概率论与数理统计(第四版)

2017 年 10 月 28 日

第二章　随机变量及其分布

§1　随机变量

§2　离散型随机变量及其分布律

问题 2.1

X	20	5	0
p_k	0.0002	0.0010	0.9989

问题 2.6 以X记“同一时刻被使用的设备台数”, 则

$$P\{X=k\}=\binom{5}{k}(0.1)^k(0.9)^{5-k}$$

(1) $P\{X=2\}=\binom{5}{2}(0.1)^2(0.9)^3=0.0729$

(2) $1-\sum_{k=0}^{2}P\{X=k\}=0.00856$

(3) $1-\sum_{k=4}^{5}P\{X=k\}=0.99954$

(4) $1-P\{X=0\}=0.40951$

问题 2.11 以X记“此地区每年撰写此类文章的篇数”, 则$X\sim\pi(6)$, 故明年没有此类文章的概率为

$$P\{X=0\}=\left.\frac{\lambda^0\mathrm{e}^{-\lambda}}{0!}\right|_{\lambda=6}=0.00248.$$

问题 2.16 出事故的车辆数X服从二项分布, 但n很大且p很小时, 可近似认为其服从泊松分布, 故令$\lambda=np=1000\times0.0001=0.1$, 则有$X\sim\pi(0.1)$, 从而

$$P\{X\geqslant2\}=1-P\{X=0\}-P\{X=1\}=1-\mathrm{e}^{-0.1}-0.1\cdot\mathrm{e}^{-0.1}=0.00468.$$

§3　随机变量的分布函数

§4　连续型随机变量及其概率密度

问题 2.21　(1) 分布函数

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<1;\\ 2x-4+\dfrac{2}{x}, & 1\leqslant x<2;\\ 1, & x\geqslant2.\end{cases}$$

(2) 分布函数

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ \dfrac{x^2}{2}, & 0\leqslant x<1;\\ -\dfrac{x^2}{2}+2x-1, & 1\leqslant x<2;\\ 1, & x\geqslant2.\end{cases}$$

问题 2.26 考虑到$X \sim N(3, 2^2)$, 则有

(1)

$$P\{2 < X \leqslant 5\} = P\{X \leqslant 5\} - P\{X \leqslant 2\} = \Phi(1) - \Phi\left(-\frac{1}{2}\right) = \Phi(1) + \Phi\left(\frac{1}{2}\right) - 1 = 0.53281,$$

$$P\{-4 < X \leqslant 10\} = \Phi\left(\frac{7}{2}\right) - \Phi\left(-\frac{7}{2}\right) = 2\Phi\left(\frac{7}{2}\right) - 1 = 0.99953,$$

$$\begin{aligned} P\{|X| > 2\} &= P\{X < -2\} + 1 - P\{X \leqslant 2\} = 1 + \Phi\left(-\frac{5}{2}\right) - \Phi\left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= 1 + \Phi\left(\frac{1}{2}\right) - \Phi\left(\frac{5}{2}\right) = 0.69767, \end{aligned}$$

$$P\{X > 3\} = 1 - P\{X \leqslant 3\} = 1 - \Phi(0) = 0.5.$$

(2) 即求$1 - P\{X \leqslant c\} = P\{X \leqslant c\}$, 即

$$P\{X \leqslant c\} = \Phi\left(\frac{c-3}{2}\right) = \frac{1}{2},$$

所以有$c = 3$.

(3) 由$P\{X > d\} \geqslant 0.9$, 可知$1 - P\{X \leqslant d\} \geqslant 0.9$, 即$P\{X \leqslant d\} \leqslant 0.1$, 而$\Phi(-1.28155) = 0.1$, 所以

$$d = 2 \times (-1.28155) + 3 = 0.43690.$$

问题 2.31 以A记"指示灯亮绿灯", 那么对于$x \geqslant 0$, 利用全概率公式有

$$P\{X \leqslant x\} = P\{X \leqslant x \mid A\}P\{A\} + P\{X \leqslant x \mid \overline{A}\}P\{\overline{A}\}.$$

这里$P\{A\} = 0.2$, $P\{\overline{A}\} = 0.8$, $P\{X \leqslant x \mid A\} = 1$, 而

$$P\{X \leqslant x \mid \overline{A}\} = \begin{cases} \dfrac{x}{30}, & 0 \leqslant x \leqslant 30; \\ 1, & x > 30. \end{cases}$$

于是

$$P\{X \leqslant x\} = \begin{cases} 0.2 + 0.8\dfrac{x}{30}, & 0 \leqslant x \leqslant 30; \\ 1, & x > 30. \end{cases}$$

由此可得分布函数

$$F(x) = P\{X \leqslant x\} = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 0.2 + 0.8\dfrac{x}{30}, & 0 \leqslant x < 30; \\ 1, & x \geqslant 30. \end{cases}$$

由于其分布函数在$x = 0$处有断点, 所以X不是连续型随机变量, 但部分区间连续, 又导致其不是离散型.

§5 随机变量的函数的分布

问题 2.36 (1) 由于反函数$x = h(y) = \sqrt[3]{y}$是严格单调增加的, 所以可根据公式知其概率密度为

$$f(y) = \frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}} f(\sqrt[3]{y}) (y \neq 0).$$

(2) 对于$x>0$而言, 其反函数$x=h(y)=\sqrt{y}$是严格单调增加的, 所以可根据公式知其概率密度为

$$f(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{y}}\mathrm{e}^{-\sqrt{y}}, & y>0;\\ 0, & y\leqslant 0.\end{cases}$$

第三章　多维随机变量及其分布

§1　二维随机变量

问题 3.1　(1)

$Y \backslash X$	0	1
0	$\frac{25}{36}$	$\frac{5}{36}$
1	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{36}$

(2)

$Y \backslash X$	0	1
0	$\frac{45}{66}$	$\frac{5}{33}$
1	$\frac{5}{33}$	$\frac{1}{66}$

§2　边缘分布

问题 3.6　参见课本第2页中样本空间S_2的8个样本点, X和Y取值情况如下:

样本点	HHH	HHT	HTH	THH	HTT	THT	TTH	TTT
X	2	2	1	1	1	1	0	0
Y	3	2	2	2	1	1	1	0

基于此可得X和Y的联合分布律和边缘分布律为:

$Y \backslash X$	0	1	2	$P\{Y=j\}$
0	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{3}{8}$
2	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$
3	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
$P\{X=i\}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

§3　条件分布

问题 3.11　(1) 边缘分布律:

$$p_{n\cdot} = P\{X=n\} = \frac{\mathrm{e}^{-14}}{n!}\sum_{m=0}^{n} n!\frac{7.14^m 6.86^{n-m}}{m!(n-m)!} = \frac{\mathrm{e}^{-14}}{n!}\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}7.14^m 6.86^{n-m}$$
$$= \frac{\mathrm{e}^{-14}}{n!}(7.14+6.86)^n = \frac{14^n \mathrm{e}^{-14}}{n!}, \qquad n=0,1,2,\ldots.$$

说明X服从参数为14的泊松分布, 即$X\sim\pi(14)$.

$$p_{\cdot m}=P\{Y=m\}=\frac{7.14^m\mathrm{e}^{-14}}{m!}\sum_{n=m}^{+\infty}\frac{6.86^{n-m}}{(n-m)!}=\frac{7.14^m\mathrm{e}^{-14}}{m!}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{6.86^n}{n!}$$
$$=\frac{7.14^m\mathrm{e}^{-14}\mathrm{e}^{6.86}}{m!}=\frac{7.14^m\mathrm{e}^{-7.14}}{m!},\qquad m=0,1,2,\ldots$$

说明Y服从参数为7.14的泊松分布, 即$X\sim\pi(7.14)$.

(2) 条件分布律:

$$P\{Y=m\mid X=n\}=\binom{n}{m}\frac{7.14^m6.86^{n-m}}{14^n}=\binom{n}{m}0.51^m0.49^{n-m},\quad m=0,1,2,\ldots,n.$$
$$P\{X=n\mid Y=m\}=\frac{6.86^{n-m}\mathrm{e}^{-6.86}}{(n-m)!},\quad (n=m,m+1,\ldots)$$

(3) $X=20$时, Y的条件分布律为$\binom{20}{m}0.51^m0.49^{20-m}$, $m=0,1,\ldots,20$.

§4 相互独立的随机变量

问题 3.17 (1) 求出边缘分布律

$$F_X(x)=F(x,+\infty)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\alpha x}, & x\geqslant 0;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

$$F_Y(y)=F(+\infty,y)=\begin{cases}y, & 0\leqslant y\leqslant 1;\\ 1, & y>1;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

由此即可知 $F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$, 从而X, Y相互独立.

(2) 考虑到对于$0<p<1$, 有

$$P\{X=x\}=p^2(1-p)^{x-1}\sum_{y=1}^{\infty}(1-p)^{y-1}=p(1-p)^{x-1},\quad x=1,2,\ldots,$$
$$P\{Y=y\}=p^2(1-p)^{y-1}\sum_{x=1}^{\infty}(1-p)^{x-1}=p(1-p)^{y-1},\quad y=1,2,\ldots.$$

从而$P\{X=x,Y=y\}=P\{X=x\}P\{Y=y\}$, 故$X$, Y相互独立.

§5 两个随机变量的函数的分布

问题 3.21 (1) 由公式知

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)\mathrm{d}x,\quad 0<x<1,\quad x<z<x+1.$$

于是通过示意图可知

$$f_Z(z)=\begin{cases}\int_0^z z\mathrm{d}x=z^2, & 0<z<1;\\ \int_{z-1}^1 z\mathrm{d}x=z(2-z), & 1\leqslant z<2;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

(2) 由公式知

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|x|}f\left(x,\frac{z}{x}\right)\mathrm{d}x,\quad 0<x<1,\quad 0<z<x.$$

画出示意图后可知

$$f_Z(z)=\begin{cases}\displaystyle\int_z^1\frac{1}{x}\left(x+\frac{z}{x}\right)\mathrm{d}x=2(1-z), & 0<z<1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

问题 3.26 由公式可知

$$f_Z(z)=\begin{cases}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}|x|f(x,xz)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-xz}\mathrm{d}x=\frac{1}{1+z^2}, & z>0;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

问题 3.31 (1) 由瑞利分布的概率密度函数

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{4}\mathrm{e}^{-x^2/8}, & x\geqslant 0;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

可知其分布函数为

$$F_X(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-x^2/8}, & x\geqslant 0;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

由于$X_i(i=1,2,3,4,5)$是独立同分布的随机变量，所以有

$$F_{\max}(z)=\begin{cases}\left(1-\mathrm{e}^{-z^2/8}\right)^5, & z\geqslant 0;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(2) 容易知道

$$P\{Z>4\}=1-F_{\max}(z=4)=0.51668.$$

问题 3.36 (1) 容易计算

$$P\{X=2\mid Y=2\}=\frac{P\{X=2,Y=2\}}{P\{Y=2\}}=\frac{0.05}{0.25}=\frac{1}{5},$$
$$P\{Y=3\mid X=0\}=\frac{P\{Y=3,X=0\}}{P\{X=0\}}=\frac{0.01}{0.03}=\frac{1}{3}.$$

(2) $V=\max\{X,Y\}$的分布律为

V	0	1	2	3	4	5
p_k	0	0.04	0.16	0.28	0.24	0.28

以其中一个为例

$$\begin{aligned}P\{V=3\}&=P\{\max\{X,Y\}=3\}\\&=P\{X=3,Y<3\}+P\{X<3,Y=3\}+P\{X=3,Y=3\}=0.15+0.07+0.06=0.28.\end{aligned}$$

(3) $U=\min\{X,Y\}$的分布律为

U	0	1	2	3
p_k	0.28	0.30	0.25	0.17

(4) $W = X + Y$的分布律为

V	0	1	2	3	4	5	6	7	8
p_k	0	0.02	0.06	0.13	0.19	0.24	0.19	0.12	0.05

第四章　随机变量的数字特征

§1　数学期望

问题 4.1　(1) 以X表示取到的单词所包含的字母个数, 则其分布律为

X	2	3	4	9
p_k	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

则期望$E(X)=\dfrac{15}{4}=3.75.$

(2) 以Y表示取到的字母所在单词所包含的字母数, 则其分布律为

Y	2	3	4	9
p_k	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{10}$

则期望$E(Y)=\dfrac{73}{15}=4.87.$

(3) 得到分布律为

X	1	2	3	4	5	7	8	9	10	11	12
p_k	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$

则期望$E(X)=\dfrac{49}{12}=4.08.$

问题 4.6　(1) 容易计算得到

$$\begin{aligned}E(X)&=(-2)\times0.4+0\times0.3+2\times0.3=-0.2,\\E(X^2)&=(-2)^2\times0.4+0^2\times0.3+2^2\times0.3=2.8,\\E(3X^2+5)&=17\times0.4+5\times0.3+17\times0.3=13.4,\\E(3X^2+5)&=3E(X^2)+5=13.4.\end{aligned}$$

(2) 因为$X\sim\pi(\lambda)$, 即

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k\mathrm{e}^{-\lambda}}{k!},\quad k=0,1,2,\ldots.$$

于是有

$$E[1/(X+1)]=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k+1}\cdot\frac{\lambda^k\mathrm{e}^{-\lambda}}{k!}=\frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!}=\frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda}(\mathrm{e}^{\lambda}-1)=\frac{1-\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda}.$$

问题 4.11 因为使用寿命小于1年的概率为

$$P\{X\leqslant1\}=\int_0^1\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-x/4}\mathrm{d}x=1-\mathrm{e}^{-1/4},$$

则$P\{X>1\}=\mathrm{e}^{-1/4}$. 于是赢利的数学期望为

$$100\times\mathrm{e}^{-1/4}-200\times(1-\mathrm{e}^{-1/4})=33.6402.$$

问题 4.16　(1) 写出分布律

X	1	2	$\cdots$	n
p_k	$\frac{1}{n}$	$\frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}$	$\cdots$	$\frac{1}{n}$

所以期望是

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n} i\cdot\frac{1}{n}=\frac{n+1}{2}.$$

(2) 如果不写出X分布律, 这时可假设有随机变量

$$X_1=1,$$
$$X_k=\begin{cases}1, & \text{前}k-1\text{次均未找到合适的钥匙;}\\ 0, & \text{前}k-1\text{次中有一次试开成功.}\end{cases}\qquad k=2,3,\ldots,n.$$

那么$E(X_1)=1$, 同时对于$k=2,3,\ldots,n$可以求得

$$P\{X_k=1\}=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdots\frac{n-(k-1)}{n-k}=\frac{n-k+1}{n},$$
$$E(X_k)=1\cdot P\{X_k=1\}+0\cdot P\{X_k=0\}=\frac{n-k+1}{n}.$$

于是最后我们有

$$E(X)=1+\sum_{k=2}^{n}E(X_k)=1+\sum_{k=2}^{n}\frac{n-k+1}{n}=\frac{n+1}{2}.$$

§2 方差

问题 4.21 求得期望

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot p(1-p)^{k-1}=p\sum_{k=1}^{\infty}k(1-p)^{k-1}=\frac{1}{p},$$

而方差

$$E(X^2)=\sum_{k=1}^{\infty}k^2\cdot p(1-p)^{k-1}=p\sum_{k=1}^{\infty}k^2\cdot(1-p)^{k-1}=p\cdot\frac{2-p}{p^3}=\frac{2-p}{p^2},$$
$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{1-p}{p^2}.$$

问题 4.26 (1)