

# Lösung von Taktfahrplanoptimierungsproblemen durch Modulo-Simplex-Berechnungen

Basierend auf [NO08]



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT

# Lösung von Taktfahrplanoptimierungsproblemen durch Modulo-Simplex-Berechnungen

Basierend auf [NO08]



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT

Einleitung und Motivation

Mathematische Modellierung

Nicht-periodische Fahrpläne

Taktfahrpläne

Alternative Modellierung

Grundlagen von Flussnetzwerken

Spannbaumstrukturen

Untersuchung des Slack-Modells

Das Modulo-Netzwerk-Simplex-Verfahren

Einführung

Simplex-Tableau

Verbesserungen der Lösung

Zusammenfassung und Abschluss



## Einleitung und Motivation

### Mathematische Modellierung

Nicht-periodische Fahrpläne

Taktfahrpläne

### Alternative Modellierung

Grundlagen von Flussnetzwerken

Spannbaumstrukturen

Untersuchung des Slack-Modells

### Das Modulo-Netzwerk-Simplex-Verfahren

Einführung

Simplex-Tableau

Verbesserungen der Lösung

### Zusammenfassung und Abschluss

---



- ▶ Die Taktfahrplanoptimierung hat in den letzten Jahren viel Aufmerksamkeit erfahren, vor allem aus der kombinatorischen Optimierung.
- ▶ Fast alle Linien des ÖPNV verkehren nach einem Taktfahrplan.
- ▶ Ziel: Optimierung dieser Fahrpläne, um Pufferzeiten (Slack-Zeiten, „Sinnlose Wartezeiten“) zu minimieren.



- ▶ Fokus auf die Optimierung von gewichteten Slack-Zeiten  
→ Gemischt-Ganzzahliges Programm.
- ▶ Sehr schwer zu lösen für reale Szenarien.
- ▶ Definition von Modulo-Gleichungen und Lösung mit Modulo-Simplex.



Einleitung und Motivation

**Mathematische Modellierung**

Nicht-periodische Fahrpläne

Taktfahrpläne

Alternative Modellierung

Grundlagen von Flussnetzwerken

Spannbaumstrukturen

Untersuchung des Slack-Modells

Das Modulo-Netzwerk-Simplex-Verfahren

Einführung

Simplex-Tableau

Verbesserungen der Lösung

Zusammenfassung und Abschluss

---

# Nicht-periodische Fahrpläne

## Gliederung

---



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT

Einleitung und Motivation

Mathematische Modellierung

    Nicht-periodische Fahrpläne

    Taktfahrpläne

Alternative Modellierung

    Grundlagen von Flussnetzwerken

    Spannbaumstrukturen

    Untersuchung des Slack-Modells

Das Modulo-Netzwerk-Simplex-Verfahren

    Einführung

    Simplex-Tableau

    Verbesserungen der Lösung

Zusammenfassung und Abschluss

---



Ein *Schienennetz* ist ein System von Linien  $\mathcal{L}$  und Stationen  $\mathcal{S}$ .

Bedient Linie  $L \in \mathcal{L}$  die Station  $S \in \mathcal{S}$ , so sei

- ▶  $(L, arr, S)$  das Ankunfts- und
- ▶  $(L, dep, S)$  das Abfahrts-Ereignis.

Eine Linie ist eine alternierende Sequenz von Ankunfts- und Abfahrts-Ereignis.





Ein *Fahrplan*  $\pi = (\pi_i)$  ordnet jedem Event  $i = (L, arr, S)$  (bzw.  $i = (L, dep, S)$ ) einen Zeitpunkt  $\pi_i \in \mathbb{R}$  zu.

Ein *Vorgang* („Activity“)  $a : i \rightarrow j$  beschreibt den Übergang von  $i$  zu  $j$ . Die Dauer des Vorgangs, die *Spannung* („Tension“) ist

$$x_a = \pi_j - \pi_i$$

Sei  $\mathcal{A}$  die Menge aller Vorgänge.



Ein *Fahrplan*  $\pi = (\pi_i)$  ordnet jedem Event  $i = (L, arr, S)$  (bzw.  $i = (L, dep, S)$ ) einen Zeitpunkt  $\pi_i \in \mathbb{R}$  zu.

Ein *Vorgang* („Activity“)  $a : i \rightarrow j$  beschreibt den Übergang von  $i$  zu  $j$ . Die Dauer des Vorgangs, die *Spannung* („Tension“) ist

$$x_a = \pi_j - \pi_i$$

Sei  $\mathcal{A}$  die Menge aller Vorgänge.

## Beispiel:

Haltevorgang  $a$  von Linie  $L$  an Station  $S$ :

$$a : (L, arr, S) \rightarrow (L, dep, S)$$



Jedem Vorgang  $a \in \mathcal{A}$  wird eine *zulässige Dauer*

$$\Delta_a = [l_a, u_a]$$

zugeordnet.

Ein Fahrplan  $\pi$  heißt *zulässig* („feasible“), wenn gilt:

$$\forall a \in \mathcal{A} : x_a \in \Delta_a \quad \Longleftrightarrow \quad \forall (a : i \rightarrow j) \in \mathcal{A} : l_a \leq \pi_j - \pi_i \leq u_a$$



- Fast alle realen Einschränkungen können durch Zeitspannen beschrieben werden.



- ▶ Fast alle realen Einschränkungen können durch Zeitspannen beschrieben werden.
  - ▶ Fahrzeit eines Zuges
  - ▶ Betriebssicherheitseinschränkungen (z. B. Vorfahrt)
  - ▶ Wartezeiten (Kundenzufriedenheit)
  - ▶ Umsteigezeiten
  - ▶ ...

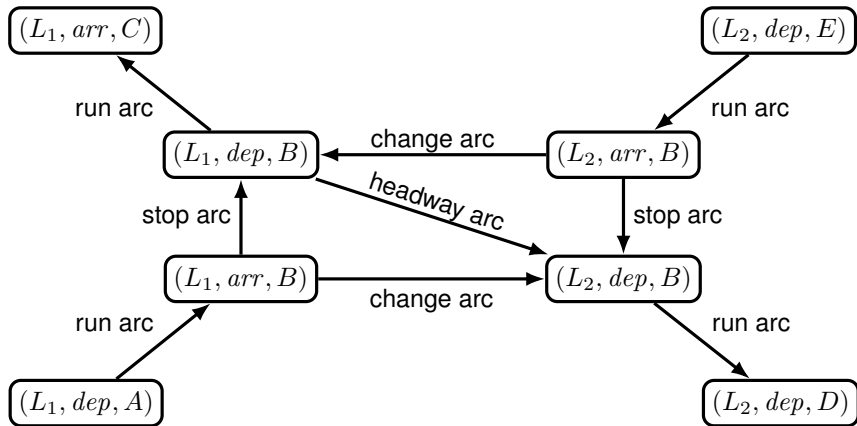


Abbildung: Ereignisnetzwerk, vgl. [NO08, Fig. 1]



- ▶ Schienennetz      Linien  $\mathcal{L}$ , Stationen  $\mathcal{S}$
- ▶ Ereignisse       $(L, arr, S), (L, dep, S)$
- ▶ Fahrplan       $\pi = (\pi_i)$
- ▶ Vorgang       $a : i \rightarrow j$
- ▶ Spannung       $x_a = \pi_j - \pi_i$
- ▶ Zulässige Dauer       $\Delta_a = [l_a, u_a]$



Einleitung und Motivation

**Mathematische Modellierung**

Nicht-periodische Fahrpläne

**Taktfahrpläne**

Alternative Modellierung

Grundlagen von Flussnetzwerken

Spannbaumstrukturen

Untersuchung des Slack-Modells

Das Modulo-Netzwerk-Simplex-Verfahren

Einführung

Simplex-Tableau

Verbesserungen der Lösung

Zusammenfassung und Abschluss

---





- ▶ Nicht-periodische Optimierungsprobleme → Kürzester-Pfad-Berechnungen.
- ▶ Taktfahrpläne → dieses einfache Modell funktioniert nicht mehr.
  - ▶ Es ist a-priori nicht klar, in welcher Sequenz Züge ankommen.
  - ▶ Erst nach Ordnung bekannt.



Ein Taktfahrplan  $\pi = (\pi_i)$  ordnet jedem periodischem Ereignis  $i$  einen *Ereigniszeitpunkt*  $\pi_i \in \mathbb{R}$  zu. Ereignisse finden zu den Zeitpunkten  $\pi_i + z_i T$  mit dem Modulo-Parameter  $z_i \in \mathbb{Z}$  und der Taktzeit  $T$  statt.

Ein Taktfahrplan  $\pi$  heißt *zulässig* („feasible“), wenn gilt:

$$\forall (a : i \rightarrow j) \in \mathcal{A} : \exists z_a \in \mathbb{Z} : l_a \leq \pi_j - \pi_i - z_a T \leq u_a$$



Sei

$$[t]_T := \min \{ t + zT \mid t + zT \geq 0, \quad z \in \mathbb{Z}, \quad T = \text{const} \}$$

Es gilt offensichtlich  $0 \leq [t]_T < T$ .

Die untere und obere *Slack-Zeit* misst, um wie viel Zeit die Spannung  $x_a = \pi_j - \pi_i$  verändert werden darf, ohne ungültig zu werden:

$$y_a^{\text{low}} := [x_a - l_a]_T$$

$$y_a^{\text{upp}} := [u_a - x_a]_T$$



- ▶ Durch Umkehrung einer Kante  $a$  können obere und untere Slack-Zeit ausgetauscht werden.
- ▶ O.B.d.A. kann das Problem nur in Bezug auf  $y_a^{low}$  definiert werden.

→ Gemischt-Ganzzahliges Programm („mixed-integer program“):

$$\min \left\{ \sum_{a \in \mathcal{A}} \omega_a (x_a - l_a - z_a T) \mid \forall a \in \mathcal{A} : l_a \leq x_a - z_a T \leq u_a, \quad z_a \in \mathbb{Z} \right\}$$



- ▶ Taktzeit  $T = \text{const}$
- ▶ Fahrplan  $\pi = (\pi_i)$
- ▶ Vorgang  $a : i \rightarrow j$
- ▶ Spannung  $x_a = \pi_j - \pi_i$
- ▶ Zulässige Dauer  $\Delta_a = [l_a, u_a]$
- ▶ Untere/Obere Slack-Zeit  $y_a^{\text{low}} = [x_a - l_a]_T, y_a^{\text{upp}} = [u_a - x_a]_T$
- ▶ Optimierungsproblem

$$\min \left\{ \sum_{a \in \mathcal{A}} \omega_a (x_a - l_a - z_a T) \mid \forall a \in \mathcal{A} : l_a \leq x_a - z_a T \leq u_a, \quad z_a \in \mathbb{Z} \right\}$$

Einleitung und Motivation

Mathematische Modellierung

Nicht-periodische Fahrpläne

Taktfahrpläne

**Alternative Modellierung**

Grundlagen von Flussnetzwerken

Spannbaumstrukturen

Untersuchung des Slack-Modells

Das Modulo-Netzwerk-Simplex-Verfahren

Einführung

Simplex-Tableau

Verbesserungen der Lösung

Zusammenfassung und Abschluss

---

# Grundlagen von Flussnetzwerken

## Gliederung

---



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT

Einleitung und Motivation

Mathematische Modellierung

Nicht-periodische Fahrpläne

Taktfahrpläne

**Alternative Modellierung**

Grundlagen von Flussnetzwerken

Spannbaumstrukturen

Untersuchung des Slack-Modells

Das Modulo-Netzwerk-Simplex-Verfahren

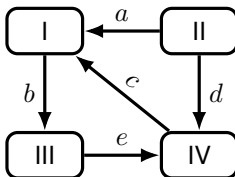
Einführung

Simplex-Tableau

Verbesserungen der Lösung

Zusammenfassung und Abschluss

---



**Abbildung:** Gerichteter Graph mit  $n = 5$  Kanten und  $m = 4$  Knoten (laufendes Beispiel)

Notation: Für „Die Kante  $a$  geht von Knoten II zu Knoten I“, schreibe

$$a : II \rightarrow I$$



# Spannbaum und Komplement-Baum (Ko-Baum)

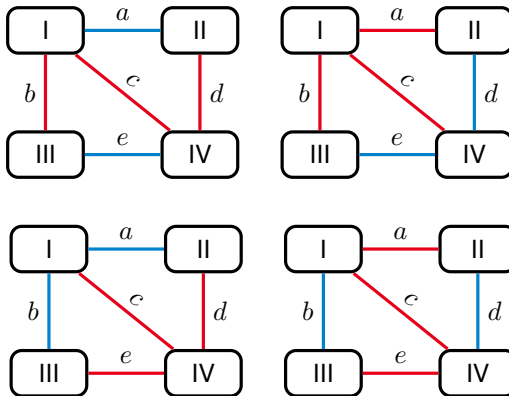


Abbildung: Mehrere (nicht alle) Spannbäume (rot) und Ko-Bäume (blau)



Die *Inzidenzmatrix* eines Graphen/Netzwerks mit  $n$  Knoten und  $m$  Kanten ist eine  $n \times m$ -Matrix  $\Theta = (\theta_{ia})$ :

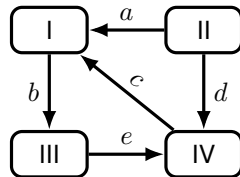
$$\theta_{ia} := \begin{cases} 1 & \text{falls } a : j \rightarrow i \\ -1 & \text{falls } a : i \rightarrow j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die *Inzidenzmatrix* eines Graphen/Netzwerks mit  $n$  Knoten und  $m$  Kanten ist eine  $n \times m$ -Matrix  $\Theta = (\theta_{ia})$ :

$$\theta_{ia} := \begin{cases} 1 & \text{falls } a : j \rightarrow i \\ -1 & \text{falls } a : i \rightarrow j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

**Beispiel:**

$$\Theta = \begin{array}{c} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \\ \text{IV} \end{array} \begin{bmatrix} a & b & c & d & e \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$





Durch Hinzufügen einer Ko-Baum-Kante zum Baum  $\mathcal{T}$  wird ein eindeutiger Zyklus  $c$  definiert. Sei  $\mathbf{\Gamma} = (\gamma_{ca})$  die *Netzwerkmatrix*:

$$\gamma_{ca} := \begin{cases} 1 & \text{falls der Zyklus } c \text{ die Kante } a \text{ in positiver Richtung enthält} \\ -1 & \text{falls der Zyklus } c \text{ die Kante } a \text{ in negativer Richtung enthält} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

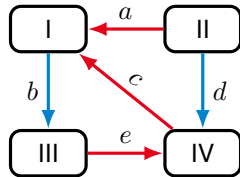
# Netzwerkmatrix („Edge-Cycle-Matrix“)

Durch Hinzufügen einer Ko-Baum-Kante zum Baum  $\mathcal{T}$  wird ein eindeutiger Zyklus  $c$  definiert. Sei  $\Gamma = (\gamma_{ca})$  die *Netzwerkmatrix*:

$$\gamma_{ca} := \begin{cases} 1 & \text{falls der Zyklus } c \text{ die Kante } a \text{ in positiver Richtung enthält} \\ -1 & \text{falls der Zyklus } c \text{ die Kante } a \text{ in negativer Richtung enthält} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

**Beispiel:**

$$\Gamma = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d & e \end{matrix} \\ \begin{matrix} b \\ d \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$





Ein *Potential*  $\pi = (\pi_i)$  ordnet jedem Knoten  $i$  einen Wert  $\pi_i \in \mathbb{R}$  zu.

Die Potentialdifferenz  $x_a := \pi_j - \pi_i$  sei die *Spannung* von Kante  $a : i \rightarrow j$ . Es gilt  $\Theta^T \pi = x$ . Weiterhin ist  $x$  eine periodische Spannung gdw.  $\Gamma x \equiv_T 0$  gilt.



Ein *Potential*  $\pi = (\pi_i)$  ordnet jedem Knoten  $i$  einen Wert  $\pi_i \in \mathbb{R}$  zu.

Die Potentialdifferenz  $x_a := \pi_j - \pi_i$  sei die *Spannung* von Kante  $a : i \rightarrow j$ . Es gilt  $\Theta^T \pi = \mathbf{x}$ . Weiterhin ist  $\mathbf{x}$  eine periodische Spannung gdw.  $\Gamma \mathbf{x} \equiv_T \mathbf{0}$  gilt.

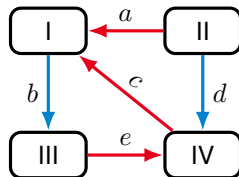
**Beispiel:**

$$\begin{aligned} \pi &= [\pi_I \quad \pi_{II} \quad \pi_{III} \quad \pi_{IV}]^T \in \mathbb{R}^4 \\ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \\ x_d \\ x_e \end{bmatrix} &:= \begin{bmatrix} \pi_I - \pi_{II} \\ \pi_{III} - \pi_I \\ \pi_I - \pi_{IV} \\ \pi_{IV} - \pi_{II} \\ \pi_{IV} - \pi_{III} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{= \Theta^T} \cdot \begin{bmatrix} \pi_I \\ \pi_{II} \\ \pi_{III} \\ \pi_{IV} \end{bmatrix} \end{aligned}$$



## Beispiel:

$$\mathbf{x} = [x_a \quad x_b \quad x_c \quad x_d \quad x_e]$$
$$\mathbf{\Gamma x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \\ x_d \\ x_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_b + x_c + x_d \\ x_c + x_d - x_a \end{bmatrix}$$







Der *Bedarf*  $\mathbf{v} = (v_i)$  (mit  $\sum_i v_i = 0$ ) ordnet jedem Knoten  $i$  einen Bedarf  $v_i \in \mathbb{R}$  zu. Ein Knoten mit  $v_i$  heißt

$$\begin{cases} \text{Quellknoten} & \text{für } v_i > 0 \\ \text{Zielknoten} & \text{für } v_i < 0 \\ \text{Durchgangsknoten} & \text{für } v_i = 0 \end{cases}$$

Ein Fluss  $\varphi = (\varphi_a)$  (mit  $\Theta\varphi = \mathbf{v}$ ) ordnet jeder Kante  $a$  einen Flusswert  $\varphi_a \in \mathbb{R}$  zu.



Die Knoten eines Graphen lassen sich in zwei disjunkte Mengen  $P$  und  $\bar{P}$  zerlegen. Sei  $\eta = (\eta_{(a:i \rightarrow j)})$  der *Schnitt* bzgl. dieser Zerlegung:

$$\eta_{(a:i \rightarrow j)} := \begin{cases} 1 & \text{falls } i \in P \text{ und } j \in \bar{P} \\ -1 & \text{falls } i \in \bar{P} \text{ und } j \in P \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Knoten eines Graphen lassen sich in zwei disjunkte Mengen  $P$  und  $\bar{P}$  zerlegen. Sei  $\eta = (\eta_{(a:i \rightarrow j)})$  der *Schnitt* bzgl. dieser Zerlegung:

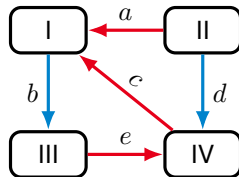
$$\eta_{(a:i \rightarrow j)} := \begin{cases} 1 & \text{falls } i \in P \text{ und } j \in \bar{P} \\ -1 & \text{falls } i \in \bar{P} \text{ und } j \in P \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

**Beispiel:**

$$P = \{\text{III}\}$$

$$\bar{P} = \{\text{I, II, IV}\}$$

$$\eta = [0 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^T$$





- Gerichtete Graphen
- Spannbaum und Komplement-Baum (Ko-Baum)
- Inzidenzmatrix  $\Theta = (\theta_{ia})$
- Netzwerkmatrix  $\Gamma = (\gamma_{ca})$
- Potential  $\pi = (\pi_i)$
- Spannung  $\mathbf{x} = \Theta^T \pi = (x_a), x_a = \pi_j - \pi_i$
- Bedarf  $\mathbf{v} = (v_i)$
- Fluss  $\varphi = (\varphi_a)$  mit  $\Theta \varphi = \mathbf{v}$
- Schnitt  $\eta = (\eta_a)$  für  $P, \bar{P}$

Einleitung und Motivation

Mathematische Modellierung

Nicht-periodische Fahrpläne

Taktfahrpläne

**Alternative Modellierung**

Grundlagen von Flussnetzwerken

**Spannbaumstrukturen**

Untersuchung des Slack-Modells

Das Modulo-Netzwerk-Simplex-Verfahren

Einführung

Simplex-Tableau

Verbesserungen der Lösung

Zusammenfassung und Abschluss

---



Sei  $\mathcal{T} = \mathcal{T}^l + \mathcal{T}^u$  ein Spannbaum, separiert in  $\mathcal{T}^l$  und  $\mathcal{T}^u$ , sodass gilt:

$$\forall a \in \mathcal{T}^l : x_a = l_a \quad \text{und} \quad \forall a \in \mathcal{T}^u : x_a = u_a$$

Jede Struktur bestimmt ein eindeutiges Potential  $\pi^{(\mathcal{T})}$ , für das gilt:

$$\forall (a : i \rightarrow j) \in \mathcal{T}^l : \pi_j^{(\mathcal{T})} - \pi_i^{(\mathcal{T})} = l_a$$

$$\forall (a : i \rightarrow j) \in \mathcal{T}^u : \pi_j^{(\mathcal{T})} - \pi_i^{(\mathcal{T})} = u_a$$



Mit  $\mathbf{b} := [-\Gamma \mathbf{l}]_T$  und  $\delta := \mathbf{u} - \mathbf{l}$  ist die *Menge zulässiger Slack-Zeiten*  $\mathcal{Y}$  definiert:

$$\mathcal{Y} := \{ \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^m \mid \Gamma \mathbf{y} \equiv_T \mathbf{b}, \quad \mathbf{0} \leq \mathbf{y} \leq \delta \}$$

Das Optimierungsproblem kann wie folgt umformuliert werden:

$$\min \{ \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{y} \mid \mathbf{y} \in \mathcal{Y} \}$$



- ▶ Spannbaumstruktur  $\mathcal{T} = \mathcal{T}^l + \mathcal{T}^u$
- ▶  $\mathbf{b} = [-\Gamma \mathbf{l}]_T$
- ▶  $\boldsymbol{\delta} = \mathbf{u} - \mathbf{l}$
- ▶ Zulässige Slack-Zeiten

$$\mathcal{Y} = \{ \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^m \mid \Gamma \mathbf{y} \equiv_T \mathbf{b}, \quad \mathbf{0} \leq \mathbf{y} \leq \boldsymbol{\delta} \}$$

- ▶ Optimierungsproblem

$$\min \{ \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{y} \mid \mathbf{y} \in \mathcal{Y} \}$$



# Untersuchung des Slack-Modells

## Gliederung

---



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT

Einleitung und Motivation

Mathematische Modellierung

Nicht-periodische Fahrpläne

Taktfahrpläne

**Alternative Modellierung**

Grundlagen von Flussnetzwerken

Spannbaumstrukturen

**Untersuchung des Slack-Modells**

Das Modulo-Netzwerk-Simplex-Verfahren

Einführung

Simplex-Tableau

Verbesserungen der Lösung

Zusammenfassung und Abschluss

---



Werden die Modulo-Parameter  $\mathbf{z} = (z_a)$  fixiert, kann das Optimierungsproblem umformuliert werden:

$$\begin{aligned} & \min \left\{ \sum_a^{\mathcal{A}} \omega_a (x_a - l_a - z_a T) \mid \forall a \in \mathcal{A} : l_a \leq x_a - z_a T \leq u_a \right\} \\ &= \min \left\{ \sum_a^{\mathcal{A}} \omega_a (x_a - l'_a) \mid \forall a \in \mathcal{A} : \underbrace{l_a + z_a T}_{l'_a} \leq x_a \leq \underbrace{u_a + z_a T}_{u'_a} \right\} \\ &= \min \{ \boldsymbol{\omega}^T (\boldsymbol{\Theta}^T \boldsymbol{\pi} - \mathbf{l}') \mid \mathbf{l}' \leq \boldsymbol{\Theta}^T \boldsymbol{\pi} \leq \mathbf{u}' \} \end{aligned}$$

Dies ist die duale Formulierung des Minimum-Cost Flow Problems.  
Jeder Extrempunkt der gültigen Region des Problems entspricht einer Spannbaumstruktur.



Sind  $\mathbf{z}^{\mathcal{T}}$  die fixierten Modulo-Parameter, so heißt

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\pi}^{\mathcal{T}} \\ \mathbf{z}^{\mathcal{T}} \end{bmatrix}$$

die *periodische Basislösung* in Bezug auf die Spannbaumstruktur  $\mathcal{T}$ .

Sei

$$\mathcal{Q} := \text{conv.hull} \left\{ \begin{bmatrix} \pi \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} \mid \mathbf{1} \leq \Theta^T \pi - T\mathbf{z} \leq \mathbf{u}, \quad \pi \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{z} \in \mathbb{Z}^m \right\}$$

der *periodische Fahrplan-Polyeder*.

**Theorem.** Der Vektor  $\begin{bmatrix} \pi \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} \in \mathcal{Q}$  ist ein Extrempunkt von  $\mathcal{Q}$  gdw. er eine periodische Basislösung in Bezug auf eine Spannbaumstruktur ist.  
Beweis siehe [Nac99].

# Das Modulo-Netzwerk-Simplex-Verfahren

## Gliederung

---



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT

Einleitung und Motivation

Mathematische Modellierung

Nicht-periodische Fahrpläne

Taktfahrpläne

Alternative Modellierung

Grundlagen von Flussnetzwerken

Spannbaumstrukturen

Untersuchung des Slack-Modells

**Das Modulo-Netzwerk-Simplex-Verfahren**

Einführung

Simplex-Tableau

Verbesserungen der Lösung

Zusammenfassung und Abschluss

---



Einleitung und Motivation

Mathematische Modellierung

Nicht-periodische Fahrpläne

Taktfahrpläne

Alternative Modellierung

Grundlagen von Flussnetzwerken

Spannbaumstrukturen

Untersuchung des Slack-Modells

**Das Modulo-Netzwerk-Simplex-Verfahren**

**Einführung**

Simplex-Tableau

Verbesserungen der Lösung

Zusammenfassung und Abschluss



Die Modulo-Simplex-Methode erkundet die Extrempunkte des Optimierungsproblems

$$\min \left\{ \omega^T \mathbf{y} \mid \mathbf{y} \in \mathcal{Y} := \left\{ \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^m \mid \exists \mathbf{z} \in \mathbb{Z}^m : (\mathbf{\Gamma} \mathbf{y} - T \mathbf{z} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{0} \leq \mathbf{y} - T \mathbf{z} \leq \delta) \right\} \right\}$$

Das heißt des Polyeders  $\text{conv.hull}(\mathcal{Y})$ .



- ▶ Die Ganzzahligkeit von  $\mathbf{z}$  macht das Problem sehr schwer.
- ▶ Daher: Eliminierung von  $\mathbf{z}$  durch Restklassenberechnungen (Modulo-Berechnungen).

$$\min \left\{ \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{y} \mid \mathbf{y} \in \mathcal{Y} := \left\{ \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^m \mid \exists \mathbf{z} \in \mathbb{Z}^m : (\Gamma \mathbf{y} \equiv_T \mathbf{b}, \quad \mathbf{0} \leq \mathbf{y} \leq \boldsymbol{\delta}) \right\} \right\}$$





Einleitung und Motivation

Mathematische Modellierung

Nicht-periodische Fahrpläne

Taktfahrpläne

Alternative Modellierung

Grundlagen von Flussnetzwerken

Spannbaumstrukturen

Untersuchung des Slack-Modells

Das Modulo-Netzwerk-Simplex-Verfahren

Einführung

**Simplex-Tableau**

Verbesserungen der Lösung

Zusammenfassung und Abschluss



- ▶ Beginnend von der Basislösung  $[\mathbf{0}^T \quad \mathbf{b}^T]^T$  bewegt sich der Algorithmus auf den Kanten des Polyeders  $\text{conv.hull}(\mathcal{Y})$ .
- ▶ In jedem Schritt: Überprüfen der Verbesserung.
- ▶ Keine Verbesserung möglich  $\rightarrow$  lokales Minimum gefunden.



Separierung der Netzwerkmatrix  $\mathbf{\Gamma}_{\mathcal{T}} = [\mathbf{N}_{\mathcal{T}}, \mathbf{I}_{\mathcal{T}}^{co}]$  in Baum-Kanten  $\mathbf{N}_{\mathcal{T}}$  und Ko-Baum-Kanten  $\mathbf{I}_{\mathcal{T}}^{co}$ .

$$\Rightarrow \text{Periodische Basislösung } \mathbf{y}_{\mathcal{T}} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{\mathcal{T}} \\ \mathbf{y}_{\mathcal{T}}^{co} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}$$

# Separierung der Netzwerkmatrix



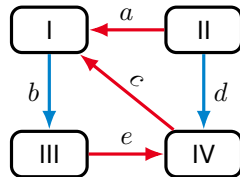
TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT

Separierung der Netzwerkmatrix  $\mathbf{\Gamma}_{\mathcal{T}} = [\mathbf{N}_{\mathcal{T}}, \mathbf{I}_{\mathcal{T}}^{co}]$  in Baum-Kanten  $\mathbf{N}_{\mathcal{T}}$  und Ko-Baum-Kanten  $\mathbf{I}_{\mathcal{T}}^{co}$ .

$$\Rightarrow \text{Periodische Basislösung } \mathbf{y}_{\mathcal{T}} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{\mathcal{T}} \\ \mathbf{y}_{\mathcal{T}}^{co} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}$$

**Beispiel:**

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d & e \end{matrix} \\ \begin{matrix} b \\ d \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$
$$\Rightarrow \mathbf{\Gamma}_{\mathcal{T}} = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & c & e & b & d \end{matrix} \\ \begin{matrix} b \\ d \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$



# Aufstellung des Tableau



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT

Seien  $a_1, \dots, a_{r-1}$  die Ko-Baum-Kanten und  $a_r, \dots, a_m$  die Baum-Kanten.  
Formulierung als Simplex-Tableau:

$$[ \mathbf{N} \quad \mathbf{I} \quad \mathbf{b} \mid \mid \boldsymbol{\omega} ]$$

	$a_1$	$\dots$	$a_r$	$\dots$	$a_m$		
$a_r$	$\gamma_{r1}$	$\dots$	1		0	$b_r$	$\omega_r$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$		$\ddots$		$\vdots$	$\vdots$
$a_m$	$\gamma_{m1}$	$\dots$	0		1	$b_m$	$\omega_m$
							$\omega$

# Basis-Austausch, Teil 1



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT

Auswahl eines Pivot-Elements  $a_{ij}$ :

	$a_1$	$\cdots$	$a_j$	$\cdots$	$a_r$	$\cdots$	$a_i$	$\cdots$	$a_m$		
$a_r$	$\gamma_{r1}$	$\cdots$	$\gamma_{rj}$	$\cdots$	1	$\cdots$	0	$\cdots$	0	$b_r$	$\omega_r$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$		$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$a_i$	$\gamma_{i1}$	$\cdots$	$\gamma_{ij}$	$\cdots$	0		1		0	$b_i$	$\omega_i$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$		$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$a_m$	$\gamma_{m1}$	$\cdots$	$\gamma_{mj}$	$\cdots$	0	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$b_m$	$\omega_m$
											$\omega$

## Basis-Austausch, Teil 2



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT

Austausch von  $a_i$  und  $a_j$ :

Pivotelement:

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{\gamma_{ij}}$$

Pivotzeile für alle  $s \neq j$ :

$$\gamma_{is} = \frac{\gamma_{is}}{\gamma_{ij}}$$

Pivotspalte für alle  $r \neq i$ :

$$\gamma_{rj} = -\frac{\gamma_{rj}}{\gamma_{ij}}$$

Restliche Elemente des Tableaus:

$$\gamma_{rs} = \gamma_{rs} - \frac{\gamma_{is}\gamma_{rj}}{\gamma_{ij}} \quad b_r = \left[ b_r - \frac{\gamma_{rj}}{\gamma_{ij}} b_i \right]_T$$

# Basis-Austausch, Teil 2



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT

Austausch von  $a_i$  und  $a_j$ :

Pivotelement:

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{\gamma_{ij}}$$

Pivotzeile für alle  $s \neq j$ :

$$\gamma_{is} = \frac{\gamma_{is}}{\gamma_{ij}}$$

$$b_r = \left[ \frac{b_r}{\gamma_{ij}} \right]_T$$

Pivotspalte für alle  $r \neq i$ :

$$\gamma_{rj} = -\frac{\gamma_{rj}}{\gamma_{ij}}$$

Restliche Elemente des Tableaus:

$$\gamma_{rs} = \gamma_{rs} - \frac{\gamma_{is}\gamma_{rj}}{\gamma_{ij}} \quad b_r = \left[ b_r - \frac{\gamma_{rj}}{\gamma_{ij}} b_i \right]_T$$

	$a_1$	$\dots$	$a_i$	$\dots$	$a_r$	$\dots$	$a_j$	$\dots$	$a_m$		
$a_r$	$\gamma_{r1} - \frac{\gamma_{i1}\gamma_{rj}}{\gamma_{ij}}$	$\dots$	$-\frac{\gamma_{rj}}{\gamma_{ij}}$	$\dots$	1	$\dots$	0	$\dots$	0	$\left[ b_r - \frac{\gamma_{rj}}{\gamma_{ij}} b_i \right]_T$	$\omega_r$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$		$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$a_j$	$\frac{\gamma_{i1}}{\gamma_{ij}}$	$\dots$	$\frac{1}{\gamma_{ij}}$	$\dots$	0		1		0	$\left[ \frac{b_i}{\gamma_{ij}} \right]_T$	$\omega_j$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$		$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$a_m$	$\gamma_{m1} - \frac{\gamma_{i1}\gamma_{mj}}{\gamma_{ij}}$	$\dots$	$-\frac{\gamma_{mj}}{\gamma_{ij}}$	$\dots$	0	$\dots$	0	$\dots$	1	$\left[ b_m - \frac{\gamma_{mj}}{\gamma_{ij}} b_i \right]_T$	$\omega_m$
											$\omega$





Kosten vor ( $\omega$ ) und nach ( $\tilde{\omega}_{ij}$ ) der Vertauschung von  $a_i$  und  $a_j$ :

$$\omega = \sum_{k=r}^m \omega_k b_k \qquad \tilde{\omega}_{ij} = \omega_j \left[ \frac{b_i}{\gamma_{ij}} \right]_T + \sum_{\substack{k=r \\ k \neq i}}^m \omega_k \left[ b_k - \frac{\gamma_{kj}}{\gamma_{ij}} b_i \right]_T$$

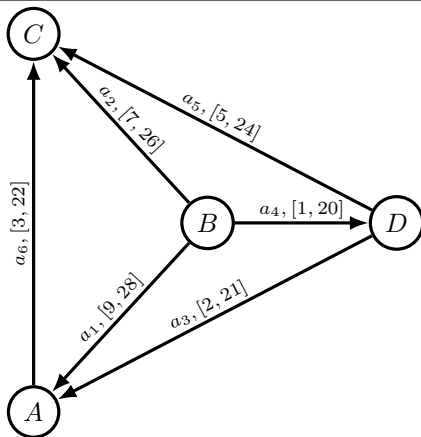
Kostenänderung:

$$\begin{aligned} \Delta \omega_{ij} &= \tilde{\omega}_{ij} - \omega \\ &= \omega_j \left[ \frac{b_i}{\gamma_{ij}} \right]_T - \omega_i b_i + \sum_{\substack{k=r \\ k \neq i}}^m \omega_k \left( \left[ b_k - \frac{\gamma_{kj}}{\gamma_{ij}} b_i \right]_T - b_k \right) \end{aligned}$$



- ▶ Berechnung aller Kostenänderungen.
- ▶ Nur für Austausche, die einen Spannbaum beibehalten!
- ▶ Andere Austausche führen zur Division durch Null.
- ▶ Ist keine negative (verbessernde) Änderung möglich → Abbruch.

## Beispiel (vgl. [NO08])



$a_i$	$\Delta_i = [l_i, u_i]$	$\omega_i$
$a_1$	$[9, 28]$	8
$a_2$	$[7, 26]$	3
$a_3$	$[2, 21]$	5
$a_4$	$[1, 20]$	9
$a_5$	$[5, 24]$	1
$a_6$	$[3, 22]$	4

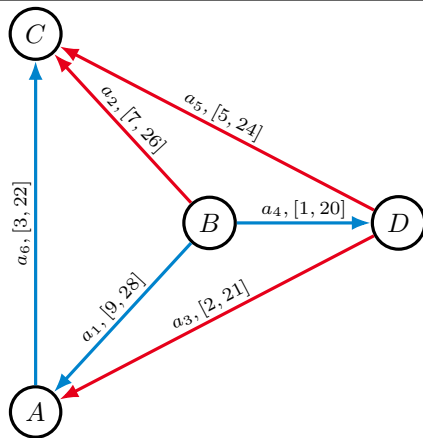
$$T = 20$$

Abbildung: Ereignisnetzwerk

# Beispiel, Bestimmung einer Spannbaumstruktur



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT



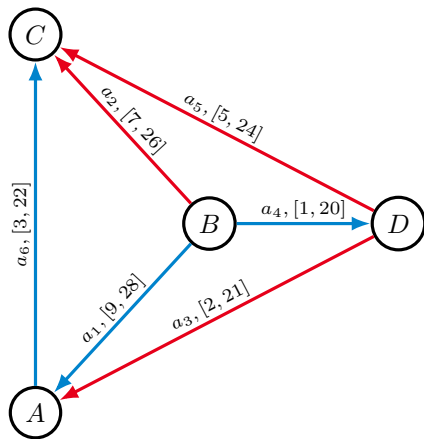
$$\Gamma = \begin{matrix} & a_2 & a_3 & a_5 & a_4 & a_1 & a_6 \\ \begin{matrix} a_4 \\ a_1 \\ a_6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Abbildung: Spannbaum und Ko-Baum

# Beispiel, Bestimmung der Basislösung



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT



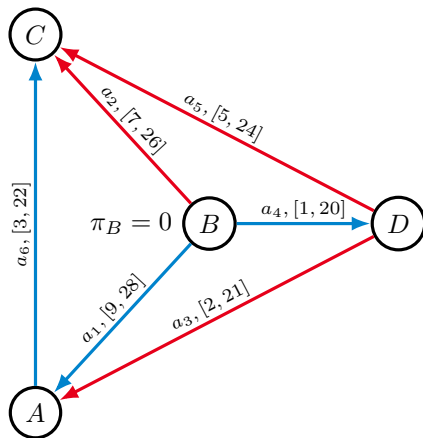
$$\mathbf{b} = [-\mathbf{\Gamma}]_T = \begin{bmatrix} 1 \\ 15 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$a_i$	$\Delta_i = [l_i, u_i]$	$\omega_i$	$y_i$
$a_1$	$[9, 28]$	8	15
$a_2$	$[7, 26]$	3	0
$a_3$	$[2, 21]$	5	0
$a_4$	$[1, 20]$	9	1
$a_5$	$[5, 24]$	1	0
$a_6$	$[3, 22]$	4	0

# Beispiel, Bestimmung der Basislösung



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT



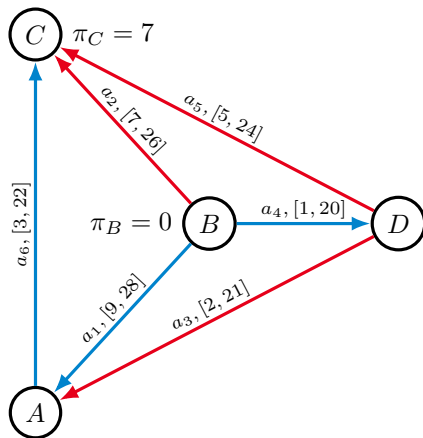
$$\mathbf{b} = [-\mathbf{\Pi}]_T = \begin{bmatrix} 1 \\ 15 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$a_i$	$\Delta_i = [l_i, u_i]$	$\omega_i$	$y_i$
$a_1$	$[9, 28]$	8	15
$a_2$	$[7, 26]$	3	0
$a_3$	$[2, 21]$	5	0
$a_4$	$[1, 20]$	9	1
$a_5$	$[5, 24]$	1	0
$a_6$	$[3, 22]$	4	0

# Beispiel, Bestimmung der Basislösung



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT



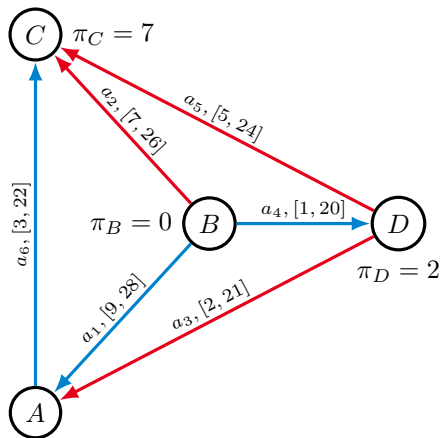
$$\mathbf{b} = [-\mathbf{\Pi}]_T = \begin{bmatrix} 1 \\ 15 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$a_i$	$\Delta_i = [l_i, u_i]$	$\omega_i$	$y_i$
$a_1$	$[9, 28]$	8	15
$a_2$	$[7, 26]$	3	0
$a_3$	$[2, 21]$	5	0
$a_4$	$[1, 20]$	9	1
$a_5$	$[5, 24]$	1	0
$a_6$	$[3, 22]$	4	0

# Beispiel, Bestimmung der Basislösung



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT



$$\mathbf{b} = [-\mathbf{\Pi}]_T = \begin{bmatrix} 1 \\ 15 \\ 0 \end{bmatrix}$$

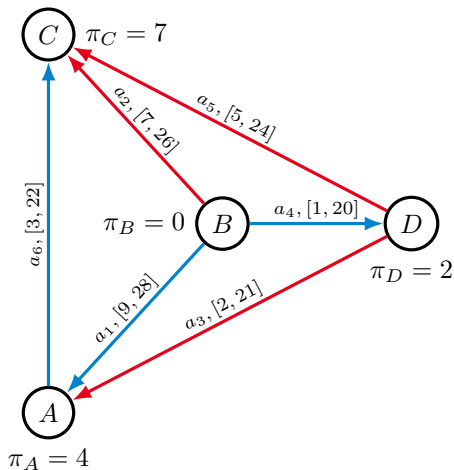
$a_i$	$\Delta_i = [l_i, u_i]$	$\omega_i$	$y_i$
$a_1$	$[9, 28]$	8	15
$a_2$	$[7, 26]$	3	0
$a_3$	$[2, 21]$	5	0
$a_4$	$[1, 20]$	9	1
$a_5$	$[5, 24]$	1	0
$a_6$	$[3, 22]$	4	0



# Beispiel, Bestimmung der Basislösung



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT



$$\mathbf{b} = [-\mathbf{\Pi}]_T = \begin{bmatrix} 1 \\ 15 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$a_i$	$\Delta_i = [l_i, u_i]$	$\omega_i$	$y_i$
$a_1$	$[9, 28]$	8	15
$a_2$	$[7, 26]$	3	0
$a_3$	$[2, 21]$	5	0
$a_4$	$[1, 20]$	9	1
$a_5$	$[5, 24]$	1	0
$a_6$	$[3, 22]$	4	0

# Beispiel, Darstellung im Tableau und Kostenänderung



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT

Initiales Simplex-Tableau:

	$a_2$	$a_3$	$a_5$	$a_4$	$a_1$	$a_6$	$b$	$\omega$
$a_4$	-1	0	1	1	0	0	1	9
$a_1$	-1	-1	1	0	1	1	15	8
$a_6$	0	1	-1	0	0	1	0	4
								129

Kostenänderung für verschiedene Austausche:

	$a_2$	$a_3$	$a_5$
$a_4$	40	—	-12
$a_1$	-60	-35	0
$a_6$	—	0	0

# Beispiel, Basis-Austausch



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT

Austausch von Ko-Baum-Kante  $a_1$  mit Baum-Kante  $a_2$ :

	$a_2$	$a_3$	$a_5$	$a_4$	$a_1$	$a_6$	$b$	$\omega$
$a_4$	-1	0	1	1	0	0	1	9
$a_1$	-1	-1	1	0	1	1	15	8
$a_6$	0	1	-1	0	0	1	0	4
								129

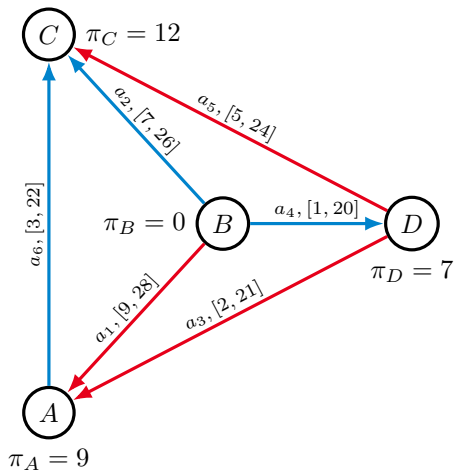
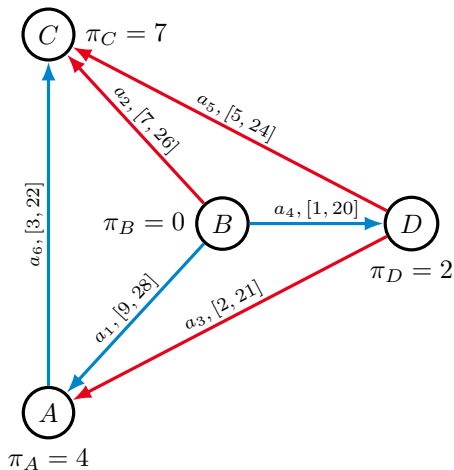
$\rightsquigarrow$

	$a_1$	$a_3$	$a_5$	$a_4$	$a_2$	$a_6$	$b$	$\omega$
$a_4$	-1	1	0	1	0	0	6	9
$a_2$	-1	1	-1	0	1	0	5	3
$a_6$	0	1	-1	0	0	1	0	4
								69

# Beispiel, Spannbaum vor und nach Austausch



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT



## Beispiel, Iteration 2



Simplex-Tableau nach Iteration 1:

	$a_1$	$a_3$	$a_5$	$a_4$	$a_2$	$a_6$	$b$	$\omega$
$a_4$	-1	1	0	1	0	0	6	9
$a_2$	-1	1	-1	0	1	0	5	3
$a_6$	0	1	-1	0	0	1	0	4
								69

Kostenänderung für verschiedene Austausche:

	$a_1$	$a_3$	$a_5$
$a_4$	100	74	—
$a_2$	60	25	60
$a_6$	—	0	0

⇒ Keine weitere Verbesserung möglich. Abbruch.

## Beispiel, Bewertung des Ergebnisses



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT

Endergebnis:

	$a_1$	$a_3$	$a_5$	$a_4$	$a_2$	$a_6$	$b$	$\omega$
$a_4$	-1	1	0	1	0	0	6	9
$a_2$	-1	1	-1	0	1	0	5	3
$a_6$	0	1	-1	0	0	1	0	4
								69

Aber der Spannbaum  $\mathcal{T} = \{a_4, a_1, a_6\}$  mit Tableau

	$a_6$	$a_1$	$a_4$	$a_2$	$a_3$	$a_5$	$b$	$\omega$
$a_2$	-1	-1	0	1	0	0	5	3
$a_3$	0	-1	1	0	1	0	6	5
$a_5$	-1	-1	1	0	0	1	6	1
								51

liefert ein besseres Ergebnis.



- ▶ Das Simplex-Verfahren findet meistens nur ein lokales Minimum.
- ▶ Es sind Modifikationen nötig, um ein globales Optimum zu finden.

# Verbesserungen der Lösung

## Gliederung

---



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT

Einleitung und Motivation

Mathematische Modellierung

Nicht-periodische Fahrpläne

Taktfahrpläne

Alternative Modellierung

Grundlagen von Flussnetzwerken

Spannbaumstrukturen

Untersuchung des Slack-Modells

Das Modulo-Netzwerk-Simplex-Verfahren

Einführung

Simplex-Tableau

**Verbesserungen der Lösung**

Zusammenfassung und Abschluss

---





Jede Spannung  $\mathbf{x}$  (mit  $\Gamma \mathbf{x} \equiv_T \mathbf{0}$ ) definiert mit

$$\mathbf{y}' := [\mathbf{y} + \mathbf{x}]_T$$

eine neue Lösung von  $\Gamma \mathbf{y}' \equiv_T \mathbf{b}$ . Diese ist gültig, wenn  $\mathbf{y}' \leq \delta$  gilt.

Diese Lösung ist besser, wenn sich die Zielfunktion  $\omega^T \mathbf{y}$  verbessert.



Ein Knoten  $i$  induziert einen Schnitt  $\eta^{(i)}$  mit  $P = \{i\}$ . Eine Änderung des Potentials  $\pi_i$

$$\pi'_i := \pi_i + \delta$$

ist äquivalent zur Änderung der Slack-Zeiten

$$\mathbf{y}' := [\mathbf{y} + \delta \eta^{(i)}]_T$$

nach  $\delta$ -facher Anwendung des Schnitts.

Prüfung der Verbesserung durch Enumeration von  $\delta \in (0, T) \subsetneq \mathbb{Z}$  für jeden Knoten.



Nach Änderung von  $y$  muss eine neue Basislösung gefunden werden:

- ▶ Fixieren der Modulo-Parameter  $z$ .
- ▶ Lösen des Minimum-Cost Flow Problems.

Danach kann das Modulo-Simplex-Verfahren erneut angewendet werden.

# Zusammenfassung und Abschluss

## Gliederung

---



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT

Einleitung und Motivation

Mathematische Modellierung

Nicht-periodische Fahrpläne

Taktfahrpläne

Alternative Modellierung

Grundlagen von Flussnetzwerken

Spannbaumstrukturen

Untersuchung des Slack-Modells

Das Modulo-Netzwerk-Simplex-Verfahren

Einführung

Simplex-Tableau

Verbesserungen der Lösung

**Zusammenfassung und Abschluss**

---



*Initialisierung:* Bestimmung einer initialen Spannbaumstruktur  $\mathcal{T} = \mathcal{T}^l + \mathcal{T}^u$  mit Lösung  $y$ .

**while** *Es existiert eine Knotenlokale Verbesserung  $\eta$ .* **do**

    Anwendung des Schnitts durch Transformation der Lösung:  $y \leftarrow [y + \eta]_T$ .

    Fixieren der Modulo-Parameter  $z$ , Lösung des Minimum-Cost Flow

    Problems und Transformation der Lösung in eine Spannbaumstruktur.

**while** *Es existiert ein Paar  $(i, j)$  mit  $\Delta\omega_{i,j} < 0$ .* **do**

        | Tausche Ko-Baum-Kante  $a_i$  mit Baum-Kante  $a_j$ .

**end**

**end**



- ▶ Nur lokales Optimum.
- ▶ Knotenlokale Verbesserungen möglich.
- ▶ Dies garantiert aber noch immer kein globales Optimum!
- ▶ Weitere Möglichkeiten (siehe [GS11]):
  - ▶ Waiting Edge Cuts
  - ▶ Random Node Cuts
  - ▶ Multi Node Cuts



Marc Goerigk and Anita Schöbel.

Engineering the Modulo Network Simplex Heuristic for the Periodic Timetabling Problem.  
pages 181–192, May 2011.



K. Nachtigall.

Periodic network optimization and fixed interval timetables.  
<https://elib.dlr.de/3657/>, 1999.



Karl Nachtigall and Jens Opitz.

Solving Periodic Timetable Optimisation Problems by Modulo Simplex Calculations.

In Matteo Fischetti and Peter Widmayer, editors, *8th Workshop on Algorithmic Approaches for Transportation Modeling, Optimization, and Systems (ATMOS'08)*, volume 9 of *OpenAccess Series in Informatics (OASICS)*, Dagstuhl, Germany, 2008. Schloss Dagstuhl–Leibniz-Zentrum fuer Informatik.