概率论与数理统计 (第四版)

2017 年 6 月 27 日

第二章　随机变量及其分布

§1　随机变量

§2　离散型随机变量及其分布律

问题 2.1

X	20	5	0
p_k	0.0002	0.0010	0.9989

问题 2.6 以 X 记"同一时刻被使用的设备台数", 则

$$P\{X=k\}=\binom{5}{k}(0.1)^k(0.9)^{5-k}$$

(1) $P\{X=2\}=\binom{5}{2}(0.1)^2(0.9)^3=0.0729$

(2) $1-\sum\limits_{k=0}^{2}P\{X=k\}=0.00856$

(3) $1-\sum\limits_{k=4}^{5}P\{X=k\}=0.99954$

(4) $1-P\{X=0\}=0.40951$

问题 2.11 以 X 记"此地区每年撰写此类文章的篇数", 则 $X\sim\pi(6)$, 故明年没有此类文章的概率为

$$P\{X=0\}=\left.\frac{\lambda^0\mathrm{e}^{-\lambda}}{0!}\right|_{\lambda=6}=0.00248.$$

问题 2.16 出事故的车辆数 X 服从二项分布, 但 n 很大且 p 很小时, 可近似认为其服从泊松分布, 故令 $\lambda=np=1000\times0.0001=0.1$, 则有 $X\sim\pi(0.1)$, 从而

$$P\{X\geqslant2\}=1-P\{X=0\}-P\{X=1\}=1-\mathrm{e}^{-0.1}-0.1\cdot\mathrm{e}^{-0.1}=0.00468.$$

§3　随机变量的分布函数

§4　连续型随机变量及其概率密度

问题 2.21　(1) 分布函数

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<1;\\ 2x-4+\dfrac{2}{x}, & 1\leqslant x<2;\\ 1, & x\geqslant2.\end{cases}$$

(2) 分布函数

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ \dfrac{x^2}{2}, & 0\leqslant x<1;\\ -\dfrac{x^2}{2}+2x-1, & 1\leqslant x<2;\\ 1, & x\geqslant2.\end{cases}$$

问题 2.26 考虑到 $X \sim N(3, 2^2)$, 则有

(1)

$$P\{2 < X \leqslant 5\} = P\{X \leqslant 5\} - P\{X \leqslant 2\} = \Phi(1) - \Phi\left(-\frac{1}{2}\right) = \Phi(1) + \Phi\left(\frac{1}{2}\right) - 1 = 0.53281,$$
$$P\{-4 < X \leqslant 10\} = \Phi\left(\frac{7}{2}\right) - \Phi\left(-\frac{7}{2}\right) = 2\Phi\left(\frac{7}{2}\right) - 1 = 0.99953,$$
$$P\{|X| > 2\} = P\{X < -2\} + 1 - P\{X \leqslant 2\} = 1 + \Phi\left(-\frac{5}{2}\right) - \Phi\left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$= 1 + \Phi\left(\frac{1}{2}\right) - \Phi\left(\frac{5}{2}\right) = 0.69767,$$
$$P\{X > 3\} = 1 - P\{X \leqslant 3\} = 1 - \Phi(0) = 0.5.$$

(2) 即求 $1 - P\{X \leqslant c\} = P\{X \leqslant c\}$, 即

$$P\{X \leqslant c\} = \Phi\left(\frac{c-3}{2}\right) = \frac{1}{2},$$

所以有 $c = 3$.

(3) 由 $P\{X > d\} \geqslant 0.9$, 可知 $1 - P\{X \leqslant d\} \geqslant 0.9$, 即 $P\{X \leqslant d\} \leqslant 0.1$, 而 $\Phi(-1.28155) = 0.1$, 所以

$$d = 2 \times (-1.28155) + 3 = 0.43690.$$

问题 2.31 以 A 记 "指示灯亮绿灯", 那么对于 $x \geqslant 0$, 利用全概率公式有

$$P\{X \leqslant x\} = P\{X \leqslant x \mid A\}P\{A\} + P\{X \leqslant x \mid \overline{A}\}P\{\overline{A}\}.$$

这里 $P\{A\} = 0.2$, $P\{\overline{A}\} = 0.8$, $P\{X \leqslant x \mid A\} = 1$, 而

$$P\{X \leqslant x \mid \overline{A}\} = \begin{cases} \dfrac{x}{30}, & 0 \leqslant x \leqslant 30; \\ 1, & x > 30. \end{cases}$$

于是

$$P\{X \leqslant x\} = \begin{cases} 0.2 + 0.8\dfrac{x}{30}, & 0 \leqslant x \leqslant 30; \\ 1, & x > 30. \end{cases}$$

由此可得分布函数

$$F(x) = P\{X \leqslant x\} = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 0.2 + 0.8\dfrac{x}{30}, & 0 \leqslant x < 30; \\ 1, & x \geqslant 30. \end{cases}$$

由于其分布函数在 $x = 0$ 处有断点, 所以 X 不是连续型随机变量, 但部分区间连续, 又导致其不是离散型.

§5 随机变量的函数的分布

问题 2.36 (1) 由于反函数 $x = h(y) = \sqrt[3]{y}$ 是严格单调增加的, 所以可根据公式知其概率密度为

$$f(y) = \frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}} f(\sqrt[3]{y})(y \neq 0).$$

(2) 对于 $x > 0$ 而言, 其反函数 $x = h(y) = \sqrt{y}$ 是严格单调增加的, 所以可根据公式知其概率密度为

$$f(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{y}} \mathrm{e}^{-\sqrt{y}}, & y > 0; \\ 0, & y \leqslant 0. \end{cases}$$

第三章　多维随机变量及其分布

§1　二维随机变量

问题 3.1　(1)

$Y \backslash X$	0	1
0	$\frac{25}{36}$	$\frac{5}{36}$
1	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{36}$

(2)

$Y \backslash X$	0	1
0	$\frac{45}{66}$	$\frac{5}{33}$
1	$\frac{5}{33}$	$\frac{1}{66}$

§2　边缘分布

问题 3.6 参见课本第 2 页中样本空间 S_2 的 8 个样本点, X 和 Y 取值情况如下:

样本点	HHH	HHT	HTH	THH	HTT	THT	TTH	TTT
X	2	2	1	1	1	1	0	0
Y	3	2	2	2	1	1	1	0

基于此可得 X 和 Y 的联合分布律和边缘分布律为:

$Y \backslash X$	0	1	2	$P\{Y=j\}$
0	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{3}{8}$
2	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$
3	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
$P\{X=i\}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

§3　条件分布

问题 3.11　(1) 边缘分布律:

$$p_{n\cdot} = P\{X=n\} = \frac{e^{-14}}{n!}\sum_{m=0}^{n} n!\frac{7.14^m 6.86^{n-m}}{m!(n-m)!} = \frac{e^{-14}}{n!}\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}7.14^m 6.86^{n-m}$$
$$= \frac{e^{-14}}{n!}(7.14+6.86)^n = \frac{14^n e^{-14}}{n!}, \qquad n=0,1,2,\ldots.$$

说明 X 服从参数为 14 的泊松分布, 即 $X \sim \pi(14)$.

$$\begin{aligned} p_{\cdot m} = P\{Y=m\} &= \frac{7.14^m \mathrm{e}^{-14}}{m!} \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{6.86^{n-m}}{(n-m)!} = \frac{7.14^m \mathrm{e}^{-14}}{m!} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{6.86^n}{n!} \\ &= \frac{7.14^m \mathrm{e}^{-14} \mathrm{e}^{6.86}}{m!} = \frac{7.14^m \mathrm{e}^{-7.14}}{m!}, \qquad m = 0,1,2,\ldots \end{aligned}$$

说明 Y 服从参数为 7.14 的泊松分布, 即 $X \sim \pi(7.14)$.

(2) 条件分布律:

$$P\{Y=m \mid X=n\} = \binom{n}{m} \frac{7.14^m 6.86^{n-m}}{14^n} = \binom{n}{m} 0.51^m 0.49^{n-m}, \quad m = 0,1,2,\ldots,n.$$

$$P\{X=n \mid Y=m\} = \frac{6.86^{n-m} \mathrm{e}^{-6.86}}{(n-m)!}, \quad (n = m, m+1, \ldots)$$

(3) $X = 20$ 时, Y 的条件分布律为 $\binom{20}{m} 0.51^m 0.49^{20-m}$, $m = 0,1,\ldots,20$.

§4 相互独立的随机变量

问题 3.17 (1) 求出边缘分布律

$$F_X(x) = F(x,+\infty) = \begin{cases} 1-\mathrm{e}^{-\alpha x}, & x \geqslant 0; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

$$F_Y(y) = F(+\infty, y) = \begin{cases} y, & 0 \leqslant y \leqslant 1; \\ 1, & y > 1; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

由此即可知 $F(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$, 从而 X, Y 相互独立.

(2) 考虑到对于 $0 < p < 1$, 有

$$P\{X=x\} = p^2(1-p)^{x-1} \sum_{y=1}^{\infty} (1-p)^{y-1} = p(1-p)^{x-1}, \quad x = 1,2,\ldots,$$

$$P\{Y=y\} = p^2(1-p)^{y-1} \sum_{x=1}^{\infty} (1-p)^{x-1} = p(1-p)^{y-1}, \quad y = 1,2,\ldots.$$

从而 $P\{X=x, Y=y\} = P\{X=x\}P\{Y=y\}$, 故 X, Y 相互独立.

§5 两个随机变量的函数的分布

问题 3.21 (1) 由公式知

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x)\mathrm{d}x, \quad 0 < x < 1, \quad x < z < x+1.$$

于是通过示意图可知

$$f_Z(z) = \begin{cases} \int_0^z z\mathrm{d}x = z^2, & 0 < z < 1; \\ \int_{z-1}^1 z\mathrm{d}x = z(2-z), & 1 \leqslant z < 2; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(2) 由公式知

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|x|}f\left(x,\frac{z}{x}\right)\mathrm{d}x,\quad 0<x<1,\quad 0<z<x.$$

画出示意图后可知

$$f_Z(z)=\begin{cases}\displaystyle\int_z^1\frac{1}{x}\left(x+\frac{z}{x}\right)\mathrm{d}x=2(1-z), & 0<z<1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

问题 3.26 由公式可知

$$f_Z(z)=\begin{cases}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}|x|f(x,xz)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-xz}\mathrm{d}x=\frac{1}{1+z^2}, & z>0;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

问题 3.31 (1) 由瑞利分布的概率密度函数

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{4}\mathrm{e}^{-x^2/8}, & x\geqslant 0;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

可知其分布函数为

$$F_X(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-x^2/8}, & x\geqslant 0;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

由于 $X_i(i=1,2,3,4,5)$ 是独立同分布的随机变量，所以有

$$F_{\max}(z)=\begin{cases}\left(1-\mathrm{e}^{-z^2/8}\right)^5, & z\geqslant 0;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(2) 容易知道

$$P\{Z>4\}=1-F_{\max}(z=4)=0.51668.$$

问题 3.36 (1) 容易计算

$$P\{X=2\mid Y=2\}=\frac{P\{X=2,Y=2\}}{P\{Y=2\}}=\frac{0.05}{0.25}=\frac{1}{5},$$
$$P\{Y=3\mid X=0\}=\frac{P\{Y=3,X=0\}}{P\{X=0\}}=\frac{0.01}{0.03}=\frac{1}{3}.$$

(2) $V=\max\{X,Y\}$ 的分布律为

V	0	1	2	3	4	5
p_k	0	0.04	0.16	0.28	0.24	0.28

以其中一个为例

$$\begin{aligned}P\{V=3\}&=P\{\max\{X,Y\}=3\}\\&=P\{X=3,Y<3\}+P\{X<3,Y=3\}+P\{X=3,Y=3\}=0.15+0.07+0.06=0.28.\end{aligned}$$

(3) $U=\min\{X,Y\}$ 的分布律为

U	0	1	2	3
p_k	0.28	0.30	0.25	0.17

(4) $W = X + Y$ 的分布律为

V	0	1	2	3	4	5	6	7	8
p_k	0	0.02	0.06	0.13	0.19	0.24	0.19	0.12	0.05

第四章　随机变量的数字特征

§1　数学期望

问题 4.1　(1) 以 X 表示取到的单词所包含的字母个数, 则其分布律为

X	2	3	4	9
p_k	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

则期望 $E(X) = \dfrac{15}{4} = 3.75$.

(2) 以 Y 表示取到的字母所在单词所包含的字母数, 则其分布律为

Y	2	3	4	9
p_k	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{10}$

则期望 $E(Y) = \dfrac{73}{15} = 4.87$.

(3) 得到分布律为

X	1	2	3	4	5	7	8	9	10	11	12
p_k	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$

则期望 $E(Y) = \dfrac{49}{12} = 4.08$.

问题 4.6　(1) 容易计算得到

$$\begin{gathered}
E(X) = (-2) \times 0.4 + 0 \times 0.3 + 2 \times 0.3 = -0.2, \\
E(X^2) = (-2)^2 \times 0.4 + 0^2 \times 0.3 + 2^2 \times 0.3 = 2.8, \\
E(3X^2 + 5) = 17 \times 0.4 + 5 \times 0.3 + 17 \times 0.3 = 13.4, \\
E(3X^2 + 5) = 3E(X^2) + 5 = 13.4.
\end{gathered}$$

(2) 因为 $X \sim \pi(\lambda)$, 即

$$P\{X = k\} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

于是有

$$E[1/(X+1)] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \cdot \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda}(e^{\lambda} - 1) = \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda}.$$

问题 4.11 因为使用寿命小于 1 年的概率为

$$P\{X \leqslant 1\} = \int_0^1 \frac{1}{4} e^{-x/4} dx = 1 - e^{-1/4},$$

则 $P\{X > 1\} = e^{-1/4}$. 于是赢利的数学期望为

$$100 \times e^{-1/4} - 200 \times (1 - e^{-1/4}) = 33.6402.$$

问题 4.16　(1) 写出分布律

X	1	2	$\cdots$	n
p_k	$\frac{1}{n}$	$\frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}$	$\cdots$	$\frac{1}{n}$

所以期望是

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n} i\cdot\frac{1}{n}=\frac{n+1}{2}.$$

(2) 如果不写出 X 分布律, 这时可假设有随机变量

$$X_1=1,$$
$$X_k=\begin{cases}1, & \text{前}k-1\text{次均未找到合适的钥匙;}\\ 0, & \text{前}k-1\text{次中有一次试开成功.}\end{cases}\qquad k=2,3,\ldots,n.$$

那么 $E(X_1)=1$, 同时对于 $k=2,3,\ldots,n$ 可以求得

$$P\{X_k=1\}=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdots\frac{n-(k-1)}{n-k}=\frac{n-k+1}{n},$$
$$E(X_k)=1\cdot P\{X_k=1\}+0\cdot P\{X_k=0\}=\frac{n-k+1}{n}.$$

于是最后我们有

$$E(X)=1+\sum_{k=2}^{n}E(X_k)=1+\sum_{k=2}^{n}\frac{n-k+1}{n}=\frac{n+1}{2}.$$

§2 方差

问题 4.21 求得期望

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot p(1-p)^{k-1}=p\sum_{k=1}^{\infty}k(1-p)^{k-1}=\frac{1}{p},$$

而方差

$$E(X^2)=\sum_{k=1}^{\infty}k^2\cdot p(1-p)^{k-1}=p\sum_{k=1}^{\infty}k^2\cdot(1-p)^{k-1}=p\cdot\frac{2-p}{p^3}=\frac{2-p}{p^2},$$
$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{1-p}{p^2}.$$

问题 4.26 (1)