概率论与数理统计 (第四版)

2017 年 6 月 6 日

第二章　随机变量及其分布

问题 2.1

X	20	5	0
p_k	0.0002	0.0010	0.9989

问题 2.6 以 X 记“同一时刻被使用的设备台数”, 则

$$P\{X=k\}=\binom{5}{k}(0.1)^k(0.9)^{5-k}$$

(1) $P\{X=2\}=\binom{5}{2}(0.1)^2(0.9)^3=0.0729$

(2) $1-\sum\limits_{k=0}^{2}P\{X=k\}=0.00856$

(3) $1-\sum\limits_{k=4}^{5}P\{X=k\}=0.99954$

(4) $1-P\{X=0\}=0.40951$

问题 2.11 以 X 记“此地区每年撰写此类文章的篇数”, 则 $X\sim\pi(6)$, 故明年没有此类文章的概率为

$$P\{X=0\}=\left.\frac{\lambda^0\mathrm{e}^{-\lambda}}{0!}\right|_{\lambda=6}=0.00248.$$

问题 2.16 出事故的车辆数 X 服从二项分布, 但 n 很大且 p 很小时, 可近似认为其服从泊松分布, 故令 $\lambda=np=1000\times0.0001=0.1$, 则有 $X\sim\pi(0.1)$, 从而

$$P\{X\geqslant2\}=1-P\{X=0\}-P\{X=1\}=1-\mathrm{e}^{-0.1}-0.1\cdot\mathrm{e}^{-0.1}=0.00468.$$

问题 2.21 (1) 分布函数

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<1;\\ 2x-4+\dfrac{2}{x}, & 1\leqslant x<2;\\ 1, & x\geqslant2.\end{cases}$$

(2) 分布函数

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ \dfrac{x^2}{2}, & 0\leqslant x<1;\\ -\dfrac{x^2}{2}+2x-1, & 1\leqslant x<2;\\ 1, & x\geqslant 2.\end{cases}$$

问题 2.26 考虑到 $X\sim N(3,2^2)$, 则有

(1)

$$P\{2<X\leqslant 5\}=P\{X\leqslant 5\}-P\{X\leqslant 2\}=\Phi(1)-\Phi\left(-\frac{1}{2}\right)=\Phi(1)+\Phi\left(\frac{1}{2}\right)-1=0.53281,$$

$$P\{-4<X\leqslant 10\}=\Phi\left(\frac{7}{2}\right)-\Phi\left(-\frac{7}{2}\right)=2\Phi\left(\frac{7}{2}\right)-1=0.99953,$$

$$\begin{aligned}P\{|X|>2\}&=P\{X<-2\}+1-P\{X\leqslant 2\}=1+\Phi\left(-\frac{5}{2}\right)-\Phi\left(-\frac{1}{2}\right)\\&=1+\Phi\left(\frac{1}{2}\right)-\Phi\left(\frac{5}{2}\right)=0.69767,\end{aligned}$$

$$P\{X>3\}=1-P\{X\leqslant 3\}=1-\Phi(0)=0.5.$$

(2) 即求 $1-P\{X\leqslant c\}=P\{X\leqslant c\}$, 即

$$P\{X\leqslant c\}=\Phi\left(\frac{c-3}{2}\right)=\frac{1}{2},$$

所以有 $c=3$.

(3) 由 $P\{X>d\}\geqslant 0.9$, 可知 $1-P\{X\leqslant d\}\geqslant 0.9$, 即 $P\{X\leqslant d\}\leqslant 0.1$, 而 $\Phi(-1.28155)=0.1$, 所以

$$d=2\times(-1.28155)+3=0.43690.$$

问题 2.31 以 A 记 “指示灯亮绿灯”, 那么对于 $x\geqslant 0$, 利用全概率公式有

$$P\{X\leqslant x\}=P\{X\leqslant x\mid A\}P\{A\}+P\{X\leqslant x\mid \overline{A}\}P\{\overline{A}\}.$$

这里 $P\{A\}=0.2$, $P\{\overline{A}\}=0.8$, $P\{X\leqslant x\mid A\}=1$, 而

$$P\{X\leqslant x\mid \overline{A}\}=\begin{cases}\dfrac{x}{30}, & 0\leqslant x\leqslant 30;\\ 1, & x>30.\end{cases}$$

于是

$$P\{X\leqslant x\}=\begin{cases}0.2+0.8\dfrac{x}{30}, & 0\leqslant x\leqslant 30;\\ 1, & x>30.\end{cases}$$

由此可得分布函数

$$F(x)=P\{X\leqslant x\}=\begin{cases}0, & x<0;\\ 0.2+0.8\dfrac{x}{30}, & 0\leqslant x<30;\\ 1, & x\geqslant 30.\end{cases}$$

由于其分布函数在 $x=0$ 处有断点, 所以 X 不是连续型随机变量, 但部分区间连续, 又导致其不是离散型.

问题 2.36 (1) 由于反函数 $x=h(y)=\sqrt[3]{y}$ 是严格单调增加的, 所以可根据公式知其概率密度为

$$f(y)=\frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}}f(\sqrt[3]{y})(y\neq 0).$$

(2) 对于 $x>0$ 而言, 其反函数 $x=h(y)=\sqrt{y}$ 是严格单调增加的, 所以可根据公式知其概率密度为

$$f(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{y}}\mathrm{e}^{-\sqrt{y}}, & y>0;\\ 0, & y\leqslant 0.\end{cases}$$