Distribución χ-cuadrado

DANIEL LÓPEZ
DAVID CHARTE
Universidad de Granada
5 de enero de 2016

Índice

1. Deducción de función de densidad

La distribución χ-cuadrado es un caso particular de la distribución Gamma. Recordamos la función de densidad de esta distribución:

Definición 1.1 (Distribución Gamma)**.** *Decimos que la variable aleatoria X sigue una distribución Gamma si su función de densidad es:*

$$f(x \mid \alpha, \beta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}, \quad x \in [0, +\infty[, \quad \alpha, \beta > 0 \ .$$

Ahora, si 2α es un natural, llamamos $p = 2\alpha$ y evaluamos en $\beta = 2$, nos queda la siguiente expresión:

$$\frac{1}{\Gamma(\frac{p}{2})2^{\frac{p}{2}}} x^{\frac{p}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} \ .$$

Definición 1.2 (Distribución χ-cuadrado)**.** *Decimos que la variable aleatoria X sigue una distribución χ-cuadrado si su función de densidad es:*

$$f(x \mid p) = \frac{1}{\Gamma(\frac{p}{2})2^{\frac{p}{2}}} x^{\frac{p}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, \quad x \in [0, +\infty[, \quad p \in \{1, 2, \dots\} \ .$$

1.1. Propiedades

Propiedad 1.1. *La suma de variables aleatorias con distribución χ-cuadrado sigue una distribución χ-cuadrado.*

Propiedad 1.2. *La suma de los cuadrados de variables aleatorias con distribución normal 0-1 sigue una distribución χ-cuadrado.*

2. Función generatriz de momentos

$$M_X(t) = \left(\frac{1}{1-2t}\right)^{\frac{p}{2}}, \quad t < \frac{1}{2}$$

2.1. Esperanza

$$\mathrm{E}[X] = p$$

2.2. Varianza

$$\mathrm{Var}[X] = 2p$$

3. Estimador máximo verosimil

3.1. Insesgadez

Definición 3.1 (Insesgadez)**.** *Se denomina sesgo de un estimador a la diferencia entre la esperanza del estimador y el verdadero valor del parámetro a estimar. Un estimador es insesgado si su sesgo es nulo por ser su esperanza igual al parámetro que se desea estimar.*

3.2. Eficiencia

Definición 3.2 (Eficiencia)**.** *Un estimador $\hat{\theta}_1$ se dice que es más eficiente que otro estimador $\hat{\theta}_2$, si la varianza del primero es menor que la del segundo $Var(\hat{\theta}_1) < Var(\hat{\theta}_2)$.*

3.3. Consistencia

Teorema 3.1. *Una condición suficiente para que $\hat{\theta}$ sea un estimador consistente es que dicho estimador tiene que verificar:*

$$E[\hat{\theta}] \to \theta$$

$$Var(\hat{\theta}) \to 0$$

Con $n \to \infty$.

3.4. Suficiencia

Teorema 3.2. *Sean $X_1, X_2, ..., X_n$ variables aleatorias independientes con una función distribución de distribución conjunta $f(x_1, x_2, ..., x_n|\theta)$ que depende del parámetro θ.*
Entonces se dice que el estadístico $u(x_1, ..., x_n)$ es suficiente para θ si y solamente si $f(x_1, x_2, ..., x_n|\theta)$ se puede factorizar de la siguiente forma:

$$f(x_1, ..., x_n|\theta) = \Phi(u(x_1, ..., x_n)|\theta) \cdot h(x_1, ..., x_n)$$