概率论与数理统计 (第四版)

2017 年 6 月 10 日

第二章　随机变量及其分布

§1　随机变量

§2　离散型随机变量及其分布律

问题 2.1

X	20	5	0
p_k	0.0002	0.0010	0.9989

问题 2.6 以 X 记"同一时刻被使用的设备台数", 则

$$P\{X=k\}=\binom{5}{k}(0.1)^k(0.9)^{5-k}$$

(1) $P\{X=2\}=\binom{5}{2}(0.1)^2(0.9)^3=0.0729$

(2) $1-\sum\limits_{k=0}^{2}P\{X=k\}=0.00856$

(3) $1-\sum\limits_{k=4}^{5}P\{X=k\}=0.99954$

(4) $1-P\{X=0\}=0.40951$

问题 2.11 以 X 记"此地区每年撰写此类文章的篇数", 则 $X\sim\pi(6)$, 故明年没有此类文章的概率为

$$P\{X=0\}=\left.\frac{\lambda^0\mathrm{e}^{-\lambda}}{0!}\right|_{\lambda=6}=0.00248.$$

问题 2.16 出事故的车辆数 X 服从二项分布, 但 n 很大且 p 很小时, 可近似认为其服从泊松分布, 故令 $\lambda=np=1000\times0.0001=0.1$, 则有 $X\sim\pi(0.1)$, 从而

$$P\{X\geqslant2\}=1-P\{X=0\}-P\{X=1\}=1-\mathrm{e}^{-0.1}-0.1\cdot\mathrm{e}^{-0.1}=0.00468.$$

§3　随机变量的分布函数

§4　连续型随机变量及其概率密度

问题 2.21　(1) 分布函数

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<1;\\ 2x-4+\dfrac{2}{x}, & 1\leqslant x<2;\\ 1, & x\geqslant2.\end{cases}$$

(2) 分布函数

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ \dfrac{x^2}{2}, & 0\leqslant x<1;\\ -\dfrac{x^2}{2}+2x-1, & 1\leqslant x<2;\\ 1, & x\geqslant2.\end{cases}$$

问题 2.26 考虑到 $X \sim N(3, 2^2)$, 则有

(1)

$$\begin{aligned}
P\{2 < X \leqslant 5\} &= P\{X \leqslant 5\} - P\{X \leqslant 2\} = \Phi(1) - \Phi\left(-\frac{1}{2}\right) = \Phi(1) + \Phi\left(\frac{1}{2}\right) - 1 = 0.53281, \\
P\{-4 < X \leqslant 10\} &= \Phi\left(\frac{7}{2}\right) - \Phi\left(-\frac{7}{2}\right) = 2\Phi\left(\frac{7}{2}\right) - 1 = 0.99953, \\
P\{|X| > 2\} &= P\{X < -2\} + 1 - P\{X \leqslant 2\} = 1 + \Phi\left(-\frac{5}{2}\right) - \Phi\left(-\frac{1}{2}\right) \\
&= 1 + \Phi\left(\frac{1}{2}\right) - \Phi\left(\frac{5}{2}\right) = 0.69767, \\
P\{X > 3\} &= 1 - P\{X \leqslant 3\} = 1 - \Phi(0) = 0.5.
\end{aligned}$$

(2) 即求 $1 - P\{X \leqslant c\} = P\{X \leqslant c\}$, 即

$$P\{X \leqslant c\} = \Phi\left(\frac{c-3}{2}\right) = \frac{1}{2},$$

所以有 $c = 3$.

(3) 由 $P\{X > d\} \geqslant 0.9$, 可知 $1 - P\{X \leqslant d\} \geqslant 0.9$, 即 $P\{X \leqslant d\} \leqslant 0.1$, 而 $\Phi(-1.28155) = 0.1$, 所以

$$d = 2 \times (-1.28155) + 3 = 0.43690.$$

问题 2.31 以 A 记"指示灯亮绿灯", 那么对于 $x \geqslant 0$, 利用全概率公式有

$$P\{X \leqslant x\} = P\{X \leqslant x \mid A\}P\{A\} + P\{X \leqslant x \mid \overline{A}\}P\{\overline{A}\}.$$

这里 $P\{A\} = 0.2$, $P\{\overline{A}\} = 0.8$, $P\{X \leqslant x \mid A\} = 1$, 而

$$P\{X \leqslant x \mid \overline{A}\} = \begin{cases} \dfrac{x}{30}, & 0 \leqslant x \leqslant 30; \\ 1, & x > 30. \end{cases}$$

于是

$$P\{X \leqslant x\} = \begin{cases} 0.2 + 0.8\dfrac{x}{30}, & 0 \leqslant x \leqslant 30; \\ 1, & x > 30. \end{cases}$$

由此可得分布函数

$$F(x) = P\{X \leqslant x\} = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 0.2 + 0.8\dfrac{x}{30}, & 0 \leqslant x < 30; \\ 1, & x \geqslant 30. \end{cases}$$

由于其分布函数在 $x = 0$ 处有断点, 所以 X 不是连续型随机变量, 但部分区间连续, 又导致其不是离散型.

§5 随机变量的函数的分布

问题 2.36 (1) 由于反函数 $x = h(y) = \sqrt[3]{y}$ 是严格单调增加的, 所以可根据公式知其概率密度为

$$f(y) = \frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}} f(\sqrt[3]{y})(y \neq 0).$$

(2) 对于 $x > 0$ 而言, 其反函数 $x = h(y) = \sqrt{y}$ 是严格单调增加的, 所以可根据公式知其概率密度为

$$f(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{y}} \mathrm{e}^{-\sqrt{y}}, & y > 0; \\ 0, & y \leqslant 0. \end{cases}$$

第三章　多维随机变量及其分布

§1　二维随机变量

问题 3.1　(1)

$Y \backslash X$	0	1
0	$\frac{25}{36}$	$\frac{5}{36}$
1	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{36}$

(2)

$Y \backslash X$	0	1
0	$\frac{45}{66}$	$\frac{5}{33}$
1	$\frac{5}{33}$	$\frac{1}{66}$

§2　边缘分布

问题 3.6 参见课本第 2 页中样本空间 S_2 的 8 个样本点, X 和 Y 取值情况如下:

样本点	HHH	HHT	HTH	THH	HTT	THT	TTH	TTT
X	2	2	1	1	1	1	0	0
Y	3	2	2	2	1	1	1	0

基于此可得 X 和 Y 的联合分布律和边缘分布律为:

$Y \backslash X$	0	1	2	$P\{Y=j\}$
0	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{3}{8}$
2	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$
3	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
$P\{X=i\}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

§3　条件分布

问题 3.11　(1) 边缘分布律:

$$
\begin{aligned}
p_{n\cdot} = P\{X=n\} &= \frac{\mathrm{e}^{-14}}{n!}\sum_{m=0}^{n} n!\frac{7.14^m 6.86^{n-m}}{m!(n-m)!} = \frac{\mathrm{e}^{-14}}{n!}\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}7.14^m 6.86^{n-m} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-14}}{n!}(7.14+6.86)^n = \frac{14^n \mathrm{e}^{-14}}{n!}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots.
\end{aligned}
$$

说明 X 服从参数为 14 的泊松分布, 即 $X\sim\pi(14)$.

$$p_{\cdot m}=P\{Y=m\}=\frac{7.14^m\mathrm{e}^{-14}}{m!}\sum_{n=m}^{+\infty}\frac{6.86^{n-m}}{(n-m)!}=\frac{7.14^m\mathrm{e}^{-14}}{m!}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{6.86^n}{n!}$$
$$=\frac{7.14^m\mathrm{e}^{-14}\mathrm{e}^{6.86}}{m!}=\frac{7.14^m\mathrm{e}^{-7.14}}{m!},\qquad m=0,1,2,\ldots$$

说明 Y 服从参数为 7.14 的泊松分布, 即 $X\sim\pi(7.14)$.

(2) 条件分布律:

$$P\{Y=m\mid X=n\}=\binom{n}{m}\frac{7.14^m6.86^{n-m}}{14^n}=\binom{n}{m}0.51^m0.49^{n-m},\quad m=0,1,2,\ldots,n.$$
$$P\{X=n\mid Y=m\}=\frac{6.86^{n-m}\mathrm{e}^{-6.86}}{(n-m)!},\quad (n=m,m+1,\ldots)$$

(3) $X=20$ 时, Y 的条件分布律为 $\binom{20}{m}0.51^m0.49^{20-m}$, $m=0,1,\ldots,20$.

§4 相互独立的随机变量

问题 3.17 (1) 求出边缘分布律

$$F_X(x)=F(x,+\infty)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\alpha x}, & x\geqslant 0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$
$$F_Y(y)=F(+\infty,y)=\begin{cases}y, & 0\leqslant y\leqslant 1,\\ 1, & y>1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

由此即可知 $F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$, 从而 X, Y 相互独立.

(2) 考虑到对于 $0<p<1$, 有

$$P\{X=x\}=p^2(1-p)^{x-1}\sum_{y=1}^{\infty}(1-p)^{y-1}=p(1-p)^{x-1},\quad x=1,2,\ldots,$$
$$P\{Y=y\}=p^2(1-p)^{y-1}\sum_{x=1}^{\infty}(1-p)^{x-1}=p(1-p)^{y-1},\quad y=1,2,\ldots.$$

从而 $P\{X=x,Y=y\}=P\{X=x\}P\{Y=y\}$, 故 X, Y 相互独立.

§5 两个随机变量的函数的分布

问题 3.21 (1)