Guía Completa y Detallada para Exámenes Parciales de Matemática III

21 de mayo de 2025

1. Probabilidad Básica: Fundamentos y Aplicaciones

Conceptos Fundamentales de la Probabilidad

La probabilidad se encarga del estudio de los **experimentos aleatorios**, que son aquellos que, incluso si se repiten bajo las mismas condiciones, no garantizan un resultado exacto, pero sí permiten conocer todos los resultados posibles.

- **Espacio Muestral (S)**: Es el conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio. Se puede describir por extensión (enumerando todos sus elementos, ej. $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ para un dado) o por comprensión (describiendo una propiedad común, ej. $S = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 6\}$). El cardinal de S, denotado como $\#S$, es el número de elementos si S es finito.
- **Evento o Suceso (A, B, ...)**: Cualquier subconjunto del espacio muestral S. Un evento puede ser simple (un solo resultado) o compuesto (varios resultados).
  - **Evento Seguro**: Es el propio espacio muestral S, ya que siempre ocurre.
  - **Evento Imposible**: Es el conjunto vacío ($\emptyset$), que nunca ocurre.
  - **Evento Elemental**: Es un evento que contiene un único resultado del espacio muestral.
- **Operaciones con Eventos**:
  - **Unión** ($A \cup B$): Ocurre si A ocurre, B ocurre, o ambos ocurren.
  - **Intersección** ($A \cap B$): Ocurre si tanto A como B ocurren simultáneamente.
  - **Complemento** (A^c **o** $\overline{A}$): Ocurre si A no ocurre.
- **Eventos Mutuamente Excluyentes**: Dos eventos A y B son mutuamente excluyentes si no pueden ocurrir al mismo tiempo, es decir, $A \cap B = \emptyset$. Si uno ocurre, el otro no puede ocurrir.
- **Axiomas de Probabilidad** (Kolmogorov):
  1. $P(A) \geq 0$ para cualquier evento A.
  2. $P(S) = 1$.
  3. Si $A_1, A_2, \ldots$ son eventos mutuamente excluyentes, entonces $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots$.
- **Reglas Fundamentales de Probabilidad:**
  - Probabilidad del complemento: $P(A^c) = 1 - P(A)$.
  - Regla de la adición para dos eventos: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

- Si A y B son mutuamente excluyentes: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

- **Independencia de Eventos:** Dos eventos A y B son independientes si la ocurrencia de uno no afecta la probabilidad de ocurrencia del otro.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Esta definición se puede extender a más de dos eventos.

- **Probabilidad Condicional:** Es la probabilidad de que ocurra un evento A, dado que ya ha ocurrido un evento B. Se define como:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad \text{siempre que } P(B) > 0$$

De aquí se deriva la regla de la multiplicación: $P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A)$.

Ejemplo Ilustrativo Resuelto

Ejemplo 1 (Adaptado de Parcial 2023 - Ej.1):
En una población de estudiantes, se sabe que el 30 % practica algún deporte (D), el 40 % estudia inglés (I), y el 10 % realiza ambas actividades (D ∩ I).

1. ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante elegido al azar realice al menos una de estas actividades? Solución: $P(D \cup I) = P(D) + P(I) - P(D \cap I) = 0{,}30 + 0{,}40 - 0{,}10 = 0{,}60$.

2. ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante elegido al azar no realice ninguna de estas actividades? Solución: Esto es el complemento del evento anterior.

$$P(\text{Ninguna}) = P((D \cup I)^c) = 1 - P(D \cup I) = 1 - 0{,}60 = 0{,}40.$$

3. ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante practique deportes, dado que estudia inglés? Solución: $P(D|I) = \dfrac{P(D \cap I)}{P(I)} = \dfrac{0{,}10}{0{,}40} = \dfrac{1}{4} = 0{,}25$.

2. Teorema de la Probabilidad Total y Teorema de Bayes

Teorema de la Probabilidad Total

Permite calcular la probabilidad de un evento B a partir de las probabilidades de B condicionado a una partición del espacio muestral. Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ forman una **partición** del espacio muestral S (es decir, son mutuamente excluyentes y su unión es S, con $P(A_i) > 0$ para todo i), entonces para cualquier evento B:

$$P(B) = \sum_{j=1}^{n} P(B|A_j) \cdot P(A_j)$$

Este teorema es la base para el denominador en el Teorema de Bayes.

Fórmula y Aplicación del Teorema de Bayes

El Teorema de Bayes se utiliza para actualizar la probabilidad de una hipótesis (evento A_i) basándose en nueva evidencia (evento B). Con la misma partición $A_1, A_2, \ldots, A_n$ del espacio muestral S:

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i) \cdot P(A_i)}{P(B)} = \frac{P(B|A_i) \cdot P(A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B|A_j) \cdot P(A_j)}$$

Donde:

- $P(A_i)$ es la **probabilidad a priori** del evento A_i.
- $P(B|A_i)$ es la **verosimilitud** del evento B dado A_i.
- $P(A_i|B)$ es la **probabilidad a posteriori** del evento A_i después de observar B.

Ejemplo Ilustrativo Resuelto

Ejemplo 2 (Adaptado de Parcial 2022 - Ej.2):
Una fábrica tiene tres inspectores (Insp.1, Insp.2, Insp.3) que revisan la calidad de los productos. El Insp.1 revisa el 20 % de los productos, el Insp.2 el 60 %, y el Insp.3 el 20 % restante. La probabilidad de que un producto defectuoso (D) sea detectado por el Insp.1 es 1/200, por el Insp.2 es 1/100, y por el Insp.3 es 1/150. Si se encuentra un producto defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido revisado por el Inspector 1?

Definimos los eventos:

- A_1: El producto fue revisado por el Insp.1. $P(A_1) = 0{,}20$.
- A_2: El producto fue revisado por el Insp.2. $P(A_2) = 0{,}60$.
- A_3: El producto fue revisado por el Insp.3. $P(A_3) = 0{,}20$.
- D: El producto es defectuoso y detectado.

Tenemos las verosimilitudes:

- $P(D|A_1) = 1/200 = 0{,}005$
- $P(D|A_2) = 1/100 = 0{,}01$
- $P(D|A_3) = 1/150 \approx 0{,}00667$

Queremos calcular $P(A_1|D)$. Usando el Teorema de Bayes:

$$P(A_1|D) = \frac{P(D|A_1) \cdot P(A_1)}{P(D|A_1)P(A_1) + P(D|A_2)P(A_2) + P(D|A_3)P(A_3)}$$

Calculamos el denominador (Probabilidad Total de D):

$$P(D) = (0{,}005 \cdot 0{,}20) + (0{,}01 \cdot 0{,}60) + (1/150 \cdot 0{,}20)$$

$$P(D) = 0{,}001 + 0{,}006 + \frac{0{,}20}{150} = 0{,}001 + 0{,}006 + 0{,}001333... = 0{,}008333...$$

Entonces:

$$P(A_1|D) = \frac{0{,}005 \cdot 0{,}20}{0{,}008333...} = \frac{0{,}001}{0{,}008333...} \approx 0{,}12$$

(Nota: El ejemplo original tenía puntos suspensivos, aquí se completó con un tercer inspector para ilustrar mejor el denominador completo).

3. Distribuciones de Probabilidad Discretas

Una **variable aleatoria discreta** (V.A.D.) es aquella que solo puede tomar un número finito o infinito numerable de valores. Su comportamiento probabilístico se describe mediante una **Función de Probabilidad Masa (PMF)**, $P(X = k)$ o $p(k)$, que asigna una probabilidad a cada valor posible k de la variable. Propiedades de la PMF:

1. $P(X = k) \geq 0$ para todo k.
2. $\sum_k P(X = k) = 1$.

La **Función de Distribución Acumulada (FDA)** o $F(x)$ para una V.A.D. es $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{k \leq x} P(X = k)$.

3.1 Distribución Binomial ($X \sim B(n, p)$)

Describe el número de éxitos en n ensayos de Bernoulli independientes, donde la probabilidad de éxito p es constante en cada ensayo.

- **Parámetros:**
  - n: número de ensayos (entero positivo).
  - p: probabilidad de éxito en un ensayo ($0 \leq p \leq 1$).
- **Rango de X:** $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.
- **Función de Probabilidad Masa (PMF):**

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

  donde $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ es el coeficiente binomial.
- **Esperanza (Valor Esperado):** $E(X) = np$.
- **Varianza:** $V(X) = np(1-p)$.
- **Desviación Estándar:** $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$.
- **Ejemplo:** Número de caras obtenidas al lanzar una moneda 10 veces. Número de piezas defectuosas en un lote de producción de 50 unidades si la probabilidad de defecto es 0.05.

3.2 Distribución de Poisson ($X \sim P(\lambda)$)

Modela el número de veces que ocurre un evento en un intervalo fijo de tiempo o espacio, cuando los eventos ocurren con una tasa media conocida e independientemente del tiempo transcurrido desde el último evento.

- **Parámetro:**
  - λ: tasa media de ocurrencia del evento en el intervalo ($\lambda > 0$). A menudo $\lambda = n \cdot p$ como aproximación de la Binomial cuando n es grande y p es pequeño.
- **Rango de X:** $k = 0, 1, 2, \ldots$.
- **Función de Probabilidad Masa (PMF):**

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

- **Esperanza:** $E(X) = \lambda$.
- **Varianza:** $V(X) = \lambda$.
- **Desviación Estándar:** $\sigma(X) = \sqrt{\lambda}$.
- **Ejemplo:** Número de llamadas recibidas en un call center en una hora. Número de defectos por metro cuadrado de tela.

3.3 Distribución Binomial Negativa ($X \sim BN(r, p)$)

Describe el número de ensayos k necesarios para obtener r éxitos en una secuencia de ensayos de Bernoulli independientes.

- **Parámetros:**
  - r: número de éxitos deseados (entero positivo).
  - p: probabilidad de éxito en un ensayo ($0 < p \leq 1$).
- **Rango de X:** $k = r, r + 1, r + 2, \ldots$. (El último ensayo debe ser un éxito).
- **Función de Probabilidad Masa (PMF):**

$$P(X = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}$$

- **Esperanza:** $E(X) = \frac{r}{p}$.
- **Varianza:** $V(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}$.
- **Ejemplo:** Número de lanzamientos de un dado hasta obtener el tercer '6'. Número de clientes a entrevistar hasta encontrar 5 que prefieran un producto.

3.4 Distribución Geométrica ($X \sim Geom(p)$)

Es un caso especial de la Binomial Negativa con $r = 1$. Describe el número de ensayos k hasta obtener el primer éxito.

- **Parámetro:**
  - p: probabilidad de éxito en un ensayo ($0 < p \leq 1$).
- **Rango de X:** $k = 1, 2, 3, \ldots$.
- **Función de Probabilidad Masa (PMF):**

$$P(X = k) = (1-p)^{k-1} p$$

- **Esperanza:** $E(X) = \frac{1}{p}$.
- **Varianza:** $V(X) = \frac{1-p}{p^2}$.
- **Propiedad de Falta de Memoria:** $P(X > s + t | X > s) = P(X > t)$.
- **Ejemplo:** Número de veces que se lanza una moneda hasta que sale cara por primera vez.

Nota: A veces se define la Geométrica como el número de fallos antes del primer éxito, $Y = X - 1$. En ese caso, $P(Y = y) = (1-p)^y p$ para $y = 0, 1, 2, ...$, $E(Y) = (1-p)/p$, $V(Y) = (1-p)/p^2$. Es importante verificar la definición utilizada.

3.5 Distribución Hipergeométrica ($X \sim H(N, K, n)$)

Modela el número de éxitos k en una muestra de tamaño n extraída **sin reemplazo** de una población finita de tamaño N que contiene K elementos con la característica de interés (éxitos).

- **Parámetros:**
  - N: tamaño total de la población (entero positivo).
  - K: número de éxitos en la población (entero positivo, $K \leq N$).
  - n: tamaño de la muestra extraída (entero positivo, $n \leq N$).
- **Rango de X:** $\text{máx}(0, n - (N - K)) \leq k \leq \text{mín}(n, K)$.
- **Función de Probabilidad Masa (PMF):**

$$P(X = k) = \frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

- **Esperanza:** $E(X) = n \cdot \frac{K}{N}$. (Similar a la Binomial, donde $p = K/N$).
- **Varianza:** $V(X) = n \cdot \frac{K}{N} \cdot \left(1 - \frac{K}{N}\right) \cdot \frac{N-n}{N-1}$. El término $\frac{N-n}{N-1}$ es el **factor de corrección para poblaciones finitas**. Si N es mucho mayor que n, este factor tiende a 1 y la Hipergeométrica se aproxima a la Binomial.
- **Ejemplo:** De una urna con 10 bolas (6 rojas, 4 azules), se extraen 3 bolas sin reemplazo. Probabilidad de sacar exactamente 2 bolas rojas.

4. Distribuciones de Probabilidad Continuas

Una **variable aleatoria continua** (V.A.C.) puede tomar cualquier valor dentro de un intervalo o conjunto de intervalos. Su comportamiento probabilístico se describe mediante una **Función de Densidad de Probabilidad (PDF)**, $f(x)$. Propiedades de la PDF:

1. $f(x) \geq 0$ para todo x.
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.
3. $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$.

Para una V.A.C., $P(X = c) = 0$ para cualquier constante c. La **Función de Distribución Acumulada (FDA)** o $F(x)$ para una V.A.C. es $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$. Además, $f(x) = F'(x)$ donde la derivada exista. La **Esperanza** se calcula como $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$. La **Varianza** se calcula como $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \int_{-\infty}^{\infty}(x - E(X))^2 f(x)dx$.

4.1 Distribución Normal (o Gaussiana) ($X \sim N(\mu, \sigma^2)$)

Es una de las distribuciones más importantes en estadística, debido al Teorema del Límite Central. Su gráfica es una curva en forma de campana, simétrica alrededor de la media.

- **Parámetros:**
  - μ: media de la distribución (cualquier valor real). Determina la ubicación central de la campana.
  - σ^2: varianza de la distribución ($\sigma^2 > 0$). σ es la desviación estándar y determina la dispersión de la curva.

- **Rango de X:** $-\infty < x < \infty$.
- **Función de Densidad de Probabilidad (PDF):**

$$f(x;\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

- **Esperanza:** $E(X) = \mu$.
- **Varianza:** $V(X) = \sigma^2$.
- **Desviación Estándar:** $\mathrm{DE}(X) = \sigma$.
- **Estandarización (Transformación a Normal Estándar):** Si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, entonces la variable $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ sigue una distribución normal estándar, $Z \sim N(0,1)$. La PDF de Z es $\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$. Las probabilidades se calculan usando tablas de la distribución N(0,1) o software. $P(X \leq a) = P\left(Z \leq \frac{a-\mu}{\sigma}\right)$.
- **Propiedades:**
  - Simétrica respecto a μ.
  - Media, mediana y moda coinciden en μ.
  - Combinaciones lineales de variables normales independientes también son normales. Si $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ son independientes, entonces $\sum a_i X_i \sim N(\sum a_i \mu_i, \sum a_i^2 \sigma_i^2)$.

4.2 Distribución Exponencial ($X \sim Exp(\lambda)$)

Modela el tiempo hasta que ocurre un evento en un proceso de Poisson, o el tiempo entre eventos sucesivos en dicho proceso.

- **Parámetro:**
  - λ: tasa de ocurrencia del evento ($\lambda > 0$). Es el inverso de la media.
- **Rango de X:** $x \geq 0$.
- **Función de Densidad de Probabilidad (PDF):**

$$f(x;\lambda) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad \text{para } x \geq 0$$

  y $f(x;\lambda) = 0$ para $x < 0$.
- **Función de Distribución Acumulada (FDA):**

$$F(x;\lambda) = P(X \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad \text{para } x \geq 0$$

  y $F(x;\lambda) = 0$ para $x < 0$.
- **Esperanza:** $E(X) = \frac{1}{\lambda}$.
- **Varianza:** $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$.
- **Desviación Estándar:** $\sigma(X) = \frac{1}{\lambda}$.
- **Propiedad de Falta de Memoria:** $P(X > s+t | X > s) = P(X > t)$. Similar a la geométrica, si un ítem ha sobrevivido un tiempo s, la probabilidad de que sobreviva un tiempo adicional t es la misma que la de un ítem nuevo sobreviviendo un tiempo t.
- **Ejemplo:** Tiempo de vida de un componente electrónico. Tiempo entre la llegada de clientes a un servicio.

Nota: A veces se parametriza con $\theta = 1/\lambda$, donde θ es la media. Entonces $f(x;\theta) = (1/\theta)e^{-x/\theta}$, $E(X) = \theta$, $V(X) = \theta^2$.

4.3 Distribución Uniforme Continua ($X \sim U(a,b)$)

Describe una variable aleatoria donde todos los valores en un intervalo $[a,b]$ son igualmente probables.

- **Parámetros:**
  - a: límite inferior del intervalo (cualquier valor real).
  - b: límite superior del intervalo (cualquier valor real, $b > a$).
- **Rango de X:** $a \leq x \leq b$.
- **Función de Densidad de Probabilidad (PDF):**

$$f(x;a,b) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- **Función de Distribución Acumulada (FDA):**

$$F(x;a,b) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases}$$

- **Esperanza:** $E(X) = \frac{a+b}{2}$. (El punto medio del intervalo).
- **Varianza:** $V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.
- **Ejemplo:** Tiempo de espera de un autobús que llega cada 15 minutos con igual probabilidad en cualquier instante dentro de ese lapso ($U(0,15)$). Errores de redondeo.

5. Teorema del Límite Central (TCL)

El Teorema del Límite Central es uno de los resultados más fundamentales en la teoría de la probabilidad y la estadística. Establece que, bajo ciertas condiciones, la distribución de la suma (o la media) de un gran número de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d.) tiende a una distribución normal, independientemente de la forma de la distribución original de las variables.

5.1 Enunciado Clásico (para la media muestral)

Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d.) con media finita $E(X_i) = \mu$ y varianza finita $V(X_i) = \sigma^2 > 0$. Sea $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ la media muestral. Entonces, a medida que $n \to \infty$, la distribución de la media muestral estandarizada converge en distribución a una normal estándar:

$$Z_n = \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

Esto implica que para n suficientemente grande (generalmente $n \geq 30$ es una regla práctica común, aunque puede variar dependiendo de la simetría de la distribución original):

$$\overline{X}_n \overset{aprox}{\sim} N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

Y para la suma $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i = n\overline{X}_n$:

$$S_n \overset{aprox}{\sim} N\left(n\mu, n\sigma^2\right)$$

5.2 Casos Especiales y Aproximaciones (Continuación del TCL)

- **Aproximación de la Binomial a la Normal:** Si $X \sim B(n,p)$, entonces X puede considerarse como la suma de n variables de Bernoulli i.i.d. ($X_i \sim Bern(p)$), donde $E(X_i) = p$ y $V(X_i) = p(1-p)$. Por el TCL, si n es suficientemente grande, entonces:

$$X \overset{aprox}{\sim} N(np, np(1-p))$$

  La aproximación se considera buena si $np \geq 5$ y $n(1-p) \geq 5$. Al pasar de una distribución discreta (Binomial) a una continua (Normal), se suele aplicar una **corrección por continuidad**. Por ejemplo:

  - $P(X \leq k) \approx P(Y \leq k + 0{,}5)$, donde Y es la Normal.
  - $P(X \geq k) \approx P(Y \geq k - 0{,}5)$, donde Y es la Normal.
  - $P(X = k) \approx P(k - 0{,}5 \leq Y \leq k + 0{,}5)$, donde Y es la Normal.

- **Aproximación de la Poisson a la Normal:** Si $X \sim P(\lambda)$, y λ es suficientemente grande (usualmente $\lambda > 20$ **o** $\lambda > 30$, aunque algunos textos usan $\lambda > 5$ o $\lambda > 10$), entonces:

$$X \overset{aprox}{\sim} N(\lambda, \lambda)$$

  (ya que para la Poisson, $E(X) = \lambda$ y $V(X) = \lambda$). También se puede aplicar una corrección por continuidad si es necesario, similar a la Binomial.

5.3 Aplicaciones Prácticas del TCL

El TCL es fundamental para la inferencia estadística (intervalos de confianza, pruebas de hipótesis) porque permite hacer afirmaciones sobre la media poblacional incluso cuando no se conoce la distribución de la población, siempre que la muestra sea lo suficientemente grande.

- **Ejemplo 1 (Media Muestral con Distribución Conocida):** Se toma una muestra de $n = 10$ tornillos de un proceso de producción donde la longitud de los tornillos X sigue una distribución $N(30 \text{ mm}, \sigma^2 = 1 \text{ mm}^2)$. ¿Cuál es la probabilidad de que la longitud media de la muestra $\overline{X}$ sea mayor a 30.5 mm? Como la población es normal, $\overline{X}$ es exactamente normal (no se necesita TCL para la forma, pero sí para los parámetros si la población no fuera normal).

$$\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \Rightarrow \overline{X} \sim N\left(30, \frac{1}{10}\right) = N(30, 0{,}1)$$

  La desviación estándar de $\overline{X}$ es $\sigma_{\overline{X}} = \sqrt{0{,}1} \approx 0{,}316$.

$$P(\overline{X} > 30{,}5) = P\left(Z > \frac{30{,}5 - 30}{\sqrt{0{,}1}}\right) = P\left(Z > \frac{0{,}5}{0{,}316}\right) \approx P(Z > 1{,}58)$$

  Usando tablas N(0,1), $P(Z > 1{,}58) = 1 - P(Z \leq 1{,}58) \approx 1 - 0{,}9429 = 0{,}0571$. (Nota: El ejemplo original decía "para n ¿= 30", pero si la población es Normal, la media muestral es Normal para cualquier n. Si la población NO fuera Normal, se requeriría n ¿= 30 para aplicar el TCL).

- **Ejemplo 2 (Suma de Variables Aleatorias con Distribución Conocida usando TCL):** La vida útil de 35 focos ($n = 35$) sigue una distribución Exponencial con media $1/\lambda = 50$ horas. Entonces $E(X_i) = \mu = 50$ y $V(X_i) = \sigma^2 = (1/\lambda)^2 = 50^2 = 2500$. Queremos calcular la probabilidad de que la suma de sus vidas útiles, $S_{35} = \sum_{i=1}^{35} X_i$, sea mayor a 1800 horas. Como $n = 35 \geq 30$, podemos usar el TCL para la suma. $E(S_{35}) = n\mu = 35 \cdot 50 = 1750$ horas.

$V(S_{35}) = n\sigma^2 = 35 \cdot 2500 = 87500$. La desviación estándar de S_{35} es $\sigma_{S_{35}} = \sqrt{87500} \approx 295{,}804$. Así, $S_{35} \overset{aprox}{\sim} N(1750, 87500)$.

$$P(S_{35} > 1800) = P\left(Z > \frac{1800 - 1750}{\sqrt{87500}}\right) = P\left(Z > \frac{50}{295{,}804}\right) \approx P(Z > 0{,}169)$$

Usando tablas N(0,1), $P(Z > 0{,}169) = 1 - P(Z \leq 0{,}169) \approx 1 - 0{,}5671 = 0{,}4329$. (El valor exacto de P(Z ¡= 0.169) puede variar ligeramente según la tabla o software).

6. Conceptos Adicionales: Esperanza, Varianza y Covarianza (si aplica a la materia)

El PDF también menciona conceptos relacionados con múltiples variables, como la covarianza. Si bien no estaba en tu resumen original, son fundamentales en probabilidad y estadística.

Esperanza y Varianza de Combinaciones Lineales

Sea X una variable aleatoria, a y b constantes.

- $E(aX + b) = aE(X) + b$
- $V(aX + b) = a^2V(X)$

Para dos variables aleatorias X e Y:

- $E(aX + bY + c) = aE(X) + bE(Y) + c$

Covarianza

La covarianza mide la relación lineal conjunta entre dos variables aleatorias X e Y.

$$\text{Cov}(X, Y) = \sigma_{XY} = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = E(XY) - E(X)E(Y)$$

- Si $\text{Cov}(X, Y) > 0$, tienden a moverse en la misma dirección.
- Si $\text{Cov}(X, Y) < 0$, tienden a moverse en direcciones opuestas.
- Si $\text{Cov}(X, Y) = 0$, no hay una relación lineal (pero podría haber otras relaciones). **Si X e Y son independientes, entonces Cov(X,Y) = 0**. Lo contrario no siempre es cierto (a menos que sean Normales).

Propiedades de la Varianza con Covarianza:

$$V(aX + bY + c) = a^2V(X) + b^2V(Y) + 2ab \cdot \text{Cov}(X, Y)$$

Un caso particular importante:

$$V(X \pm Y) = V(X) + V(Y) \pm 2 \cdot \text{Cov}(X, Y)$$

Si X e Y son independientes, entonces $\text{Cov}(X, Y) = 0$, y:

$$V(aX + bY + c) = a^2V(X) + b^2V(Y)$$

Coeficiente de Correlación (Pearson)

Es una medida estandarizada de la relación lineal entre X e Y.

$$\rho(X,Y) = \text{Corr}(X,Y) = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

Donde σ_X y σ_Y son las desviaciones estándar de X e Y, respectivamente.

- $-1 \leq \rho(X,Y) \leq 1$.
- $\rho = 1$ indica una relación lineal positiva perfecta.
- $\rho = -1$ indica una relación lineal negativa perfecta.
- $\rho = 0$ indica ausencia de relación lineal.

Ejemplo de Aplicación de Covarianza (de tu PDF)

Si $E(X) = 3$, $E(Y) = 4$, $V(X) = 0{,}05$, $V(Y) = 0{,}03$, $\text{Cov}(X,Y) = 0{,}01$. Calcular $E(Z)$ y $V(Z)$ para $Z = 100X + 200Y$.

- $E(Z) = E(100X + 200Y) = 100E(X) + 200E(Y) = 100(3) + 200(4) = 300 + 800 = 1100$.
- $V(Z) = V(100X+200Y) = 100^2V(X)+200^2V(Y)+2\cdot100\cdot200\cdot\text{Cov}(X,Y)$ $V(Z) = 10000(0{,}05)+40000(0{,}03) + 40000(0{,}01)$ $V(Z) = 500 + 1200 + 400 = 2100$.

Otro ejemplo del PDF: $V(X - Y) = V(X) + V(Y) - 2\text{Cov}(X,Y)$.