$

Cada función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto f(z)$ se puede ver como

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad (x, y) \to (\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z),$$

por lo que es posible representar las partes reales e imaginarias de manera independiente.

En la siguiente figura se representan las partes reales e imaginarias del logaritmo complejo.

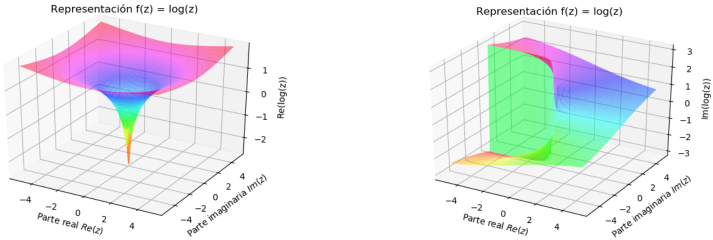

Figura: Partes real e imaginaria de $f(z) = \operatorname{Log} z$

Un tradicional mecanismo para obtener información sobre la visualización de una función compleja es recurrir al así llamado paisaje analítico (*analytic landscape* en inglés) o relieve de la superficie módulo que consiste en hacer la gráfica de la función módulo. En este caso, si $f : D \subset \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$, el paisaje analítico hace la gráfica de

$$\{(z, |f(z)|) \in \hat{\mathbb{C}} \times \hat{\mathbb{R}_+} : z \in D\}.$$

El módulo sí nos permite visualizar las singularidades (no evitables) de la función.

Ejemplo

El módulo sí nos permite visualizar las singularidades (no evitables) de la función. Por ejemplo, si consideramos la función $f(z) = e^z$ con $z = x + iy$, tenemos que $|f(z)| = |e^z| = e^x$. De hecho, en la figura se puede apreciar que el corte de $f(z) = |e^z|$ con planos paralelos al eje x corresponden con la función exponencial real.

Por otro lado, la función Gamma $f(z) = \Gamma(z)$ es una función meromorfa con polos simples en $z = -n$ con $n = 0, 1, 2, \ldots$

Sin embargo, con estos paisajes no se tiene en cuenta el argumento.

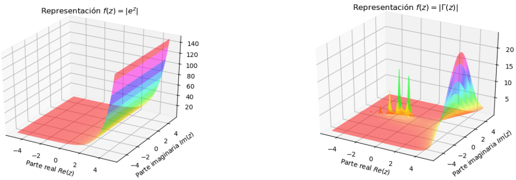

Figura: Representación de $f(z) = |e^z|$ y $f(z) = |\Gamma(z)|$

En la era de las ilustraciones en blanco y negro, se recurría a dotar a los paisajes anteriores de las líneas de argumento constante donde el argumento se indicaba numéricamente de forma explícita. La tecnología actual nos permite lograr el mismo efecto, pero mucho mejor, usando colores, lo que nos lleva a los paisajes analíticos coloreados.

En la era de las ilustraciones en blanco y negro, se recurría a dotar a los paisajes anteriores de las líneas de argumento constante donde el argumento se indicaba numéricamente de forma explícita. La tecnología actual nos permite lograr el mismo efecto, pero mucho mejor, usando colores, lo que nos lleva a los paisajes analíticos coloreados.

Técnicamente, si definimos la fase de un número complejo no nulo z como $\psi(z) := \frac{z}{|z|}$ (es decir $e^{i\phi}$, donde ϕ es un argumento de z), entonces la fase vive en el círculo unidad $\mathbb{T}$ y los puntos del círculo unidad se pueden codificar por colores (el color es un candidato ideal para visualizar la fase y, consecuentemente, el argumento), y si es con colores saturados mucho mejor pues se distinguen más... esto es la componente de matiz del modelo HSV: matiz, saturación y brillo, que se usa en progresiones de color. Justamente el matiz es el que se representa por una región circular con ángulos entre 0 y 360: ángulo 0 es rojo, 60 amarillo y 120 es verde, 240 azul).

Así, si $f : D \subset \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$, el paisaje analítico coloreado de f hace la gráfica

$$\{(z, |f(z)|, \psi(f(z))) \in \hat{\mathbb{C}} \times \hat{\mathbb{R}_+} \times \hat{\mathbb{T}} : z \in D\}.$$

Aquí $|f(z)|$ se interpreta como la altura, y la fase $\psi(f(z))$ determina su color. Además, el círculo unidad extendido $\hat{\mathbb{T}} = \mathbb{T} \cup \{0, \infty\}$ se identifica con el círculo de colores extendido al negro (correspondiente al 0) y al blanco (correspondiente al infinito).
Notemos que un color concreto para una fase $\psi(z)$ (en el círculo unidad) está también unido a un argumento de z en un intervalo $[-\pi, \pi)$.

Dominio de colores o retrato de la fase (phase portrait)

A veces se hace difícil discernir el comportamiento de una función o de otra a través únicamente de estos gráficos tridimensionales. Por ejemplo, el rango del módulo de una función puede ser bastante grande (es decir, varía sobre un amplio rango) y en ese caso hay que recurrir a escalas logarítmicas del eje vertical (algo que también es natural porque $\ln|f|$ y $\arg f$ son funciones armónicas conjugadas). Sin embargo, puede ocurrir muchas veces que algunas partes esenciales (como los ceros) están ocultas o invisibles en los valles detrás de las montañas o cubiertos por torres de polos (es decir, que se hace difícil detectarlos). En ese caso, lo mejor que se puede hacer es mirar estos paisajes desde arriba, lo que da lugar a los phase portrait que representan el argumento (o la fase) de la función codificado en colores. En general, el argumento (o la fase) es más idóneo que el módulo para entender el comportamiento de una función y reconstruir sus propiedades.
Técnicamente, si $f : D \subset \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$, lo que hacemos es representar la gráfica de la fase de f

$$\{(z, \psi(f(z))) \in \hat{\mathbb{C}} \times \hat{\mathbb{T}} : z \in D\},$$

donde $\hat{\mathbb{T}} = \mathbb{T} \cup \{0, \infty\}$ se identifica con el círculo de colores extendido al negro (correspondiente al 0) y al blanco (correspondiente de manera intuitiva al infinito).

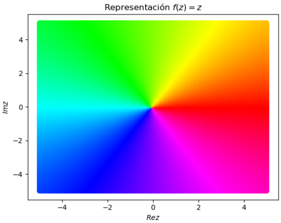

Figura: La rueda de color y un retrato de fase simple $f(z) = z$

Las enhanced phase portraits incorpora a las gráficas anterior líneas de contorno de la función módulo y líneas isocromáticas en las que el argumento (o la fase) es constante. Veremos que estas líneas isocromáticas (a modo de curvas de nivel) coinciden con las curvas de máximo crecimiento-decrecimiento de $|f|$. Los conjuntos isocromáticos se definen por

$$\{z \in D : \psi(f(z)) = c\},$$

con $c \in \hat{\mathbb{T}}$.

Dominio de colores mejorado (enhanced phase portrait)

Las enhanced phase portraits incorpora a las gráficas anterior líneas de contorno de la función módulo y líneas isocromáticas en las que el argumento (o la fase) es constante. Veremos que estas líneas isocromáticas (a modo de curvas de nivel) coinciden con las curvas de máximo crecimiento-decrecimiento de $|f|$. Los conjuntos isocromáticos se definen por

$$\{z \in D : \psi(f(z)) = c\},$$

con $c \in \hat{\mathbb{T}}$.

Son gráficos útiles para entender cómo cambia una función en diferentes partes de su dominio. Si las curvas están muy juntas, indica que la función está cambiando rápidamente en esa región del dominio. En cambio, si las curvas de nivel están muy separadas, la función varía más lentamente. La densidad y forma de las curvas de nivel indican la presencia de puntos críticos ayudando a visualizar características importantes de la función.

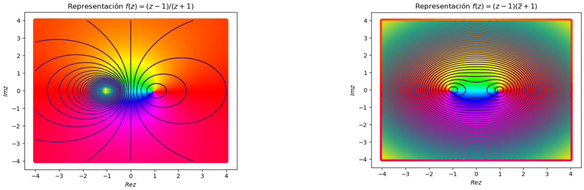

Figura: Representación $f(z) = \frac{z-1}{z+1}$ y $f(z) = (z-1)(\overline{z}+1)$ con curvas de nivel

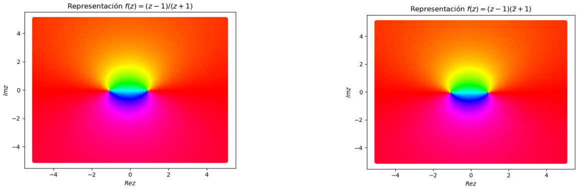

Figura: Representación $f(z) = \frac{z-1}{z+1}$ y $f(z) = (z-1)(\overline{z}+1)$ sin curvas de nivel

Ejercicio

Las funciones $f(z) = \frac{z-1}{z^2+z-1}$ y $g(z) = \frac{z-1}{\bar{z}^2+\bar{z}-1}$ tienen la misma fase (excepto en polos y ceros), pero son completamente diferentes. Las gráficas phase portraits deben acompañarse en este caso de las líneas de contorno del módulo.

Lo bueno es que para la clase de funciones analíticas este método del dominio de colores (con o sin curvas de nivel) es muy apropiado y los gráficos caracterizan completamente a tales funciones (salvo factor de escala positivo).

Lo bueno es que para la clase de funciones analíticas este método del dominio de colores (con o sin curvas de nivel) es muy apropiado y los gráficos caracterizan completamente a tales funciones (salvo factor de escala positivo).

Teorema

Si $f, g : D \to \mathbb{C}$ son analíticas y tienen la misma fase sobre un conjunto abierto $U \subset D$, entonces g es un múltiplo positivo de f, es decir, $g(z) = cf(z)$ para todo $z \in D$ y alguna constante positiva c.

Lo bueno es que para la clase de funciones analíticas este método del dominio de colores (con o sin curvas de nivel) es muy apropiado y los gráficos caracterizan completamente a tales funciones (salvo factor de escala positivo).

Teorema

Si $f, g : D \to \mathbb{C}$ son analíticas y tienen la misma fase sobre un conjunto abierto $U \subset D$, entonces g es un múltiplo positivo de f, es decir, $g(z) = cf(z)$ para todo $z \in D$ y alguna constante positiva c.

PRUEBA: Si $f \equiv 0$, la afirmación es obvia. En caso contrario, existe un abierto $V \subset U$ tal que f no se anula en V. Por tanto, el cociente $\frac{g}{f}$ es analítica en V. Si escribimos $f = |f|\psi(f)$ y $g = |g|\psi(g)$ con $\psi(f) = \psi(g)$, entonces $\frac{g}{f}$ solo alcanza valores reales positivos sobre V, lo que significa que $\frac{g}{f}$ es una constante positiva sobre D como consecuencia de que:
Si h es analítica en D y si una de las funciones $|h|$, $\operatorname{Re} h$ o $\operatorname{Im} h$ es constante sobre un subconjunto abierto de D, entonces h es constante sobre D.
En nuestro caso, es $\operatorname{Im} h = 0$ sobre V.

Contenidos

Singularidad aislada y no aislada de una función

Diremos que una función f compleja de variable compleja tiene una singularidad en z_0 si f no es analítica en z_0 pero es analítica en algún punto de todo entorno de z_0. Esta singularidad z_0 se dice que es aislada si existe un entorno perforado de z_0 de la forma $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < \varepsilon\}$ donde f es analítica. En caso contrario diremos que z_0 es una singularidad no aislada.

Singularidad aislada y no aislada de una función

Diremos que una función f compleja de variable compleja tiene una singularidad en z_0 si f no es analítica en z_0 pero es analítica en algún punto de todo entorno de z_0. Esta singularidad z_0 se dice que es aislada si existe un entorno perforado de z_0 de la forma $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < \varepsilon\}$ donde f es analítica. En caso contrario diremos que z_0 es una singularidad no aislada.

1. La función $f(z) = \frac{1}{z-1}$ presenta una singularidad aislada en $z_0 = 1$.
2. La función $f(z) = \operatorname{Log} z$ presenta singularidades no aisladas en cualquier punto z_0 del semieje real negativo ($z_0 \leq 0$).
3. La función $f(z) = |z|$ no tiene singularidades en el sentido de esta definición, ya que f no es analítica en ningún punto.
4. La función $f(z) = \frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{z}\right)}$ presenta singularidades aisladas en los puntos $z_k = \frac{1}{k\pi}$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Además $z_0 = 0$ no es una singularidad aislada, ya que no podemos encontrar un entorno de 0 donde la única singularidad sea precisamente 0.

Tipos de singularidad aislada

Sea z_0 una singularidad aislada de una función f compleja de variable compleja y $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ su desarrollo de Laurent centrado en z_0. Entonces diremos que:

a) f tiene una singularidad evitable en z_0 si $a_n = 0$ para cada $n = -1, -2, \ldots$.

b) f tiene un polo de orden m en z_0 si m es el mayor número natural tal que $a_{-m} \neq 0$ (un polo de orden 1 es también llamado polo simple).

c) f tiene una singularidad esencial en z_0 si $a_n \neq 0$ para una infinidad de valores negativos de n.

Teorema de clasificación de singularidades

Sea z_0 una singularidad aislada de una función f compleja de variable compleja. Entonces:

i) z_0 es una singularidad evitable de f si, y solo si, $\lim_{z\to z_0} f(z) \in \mathbb{C}$;

ii) z_0 es un polo de orden m de f si, y solo si, $\lim_{z\to z_0} f(z)(z-z_0)^m \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. También, z_0 es un polo de f si, y solo si, $\lim_{z\to z_0} |f(z)| = \infty$;

iii) z_0 es una singularidad esencial de f si, y solo si, no existe $\lim_{z\to z_0} f(z)$ en $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\cup\{\infty\}$ (esto es, no es posible que $\lim_{z\to z_0} f(z) \in \mathbb{C}$ o $\lim_{z\to z_0} |f(z)| = \infty$).

Ejemplos

1. La función $\dfrac{\operatorname{sen} z}{z}$ presenta una singularidad evitable en $z = 0$.
2. La función $\dfrac{1}{(z-1)^2}$ presenta un polo de orden 2 en $z = 1$.
3. $z = 0$ es una singularidad esencial de $e^{1/z}$.

Ejemplo 4

La función $f(z) = \frac{1}{z(e^z - 1)}$ presenta singularidades aisladas en $z_0 = 0$ y $z_k = 2\pi k i$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. En $z_0 = 0$ la función f presenta un polo de orden 2, ya que $\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} zf(z) = \infty$ y

$$\lim_{z\to 0} f(z)z^2 = \lim_{z\to 0} \frac{z}{e^z - 1} = \lim_{z\to 0} \frac{1}{e^z} = 1.$$

Por otra parte, para $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, se tiene

$$\lim_{z\to z_k} f(z)(z - z_k) = \lim_{z\to 2\pi k i} \frac{1}{e^z - 1 + ze^z} = \frac{1}{2\pi k i} \neq 0$$

y, por tanto, f tiene polos simples en z_k.

Ejemplo 5

La función $f(z) = z^3 \cosh\left(\frac{1}{z}\right)$ presenta una singularidad aislada en $z = 0$. Además, teniendo el cuenta el desarrollo en serie de Maclaurin de la conocida función $\cosh z$, llegamos a que

$$f(z) = z^3 + \frac{1}{2}z + \frac{1}{4!}\frac{1}{z} + \frac{1}{6!}\frac{1}{z^3} + \dots$$

y, por tanto, $z = 0$ es una singularidad esencial de $f(z)$.

MUCMC
MÁSTER UNIVERSITARIO EN CÁLCULO Y MODELIZACIÓN CIENTÍFICA
UNIVERSIDAD DE ALICANTE

Teorema de Casorati-Weierstrass

Si una función $f : U \to \mathbb{C}$ tiene una singularidad esencial en z_0, entonces $f(D(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\})$ es denso en $\mathbb{C}$ para cualquier $\varepsilon > 0$ (cumpliendo $D(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\} \subset U$); esto es, la imagen mediante f de cualquier entorno perforado de z_0 (en el dominio de la función) es densa en $\mathbb{C}$.

Teorema de Casorati-Weierstrass

Si una función $f : U \to \mathbb{C}$ tiene una singularidad esencial en z_0, entonces $f(D(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\})$ es denso en $\mathbb{C}$ para cualquier $\varepsilon > 0$ (cumpliendo $D(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\} \subset U$); esto es, la imagen mediante f de cualquier entorno perforado de z_0 (en el dominio de la función) es densa en $\mathbb{C}$.

Nota: Del teorema de Casorati-Weierstrass se deduce que si f tiene una singularidad esencial en z_0 y $w \in \mathbb{C}$, existe una sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ (puntos incluidos en el dominio de la función) tal que $\{z_n\} \to z_0$ y $\{f(z_n)\} \to w$.

Teorema

Si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es una función entera no constante, entonces su conjunto imagen en denso en $\mathbb{C}$ (es decir, la clausura de $f(\mathbb{C}) = \{w \in \mathbb{C} : w = f(z) \text{ para algún } z \in \mathbb{C}\}$ es $\mathbb{C}$).

Imagen densa en $\mathbb{C}$

Teorema

Si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es una función entera no constante, entonces su conjunto imagen en denso en $\mathbb{C}$ (es decir, la clausura de $f(\mathbb{C}) = \{w \in \mathbb{C} : w = f(z)$ para algún $z \in \mathbb{C}\}$ es $\mathbb{C}$).

PRUEBA: Si f es un polinomio no constante, entonces es claro que $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$. En efecto, si P es un polinomio no constante y tomamos un número complejo arbitrario $w \in \mathbb{C}$, entonces el polinomio no constante $Q(z) = P(z) - w$, $z \in \mathbb{C}$, tiene al menos una raíz (por el teorema fundamental del álgebra), lo que significa que $\{w \in \mathbb{C} : P(z) = w$ para algún $z \in \mathbb{C}\} = \mathbb{C}$.

Si f es una función entera no polinomial, sabemos que ∞ es una singularidad esencial de f o, equivalentemente, $z = 0$ es una singularidad esencial de $g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$. Por tanto, el teorema de Casorati-Weierstrass implica que $g(D(0, r) \setminus \{0\})$ es denso en $\mathbb{C}$ para cualquier $r > 0$, lo que también conlleva que $f(\mathbb{C})$ es denso en $\mathbb{C}$.

MUCMC MÁSTER UNIVERSITARIO EN CÁLCULO Y MODELIZACIÓN CIENTÍFICA UNIVERSIDAD DE ALICANTE

Pequeño teorema de Picard

Toda función entera no constante toma cualquier valor complejo con a lo sumo una excepción. En otras palabras, si una función entera omite dos valores entonces es constante.

Pequeño teorema de Picard

Toda función entera no constante toma cualquier valor complejo con a lo sumo una excepción. En otras palabras, si una función entera omite dos valores entonces es constante.

Teorema grande de Picard

Supongamos que f es holomorfa en $D(z_0, r)$ con $r > 0$. Si f tiene una singularidad esencial en z_0, entonces la función toma infinitas veces cada valor complejo en cualquier entorno reducido $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < s\}$, con $s < r$, con a lo sumo una excepción.

Contenidos

Representación y propiedades de algunas funciones elementales

Practicar con:

- Funciones polinomiales
- Funciones racionales.
- Series de potencias.
- Funciones trigonométricas e hiperbólicas.
- Función gamma.
- Función zeta de Riemann

¿Qué pasa con estas funciones?

- Función exponencial compleja.
- Funciones logarítmicas.
- Funciones potencia.