Matemática III

Apuntes de clase

0) Técnicas de conteo

Tabla resumen:

Técnica	**Descripción**
Principio Fundamental del Conteo	Si un evento puede ocurrir en n_1 formas y otro en n_2 formas, el número total de formas en que ambos pueden ocurrir es $n_1 * n_2$. Se extiende a más eventos multiplicando sus posibilidades.
Permutaciones	Ordenamiento de elementos en un conjunto. Si hay *n* elementos distintos, el número de permutaciones es *n!*
Permutaciones con repetición	Si algunos elementos se repiten, la fórmula es $\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!\ldots n_k!}$, donde $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k$ son las repeticiones de cada tipo de elemento.
Combinaciones	Selección de elementos sin importar el orden. Se calcula como $C(n,k)=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ donde *n* es el total de elementos y *k* los seleccionados.

1) Probabilidad

Se tiene un evento A asociado a un experimento *ε*. N_A será el número de veces que el evento A ocurre en las N repeticiones de *ε*. A partir de esto se define cómo **frecuencia relativa de A** (y se simboliza f_A) al cociente (N_A) / N, siendo este la **proporción de veces que ocurre A en las N repeticiones de *ε*.**

Para encontrar la probabilidad de que A ocurra deberíamos probar N cada vez más grande. Fácilmente diríamos que mediante el límite de N que tiende a infinito podríamos definir la probabilidad de A. Pero esto no es así, ya que el evento A ocurre aleatoriamente, no tiene por qué aparecer en N veces incluso.

¿Cómo resolvemos esto? Con la **definición axiomática de la probabilidad:**

> Sea ε un experimento aleatorio y S un espacio muestral asociado con ε . Con cada evento A asociamos un número real llamado probabilidad de A, que anotamos P(A), el cual satisface las siguientes propiedades básicas o axiomas:

1- $0 \le P(A) \le 1$

2- $P(S) = 1$

3- Si A y B son eventos mutuamente excluyentes entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

4- Si $A_1, A_2, ..., A_n, A_{n+1}, ...$ es una secuencia de eventos tales que

$$A_i \cap A_j = \varnothing \quad \text{si } i \neq j, \text{ entonces } P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Propiedades de la probabilidad y espacios muestrales finitos

1. P(Ø) = 0
2. Si el complemento de A es el evento complementario de A, entonces:

$$P(A^C) = 1 - P(A)$$

3. Si $A \subset B$ entonces:

$$P(A) \leq P(B)$$

4. Si $A \subset B$, entonces:

$$P(B - A) = P(B) - P(A)$$

5. Si A y B son dos eventos cualesquiera, entonces:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

6. Si tengo tres eventos cualesquiera A, B y C, entonces:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Esto se puede generalizar para *n* eventos A cualesquiera de esta manera:

7.

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \ldots\ldots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots\ldots \cap A_n)$$

Téngase *n* eventos A cualesquiera tales que $(A_i \cap A_j) = \emptyset$ con $i \neq j$ entonces:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

NOTA

"Se elige al azar" =
= "Cada uno de los elementos tienen la misma posibilidad de ser elegidos" =
= "Espacio muestral equiprobable".

Espacios muestrales infinitos

Dado un espacio muestral **infinito numerable** $S = \{a_1; a_2; a_3; a_4; a_5; \ldots\}$, así como en los espacios muestrales finitos, a cada a_i asignamos un número $p_i = \{a_i\}$ tal que:

a) $p_i >= 0$;

b) $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$: la probabilidad P(A) del evento A es la suma de todas las probabilidades de los eventos elementales que lo componen (infinitos).

Un espacio muestral infinito numerable (*S*) **no puede ser equiprobable:**

si *S* fuera equiprobable, entonces todos los eventos elementales divergen al infinito, lo cuál contradice **b)** ($1 \neq \infty$).

Dado un espacio muestral **infinito NO numerable** *S* (tiene medida finita); si se elige de *S* un elemento al azar:

- *S* puede ser un intervalo real, en este caso la medida de *S* es su **longitud** 📏;
- *S* puede ser una región del plano, por ejemplo todos los puntos (x,y) de un círculo, de un rectángulo, etc. entonces la medida es su **área** ⬛;
- *S* puede ser una región del espacio tridimensional, en este caso la medida de *S* es su **volumen** 🪩.

2) Probabilidad condicional

Sean *A* y *B* dos eventos de un espacio muestral *S*, la probabilidad condicional de *B* dado *A* se define como:

$$P(B/A) = P(A \cap B)/P(A), P(A) \neq 0;$$

análogamente…

$$P(A/B) = P(A \cap B)/P(B), P(B) \neq 0.$$

Además, si *A* y *B* son eventos de un espacio muestral *S* **equiprobable**, entonces:

$$P(B/A) = P(A \cap B)/P(A) = |(A \cap B)|/|(A)|.$$

(| A | es lo mismo que #A).

Teorema de la multiplicación

Si *A* y *B* son dos eventos entonces $P(B/A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$

Por lo tanto

$$P(A \cap B) = P(B/A)\,P(A)$$

Si A_1, A_2, A_3 son tres eventos entonces

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1 \cap A_2)$$

pues:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(B \cap A_3) = P(B)P(A_3 / B) = P(A_1 \cap A_2)P(A_3 / A_1 \cap A_{23}) =$$

$B = A_1 \cap A_2$ Teorema de la multiplicación

$$= P(A_1)P(A_2 / A_1)P(A_3 / A_1 \cap A_2)$$

Teorema de la multiplicación

Independencia de eventos

Sean A y B eventos de un espacio muestral S, si P(B/A) = P(B) entonces saber que A ocurrió no modifica la probabilidad de ocurrencia de B. Entonces se dice que A y B son independientes. En cambio, si P(B/A) != P(B), A y B son dependientes.

1. Si A y B son independientes veamos a qué es igual P(A ∩ B):

   P(A ∩ B) =
   = *(teorema de la multiplicación)* P(A) * P(B/A) =
   = *(independencia)* P(A) * P(B)

2. Supongamos que A y B son eventos tales que P(A ∩ B) = P(A) * P(B):

   Entonces P(B/A) =
   = P(A ∩ B) / P(A) =
   = (~~P(A)~~ * P(B)) / ~~P(A)~~ =
   = P(B)

De estos dos resultados se obtiene que:

*A y B son eventos independientes <=> P(A ∩ B) = P(A) * P(B)*

Ejemplo:

“Se lanza un dado normal dos veces”.

Evento muestral #S = 6 * 6 = 36.

A = “en el primer tiro sale un 4”.
A = {(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6)}
P(A) = 6/36 = 1/6

B = “la suma de los números obtenidos es 5”.
B = {(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)}
P(B) = 4/36 = 1/9

C = “la suma de los números obtenidos es 7”.
C = {(1.6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)}
P(C) = 6/36 = 1/6

¿A y C son independientes?
P(A ∩ C) = 1/36 = 1/6 * 1/6 = P(A) * P(C). ∴ **A y C son independientes.**

3) Variables aleatorias

Sea ε un experimento aleatorio y S un espacio muestral asociado a él, una **variable aleatoria** es una función que asigna a cada elemento de S un número real.

Ejemplo:

X: "la suma de las resistencias elegidas"
$R_X = \{28,29,30,31,32\}$

Se considera el rango R_X como un nuevo espacio muestral, y si $B \subset R_X$, entonces B es un evento de R_X.

Anotamos a los elementos de R_X como:
$\{X = 28\},\{X = 29\},\{X = 30\},\{X = 31\},\{X = 32\}$

Para calcular $P(X = 28)$, se busca en el espacio muestral S original el evento equivalente a $\{X = 28\}$. $\{X = 28\}$ es equivalente a $\{(9,19)\}$.

- $P(X = 28) = P(\{(9,19)\}) = 1/9$
- $P(X = 29) = P(\{(9,20)\}) = 2/9$
- $P(X = 30) = P(\{(9,21),(10,20),(11,19)\}) = 2/9$

X_i	**28**	**29**	**30**	**31**	**32**
$P(X_i)$	1/9	2/9	3/9	2/9	1/9

Variables aleatorias discretas

Sea X una variable aleatoria en rango R_X. Si R_X es finito o infinito numerado entonces X es variable aleatoria **discreta**.

Anotamos $R_X = \{x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n\}$. $P(x_i) = P(X = x_i)$. Estos números deben satisfacer las condiciones siguientes:

a) $p(x_i) \geq 0$ para todo i
b) $\sum_i p(x_i) = 1$

Ejemplo:

Se tira una moneda normal tres veces, sea la v.a. X: "número de caras obtenidas".

Entonces $R_X = \{0,1,2,3\}$

Para hallar la distribución de probabilidad de X supongamos que la probabilidad de salir cara es ½ entonces

$$P(X = 0) = P(\{(s,s,s)\}) = \frac{1}{8}$$

$$P(X=1)=P(\{(c,s,s);(s,c,s);(s,s,c)\})=\frac{3}{8}$$

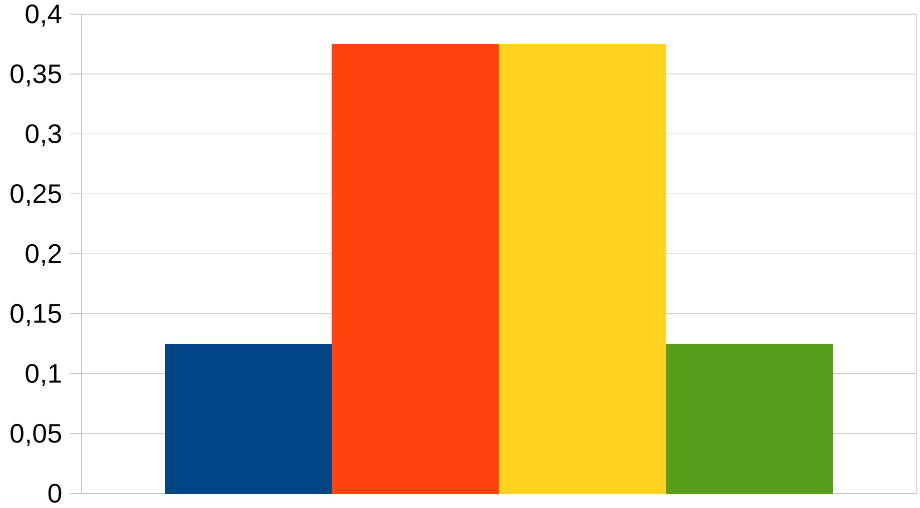
$$P(X=2)=P(\{(c,c,s);(s,c,c);(c,s,c)\})=\frac{3}{8}$$

$$P(X=3)=P(\{(c,c,c)\})=\frac{1}{8}$$

Se puede presentar la distribución de probabilidad de X en una tabla de la siguiente forma

x	0	1	2	3
$p(x)$	1/8	3/8	3/8	1/8

Un gráfico de la distribución de probabilidad de X sería:



Función de distribución acumulada

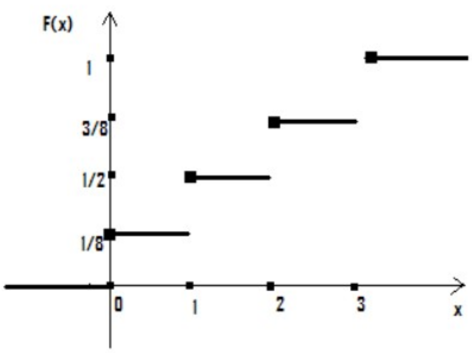
Sea X una v.a. con rango R_X. Se define la función de distribución acumulada de X (abreviamos F.d.a de X) como:

$$F(x) = P(X \leq x) \; ; -\infty < x < \infty$$

En el caso de ser X una v.a. discreta:

$$F(x)=P(X\leq x)=\sum_{x_i \leq x} p(x_i) \qquad -\infty < x < \infty$$

En general si X es una v.a. discreta cualquiera, su F.d.a. será una función escalonada. Por ejemplo:



<u>Observación</u>: la F.d.a. de X es una función escalonada, los puntos de "salto" coinciden con los puntos del rango de X, y la magnitud del salto en x_i es igual a $P(X = x_i)$.

Para números cualesquiera a y b

1- Si $a \le b$ entonces $P(a \le X \le b) = P(X \le b) - P(X < a)$

2- Si $a < b$ entonces $P(a < X \le b) = P(X \le b) - P(X \le a)$

3- Si $a < b$ entonces $F(a) \le F(b)$ (es decir $F(x)$ es una función creciente)

Esperanza de una v.a. discreta

Sea X una v.a. discreta con rango R_X. La ***esperanza , valor medio o valor esperado de X*** , lo anotamos $E(X)$, y se define como

$$E(X) = \sum_{x_i \in R_X} x_i P(X = x_i)$$

La sumatoria se hace sobre todos los posibles valores de X
Otra notación usual es μ_X o μ

Ejemplo:

Sea la v.a. X: "número que queda en la cara de arriba al tirar un dado normal" $R_X = \{1,2,3,4,5,6\}$

Entonces $E(X) = \sum_{x=1}^{6} xP(X = x) =$

$= 1P(X = 1) + 2P(X = 2) + 3P(X = 3) + 4P(X = 4) + 5P(X = 5) + 6P(X = 6) =$

$= \boxed{1\times\frac{1}{6} + 2\times\frac{1}{6} + 3\times\frac{1}{6} + 4\times\frac{1}{6} + 5\times\frac{1}{6} + 6\times\frac{1}{6} = \frac{7}{2} = 3.5}$