

# 概率论与数理统计 (第四版)

2017 年 6 月 15 日

## 第二章 随机变量及其分布

## §1 随机变量

## §2 离散型随机变量及其分布律

问题 2.1	$X$	20	5	0
	$p_k$	0.0002	0.0010	0.9989

问题 2.6 以  $X$  记“同一时刻被使用的设备台数”，则

$$P\{X = k\} = \binom{5}{k} (0.1)^k (0.9)^{5-k}$$

$$(1) P\{X = 2\} = \binom{5}{2} (0.1)^2 (0.9)^3 = 0.0729$$

$$(2) 1 - \sum_{k=0}^2 P\{X = k\} = 0.00856$$

$$(3) 1 - \sum_{k=4}^5 P\{X = k\} = 0.99954$$

$$(4) 1 - P\{X = 0\} = 0.40951$$

问题 2.11 以  $X$  记“此地区每年撰写此类文章的篇数”，则  $X \sim \pi(6)$ ，故明年没有此类文章的概率为

$$P\{X = 0\} = \frac{\lambda^0 e^{-\lambda}}{0!} \Big|_{\lambda=6} = 0.00248.$$

问题 2.16 出事故的车辆数  $X$  服从二项分布，但  $n$  很大且  $p$  很小时，可近似认为其服从泊松分布，故令  $\lambda = np = 1000 \times 0.0001 = 0.1$ ，则有  $X \sim \pi(0.1)$ ，从而

$$P\{X \geq 2\} = 1 - P\{X = 0\} - P\{X = 1\} = 1 - e^{-0.1} - 0.1 \cdot e^{-0.1} = 0.00468.$$

## §3 随机变量的分布函数

## §4 连续型随机变量及其概率密度

问题 2.21 (1) 分布函数

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1; \\ 2x - 4 + \frac{2}{x}, & 1 \leq x < 2; \\ 1, & x \geq 2. \end{cases}$$

(2) 分布函数

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \frac{x^2}{2}, & 0 \leq x < 1; \\ -\frac{x^2}{2} + 2x - 1, & 1 \leq x < 2; \\ 1, & x \geq 2. \end{cases}$$

问题 2.26 考虑到  $X \sim N(3, 2^2)$ , 则有

(1)

$$\begin{aligned} P\{2 < X \leq 5\} &= P\{X \leq 5\} - P\{X \leq 2\} = \Phi(1) - \Phi\left(-\frac{1}{2}\right) = \Phi(1) + \Phi\left(\frac{1}{2}\right) - 1 = 0.53281, \\ P\{-4 < X \leq 10\} &= \Phi\left(\frac{7}{2}\right) - \Phi\left(-\frac{7}{2}\right) = 2\Phi\left(\frac{7}{2}\right) - 1 = 0.99953, \\ P\{|X| > 2\} &= P\{X < -2\} + 1 - P\{X \leq 2\} = 1 + \Phi\left(-\frac{5}{2}\right) - \Phi\left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= 1 + \Phi\left(\frac{1}{2}\right) - \Phi\left(\frac{5}{2}\right) = 0.69767, \\ P\{X > 3\} &= 1 - P\{X \leq 3\} = 1 - \Phi(0) = 0.5. \end{aligned}$$

(2) 即求  $1 - P\{X \leq c\} = P\{X \leq c\}$ , 即

$$P\{X \leq c\} = \Phi\left(\frac{c-3}{2}\right) = \frac{1}{2},$$

所以有  $c = 3$ .

(3) 由  $P\{X > d\} \geq 0.9$ , 可知  $1 - P\{X \leq d\} \geq 0.9$ , 即  $P\{X \leq d\} \leq 0.1$ , 而  $\Phi(-1.28155) = 0.1$ , 所以

$$d = 2 \times (-1.28155) + 3 = 0.43690.$$

问题 2.31 以  $A$  记“指示灯亮绿灯”, 那么对于  $x \geq 0$ , 利用全概率公式有

$$P\{X \leq x\} = P\{X \leq x | A\}P\{A\} + P\{X \leq x | \bar{A}\}P\{\bar{A}\}.$$

这里  $P\{A\} = 0.2$ ,  $P\{\bar{A}\} = 0.8$ ,  $P\{X \leq x | A\} = 1$ , 而

$$P\{X \leq x | \bar{A}\} = \begin{cases} \frac{x}{30}, & 0 \leq x \leq 30; \\ 1, & x > 30. \end{cases}$$

于是

$$P\{X \leq x\} = \begin{cases} 0.2 + 0.8\frac{x}{30}, & 0 \leq x \leq 30; \\ 1, & x > 30. \end{cases}$$

由此可得分布函数

$$F(x) = P\{X \leq x\} = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 0.2 + 0.8\frac{x}{30}, & 0 \leq x < 30; \\ 1, & x \geq 30. \end{cases}$$

由于其分布函数在  $x = 0$  处有断点, 所以  $X$  不是连续型随机变量, 但部分区间连续, 又导致其不是离散型.

## §5 随机变量的函数的分布

问题 2.36 (1) 由于反函数  $x = h(y) = \sqrt[3]{y}$  是严格单调增加的, 所以可根据公式知其概率密度为

$$f(y) = \frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}} f(\sqrt[3]{y}) (y \neq 0).$$

(2) 对于  $x > 0$  而言, 其反函数  $x = h(y) = \sqrt{y}$  是严格单调增加的, 所以可根据公式知其概率密度为

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}} e^{-\sqrt{y}}, & y > 0; \\ 0, & y \leq 0. \end{cases}$$

### 第三章 多维随机变量及其分布

#### §1 二维随机变量

问题 3.1 (1)

Y \ X	0	1
0	$\frac{25}{36}$	$\frac{5}{36}$
1	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{36}$

(2)

Y \ X	0	1
0	$\frac{45}{66}$	$\frac{5}{33}$
1	$\frac{5}{33}$	$\frac{1}{66}$

#### §2 边缘分布

问题 3.6 参见课本第 2 页中样本空间  $S_2$  的 8 个样本点,  $X$  和  $Y$  取值情况如下:

样本点	HHH	HHT	HTH	THH	HTT	THT	TTH	TTT
X	2	2	1	1	1	1	0	0
Y	3	2	2	2	1	1	1	0

基于此可得  $X$  和  $Y$  的联合分布律和边缘分布律为:

Y \ X	0	1	2	$P\{Y = j\}$
0	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{3}{8}$
2	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$
3	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
$P\{X = i\}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

#### §3 条件分布

问题 3.11 (1) 边缘分布律:

$$\begin{aligned}
 p_{n\cdot} = P\{X = n\} &= \frac{e^{-14}}{n!} \sum_{m=0}^n n! \frac{7.14^m 6.86^{n-m}}{m!(n-m)!} = \frac{e^{-14}}{n!} \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} 7.14^m 6.86^{n-m} \\
 &= \frac{e^{-14}}{n!} (7.14 + 6.86)^n = \frac{14^n e^{-14}}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots
 \end{aligned}$$

说明  $X$  服从参数为 14 的泊松分布, 即  $X \sim \pi(14)$ .

$$\begin{aligned} p_{\cdot m} = P\{Y = m\} &= \frac{7.14^m e^{-14}}{m!} \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{6.86^{n-m}}{(n-m)!} = \frac{7.14^m e^{-14}}{m!} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{6.86^n}{n!} \\ &= \frac{7.14^m e^{-14} e^{6.86}}{m!} = \frac{7.14^m e^{-7.14}}{m!}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

说明  $Y$  服从参数为 7.14 的泊松分布, 即  $Y \sim \pi(7.14)$ .

(2) 条件分布律:

$$\begin{aligned} P\{Y = m \mid X = n\} &= \binom{n}{m} \frac{7.14^m 6.86^{n-m}}{14^n} = \binom{n}{m} 0.51^m 0.49^{n-m}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, n. \\ P\{X = n \mid Y = m\} &= \frac{6.86^{n-m} e^{-6.86}}{(n-m)!}, \quad (n = m, m+1, \dots) \end{aligned}$$

(3)  $X = 20$  时,  $Y$  的条件分布律为  $\binom{20}{m} 0.51^m 0.49^{20-m}$ ,  $m = 0, 1, \dots, 20$ .

## §4 相互独立的随机变量

问题 3.17 (1) 求出边缘分布律

$$\begin{aligned} F_X(x) = F(x, +\infty) &= \begin{cases} 1 - e^{-\alpha x}, & x \geq 0; \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \\ F_Y(y) = F(+\infty, y) &= \begin{cases} y, & 0 \leq y \leq 1; \\ 1, & y > 1; \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \end{aligned}$$

由此即可知  $F(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$ , 从而  $X, Y$  相互独立.

(2) 考虑到对于  $0 < p < 1$ , 有

$$\begin{aligned} P\{X = x\} &= p^2(1-p)^{x-1} \sum_{y=1}^{\infty} (1-p)^{y-1} = p(1-p)^{x-1}, \quad x = 1, 2, \dots, \\ P\{Y = y\} &= p^2(1-p)^{y-1} \sum_{x=1}^{\infty} (1-p)^{x-1} = p(1-p)^{y-1}, \quad y = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

从而  $P\{X = x, Y = y\} = P\{X = x\}P\{Y = y\}$ , 故  $X, Y$  相互独立.

## §5 两个随机变量的函数的分布

问题 3.21 (1) 由公式知

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x) dx, \quad 0 < x < 1, \quad x < z < x+1.$$

于是通过示意图可知

$$f_Z(z) = \begin{cases} \int_0^z z dx = z^2, & 0 < z < 1; \\ \int_{z-1}^1 z dx = z(2-z), & 1 \leq z < 2; \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

(2) 由公式知

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|x|} f\left(x, \frac{z}{x}\right) dx, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < z < x.$$

画出示意图后可知

$$f_Z(z) = \begin{cases} \int_z^1 \frac{1}{x} \left(x + \frac{z}{x}\right) dx = 2(1-z), & 0 < z < 1; \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

问题 3.26 由公式可知

$$f_Z(z) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x, xz) dx = \int_0^{+\infty} x e^{-x} e^{-xz} dx = \frac{1}{1+z^2}, & z > 0; \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

问题 3.31 (1) 由瑞利分布的概率密度函数

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{4} e^{-x^2/8}, & x \geq 0; \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

可知其分布函数为

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x^2/8}, & x \geq 0; \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

由于  $X_i (i = 1, 2, 3, 4, 5)$  是独立同分布的随机变量, 所以有

$$F_{\max}(z) = \begin{cases} \left(1 - e^{-z^2/8}\right)^5, & z \geq 0; \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

(2) 容易知道

$$P\{Z > 4\} = 1 - F_{\max}(z = 4) = 0.51668.$$

问题 3.36 (1) 容易计算

$$P\{X = 2 \mid Y = 2\} = \frac{P\{X = 2, Y = 2\}}{P\{Y = 2\}} = \frac{0.05}{0.25} = \frac{1}{5},$$

$$P\{Y = 3 \mid X = 0\} = \frac{P\{Y = 3, X = 0\}}{P\{X = 0\}} = \frac{0.01}{0.03} = \frac{1}{3}.$$

(2)  $V = \max\{X, Y\}$  的分布律为

$V$	0	1	2	3	4	5
$p_k$	0	0.04	0.16	0.28	0.24	0.28

以其中一个为例

$$\begin{aligned} P\{V = 3\} &= P\{\max\{X, Y\} = 3\} \\ &= P\{X = 3, Y < 3\} + P\{X < 3, Y = 3\} + P\{X = 3, Y = 3\} = 0.15 + 0.07 + 0.06 = 0.28. \end{aligned}$$

(3)  $U = \min\{X, Y\}$  的分布律为

$U$	0	1	2	3
$p_k$	0.28	0.30	0.25	0.17

(4)  $W = X + Y$  的分布律为

$V$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$p_k$	0	0.02	0.06	0.13	0.19	0.24	0.19	0.12	0.05



## 第四章 随机变量的数字特征

## §1 数学期望

问题 4.1 (1) 以  $X$  表示取到的单词所包含的字母个数, 则其分布律为

$X$	2	3	4	9
$p_k$	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

则期望  $E(X) = \frac{15}{4} = 3.75$ .

(2) 以  $Y$  表示取到的字母所在单词所包含的字母数, 则其分布律为

$Y$	2	3	4	9
$p_k$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{10}$

则期望  $E(Y) = \frac{73}{15} = 4.87$ .

(3) 得到分布律为

$X$	1	2	3	4	5	7	8	9	10	11	12
$p_k$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$

则期望  $E(Y) = \frac{49}{12} = 4.08$ .

问题 4.6 (1) 容易计算得到

$$E(X) = (-2) \times 0.4 + 0 \times 0.3 + 2 \times 0.3 = -0.2,$$

$$E(X^2) = (-2)^2 \times 0.4 + 0^2 \times 0.3 + 2^2 \times 0.3 = 2.8,$$

$$E(3X^2 + 5) = 17 \times 0.4 + 5 \times 0.3 + 17 \times 0.3 = 13.4,$$

$$E(3X^2 + 5) = 3E(X^2) + 5 = 13.4.$$

(2) 因为  $X \sim \pi(\lambda)$ , 即

$$P\{X = k\} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

于是有

$$E[1/(X+1)] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \cdot \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} (e^{\lambda} - 1) = \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda}.$$

问题 4.11 因为使用寿命小于 1 年的概率为

$$P\{X \leq 1\} = \int_0^1 \frac{1}{4} e^{-x/4} dx = 1 - e^{-1/4},$$

则  $P\{X > 1\} = e^{-1/4}$ . 于是赢利的数学期望为

$$100 \times e^{-1/4} - 200 \times (1 - e^{-1/4}) = 33.6402.$$

问题 4.16 内容...