Matemática III

Apuntes de clase

0) Técnicas de conteo

Tabla resumen:

Técnica	Descripción
Principio Fundamental del Conteo	Si un evento puede ocurrir en n_1 formas y otro en n_2 formas, el número total de formas en que ambos pueden ocurrir es $n_1 * n_2$. Se extiende a más eventos multiplicando sus posibilidades.
Permutaciones	Ordenamiento de elementos en un conjunto. Si hay n elementos distintos, el número de permutaciones es $n!$
Permutaciones con repetición	Si algunos elementos se repiten, la fórmula es $\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!...n_k!}$, donde $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k$ son las repeticiones de cada tipo de elemento.
Combinaciones	Selección de elementos sin importar el orden. Se calcula como $C(n,k)=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ donde n es el total de elementos y k los seleccionados.

1) Probabilidad

Se tiene un evento A asociado a un experimento ε. N_A será el número de veces que el evento A ocurre en las N repeticiones de ε. A partir de esto se define cómo **frecuencia relativa de A** (y se simboliza f_A) al cociente (N_A) / N, siendo este la **proporción de veces que ocurre A en las N repeticiones de ε.**

Para encontrar la probabilidad de que A ocurra deberíamos probar N cada vez más grande. Fácilmente diríamos que mediante el límite de N que tiende a infinito podríamos definir la probabilidad de A. Pero esto no es así, ya que el evento A ocurre aleatoriamente, no tiene por qué aparecer en N veces incluso.

¿Cómo resolvemos esto? Con la **definición axiomática de la probabilidad:**

> Sea ε un experimento aleatorio y S un espacio muestral asociado con ε . Con cada evento A asociamos un número real llamado probabilidad de A, que anotamos P(A), el cual satisface las siguientes propiedades básicas o axiomas:

1- $0 \leq P(A) \leq 1$

2- $P(S) = 1$

3- Si A y B son eventos mutuamente excluyentes entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

4- Si $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}, \ldots$ es una secuencia de eventos tales que

$$A_i \cap A_j = \varnothing \quad \text{si } i \neq j, \text{ entonces } P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Propiedades de la probabilidad y espacios muestrales finitos

1. P(Ø) = 0
2. Si el complemento de A es el evento complementario de A, entonces:

$$P(A^C) = 1 - P(A)$$

3. Si $A \subset B$ entonces:

$$P(A) \leq P(B)$$

4. Si $A \subset B$, entonces:

$$P(B - A) = P(B) - P(A)$$

5. Si A y B son dos eventos cualesquiera, entonces:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

6. Si tengo tres eventos cualesquiera A, B y C, entonces:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Esto se puede generalizar para *n* eventos A cualesquiera de esta manera:

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \ldots.. + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots. \cap A_n)$$

7. Téngase *n* eventos A cualesquiera tales que $(A_i \cap A_j) = Ø$ con $i \neq j$ entonces:

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

NOTA

"Se elige al azar" =
= "Cada uno de los elementos tienen la misma posibilidad de ser elegidos" =
= "Espacio muestral equiprobable".

Espacios muestrales infinitos

Dado un espacio muestral **infinito numerable** $S = \{a_1; a_2; a_3; a_4; a_5; \ldots\}$, así como en los espacios muestrales finitos, a cada a_i asignamos un número $p_i = \{a_i\}$ tal que:

a) $p_i >= 0$;

b) $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$: la probabilidad P(A) del evento A es la suma de todas las probabilidades de los eventos elementales que lo componen (infinitos).

Un espacio muestral infinito numerable (*S*) **no puede ser equiprobable:**

si *S* fuera equiprobable, entonces todos los eventos elementales divergen al infinito, lo cuál contradice **b)** (1 ≠ ∞).

Dado un espacio muestral **infinito NO numerable** *S* (tiene medida finita); si se elige de *S* un elemento al azar:

- *S* puede ser un intervalo real, en este caso la medida de *S* es su **longitud** 📏;
- *S* puede ser una región del plano, por ejemplo todos los puntos (x,y) de un círculo, de un rectángulo, etc. entonces la medida es su **área** ⬛;
- *S* puede ser una región del espacio tridimensional, en este caso la medida de *S* es su **volumen** 🪩 .

2) Probabilidad condicional

Sean *A* y *B* dos eventos de un espacio muestral *S*, la probabilidad condicional de *B* dado *A* se define como:

$$P(B/A) = P(A \cap B)/P(A), P(A) \neq 0;$$

análogamente…

$$P(A/B) = P(A \cap B)/P(B), P(B) \neq 0.$$

Además, si *A* y *B* son eventos de un espacio muestral *S* **equiprobable**, entonces:

$$P(B/A) = P(A \cap B)/P(A) = |(A \cap B)| / |(A)|.$$

(| A | es lo mismo que #A).

Teorema de la multiplicación

Si *A* y *B* son dos eventos entonces $P(B/A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$

Por lo tanto

$$P(A \cap B) = P(B/A)\,P(A)$$

Si $A_1,\ A_2,\ A_3$ son tres eventos entonces

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1 \cap A_2)$$

pues:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(B \cap A_3) = P(B)P(A_3 / B) = P(A_1 \cap A_2)P(A_3 / A_1 \cap A_{23}) =$$

$B = A_1 \cap A_2$

Teorema de la multiplicación

$$= P(A_1)P(A_2 / A_1)P(A_3 / A_1 \cap A_2)$$

Teorema de la multiplicación