

概率论与数理统计 (第四版)

2017 年 6 月 27 日

第二章 随机变量及其分布

§1 随机变量

§2 离散型随机变量及其分布律

问题 2.1	X	20	5	0
	p_k	0.0002	0.0010	0.9989

问题 2.6 以 X 记“同一时刻被使用的设备台数”，则

$$P\{X = k\} = \binom{5}{k} (0.1)^k (0.9)^{5-k}$$

$$(1) P\{X = 2\} = \binom{5}{2} (0.1)^2 (0.9)^3 = 0.0729$$

$$(2) 1 - \sum_{k=0}^2 P\{X = k\} = 0.00856$$

$$(3) 1 - \sum_{k=4}^5 P\{X = k\} = 0.99954$$

$$(4) 1 - P\{X = 0\} = 0.40951$$

问题 2.11 以 X 记“此地区每年撰写此类文章的篇数”，则 $X \sim \pi(6)$ ，故明年没有此类文章的概率为

$$P\{X = 0\} = \frac{\lambda^0 e^{-\lambda}}{0!} \Big|_{\lambda=6} = 0.00248.$$

问题 2.16 出事故的车辆数 X 服从二项分布，但 n 很大且 p 很小时，可近似认为其服从泊松分布，故令 $\lambda = np = 1000 \times 0.0001 = 0.1$ ，则有 $X \sim \pi(0.1)$ ，从而

$$P\{X \geq 2\} = 1 - P\{X = 0\} - P\{X = 1\} = 1 - e^{-0.1} - 0.1 \cdot e^{-0.1} = 0.00468.$$

§3 随机变量的分布函数

§4 连续型随机变量及其概率密度

问题 2.21 (1) 分布函数

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1; \\ 2x - 4 + \frac{2}{x}, & 1 \leq x < 2; \\ 1, & x \geq 2. \end{cases}$$

(2) 分布函数

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \frac{x^2}{2}, & 0 \leq x < 1; \\ -\frac{x^2}{2} + 2x - 1, & 1 \leq x < 2; \\ 1, & x \geq 2. \end{cases}$$

问题 2.26 考虑到 $X \sim N(3, 2^2)$, 则有

(1)

$$\begin{aligned} P\{2 < X \leq 5\} &= P\{X \leq 5\} - P\{X \leq 2\} = \Phi(1) - \Phi\left(-\frac{1}{2}\right) = \Phi(1) + \Phi\left(\frac{1}{2}\right) - 1 = 0.53281, \\ P\{-4 < X \leq 10\} &= \Phi\left(\frac{7}{2}\right) - \Phi\left(-\frac{7}{2}\right) = 2\Phi\left(\frac{7}{2}\right) - 1 = 0.99953, \\ P\{|X| > 2\} &= P\{X < -2\} + 1 - P\{X \leq 2\} = 1 + \Phi\left(-\frac{5}{2}\right) - \Phi\left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= 1 + \Phi\left(\frac{1}{2}\right) - \Phi\left(\frac{5}{2}\right) = 0.69767, \\ P\{X > 3\} &= 1 - P\{X \leq 3\} = 1 - \Phi(0) = 0.5. \end{aligned}$$

(2) 即求 $1 - P\{X \leq c\} = P\{X \leq c\}$, 即

$$P\{X \leq c\} = \Phi\left(\frac{c-3}{2}\right) = \frac{1}{2},$$

所以有 $c = 3$.

(3) 由 $P\{X > d\} \geq 0.9$, 可知 $1 - P\{X \leq d\} \geq 0.9$, 即 $P\{X \leq d\} \leq 0.1$, 而 $\Phi(-1.28155) = 0.1$, 所以

$$d = 2 \times (-1.28155) + 3 = 0.43690.$$

问题 2.31 以 A 记“指示灯亮绿灯”, 那么对于 $x \geq 0$, 利用全概率公式有

$$P\{X \leq x\} = P\{X \leq x | A\}P\{A\} + P\{X \leq x | \bar{A}\}P\{\bar{A}\}.$$

这里 $P\{A\} = 0.2$, $P\{\bar{A}\} = 0.8$, $P\{X \leq x | A\} = 1$, 而

$$P\{X \leq x | \bar{A}\} = \begin{cases} \frac{x}{30}, & 0 \leq x \leq 30; \\ 1, & x > 30. \end{cases}$$

于是

$$P\{X \leq x\} = \begin{cases} 0.2 + 0.8\frac{x}{30}, & 0 \leq x \leq 30; \\ 1, & x > 30. \end{cases}$$

由此可得分布函数

$$F(x) = P\{X \leq x\} = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 0.2 + 0.8\frac{x}{30}, & 0 \leq x < 30; \\ 1, & x \geq 30. \end{cases}$$

由于其分布函数在 $x = 0$ 处有断点, 所以 X 不是连续型随机变量, 但部分区间连续, 又导致其不是离散型.

§5 随机变量的函数的分布

问题 2.36 (1) 由于反函数 $x = h(y) = \sqrt[3]{y}$ 是严格单调增加的, 所以可根据公式知其概率密度为

$$f(y) = \frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}} f(\sqrt[3]{y}) (y \neq 0).$$

(2) 对于 $x > 0$ 而言, 其反函数 $x = h(y) = \sqrt{y}$ 是严格单调增加的, 所以可根据公式知其概率密度为

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}} e^{-\sqrt{y}}, & y > 0; \\ 0, & y \leq 0. \end{cases}$$

第三章 多维随机变量及其分布

§1 二维随机变量

问题 3.1 (1)

Y \ X	0	1
0	$\frac{25}{36}$	$\frac{5}{36}$
1	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{36}$

(2)

Y \ X	0	1
0	$\frac{45}{66}$	$\frac{5}{33}$
1	$\frac{5}{33}$	$\frac{1}{66}$

§2 边缘分布

问题 3.6 参见课本第 2 页中样本空间 S_2 的 8 个样本点, X 和 Y 取值情况如下:

样本点	HHH	HHT	HTH	THH	HTT	THT	TTH	TTT
X	2	2	1	1	1	1	0	0
Y	3	2	2	2	1	1	1	0

基于此可得 X 和 Y 的联合分布律和边缘分布律为:

Y \ X	0	1	2	$P\{Y = j\}$
0	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{3}{8}$
2	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$
3	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
$P\{X = i\}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

§3 条件分布

问题 3.11 (1) 边缘分布律:

$$\begin{aligned}
 p_{n\cdot} = P\{X = n\} &= \frac{e^{-14}}{n!} \sum_{m=0}^n n! \frac{7.14^m 6.86^{n-m}}{m!(n-m)!} = \frac{e^{-14}}{n!} \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} 7.14^m 6.86^{n-m} \\
 &= \frac{e^{-14}}{n!} (7.14 + 6.86)^n = \frac{14^n e^{-14}}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots
 \end{aligned}$$

说明 X 服从参数为 14 的泊松分布, 即 $X \sim \pi(14)$.

$$\begin{aligned} p_{\cdot m} = P\{Y = m\} &= \frac{7.14^m e^{-14}}{m!} \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{6.86^{n-m}}{(n-m)!} = \frac{7.14^m e^{-14}}{m!} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{6.86^n}{n!} \\ &= \frac{7.14^m e^{-14} e^{6.86}}{m!} = \frac{7.14^m e^{-7.14}}{m!}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

说明 Y 服从参数为 7.14 的泊松分布, 即 $Y \sim \pi(7.14)$.

(2) 条件分布律:

$$\begin{aligned} P\{Y = m \mid X = n\} &= \binom{n}{m} \frac{7.14^m 6.86^{n-m}}{14^n} = \binom{n}{m} 0.51^m 0.49^{n-m}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, n. \\ P\{X = n \mid Y = m\} &= \frac{6.86^{n-m} e^{-6.86}}{(n-m)!}, \quad (n = m, m+1, \dots) \end{aligned}$$

(3) $X = 20$ 时, Y 的条件分布律为 $\binom{20}{m} 0.51^m 0.49^{20-m}$, $m = 0, 1, \dots, 20$.

§4 相互独立的随机变量

问题 3.17 (1) 求出边缘分布律

$$\begin{aligned} F_X(x) = F(x, +\infty) &= \begin{cases} 1 - e^{-\alpha x}, & x \geq 0; \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \\ F_Y(y) = F(+\infty, y) &= \begin{cases} y, & 0 \leq y \leq 1; \\ 1, & y > 1; \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \end{aligned}$$

由此即可知 $F(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$, 从而 X, Y 相互独立.

(2) 考虑到对于 $0 < p < 1$, 有

$$\begin{aligned} P\{X = x\} &= p^2(1-p)^{x-1} \sum_{y=1}^{\infty} (1-p)^{y-1} = p(1-p)^{x-1}, \quad x = 1, 2, \dots, \\ P\{Y = y\} &= p^2(1-p)^{y-1} \sum_{x=1}^{\infty} (1-p)^{x-1} = p(1-p)^{y-1}, \quad y = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

从而 $P\{X = x, Y = y\} = P\{X = x\}P\{Y = y\}$, 故 X, Y 相互独立.

§5 两个随机变量的函数的分布

问题 3.21 (1) 由公式知

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x) dx, \quad 0 < x < 1, \quad x < z < x+1.$$

于是通过示意图可知

$$f_Z(z) = \begin{cases} \int_0^z z dx = z^2, & 0 < z < 1; \\ \int_{z-1}^1 z dx = z(2-z), & 1 \leq z < 2; \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

(2) 由公式知

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|x|} f\left(x, \frac{z}{x}\right) dx, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < z < x.$$

画出示意图后可知

$$f_Z(z) = \begin{cases} \int_z^1 \frac{1}{x} \left(x + \frac{z}{x}\right) dx = 2(1-z), & 0 < z < 1; \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

问题 3.26 由公式可知

$$f_Z(z) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x, xz) dx = \int_0^{+\infty} x e^{-x} e^{-xz} dx = \frac{1}{1+z^2}, & z > 0; \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

问题 3.31 (1) 由瑞利分布的概率密度函数

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{4} e^{-x^2/8}, & x \geq 0; \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

可知其分布函数为

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x^2/8}, & x \geq 0; \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

由于 $X_i (i = 1, 2, 3, 4, 5)$ 是独立同分布的随机变量, 所以有

$$F_{\max}(z) = \begin{cases} \left(1 - e^{-z^2/8}\right)^5, & z \geq 0; \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

(2) 容易知道

$$P\{Z > 4\} = 1 - F_{\max}(z = 4) = 0.51668.$$

问题 3.36 (1) 容易计算

$$P\{X = 2 \mid Y = 2\} = \frac{P\{X = 2, Y = 2\}}{P\{Y = 2\}} = \frac{0.05}{0.25} = \frac{1}{5},$$

$$P\{Y = 3 \mid X = 0\} = \frac{P\{Y = 3, X = 0\}}{P\{X = 0\}} = \frac{0.01}{0.03} = \frac{1}{3}.$$

(2) $V = \max\{X, Y\}$ 的分布律为

V	0	1	2	3	4	5
p_k	0	0.04	0.16	0.28	0.24	0.28

以其中一个为例

$$\begin{aligned} P\{V = 3\} &= P\{\max\{X, Y\} = 3\} \\ &= P\{X = 3, Y < 3\} + P\{X < 3, Y = 3\} + P\{X = 3, Y = 3\} = 0.15 + 0.07 + 0.06 = 0.28. \end{aligned}$$

(3) $U = \min\{X, Y\}$ 的分布律为

U	0	1	2	3
p_k	0.28	0.30	0.25	0.17

(4) $W = X + Y$ 的分布律为

V	0	1	2	3	4	5	6	7	8
p_k	0	0.02	0.06	0.13	0.19	0.24	0.19	0.12	0.05

第四章 随机变量的数字特征

§1 数学期望

问题 4.1 (1) 以 X 表示取到的单词所包含的字母个数, 则其分布律为

X	2	3	4	9
p_k	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

则期望 $E(X) = \frac{15}{4} = 3.75$.

(2) 以 Y 表示取到的字母所在单词所包含的字母数, 则其分布律为

Y	2	3	4	9
p_k	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{10}$

则期望 $E(Y) = \frac{73}{15} = 4.87$.

(3) 得到分布律为

X	1	2	3	4	5	7	8	9	10	11	12
p_k	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$

则期望 $E(Y) = \frac{49}{12} = 4.08$.

问题 4.6 (1) 容易计算得到

$$E(X) = (-2) \times 0.4 + 0 \times 0.3 + 2 \times 0.3 = -0.2,$$

$$E(X^2) = (-2)^2 \times 0.4 + 0^2 \times 0.3 + 2^2 \times 0.3 = 2.8,$$

$$E(3X^2 + 5) = 17 \times 0.4 + 5 \times 0.3 + 17 \times 0.3 = 13.4,$$

$$E(3X^2 + 5) = 3E(X^2) + 5 = 13.4.$$

(2) 因为 $X \sim \pi(\lambda)$, 即

$$P\{X = k\} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

于是有

$$E[1/(X+1)] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \cdot \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} (e^{\lambda} - 1) = \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda}.$$

问题 4.11 因为使用寿命小于 1 年的概率为

$$P\{X \leq 1\} = \int_0^1 \frac{1}{4} e^{-x/4} dx = 1 - e^{-1/4},$$

则 $P\{X > 1\} = e^{-1/4}$. 于是赢利的数学期望为

$$100 \times e^{-1/4} - 200 \times (1 - e^{-1/4}) = 33.6402.$$

问题 4.16 (1) 写出分布律

X	1	2	\dots	n
p_k	$\frac{1}{n}$	$\frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{n-1}$	\dots	$\frac{1}{n}$

所以期望是

$$E(X) = \sum_{i=1}^n i \cdot \frac{1}{n} = \frac{n+1}{2}.$$

(2) 如果不写出 X 分布律, 这时可假设有随机变量

$$X_1 = 1, \\ X_k = \begin{cases} 1, & \text{前 } k-1 \text{ 次均未找到合适的钥匙;} \\ 0, & \text{前 } k-1 \text{ 次中有一次试开成功.} \end{cases} \quad k = 2, 3, \dots, n.$$

那么 $E(X_1) = 1$, 同时对于 $k = 2, 3, \dots, n$ 可以求得

$$P\{X_k = 1\} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} \dots \frac{n-(k-1)}{n-k} = \frac{n-k+1}{n}, \\ E(X_k) = 1 \cdot P\{X_k = 1\} + 0 \cdot P\{X_k = 0\} = \frac{n-k+1}{n}.$$

于是最后我们有

$$E(X) = 1 + \sum_{k=2}^n E(X_k) = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{n-k+1}{n} = \frac{n+1}{2}.$$