

概率论与数理统计 (第四版)

2017 年 6 月 7 日

第二章 随机变量及其分布

§1 随机变量

§2 离散型随机变量及其分布律

问题 2.1	X	20	5	0
	p_k	0.0002	0.0010	0.9989

问题 2.6 以 X 记“同一时刻被使用的设备台数”，则

$$P\{X = k\} = \binom{5}{k} (0.1)^k (0.9)^{5-k}$$

$$(1) P\{X = 2\} = \binom{5}{2} (0.1)^2 (0.9)^3 = 0.0729$$

$$(2) 1 - \sum_{k=0}^2 P\{X = k\} = 0.00856$$

$$(3) 1 - \sum_{k=4}^5 P\{X = k\} = 0.99954$$

$$(4) 1 - P\{X = 0\} = 0.40951$$

问题 2.11 以 X 记“此地区每年撰写此类文章的篇数”，则 $X \sim \pi(6)$ ，故明年没有此类文章的概率为

$$P\{X = 0\} = \frac{\lambda^0 e^{-\lambda}}{0!} \Big|_{\lambda=6} = 0.00248.$$

问题 2.16 出事故的车辆数 X 服从二项分布，但 n 很大且 p 很小时，可近似认为其服从泊松分布，故令 $\lambda = np = 1000 \times 0.0001 = 0.1$ ，则有 $X \sim \pi(0.1)$ ，从而

$$P\{X \geq 2\} = 1 - P\{X = 0\} - P\{X = 1\} = 1 - e^{-0.1} - 0.1 \cdot e^{-0.1} = 0.00468.$$

§3 随机变量的分布函数

§4 连续型随机变量及其概率密度

问题 2.21 (1) 分布函数

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1; \\ 2x - 4 + \frac{2}{x}, & 1 \leq x < 2; \\ 1, & x \geq 2. \end{cases}$$

(2) 分布函数

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \frac{x^2}{2}, & 0 \leq x < 1; \\ -\frac{x^2}{2} + 2x - 1, & 1 \leq x < 2; \\ 1, & x \geq 2. \end{cases}$$

问题 2.26 考虑到 $X \sim N(3, 2^2)$, 则有

(1)

$$\begin{aligned} P\{2 < X \leq 5\} &= P\{X \leq 5\} - P\{X \leq 2\} = \Phi(1) - \Phi\left(-\frac{1}{2}\right) = \Phi(1) + \Phi\left(\frac{1}{2}\right) - 1 = 0.53281, \\ P\{-4 < X \leq 10\} &= \Phi\left(\frac{7}{2}\right) - \Phi\left(-\frac{7}{2}\right) = 2\Phi\left(\frac{7}{2}\right) - 1 = 0.99953, \\ P\{|X| > 2\} &= P\{X < -2\} + 1 - P\{X \leq 2\} = 1 + \Phi\left(-\frac{5}{2}\right) - \Phi\left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= 1 + \Phi\left(\frac{1}{2}\right) - \Phi\left(\frac{5}{2}\right) = 0.69767, \\ P\{X > 3\} &= 1 - P\{X \leq 3\} = 1 - \Phi(0) = 0.5. \end{aligned}$$

(2) 即求 $1 - P\{X \leq c\} = P\{X \leq c\}$, 即

$$P\{X \leq c\} = \Phi\left(\frac{c-3}{2}\right) = \frac{1}{2},$$

所以有 $c = 3$.

(3) 由 $P\{X > d\} \geq 0.9$, 可知 $1 - P\{X \leq d\} \geq 0.9$, 即 $P\{X \leq d\} \leq 0.1$, 而 $\Phi(-1.28155) = 0.1$, 所以

$$d = 2 \times (-1.28155) + 3 = 0.43690.$$

问题 2.31 以 A 记“指示灯亮绿灯”, 那么对于 $x \geq 0$, 利用全概率公式有

$$P\{X \leq x\} = P\{X \leq x | A\}P\{A\} + P\{X \leq x | \bar{A}\}P\{\bar{A}\}.$$

这里 $P\{A\} = 0.2$, $P\{\bar{A}\} = 0.8$, $P\{X \leq x | A\} = 1$, 而

$$P\{X \leq x | \bar{A}\} = \begin{cases} \frac{x}{30}, & 0 \leq x \leq 30; \\ 1, & x > 30. \end{cases}$$

于是

$$P\{X \leq x\} = \begin{cases} 0.2 + 0.8 \frac{x}{30}, & 0 \leq x \leq 30; \\ 1, & x > 30. \end{cases}$$

由此可得分布函数

$$F(x) = P\{X \leq x\} = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 0.2 + 0.8 \frac{x}{30}, & 0 \leq x < 30; \\ 1, & x \geq 30. \end{cases}$$

由于其分布函数在 $x = 0$ 处有断点, 所以 X 不是连续型随机变量, 但部分区间连续, 又导致其不是离散型.

§5 随机变量的函数的分布

问题 2.36 (1) 由于反函数 $x = h(y) = \sqrt[3]{y}$ 是严格单调增加的, 所以可根据公式知其概率密度为

$$f(y) = \frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}} f(\sqrt[3]{y}) (y \neq 0).$$

(2) 对于 $x > 0$ 而言, 其反函数 $x = h(y) = \sqrt{y}$ 是严格单调增加的, 所以可根据公式知其概率密度为

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}} e^{-\sqrt{y}}, & y > 0; \\ 0, & y \leq 0. \end{cases}$$

第三章 多维随机变量及其分布

§1 二维随机变量

问题 3.1 (1)

Y \ X	0	1
0	$\frac{25}{36}$	$\frac{5}{36}$
1	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{36}$

(2)

Y \ X	0	1
0	$\frac{45}{66}$	$\frac{5}{33}$
1	$\frac{5}{33}$	$\frac{1}{66}$

§2 边缘分布

问题 3.6 参见课本第 2 页中样本空间 S_2 的 8 个样本点, X 和 Y 取值情况如下:

样本点	HHH	HHT	HTH	THH	HTT	THT	TTH	TTT
X	2	2	1	1	1	1	0	0
Y	3	2	2	2	1	1	1	0

基于此可得 X 和 Y 的联合分布律和边缘分布律为:

Y \ X	0	1	2	$P\{Y = j\}$
0	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{3}{8}$
2	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$
3	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
$P\{X = i\}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

§3 条件分布

问题 3.11