Lösung von Taktfahrplanoptimierungsproblemen durch Modulo-Simplex-Berechnungen

Lösung von Taktfahrplanoptimierungsproblemen durch Modulo-Simplex-Berechnungen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Einleitung und Motivation

Mathematische Modellierung
- Nicht-periodische Fahrpläne
- Taktfahrpläne

Das Slack-Modell
- Grundlagen von Flussnetzwerken
- Spannbaumstrukturen
- Untersuchung des Slack-Modells

Das Modulo-Netzwerk-Simplex-Verfahren
- Einführung
- Simplex-Tableau
- Verbesserungen der Lösung

Zusammenfassung und Abschluss

Einleitung und Motivation
Gliederung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Einleitung und Motivation

Mathematische Modellierung
- Nicht-periodische Fahrpläne
- Taktfahrpläne

Das Slack-Modell
- Grundlagen von Flussnetzwerken
- Spannbaumstrukturen
- Untersuchung des Slack-Modells

Das Modulo-Netzwerk-Simplex-Verfahren
- Einführung
- Simplex-Tableau
- Verbesserungen der Lösung

Zusammenfassung und Abschluss

Einleitung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Die Taktfahrplanoptimierung hat in den letzten Jahren viel Aufmerksamkeit erfahren, vor allem aus der kombinatorischen Optimierung.
- Fast alle Linien des ÖPNV verkehren nach einem Taktfahrplan.

Idee

- Fokus auf die Optimierung von gewichteten Slack-Zeiten
  $\rightarrow$ Gemischt-Ganzzahliges Programm.
- Sehr schwer zu lösen für reale Szenarien.
- Definition von Modulo-Gleichungen und Lösung mit Modulo-Simplex.

Gliederung

Einleitung und Motivation

Mathematische Modellierung
- Nicht-periodische Fahrpläne
- Taktfahrpläne

Das Slack-Modell
- Grundlagen von Flussnetzwerken
- Spannbaumstrukturen
- Untersuchung des Slack-Modells

Das Modulo-Netzwerk-Simplex-Verfahren
- Einführung
- Simplex-Tableau
- Verbesserungen der Lösung

Zusammenfassung und Abschluss

Nicht-periodische Fahrpläne
Gliederung

Einleitung und Motivation

Mathematische Modellierung
- Nicht-periodische Fahrpläne
- Taktfahrpläne

Das Slack-Modell
- Grundlagen von Flussnetzwerken
- Spannbaumstrukturen
- Untersuchung des Slack-Modells

Das Modulo-Netzwerk-Simplex-Verfahren
- Einführung
- Simplex-Tableau
- Verbesserungen der Lösung

Zusammenfassung und Abschluss

Schienennetz und Ereignisse

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Ein *Schienennetz* ist ein System von Linien $\mathcal{L}$ und Stationen $\mathcal{S}$.

Bedient Linie $L \in \mathcal{L}$ die Station $S \in \mathcal{S}$, so sei

- (L, arr, S) das Ankunfts- und
- (L, dep, S) das Abfahrts-*Ereignis*.

Eine Linie ist eine alternierende Sequenz von Ankunfts- und Abfahrts-Ereignis.

Fahrpläne und Vorgänge

Ein *Fahrplan* $\boldsymbol{\pi} = (\pi_i)$ ordnet jedem Event $i = (L, arr, S)$ (bzw. $i = (L, dep, S)$) einen Zeitpunkt $\pi_i \in \mathbb{R}$ zu.

Ein *Vorgang* („Activity“) $a : i \to j$ beschreibt den Übergang von i zu j. Die Dauer des Vorgangs, die *Spannung* („Tension“) ist

$$x_a = \pi_j - \pi_i$$

Sei $\mathcal{A}$ die Menge aller Vorgänge.

Fahrpläne und Vorgänge

Ein *Fahrplan* $\boldsymbol{\pi} = (\pi_i)$ ordnet jedem Event $i = (L, arr, S)$ (bzw. $i = (L, dep, S)$) einen Zeitpunkt $\pi_i \in \mathbb{R}$ zu.

Ein *Vorgang* („Activity") $a : i \to j$ beschreibt den Übergang von i zu j. Die Dauer des Vorgangs, die *Spannung* („Tension") ist

$$x_a = \pi_j - \pi_i$$

Sei $\mathcal{A}$ die Menge aller Vorgänge.

Beispiel:
Haltevorgang a von Linie L an Station S:

$$a : (L, dep, S) \to (L, arr, S)$$

Zeiteinschränkungen und Zulässigkeit

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Jedem Vorgang $a \in \mathcal{A}$ wird eine *zulässige Dauer*

$$\Delta_a = [l_a, u_a]$$

zugeordnet.

Ein Fahrplan $\boldsymbol{\pi}$ heißt *zulässig* („feasible“), wenn gilt:

$$\forall a \in \mathcal{A} : x_a \in \Delta_a \quad \Longleftrightarrow \quad \forall (a : i \to j) \in \mathcal{A} : l_a \leq \pi_j - \pi_i \leq u_a$$

Aussagekraft von Zeiteinschränkungen

- Fast alle realen Einschränkungen können durch Zeitspannen beschrieben werden.

Aussagekraft von Zeiteinschränkungen

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

- Fast alle realen Einschränkungen können durch Zeitspannen beschrieben werden.
  - Fahrzeit eines Zuges
  - Sicherheitseinschränkungen (z. B. Vorfahrt)
  - Wartezeiten (Kundenzufriedenheit)
  - Umsteigezeiten
  - ...

Ereignisnetzwerk

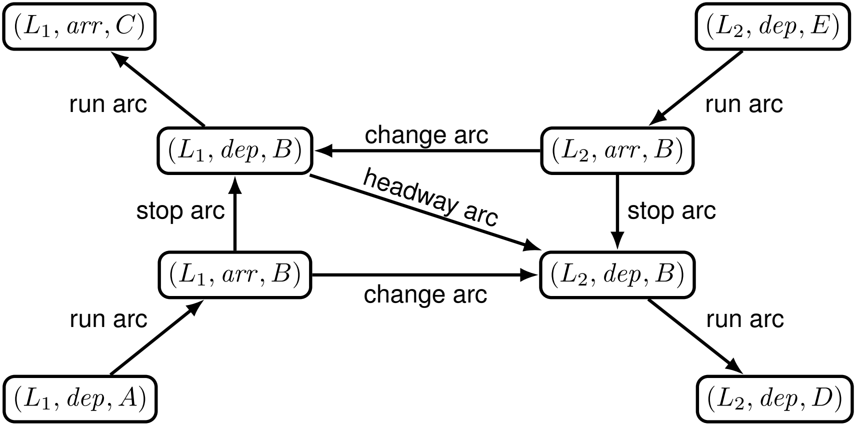


Abbildung: Ereignisnetzwerk, vgl. [NO08, Fig. 1]

Zusammenfassung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Schienennetz — Linien $\mathcal{L}$, Stationen $\mathcal{S}$
- Ereignisse — (L, arr, S), (L, dep, S)
- Fahrplan — $\boldsymbol{\pi} = (\pi_i)$
- Vorgang — $a : i \to j$
- Spannung — $x_a = \pi_j - \pi_i$
- Zulässige Dauer — $\Delta_a = [l_a, u_a]$

Taktfahrpläne
Gliederung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Einleitung und Motivation

Mathematische Modellierung

- Nicht-periodische Fahrpläne
- Taktfahrpläne

Das Slack-Modell

- Grundlagen von Flussnetzwerken
- Spannbaumstrukturen
- Untersuchung des Slack-Modells

Das Modulo-Netzwerk-Simplex-Verfahren

- Einführung
- Simplex-Tableau
- Verbesserungen der Lösung

Zusammenfassung und Abschluss

Problematiken

- Nicht-periodische Optimierungsprobleme $\rightarrow$ Kürzester-Pfad-Berechnungen.
- Taktfahrpläne $\rightarrow$ dieses einfache Modell funktioniert nicht mehr.
  - Es ist a-priori nicht klar, in welcher Sequenz Züge ankommen.
  - Erst nach Ordnung bekannt.

Taktfahrpläne und periodische Zulässigkeit

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Ein Taktfahrplan $\boldsymbol{\pi} = (\pi_i)$ ordnet jedem periodischem Ereignis i einen *Ereigniszeitpunkt* $\pi_i \in \mathbb{R}$ zu. Ereignisse finden zu den Zeitpunkten $\pi_i + z_i T$ mit dem Modulo-Parameter $z_i \in \mathbb{Z}$ und der Taktzeit T statt.

Ein Taktfahrplan $\boldsymbol{\pi}$ heißt *zulässig* („feasible"), wenn gilt:

$$\forall (a : i \to j) \in \mathcal{A} : \exists z_a \in \mathbb{Z} : l_a \leq \pi_j - \pi_i - z_a T \leq u_a$$

Modulo-Operator und Slack-Zeiten

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sei

$$[t]_T \coloneqq \min \left\{\, t + zT \,\middle|\, t + zT \geq 0, \quad z \in \mathbb{Z}, \quad T = \text{const} \,\right\}$$

Es gilt offensichtlich $0 \leq [t]_T < T$.

Die untere und obere *Slack-Zeit* misst, um wie viel Zeit die Spannung $x_a = \pi_j - \pi_i$ verändert werden darf.

$$\begin{aligned} y_a^{low} &\coloneqq [x_a - l_a]_T \\ y_a^{upp} &\coloneqq [u_a - x_a]_T \end{aligned}$$

Das Optimierungsproblem (Potential-Modell)

- Durch Umkehrung einer Kante a können obere und untere Pufferzeit ausgetauscht werden.
- O.B.d.A. kann das Problem nur in Bezug auf y_a^{low} definiert werden.

$\rightarrow$ Gemischt-Ganzzahliges Programm („mixed-integer program“):

$$\min \left\{ \sum_{a \in \mathcal{A}} \omega_a (x_a - l_a - z_a T) \,\middle|\, \forall a \in \mathcal{A} : l_a \leq x_a - z_a T \leq u_a, \quad z_a \in \mathbb{Z} \right\}$$

Zusammenfassung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Taktzeit $T = \text{const}$
- Fahrplan $\boldsymbol{\pi} = (\pi_i)$
- Vorgang $a : i \to j$
- Spannung $x_a = \pi_j - \pi_i$
- Zulässige Dauer $\Delta_a = [l_a, u_a]$
- Untere/Obere Slack-Zeit $y_a^{low} = [x_a - l_a]_T,\ y_a^{upp} = [u_a - x_a]_T$
- Optimierungsproblem

$$\min \left\{ \sum_{a \in \mathcal{A}} \omega_a (x_a - l_a - z_a T) \,\middle|\, \forall a \in \mathcal{A} : l_a \leq x_a - z_a T \leq u_a, \quad z_a \in \mathbb{Z} \right\}$$

Das Slack-Modell
Gliederung

Einleitung und Motivation

Mathematische Modellierung
- Nicht-periodische Fahrpläne
- Taktfahrpläne

Das Slack-Modell
- Grundlagen von Flussnetzwerken
- Spannbaumstrukturen
- Untersuchung des Slack-Modells

Das Modulo-Netzwerk-Simplex-Verfahren
- Einführung
- Simplex-Tableau
- Verbesserungen der Lösung

Zusammenfassung und Abschluss

Grundlagen von Flussnetzwerken
Gliederung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Einleitung und Motivation

Mathematische Modellierung
- Nicht-periodische Fahrpläne
- Taktfahrpläne

Das Slack-Modell
- Grundlagen von Flussnetzwerken
- Spannbaumstrukturen
- Untersuchung des Slack-Modells

Das Modulo-Netzwerk-Simplex-Verfahren
- Einführung
- Simplex-Tableau
- Verbesserungen der Lösung

Zusammenfassung und Abschluss

Gerichtete Graphen

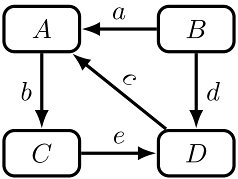


Abbildung: Gerichteter Graph mit $n = 4$ Kanten und $m = 4$ Knoten (laufendes Beispiel)

Notation: Die Kante $a : A \to B$ geht von Knoten A zu Knoten B.

Spannbaum und Komplement-Baum (Ko-Baum)

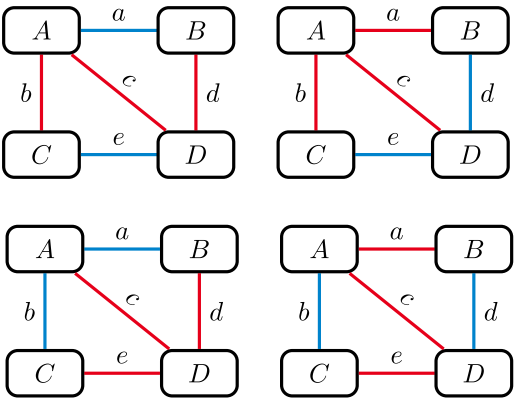


Abbildung: Mehrere (nicht alle) Spannbäume (rot) und Ko-Bäume (blau)

Inzidenzmatrix

Die *Inzidenzmatrix* eines Netzwerks mit n Knoten und m Kanten ist eine $n \times m$-Matrix $\boldsymbol{\Theta} = (\theta_{ia})$:

$$\theta_{ia} \coloneqq \begin{cases} 1 & \text{falls } a : j \to i \\ -1 & \text{falls } a : i \to j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

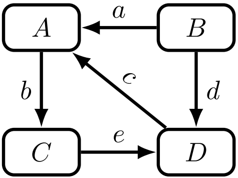
Inzidenzmatrix

Die *Inzidenzmatrix* eines Netzwerks mit n Knoten und m Kanten ist eine $n \times m$-Matrix $\mathbf{\Theta} = (\theta_{ia})$:

$$\theta_{ia} := \begin{cases} 1 & \text{falls } a : j \to i \\ -1 & \text{falls } a : i \to j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Beispiel:

$$\mathbf{\Theta} = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$



Netzwerkmatrix („Edge-Cycle-Matrix“)

Durch Hinzufügen einer Ko-Baum-Kante zum Baum $\mathcal{T}$ wird ein eindeutiger Zyklus c definiert. Sei $\mathbf{\Gamma} = (\gamma_{ca})$ die *Netzwerkmatrix*:

$$\gamma_{ca} \coloneqq \begin{cases} 1 & \text{falls der Zyklus } c \text{ die Kante } a \text{ in positiver Richtung enthält} \\ -1 & \text{falls der Zyklus } c \text{ die Kante } a \text{ in negativer Richtung enthält} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

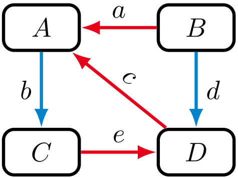
Netzwerkmatrix („Edge-Cycle-Matrix“)

Durch Hinzufügen einer Ko-Baum-Kante zum Baum $\mathcal{T}$ wird ein eindeutiger Zyklus c definiert. Sei $\mathbf{\Gamma} = (\gamma_{ca})$ die *Netzwerkmatrix*:

$$\gamma_{ca} := \begin{cases} 1 & \text{falls der Zyklus } c \text{ die Kante } a \text{ in positiver Richtung enthält} \\ -1 & \text{falls der Zyklus } c \text{ die Kante } a \text{ in negativer Richtung enthält} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Beispiel:

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{array}{c} \\ b \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$



Potential und Spannung

Ein *Potential* $\boldsymbol{\pi} = (\pi_i)$ ordnet jedem Knoten i einen Wert $\pi_i \in \mathbb{R}$ zu.

Die Potentialdifferenz $x_a \coloneqq \pi_j - \pi_i$ sei die *Spannung* von Kante $a : i \to j$. Es gilt $\mathbf{\Theta}^T \boldsymbol{\pi} = \mathbf{x}$. Weiterhin ist $\mathbf{x}$ eine periodische Spannung gdw. $\mathbf{\Gamma x} \equiv_T \mathbf{0}$ gilt.

Potential und Spannung

Ein *Potential* $\boldsymbol{\pi} = (\pi_i)$ ordnet jedem Knoten i einen Wert $\pi_i \in \mathbb{R}$ zu.

Die Potentialdifferenz $x_a \coloneqq \pi_j - \pi_i$ sei die *Spannung* von Kante $a : i \to j$. Es gilt $\boldsymbol{\Theta}^T \boldsymbol{\pi} = \mathbf{x}$. Weiterhin ist $\mathbf{x}$ eine periodische Spannung gdw. $\boldsymbol{\Gamma}\mathbf{x} \equiv_T \mathbf{0}$ gilt.

Beispiel:

$$\boldsymbol{\pi} = \begin{bmatrix} \pi_A & \pi_B & \pi_C & \pi_D \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^4$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \\ x_d \\ x_e \end{bmatrix} \coloneqq \begin{bmatrix} \pi_A - \pi_B \\ \pi_C - \pi_A \\ \pi_A - \pi_D \\ \pi_D - \pi_B \\ \pi_D - \pi_C \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{= \boldsymbol{\Theta}^T} \cdot \begin{bmatrix} \pi_A \\ \pi_B \\ \pi_C \\ \pi_D \end{bmatrix}$$

Potential und Spannung, Fortsetzung

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Beispiel:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_a & x_b & x_c & x_d & x_e \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Gamma x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \\ x_d \\ x_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_b + x_c + x_d \\ x_c + x_d - x_a \end{bmatrix}$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "b"'] & B \arrow[l, "a"'] \arrow[d, "d"] \\ C \arrow[r, "e"] & D \arrow[ul, "c"'] \end{tikzcd}$$

Flüsse

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Der *Bedarf* $\mathbf{v} = (v_i)$ (mit $\sum_i v_i = 0$) ordnet jedem Knoten i einen Bedarf $v_i \in \mathbb{R}$ zu. Ein Knoten mit v_i heißt

$$\begin{cases} \textit{Quellknoten} & \text{für } v_i > 0 \\ \textit{Zielknoten} & \text{für } v_i < 0 \\ \textit{Durchgangsknoten} & \text{für } v_i = 0 \end{cases}$$

Ein Fluss $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_a)$ (mit $\boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{v}$) ordnet jeder Kante a einen Flusswert $\varphi_a \in \mathbb{R}$ zu.

Schnitte

Die Knoten eines Graphen lassen sich in zwei disjunkte Mengen P und $\bar{P}$ zerlegen. Sei $\boldsymbol{\eta} = (\eta_{(a:i \to j)})$ der *Schnitt* bzgl. dieser Zerlegung:

$$\eta_{(a:i \to j)} \coloneqq \begin{cases} 1 & \text{falls } i \in P \text{ und } j \in \bar{P} \\ -1 & \text{falls } i \in \bar{P} \text{ und } j \in P \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

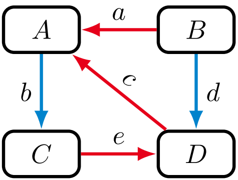
Schnitte

Die Knoten eines Graphen lassen sich in zwei disjunkte Mengen P und $\bar{P}$ zerlegen. Sei $\boldsymbol{\eta} = (\eta_{(a:i\to j)})$ der *Schnitt* bzgl. dieser Zerlegung:

$$\eta_{(a:i\to j)} := \begin{cases} 1 & \text{falls } i \in P \text{ und } j \in \bar{P} \\ -1 & \text{falls } i \in \bar{P} \text{ und } j \in P \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Beispiel:

$$P = \{\, \mathsf{C} \,\}$$
$$\bar{P} = \{\, \mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{D} \,\}$$
$$\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$$



Zusammenfassung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Gerichtete Graphen
- Spannbaum und Komplement-Baum (Ko-Baum)
- Inzidenzmatrix $\boldsymbol{\Theta} = (\theta_{ia})$
- Netzwerkmatrix $\boldsymbol{\Gamma} = (\gamma_{ca})$
- Potential $\boldsymbol{\pi} = (\pi_i)$
- Spannung $\mathbf{x} = \boldsymbol{\Theta}^T \boldsymbol{\pi} = (x_a),\ x_a = \pi_j - \pi_i$
- Bedarf $\mathbf{v} = (v_i)$
- Fluss $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_a)$ mit $\boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{v}$
- Schnitt $\boldsymbol{\eta} = (\eta_a)$ für P, $\bar{P}$

Spannbaumstrukturen
Gliederung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Einleitung und Motivation

Mathematische Modellierung
- Nicht-periodische Fahrpläne
- Taktfahrpläne

Das Slack-Modell
- Grundlagen von Flussnetzwerken
- Spannbaumstrukturen
- Untersuchung des Slack-Modells

Das Modulo-Netzwerk-Simplex-Verfahren
- Einführung
- Simplex-Tableau
- Verbesserungen der Lösung

Zusammenfassung und Abschluss

Spannbaumstrukturen und generiertes Potential

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sei $\mathcal{T} = \mathcal{T}^l + \mathcal{T}^u$ ein Spannbaum, separiert in $\mathcal{T}^l$ und $\mathcal{T}^u$, sodass gilt:

$$\forall a \in \mathcal{T}^l : x_a = l_a \qquad \text{und} \qquad \forall a \in \mathcal{T}^u : x_a = u_a$$

Jede Struktur bestimmt ein eindeutiges Potential $\boldsymbol{\pi}^{(\mathcal{T})}$, für das gilt:

$$\forall (a : i \to j) \in \mathcal{T}^l : \pi_j^{(\mathcal{T})} - \pi_i^{(\mathcal{T})} = l_a$$
$$\forall (a : i \to j) \in \mathcal{T}^l : \pi_j^{(\mathcal{T})} - \pi_i^{(\mathcal{T})} = u_a$$

Das Optimierungsproblem (Slack-Modell)

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Mit $\mathbf{b} \coloneqq [-\mathbf{\Gamma}\mathbf{l}]_T$ und $\boldsymbol{\delta} \coloneqq \mathbf{u} - \mathbf{l}$ ist die *Menge zulässiger Slack-Zeiten* $\mathcal{Y}$ definiert:

$$\mathcal{Y} \coloneqq \left\{\, \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^m \,\middle|\, \mathbf{\Gamma}\mathbf{y} \equiv_T \mathbf{b}, \quad \mathbf{0} \leq \mathbf{y} \leq \boldsymbol{\delta} \,\right\}$$

Das Optimierungsproblem kann wie folgt umformuliert werden:

$$\min \left\{\, \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{y} \,\middle|\, \mathbf{y} \in \mathcal{Y} \,\right\}$$

Zusammenfassung

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

- Spannbaumstruktur $\mathcal{T} = \mathcal{T}^l + \mathcal{T}^u$
- $\mathbf{b} = [-\mathbf{\Gamma}\mathbf{l}]_T$
- $\boldsymbol{\delta} = \mathbf{u} - \mathbf{l}$
- Zulässige Slack-Zeiten

$$\mathcal{Y} = \left\{ \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^m \,\middle|\, \mathbf{\Gamma}\mathbf{y} \equiv_T \mathbf{b}, \quad \mathbf{0} \leq \mathbf{y} \leq \boldsymbol{\delta} \right\}$$

- Optimierungsproblem

$$\min \left\{ \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{y} \,\middle|\, \mathbf{y} \in \mathcal{Y} \right\}$$

Gliederung

Einleitung und Motivation

Mathematische Modellierung

- Nicht-periodische Fahrpläne
- Taktfahrpläne

Das Slack-Modell

- Grundlagen von Flussnetzwerken
- Spannbaumstrukturen
- Untersuchung des Slack-Modells

Das Modulo-Netzwerk-Simplex-Verfahren

- Einführung
- Simplex-Tableau
- Verbesserungen der Lösung

Zusammenfassung und Abschluss

Dualität zum Minimum-Cost Flow Problem

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Werden die Modulo-Parameter z_a fixiert, kann das Optimierungsproblem umformuliert werden:

$$
\begin{aligned}
&\min \left\{ \sum_{a}^{\mathcal{A}} \omega_a (x_a - l_a - z_a T) \,\middle|\, \forall a \in \mathcal{A} : l_a \leq x_a - z_a T \leq u_a \right\} \\
&= \min \left\{ \sum_{a}^{\mathcal{A}} \omega_a (x_a - l'_a) \,\middle|\, \forall a \in \mathcal{A} : l'_a = l_a + z_a T \leq x_a \leq u'_a = u_a + z_a T \right\} \\
&= \min \left\{ \boldsymbol{\omega}^T (\boldsymbol{\Theta}^T \boldsymbol{\pi} - \mathbf{l}') \,\middle|\, \mathbf{l}' \leq \boldsymbol{\Theta}^T \boldsymbol{\pi} \leq \mathbf{u}' \right\}
\end{aligned}
$$

Dies ist die duale Formulierung des Minimum-Cost Flow Problems.
Jeder Extrempunkt der gültigen Region des Problems entspricht einer Spannbaumstruktur.

Periodische Basislösung

Sind $\mathbf{z}^{\mathcal{T}}$ die fixierten Modulo-Parameter, so heißt

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\pi}^{\mathcal{T}} \\ \mathbf{z}^{\mathcal{T}} \end{bmatrix}$$

die *periodische Basislösung* in Bezug auf die Spannbaumstruktur $\mathcal{T}$.

Extrempunkte $\longleftrightarrow$ Spannbaumstrukturen

Sei

$$\mathcal{Q} := conv.hull \left\{ \begin{bmatrix} \boldsymbol{\pi} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} \;\middle|\; \mathbf{l} \leq \boldsymbol{\Theta}^T \boldsymbol{\pi} - T\mathbf{z} \leq \mathbf{u}, \quad \boldsymbol{\pi} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{z} \in \mathbb{Z}^m \right\}$$

der *periodische Fahrplan-Polyeder*.

Theorem. Der Vektor $\begin{bmatrix} \boldsymbol{\pi} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} \in \mathcal{Q}$ ist ein Extrempunkt von $\mathcal{Q}$ gdw. er eine periodische Basislösung in Bezug auf eine Spannbaumstruktur ist.
Beweis siehe [Nac99].

Das Modulo-Netzwerk-Simplex-Verfahren
Gliederung

Einleitung und Motivation

Mathematische Modellierung
- Nicht-periodische Fahrpläne
- Taktfahrpläne

Das Slack-Modell
- Grundlagen von Flussnetzwerken
- Spannbaumstrukturen
- Untersuchung des Slack-Modells

Das Modulo-Netzwerk-Simplex-Verfahren
- Einführung
- Simplex-Tableau
- Verbesserungen der Lösung

Zusammenfassung und Abschluss

Einleitung und Motivation
Mathematische Modellierung
- Nicht-periodische Fahrpläne
- Taktfahrpläne

Das Slack-Modell
- Grundlagen von Flussnetzwerken
- Spannbaumstrukturen
- Untersuchung des Slack-Modells

Das Modulo-Netzwerk-Simplex-Verfahren
- Einführung
- Simplex-Tableau
- Verbesserungen der Lösung

Zusammenfassung und Abschluss

Arbeits-/Erkundungsbereich

Die Modulo-Simplex-Methode erkundet die Extrempunkte des Optimierungsproblems

$$\min \left\{ \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{y} \,\middle|\, \mathbf{y} \in \mathcal{Y} := \left\{ \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^m \,|\, \exists \mathbf{z} \in \mathbb{Z}^m : (\boldsymbol{\Gamma} \mathbf{y} - T\mathbf{z} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{0} \leq \mathbf{y} - T\mathbf{z} \leq \boldsymbol{\delta}) \right\} \right\}$$

Das heißt des Polyeders $conv.hull(\mathcal{Y})$.

Behandlung der Modulo-Parameter

- Die Ganzzahligkeit von $\mathbf{z}$ macht das Problem sehr schwer.
- Daher: Eliminierung von $\mathbf{z}$ durch Restklassenberechnungen (Modulo-Berechnungen).

$$\min \left\{ \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{y} \,\middle|\, \mathbf{y} \in \mathcal{Y} \coloneqq \left\{ \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^m \,\middle|\, \exists \mathbf{z} \in \mathbb{Z}^m : (\boldsymbol{\Gamma}\mathbf{y} \equiv_T \mathbf{b}, \quad \mathbf{0} \le \mathbf{y} \le \boldsymbol{\delta}) \right\} \right\}$$

Gliederung

Einleitung und Motivation
Mathematische Modellierung
- Nicht-periodische Fahrpläne
- Taktfahrpläne

Das Slack-Modell
- Grundlagen von Flussnetzwerken
- Spannbaumstrukturen
- Untersuchung des Slack-Modells

Das Modulo-Netzwerk-Simplex-Verfahren
- Einführung
- Simplex-Tableau
- Verbesserungen der Lösung

Zusammenfassung und Abschluss

Idee

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Beginnend von der Basislösung $\begin{bmatrix}\mathbf{0}^T & \mathbf{b}^T\end{bmatrix}^T$ bewegt sich der Algorithmus auf den Kanten des Polyeders $conv.hull(\mathcal{Y})$.
- In jedem Schritt: Überprüfen der Verbesserung.
- Keine Verbesserung möglich $\rightarrow$ lokales Minimum gefunden.

Separierung der Netzwerkmatrix

Separierung der Netzwerkmatrix $\mathbf{\Gamma}_{\mathcal{T}} = \left[\mathbf{N}_{\mathcal{T}},\, \mathbf{I}_{\mathcal{T}}^{co}\right]$ in Baum-Kanten $\mathbf{N}_{\mathcal{T}}$ und Ko-Baum-Kanten $\mathbf{I}_{\mathcal{T}}^{co}$.

$\implies$ Periodische Basislösung $\mathbf{y}_{\mathcal{T}} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{\mathcal{T}} \\ \mathbf{y}_{\mathcal{T}}^{co} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}$

Separierung der Netzwerkmatrix

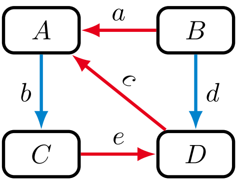
Separierung der Netzwerkmatrix $\boldsymbol{\Gamma}_{\mathcal{T}} = \left[\mathbf{N}_{\mathcal{T}}, \, \mathbf{I}_{\mathcal{T}}^{co}\right]$ in Baum-Kanten $\mathbf{N}_{\mathcal{T}}$ und Ko-Baum-Kanten $\mathbf{I}_{\mathcal{T}}^{co}$.

$\implies$ Periodische Basislösung $\mathbf{y}_{\mathcal{T}} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{\mathcal{T}} \\ \mathbf{y}_{\mathcal{T}}^{co} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}$

Beispiel:

$$\boldsymbol{\Gamma} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{array}{c} b \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\implies \quad \boldsymbol{\Gamma}_{\mathcal{T}} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} a & c & e & b & d \end{array} \\ \begin{array}{c} b \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$



Aufstellung des Tableau

Seien $a_1, \cdots, a_{r-1}$ die Ko-Baum-Kanten und $a_r, \cdots, a_m$ die Baum-Kanten.
Formulierung als Simplex-Tableau:

$$\left[\begin{array}{ccc||c} \mathbf{N} & \mathbf{I} & \mathbf{b} & \boldsymbol{\omega} \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c|cc|ccc|c||c}
 & a_1 & \cdots & a_r & \cdots & a_m & & \\
\hline
a_r & \gamma_{r1} & \cdots & 1 & & 0 & b_r & \omega_r \\
\vdots & \vdots & \ddots & & \ddots & & \vdots & \vdots \\
a_m & \gamma_{m1} & \cdots & 0 & & 1 & b_m & \omega_m \\
\hline
 & & & & & & & \omega
\end{array}$$

Basis-Austausch, Teil 1

Auswahl eines Pivot-Elements a_{ij}:

$$
\begin{array}{c|ccccc|ccccc|c||c}
 & a_1 & \cdots & a_j & \cdots & a_r & \cdots & a_i & \cdots & a_m & & \\
\hline
a_r & \gamma_{r1} & \cdots & \gamma_{rj} & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & b_r & \omega_r \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_i & \gamma_{i1} & \cdots & \boxed{\gamma_{ij}} & \cdots & 0 & & 1 & & 0 & b_i & \omega_i \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_m & \gamma_{m1} & \cdots & \gamma_{mj} & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & b_m & \omega_m \\
\hline
 & & & & & & & & & & & \omega
\end{array}
$$

Basis-Austausch, Teil 2

Austausch von z_i mit x_j:

Pivotelement: $\gamma_{ij} = \frac{1}{\gamma_{ij}}$

Pivotzeile für alle $s \neq j$: $\gamma_{is} = \frac{\gamma_{is}}{\gamma_{ij}}$ $\quad b_r = \left[\frac{b_r}{\gamma_{ij}}\right]_T$

Pivotspalte für alle $r \neq i$: $\gamma_{rj} = -\frac{\gamma_{rj}}{\gamma_{ij}}$

Restliche Elemente des Tableaus: $\gamma_{rs} = \gamma_{rs} - \frac{\gamma_{is}\gamma_{rj}}{\gamma_{ij}}$ $\quad b_r = \left[b_r - \frac{\gamma_{rj}}{\gamma_{ij}} b_i\right]_T$

Basis-Austausch, Teil 2

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Austausch von z_i mit x_j:

Pivotelement: $\gamma_{ij} = \frac{1}{\gamma_{ij}}$

Pivotzeile für alle $s \neq j$: $\gamma_{is} = \frac{\gamma_{is}}{\gamma_{ij}}$ $\quad b_r = \left[\frac{b_r}{\gamma_{ij}}\right]_T$

Pivotspalte für alle $r \neq i$: $\gamma_{rj} = -\frac{\gamma_{rj}}{\gamma_{ij}}$

Restliche Elemente des Tableaus: $\gamma_{rs} = \gamma_{rs} - \frac{\gamma_{is}\gamma_{rj}}{\gamma_{ij}}$ $\quad b_r = \left[b_r - \frac{\gamma_{rj}}{\gamma_{ij}} b_i\right]_T$

$$
\begin{array}{c|ccccc|ccccc|c||c}
 & a_1 & \cdots & a_i & \cdots & & a_r & \cdots & a_j & \cdots & a_m & & \\
\hline
a_r & \gamma_{r1} - \frac{\gamma_{i1}\gamma_{rj}}{\gamma_{ij}} & \cdots & -\frac{\gamma_{rj}}{\gamma_{ij}} & \cdots & & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \left[b_r - \frac{\gamma_{rj}}{\gamma_{ij}} b_i\right]_T & \omega_r \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & & \vdots & \ddots & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_j & \frac{\gamma_{i1}}{\gamma_{ij}} & \cdots & \frac{1}{\gamma_{ij}} & \cdots & & 0 & & 1 & & 0 & \left[\frac{b_i}{\gamma_{ij}}\right]_T & \omega_j \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & & \vdots & \ddots & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_m & \gamma_{m1} - \frac{\gamma_{i1}\gamma_{mj}}{\gamma_{ij}} & \cdots & -\frac{\gamma_{mj}}{\gamma_{ij}} & \cdots & & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \left[b_m - \frac{\gamma_{mj}}{\gamma_{ij}} b_m\right]_T & \omega_m \\
\hline
 & & & & & & & & & & & & \omega
\end{array}
$$

Kostenänderung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Kosten vor (ω) und nach ($\tilde{\omega}_{ij}$) der Vertauschung von a_i und a_j:

$$\omega = \sum_{k=r}^{m} \omega_k b_k \qquad \tilde{\omega}_{ij} = \omega_j \left[\frac{b_i}{\gamma_{ij}}\right]_T + \sum_{\substack{k=r \\ k \neq i}}^{m} \omega_k \left[b_k - \frac{\gamma_{kj}}{\gamma_{ij}} b_i\right]_T$$

Kostenänderung:

$$\begin{aligned} \Delta\omega_{ij} &= \tilde{\omega}_{ij} - \omega \\ &= \omega_j \left[\frac{b_i}{\gamma_{ij}}\right]_T - \omega_i b_i + \sum_{\substack{k=r \\ k \neq i}}^{m} \omega_k \left(\left[b_k - \frac{\gamma_{kj}}{\gamma_{ij}} b_i\right]_T - b_k \right) \end{aligned}$$

Auswahl des Pivotelements

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Berechnung aller Kostenänderungen.
- Nur für Austausche, die einen Spannbaum beibehalten!
- Andere Austausche führen zur Division durch Null.
- Ist keine negative (verbessernde) Änderung möglich $\rightarrow$ Abbruch.

Beispiel (vgl. [NO08])

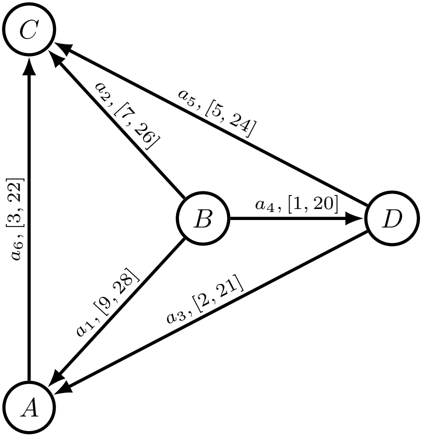
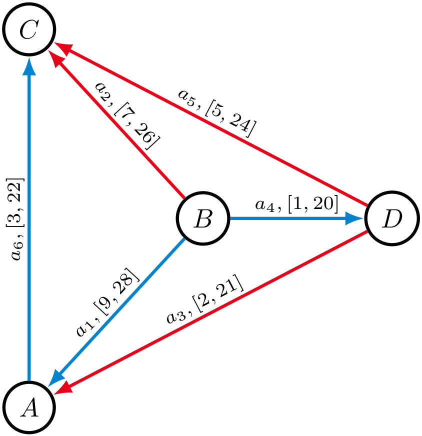


Abbildung: Ereignisnetzwerk

a_i	$\Delta_i = [l_i, u_i]$	ω_i
a_1	$[9, 28]$	8
a_2	$[7, 26]$	3
a_3	$[2, 21]$	5
a_4	$[1, 20]$	9
a_5	$[5, 24]$	1
a_6	$[3, 22]$	4

$$T = 20$$

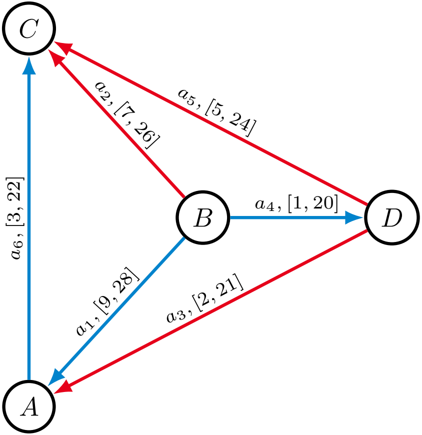
Beispiel, Bestimmung einer Spannbaumstruktur



$$\mathbf{\Gamma} = \begin{array}{c} \\ a_4 \\ a_1 \\ a_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a_2 & a_3 & a_5 & a_4 & a_1 & a_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Abbildung: Spannbaum und Ko-Baum

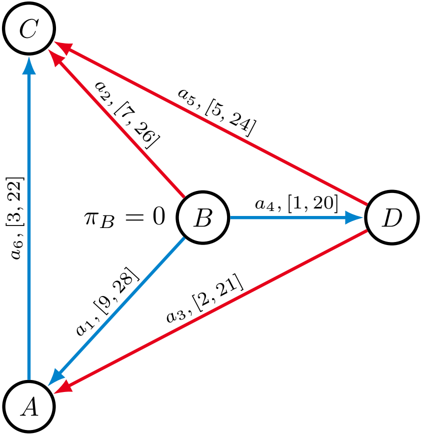
Beispiel, Bestimmung der Basislösung



$$\mathbf{b} = \big[-\mathbf{\Gamma l}\big]_T = \begin{bmatrix} 1 \\ 15 \\ 0 \end{bmatrix}$$

a_i	$\Delta_i = [l_i, u_i]$	ω_i	y_i
a_1	$[9, 28]$	8	15
a_2	$[7, 26]$	3	0
a_3	$[2, 21]$	5	0
a_4	$[1, 20]$	9	1
a_5	$[5, 24]$	1	0
a_6	$[3, 22]$	4	0

Beispiel, Bestimmung der Basislösung

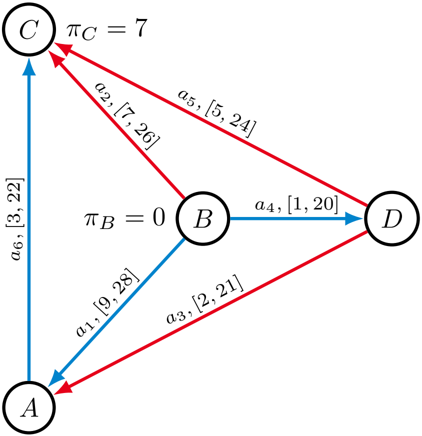


$$\mathbf{b} = \big[-\mathbf{\Gamma l}\big]_T = \begin{bmatrix} 1 \\ 15 \\ 0 \end{bmatrix}$$

a_i	$\Delta_i = [l_i, u_i]$	ω_i	y_i
a_1	$[9, 28]$	8	15
a_2	$[7, 26]$	3	0
a_3	$[2, 21]$	5	0
a_4	$[1, 20]$	9	1
a_5	$[5, 24]$	1	0
a_6	$[3, 22]$	4	0

Beispiel, Bestimmung der Basislösung

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

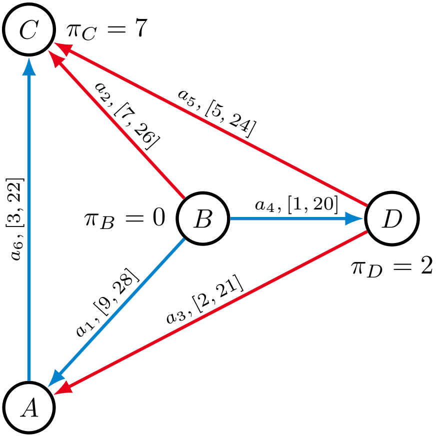


$$\mathbf{b} = \big[-\boldsymbol{\Gamma}\mathbf{l}\big]_T = \begin{bmatrix} 1 \\ 15 \\ 0 \end{bmatrix}$$

a_i	$\Delta_i = [l_i, u_i]$	ω_i	y_i
a_1	$[9, 28]$	8	15
a_2	$[7, 26]$	3	0
a_3	$[2, 21]$	5	0
a_4	$[1, 20]$	9	1
a_5	$[5, 24]$	1	0
a_6	$[3, 22]$	4	0

Beispiel, Bestimmung der Basislösung

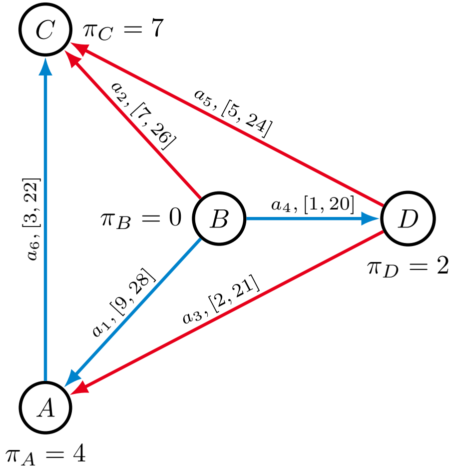
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT



$$\mathbf{b} = \left[-\boldsymbol{\Gamma}\mathbf{l}\right]_T = \begin{bmatrix} 1 \\ 15 \\ 0 \end{bmatrix}$$

a_i	$\Delta_i = [l_i, u_i]$	ω_i	y_i
a_1	$[9, 28]$	8	15
a_2	$[7, 26]$	3	0
a_3	$[2, 21]$	5	0
a_4	$[1, 20]$	9	1
a_5	$[5, 24]$	1	0
a_6	$[3, 22]$	4	0

Beispiel, Bestimmung der Basislösung



$$\mathbf{b} = \big[-\mathbf{\Gamma l}\big]_T = \begin{bmatrix} 1 \\ 15 \\ 0 \end{bmatrix}$$

a_i	$\Delta_i = [l_i, u_i]$	ω_i	y_i
a_1	$[9, 28]$	8	15
a_2	$[7, 26]$	3	0
a_3	$[2, 21]$	5	0
a_4	$[1, 20]$	9	1
a_5	$[5, 24]$	1	0
a_6	$[3, 22]$	4	0

Beispiel, Darstellung im Tableau und Kostenänderung

Initiales Simplex-Tableau:

	a_2	a_3	a_5	a_4	a_1	a_6	b	ω
a_4	-1	0	1	1	0	0	1	9
a_1	-1	-1	1	0	1	1	15	8
a_6	0	1	-1	0	0	1	0	4
								129

Kostenänderung für verschiedene Austausche:

	a_2	a_3	a_5
a_4	40	$-$	-12
a_1	$\boxed{-60}$	-35	0
a_6	$-$	0	0

Beispiel, Basis-Austausch

Austausch von Ko-Baum-Kante a_1 mit Baum-Kante a_2:

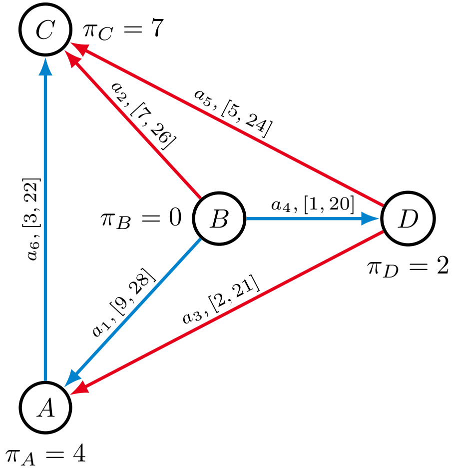
	a_2	a_3	a_5	a_4	a_1	a_6	b	ω
a_4	-1	0	1	1	0	0	1	9
a_1	-1	-1	1	0	1	1	15	8
a_6	0	1	-1	0	0	1	0	4
								129

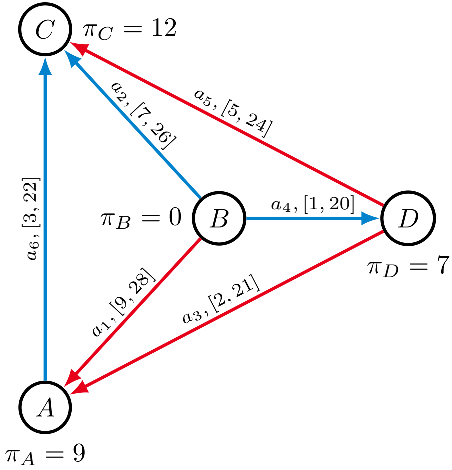
$\rightsquigarrow$

	a_1	a_3	a_5	a_4	a_2	a_6	b	ω
a_4	-1	1	0	1	0	0	6	9
a_2	-1	1	-1	0	1	0	5	3
a_6	0	1	-1	0	0	1	0	4
								69

Beispiel, Spannbaum vor und nach Austausch

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT





Beispiel, Iteration 2

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Simplex-Tableau nach Iteration 1:

	a_1	a_3	a_5	a_4	a_2	a_6	b	ω
a_4	-1	1	0	1	0	0	6	9
a_2	-1	1	-1	0	1	0	5	3
a_6	0	1	-1	0	0	1	0	4
								69

Kostenänderung für verschiedene Austausche:

	a_1	a_3	a_5
a_4	100	74	$-$
a_2	60	25	60
a_6	$-$	0	0

$\Longrightarrow$ Keine weitere Verbesserung möglich. Abbruch.

Beispiel, Bewertung des Ergebnisses

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Endergebnis:

	a_1	a_3	a_5	a_4	a_2	a_6	b	ω
a_4	-1	1	0	1	0	0	6	9
a_2	-1	1	-1	0	1	0	5	3
a_6	0	1	-1	0	0	1	0	4
								69

Aber der Spannbaum $\mathcal{T} = \{ a_4, a_1, a_6 \}$ mit Tableau

	a_6	a_1	a_4	a_2	a_3	a_5	b	ω
a_2	-1	-1	0	1	0	0	5	3
a_3	0	-1	1	0	1	0	6	5
a_5	-1	-1	1	0	0	1	6	1
								51

liefert ein besseres Ergebnis.

Lokalität des Verfahrens

- Das Simplex-Verfahren findet meistens nur ein lokales Minimum.
- Es sind Modifikationen nötig, um ein globales Optimum zu finden.

Gliederung

Einleitung und Motivation
Mathematische Modellierung
  Nicht-periodische Fahrpläne
  Taktfahrpläne
Das Slack-Modell
  Grundlagen von Flussnetzwerken
  Spannbaumstrukturen
  Untersuchung des Slack-Modells
Das Modulo-Netzwerk-Simplex-Verfahren
  Einführung
  Simplex-Tableau
  Verbesserungen der Lösung
Zusammenfassung und Abschluss

Änderung der Lösung durch Spannungen

Jede Spannung $\mathbf{x}$ (mit $\mathbf{\Gamma x} \equiv_T \mathbf{0}$) definiert mit

$$\mathbf{y}' := [\mathbf{y} + \mathbf{x}]_T$$

eine neue Lösung von $\mathbf{\Gamma y}' \equiv_T \mathbf{b}$. Diese ist gültig, wenn $\mathbf{y}' \leq \boldsymbol{\delta}$ gilt.

Diese Lösung ist besser, wenn sich die Zielfunktion $\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{y}$ verbessert.

Knotenlokale Verbesserungen

Ein Knoten i induziert einen Schnitt $\eta^{(i)}$ mit $P = \{ i \}$. Eine Änderung des Potentials π_i

$$\pi_i' \coloneqq \pi_i + \delta$$

ist äquivalent zur Änderung der Slack-Zeiten

$$\mathbf{y}' \coloneqq \mathbf{y} + \delta \boldsymbol{\eta}^{(i)}$$

nach δ-facher Anwendung des Schnitts.
Prüfung der Verbesserung durch Enumeration von $\delta \in (0, T) \subsetneq \mathbb{Z}$ für jeden Knoten.

Anwendung der Modifikationen

Nach Änderung von $\mathbf{y}$ muss eine neue Basislösung gefunden werden:

- Fixieren der Modulo-Parameter $\mathbf{z}$.
- Lösen des Minimum-Cost-Flow Problems.

Danach kann das Modulo-Simplex-Verfahren erneut angewendet werden.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Einleitung und Motivation

Mathematische Modellierung
- Nicht-periodische Fahrpläne
- Taktfahrpläne

Das Slack-Modell
- Grundlagen von Flussnetzwerken
- Spannbaumstrukturen
- Untersuchung des Slack-Modells

Das Modulo-Netzwerk-Simplex-Verfahren
- Einführung
- Simplex-Tableau
- Verbesserungen der Lösung

Zusammenfassung und Abschluss

Der Modulo-Netzwerk-Simplex-Algorithmus

Initialisierung: Bestimmung einer initialen Spannbaumstruktur $\mathcal{T} = \mathcal{T}^l + \mathcal{T}^u$ mit Lösung $\mathbf{y}$.

solange *eine Knotenlokale Verbesserung* $\boldsymbol{\eta}$ *existiert* **tue**

Anwendung des Schnitts durch Transformation der Lösung: $\mathbf{y} \leftarrow \mathbf{y} + \boldsymbol{\eta}$.

Fixieren der Modulo-Parameter $\mathbf{z}$, Lösung des Minimum-Cost-Flow Problems und Transformtion der Lösung in eine Spannbaumstruktur.

solange *ein Paar* (i, j) *mit* $\Delta\omega_{i,j} < 0$ *existiert* **tue**

Tausche Ko-Baum-Kante a_i mit Baum-Kante a_j.

Ende

Ende

Globalität der Lösung

- Nur lokales Optimum.
- Knotenlokale Verbesserungen möglich.
- Dies garantiert aber noch immer kein globales Optimum!
- Weitere Möglichkeiten (siehe [GS11]):
  - Waiting Edge Cuts
  - Random Node Cuts
  - Multi Node Cuts

Literatur

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Marc Goerigk and Anita Schöbel.
Engineering the Modulo Network Simplex Heuristic for the Periodic Timetabling Problem.
pages 181–192, May 2011.

K. Nachtigall.
Periodic network optimizationi and fixed interval timetables.
https://elib.dlr.de/3657/, 1999.

Karl Nachtigall and Jens Opitz.
Solving Periodic Timetable Optimisation Problems by Modulo Simplex Calculations.
In Matteo Fischetti and Peter Widmayer, editors, *8th Workshop on Algorithmic Approaches for Transportation Modeling, Optimization, and Systems (ATMOS'08)*, volume 9 of *OpenAccess Series in Informatics (OASIcs)*, Dagstuhl, Germany, 2008. Schloss Dagstuhl–Leibniz-Zentrum fuer Informatik.