

Lösung periodischer Fahrplanoptimierungsprobleme durch Modulo-Simplex-Berechnungen



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Lösung periodischer Fahrplanoptimierungsprobleme durch Modulo-Simplex-Berechnungen



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Einleitung und Motivation

Mathematische Modellierung

Nicht-periodische Fahrpläne

Taktfahrpläne

Das Slack-Modell

Grundlagen von Flussnetzwerken

Spannbaumstrukturen

Untersuchung des Slack-Modells

Das Modulo-Netzwerk-Simplex-Verfahren

Einführung

Simplex-Tableau

Verbesserungen der Lösung

Zusammenfassung und Abschluss



Einleitung und Motivation

Mathematische Modellierung

Nicht-periodische Fahrpläne

Taktfahrpläne

Das Slack-Modell

Grundlagen von Flussnetzwerken

Spannbaumstrukturen

Untersuchung des Slack-Modells

Das Modulo-Netzwerk-Simplex-Verfahren

Einführung

Simplex-Tableau

Verbesserungen der Lösung

Zusammenfassung und Abschluss



- ▶ Die Taktfahrplanoptimierung hat in den letzten Jahren viel Aufmerksamkeit erfahren, vor allem aus der kombinatorischen Optimierung.
- ▶ Fast alle Linien des ÖPNV verkehren nach einem Taktfahrplan.



- ▶ Fokus auf die Optimierung von gewichteten Slack-Zeiten
→ Gemischt-Ganzzahliges Programm.
- ▶ Sehr schwer zu lösen für reale Szenarien.
- ▶ Definition von Modulo-Gleichungen und Lösung mit Modulo-Simplex.



Einleitung und Motivation

Mathematische Modellierung

Nicht-periodische Fahrpläne

Taktfahrpläne

Das Slack-Modell

Grundlagen von Flussnetzwerken

Spannbaumstrukturen

Untersuchung des Slack-Modells

Das Modulo-Netzwerk-Simplex-Verfahren

Einführung

Simplex-Tableau

Verbesserungen der Lösung

Zusammenfassung und Abschluss

Nicht-periodische Fahrpläne

Gliederung



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Einleitung und Motivation

Mathematische Modellierung

Nicht-periodische Fahrpläne

Taktfahrpläne

Das Slack-Modell

Grundlagen von Flussnetzwerken

Spannbaumstrukturen

Untersuchung des Slack-Modells

Das Modulo-Netzwerk-Simplex-Verfahren

Einführung

Simplex-Tableau

Verbesserungen der Lösung

Zusammenfassung und Abschluss



Ein *Schienennetz* ist ein System von Linien \mathcal{L} und Stationen \mathcal{S} .

Bedient Linie $L \in \mathcal{L}$ die Station $S \in \mathcal{S}$, so sei

- ▶ (L, arr, S) das Ankunfts- und
- ▶ (L, dep, S) das Abfahrts-Ereignis.

Eine Linie ist eine alternierende Sequenz von Ankunfts- und Abfahrts-Ereignis.



Ein *Fahrplan* $\pi = (\pi_i)$ ordnet jedem Event $i = (L, arr, S)$ (bzw. $i = (L, dep, S)$) einen Zeitpunkt $\pi_i \in \mathbb{R}$ zu.

Ein *Vorgang* („Activity“) $a : i \rightarrow j$ beschreibt den Übergang von i zu j . Die Dauer des Vorgangs, die *Spannung* („Tension“) ist

$$x_a = \pi_j - \pi_i$$

Sei \mathcal{A} die Menge aller Vorgänge.



Ein *Fahrplan* $\pi = (\pi_i)$ ordnet jedem Event $i = (L, arr, S)$ (bzw. $i = (L, dep, S)$) einen Zeitpunkt $\pi_i \in \mathbb{R}$ zu.

Ein *Vorgang* („Activity“) $a : i \rightarrow j$ beschreibt den Übergang von i zu j . Die Dauer des Vorgangs, die *Spannung* („Tension“) ist

$$x_a = \pi_j - \pi_i$$

Sei \mathcal{A} die Menge aller Vorgänge.

Beispiel:

Haltevorgang a von Linie L an Station S :

$$a : (L, dep, S) \rightarrow (L, arr, S)$$



Jedem Vorgang $a \in \mathcal{A}$ wird eine *zulässige Dauer*

$$\Delta_a = [l_a, u_a]$$

zugeordnet.

Ein Fahrplan π heißt *zulässig* („feasible“), wenn gilt:

$$\forall a \in \mathcal{A} : x_a \in \Delta_a \quad \Longleftrightarrow \quad \forall (a : i \rightarrow j) \in \mathcal{A} : l_a \leq \pi_j - \pi_i \leq u_a$$



- Fast alle realen Einschränkungen können durch Zeitspannen beschrieben werden.



- ▶ Fast alle realen Einschränkungen können durch Zeitspannen beschrieben werden.
 - ▶ Fahrzeit eines Zuges
 - ▶ Sicherheitseinschränkungen (z. B. Vorfahrt)
 - ▶ Wartezeiten (Kundenzufriedenheit)
 - ▶ Umsteigezeiten
 - ▶ ...

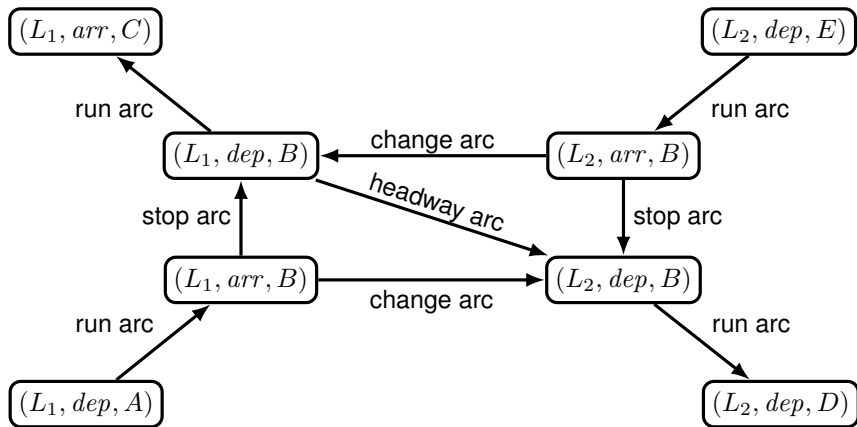


Abbildung: Ereignisnetzwerk, vgl. [NO08, Fig. 1]



- ▶ Schienennetz Linien \mathcal{L} , Stationen \mathcal{S}
- ▶ Ereignisse $(L, arr, S), (L, dep, S)$
- ▶ Fahrplan $\pi = (\pi_i)$
- ▶ Vorgang $a : i \rightarrow j$
- ▶ Spannung $x_a = \pi_j - \pi_i$
- ▶ Zulässige Dauer $\Delta_a = [l_a, u_a]$



Einleitung und Motivation

Mathematische Modellierung

Nicht-periodische Fahrpläne

Taktfahrpläne

Das Slack-Modell

Grundlagen von Flussnetzwerken

Spannbaumstrukturen

Untersuchung des Slack-Modells

Das Modulo-Netzwerk-Simplex-Verfahren

Einführung

Simplex-Tableau

Verbesserungen der Lösung

Zusammenfassung und Abschluss



- ▶ Nicht-periodische Optimierungsprobleme → Kürzester-Pfad-Berechnungen.
- ▶ Taktfahrpläne → dieses einfache Modell funktioniert nicht mehr.
 - ▶ Es ist a-priori nicht klar, in welcher Sequenz Züge ankommen.
 - ▶ Erst nach Ordnung bekannt.



Ein Taktfahrplan $\pi = (\pi_i)$ ordnet jedem periodischem Ereignis i einen *Ereigniszeitpunkt* $\pi_i \in \mathbb{R}$ zu. Ereignisse finden zu den Zeitpunkten $\pi_i + z_i T$ mit dem Modulo-Parameter $z_i \in \mathbb{Z}$ und der Taktzeit T statt.

Ein Taktfahrplan π heißt *zulässig* („feasible“), wenn gilt:

$$\forall (a : i \rightarrow j) \in \mathcal{A} : \exists z_a \in \mathbb{Z} : l_a \leq \pi_j - \pi_i - z_a T \leq u_a$$



Sei

$$[t]_T := \min \{ t + zT \mid t + zT \geq 0, \quad z \in \mathbb{Z}, \quad T = \text{const} \}$$

Es gilt offensichtlich $0 \leq [t]_T < T$.

Die untere und obere *Slack-Zeit* misst, um wie viel Zeit die Spannung $x_a = \pi_j - \pi_i$ verändert werden darf.

$$y_a^{low} := [x_a - l_a]_T$$

$$y_a^{upp} := [u_a - x_a]_T$$



- ▶ Durch Umkehrung einer Kante a können obere und untere Pufferzeit ausgetauscht werden.
- ▶ O.B.d.A. kann das Problem nur in Bezug auf y_a^{low} definiert werden.

→ Gemischt-Ganzzahliges Programm („mixed-integer program“):

$$\min \left\{ \sum_{a \in \mathcal{A}} \omega_a (x_a - l_a - z_a T) \mid \forall a \in \mathcal{A} : l_a \leq x_a - z_a T \leq u_a, \quad z_a \in \mathbb{Z} \right\}$$



- ▶ Taktzeit $T = \text{const}$
- ▶ Fahrplan $\boldsymbol{\pi} = (\pi_i)$
- ▶ Vorgang $a : i \rightarrow j$
- ▶ Spannung $x_a = \pi_j - \pi_i$
- ▶ Zulässige Dauer $\Delta_a = [l_a, u_a]$
- ▶ Untere/Obere Slack-Zeit $y_a^{\text{low}} = [x_a - l_a]_T, y_a^{\text{upp}} = [u_a - x_a]_T$
- ▶ Optimierungsproblem

$$\min \left\{ \sum_{a \in \mathcal{A}} \omega_a (x_a - l_a - z_a T) \mid \forall a \in \mathcal{A} : l_a \leq x_a - z_a T \leq u_a, \quad z_a \in \mathbb{Z} \right\}$$

Das Slack-Modell

Gliederung



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Einleitung und Motivation

Mathematische Modellierung

Nicht-periodische Fahrpläne

Taktfahrpläne

Das Slack-Modell

Grundlagen von Flussnetzwerken

Spannbaumstrukturen

Untersuchung des Slack-Modells

Das Modulo-Netzwerk-Simplex-Verfahren

Einführung

Simplex-Tableau

Verbesserungen der Lösung

Zusammenfassung und Abschluss

Grundlagen von Flussnetzwerken

Gliederung



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Einleitung und Motivation

Mathematische Modellierung

Nicht-periodische Fahrpläne

Taktfahrpläne

Das Slack-Modell

Grundlagen von Flussnetzwerken

Spannbaumstrukturen

Untersuchung des Slack-Modells

Das Modulo-Netzwerk-Simplex-Verfahren

Einführung

Simplex-Tableau

Verbesserungen der Lösung

Zusammenfassung und Abschluss

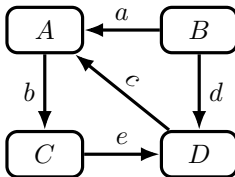


Abbildung: Gerichteter Graph mit $n = 4$ Kanten und $m = 4$ Knoten (laufendes Beispiel)

Notation: Die Kante $a : A \rightarrow B$ geht von Knoten A zu Knoten B .

Spannbaum und Komplement-Baum (Ko-Baum)



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

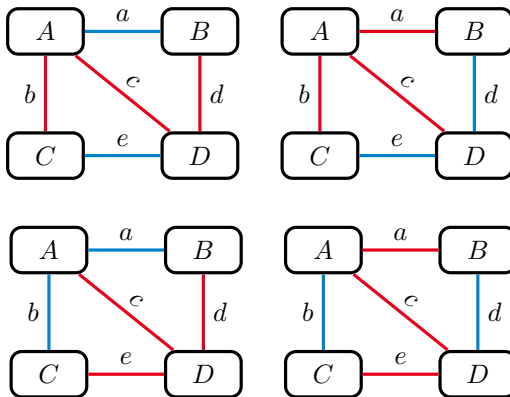


Abbildung: Mehrere (nicht alle) Spannbäume (rot) und Ko-Bäume (blau)



Die *Inzidenzmatrix* eines Netzwerks mit n Knoten und m Kanten ist eine $n \times m$ -Matrix $\Theta = (\theta_{ia})$:

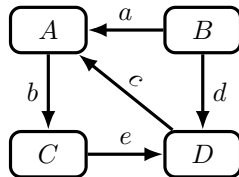
$$\theta_{ia} := \begin{cases} 1 & \text{falls } a : j \rightarrow i \\ -1 & \text{falls } a : i \rightarrow j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die *Inzidenzmatrix* eines Netzwerks mit n Knoten und m Kanten ist eine $n \times m$ -Matrix $\Theta = (\theta_{ia})$:

$$\theta_{ia} := \begin{cases} 1 & \text{falls } a : j \rightarrow i \\ -1 & \text{falls } a : i \rightarrow j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Beispiel:

$$\Theta = \begin{array}{c} \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \end{matrix} \end{array} \begin{bmatrix} \begin{matrix} a & b & c & d & e \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$





Durch Hinzufügen einer Ko-Baum-Kante zum Baum \mathcal{T} wird ein eindeutiger Zyklus c definiert. Sei $\mathbf{\Gamma} = (\gamma_{ca})$ die *Netzwerkmatrix*:

$$\gamma_{ca} := \begin{cases} 1 & \text{falls der Zyklus } c \text{ die Kante } a \text{ in positiver Richtung enthält} \\ -1 & \text{falls der Zyklus } c \text{ die Kante } a \text{ in negativer Richtung enthält} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

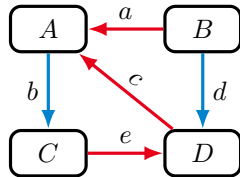
Netzwerkmatrix („Edge-Cycle-Matrix“)

Durch Hinzufügen einer Ko-Baum-Kante zum Baum \mathcal{T} wird ein eindeutiger Zyklus c definiert. Sei $\Gamma = (\gamma_{ca})$ die *Netzwerkmatrix*:

$$\gamma_{ca} := \begin{cases} 1 & \text{falls der Zyklus } c \text{ die Kante } a \text{ in positiver Richtung enthält} \\ -1 & \text{falls der Zyklus } c \text{ die Kante } a \text{ in negativer Richtung enthält} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Beispiel:

$$\Gamma = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d & e \end{matrix} \\ \begin{matrix} b \\ d \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$





Ein *Potential* $\pi = (\pi_i)$ ordnet jedem Knoten i einen Wert $\pi_i \in \mathbb{R}$ zu.

Die Potentialdifferenz $x_a := \pi_j - \pi_i$ sei die *Spannung* von Kante $a : i \rightarrow j$. Es gilt $\Theta^T \pi = x$. Weiterhin ist x eine periodische Spannung gdw. $\Gamma x \equiv_T 0$ gilt.



Ein *Potential* $\pi = (\pi_i)$ ordnet jedem Knoten i einen Wert $\pi_i \in \mathbb{R}$ zu.

Die Potentialdifferenz $x_a := \pi_j - \pi_i$ sei die *Spannung* von Kante $a : i \rightarrow j$. Es gilt $\Theta^T \pi = \mathbf{x}$. Weiterhin ist \mathbf{x} eine periodische Spannung gdw. $\Gamma \mathbf{x} \equiv_T \mathbf{0}$ gilt.

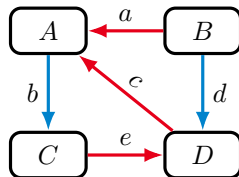
Beispiel:

$$\begin{aligned} \pi &= [\pi_A \quad \pi_B \quad \pi_C \quad \pi_D]^T \in \mathbb{R}^4 \\ \mathbf{x} &= \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \\ x_d \\ x_e \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \pi_A - \pi_B \\ \pi_C - \pi_A \\ \pi_A - \pi_D \\ \pi_D - \pi_B \\ \pi_D - \pi_C \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{= \Theta^T} \cdot \begin{bmatrix} \pi_A \\ \pi_B \\ \pi_C \\ \pi_D \end{bmatrix} \end{aligned}$$



Beispiel:

$$\mathbf{x} = [x_a \quad x_b \quad x_c \quad x_d \quad x_e]$$
$$\mathbf{\Gamma x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \\ x_d \\ x_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_b + x_c + x_d \\ x_c + x_d - x_a \end{bmatrix}$$





Der *Bedarf* $\mathbf{v} = (v_i)$ (mit $\sum_i v_i = 0$) ordnet jedem Knoten i einen Bedarf $v_i \in \mathbb{R}$ zu. Ein Knoten mit v_i heißt

$$\begin{cases} \text{Quellknoten} & \text{für } v_i > 0 \\ \text{Zielknoten} & \text{für } v_i < 0 \\ \text{Durchgangsknoten} & \text{für } v_i = 0 \end{cases}$$

Ein Fluss $\varphi = (\varphi_a)$ (mit $\Theta\varphi = \mathbf{v}$) ordnet jeder Kante a einen Flusswert $\varphi_a \in \mathbb{R}$ zu.



Die Knoten eines Graphen lassen sich in zwei disjunkte Mengen P und \bar{P} zerlegen. Sei $\eta = (\eta_{(a:i \rightarrow j)})$ der *Schnitt* bzgl. dieser Zerlegung:

$$\eta_{(a:i \rightarrow j)} := \begin{cases} 1 & \text{falls } i \in P \text{ und } j \in \bar{P} \\ -1 & \text{falls } i \in \bar{P} \text{ und } j \in P \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Knoten eines Graphen lassen sich in zwei disjunkte Mengen P und \bar{P} zerlegen. Sei $\eta = (\eta_{(a:i \rightarrow j)})$ der *Schnitt* bzgl. dieser Zerlegung:

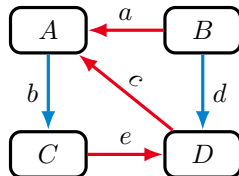
$$\eta_{(a:i \rightarrow j)} := \begin{cases} 1 & \text{falls } i \in P \text{ und } j \in \bar{P} \\ -1 & \text{falls } i \in \bar{P} \text{ und } j \in P \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Beispiel:

$$P = \{C\}$$

$$\bar{P} = \{A, B, D\}$$

$$\eta = [0 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^T$$





- ▶ Gerichtete Graphen
- ▶ Spannbaum und Komplement-Baum (Ko-Baum)
- ▶ Inzidenzmatrix $\Theta = (\theta_{ia})$
- ▶ Netzwerkmatrix $\Gamma = (\gamma_{ca})$
- ▶ Potential $\pi = (\pi_i)$
- ▶ Spannung $\mathbf{x} = \Theta^T \pi = (x_a), x_a = \pi_j - \pi_i$
- ▶ Bedarf $\mathbf{v} = (v_i)$
- ▶ Fluss $\varphi = (\varphi_a)$ mit $\Theta \varphi = \mathbf{v}$
- ▶ Schnitt $\eta = (\eta_a)$ für P, \bar{P}



Einleitung und Motivation

Mathematische Modellierung

Nicht-periodische Fahrpläne

Taktfahrpläne

Das Slack-Modell

Grundlagen von Flussnetzwerken

Spannbaumstrukturen

Untersuchung des Slack-Modells

Das Modulo-Netzwerk-Simplex-Verfahren

Einführung

Simplex-Tableau

Verbesserungen der Lösung

Zusammenfassung und Abschluss



Sei $\mathcal{T} = \mathcal{T}^l + \mathcal{T}^u$ ein Spannbaum, separiert in \mathcal{T}^l und \mathcal{T}^u , sodass gilt:

$$\forall a \in \mathcal{T}^l : x_a = l_a \quad \text{und} \quad \forall a \in \mathcal{T}^u : x_a = u_a$$

Jede Struktur bestimmt ein eindeutiges Potential $\pi^{(\mathcal{T})}$, für das gilt:

$$\forall (a : i \rightarrow j) \in \mathcal{T}^l : \pi_j^{(\mathcal{T})} - \pi_i^{(\mathcal{T})} = l_a$$

$$\forall (a : i \rightarrow j) \in \mathcal{T}^u : \pi_j^{(\mathcal{T})} - \pi_i^{(\mathcal{T})} = u_a$$



Mit $\mathbf{b} := [-\mathbf{\Gamma}\mathbf{l}]_T$ und $\delta := \mathbf{u} - \mathbf{l}$ ist die *Menge zulässiger Slack-Zeiten* \mathcal{Y} definiert:

$$\mathcal{Y} := \{ \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^m \mid \mathbf{\Gamma}\mathbf{y} \equiv_T \mathbf{b}, \quad \mathbf{0} \leq \mathbf{y} \leq \delta \}$$

Das Optimierungsproblem kann wie folgt umformuliert werden:

$$\min \{ \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{y} \mid \mathbf{y} \in \mathcal{Y} \}$$



- ▶ Spannbaumstruktur $\mathcal{T} = \mathcal{T}^l + \mathcal{T}^u$
- ▶ $\mathbf{b} = [-\Gamma \mathbf{l}]_T$
- ▶ $\boldsymbol{\delta} = \mathbf{u} - \mathbf{l}$
- ▶ Zulässige Slack-Zeiten

$$\mathcal{Y} = \{ \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^m \mid \Gamma \mathbf{y} \equiv_T \mathbf{b}, \quad \mathbf{0} \leq \mathbf{y} \leq \boldsymbol{\delta} \}$$

- ▶ Optimierungsproblem

$$\min \{ \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{y} \mid \mathbf{y} \in \mathcal{Y} \}$$

Untersuchung des Slack-Modells

Gliederung



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Einleitung und Motivation

Mathematische Modellierung

Nicht-periodische Fahrpläne

Taktfahrpläne

Das Slack-Modell

Grundlagen von Flussnetzwerken

Spannbaumstrukturen

Untersuchung des Slack-Modells

Das Modulo-Netzwerk-Simplex-Verfahren

Einführung

Simplex-Tableau

Verbesserungen der Lösung

Zusammenfassung und Abschluss



Werden die Modulo-Parameter z_a fixiert, kann das Optimierungsproblem umformuliert werden:

$$\begin{aligned} & \min \left\{ \sum_a^{\mathcal{A}} \omega_a(x_a - l_a - z_a T) \mid \forall a \in \mathcal{A} : l_a \leq x_a - z_a T \leq u_a \right\} \\ &= \min \left\{ \sum_a^{\mathcal{A}} \omega_a(x_a - l'_a) \mid \forall a \in \mathcal{A} : l'_a = l_a + z_a T \leq x_a \leq u'_a = u_a + z_a T \right\} \\ &= \min \left\{ \boldsymbol{\omega}^T (\boldsymbol{\Theta}^T \boldsymbol{\pi} - \mathbf{l}') \mid \mathbf{l}' \leq \boldsymbol{\Theta}^T \boldsymbol{\pi} \leq \mathbf{u}' \right\} \end{aligned}$$

Dies ist die duale Formulierung des Minimum-Cost Flow Problems. Jeder Extrempunkt der gültigen Region des Problems entspricht einer Spannbaumstruktur.



Sind $\mathbf{z}^{\mathcal{T}}$ die fixierten Modulo-Parameter, so heißt

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\pi}^{\mathcal{T}} \\ \mathbf{z}^{\mathcal{T}} \end{bmatrix}$$

die *periodische Basislösung* in Bezug auf die Spannbaumstruktur \mathcal{T} .

Sei

$$\mathcal{Q} := \text{conv.hull} \left\{ \begin{bmatrix} \pi \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} \mid \mathbf{1} \leq \Theta^T \pi - T\mathbf{z} \leq \mathbf{u}, \quad \pi \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{z} \in \mathbb{Z}^m \right\}$$

der *periodische Fahrplan-Polyeder*.

Theorem. Der Vektor $\begin{bmatrix} \pi \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} \in \mathcal{Q}$ ist ein Extrempunkt von \mathcal{Q} gdw. er eine periodische Basislösung in Bezug auf eine Spannbaumstruktur ist.
Beweis siehe [Nac99].

Das Modulo-Netzwerk-Simplex-Verfahren

Gliederung



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Einleitung und Motivation

Mathematische Modellierung

Nicht-periodische Fahrpläne

Taktfahrpläne

Das Slack-Modell

Grundlagen von Flussnetzwerken

Spannbaumstrukturen

Untersuchung des Slack-Modells

Das Modulo-Netzwerk-Simplex-Verfahren

Einführung

Simplex-Tableau

Verbesserungen der Lösung

Zusammenfassung und Abschluss



Einleitung und Motivation

Mathematische Modellierung

Nicht-periodische Fahrpläne

Taktfahrpläne

Das Slack-Modell

Grundlagen von Flussnetzwerken

Spannbaumstrukturen

Untersuchung des Slack-Modells

Das Modulo-Netzwerk-Simplex-Verfahren

Einführung

Simplex-Tableau

Verbesserungen der Lösung

Zusammenfassung und Abschluss



Die Modulo-Simplex-Methode erkundet die Extrempunkte des Optimierungsproblems

$$\min \left\{ \omega^T \mathbf{y} \mid \mathbf{y} \in \mathcal{Y} := \left\{ \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^m \mid \exists \mathbf{z} \in \mathbb{Z}^m : (\mathbf{\Gamma} \mathbf{y} - T \mathbf{z} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{0} \leq \mathbf{y} - T \mathbf{z} \leq \delta) \right\} \right\}$$

Das heißt des Polyeders $\text{conv.hull}(\mathcal{Y})$.



- ▶ Die Ganzzahligkeit von \mathbf{z} macht das Problem sehr schwer.
- ▶ Daher: Eliminierung von \mathbf{z} durch Restklassenberechnungen (Modulo-Berechnungen).

$$\min \left\{ \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{y} \mid \mathbf{y} \in \mathcal{Y} := \left\{ \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^m \mid \exists \mathbf{z} \in \mathbb{Z}^m : (\Gamma \mathbf{y} \equiv_T \mathbf{b}, \quad \mathbf{0} \leq \mathbf{y} \leq \boldsymbol{\delta}) \right\} \right\}$$



Einleitung und Motivation

Mathematische Modellierung

Nicht-periodische Fahrpläne

Taktfahrpläne

Das Slack-Modell

Grundlagen von Flussnetzwerken

Spannbaumstrukturen

Untersuchung des Slack-Modells

Das Modulo-Netzwerk-Simplex-Verfahren

Einführung

Simplex-Tableau

Verbesserungen der Lösung

Zusammenfassung und Abschluss



- ▶ Beginnend von der Basislösung $[\mathbf{0}^T \quad \mathbf{b}^T]^T$ bewegt sich der Algorithmus auf den Kanten des Polyeders $\text{conv.hull}(\mathcal{Y})$.
- ▶ In jedem Schritt: Überprüfen der Verbesserung.
- ▶ Keine Verbesserung möglich \rightarrow lokales Minimum gefunden.



Separierung der Netzwerkmatrix $\mathbf{\Gamma}_{\mathcal{T}} = [\mathbf{N}_{\mathcal{T}}, \mathbf{I}_{\mathcal{T}}^{co}]$ in Baum-Kanten $\mathbf{N}_{\mathcal{T}}$ und Ko-Baum-Kanten $\mathbf{I}_{\mathcal{T}}^{co}$.

$$\implies \text{Periodische Basislösung } \mathbf{y}_{\mathcal{T}} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{\mathcal{T}} \\ \mathbf{y}_{\mathcal{T}}^{co} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}$$

Separierung der Netzwerkmatrix



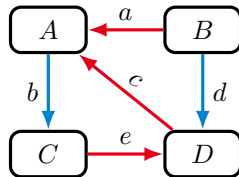
TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Separierung der Netzwerkmatrix $\mathbf{\Gamma}_{\mathcal{T}} = [\mathbf{N}_{\mathcal{T}}, \mathbf{I}_{\mathcal{T}}^{co}]$ in Baum-Kanten $\mathbf{N}_{\mathcal{T}}$ und Ko-Baum-Kanten $\mathbf{I}_{\mathcal{T}}^{co}$.

$$\Rightarrow \text{Periodische Basislösung } \mathbf{y}_{\mathcal{T}} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{\mathcal{T}} \\ \mathbf{y}_{\mathcal{T}}^{co} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}$$

Beispiel:

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d & e \end{matrix} \\ \begin{matrix} b \\ d \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$
$$\Rightarrow \mathbf{\Gamma}_{\mathcal{T}} = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & c & e & b & d \end{matrix} \\ \begin{matrix} b \\ d \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$



Aufstellung des Tableau



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Seien a_1, \dots, a_{r-1} die Ko-Baum-Kanten und a_r, \dots, a_m die Baum-Kanten.
Formulierung als Simplex-Tableau:

$$[\mathbf{N} \quad \mathbf{I} \quad \mathbf{b} \mid \mid \boldsymbol{\omega}]$$

	a_1	\dots	a_r	\dots	a_m		
a_r	γ_{r1}	\dots	1		0	b_r	ω_r
\vdots	\vdots	\ddots		\ddots		\vdots	\vdots
a_m	γ_{m1}	\dots	0		1	b_m	ω_m
							ω



Auswahl eines Pivot-Elements a_{ij} :

	a_1	\cdots	a_j	\cdots	a_r	\cdots	a_i	\cdots	a_m		
a_r	γ_{r1}	\cdots	γ_{rj}	\cdots	1	\cdots	0	\cdots	0	b_r	ω_r
\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\ddots	\vdots	\ddots		\ddots	\vdots	\vdots	\vdots
a_i	γ_{i1}	\cdots	γ_{ij}	\cdots	0		1		0	b_i	ω_i
\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\ddots	\vdots	\ddots		\ddots	\vdots	\vdots	\vdots
a_m	γ_{m1}	\cdots	γ_{mj}	\cdots	0	\cdots	0	\cdots	1	b_m	ω_m
											ω

Basis-Austausch, Teil 2



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Austausch von z_i mit x_j :

Pivotelement:

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{\gamma_{ij}}$$

Pivotzeile für alle $s \neq j$:

$$\gamma_{is} = \frac{\gamma_{is}}{\gamma_{ij}}$$

Pivotspalte für alle $r \neq i$:

$$\gamma_{rj} = -\frac{\gamma_{rj}}{\gamma_{ij}}$$

Restliche Elemente des Tableaus:

$$\gamma_{rs} = \gamma_{rs} - \frac{\gamma_{is}\gamma_{rj}}{\gamma_{ij}} \quad b_r = \left[b_r - \frac{\gamma_{rj}}{\gamma_{ij}} b_i \right]_T$$

Basis-Austausch, Teil 2



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Austausch von z_i mit x_j :

Pivotelement:

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{\gamma_{ij}}$$

Pivotzeile für alle $s \neq j$:

$$\gamma_{is} = \frac{\gamma_{is}}{\gamma_{ij}}$$

$$b_r = \left[\frac{b_r}{\gamma_{ij}} \right]_T$$

Pivotspalte für alle $r \neq i$:

$$\gamma_{rj} = -\frac{\gamma_{rj}}{\gamma_{ij}}$$

Restliche Elemente des Tableaus:

$$\gamma_{rs} = \gamma_{rs} - \frac{\gamma_{is}\gamma_{rj}}{\gamma_{ij}} \quad b_r = \left[b_r - \frac{\gamma_{rj}}{\gamma_{ij}} b_i \right]_T$$

	a_1	\dots	a_i	\dots	a_r	\dots	a_j	\dots	a_m		
a_r	$\gamma_{r1} - \frac{\gamma_{i1}\gamma_{rj}}{\gamma_{ij}}$	\dots	$-\frac{\gamma_{rj}}{\gamma_{ij}}$	\dots	1	\dots	0	\dots	0	$\left[b_r - \frac{\gamma_{rj}}{\gamma_{ij}} b_i \right]_T$	ω_r
\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\ddots	\vdots	\ddots		\ddots	\vdots	\vdots	\vdots
a_j	$\frac{\gamma_{i1}}{\gamma_{ij}}$	\dots	$\frac{1}{\gamma_{ij}}$	\dots	0		1		0	$\left[\frac{b_i}{\gamma_{ij}} \right]_T$	ω_j
\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\ddots	\vdots	\ddots		\ddots	\vdots	\vdots	\vdots
a_m	$\gamma_{m1} - \frac{\gamma_{i1}\gamma_{mj}}{\gamma_{ij}}$	\dots	$-\frac{\gamma_{mj}}{\gamma_{ij}}$	\dots	0	\dots	0	\dots	1	$\left[b_m - \frac{\gamma_{mj}}{\gamma_{ij}} b_i \right]_T$	ω_m
											ω



Kosten vor (ω) und nach ($\tilde{\omega}_{ij}$) der Vertauschung von a_i und a_j :

$$\omega = \sum_{k=r}^m \omega_k b_k \qquad \tilde{\omega}_{ij} = \omega_j \left[\frac{b_i}{\gamma_{ij}} \right]_T + \sum_{\substack{k=r \\ k \neq i}}^m \omega_k \left[b_k - \frac{\gamma_{kj}}{\gamma_{ij}} b_i \right]_T$$

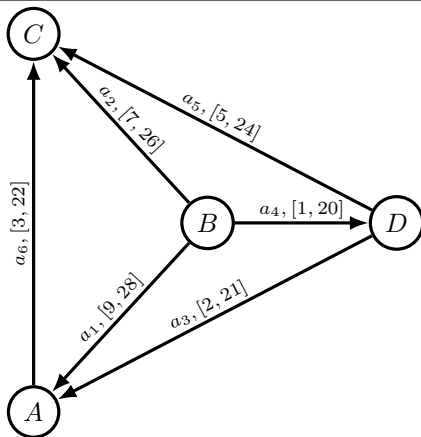
Kostenänderung:

$$\begin{aligned} \Delta \omega_{ij} &= \tilde{\omega}_{ij} - \omega \\ &= \omega_j \left[\frac{b_i}{\gamma_{ij}} \right]_T - \omega_i b_i + \sum_{\substack{k=r \\ k \neq i}}^m \omega_k \left(\left[b_k - \frac{\gamma_{kj}}{\gamma_{ij}} b_i \right]_T - b_k \right) \end{aligned}$$



- ▶ Berechnung aller Kostenänderungen.
- ▶ Nur für Austausche, die einen Spannbaum beibehalten!
- ▶ Andere Austausche führen zur Division durch Null.
- ▶ Ist keine negative (verbessernde) Änderung möglich → Abbruch.

Beispiel (vgl. [NO08])



a_i	$\Delta_i = [l_i, u_i]$	ω_i
a_1	$[9, 28]$	8
a_2	$[7, 26]$	3
a_3	$[2, 21]$	5
a_4	$[1, 20]$	9
a_5	$[5, 24]$	1
a_6	$[3, 22]$	4

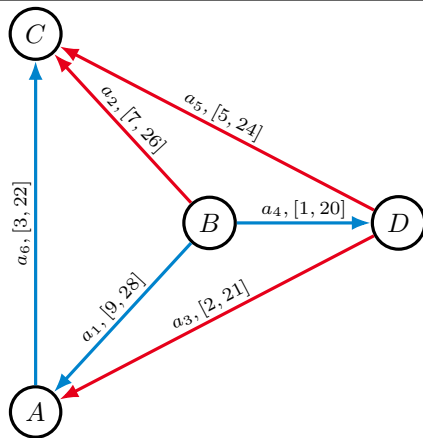
$$T = 20$$

Abbildung: Ereignisnetzwerk

Beispiel, Bestimmung einer Spannbaumstruktur



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT



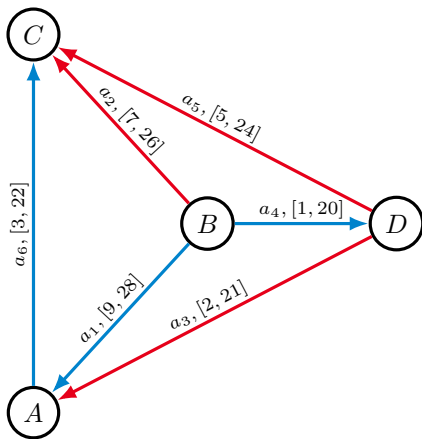
$$\Gamma = \begin{matrix} & a_2 & a_3 & a_5 & a_4 & a_1 & a_6 \\ \begin{matrix} a_4 \\ a_1 \\ a_6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Abbildung: Spannbaum und Ko-Baum

Beispiel, Bestimmung der Basislösung



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT



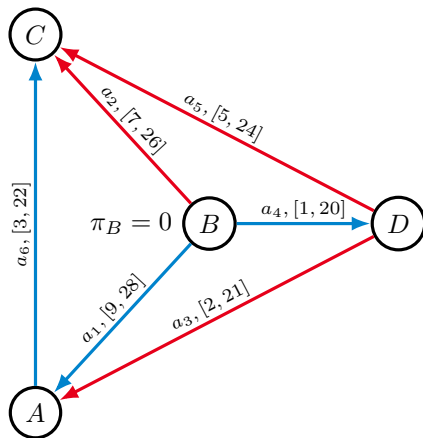
$$\mathbf{b} = [-\mathbf{\Gamma}]_T = \begin{bmatrix} 1 \\ 15 \\ 0 \end{bmatrix}$$

a_i	$\Delta_i = [l_i, u_i]$	ω_i	y_i
a_1	$[9, 28]$	8	15
a_2	$[7, 26]$	3	0
a_3	$[2, 21]$	5	0
a_4	$[1, 20]$	9	1
a_5	$[5, 24]$	1	0
a_6	$[3, 22]$	4	0

Beispiel, Bestimmung der Basislösung



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT



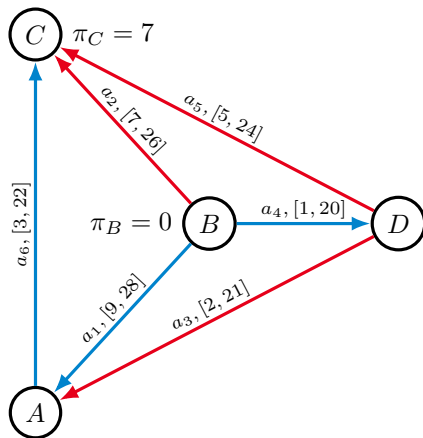
$$\mathbf{b} = [-\mathbf{\Pi}]_T = \begin{bmatrix} 1 \\ 15 \\ 0 \end{bmatrix}$$

a_i	$\Delta_i = [l_i, u_i]$	ω_i	y_i
a_1	$[9, 28]$	8	15
a_2	$[7, 26]$	3	0
a_3	$[2, 21]$	5	0
a_4	$[1, 20]$	9	1
a_5	$[5, 24]$	1	0
a_6	$[3, 22]$	4	0

Beispiel, Bestimmung der Basislösung



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT



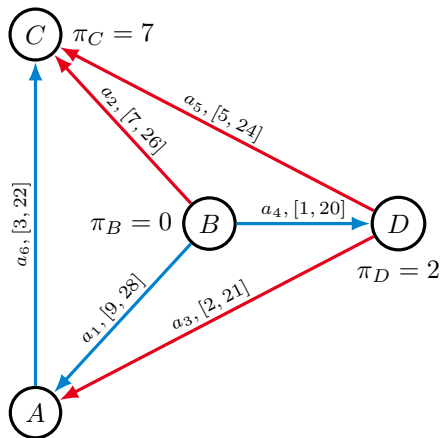
$$\mathbf{b} = [-\mathbf{\Pi}]_T = \begin{bmatrix} 1 \\ 15 \\ 0 \end{bmatrix}$$

a_i	$\Delta_i = [l_i, u_i]$	ω_i	y_i
a_1	$[9, 28]$	8	15
a_2	$[7, 26]$	3	0
a_3	$[2, 21]$	5	0
a_4	$[1, 20]$	9	1
a_5	$[5, 24]$	1	0
a_6	$[3, 22]$	4	0

Beispiel, Bestimmung der Basislösung



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT



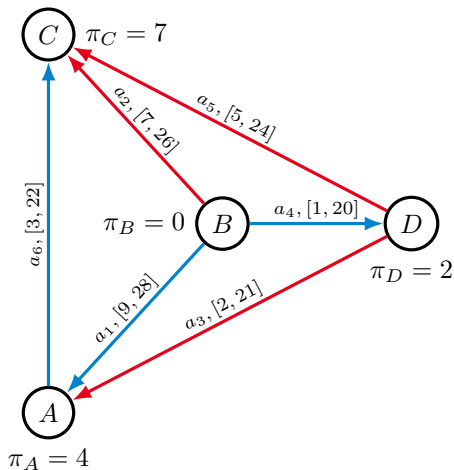
$$\mathbf{b} = [-\mathbf{\Pi}]_T = \begin{bmatrix} 1 \\ 15 \\ 0 \end{bmatrix}$$

a_i	$\Delta_i = [l_i, u_i]$	ω_i	y_i
a_1	$[9, 28]$	8	15
a_2	$[7, 26]$	3	0
a_3	$[2, 21]$	5	0
a_4	$[1, 20]$	9	1
a_5	$[5, 24]$	1	0
a_6	$[3, 22]$	4	0

Beispiel, Bestimmung der Basislösung



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT



$$\mathbf{b} = [-\mathbf{\Pi}]_T = \begin{bmatrix} 1 \\ 15 \\ 0 \end{bmatrix}$$

a_i	$\Delta_i = [l_i, u_i]$	ω_i	y_i
a_1	$[9, 28]$	8	15
a_2	$[7, 26]$	3	0
a_3	$[2, 21]$	5	0
a_4	$[1, 20]$	9	1
a_5	$[5, 24]$	1	0
a_6	$[3, 22]$	4	0

Beispiel, Darstellung im Tableau und Kostenänderung

Initiales Simplex-Tableau:

	a_2	a_3	a_5	a_4	a_1	a_6	b	ω
a_4	-1	0	1	1	0	0	1	9
a_1	-1	-1	1	0	1	1	15	8
a_6	0	1	-1	0	0	1	0	4
								129

Kostenänderung für verschiedene Austausche:

	a_2	a_3	a_5
a_4	40	—	-12
a_1	-60	-35	0
a_6	—	0	0

Beispiel, Basis-Austausch



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

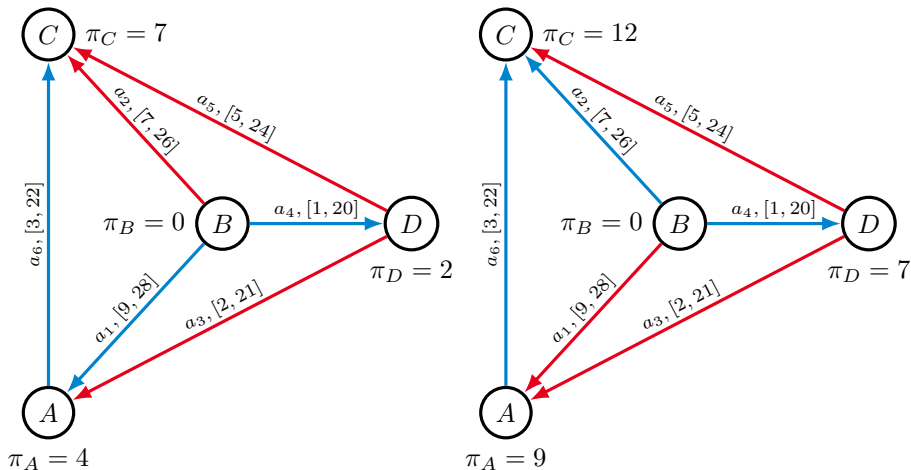
Austausch von Ko-Baum-Kante a_1 mit Baum-Kante a_2 :

	a_2	a_3	a_5	a_4	a_1	a_6	b	ω
a_4	-1	0	1	1	0	0	1	9
a_1	-1	-1	1	0	1	1	15	8
a_6	0	1	-1	0	0	1	0	4
								129

\rightsquigarrow

	a_1	a_3	a_5	a_4	a_2	a_6	b	ω
a_4	-1	1	0	1	0	0	6	9
a_2	-1	1	-1	0	1	0	5	3
a_6	0	1	-1	0	0	1	0	4
								69

Beispiel, Spannbaum vor und nach Austausch



Beispiel, Iteration 2



Simplex-Tableau nach Iteration 1:

	a_1	a_3	a_5	a_4	a_2	a_6	b	ω
a_4	-1	1	0	1	0	0	6	9
a_2	-1	1	-1	0	1	0	5	3
a_6	0	1	-1	0	0	1	0	4
								69

Kostenänderung für verschiedene Austausche:

	a_1	a_3	a_5
a_4	100	74	—
a_2	60	25	60
a_6	—	0	0

⇒ Keine weitere Verbesserung möglich. Abbruch.

Beispiel, Bewertung des Ergebnisses



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Endergebnis:

	a_1	a_3	a_5	a_4	a_2	a_6	b	ω
a_4	-1	1	0	1	0	0	6	9
a_2	-1	1	-1	0	1	0	5	3
a_6	0	1	-1	0	0	1	0	4
								69

Aber der Spannbaum $\mathcal{T} = \{a_4, a_1, a_6\}$ mit Tableau

	a_6	a_1	a_4	a_2	a_3	a_5	b	ω
a_2	-1	-1	0	1	0	0	5	3
a_3	0	-1	1	0	1	0	6	5
a_5	-1	-1	1	0	0	1	6	1
								51

liefert ein besseres Ergebnis.



- ▶ Das Simplex-Verfahren findet meistens nur ein lokales Minimum.
- ▶ Es sind Modifikationen nötig, um ein globales Optimum zu finden.

Verbesserungen der Lösung

Gliederung



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Einleitung und Motivation

Mathematische Modellierung

Nicht-periodische Fahrpläne

Taktfahrpläne

Das Slack-Modell

Grundlagen von Flussnetzwerken

Spannbaumstrukturen

Untersuchung des Slack-Modells

Das Modulo-Netzwerk-Simplex-Verfahren

Einführung

Simplex-Tableau

Verbesserungen der Lösung

Zusammenfassung und Abschluss



Jede Spannung \mathbf{x} (mit $\Gamma \mathbf{x} \equiv_T \mathbf{0}$) definiert mit

$$\mathbf{y}' := [\mathbf{y} + \mathbf{x}]_T$$

eine neue Lösung von $\Gamma \mathbf{y}' \equiv_T \mathbf{b}$. Diese ist gültig, wenn $\mathbf{y}' \leq \delta$ gilt.

Diese Lösung ist besser, wenn sich die Zielfunktion $\omega^T \mathbf{y}$ verbessert.



Ein Knoten i induziert einen Schnitt $\eta^{(i)}$ mit $P = \{i\}$. Eine Änderung des Potentials π_i

$$\pi'_i := \pi_i + \delta$$

ist äquivalent zur Änderung der Slack-Zeiten

$$\mathbf{y}' := \mathbf{y} + \delta \boldsymbol{\eta}^{(i)}$$

nach δ -facher Anwendung des Schnitts.

Prüfung der Verbesserung durch Enumeration von $\delta \in (0, T) \subsetneq \mathbb{Z}$ für jeden Knoten.



Nach Änderung von y muss eine neue Basislösung gefunden werden:

- ▶ Fixieren der Modulo-Parameter z .
- ▶ Lösen des Minimum-Cost-Flow Problems.

Danach kann das Modulo-Simplex-Verfahren erneut angewendet werden.

Zusammenfassung und Abschluss

Gliederung



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Einleitung und Motivation

Mathematische Modellierung

Nicht-periodische Fahrpläne

Taktfahrpläne

Das Slack-Modell

Grundlagen von Flussnetzwerken

Spannbaumstrukturen

Untersuchung des Slack-Modells

Das Modulo-Netzwerk-Simplex-Verfahren

Einführung

Simplex-Tableau

Verbesserungen der Lösung

Zusammenfassung und Abschluss



Initialisierung: Bestimmung einer initialen Spannbaumstruktur $\mathcal{T} = \mathcal{T}^l + \mathcal{T}^u$ mit Lösung y .

solange eine Knotenlokale Verbesserung η existiert **tue**

 Anwendung des Schnitts durch Transformation der Lösung: $y \leftarrow y + \eta$.

 Fixieren der Modulo-Parameter z , Lösung des Minimum-Cost-Flow

 Problems und Transformation der Lösung in eine Spannbaumstruktur.

solange ein Paar (i, j) mit $\Delta\omega_{i,j} < 0$ existiert **tue**

 | Tausche Ko-Baum-Kante a_i mit Baum-Kante a_j .

Ende

Ende



- ▶ Nur lokales Optimum.
- ▶ Knotenlokale Verbesserungen möglich.
- ▶ Dies garantiert aber noch immer kein globales Optimum!
- ▶ Weitere Möglichkeiten (siehe [GS11]):
 - ▶ Waiting Edge Cuts
 - ▶ Random Node Cuts
 - ▶ Multi Node Cuts



Marc Goerigk and Anita Schöbel.

Engineering the Modulo Network Simplex Heuristic for the Periodic Timetabling Problem.
pages 181–192, May 2011.



K. Nachtigall.

Periodic network optimization and fixed interval timetables.
<https://elib.dlr.de/3657/>, 1999.



Karl Nachtigall and Jens Opitz.

Solving Periodic Timetable Optimisation Problems by Modulo Simplex Calculations.

In Matteo Fischetti and Peter Widmayer, editors, *8th Workshop on Algorithmic Approaches for Transportation Modeling, Optimization, and Systems (ATMOS'08)*, volume 9 of *OpenAccess Series in Informatics (OASICS)*, Dagstuhl, Germany, 2008. Schloss Dagstuhl–Leibniz-Zentrum fuer Informatik.