

Mathematik 3

(Stochastik/Statistik)

Zusammenfassung

Fabian Damken

8. November 2023



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	4
2	Grundbegriffe	5
2.1	Allgemeine Definitionen	5
2.2	Messreihen	5
2.2.1	Empirische Verteilungsfunktion	5
2.2.2	Klassen	5
2.2.3	Zweidimensionale Messreihen	6
2.3	Maßzahlen	6
2.3.1	Lagemaßzahlen	6
2.3.2	Streuungsmaße	7
2.3.3	Regressionsgerade	8
2.4	Zufallsexperimente und Wahrscheinlichkeit	8
2.4.1	Zufallsexperimente	8
2.4.2	Wahrscheinlichkeit	9
2.5	Zufallsvariablen und Verteilungsfunktion	11
2.5.1	Zufallsvariablen	11
2.5.2	Verteilungsfunktion	12
2.5.3	Diskret/Stetig verteilte Zufallsvariablen	12
2.5.4	Erwartungswert und Varianz	16
2.5.5	Tschebyscheffsche Ungleichung	16
2.5.6	Unabhängigkeit	17
2.6	Einige Sätze	17
2.6.1	Das schwache Gesetz der großen Zahlen	17
2.6.2	Zentraler Grenzwertsatz	17
2.6.3	Zentralsatz der Statistik	18
2.6.4	Anwendungen	18
3	Schätzverfahren und Konfidenzintervalle	19
3.1	Grundlagen	19
3.1.1	(Asymptotische) Erwartungstreue	19
3.1.2	Mittlerer quadratischer Fehler	20
3.1.3	Konsistenz	20
3.2	Maximum-Likelihood-Schätzer	20
3.3	Konfidenzintervalle	21
3.3.1	Konstruktion für normalverteilte Zufallsvariablen	21
4	Testverfahren	23
4.1	Grundlagen	23
4.1.1	Testgröße	23

4.1.2	Allgemeines Konstruktionsprinzip zum Niveau α	24
4.2	Wichtige Tests bei Normalverteilungsannahme	24
4.3	Verteilungstests	26
4.4	Weitere statische Tests	28
5	Robuste Statistik	29
5.1	Median	29
5.1.1	Schätzer	29
5.2	M-Schätzer	30
6	Multivariate Verteilungen und Summen von Zufallsvariablen	31
6.1	Grundlagen	31
6.1.1	Multivariate Normalverteilung	32
6.1.2	Unabhängigkeit	32
6.1.3	Korrelation	32
6.2	Verteilung der Summe von Zufallsvariablen	33
6.2.1	Faltung	33
6.2.2	Diskret verteilte Zufallsvariablen	33

1 Einführung

- Nahezu überall treten unsicherheitsbehaftete Daten, Parameter oder Prozesse auf.
Beispiele: Messfehler, Materialschwankungen, Rauschen, Inferenz, Nutzerverhalten, ...
- In vielen Bereichen der Informatik sind mathematische Modelle zur Verarbeitung unsicherer Daten eine unerlässliche Basis.
Beispiele: Signalverarbeitung, Regelungstechnik, Machine Learning, Robotik, ...
- Im allgemeinen lässt sich die Statistik/Stochastik in folgende Bereiche einteilen:
 - Die *Beschreibende Statistik* dient dazu, Beobachtungsdaten darzustellen und zu charakterisieren.
 - In der *Schließenden Statistik* geht es darum, Risiken auf Basis von mathematischen Modellen abzuschätzen und einzustufen.
 - Diese mathematischen Modelle werden in der *Wahrscheinlichkeitstheorie* behandelt.

2 Grundbegriffe

2.1 Allgemeine Definitionen

Gamma-Funktion

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt, \quad x > 0$$

Beta-Funktion

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt, \quad \alpha, \beta > 0$$

2.2 Messreihen

Eine *Messreihe* ist eine Reihe von n Zahlen:

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

Messreihen können in quantitativ-diskrete und quantitativ-stetige Typen eingeordnet werden, wobei die Merkmalsausprägungen bei ersterem ganze Zahlen sind und bei letzterem reelle Zahlen.

Wird eine beliebige Messreihe der Größe nach sortiert, so entsteht eine *geordnete Messreihe*:

$$x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}$$

Sie enthält die gleichen Werte, aber so angeordnet, dass $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$ gilt.

2.2.1 Empirische Verteilungsfunktion

Die *empirische Verteilungsfunktion* zu einer Messreihe x_1, x_2, \dots, x_n ist die Funktion

$$F(z; x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\text{Anzahl der } x_i \text{ mit } x_i \leq z}{n} = \frac{\max\{i \mid x_{(i)} \leq z\}}{n}$$

2.2.2 Klassen

Werden $r - 1$ Zahlen $a_1 < a_2 < \dots < a_{r-1}$ gewählt, so entsteht die Unterteilung von \mathbb{R} in r Klassen:

$$\mathbb{R} = (-\infty, a_1) \cup (a_1, a_2] \cup \dots \cup (a_{r-1}, a_r] \cup (a_r, \infty)$$

Mit $F(z) = F(z; x_1, x_2, \dots, x_n)$ ergibt sich die *relative Klassenhäufigkeit* für die r Klassen mit:

$$F(a_1), \quad F(a_2) - F(a_1), \quad F(a_{r-1}) - F(a_{r-2}), \quad 1 - F(a_{r-1})$$

Werden noch zwei zusätzliche Zahlen $a_0 < \min\{a_1, x_{(1)}\}$ und $a_r > \max\{a_{r-1}, x_{(n)}\}$ gewählt, so kann die Klassenhäufigkeit als *Histogramm* dargestellt werden, wobei über jedem Intervall $(a_{j-1}, a_j]$, $j = 1, \dots, r$ ein Rechteck mit der Fläche der jeweiligen Klassenhäufigkeit erstellt wird. Die Gesamtfläche des Histogramms ist somit 1.

2.2.3 Zweidimensionale Messreihen

Werden bei einer statistischen Erhebung zwei Merkmale gleichzeitig ermittelt, entstehen *zweidimensionale Messreihen*:

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$$

2.3 Maßzahlen

2.3.1 Lagemaßzahlen

Eindimensional

Sei x_1, x_2, \dots, x_n eine Messreihe mit der dazugehörigen geordneten Messreihe $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}$.

Arithmetisches Mittel

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \dots + x_n)$$

Empirischer Median

$$\tilde{x} = \begin{cases} x_{(\frac{n}{2})} & \text{falls } n \text{ gerade} \\ x_{(\frac{n+1}{2})} & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

p -Quantil ($0 < p < 1$)

$$x_p = \begin{cases} x_{np} & \text{falls } np \text{ ganzzahlig} \\ x_{\lfloor np \rfloor + 1} & \text{falls } np \text{ nicht ganzzahlig} \end{cases}$$

Das 0.25-Quantil wird *unteres Quantil*, das 0.75-Quantil *oberes Quantil* genannt. Das 0.5-Quantil entspricht dem Median.

α -gestutztes Mittel ($0 < \alpha < 0.5$)

$$\bar{x}_\alpha = \frac{1}{n - 2k} (x_{(k+1)} + \dots + x_{(n-k)}), \quad k = \lfloor n\alpha \rfloor$$

Anschaulich: Die extremsten k Messwerte werden ignoriert.

Zweidimensional

Sei $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ eine Messreihe.

Arithmetische Mittel

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$$

2.3.2 Streuungsmaße

Eindimensional

Sei x_1, x_2, \dots, x_n eine Messreihe mit der dazugehörigen geordneten Messreihe $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}$.

Empirische Varianz

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2 \right)$$

Empirische Streuung

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{s^2}$$

Spannweite

$$v = x_{(n)} - x_{(1)}$$

Quartilsabstand

$$q = x_{0.75} - x_{0.25}$$

Zweidimensional

Empirische Varianzen

$$s_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad s_y^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$$

Empirische Streuungen

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad s_y = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}$$

Empirische Kovarianz

$$s_{xy} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y} \right)$$

Empirische Korrelationskoeffizient

$$r_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_x s_y}$$

Es gilt immer $|r_{xy}| \leq 1$. Je näher $|r_{xy}|$ an 1 liegt, desto stärker korrelieren x und y .

2.3.3 Regressionsgerade

Der Zusammenhang der x - und y -Werte lässt sich durch eine *Regressionsgerade* visualisieren.

$$y = \hat{a}x + \hat{b}$$

Die Parameter \hat{a} und \hat{b} berechnen sich dabei wie folgt:

$$\hat{a} = \frac{s_{xy}}{s_x^2} \quad \hat{b} = \bar{y} - \hat{a}\bar{x}$$

Der Korrelationskoeffizient gibt den Trend der Abhängigkeiten der y -Werte von den x -Werten an:

$$\text{Die Regressionsgerade verläuft} \begin{cases} \text{streng monoton steigend.} & r_{xy} > 0 \\ \text{streng monoton fallend.} & r_{xy} < 0 \\ \text{horizontal.} & r_{xy} = 0 \end{cases}$$

Residuen

Die Abweichungen der Punkte (x_i, y_i) von der Regressionsgerade in vertikaler Richtung

$$r_i = y_i - \hat{a}x_i - \hat{b}, \quad i = 1, \dots, n$$

werden *Residuen* genannt.

Für das *Residuenquadrat* gilt:

$$\sum_{i=1}^n r_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y})^2 (1 - r_{xy}^2)$$

Die vertikale Abweichung von der Regressionsgerade hängt also stark von dem Korrelationskoeffizienten ab. Für Werte von $|r_{xy}|$, die nahe an 1 liegen verschwinden die Residuen annähernd (für $|r_{xy}| = 1$ verschwinden sie vollständig).

2.4 Zufallsexperimente und Wahrscheinlichkeit

2.4.1 Zufallsexperimente

Ein *Zufallsexperiment* ist ein Vorgang, der so genau beschrieben wird, dass er als beliebig oft wiederholbar betrachtet werden kann und dessen Ergebnisse vom Zufall abhängen.

- Die Menge Ω heißt *Ergebnismenge*.
- Die Elemente $\omega \in \Omega$ heißen *Ergebnisse*,
- Teilmengen $A \subseteq \Omega$ heißen *Ereignisse*. Ein Ereignis A tritt ein gdw. ein Ergebnis $\omega \in A$ eintritt.

Ereignisse

- Ein *zusammengesetztes Ereignis* $A \cup B$ tritt ein gdw. ein Ergebnis ω mit $\omega \in A$ oder $\omega \in B$ eintritt.
- Analog tritt ein Ereignis $A \cap B$ ein gdw. ein Ergebnis ω mit $\omega \in A$ und $\omega \in B$ eintritt.
- Das Ereignis $A^c = \Omega \setminus A$ ist das zu A *komplementäre Ereignis*.
- Zwei Ereignisse A, B heißen *unvereinbar* gdw. $A \cap B = \emptyset$ (d.h. die Ereignisse sind disjunkt).
- Die leere Menge \emptyset heißt *unmögliches Ereignis* und die Menge Ω *sicheres Ereignis*.
- Einelementige Mengen $\{\omega\}$ heißen *Elementarereignisse*.
- Für Folgen A_1, A_2, \dots von Ereignissen wird das zusammengesetzte Ereignis $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ definiert, das eintritt gdw. mindestens ein A_i eintritt. Analog für $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ gdw. alle Ereignisse zugleich eintreten.

Ereignissysteme Ein System $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ heißt σ – *Algebra* oder *Ereignissystem* gdw. gilt:

1. $\Omega \in \mathcal{A}$
2. $A \in \mathcal{A} \implies A^c \in \mathcal{A}$
3. Für jede Folge $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ gilt auch $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$

Aufgrund von 2 und 3 gilt auch: $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c \in \mathcal{A}$.

- Eine σ -Algebra erlaubt genau die Verknüpfungen von Ereignissen, die in der Praxis nützlich sind.

Ereignispartition Mengen A_1, \dots, A_n werden *Ereignispartition* (oder *vollständige Ereignisdisjunktion*) genannt, wenn die Ereignisse paarweise unvereinbar sind und $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$ gilt.

2.4.2 Wahrscheinlichkeit

Formeln der Kombinatorik

Sei Ω eine Ereignismenge mit n Elementen $k \in \mathbb{N}$.

Geordnete Probe mit Wiederholungen Ein k -Tupel x_1, \dots, x_k mit $x_i \in \Omega$, $i = 1, \dots, k$ heißt *geordnete Probe* von Ω vom Umfang k mit *Wiederholungen*. Dann existieren

$$n^k$$

solcher Proben (für jede Stelle x_i gibt es n Möglichkeiten).

Geordnete Probe ohne Wiederholungen Ein k -Tupel x_1, \dots, x_k , $k \leq n$ mit $x_i \in \Omega$, $i = 1, \dots, k$ und $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$ heißt *geordnete Probe* von Ω vom Umfang k *ohne Wiederholungen*. Dann existieren

$$n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1)$$

solcher Proben (für die erste Stelle gibt es n Möglichkeiten, für die zweite $n-1$, usw.).

Gilt $k = n$ wird von *Permutationen* der Menge Ω gesprochen, wovon

$$n! = n(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdots 1$$

existieren.

Ungeordnete Probe mit Wiederholungen Eine k -Sammlung x_1, \dots, x_k , $k \leq n$ mit $x_i \in \Omega$, $i = 1, \dots, k$ heißt *ungeordnete Probe* von Ω vom Umfang k mit *Wiederholungen*. Dann existieren

$$\frac{(n+k-1)!}{(n-1)! \cdot k!} = \binom{n+k-1}{k}$$

solcher Proben.

Ungeordnete Probe ohne Wiederholungen Eine Teilmenge x_1, \dots, x_k , $k \leq n$ mit $x_i \in \Omega$, $i = 1, \dots, k$ heißt *ungeordnete Probe* von Ω vom Umfang k ohne *Wiederholungen*. Dann existieren

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

solcher Proben (es gibt $n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1)$ geordnete Proben, aber jeweils $k!$ bestehen aus den gleichen k Elementen).

Wahrscheinlichkeiten

Um jedem Ereignis eine Wahrscheinlichkeit zuzuordnen, wird eine Abbildung $P : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ betrachtet. Diese Abbildung heißt *Wahrscheinlichkeitsmaß*, wenn sie den *Axiomen von Kolmogorov* genügt:

1. $\forall A \in \mathcal{A} : P(A) \geq 0$
2. $P(\Omega) = 1$
3. $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ mit paarweise unvereinbaren $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ (auch für endliche Folgen!)

Rechenregeln

- $P(A^c) = 1 - P(A)$
- $P(\emptyset) = 0$
- $0 \leq P(A) \leq 1$
- $A \subseteq B \implies P(A) \leq P(B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Ist jedes Elementarereignis gleich Wahrscheinlich (wie z.B. bei einem Würfelwurf), so gilt für beliebige Ereignisse $A \subseteq \Omega$:

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} P(\{\omega_i\}) = \frac{|A|}{n}$$

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Seien A, B zwei Ereignisse mit $P(A), P(B) > 0$. In vielen Fällen ist interessant, was die Wahrscheinlichkeit von A ist unter der Bedingung, dass B eintritt.

Diese *bedingte Wahrscheinlichkeit* wird als $P(A|B)$ formuliert (Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B) und ist gegeben durch:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Ereignispartition Für eine Ereignispartition A_1, \dots, A_n mit $P(A_i) > 0$, $i = 1, \dots, n$ und ein Ereignis B gilt:

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(B|A_i)$$

Formel von Bayes Seien A_1, \dots, A_n eine Ereignispartition mit $P(A_i) > 0$, $i = 1, \dots, n$ und B ein Ereignis mit $P(B) > 0$. Dann gilt für $i = 1, \dots, n$:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B|A_i)}{P(B)}$$

Multiplikationsformel Seien A_1, \dots, A_n Ereignisse mit $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) > 0$. Dann gilt:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdots P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

Unabhängigkeit

Zwei Ereignisse A, B heißen *paarweise unabhängig*, wenn gilt:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Mehrere Ereignisse A_1, \dots, A_n heißen *vollständig unabhängig*, wenn für alle $\{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ gilt:

$$P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdots P(A_{i_k})$$

Warning: Aus der paarweisen Unabhängigkeit mehrerer Ereignisse folgt nicht immer die vollständige Unabhängigkeit!

2.5 Zufallsvariablen und Verteilungsfunktion

Sei Ω eine Ereignismenge und \mathcal{A} ein Ereignissystem bzgl. Wahrscheinlichkeit P .

2.5.1 Zufallsvariablen

Eine *Zufallsvariable* ist eine Abbildung

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

mit der Eigenschaft, dass für jedes Intervall $I \in \mathbb{R}$ die Urbildmenge

$$A = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in I\}$$

zum Ereignissystem \mathcal{A} gehört. Die Wahrscheinlichkeit, dass X Werte in diesem Intervall annimmt wird mit $P(X \in I)$ bezeichnet, woraus sich folgende Schreibweisen ergeben:

$$P(a \leq X \leq b), \quad P(X \leq x), \quad P(X < x), \quad P(|X - a| < b), \quad P(X = b), \quad \text{usw.}$$

Messreihen

Eine Messreihe x_1, \dots, x_n wird als Realisierung der Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n angesehen. Es wird daher angenommen, dass ein Ergebnis $\omega \in \Omega$ existiert mit:

$$x_1 = X_1(\omega), \quad \dots, \quad x_n = X_n(\omega)$$

2.5.2 Verteilungsfunktion

Sei $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable.

Die Abbildung $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ wird dann *Verteilungsfunktion* von der Zufallsvariable X genannt:

$$F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto P(X \leq x)$$

Dabei müssen Verteilungsfunktionen monoton wachsende Funktionen sein mit:

$$F(-\infty) = 0 \quad F(\infty) = 1 \quad F(x+) = F(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Dabei sind die Schreibweisen wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} F(x+) &:= \lim_{h \rightarrow 0} F(x+h) & F(x-) &:= \lim_{h \rightarrow 0} F(x-h) \\ F(-\infty) &:= \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) & F(\infty) &:= \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) \end{aligned}$$

Eigenschaften

$$\begin{aligned} P(X = a) &= P(X \leq a) - P(X < a) = F(a) - F(a-) \\ P(a < X \leq b) &= P(X \leq b) - P(X \leq a) = F(b) - F(a) \\ P(a \leq X < b) &= P(X < b) - P(X < a) = F(b-) - F(a-) \\ P(a \leq X \leq b) &= P(X \leq b) - P(X < a) = F(b) - F(a-) \\ P(X > a) &= 1 - P(X \leq a) = 1 - F(a) \end{aligned}$$

Quantile

Ist die Verteilungsfunktion F stetig, so ist das p -Quantil x_p gegeben durch die Gleichung

$$F(x_p) = p$$

Die Quantile sind für gängige Verteilungsfunktionen somit tabellierbar und als Tabellen verfügbar.

2.5.3 Diskret/Stetig verteilte Zufallsvariablen

- Eine Zufallsvariable ist *diskret verteilt*, wenn sie nur endlich viele oder abzählbar unendliche viele Werte x_1, x_2, \dots annehmen kann. Die Verteilungsfunktion ist entsprechend eine monoton wachsende Treppenfunktion, die an den Stellen $P(X = x_i)$ anspringt.
- Eine Zufallsvariable ist *stetig verteilt mit Dichte f* , wenn die Verteilungsfunktion gegeben ist durch

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}$$

Die Dichte ist dabei nichtnegativ, die Verteilungsfunktion F ist stetig und es gilt $\frac{d}{dx} F = f$.

Beispiele für diskrete Verteilungen

Geometrische Verteilung Sei $0 < p < 1$.

Eine Zufallsvariable X mit Wertebereich \mathbb{N}^* heißt *geometrisch verteilt mit Parameter p* , falls gilt

$$P(X = i) = (1 - p)^{i-1}p, \quad i = 1, 2, \dots$$

Erwartungswert/Varianz:

$$E(x) = \frac{1}{p}$$
$$\text{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

Anwendung Zufallsexperimente mit Ereignis mit Wahrscheinlichkeit p . Die Anzahl unabhängiger Wiederholung bis zum Eintreten des Ereignisses kann als geometrisch verteilte Zufallsvariable modelliert werden („Warten auf den ersten Erfolg“).

Binomialverteilung Seien $n \in \mathbb{N}$ und $0 < p < 1$.

Eine Zufallsvariable X mit Wertebereich \mathbb{N}_0 heißt *binomialverteilt mit Parametern n, p* (kurz: $B(n, p)$ -verteilt), falls gilt

$$P(X = i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

Erwartungswert/Varianz:

$$E(x) = np$$
$$\text{Var}(X) = np(1-p)$$

Anwendung n -mal unabhängig wiederholtes Zufallsexperiment mit Ereignis mit Wahrscheinlichkeit p . Die Anzahl des Ereignis-Eintretens kann als $B(n, p)$ -verteilte Zufallsvariable modelliert werden („Anzahl der Erfolge bei n Versuchen“).

Poissonverteilung Sei $\lambda > 0$.

Eine Zufallsvariable X mit Wertebereich \mathbb{N}_0 heißt *Poisson-verteilt mit Parameter λ* , falls gilt

$$P(X = i) = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Erwartungswert/Varianz:

$$E(X) = \lambda$$
$$\text{Var}(X) = \lambda$$

Anwendung Anzahl der in einer Telefonzentrale innerhalb von 10 Minuten eingehenden Anrufe. λ gibt die „mittlere Anzahl“ an eingehenden Anrufen an.

Beispiele für stetige Verteilungen

Rechteckverteilung

Sei $a < b$.

Eine stetig verteilte Zufallsvariable heißt *rechteckverteilt im Intervall $[a, b]$* (kurz: $R(a, b)$ -verteilt), falls

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq t \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gilt. Dann ergibt sich für die Verteilungsfunktion:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & a < x < b \\ 1 & x \geq b \end{cases}$$

Exponentialverteilung

Sei $\lambda > 0$.

Eine stetig verteilte Zufallsvariable heißt *exponentialverteilt mit Parameter λ* (kurz: $\text{Ex}(\lambda)$ -verteilt), falls

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \lambda e^{-\lambda t} & t \geq 0 \end{cases}$$

gilt. Dann ergibt sich für die Verteilungsfunktion:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \end{cases}$$

Erwartungswert/Varianz:

$$E(x) = \frac{1}{\lambda}$$
$$\text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Normalverteilung

Seien $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma \in \mathbb{R}$.

Eine stetig verteilte Zufallsvariable heißt *normalverteilt mit Parametern μ, σ^2* (kurz: $N(\mu, \sigma^2)$), falls

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

gilt. Mit Φ aus der Standard-Normalverteilung (siehe 2.5.3) ergibt sich für die Verteilungsfunktion:

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

Erwartungswert/Varianz:

$$E(x) = \mu$$
$$\text{Var}(X) = \sigma^2$$

Standard-Normalverteilung Ist $\mu = 0$ und $\sigma^2 = 1$, wird ist *Standard-Normalverteilung* genannt und die Verteilungsfunktion mit

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

bezeichnet.

Da Φ nicht geschlossen angebar ist, muss die Funktion tabelliert oder numerisch ausgewertet werden. Es gilt:

$$\Phi(0) = \frac{1}{2}, \quad \Phi(-x) = 1 - \Phi(x), \quad x \geq 0$$

Chi-Quadrat-Verteilung Sei $r \in \{1, \dots, n\}$.

Eine Zufallsvariable X heißt *Chi-Quadrat-verteilt mit Parameter r* (kurz: χ_r^2 -verteilt), falls

$$F(x) = P(Z_1^2 + \dots + Z_r^2 \leq x)$$

gilt. Die Dichte ist dabei

$$f(x) = \frac{x^{\frac{r}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{r}{2}} \Gamma(\frac{r}{2})}, \quad x > 0$$

mit der Gamma-Funktion.

Studentische t-Verteilung Sei $r \in \{1, \dots, n-1\}$.

Eine Zufallsvariable X heißt *Student-t-verteilt mit Parameter r* (kurz: t_r -verteilt), falls

$$F(x) = P\left(\frac{Z_{r+1}}{\sqrt{(Z_1^2 + \dots + Z_r^2)/r}} \leq x\right)$$

gilt. Die Dichte ist dabei

$$f(x) = \frac{\Gamma(\frac{r+1}{2})}{\sqrt{\pi r} \cdot \Gamma(\frac{r}{2})} \left(1 + \frac{x^2}{r}\right)^{-\frac{r+1}{2}}$$

mit der Gamma-Funktion.

Fisher-Verteilung Seien $r, s \in \{1, \dots, n-1\}$ mit $r + s \leq n$.

Eine Zufallsvariable X heißt *Fisher-Verteilt mit Parametern r, s* (kurz: $F_{r,s}$ -verteilt), falls

$$F(x) = P\left(\frac{(Z_1^2 + \dots + Z_r^2)/r}{(Z_{r+1}^2 + \dots + Z_{r+s}^2)/s} \leq x\right) = \frac{\chi_r^2/r}{\chi_s^2/s}$$

gilt. Die Dichte ist dabei

$$f(x) = m^{\frac{r}{2}} n^{\frac{s}{2}} \cdot \frac{\Gamma(\frac{r}{2} + \frac{s}{2})}{\Gamma(\frac{r}{2}) \cdot \Gamma(\frac{s}{2})} \cdot \frac{x^{\frac{r}{2}-1}}{(rx + s)^{\frac{r+s}{2}}}, \quad x \geq 0$$

mit der Gamma-Funktion.

2.5.4 Erwartungswert und Varianz

Erwartungswert

Sei $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stückweise stetige Funktion.

Der *Erwartungswert* einer *diskret verteilten* Zufallsvariable X und einer Funktion $h(X)$ mit den Werten x_1, x_2, \dots ist

$$E(X) = \sum_i x_i P(X = x_i) \qquad E(h(X)) = \sum_i h(x_i) P(X = x_i)$$

sofern $\sum_i |x_i| P(X = x_i)$ konvergiert.

Der *Erwartungswert* einer *stetig verteilten* Zufallsvariable X und einer Funktion $h(X)$ mit Dichte f ist

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \qquad E(h(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f(x) dx$$

sofern $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) dx$ konvergiert.

Rechenregeln Seien X, X_1, \dots, X_n Zufallsvariablen, $b, a, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ und $h_1, h_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stückweise stetig. Dann gelten folgende (teilweise redundante) Rechenregeln für den Erwartungswert:

$$\begin{aligned} E(aX + b) &= aE(X) + b \\ E(h_1(X) + h_2(X)) &= E(h_1(X)) + E(h_2(X)) \\ E(a_1X_1 + \dots + a_nX_n + b) &= a_1E(X_1) + \dots + a_nE(X_n) + b \end{aligned}$$

Varianz

Die *Varianz* einer Zufallsvariable X ist der Erwartungswert der quadratischen Abweichung von X zu ihrem Erwartungswert:

$$\text{Var}(X) = E((X - E(X))^2)$$

Die *Standardabweichung* ist dann definiert durch: $\sqrt{\text{Var}(X)}$

Rechenregeln Sei X eine Zufallsvariable, $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gelten folgende Rechenregeln für die Varianz:

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 \\ \text{Var}(aX + b) &= a^2 \text{Var}(X) \end{aligned}$$

Sind Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n unabhängig, dann gilt zusätzlich:

$$\text{Var}(X_1 + \dots + X_n) = \text{Var}(X_1) + \dots + \text{Var}(X_n)$$

2.5.5 Tschebyscheffsche Ungleichung

Sei X eine Zufallsvariable. Dann gilt nach der *tschebyscheffschen Ungleichung*:

$$P(|X - E(X)| \geq c) \leq \frac{\text{Var}(X)}{c^2}, \quad c > 0$$

2.5.6 Unabhängigkeit

Seien X_1, \dots, X_n Zufallsvariablen mit den Verteilungsfunktionen F_1, \dots, F_n . Die *gemeinsame Verteilungsfunktion* ist gegeben durch:

$$F(x_1, \dots, x_n) = P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n), \quad (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$$

Die Zufallsvariablen heißen *unabhängig*, wenn für alle $(x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ die Ereignisse

$$\{X_1 \leq x_1\}, \dots, \{X_n \leq x_n\}$$

vollständig unabhängig sind, d.h.

$$P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) = P(X_1 \leq x_1) \cdots P(X_n \leq x_n)$$

oder kurz

$$F(x_1, \dots, x_n) = F_1(x_1) \cdots F_n(x_n)$$

2.6 Einige Sätze

2.6.1 Das schwache Gesetz der großen Zahlen

Ist X_1, X_2, \dots eine Folge von unabhängigen identisch verteilten Zufallsvariablen mit $\mu = E(X_i)$, $\sigma^2 = \text{Var}(X_i)$, dann gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \mu\right| \geq \varepsilon\right) = 0, \quad \forall \varepsilon > 0$$

2.6.2 Zentraler Grenzwertsatz

Sei X_1, X_2, \dots eine Folge von identisch verteilten unabhängigen Zufallsvariablen mit $\mu_i = E(X_i)$, $\sigma_i^2 = \text{Var}(X_i)$, $i = 1, 2, \dots$. Dann gilt für alle $y \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{X_1 + \dots + X_n - (\mu_1 + \dots + \mu_n)}{\sqrt{\sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2}} \leq y\right) = \Phi(y)$$

Das arithmetische Mittel $\bar{X}_{(n)} = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$ ist also für große n annähernd $N(\mu, \sigma^2)$ verteilt mit

$$\mu = \frac{1}{n}E(X_1 + \dots + X_n) = \frac{1}{n}(\mu_1 + \dots + \mu_n) \quad \sigma^2 = \frac{1}{n^2}\text{Var}(X_1 + \dots + X_n) = \frac{1}{n^2}(\sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2)$$

Anmerkung: Hat X den Erwartungswert μ und die Varianz σ^2 , dann hat $\frac{X-\mu}{\sigma}$ den Erwartungswert 0 und die Varianz 1.

2.6.3 Zentralsatz der Statistik

$$F_n(z; x_1, \dots, x_n) = \frac{|\{x_i \mid x_i \leq z\}|}{n}$$

Sei X_1, X_2, \dots eine Folge von unabhängigen identisch verteilten Zufallsvariablen mit der Verteilungsfunktion F und sei

$$D_n(X_1, \dots, X_n) = \sup_{z \in \mathbb{R}} |F_n(z; X_1, \dots, X_n) - F(z)|$$

die zufällige Maximalabweichung zwischen empirischer und „wahrer“ Verteilungsfunktion. Dann gilt

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} D_n(X_1, \dots, X_n) = 0\right) = 1$$

Die zufällige Maximalabweichung konvergiert also mit einer Wahrscheinlichkeit 1 gegen 0.

2.6.4 Anwendungen

Seien X_1, \dots, X_n unabhängige identisch $N(\mu, \sigma^2)$ -verteilte Zufallsvariablen mit arithmetischem Mittel und Stichprobenvarianz:

$$\bar{X}_{(n)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \qquad S_{(n)}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_{(n)})^2$$

Dann gilt:

- $\bar{X}_{(n)}$ ist $N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ -verteilt
- $\frac{n-1}{\sigma^2} S_{(n)}^2$ ist χ_{n-1}^2 -verteilt
- $\bar{X}_{(n)}$ und $S_{(n)}^2$ sind unabhängig
- $\sqrt{n} \frac{\bar{X}_{(n)} - \mu}{\sqrt{S_{(n)}^2}}$ ist t_{n-1} -verteilt

3 Schätzverfahren und Konfidenzintervalle

3.1 Grundlagen

- Sei im folgenden die Messreihe x_1, \dots, x_n die Realisierung von unabhängigen identisch wie X verteilten Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n .
- Außerdem wird angenommen, dass die Verteilungsfunktion F von X und aller X_i einer durch k Parameter $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^k$ parametrisierte Familie F_θ , $\theta \in \Theta$ von Verteilungsfunktionen angehört.
- Der Parameter oder ein dadurch bestimmter Zahlenwert $\tau : \Theta \rightarrow \mathbb{R}$ sei unbekannt und soll geschätzt werden.
- Ein *Schätzverfahren* ist wie folgt definiert:
Ein *Schätzverfahren* (oder eine *Schätzfunktion* oder ein *Schätzer*) ist eine Abbildung

$$T_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

die einer Messreihe x_1, \dots, x_n einen Schätzwert $T_n(x_1, \dots, x_n)$ für den Wert $\tau(\theta)$ zuordnet. Die Zufallsvariable $T_n(X_1, \dots, X_n)$ wird *Schätzvariable* genannt.

- Der Erwartungswert und die Varianz der Schätzvariablen und allen X_i hängen von der Verteilungsfunktion F_θ ab. Zur Verdeutlichung dieses Umstandes wird der Parameter θ an sämtliche Funktionen geschrieben:

$$\begin{array}{lll} E_\theta(T_n(X_1, \dots, X_n)), & E_\theta(X_1), & \dots \\ \text{Var}_\Theta(T_n(X_1, \dots, X_n)), & \text{Var}_\theta(X_i), & \dots \\ P_\theta(a \leq T_n(X_1, \dots, X_n) \leq b), & P_\theta(a \leq X_1 \leq b), & \dots \end{array}$$

3.1.1 (Asymptotische) Erwartungstreue

Ein Schätzer $T_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *erwartungstreu* für $\tau : \Theta \rightarrow \mathbb{R}$, wenn gilt:

$$E_\theta(T_n(X_1, \dots, X_n)) = \tau(\theta) \quad \text{für alle } \theta \in \Theta$$

Eine Folge von Schätzern $T_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \dots$ heißt *asymptotisch erwartungstreu* für $\tau : \Theta \rightarrow \mathbb{R}$, wenn gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_\theta(T_n(X_1, \dots, X_n)) = \tau(\theta) \quad \text{für alle } \theta \in \Theta$$

Das heißt, ein Schätzer liefert bei genügender Anzahl an Stichproben ein erwartungstreu Ergebnis.

3.1.2 Mittlerer quadratischer Fehler

Um die Güte eines Schätzers zu beurteilen dient der *Mittlere quadratische Fehler* (Mean squared error, MSE):

$$\text{MSE}_\theta(T) := E_\theta((T - \tau(\theta))^2)$$

Es gilt T erwartungstreu $\implies \text{MSE}_\theta(T) = \text{Var}_\theta(T)$.

Seien T_1 und T_2 Schätzer für τ , dann heißt T_1 *effizienter* als T_2 , wenn gilt

$$\text{MSE}_\theta(T_1) \leq \text{MSE}_\theta(T_2) \quad \forall \theta \in \Theta$$

Sind T_1, T_2 erwartungstreu, dann heißt dies

$$\text{Var}_\theta(T_1) \leq \text{Var}_\theta(T_2) \quad \forall \theta \in \Theta$$

3.1.3 Konsistenz

Eine Folge an Schätzern T_1, T_2, \dots heißt *konsistent* für τ , wenn für alle $\varepsilon > 0$ und alle $\theta \in \Theta$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_\theta(|T_n(X_1, \dots, X_n) - \tau(\theta)| > \varepsilon) = 0$$

Die Folge heißt *konsistent im quadratischen Mittel* für τ , wenn für alle $\theta \in \Theta$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{MSE}_\theta(T_n) = 0$$

Sätze Ist T_1, T_2, \dots eine Folge von Schätzern, die für τ erwartungstreu sind und gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}_\theta(T_n(X_1, \dots, X_n)) = 0 \quad \forall \theta \in \Theta$$

dann ist die Folge von Schätzern konsistent für τ .

Allgemeiner gilt: Ist T_1, T_2, \dots eine Folge von Schätzern, die konsistent im quadratischen Mittel für τ sind, dann ist die Folge konsistent für τ .

3.2 Maximum-Likelihood-Schätzer

- Bei gegebener Verteilungsklasse F_θ , $\theta \in \Theta$ lassen sich Schätzer für den Parameter θ oftmals mit der Maximum-Likelihood-Methode gewinnen.
- Sind die Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n stetig mit einer Dichte verteilt, hängt die Dichte ebenfalls von den Parametern ab (f_θ).
- Für diskrete Zufallsvariablen sei $f_\theta(x) = P_\theta(X = x)$ für alle x aus dem Wertebereich. Sei dieser Wertebereich \mathbb{X} .

Für eine Messreihe x_1, \dots, x_n heißt die Funktion $L(\cdot; x_1, \dots, x_n)$ mit

$$L(\theta; x_1, \dots, x_n) = f_\theta(x_1) \cdot f_\theta(x_2) \cdots f_\theta(x_n)$$

die zu der Messreihe gehörige *Likelihood-Funktion*.

Eine Parameterschätzung $\hat{\theta} = \hat{\theta}(x_1, \dots, x_n)$ mit

$$L(\hat{\theta}; x_1, \dots, x_n) \geq L(\theta; x_1, \dots, x_n) \quad \forall \theta \in \Theta$$

heißt *Maximum-Likelihood-Schätzwert*. Existiert ein solcher Schätzwert für jede mögliche Messreihe, dann ist

$$T_n : \mathbb{X}^n \rightarrow \Theta : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \hat{\theta}(x_1, \dots, x_n)$$

ein *Maximum-Likelihood-Schätzer*.

3.3 Konfidenzintervalle

- Wie beim Schätzen wird eine Messreihe x_1, \dots, x_n beobachtet und es sollen Ober- und Unterschranken für $\tau(\theta)$ ermittelt werden.
- Dabei wird durch ein Paar $U : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $O : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ von Schätzern mit $U(x_1, \dots, x_n) \leq O(x_1, \dots, x_n)$ ein „zufälliges“ Intervall $I(X_1, \dots, X_n) = [U(X_1, \dots, X_n), O(X_1, \dots, X_n)]$ definiert.
- Dieses Intervall heißt *Konfidenzintervall* für $\tau(\theta)$ zum *Konfidenzniveau* $1 - \alpha$, falls gilt:

$$P_\theta(U(X_1, \dots, X_n) \leq \tau(\theta) \leq O(X_1, \dots, X_n)) \geq 1 - \alpha \quad \forall \theta \in \Theta$$

- Gehört das Intervall zu einer bestimmten Messreihe, heißt es *konkretes Schätzintervall* für $\tau(\theta)$.
- Dann enthält ein konkretes Schätzintervall den Wert $\tau(\theta)$ mit einer Wahrscheinlichkeit von $1 - \alpha$.

3.3.1 Konstruktion für normalverteilte Zufallsvariablen

Seien X_1, \dots, X_n unabhängig und identisch normalverteilte Zufallsvariablen. Dann ist die Verteilungsfunktion F_θ durch den Parameter $\theta = (\mu, \sigma^2)$ bestimmt:

$$F_\theta(x) = F_{(\mu, \sigma^2)}(x) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$$

Das Konfidenzniveau ist dabei immer $1 - \alpha$.

Für μ bei bekannter Varianz Es ist $\Theta = \{(\mu, \sigma^2) \mid \mu \in \mathbb{R}\}$ und $\tau(\theta) = \mu$.

Das Konfidenzintervall für μ zum Niveau $1 - \alpha$ lautet dann

$$I(X_1, \dots, X_n) = \left[\bar{X}_{(n)} - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}, \quad \bar{X}_{(n)} + u_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \right]$$

mit dem $1 - \frac{\alpha}{2}$ -Quantil $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ der $N(0, 1)$ -Verteilung, also

$$\Phi(u_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

Für μ bei unbekannter Varianz Es ist $\Theta = \{(\mu, \sigma^2) \mid \mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0\}$ und $\tau(\theta) = \mu$.

Das Konfidenzintervall für μ zum Niveau $1 - \alpha$ lautet dann

$$I(X_1, \dots, X_n) = \left[\bar{X}_{(n)} - t_{n-1; 1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{S_{(n)}^2}{n}}, \quad \bar{X}_{(n)} + t_{n-1; 1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{S_{(n)}^2}{n}} \right]$$

mit dem $1 - \frac{\alpha}{2}$ -Quantil $t_{n-1; 1-\frac{\alpha}{2}}$ der t_{n-1} -Verteilung.

Für σ^2 bei bekanntem Erwartungswert Es ist $\Theta = \{(\mu_0, \sigma^2) \mid \sigma^2 > 0\}$ und $\tau(\theta) = \sigma^2$.

Das Konfidenzintervall für σ^2 zum Niveau $1 - \alpha$ lautet dann

$$I(X_1, \dots, X_n) = \left[\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2}{\chi_{n; 1-\frac{\alpha}{2}}^2}, \quad \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2}{\chi_{n; \frac{\alpha}{2}}^2} \right]$$

mit dem $1 - \frac{\alpha}{2}$ -Quantil $\chi_{n; 1-\frac{\alpha}{2}}^2$ und dem $\frac{\alpha}{2}$ -Quantil $\chi_{n; \frac{\alpha}{2}}^2$ der χ_n^2 -Verteilung.

Für σ^2 bei unbekanntem Erwartungswert Es ist $\Theta = \{(\mu, \sigma^2) \mid \mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0\}$ und $\tau(\theta) = \sigma^2$.

Das Konfidenzintervall für σ^2 zum Niveau $1 - \alpha$ lautet dann

$$I(X_1, \dots, X_n) = \left[\frac{(n-1) S_{(n)}^2}{\chi_{n-1; 1-\frac{\alpha}{2}}^2}, \quad \frac{(n-1) S_{(n)}^2}{\chi_{n-1; \frac{\alpha}{2}}^2} \right]$$

mit dem $1 - \frac{\alpha}{2}$ -Quantil $\chi_{n-1; 1-\frac{\alpha}{2}}^2$ und dem $\frac{\alpha}{2}$ -Quantil $\chi_{n-1; \frac{\alpha}{2}}^2$ der χ_{n-1}^2 -Verteilung.

4 Testverfahren

Warning: Sämtliche Tests, die auf einer approximierten Verteilung und empirischen Daten basieren, sind nur für große Anzahl an Werten (großes n) anwendbar!

4.1 Grundlagen

- Die *Nullhypothese* H_0 ist die zu prüfende Annahme.
- Ein Verfahren zur Prüfung, ob eine Messreihe der Nullhypothese genügt, wird *Test* genannt.
- Die Tests sind dabei durch Angabe von *kritischen Bereichen* $K \subset \mathbb{R}^n$ vollständig beschrieben.

$$\begin{cases} \text{Lehne } H_0 \text{ ab} & \text{falls } (x_1, \dots, x_n) \in K \\ \text{Akzeptierte } H_0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Die wichtigen Fehlermöglichkeiten eines solchen Tests sind:
 - Fehler 1. Art (False Negative)** H_0 wird abgelehnt, obwohl H_0 zutrifft.
 - Fehler 2. Art (False Positive)** H_0 wird akzeptiert, obwohl H_0 nicht zutrifft.
- Ziel
 - Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art klein.
 - Dazu wird ein Testniveau α vorgegeben.
 - Dann muss gelten:

$$\text{Unter Nullhypothese gilt } P((X_1, \dots, X_n) \in K) \leq \alpha \iff P((K_1, \dots, K_n) \in K \mid H_0) \leq \alpha$$

4.1.1 Testgröße

Der kritische Bereich wird durch eine passende Funktion, genannt *Testgröße*:

$$T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

und kritische Schranken c bzw. c_1, c_2 beschrieben.

Damit können bspw. folgende Möglichkeiten an Tests spezifiziert werden, wobei diese immer die allgemeine Form

$$K = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \psi(T(x_1, \dots, x_n)) \right\}$$

für die Definition der kritischen Bereiche annehmen mit unterschiedlichen Prädikaten $\psi(t)$:

- $\psi(t) := (|t| > c)$ Betragsmäßig große Werte sprechen gegen H_0 .
- $\psi(t) := (t < c_1 \vee t > c_2)$ Betragsmäßig kleine Werte sprechen gegen H_0 .
- $\psi(t) := (t > c)$ Große Werte sprechen gegen H_0 .
- $\psi(t) := (t < c)$ Kleine Werte sprechen gegen H_0 .

4.1.2 Allgemeines Konstruktionsprinzip zum Niveau α

1. Verteilungsannahmen formulieren.
2. Nullhypothese H_0 formulieren.
3. Testgröße T wählen und die Verteilung dieser unter H_0 bestimmen.
4. $I \subseteq \mathbb{R}$ so wählen, dass unter H_0 gilt $P(T(X_1, \dots, X_N) \in I) \leq \alpha$.

Dabei wird I durch die kritischen Schranken festgelegt und ist bspw. von der Form:

$$I = \mathbb{R} \setminus [-c, c] \quad I = \mathbb{R} \setminus [c_1, c_2] \quad I = (c, \infty) \quad I = (-\infty, c)$$

Für das Niveau α wird oft 0.1, 0.05 oder 0.01 gewählt.

4.2 Wichtige Tests bei Normalverteilungsannahme

Für μ_0 bei bekannter Varianz (Gauß-Test) Seien X_1, \dots, X_n unabhängig und identisch $N(\mu, \sigma_0^2)$ -verteilt, sei σ_0^2 bekannt und μ_0 zu testen.

1. Wählen der Nullhypothese:

- A) $H_0: \mu = \mu_0$
- B) $H_0: \mu \leq \mu_0$
- C) $H_0: \mu \geq \mu_0$

2. Berechnen der Testgröße:

$$T(X_1, \dots, X_n) = \frac{\sqrt{n}}{\sigma_0} (\bar{X}_{(n)} - \mu_0)$$

3. Ablehnung von H_0 , falls:

- A) $|T| > u_{1-\frac{\alpha}{2}}$
- B) $T > u_{1-\alpha}$
- C) $T < u_\alpha$

Für μ_0 bei unbekannter Varianz (t-Test) Seien X_1, \dots, X_n unabhängig und identisch $N(\mu, \sigma^2)$ -verteilt und μ_0 zu testen.

1. Wählen der Nullhypothese:

- A) $H_0: \mu = \mu_0$
- B) $H_0: \mu \leq \mu_0$
- C) $H_0: \mu \geq \mu_0$

2. Berechnen der Testgröße:

$$T(X_1, \dots, X_n) = \sqrt{n} \frac{\bar{X}_{(n)} - \mu_0}{\sqrt{S_{(n)}^2}}$$

3. Ablehnung von H_0 , falls:

- A) $|T| > t_{n-1; 1-\frac{\alpha}{2}}$
- B) $T > t_{n-1; 1-\alpha}$
- C) $T < t_{n-1; \alpha}$

Für σ^2 bei bekanntem Erwartungswert Seien X_1, \dots, X_n unabhängig und identisch $N(\mu, \sigma^2)$ -verteilt, sei μ bekannt und σ_0^2 zu testen.

1. Wählen der Nullhypothese:

- A) $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$
- B) $H_0: \sigma^2 \leq \sigma_0^2$
- C) $H_0: \sigma^2 \geq \sigma_0^2$

2. Berechnen der Testgröße:

$$T(X_1, \dots, X_n) = \frac{1}{\sigma_0^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$$

3. Ablehnung von H_0 , falls:

- A) $T < \chi_{n; \frac{\alpha}{2}}^2$ oder $T > \chi_{n; 1-\frac{\alpha}{2}}^2$
- B) $T > \chi_{n; 1-\alpha}^2$
- C) $T < \chi_{n; \alpha}^2$

Für σ_0^2 bei unbekanntem Erwartungswert (χ^2 -Test) Seien X_1, \dots, X_n unabhängig und identisch $N(\mu, \sigma^2)$ -verteilt und σ_0^2 zu testen.

1. Wählen der Nullhypothese:

- A) $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$
- B) $H_0: \sigma^2 \leq \sigma_0^2$
- C) $H_0: \sigma^2 \geq \sigma_0^2$

2. Berechnen der Testgröße:

$$T(X_1, \dots, X_n) = \frac{n-1}{\sigma_0^2} S_{(n)}^2$$

3. Ablehnung von H_0 , falls:

A) $T < \chi_{n; \frac{\alpha}{2}}^2$ oder $T > \chi_{n; 1-\frac{\alpha}{2}}^2$

B) $T > \chi_{n; 1-\alpha}^2$

C) $T < \chi_{n; \alpha}^2$

4.3 Verteilungstests

χ^2 -Anpassungstest Der χ^2 -Anpassungstest dient zur Prüfung, ob die empirische Verteilung einer Zufallsvariable einer erwarteten Verteilung entspricht.

Seien X_1, \dots, X_n unabhängig und identisch verteilt mit unbekannter Verteilung F und sei x_1, \dots, x_n eine realisierende Messreihe.

1. H_0 : $F = F_0 \iff X_i \sim F_0$

2. Partitionierung von R in k Intervalle ($z_1 < z_2 < \dots < z_{k-1}$):

$$A_1 = (-\infty, z_1], \quad A_2 = (z_1, z_2], \quad \dots, \quad A_k = (z_{k-1}, \infty)$$

3. Bestimmen der Häufigkeiten:

$$h_j = |\{i \mid x_i \in A_j\}|, \quad j = 1, \dots, k$$

4. Unter H_0 gilt (mit $z_0 := -\infty$ und $z_k := \infty$):

$$p_j := P(X \in A_j) \stackrel{H_0}{=} F_0(z_j) - F_0(z_{j-1}) \approx \frac{h_j}{n}, \quad j = 1, \dots, k$$

5. Berechnen der Testgröße:

$$T(X_1, \dots, X_n) = \sum_{j=1}^k \frac{(H_j - np_j)^2}{np_j}$$

6. Ablehnung von H_0 , falls:

$$T > \chi_{k-1; 1-\alpha}^2$$

χ^2 -Test auf Unabhängigkeit (Kontingenztest) Der χ^2 -Kontingenztest dient zur Prüfung, ob Zufallsvariablen unabhängig sind.

Seien $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ unabhängig und identisch wie (X, Y) verteilt und sei $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ eine realisierende Messreihe.

1. H_0 : X und Y sind unabhängig

2. Partitionierung in k bzw. l Intervalle ($z_1 < z_2 < \dots < z_{k-1}$, $\tilde{z}_1 < \tilde{z}_2 < \dots < \tilde{z}_{l-1}$):

• x-Achse: $A_1 = (-\infty, z_1], \quad A_2 = (z_1, z_2], \quad \dots, \quad A_k = (z_{k-1}, \infty)$

- y-Achse: $B_1 = (-\infty, \tilde{z}_1]$, $B_2 = (\tilde{z}_1, \tilde{z}_2]$, \dots , $B_l = (\tilde{z}_{l-1}, \infty)$

3. Bestimmen der Häufigkeiten:

$$h_{ij} = \left| \left\{ r \in \{1, \dots, n\} \mid (x_r, y_r) \in A_i \times B_j \right\} \right|, \quad i = 1, \dots, k, j = 1, \dots, l$$

und der Randhäufigkeiten:

$$h_{i.} = h_{i1} + \dots + h_{il}, \quad i = 1, \dots, k \quad h_{.j} = h_{1j} + \dots + h_{kj}, \quad j = 1, \dots, l$$

4. Seien unter H_0 :

$$\frac{h_{i.}}{n} \approx P(X \in A_i) \quad \frac{h_{.j}}{n} \approx P(Y \in B_j)$$

$$\frac{\tilde{h}_{ij}}{n} := \frac{h_{i.} h_{.j}}{n^2} \approx P(X \in A_i) \cdot P(Y \in B_j) \stackrel{H_0}{=} P(X \in A_i, Y \in B_j) \approx \frac{h_{ij}}{n}$$

5. Berechnen der Testgröße (mit Zufallsvariablen H_{ij} und \tilde{H}_{ij} für h_{ij} und \tilde{h}_{ij}):

$$T(X_1, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l \frac{(H_{ij} - \tilde{H}_{ij})^2}{\tilde{H}_{ij}}$$

6. Ablehnung von H_0 , falls:

$$T > \chi_{(k-1)(l-1); 1-\alpha}^2$$

χ^2 -Homogenitätstest Der χ^2 -Homogenitätstest dient zur Prüfung, ob die mehrere Zufallsvariablen identisch verteilt sind.

Seien $X_1^{(i)}, \dots, X_{n_i}^{(i)}$ unabhängig und identisch verteilt mit einer Verteilungsfunktion F_i für alle $i = 1, \dots, k$.

1. H_0 : $F_1 = F_2 = \dots = F_k$

2. Partitionierung in m Intervalle ($z_1 < z_2 < \dots < z_{m-1}$):

$$A_1 = (-\infty, z_1], \quad A_2 = (z_1, z_2], \quad \dots, \quad A_m = (z_{m-1}, \infty)$$

3. Bestimmen der Häufigkeiten:

$$H_{ij} = \left| \{X_j^{(i)} \mid X_j^{(i)} \in A_j\} \right|, \quad i = 1, \dots, k, j = 1, \dots, m$$

und der summierten Häufigkeiten:

$$H_{.j} = H_{1j} + \dots + H_{kj}, \quad j = 1, \dots, m$$

4. Unter H_0 gilt daher für die relativen Häufigkeiten (mit $n = n_1 + \dots + n_k$):

$$\frac{h_{ij}}{n_i} \approx \frac{h_{.j}}{n} \iff h_{ij} - \frac{n_i h_{.j}}{n} \approx 0$$

5. Berechnen der Testgröße (mit Zufallsvariablen X_{ij} und $H_{.j}$ für h_{ij} und $h_{.j}$):

$$T(X_1^{(1)}, \dots, X_{n_k}^{(k)}) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m \frac{\left(H_{ij} - \frac{n_i H_{.j}}{n} \right)^2}{\frac{n_i H_{.j}}{n}}$$

6. Ablehnung von H_0 , falls:

$$T > \chi_{(k-1)(m-1); 1-\alpha}^2$$

Wilcoxon Vorzeichen-Rang-Test Der *Wilcoxon Vorzeichen-Rang-Test* dient zur Prüfung, ob zwei Algorithmen in der gleichen Zeit laufen, d.h. gleich schnell sind.

Seien X, Y Zufallsvariablen, die die Laufzeit der beiden Algorithmen angeben und seien $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ zwei realisierende Messreihen.

1. H_0 : Beide Algorithmen sind gleich schnell.
2. Berechne $q_1 = \frac{x_1}{y_1}, \dots, q_n = \frac{x_n}{y_n}$ und entferne alle Quotienten nahe 1 und sei N die Anzahl noch verbleibender Messwerte.
3. Ersetze alle $0 \leq q_i < 1$ durch $-\frac{1}{q_i}$ ($i = 1, \dots, N$) und erhalte das Ergebnis $\tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_N$.
4. Sortiere $|\tilde{q}_1| < |\tilde{q}_2| < \dots < |\tilde{q}_N|$.
5. Berechne und setze

$$G_1 := \{i \mid \tilde{q}_i < -1\} \quad (\text{Algorithmus 1 schneller})$$

$$G_2 := \{i \mid \tilde{q}_i > 1\} \quad (\text{Algorithmus 2 schneller})$$

$$r_1 := \sum_{i \in G_1} i$$

$$r_2 := \sum_{i \in G_2} i$$

6. Berechnen der Testgröße:

$$T = \frac{\min\{r_1, r_2\} - \frac{N(N+1)}{4}}{\sqrt{\frac{N(N+1)(2N+1)}{24}}}$$

7. Ablehnung von H_0 , falls:

$$|T| > u_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

4.4 Weitere statische Tests

Parametrische Tests Verteilung bekannt, Parameter unbekannt
ANOVA (mehrere Stichproben, normalverteilt, gleiche Varianz), ...

Nichtparametrische Tests Verteilung soll getestet werden
Kolmogorow-Smirnow-Test (Verteilungstyp), Wilcoxon-Mann-Whitney-Test (Lage von Stichproben), Kruskal-Wallis-Tests (≥ 3 Gruppen von Stichproben), ...

Unabhängigkeitstests McNemar-Test (zwei abhängige Stichproben), ...

Tests zu Regressionsmethoden t -Test: Regressionskoeffizient, ...
...

5 Robuste Statistik

Ausreißer innerhalb einer Messreihe können die geschätzten statistischen Parameter stark verfälschen. Diesem Phänomen soll die robuste Statistik mit bestimmten Methodiken entgegenwirken.

5.1 Median

Sei X eine Zufallsvariable. Dann ist jede Zahl μ_m ein *robuster Median* mit:

$$P(X \leq \mu_m) \geq \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad P(X \geq \mu_m) \geq \frac{1}{2}$$

mit der Verteilungsfunktion F von X gilt gleichbedeutend:

$$F(\mu_m) \geq \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad F(\mu_m-) \leq \frac{1}{2}$$

Eigenschaften

- Der Median ist so nur eindeutig, wenn $F(x) = \frac{1}{2}$ genau eine Lösung besitzt.
- Wenn der Median eindeutig ist und die Verteilung F symmetrisch ist (d.h. es gilt $\forall x \in \mathbb{R} : F(\mu_m + x) = q - F(\mu_m - x)$), dann gleicht der Median dem Erwartungswert.

5.1.1 Schätzer

Sei $T(x_1, \dots, x_n) := \tilde{x}$ der empirische Median, dann kann ein Schätzer $\tilde{X}_{(n)}$ für μ_m mit diesem konstruiert werden:

$$\tilde{X}_{(n)} := \begin{cases} X_{(\frac{n}{2})}(\omega) & \text{falls } n \text{ gerade} \\ X_{(\frac{n+1}{2})}(\omega) & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

für $\omega \in \Omega$ und der geordneten Messreihe $X_{(1)}(\omega), \dots, X_{(n)}(\omega)$.

Erwartungstreue Seien X_1, \dots, X_n unabhängig und identisch verteilt mit Verteilungsfunktion F_θ . Sei außerdem der Median $\mu_m = \tau(\theta)$ eindeutig und F_θ symmetrisch.

Dann ist $\mu_m = \mu$ und $\tilde{X}_{(n)}$ ein erwartungstreu für $\mu_m = \mu = \tau(\theta)$.

Vergleich Median/Arithmetisches Mittel Seien $\bar{X}_{(n)}$ und $\tilde{X}_{(n)}$ Schätzer, wobei $\bar{X}_{(n)}$ auf dem arithmetischen Mittel und $\tilde{X}_{(n)}$ auf dem empirischen Median basiert.

Für die beiden Schätzer gilt (asymptotisch):

$$\begin{aligned}\text{MSE}_\theta(\bar{X}_{(n)}) &= \frac{\sigma^2}{n} \\ \text{MSE}_\theta(\tilde{X}_{(n)}) &= \frac{\pi\sigma^2}{2n}\end{aligned}$$

Somit ist der empirische Median um den Faktor $\frac{2}{\pi} \approx 0.64$ weniger effizient als das arithmetische Mittel. Anders ausgedrückt: Der Median ist bei 100 Beobachtungen genauso verlässlich wie das arithmetische Mittel bei 64 Beobachtungen als Schätzer für den Erwartungswert

5.2 M-Schätzer

- Seien X_1, \dots, X_n unabhängige identisch symmetrisch verteilte Zufallsvariablen mit der Realisierung x_1, \dots, x_n .
- **Ziel:** Erstellung eines Schätzers für den Erwartungswert μ .
- Der *M-Schätzer* bildet ein allgemeines Prinzip zur Konstruktion für Schätzer des Erwartungswertes.
- Sei $\Phi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ eine monoton wachsende Straffunktion und betrachte

$$S(x) := \sum_{i=1}^n \Phi(|x - x_i|)$$

- Existiert ein eindeutiges Minimum $\mu_M(x_1, \dots, x_n)$, ist dies der zu Φ gehörige M-Schätzer.

Typische M-Schätzer Üblicherweise wird $\Phi(s) = s^p$ mit $p > 0$ gewählt. Dann liefert:

$p = 1$ den Median \tilde{x} . Er minimiert die Abstandssumme:

$$S(x) = \sum_{i=1}^n |x - x_i|$$

$p = 2$ das arithmetische Mittel. Es minimiert die quadratische Abstandssumme:

$$S(x) = \sum_{i=1}^n (x - x_i)^2$$

$p \rightarrow \infty$ die Midrange

$$\frac{\max\{x_1, \dots, x_n\} + \min\{x_1, \dots, x_n\}}{2}$$

Kleinere Werte für p liefern dabei robustere M-Schätzer, da Ausreißer weniger stark bestraft werden.
Eine weitere übliche Straffunktion ist z.B. die Lorentz-Strafffunktion

$$\Phi(s) = \ln\left(1 + \frac{s^2}{2}\right)$$

die robuster ist als die übliche quadratische Straffunktion.

6 Multivariate Verteilungen und Summen von Zufallsvariablen

Oftmals ist es nötig, Zufallsvariablen zu betrachten, die voneinander abhängig, also nicht unabhängig sind. Dazu wird hier die gemeinsame Verteilung des Zufallsvektors $X = (X_1, \dots, X_n)^T$ und die Summe der Zufallsvariablen betrachtet.

6.1 Grundlagen

Gemeinsame Verteilungsfunktion Seien X_1, \dots, X_n Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktionen F_1, \dots, F_n . Dann ist die *gemeinsame Verteilungsfunktion* (oder Verteilung des Zufallsvektors $XI(X_1, \dots, X_n)^T$) gegeben durch:

$$F(x_1, \dots, x_n) = P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n), \quad (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

Gemeinsame Dichte Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ heißt *gemeinsame Dichte* von X_1, \dots, X_n , wenn für alle $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$F(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_n} \dots \int_{-\infty}^{x_1} f(s_1, \dots, s_n) ds_1 \dots ds_n$$

Erwartungswertvektor Der Vektor $\mu = (E(X_1), \dots, E(X_n))^T$ heißt (sofern er existiert) *Erwartungswertvektor* von X .

Kovarianzmatrix Die *Kovarianzmatrix* ist (sofern sie existiert) eine Matrix $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ der folgenden Form:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \text{Var}(X_1) & \text{Cov}(X_1, X_2) & \dots & \text{Cov}(X_1, X_n) \\ \text{Cov}(X_2, X_1) & \text{Var}(X_2) & \dots & \text{Cov}(X_2, X_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{Cov}(X_n, X_1) & \text{Cov}(X_n, X_2) & \dots & \text{Var}(X_n) \end{pmatrix}$$

wobei die *Kovarianz* von zwei Zufallsvariablen gegeben ist durch

$$\text{Cov}(X_i, X_j) := E\left((X_i - E(X_i)) \cdot (X_j - E(X_j))\right)$$

sofern $\text{Var}(X_i)$ existiert, d.h. $< \infty$ ist ($i = 1, \dots, n$).

Es gilt weiterhin $\text{Var}(X_i) = \text{Cov}(X_i, X_i)$ und $\text{Cov}(X_i, X_j) = \text{Cov}(X_j, X_i)$.

Rechenregeln Seien X, Y, Z Zufallsvariablen und $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Dann gelten:

- $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$
- $\text{Var}(X - Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2 \text{Cov}(X, Y)$
- $\text{Cov}(aX + b, cY + d) = ac \text{Cov}(X, Y)$
- $\text{Cov}(X, Y + Z) = \text{Cov}(X, Y) + \text{Cov}(X, Z)$

Interpretationen

- Unabhängigkeit impliziert $\text{Cov}(X, Y) = 0$.
- Ist $\text{Cov}(X, Y) > 0$, so wird X erhöht, wenn Y erhöht wird und umgekehrt.
- Ist $\text{Cov}(X, Y) < 0$, so wird X verringert, wenn Y erhöht wird und umgekehrt.
- Der *Korrelationskoeffizient*

$$\varrho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)}\sqrt{\text{Var}(Y)}} \in [-1, 1]$$

ist skalierungsunabhängig.

- Der empirische Korrelationskoeffizient ist ein erwartungstreuer Schätzer für ϱ .

6.1.1 Multivariate Normalverteilung

- Dies ist die wichtigste multivariate Verteilung: $N_n(\mu, \Sigma)$
- Sei $X = (X_1, \dots, X_n)^T$ ein Vektor mit normalverteilten Zufallsvariablen mit Erwartungswert $\mu = (E(X_1), \dots, E(X_n))^T$ und Kovarianzmatrix Σ .
- Dann ist die multivariate Normalverteilungsdichte gegeben durch:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n \sqrt{\det \Sigma}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T \Sigma^{-1}(x-\mu)}, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

6.1.2 Unabhängigkeit

Seien X_1, \dots, X_n Zufallsvariablen mit Dichten $f_1(x_1), \dots, f_n(x_n)$. Die Zufallsvariable sind unabhängig gdw. für die gemeinsame Verteilungsfunktion f gilt:

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) \cdots f_n(x_n)$$

6.1.3 Korrelation

Seien X_1, \dots, X_n Zufallsvariablen mit $\text{Var}(X_i) < \infty$, $i = 1, \dots, n$. Die heißen *paarweise unkorreliert*, wenn gilt:

$$\text{Cov}(X_i, X_j) = 0 \quad \forall i \neq j$$

Unabhängigkeit impliziert Unkorreliertheit, da für unabhängige Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n die obige Bedingung immer gilt.

Sind die Zufallsvariablen gemeinsam normalverteilt, folgt aus der Unkorreliertheit sogar die Unabhängigkeit.

6.2 Verteilung der Summe von Zufallsvariablen

Seien X_1, \dots, X_n unabhängige Zufallsvariablen, die $N(\mu_i, \sigma_i^2)$ -verteilt sind. Dann ist $X = X_1 + \dots + X_n$ $N(\mu, \sigma^2)$ -verteilt mit

$$\mu = \mu_1 + \dots + \mu_n, \quad \sigma^2 = \sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2$$

6.2.1 Faltung

Falls für die Funktionen $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ das Integral

$$(f * g)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y) dy$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ existiert, dann heißt $f * g$ die *Faltung* von f und g .

Für $f = (f_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ und $g = (g_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ ist die *diskrete Faltung* von f und g gegeben durch:

$$(f * g)_i := \sum_{j \in \mathbb{Z}} f_{i-j} g_j$$

Sind X_1, X_2 unabhängige stetige Zufallsvariablen mit Dichten $f_1(x_1)$ und $f_2(x_2)$, dann hat $X_1 + X_2$ die Dichte $f_1 * f_2$.

6.2.2 Diskret verteilte Zufallsvariablen

Seien X_1, X_2 unabhängige diskrete \mathbb{Z} -wertige Zufallsvariablen und seien

$$f_{X_1} := (P(X_1 = i))_{i \in \mathbb{Z}}$$
$$f_{X_2} := (P(X_2 = i))_{i \in \mathbb{Z}}$$

Dann ist $f_{X_1+X_2} = (P(X_1 + X_2 = i))_{i \in \mathbb{Z}}$ gegeben durch

$$f_{X_1+X_2} = f_{X_1} * f_{X_2}$$

Binomialverteilten Zufallsvariablen

Seien X, Y jeweils $B(n, p)$ bzw. $B(m, p)$ verteilt. Dann ist $X + Y$ $B(n + m, p)$ -verteilt.

Poissonverteilte Zufallsvariablen

Seien X, Y jeweils Poisson-verteilt mit Parameter λ_1 bzw. λ_2 . Dann ist $X + Y$ Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda_1 + \lambda_2$.

Poisson Verteilung und bedingte Wahrscheinlichkeit

Seien X, Y jeweils Poisson-verteilt mit Parameter λ_1 bzw. λ_2 . Sei außerdem $Z = X + Y$. Dann ist Z ebenfalls Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda_1 + \lambda_2$.

Betrachte nun $X|Z$. Aufgrund der Unabhängigkeit folgt, dass $X|Z$ mit $P(X = x | Z = z)$ Binomialverteilt ist mit $B(z, \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2})$.

Geometrische Verteilung und bedingte Wahrscheinlichkeit

Sei X geometrisch verteilt mit Parameter p .

Betrachte nun $Y_k = X - k \mid X > k$, d.h. die Anzahl der Versuche, bis das Ereignis eintritt, unter der Voraussetzung, dass es in den vorherigen k Versuchen nicht eingetreten ist. Die Zufallsvariable Y_k ist dann wieder geometrisch verteilt mit Parameter p .