1		2				3		4	5
a	b	a	b	c	d	a	b		

MATEMATICA 3 – 2° Cuatr. 2023
1° PARCIAL – 1° FECHA - (17/10/2023)

N° de alumno:………………………………………………………
Apellido y nombre:…………………………………………………

1) La probabilidad de que falle un conector eléctrico que se mantiene seco durante el período de garantía es 0.01. Si el conector se humedece, la probabilidad de falla durante el período de garantía es 0.05. Si el 90% de los conectores se mantienen secos y el 10% se humedece,
   a) ¿qué proporción de conectores fallará durante el período de garantía?
   b) Si un conector falla durante el período de garantía, ¿cuál es la probabilidad de que se haya mantenido seco?

2) En el niquelado de ciertas láminas metálicas se producen desperfectos que se distribuyen aleatoriamente sobre toda la superficie niquelada. El número de defectos por lámina es una v.a. X con distribución Poisson de media 2.
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que una lámina elegida al azar contenga algún defecto?
   b) Se eligen al azar 5 láminas de la cadena de montaje. Sea Y la v.a. número de láminas con algún defecto. ¿Cuál es la distribución de Y y con qué parámetros?. ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente 3 de láminas tengan defectos?
   c) Se toman láminas de la cadena de montaje hasta haber obtenido 1 sin defecto. Sea Z la v.a. que indica el número de láminas extraídas hasta hallar 1 sin defecto. ¿Qué distribución tiene Z y con qué parámetros?. ¿Cuál es la probabilidad de que haya habido que elegir 3 láminas?

3) En un automóvil seleccionado al azar, se revisa el desgaste de cada neumático, y cada faro delantero se verifica para ver si está correctamente alineado. Denotemos por X el número de faros delanteros que necesitan ajuste y por Y el número de neumáticos defectuosos.
   Si X e Y son independientes con las siguientes fdp

x	0	1	2
p(x)	0.5	0.3	0.2

y	0	1	2	3	4
p(y)	0.6	0.1	0.05	0.05	0.2

   a) Calcule $P(X \leq 1,\ Y \leq 1)$ y $P(X+Y \leq 1)$
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que no haya defectos?
   c) Calcule $E(X)$, $E(Y)$, $V(X)$, $V(Y)$
   d) Calcule la esperanza y la desviación estándar del número total de defectos.

4) La vida media de una máquina para elaborar pasta es de 7 años., con una desviación estándar de un año. Suponiendo que la vida de estas máquinas siguen una distribución normal. Hallar la probabilidad de que el promedio de la vida de 9 de estas máquinas caiga entre 6.4 y 7.2 años.
   (*Sugerencia*: considere las variables X_i: "vida en años de máquina i", $i = 1,2,\ldots,9$)

5) Se conectan 35 focos de luz infrarroja en un invernadero, de tal manera que si falla un foco, otro se enciende inmediatamente, (se enciende solamente un foco a la vez). Los focos funcionan independientemente y cada uno tiene una vida media de 50 horas y una desviación estándar de 4 horas. Si no se inspecciona el invernadero durante 1800 horas después de encender el sistema de focos, ¿cuál es la probabilidad de que un foco esté encendido al final del período de 1800 horas ?
   (*Sugerencia*: considere las variables X_i: "duración en horas del foco i", $i = 1,2,\ldots,35$)

Parcial 17/10/23 Federico Dobal

1) $0,01 = 1\%$ | $90\% \ (0,9) \to$ Secos $\to P(S)$

$0,05 = 5\%$ | $10\% \ (0,1) \to$ Húmedos $\to P(H)$

a)

$P(F) =$ "P. de que falle".

$P(F/S) = 0,01 \qquad = 0,01$

$P(F/H) = 0,05$

$P(F) \underset{\text{T. Prob. Total}}{=} P(F/S)P(S) + P(F/H)P(H) = 0,01 \cdot 0,9 + 0,05 \cdot 0,1$

$= 0,014 = 1,4\%$

b) $P(S/F) \underset{\text{T. de Bayes}}{=} \dfrac{P(F/S) \cdot P(S)}{P(F/S)P(S) + P(F/H)P(H)} = \dfrac{0,01 \cdot 0,9}{0,01 \cdot 0,9 + 0,05 \cdot 0,1}$

$\approx 0,6428$

2) $X \sim P(\lambda) \qquad E(x) = 2 = \lambda$

a) $P(X \geq 1) = 1 - P(x=0) = 1 - e^{-2} \dfrac{2^0}{1} = 1 - e^{-2}$

$\underset{\text{app}}{=} 0,86466$

b) $Y =$ "nº de láminas con algún defecto".

$Y \sim B(5, 0,86466)$, $n = 5$, $p = 0,86466$.

$P(Y=3) = \binom{5}{3} 0,8647^3 (1 - 0,8647)^{5-3}$

$\binom{5}{3} 0,65 \cdot 0,02 = \binom{5}{3} \cdot 0,0127 = 0,11836$

c) $Z \sim G(p)$, $p = P(X=0) = e^{-2} = 0,1353$ (Poisson)

$$P(Z=3) = (1-0,1353)^2\, 0,1353 = 0,10116$$

3) $R_x = \{0,1,2\}$; $R_y = \{0,1,2,3,4\}$ app

a) $P(X \leq 1, Y \leq 1) \underset{\text{independencia}}{=} P(X \leq 1) \cdot P(Y \leq 1) = (0,5 + 0,3) \cdot (0,6 + 0,1)$

$= 0,8 \cdot 0,7$

$= 0,56$

$P(X + Y \leq 1) = P((X=0),(\cancel{X}=0)) + P((X=0),(Y=1)) + P((X=1),(Y=0))$

$\underset{\text{independencia}}{=} 0,5 \cdot 0,6 + 0,5 \cdot 0,1 + 0,3 \cdot 0,6$

$= 0,53$

b) $P(X=0, Y=0) \underset{\text{ind.}}{=} P(X=0) \cdot P(Y=0) = 0,5 \cdot 0,6 = 0,3$

c) $E(X) = \sum_{x=0}^{2} x f_X(x) = 0 \cdot 0,5 + 1 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,2 = 0,7$

$E(y) = \sum_{y \in R_y} y f_y(y) = 0 \cdot 0,6 + 1 \cdot 0,1 + 2 \cdot 0,05 + 3 \cdot 0,05 + 4 \cdot 0,2$

$= 1,15$

$V(x) = E(x^2) - [E(x)]^2 = (0^2 \cdot 0,5 + 1^2 \cdot 0,3 + 2^2 \cdot 0,2) - 0,7^2$

$= 0,3 + 4 \cdot 0,2 - 0,49$

$= 0,61$

$$V(Y) = E(y^2) - [E(y)]^2 = \sum_{y=0}^{4} y^2 f_y(y) - 1{,}15^2$$

$$= 0^2 \cdot 0{,}6 + 1^2 \cdot 0{,}1 + 2^2 \cdot 0{,}05 + 3^2 \cdot 0{,}05 + 4^2 \cdot 0{,}2$$

$$- 1{,}32 = (0{,}1 + 4 \cdot 0{,}05 + 9 \cdot 0{,}05 + 16 \cdot 0{,}2) - 1{,}32$$

$$= 3{,}95 - 1{,}32 = 2{,}63$$

d) $E(x+y) \underset{\text{linealidad}}{=} E(x) + E(y) = 0{,}7 + 1{,}15 = 1{,}85$

$$\left.\begin{array}{l} \sigma_x = \sqrt{V(x)} \\ \sigma_y = \sqrt{V(y)} \end{array}\right\} \sqrt{V(x+y)} \underset{\text{Indep.}}{=} \sqrt{V(x)+V(y)} = \sqrt{0{,}61+2{,}63} = 1{,}79$$

4) X_i = "vida en años de la máquina i", $i = 1, 2, \ldots, 9$.

$E(X_i) = 7$. ; $\sigma_{X_i} = 1$.

$X_i \sim N(\mu, \sigma) \Rightarrow X_i \sim N(7, 1)$.

$\overline{X}$: "Promedio de la vida de 9 de estas máquinas".

$$P(6{,}4 < \overline{X} < 7{,}2) \underset{\text{estandarizo}}{=} P\left(\frac{6{,}4-7}{1/\sqrt{9}} , \frac{\overline{X}-4}{\sigma/\sqrt{n}} , \frac{7{,}2-7}{1/\sqrt{9}}\right)$$

*Observación: $\overline{X} = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^{n} X_i =$

$$= P(-1{,}8 < Z < 0{,}6) = \Phi(0{,}6) - \Phi(-1{,}8)$$

$$\underset{\text{Tabla}}{=} 0{,}7257 - 0{,}0359 = 0{,}6898$$

5) X_i = "duración en horas del foco i", $i = 1, 2, \ldots, 35$. → $35 \geq 30$.

$\mu = E(X_i) = 50$; $\sigma = dT(X_i) = 4$; Focos indep. entre sí.

$$\underbrace{P\left(\sum_{i=1}^{35} X_i \geq 1800\right)}_{\text{"Hacia la hora 1800, los focos siguen funcionando".}} \underset{\text{Complemento}}{=} 1 - P\left(\sum_{i=1}^{35} X_i < 1800\right) =$$

(≥ 1)

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{estandarizo}}}{=} 1 - P\left(\sum_{i=1}^{35} \frac{X_i - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} < \frac{1800-(35\cdot 50)}{\sqrt{35\cdot\sigma^2}}\right) \overset{1-}{=} P\left(\sum_{i=1}^{35}\frac{X_i - n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma} < \frac{50}{\sqrt{35}\cdot 4}\right)$$

$$\underset{\text{T.C.L.}}{=} 1 - \Phi(2{,}112) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Tabla}}}{=} 1 - 0{,}9826 = 0{,}0174$$