Matemática III

Apuntes de clase

1) Probabilidad

Se tiene un evento A asociado a un experimento ε. N_A será el número de veces que el evento A ocurre en las N repeticiones de ε. A partir de esto se define cómo **frecuencia relativa de A** (y se simboliza f_A) al cociente $(N_A) / N$, siendo este la **proporción de veces que ocurre A en las N repeticiones de** $\boldsymbol{\varepsilon}$**.**

Para encontrar la probabilidad de que A ocurra deberíamos probar N cada vez más grande. Fácilmente diríamos que mediante el límite de N que tiende a infinito podríamos definir la probabilidad de A. Pero esto no es así, ya que el evento A ocurre aleatoriamente, no tiene por qué aparecer en N veces incluso.

¿Cómo resolvemos esto? Con la **definición axiomática de la probabilidad:**

> Sea ε un experimento aleatorio y S un espacio muestral asociado con ε . Con cada evento A asociamos un número real llamado probabilidad de A, que anotamos P(A), el cual satisface las siguientes propiedades básicas o axiomas:

1- $0 \le P(A) \le 1$

2- $P(S) = 1$

3- Si A y B son eventos mutuamente excluyentes entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

4- Si $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}, \ldots$ es una secuencia de eventos tales que

$$A_i \cap A_j = \varnothing \quad \text{si } i \neq j, \text{ entonces } P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Propiedades de la probabilidad y espacios muestrales finitos

1. $P(\varnothing) = 0$
2. Si el complemento de A es el evento complementario de A, entonces:

$$P(A^C) = 1 - P(A)$$

3. Si $A \subset B$ entonces:

$$P(A) \le P(B)$$

4. Si $A \subset B$, entonces:

$$P(B - A) = P(B) - P(A)$$

5. Si A y B son dos eventos cualesquiera, entonces:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

6. Si tengo tres eventos cualesquiera A, B y C, entonces:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Esto se puede generalizar para *n* eventos A cualesquiera de esta manera:

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - .....+(-1)^{n-1} P(A_1 \cap A_2 \cap .... \cap A_n)$$

7. Téngase *n* eventos A cualesquiera tales que $(A_i \cap A_j) = \emptyset$ con $i \neq j$ entonces:

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

> **NOTA**
>
> “Se elige al azar” =
> = “Cada uno de los elementos tienen la misma posibilidad de ser elegidos” =
> = “Espacio muestral equiprobable”.

Espacios muestrales infinitos

Dado un espacio muestral **infinito numerable** $S = \{a_1; a_2; a_3; a_4; a_5; \ldots\}$, así como en los espacios muestrales finitos, a cada a_i asignamos un número $p_i = \{a_i\}$ tal que:

a) $p_i >= 0$;

b) $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$: la probabilidad P(A) del evento A es la suma de todas las probabilidades de los eventos elementales que lo componen (infinitos).

Un espacio muestral infinito numerable (*S*) **no puede ser equiprobable:**

si *S* fuera equiprobable, entonces todos los eventos elementales divergen al infinito, lo cuál contradice **b)** $(1 \neq \infty)$.

Dado un espacio muestral **infinito NO numerable** *S* (tiene medida finita); si se elige de *S* un elemento al azar:

- *S* puede ser un intervalo real, en este caso la medida de *S* es su **longitud** 📏;
- *S* puede ser una región del plano, por ejemplo todos los puntos (x,y) de un círculo, de un rectángulo, etc. entonces la medida es su **área** ⬛;
- *S* puede ser una región del espacio tridimensional, en este caso la medida de *S* es su **volumen** 🪩.

2) Probabilidad condicional

Sean A y B dos eventos de un espacio muestral S, la probabilidad condicional de B dado A se define como:

$$P(B/A)=P(A\cap B)/P(A),\, P(A)\neq 0\,;$$

análogamente…

$$P(A/B)=P(A\cap B)/P(B),\, P(B)\neq 0.$$

Además, si A y B son eventos de un espacio muestral S **equiprobable**, entonces:

$$P(B/A)=P(A\cap B)/P(A)=|(A\cap B)|/|(A)|.$$

(| A | es lo mismo que #A).

Teorema de la multiplicación

Si A y B son dos eventos entonces $P(B/A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$

Por lo tanto

$$P(A\cap B)=P(B/A)\,P(A)$$