

# Las isometrías en la Mecánica Celeste

Minia Bermúdez de la Puente García

Francisco David Charte Luque

José Ángel Garrido Calvo

7 de octubre de 2016

## Índice

<b>1. Repaso de las isometrías de <math>\mathbb{R}^3</math></b>	<b>2</b>
1.1. Isometrías lineales . . . . .	2
1.2. Clasificación de isometrías lineales . . . . .	2
1.2.1. Identidad . . . . .	2
1.2.2. Simetría respecto de un plano . . . . .	3
1.2.3. Rotación respecto de una recta . . . . .	3
1.2.4. Composición de una rotación y una simetría . . . . .	4
1.3. Isometrías afines (Movimientos rígidos) . . . . .	4
1.3.1. Isometrías . . . . .	4
1.3.2. Traslaciones . . . . .	5
1.3.3. Movimiento helicoidal . . . . .	5
1.3.4. Simetría deslizante . . . . .	5
1.3.5. Composición de rotación y simetría . . . . .	5
<b>2. Uso en la teoría de Mecánica Celeste</b>	<b>5</b>
2.1. Demostración de un pequeño lema . . . . .	5
<b>3. Referencias</b>	<b>6</b>

## 1. Repaso de las isometrías de $\mathbb{R}^3$

### 1.1. Isometrías lineales

**Notación.** Dada una aplicación lineal  $T$  notaremos indistintamente  $T$  tanto a la aplicación como a su matriz asociada en la base usual de  $\mathbb{R}^3$ .

Entre dos espacios vectoriales euclídeos abstractos se definen las isometrías como aquellas biyecciones que conservan la distancia, y las isometrías lineales son los isomorfismos que preservan el producto escalar. En estos apuntes realizamos una definición más concreta para el caso de  $\mathbb{R}^3$ .

**Definición 1.1.** Una isometría de  $\mathbb{R}^3$  es una aplicación lineal  $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $A(x) = Ax \ \forall x \in \mathbb{R}^3$ , verificando  $\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle \ \forall x, y \in \mathbb{R}^3$ . Equivalentemente,  $A$  conserva módulos, es decir,  $|Ax| = |x| \ \forall x \in \mathbb{R}^3$ .

Como consecuencia directa de la definición tenemos que el determinante de la matriz asociada a una isometría es 1 o -1. Llamaremos a la isometría **directa** o **inversa** respectivamente.

**Proposición 1.1.** Una aplicación lineal  $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  es una isometría lineal  $\Leftrightarrow$  su matriz asociada es ortogonal (es decir,  $AA^t = I$ ).

**Proposición 1.2.** El conjunto de todas las aplicaciones lineales de un espacio vectorial euclídeo  $V$ ,  $O(V)$ , tiene estructura de grupo con la composición.

A continuación se clasifican las isometrías de  $\mathbb{R}^3$  y se dan algunos ejemplos.

### 1.2. Clasificación de isometrías lineales

Sea  $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  una isometría lineal. Consideremos el subespacio de vectores fijos que genera:

$$V_A = \{x \in \mathbb{R}^3 / Ax = x\},$$

Observamos que este subespacio se corresponde con el conjunto de vectores propios asociados al valor propio 1 de  $A$ . Para estudiar su dimensión, la podemos obtener de la forma:  $\dim(V_A) = 3 - \text{rango}(A - I)$ . Así, tendremos los siguientes casos.

#### 1.2.1. Identidad

Si  $\dim(V_A) = 3$ , entonces  $A$  deja fijo todo  $\mathbb{R}^3$ . Por tanto, se trata de la identidad,  $A = I : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $I(x) = x \ \forall x \in \mathbb{R}^3$ .

### 1.2.2. Simetría respecto de un plano

Si  $\dim(V_A) = 2$ ,  $A$  tiene el plano  $V_A$  como subespacio de vectores fijos. En este caso, si  $B = \{v_1, v_2\}$  es una base ortonormal de dicho plano y  $v_3$  es un vector unitario ortogonal al plano, tenemos la base de  $\mathbb{R}^3$   $B' = \{v_1, v_2, v_3\}$  de forma que

$$M(A, B') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto,  $A$  lleva cada vector de  $\mathbb{R}^3$  en su simétrico por el plano  $V_A$ .

**Ejemplo 1.1.** Sea  $B = \{e_1, e_2, e_3\}$  la base usual de  $\mathbb{R}^3$ . La simetría respecto al plano generado por los ejes  $X$  e  $Y$  tiene por matriz asociada:

$$M(S_{X,Y}, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

### 1.2.3. Rotación respecto de una recta

En el caso en que  $\dim(V_A) = 1$ , el subespacio  $V_A$  es una recta vectorial. Sea  $v$  un vector unitario director de la recta, y sean  $u_1, u_2$  dos vectores unitarios ortogonales entre sí y a  $v$ , consideramos la base  $B = \{u_1, u_2, v\}$  de  $\mathbb{R}^3$  en la que la matriz asociada a  $A$  se expresa:

$$M(A, B) = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por la condición de ortogonalidad de la matriz, es fácil comprobar que tendrá una expresión del tipo

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

para conveniente  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Se trata, por tanto, de la rotación de ángulo  $\alpha$  alrededor del eje de giro dado por la recta  $V_A$ .

**Ejemplo 1.2.** Sea  $B = \{e_1, e_2, e_3\}$  la base usual de  $\mathbb{R}^3$ . La rotación de  $\frac{\pi}{2}$  respecto del eje  $Z$  tiene por matriz asociada:

$$M(R_{\pi/2}, B) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

**Observación.** Las simetrías respecto de una recta son un caso particular de rotaciones para  $\alpha = \pi$ .

#### 1.2.4. Composición de una rotación y una simetría

Si  $\dim(V_A) = 0$ , entonces  $A$  tiene al 0 como único vector fijo. es una composición de una rotación y una simetría con eje de giro y plano de simetría perpendiculares entre sí. Si  $u_1, u_2$  forman una base ortonormal del plano y  $v$  es un vector unitario director del eje, la isometría tendrá la siguiente matriz en la base  $B = \{u_1, u_2, v\}$ :

$$M(A, B) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

donde  $\alpha$  es el ángulo de giro.

**Ejemplo 1.3.** Sea  $B = \{e_1, e_2, e_3\}$  la base usual de  $\mathbb{R}^3$ . La simetría respecto del origen se corresponde con la rotación de  $\pi$  alrededor del eje Z seguido por la simetría respecto del plano formado por los ejes X, Y:

$$M(S_0, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

**Observación.** En general, las simetrías respecto de un punto en  $\mathbb{R}^3$  son casos particulares de esta situación.

### 1.3. Isometrías afines (Movimientos rígidos)

**Definición 1.2.** Un movimiento rígido es una aplicación  $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  que conserva las distancias.

**Lema 1.1.** *Todo movimiento rígido  $\phi$  viene determinado por una isometría lineal  $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  y un vector  $b \in \mathbb{R}^3$  de la siguiente forma:  $\phi(x) = Ax + b \forall x \in \mathbb{R}^3$ . Llamamos a  $A$  **isometría (lineal) asociada a  $\phi$** .*

#### 1.3.1. Isometrías

La identidad, las rotaciones y las simetrías son movimientos rígidos trivialmente.

### 1.3.2. Traslaciones

Las traslaciones son los movimientos rígidos tales que la isometría asociada es la identidad.

### 1.3.3. Movimiento helicoidal

Un movimiento helicoidal es una composición de una rotación y una traslación.

### 1.3.4. Simetría deslizante

Una simetría deslizante es una composición de una simetría y una traslación.

### 1.3.5. Composición de rotación y simetría

Las composiciones de rotación y simetría son un movimiento rígido, cuya isometría asociada es la composición de rotación y simetría (no deslizantes).

**Proposición 1.3.** *Cualquier movimiento rígido es de uno de los tipos mencionados.*

## 2. Uso en la teoría de Mecánica Celeste

### 2.1. Demostración de un pequeño lema

**Lema 2.1.** *Sea  $A \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$  una isometría y  $x \in \mathbb{R}^3$  una solución del problema de fuerzas centrales*

$$\ddot{x} = f(|x(t)|) \frac{x(t)}{|x(t)|}, \quad (1)$$

*entonces  $Ax$  también es solución.*

*Demostración.* Para que  $Ax$  sea solución, debe cumplir la ecuación dada en 1:

$$\frac{d^2}{dt^2} (Ax) = A\ddot{x} = Af(|x(t)|) \frac{x(t)}{|x(t)|} \stackrel{(*)}{=} f(|Ax(t)|) \frac{Ax(t)}{|Ax(t)|} \quad \forall t \in \mathbb{R}^+,$$

donde en  $(*)$  se usa que la isometría preserva los módulos.

□

### 3. Referencias

- Geometría - Carlos Ivorra - <http://www.uv.es/ivorra/Libros/Geometria2.pdf>
- Repaso de aspectos de geometría afín euclídea - César Rosales  
- <http://www.ugr.es/~crosales/1516/cys/tema0.pdf>