

UNIVERSIDAD DE GRANADA

---

# Análisis Matemático I

---

Doble Grado de Informática y Matemáticas

Curso 2016/17

## Índice

## Introducción.

El objetivo de este curso es el estudio de las funciones de varias variables, es decir, de funciones  $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^M$ . Para ello, empezaremos caracterizando el espacio  $\mathbb{R}^N$ , y proseguiremos intentando traspasar los resultados principales sobre funciones reales de variable real a nuestro campo de estudio, así como enunciando otros nuevos.

Es por esto que es fundamental haber cursado con aprovechamiento las asignaturas de *Cálculo I y II*, que tratan exclusivamente sobre funciones reales de variable real.

Aunque nos centraremos en funciones en el espacio  $\mathbb{R}^N$ , muchos de los resultados que obtendremos son igual de válidos en un espacio métrico en general, e incluso en espacios topológicos.

## 1. Topología de un espacio métrico.

### 1.1. Concepto de espacio métrico. El espacio métrico $\mathbb{R}^N$ .

**Definición (Espacio métrico).** Consideremos un conjunto  $X$  cualquiera, y una aplicación  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  que cumple las siguientes propiedades:

- (i)  $d(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y \in X$ .
- (ii)  $d(x, y) = 0 \iff x = y \quad \forall x, y \in X$ .
- (iii)  $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in X$ .
- (iv)  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad \forall x, y, z \in X$ . (*desigualdad triangular*)

Entonces, se dice que el par  $(X, d)$  es un *espacio métrico*.

*Nota.* En adelante, entenderemos  $\mathbb{R}^N$  como el espacio métrico  $(\mathbb{R}^N, d)$ , siendo  $d$  la distancia usual (**distancia euclídea**) dada por:

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^N (y_i - x_i)^2} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^N.$$

Existen otras distancias en  $\mathbb{R}^N$ . Las más destacadas son las siguientes:

- (i)  $d_1(x, y) = \sum_{i=1}^N |x_i - y_i| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^N$ .
- (ii)  $d_\infty(x, y) = \max\{|x_i - y_i| : i = 1, \dots, N\} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^N$ .
- (iii)  $d_p(x, y) = \left( \sum_{i=1}^N |x_i - y_i|^p \right)^{1/p} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^N$ .

**Definición.** Sean  $(X, d)$  y  $(X, d')$  dos espacios métricos sobre un mismo conjunto  $X$ . Se dice que las distancias  $d$  y  $d'$  son *equivalentes* si, y solo si,

$$\exists k_1, k_2 > 0 : k_1 d(x, y) \leq d'(x, y) \leq k_2 d(x, y) \quad \forall x, y \in X.$$

**Proposición.** En  $\mathbb{R}^N$ , todas las distancias mencionadas anteriormente son equivalentes entre sí. En particular, la distancia euclídea es equivalente a todas ellas.

### 1.2. Conceptos topológicos.

**Definición (Bola abierta).** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico, y fijemos un  $x \in X$  y un  $\varepsilon > 0$ . Se llama *bola abierta de centro  $x$  y radio  $\varepsilon$*  al conjunto  $B(x, \varepsilon) = \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}$ .

**Definición (Bola cerrada).** De forma análoga, se define la *bola cerrada de centro  $x$  y radio  $\varepsilon$*  como el conjunto  $\bar{B}(x, \varepsilon) = \{y \in X \mid d(x, y) \leq \varepsilon\}$ .

**Definición (Conjunto abierto).** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico, y sea  $A \subseteq X$ . Decimos que  $A$  es abierto  $\iff \forall a \in A \exists \varepsilon > 0 : B(a, \varepsilon) \subseteq A$ .

**Proposición.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico. Entonces,  $\forall x \in X \forall \varepsilon > 0$  se tiene que  $B(x, \varepsilon)$  es un conjunto abierto.

*Demostración.* Sea  $x \in B(x_0, \varepsilon_0)$  arbitrario. Para demostrar que  $B(x_0, \varepsilon_0)$  es un abierto, tenemos que encontrar un  $\varepsilon > 0$  tal que  $B(x, \varepsilon) \subseteq B(x_0, \varepsilon_0)$ , y por lo tanto comprobar que se verifica que  $\forall y \in B(x, \varepsilon) \Rightarrow y \in B(x_0, \varepsilon_0)$ .

Sea  $y \in B(x, \varepsilon)$  cualquiera. Consideremos  $r = d(x, x_0)$ , y tomemos  $\varepsilon = \varepsilon_0 - r$ . Queremos demostrar que  $y \in B(x_0, \varepsilon_0)$ . Para ello, veamos que  $d(x_0, y) < \varepsilon_0$ . En efecto, por la desigualdad triangular se cumple que:

$$d(x_0, y) \leq d(x_0, x) + d(x, y) < r + \varepsilon = r + \varepsilon_0 - r = \varepsilon_0$$

Luego queda demostrado que  $y \in B(x_0, \varepsilon_0)$ , y por tanto podemos afirmar que para todo punto  $x \in B(x_0, \varepsilon_0)$  se puede encontrar una bola abierta centrada en él, tal que todos sus puntos están en el conjunto de origen.  $\square$

**Proposición.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico. Entonces, se verifican las siguientes propiedades:

- (i) Si  $\{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$  es una familia de subconjuntos abiertos de  $X$ , entonces  $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$  es abierto.
- (ii) Si  $\{A_1, \dots, A_n\}$  es una familia finita de abiertos de  $X$ , entonces  $\bigcap_{i=1}^n A_i$  es abierto.
- (iii)  $X, \emptyset$  son abiertos.

**Definición (Punto interior).** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico, y consideremos  $A \subseteq X$ ,  $a \in A$ . Se dice que  $a$  es un punto interior de  $A$  si, y solo si,  $\exists \varepsilon_0 > 0 : B(a, \varepsilon_0) \subseteq A$ . Definimos  $\text{int}(A) = \mathring{A} = \{a \in A \mid a \text{ es punto interior de } A\}$ .

**Proposición.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico, y  $A \subseteq X$ . Entonces, se verifican las siguientes propiedades:

- (i)  $\mathring{A} \subseteq A$ .
- (ii)  $\mathring{A}$  es abierto.
- (iii) Si  $B \subseteq A$  es un subconjunto abierto de  $A$ , entonces  $B \subseteq \mathring{A}$ . Es decir,  $\mathring{A}$  es el abierto más grande contenido en  $A$ .
- (iv)  $\mathring{A} = \bigcup \{B \subseteq A \mid B \text{ es abierto}\}$ .
- (v)  $A$  es abierto  $\iff \mathring{A} = A$ .
- (vi)  $\text{int}(\text{int}(A)) = \text{int}(A)$ .
- (vii) Si  $A \subseteq B$ , entonces  $\mathring{A} \subseteq \mathring{B}$ .

**Definición (Conjunto cerrado).** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico, y  $F \subseteq X$ . Se dice que el conjunto  $F$  es cerrado  $\iff X - F$  es abierto.

**Proposición.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico. Entonces,  $\forall x \in X \ \forall \varepsilon > 0$  se tiene que  $\bar{B}(x, \varepsilon)$  es un conjunto cerrado.

**Proposición.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico. Entonces, se verifican las siguientes propiedades:

- (i) Si  $\{F_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$  es una familia de cerrados de  $X$ , entonces  $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$  es cerrado.
- (ii) Si  $\{F_1, \dots, F_n\}$  es una familia finita de cerrados de  $X$ , entonces  $\bigcup_{i=1}^n F_i$  es cerrado.
- (iii)  $X, \emptyset$  son cerrados.

**Definición (Clausura).** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico. Se llama *clausura o cierre* de  $A$  al conjunto  $\bar{A} = X - \text{int}(X - A)$ .

**Proposición.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico, y  $A \subseteq X$ . Entonces, se verifican las siguientes propiedades:

- (i)  $A \subseteq \bar{A}$ .
- (ii)  $\bar{A}$  es cerrado.
- (iii) Si  $B \subseteq X$  es un subconjunto cerrado de  $X$  tal que  $A \subseteq B$ , entonces  $\bar{A} \subseteq B$ . Es decir,  $\bar{A}$  es el cerrado más pequeño que contiene a  $A$ .
- (iv)  $\bar{A} = \bigcap \{F \subseteq X \mid F \text{ es cerrado y } A \subseteq F\}$ .
- (v)  $A$  es cerrado  $\iff \bar{A} = A$ .
- (vi)  $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$ .
- (vii) Si  $A \subseteq B$ , entonces  $\bar{A} \subseteq \bar{B}$ .

**Definición (Frontera).** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico, y  $A \subseteq X$ . Llamamos *frontera* de  $A$  al conjunto  $\partial A = \bar{A} - \overset{\circ}{A}$ .

**Proposición.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico, y  $A \subseteq X$ . Entonces, se verifica lo siguiente:  $x \in \partial A \iff \forall \varepsilon > 0 \ B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$  y  $B(x, \varepsilon) \cap (X - A) \neq \emptyset$ .

**Definición (Punto de acumulación).** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico, y  $A \subseteq X$ . Dado  $x \in X$ , decimos que  $x$  es *punto de acumulación* de  $A \iff \forall \varepsilon > 0 \ B(x, \varepsilon) \cap (A - \{x\}) \neq \emptyset$ . Definimos  $A' = \{x \in X \mid x \text{ es punto de acumulación de } A\}$ .

**Proposición.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico. Entonces, se verifican las siguientes afirmaciones:

- (i)  $\overset{\circ}{A} = X - \overline{X - A}$
- (ii)  $\bar{A} = A \cup \partial A$ .

(iii)  $\bar{A} = A \cup A'$

(iv)  $\partial A \subseteq A'$

(v)  $X = \text{int}(A) \cup \partial A \cup \text{int}(X - A)$ . Además, la unión es disjunta dos a dos.

## 2. Sucesiones en $\mathbb{R}^N$ .

**Definición (Sucesión en  $\mathbb{R}^N$ ).** Una sucesión en  $\mathbb{R}^N$  es una aplicación  $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^N$  que a cada  $n \in \mathbb{N}$  le hace corresponder un  $x(n) \in \mathbb{R}^N$ . Por simplicidad, al elemento imagen de  $n$  se le denomina  $x_n$ , y la aplicación  $x$  se denota  $\{x_n\}$ .

**Definición (Convergencia de sucesiones).** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico,  $A \subseteq X$  y  $x \in X$ . Decimos que una sucesión  $\{x_n\}$  de puntos de  $A$  converge a  $x$  si, y solo si:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_o \in \mathbb{N} : n \geq n_o \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon.$$

*Nota.* Este concepto no depende de la distancia equivalente elegida.

**Proposición.** Sea  $A \subseteq \mathbb{R}^N$ ,  $x \in \mathbb{R}^N$ , y  $\{x_n\}$  una sucesión de puntos de  $A$ . Adoptemos la notación  $x_n = (x_n^1, x_n^2, \dots, x_n^N)$ , y  $x = (x^1, x^2, \dots, x^N)$ . Entonces, se verifica que:

$$\{x_n\} \rightarrow x \iff \{x_n^j\} \rightarrow x^j.$$

**Definición.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico, y  $x \in X$ . Consideremos, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , un punto  $a_n \in X$ . Entonces, decimos que  $d(a_n, x) \rightarrow 0 \iff \{a_n\} \rightarrow x$ .

**Definición (Conjunto acotado).** Sea  $A \subseteq \mathbb{R}^N$ . Decimos que  $A$  está acotado si, y solo si,  $\exists R > 0 : A \subseteq B(0, R)$ .

**Definición (Sucesión acotada).** Sea  $\{x_n\}$  una sucesión de puntos de  $\mathbb{R}^N$ . Entonces, decimos que  $\{x_n\}$  está acotada si, y solo si,  $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  está acotado.

**Proposición.** Si una sucesión  $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}^N$  es acotada, entonces  $\forall i = 1, \dots, N$  la sucesión  $\{x_n^i\}$  es acotada (en  $\mathbb{R}$ ).

*Nota.* Si un conjunto  $A \subseteq \mathbb{R}^N$  es acotado, entonces cualquier sucesión de puntos de  $A$  es acotada.

**Teorema (Bolzano-Weierstrass).** Sea  $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}^N$  acotada. Entonces, existe una sub-sucesión  $\{x_{\sigma_n}\}$  convergente.

**Definición (Sucesión de Cauchy).** Sea  $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}^N$ . Decimos que  $\{x_n\}$  es una sucesión de Cauchy  $\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_o \in \mathbb{N} : n, m \geq n_o \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon$ .

**Teorema ( $\mathbb{R}^N$  es completo).** Sea  $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}^N$ . Entonces:

$$\{x_n\} \text{ es de Cauchy} \iff \{x_n\} \text{ es convergente.}$$

**Proposición.** Sea  $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}^N$  con  $\{x_n\} \rightarrow x \in \mathbb{R}^N$ . Entonces, toda sucesión parcial de  $\{x_n\}$  es convergente a  $x$ .



### 3. Funciones continuas en $\mathbb{R}^N$ .

**Definición (Función continua).** Sea  $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^N$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^M$  y  $a \in A$ . Decimos que  $f$  es continua en  $a$  si, y solo si:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : x \in A, d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Además, se dice que  $f$  es continua si lo es en todos sus puntos.

**Proposición (Caracterización de continuidad).** Sea  $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^N$ , y  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^M$ . Entonces:

$$f \text{ es continua en } a \iff \forall \{x_n\} \subseteq A \text{ con } \{x_n\} \rightarrow a \Rightarrow \{f(x_n)\} \rightarrow f(a).$$

**Definición (Continuidad uniforme).** Sea  $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^N$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^M$ . Se dice que  $f$  es uniformemente continua si, y solo si:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : x, y \in A, d(x, y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

**Definición (Conjunto compacto).** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico, y sea  $\emptyset \neq A \subseteq X$ .

$$A \text{ es compacto} \iff \forall \{x_n\} \subseteq A \quad \exists \{x_{\sigma(n)}\} \rightarrow x \in A.$$

**Proposición (Caracterización de cerrados).** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico, y  $A \subseteq X$ . Entonces, son equivalentes:

- (i)  $A$  es cerrado.
- (ii)  $\forall \{x_n\} \subseteq A$  convergente a un  $x \in X$ , se verifica que  $x \in A$ .

*Demostración.* Veamos las dos implicaciones:

$\Rightarrow$  Supongamos  $A \subseteq X$  un conjunto cerrado. Entonces,  $X - A$  es abierto. Sea  $\{x_n\}$  una sucesión de puntos de  $A$  que converge a un  $x \in X$ . Para comprobar que, de hecho,  $x \in A$ , argumentamos por reducción al absurdo:

Supongamos  $x \notin A$ . Entonces,  $x \in X - A$ , y por ser este último conjunto abierto, encontramos un  $\varepsilon > 0$  tal que  $B(x, \varepsilon) \subseteq (X - A)$ . Pero por ser  $x$  el límite de la sucesión  $\{x_n\}$ , se tiene que  $\exists n_0 \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon$ . Es decir, a partir de cierto índice en adelante,  $x_n \in B(x, \varepsilon)$  con  $x_n \in A \forall n \in \mathbb{N}$ . Esto se contradice con el hecho de que  $B(x, \varepsilon) \subseteq (X - A)$ , pues encontramos en dicha bola puntos  $x_n$  que no pertenecen a  $X - A$ .

Por tanto, concluimos que  $x \in A$ .

$\Leftarrow$  Sea  $A \subseteq X$ , y supongamos que se verifica que  $\forall \{x_n\} \subseteq A$  tal que  $\{x_n\} \rightarrow x \in X$ , se tiene que  $x \in A$ . Para ver que  $A$  es cerrado, utilizaremos la siguiente caracterización de conjuntos cerrados:

$$A \text{ es cerrado} \iff \bar{A} = A$$

Si recordamos, se define la frontera de  $A$  como  $\partial A = \bar{A} - \overset{\circ}{A}$ . Por tanto, la equivalencia anterior quedaría así:  $A \text{ es cerrado} \iff \partial A \cup \overset{\circ}{A} = A$ . Para comprobar esta última igualdad, veamos las dos inclusiones:

$\subseteq$  Sabemos por la definición del conjunto de puntos interiores de  $A$ , que  $\overset{\circ}{A} \subseteq A$ .

Comprobemos entonces que  $\partial A \subseteq A$ :

Sea  $x \in \partial A$  cualquiera. Por una caracterización de la frontera de  $A$ , sabemos que  $\forall \varepsilon > 0 \ B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ . Si tomamos  $\varepsilon = \frac{1}{n} > 0$  con  $n \in \mathbb{N}$ , tenemos que  $B(x, \frac{1}{n}) \cap A \neq \emptyset$ , es decir,  $\exists a_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap A$  tal que  $d(x, a_n) < \varepsilon = \frac{1}{n}$ . Podemos construir entonces, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , la sucesión  $\{a_n\}$ .

Así, se tiene que  $0 < d(x, a_n) < \frac{1}{n} \ \forall n \in \mathbb{N}$ , de donde concluimos que  $d(x, a_n) \rightarrow 0$ . Por definición, esto significa que  $\{a_n\} \rightarrow x$ , lo que por hipótesis implica, al ser  $\{a_n\}$  una sucesión convergente de puntos de  $A$ , que  $x \in A$ . Por tanto, se verifica que  $\partial A \subseteq A$ .

$\supseteq$  Esta inclusión es trivial, pues sabemos que  $A \subseteq \bar{A}$ , y por tanto  $A \subseteq \partial A \cup \overset{\circ}{A} = \bar{A}$ .

De esta forma, queda probada la equivalencia.  $\square$

**Proposición (Caracterización de compactos).** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico, y  $A \subseteq X$ . Entonces:

$$A \text{ es compacto} \iff A \text{ es cerrado y acotado.}$$

**Proposición.** Sea  $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}^N$  convergente a un  $x_o \in \mathbb{R}^N$ . Entonces, el conjunto  $A = \{x_n : n = 0, 1, 2, \dots\}$  es compacto.

### 3.1. Clasificación de conjuntos en $\mathbb{R}^N$

**Definición (Conjunto convexo).** Un conjunto  $A \subseteq \mathbb{R}^N$  se dice *convexo* si  $\forall x, y \in A$  se tiene que el segmento de extremos  $x$  y  $y$  está incluido en  $A$ . En otras palabras:

$$A \text{ convexo} \iff [x, y] = \{tx + (1-t)y : t \in [0, 1]\} \subseteq A.$$

**Definición (Poligonalmente convexo).** Un conjunto  $A \subseteq \mathbb{R}^N$  se dice *poligonalmente convexo* si  $\forall x, y \in A$  existe una poligonal que los une y no se sale de  $A$ . En otras palabras:  $A$  poligonalmente convexo  $\iff \exists \{x = a_0, a_1, \dots, a_k = y\} \subseteq A$  tal que:

$$\bigcup_{i=1}^k [a_{i-1}, a_i] \subseteq A.$$

**Definición (Conjunto arco-conexo).** Un conjunto  $A \subseteq \mathbb{R}^N$  se dice *arco-conexo* (conexo por arcos) si  $\forall x, y \in A$  existe un camino incluido en  $A$  que los une. En otras palabras,  $A$  es conexo por arcos  $\iff \exists \varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$  verificando:

$$\varphi(a) = x; \quad \varphi(b) = y; \quad \varphi([a, b]) \subseteq A.$$

**Definición (Conjunto no conexo).** Decimos que un conjunto  $A \in \mathbb{R}^N$  es *NO conexo* si existen  $U, V$  abiertos en  $\mathbb{R}^N$  tales que:

$$U \cap A \neq \emptyset; \quad V \cap A \neq \emptyset; \quad A \subseteq U \cup V; \quad A \cap U \cap V = \emptyset.$$

*Nota.* La misma definición se aplica para un espacio topológico  $(X, \tau)$ .

**Definición (Conjunto conexo).** Un conjunto  $A \subseteq \mathbb{R}^N$  se dice conexo si no es no conexo. Equivalentemente,  $\forall U, V$  abiertos en  $\mathbb{R}^N$  tales que  $U \cap A \neq \emptyset$ ,  $V \cap A \neq \emptyset$ ,  $A \subseteq U \cup V$ , se tiene que forzosamente  $A \cap U \cap V \neq \emptyset$ .

**Proposición.** Sea  $A \subseteq \mathbb{R}$  un conjunto arco-conexo. Entonces,  $A$  es convexo.

*Demostración.* Sean  $x, y \in A$ , y supongamos sin pérdida de generalidad que  $x \leq y$ . Sabemos que por ser  $A$  arco-conexo,  $\exists \varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  función continua verificando:

$$\varphi(a) = x; \quad \varphi(b) = y; \quad \varphi([a, b]) \subseteq A.$$

Como  $\varphi$  es una función continua definida en un intervalo cerrado y acotado, aplicamos el **teorema del valor intermedio** en  $\mathbb{R}$ , y obtenemos que  $\varphi([a, b])$  es un intervalo. Por ser un intervalo, verificará que  $\forall \alpha, \beta \in \varphi([a, b])$  con  $\alpha \leq \beta$ ,  $[\alpha, \beta] \subseteq \varphi([a, b])$ .

Por tanto, como  $\varphi(a), \varphi(b) \in \varphi([a, b])$ , concluimos que:

$$[\varphi(a), \varphi(b)] = [x, y] \subseteq \varphi([a, b]) \subseteq A.$$

Así, hemos demostrado que  $\forall x, y \in A$   $[x, y] \subseteq A$ , y por tanto,  $A$  es convexo.  $\square$

**Proposición.** Sea  $A \subseteq \mathbb{R}^N$  convexo. Entonces,  $A$  es arco-conexo.

*Demostración.*

Fijemos  $x, y \in A$  arbitrarios, y construyamos la aplicación  $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^N$  dada por:

$$\varphi(t) = (1 - t)x + ty \quad \forall t \in [0, 1]$$

Una primera observación es que  $\varphi([0, 1]) = \{(1 - t)x + ty : t \in [0, 1]\} = [x, y] \subseteq A$  por ser  $A$  convexo. También se desprende de la definición de  $\varphi$  que  $\varphi(0) = x$  y  $\varphi(1) = y$ .

Para comprobar que  $\varphi$  es continua, utilicemos la caracterización de la continuidad por sucesiones:

Sea  $\{x_n\} \subseteq [0, 1]$  con  $\{x_n\} \rightarrow a \in [0, 1]$ . Entonces,  $\{\varphi(x_n)\} = \{(1 - x_n)x + x_n y\}$ .

Apliquemos ahora propiedades de las sucesiones convergentes, y obtenemos que:

$$\{\varphi(x_n)\} \rightarrow (1 - a)x + ay = \varphi(a).$$

Entonces,  $\forall \{x_n\} \subseteq [0, 1]$  con  $\{x_n\} \rightarrow a \Rightarrow \{\varphi(x_n)\} \rightarrow \varphi(a)$ , por lo que  $\varphi$  es continua.

Así, queda probado que  $A$  es conexo por arcos.  $\square$

**Proposición.** Sea  $A \in \mathbb{R}^N$  arco-conexo. Entonces,  $A$  es conexo.

**Proposición.** Sea  $A \subseteq \mathbb{R}^N$  abierto y conexo por arcos. Entonces,  $A$  es poligonalmente convexo.

### 3.2. Continuidad en espacios topológicos. Topología inducida.

**Definición (Continuidad en espacios topológicos).** Sean  $(X, \tau_x)$ ,  $(Y, \tau_y)$  dos espacios topológicos, y sea  $f : X \rightarrow Y$ . Entonces:

$$f \text{ es continua} \iff f^{-1}(B) \in \tau_x \quad \forall B \in \tau_y.$$

**Definición (Topología inducida).** Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico, y  $A \subseteq X$ . Entonces,  $\tau_A = \{B \cap A : B \in \tau\}$  es la *topología inducida en A*.

**Proposición (Caracterización de abiertos en topología inducida).** Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico, y  $A \subseteq X$ . Si  $(A, \tau_A)$  es el espacio topológico inducido en  $A$ , entonces:

$$B' \in \tau_A \iff \exists B \in \tau : B' = B \cap A.$$

**Proposición.** Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico, y  $A \subseteq X$ . Entonces,  $A$  es no conexo si, y solo si, existen  $U, V$  **abiertos en  $(A, \tau_A)$**  tales que:

$$U \neq \emptyset \neq V; \quad A \subseteq U \cup V; \quad U \cap V = \emptyset.$$

**Definición (Continuidad en topología inducida).** Sean  $(X, \tau_x)$ ,  $(Y, \tau_y)$  dos espacios topológicos,  $A \subseteq X$ , y  $f : A \rightarrow Y$ . Entonces:

$$f \text{ es continua} \iff f \text{ es continua en } (A, \tau_A).$$

### 3.3. Teoremas sobre funciones continuas en $\mathbb{R}^N$

**Teorema (Weierstrass).** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico,  $\emptyset \neq A \subseteq X$  compacto, y  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  continua en  $A$ . Entonces,  $\exists x_1, x_2 \in A : f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \quad \forall x \in A$ . En otras palabras, la función  $f$  alcanza su mínimo y su máximo.

**Teorema (Weierstrass generalizado).** Sean  $(X, d)$ ,  $(Y, d)$  espacios métricos,  $\emptyset \neq A \subseteq X$  compacto, y  $f : A \rightarrow Y$  continua. Entonces,  $f(A)$  es compacto.

**Teorema (Valor Intermedio).** Sea  $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^N$  arco conexo, y  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^M$  continua. Entonces,  $f(A)$  es arco-conexo en  $\mathbb{R}^M$ .

*Demostración.* Sean  $X, Y \in f(A)$ . Entonces,  $\exists x, y \in A : X = f(x), Y = f(y)$ . Como  $A$  es arco-conexo,  $\exists \varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$  continua tal que  $\varphi(a) = x, \varphi(b) = y, \varphi([a, b]) \subseteq A$ .

Ahora, definimos  $\psi := f \circ \varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^M$ , que es continua por ser composición de funciones continuas. Entonces, se verifica que:

$$\psi(a) = f(\varphi(a)) = f(x) = X; \quad \psi(b) = f(\varphi(b)) = f(y) = Y; \quad \psi([a, b]) = f(\varphi([a, b])) \subseteq f(A).$$

Por tanto, queda probado que  $f(A)$  es arco-conexo en  $\mathbb{R}^M$ . □

**Teorema (Valor Intermedio revisitado).** Sea  $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^N$  conexo, y  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^M$  continua. Entonces,  $f(A)$  es conexo en  $\mathbb{R}^M$ .