Universidad de Granada

Análisis Matemático I

Teoremas, proposiciones y definiciones

Doble Grado de Informática y Matemáticas

Curso 2016/17

1. Topología de un espacio métrico.

1.1. Concepto de espacio métrico. El espacio métrico $\mathbb{R}^N$.

Definición (Espacio métrico). Consideremos un conjunto X cualquiera, y una aplicación $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ que cumple las siguientes propiedades:

(i) $d(x,y) \geq 0 \ \ \forall x, y \in X$.

(ii) $d(x,y) = 0 \iff x = y \ \ \forall x, y \in X$.

(iii) $d(x,y) = d(y,x) \ \ \forall x, y \in X$.

(iv) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \ \ \forall x, y, z \in X$. (*desigualdad triangular*)

Entonces, se dice que el par (X, d) es un *espacio métrico.*

Nota. En adelante, entenderemos $\mathbb{R}^N$ como el espacio métrico $(\mathbb{R}^N, d)$, siendo d la distancia usual **(distancia euclídea)** dada por:

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} (y_i - x_i)^2} \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}^N.$$

Existen otras distancias en $\mathbb{R}^N$. Las más destacadas son las siguientes:

(i) $d_1(x,y) = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} |x_i - y_i| \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}^N$.

(ii) $d_\infty(x,y) = \textit{máx}\{|x_i - y_i| : \ i = 1, \ldots, N\} \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}^N$.

(iii) $d_p(x,y) = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{N} |x_i - y_i|^p\right)^{1/p} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^N$.

Definición. Sean (X, d) y (X, d') dos espacios métricos sobre un mismo conjunto X. Se dice que las distancias d y d' son *equivalentes* si, y solo si,

$$\exists k_1, k_2 > 0 : \ k_1 d(x,y) \leq d'(x,y) \leq k_2 d(x,y) \ \ \forall x, y \in X.$$

Proposición. *En $\mathbb{R}^N$, todas las distancias mencionadas anteriormente son equivalentes entre sí. En particular, la distancia euclídea es equivalente a todas ellas.*

1.2. Conceptos topológicos.

Definición (Bola abierta). Sea (X, d) un espacio métrico, y fijemos un $x \in X$ y un $\varepsilon > 0$. Se llama *bola abierta de centro x y radio* ε al conjunto $B(x, \varepsilon) = \{y \in X \mid d(x,y) < \varepsilon\}$.

Definición (Bola cerrada). De forma análoga, se define la *bola cerrada de centro x y radio* ε como el conjunto $\bar{B}(x, \varepsilon) = \{y \in X \mid d(x,y) \leq \varepsilon\}$.

Definición (Conjunto abierto). Sea (X,d) un espacio métrico, y sea $A \subseteq X$. Decimos que A *es abierto* $\iff \forall a \in A\ \exists \varepsilon > 0 : B(x,\varepsilon) \subseteq A$.

Proposición. *Sea (X,d) un espacio métrico. Entonces, $\forall x \in X\ \forall \varepsilon > 0$ se tiene que $B(x,\varepsilon)$ es un conjunto abierto.*

Proposición. *Sea (X,d) un espacio métrico. Entonces, se verifican las siguientes propiedades:*

(i) *Si $\{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ es una familia de subconjuntos abiertos de X, entonces $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ es abierto.*

(ii) *Si $\{A_1,\ldots,A_n\}$ es una familia finita de abiertos de X, entonces $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ es abierto.*

(iii) *$X, \emptyset$ son abiertos.*

Definición (Punto interior). Sea (X,d) un espacio métrico, y consideremos $A \subseteq X$, $a \in A$. Se dice que *a es un punto interior de A* si, y solo si, $\exists \varepsilon_0 > 0 : B(a,\varepsilon_0) \subseteq A$. Definimos $int(A) = \mathring{A} = \{a \in A \mid a \text{ es punto interior de } A\}$.

Proposición. *Sea (X,d) un espacio métrico, y $A \subseteq X$. Entonces, se verifican las siguientes propiedades:*

(i) *$\mathring{A} \subseteq A$.*

(ii) *$\mathring{A}$ es abierto.*

(iii) *Si $B \subseteq A$ es un subconjunto abierto de A, entonces $B \subseteq \mathring{A}$. Es decir, $\mathring{A}$ es el abierto más grande contenido en A.*

(iv) *$\mathring{A} = \bigcup\{B \subseteq A \mid B \text{ es abierto}\}$.*

(v) *A es abierto $\iff \mathring{A} = A$.*

(vi) *$int(int(A)) = int(A)$.*

(vii) *Si $A \subseteq B$, entonces $\mathring{A} \subseteq \mathring{B}$.*

Definición (Conjunto cerrado). Sea (X,d) un espacio métrico, y $F \subseteq X$. Se dice que el conjunto *F es cerrado* $\iff X - F$ *es abierto*.

Proposición. *Sea (X,d) un espacio métrico. Entonces, $\forall x \in X\ \forall \varepsilon > 0$ se tiene que $\bar{B}(x,\varepsilon)$ es un conjunto cerrado.*

Proposición. *Sea (X,d) un espacio métrico. Entonces, se verifican las siguientes propiedades:*

(i) *Si $\{F_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ es una familia de cerrados de X, entonces $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda$ es cerrado.*

(ii) *Si $\{F_1,\ldots,F_n\}$ es una familia finita de cerrados de X, entonces $\bigcup_{i=1}^{n} F_i$ es cerrado.*

(iii) *$X, \emptyset$ son cerrados.*

Definición (Clausura). Sea (X,d) un espacio métrico. Se llama *clausura o cierre de A* al conjunto $\bar{A} = X - int(X-A)$.

Proposición. *Sea (X,d) un espacio métrico, y $A \subseteq X$. Entonces, se verifican las siguientes propiedades:*

(i) $A \subseteq \bar{A}$.

(ii) *$\bar{A}$ es cerrado.*

(iii) *Si $B \subseteq X$ es un subconjunto cerrado de X tal que $A \subseteq B$, entonces $\bar{A} \subseteq B$. Es decir, $\bar{A}$ es el cerrado más pequeño que contiene a A.*

(iv) $\bar{A} = \bigcap\{F \subseteq X \mid F \text{ es cerrado y } A \subseteq F\}$.

(v) *A es cerrado $\iff$ $\bar{A} = A$.*

(vi) $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$.

(vii) *Si $A \subseteq B$, entonces $\bar{A} \subseteq \bar{B}$.*

Definición (Frontera). Sea (X,d) un espacio métrico, y $A \subseteq X$. Llamamos *frontera de A* al conjunto $\partial A = \bar{A} - \mathring{A}$.

Proposición. *Sea (X,d) un espacio métrico, y $A \subseteq X$. Entonces, se verifica lo siguiente: $x \in \partial A \iff \forall \varepsilon > 0\ B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ y $B(x,\varepsilon) \cap (X-A) \neq \emptyset$.*

Definición (Punto de acumulación). Sea (X,d) un espacio métrico, y $A \subseteq X$. Dado $x \in X$, decimos que *x es punto de acumulación de A* $\iff \forall \varepsilon > 0\ B(x,\varepsilon) \cap (A - \{x\}) \neq \emptyset$. Definimos $A' = \{x \in X \mid x \text{ es punto de acumulación de } A\}$.

Proposición. *Sea (X,d) un espacio métrico. Entonces, se verifican las siguientes afirmaciones:*

(i) $\mathring{A} = X - \overline{X-A}$

(ii) $\bar{A} = A \cup \partial A$.

(iii) $\bar{A} = A \cup A'$

(iv) $\partial A \subseteq A'$

(v) *$X = int(A) \cup \partial A \cup int(X-A)$. Además, la unión es disjunta dos a dos.*

2. Sucesiones en $\mathbb{R}^N$.

Definición (Sucesión en $\mathbb{R}^N$). Una sucesión en $\mathbb{R}^N$ es una aplicación $x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^N$ que a cada $n \in \mathbb{N}$ le hace corresponder un $x(n) \in \mathbb{R}^N$. Por simplicidad, al elemento imagen de n se le denomina x_n, y la aplicación x se denota $\{x_n\}$.

Definición (Convergencia de sucesiones). Sea (X, d) un espacio métrico, $A \subseteq X$ y $x \in X$. Decimos que una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de A converge a x si, y solo si:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_o \in \mathbb{N} : \;\; n \geq n_o \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon.$$

Nota. Este concepto no depende de la distancia equivalente elegida.

Proposición. *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^N$, $x \in \mathbb{R}^N$, y $\{x_n\}$ una sucesión de puntos de A. Adoptemos la notación $x_n = (x_n^1, x_n^2, \ldots, x_n^N)$, y $x = (x^1, x^2, \ldots, x^N)$. Entonces, se verifica que:*

$$\{x_n\} \to x \iff \{x_n^j\} \to x^j.$$

Definición. Sea (X, d) un espacio métrico, y $x \in X$. Consideremos, para cada $n \in \mathbb{N}$, un punto $a_n \in X$. Entonces, decimos que $d(a_n, x) \to 0 \iff \{a_n\} \to x$.

Definición (Conjunto acotado). Sea $A \subseteq \mathbb{R}^N$. Decimos que A *está acotado* si, y solo si, $\exists R > 0 : A \subseteq B(0, R)$.

Definición (Sucesión acotada). Sea $\{x_n\}$ una sucesión de puntos de R^N. Entonces, decimos que $\{x_n\}$ *está acotada* sí, y solo sí, $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ está acotado.

Proposición. *Si una sucesión $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}^N$ es acotada, entonces $\forall i = 1, \ldots, n$ la sucesión $\{x_n^i\}$ es acotada (en $\mathbb{R}$).*

Nota. Si un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^N$ es acotado, entonces cualquier sucesión de puntos de A es acotada.

Teorema (Bolzano-Weierstrass). *Sea $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}^N$ acotada. Entonces, existe una subsucesión $\{x_{\sigma_n}\}$ convergente.*

Definición (Sucesión de Cauchy). Sea $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}^N$. Decimos que $\{x_n\}$ es una *sucesión de Cauchy* $\iff \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_o \in \mathbb{N} : \;\; n, m \geq n_o \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Teorema ($\mathbb{R}^N$ es completo). *Sea $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}^N$. Entonces:*

$$\{x_n\} \textit{ es de Cacuchy } \iff \{x_n\} \textit{ es convergente.}$$

Proposición. *Sea $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}^N$ con $\{x_n\} \to x \in \mathbb{R}^N$. Entonces, toda sucesión parcial de $\{x_n\}$ es convergente a x.*

3. Funciones continuas en $\mathbb{R}^N$.

Definición (Función continua). Sea $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^N$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^M$ y $a \in A$. Decimos que *f es continua en a* si, y solo si:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 : \ x \in A, \ d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Además, se dice que f es continua si lo es en todos sus puntos.

Proposición (Caracterización de continuidad). *Sea $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^N$, y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^M$. Entonces:*

$$f \text{ es continua en } a \iff \forall\{x_n\} \subseteq A \text{ con } \{x_n\} \to a \Rightarrow \{f(x_n)\} \to f(a).$$

Definición (Continuidad uniforme). Sea $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^N$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^M$. Se dice que f es uniformemente continua si, y solo si:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 : \ x, y \in A, \ d(x, y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Definición (Conjunto compacto). Sea (X, d) un espacio métrico, y sea $\emptyset \neq A \subseteq X$.

$$A \text{ es compacto} \iff \forall\{x_n\} \subseteq A \ \ \exists\{x_{\sigma(n)}\} \to x \in A.$$

Proposición (Caracterización de cerrados). *Sea (X, d) un espacio métrico, y $A \subseteq X$. Entonces, son equivalentes:*

(i) *A es cerrado.*

(ii) *$\forall\{x_n\} \subseteq A$ convergente a un $x \in X$, se verifica que $x \in A$.*

Proposición (Caracterización de compactos). *Sea (X, d) un espacio métrico, y $A \subseteq X$. Entonces:*

$$A \text{ es compacto} \iff A \text{ es cerrado y acotado.}$$

Proposición. *Sea $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}^N$ convergente a un $x_o \in \mathbb{R}^N$. Entonces, el conjunto $A = \{x_n : \ n = 0, 1, 2, \dots\}$ es compacto.*

3.1. Clasificación de conjuntos en $\mathbb{R}^N$

Definición (Conjunto convexo). Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^N$ se dice *convexo* si $\forall x, y \in A$ se tiene que el segmento de extremos x e y está incluido en A. En otras palabras:

$$A \text{ convexo} \iff [x, y] = \{tx + (1 - t)y : \ t \in [0, 1]\} \subseteq A.$$

Definición (Poligonalmente convexo). Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^N$ se dice *poligonalmente convexo* si $\forall x, y \in A$ existe una poligonal que los une y no se sale de A. En otras palabras: *A poligonalmente convexo* $\iff \exists\{x = a_0, a_1, \dots, a_k = y\} \subseteq A$ tal que:

$$\bigcup_{i=1}^{k} [a_{i-1}, a_i] \subseteq A.$$

Definición (Conjunto arco-conexo). Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^N$ se dice *arco-conexo(conexo por arcos)* si $\forall x, y \in A$ existe un camino incluido en A que los une. En otras palabras, *A es conexo por arcos* $\iff \exists \varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^N$ verificando:

$$\varphi(a) = x; \quad \varphi(b) = y; \quad \varphi([a, b]) \subseteq A.$$

Definición (Conjunto no conexo). Decimos que un conjunto $A \in \mathbb{R}^N$ es *NO conexo* si existen $U,\ V$ abiertos en $\mathbb{R}^N$ tales que:

$$U \cap A \neq \emptyset; \quad V \cap A \neq \emptyset; \quad A \subseteq U \cup V; \quad A \cap U \cap V = \emptyset.$$

Nota. La misma definición se aplica para un espacio topológico (X, τ).

Definición (Conjunto conexo). Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^N$ se dice conexo si no es no conexo. Equivalentemente, $\forall\ U, V$ abiertos en $\mathbb{R}^N$ tales que $U \cap A \neq \emptyset,\ V \cap A \neq \emptyset,\ A \subseteq U \cup V$, se tiene que forzosamente $A \cap U \cap V \neq \emptyset$.

Proposición. *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^N$. Entonces, se verifica lo siguiente:*

(i) *A es abierto y conexo por arcos ⇒ A es poligonalmente convexo.*

(ii) *A es convexo ⇒ A es arco-conexo.*

(iii) *A es arco-conexo ⇒ A es conexo.*

Proposición. *Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto arco-conexo. Entonces, A es convexo.*

3.2. Continuidad en espacios topológicos. Topología inducida.

Definición (Continuidad en espacios topológicos). Sean $(X, \tau_x),\ (Y, \tau_y)$ dos espacios topológicos, y sea $f : X \longrightarrow Y$. Entonces:

$$f \text{ es continua} \iff f^{-1}(B) \in \tau_x \ \ \forall B \in \tau_y.$$

Definición (Topología inducida). Sea (X, τ) un espacio topológico, y $A \subseteq X$. Entonces, $\tau_A = \{B \cap A :\ B \in \tau\}$ es la *topología inducida en A*.

Proposición (Caracterización de abiertos en topología inducida). *Sea (X, τ) un espacio topológico, y $A \subseteq X$. Si (A, τ_A) es el espacio topológico inducido en A, entonces:*

$$B' \in \tau_A \iff \exists B \in \tau :\ B' = B \cap A.$$

Proposición. *Sea (X, τ) un espacio topológico, y $A \subseteq X$. Entonces, A es no conexo si, y solo si, existen U, V* ***abiertos en*** $\boldsymbol{(A, \tau_A)}$ *tales que:*

$$U \neq \emptyset \neq V; \quad A \subseteq U \cup V; \quad U \cap V = \emptyset.$$

Definición (Continuidad en topología inducida). Sean $(X, \tau_x),\ (Y, \tau_y)$ dos espacios topológicos, $A \subseteq X$, y $f : A \longrightarrow Y$. Entonces:

$$f \text{ es continua} \iff f \text{ es continua en } (A, \tau_A).$$

3.3. Teoremas sobre funciones continuas en $\mathbb{R}^N$

Teorema (Weierstrass). *Sea (X, d) un espacio métrico, $\emptyset \neq A \subseteq X$ compacto, y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en A. Entonces, $\exists x_1, x_2 \in A : \ f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \ \ \forall x \in A$. En otras palabras, la función f alcanza su mínimo y su máximo.*

Teorema (Weierstrass generalizado). *Sean (X, d), (Y, d) espacios métricos, $\emptyset \neq A \subseteq X$ compacto, y $f : A \longrightarrow Y$ continua. Entonces, $f(A)$ es compacto.*

Teorema (Valor Intermedio). *Sea $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^N$ arco conexo, y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^M$ continua. Entonces, $f(A)$ es arco-conexo en $\mathbb{R}^M$.*

Teorema (Valor Intermedio revisitado). *Sea $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^N$ conexo, y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^M$ continua. Entonces, $f(A)$ es conexo en $\mathbb{R}^M$.*