

# Distribución $\chi$ -cuadrado

DANIEL LÓPEZ  
DAVID CHARTE  
*Universidad de Granada*  
5 de enero de 2016

## Índice

<b>1. Definición</b>	<b>2</b>
1.1. Función de densidad . . . . .	2
1.2. Propiedades . . . . .	2
<b>2. Función generatriz de momentos</b>	<b>3</b>
2.1. Esperanza . . . . .	3
2.2. Varianza . . . . .	3
<b>3. Estimador máximo verosímil</b>	<b>3</b>
3.1. Insensatez . . . . .	3
3.2. Eficiencia . . . . .	4
3.3. Consistencia . . . . .	4
3.4. Suficiencia . . . . .	4

## 1. Definición

### 1.1. Función de densidad

La distribución  $\chi$ -cuadrado es un caso particular de la distribución Gamma. Recordamos la función de densidad de esta distribución:

**Definición 1.1** (Distribución Gamma). *Decimos que la variable aleatoria  $X$  sigue una distribución Gamma si su función de densidad es:*

$$f(x \mid \alpha, \beta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}, \quad x \in [0, +\infty[, \quad \alpha, \beta > 0 .$$

Ahora, si  $2\alpha$  es un natural, llamamos  $p = 2\alpha$  y evaluamos en  $\beta = 2$ , nos queda la siguiente expresión:

$$\frac{1}{\Gamma(\frac{p}{2})2^{\frac{p}{2}}} x^{\frac{p}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} .$$

**Definición 1.2** (Distribución  $\chi$ -cuadrado). *Decimos que la variable aleatoria  $X$  sigue una distribución  $\chi$ -cuadrado si su función de densidad es:*

$$f(x \mid p) = \frac{1}{\Gamma(\frac{p}{2})2^{\frac{p}{2}}} x^{\frac{p}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, \quad x \in [0, +\infty[, \quad p \in \{1, 2, \dots\} .$$

### 1.2. Propiedades

**Propiedad 1.1.** *La suma de variables aleatorias con distribución  $\chi$ -cuadrado sigue una distribución  $\chi$ -cuadrado.*

**Propiedad 1.2.** *La suma de los cuadrados de variables aleatorias con distribución normal 0-1 sigue una distribución  $\chi$ -cuadrado.*

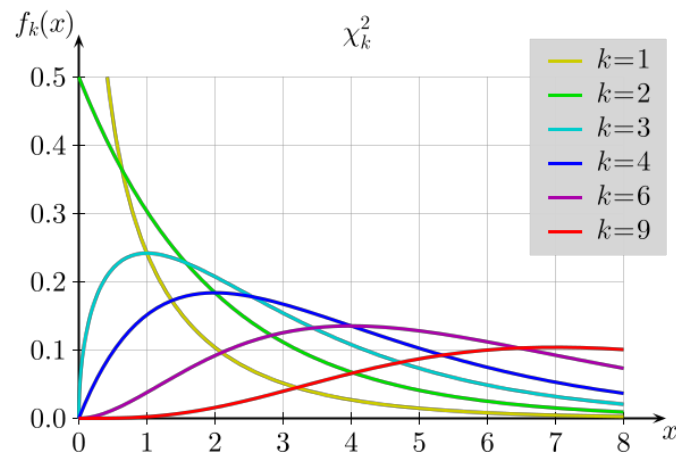


Figura 1: Función de densidad de la distribución  $\chi$ -cuadrado. Imagen de Wikipedia (CC BY).

## 2. Función generatriz de momentos

$$M_X(t) = \left( \frac{1}{1-2t} \right)^{\frac{p}{2}}, \quad t < \frac{1}{2}$$

### 2.1. Esperanza

$$E[X] = p$$

### 2.2. Varianza

$$\text{Var}[X] = 2p$$

## 3. Estimador máximo verosímil

### 3.1. Insensatez

**Definición 3.1** (Insensatez). Se denomina sesgo de un estimador a la diferencia entre la esperanza del estimador y el verdadero valor del parámetro a estimar. Un estimador es insesgado si su sesgo es nulo por ser su esperanza igual al parámetro que se desea estimar.

### 3.2. Eficiencia

**Definición 3.2** (Eficiencia). *Un estimador  $\hat{\theta}_1$  se dice que es más eficiente que otro estimador  $\hat{\theta}_2$ , si la varianza del primero es menor que la del segundo  $Var(\hat{\theta}_1) < Var(\hat{\theta}_2)$ .*

### 3.3. Consistencia

**Teorema 3.1.** *Una condición suficiente para que  $\hat{\theta}$  sea un estimador consistente es que dicho estimador tiene que verificar:*

$$E[\hat{\theta}] \rightarrow \theta$$

$$Var(\hat{\theta}) \rightarrow 0$$

*Con  $n \rightarrow \infty$ .*

### 3.4. Suficiencia

**Teorema 3.2.** *Sean  $X_1, X_2, \dots, X_n$  variables aleatorias independientes con una función distribución de distribución conjunta  $f(x_1, x_2, \dots, x_n|\theta)$  que depende del parámetro  $\theta$ .*

*Entonces se dice que el estadístico  $u(x_1, \dots, x_n)$  es suficiente para  $\theta$  si y solamente si  $f(x_1, x_2, \dots, x_n|\theta)$  se puede factorizar de la siguiente forma:*

$$f(x_1, \dots, x_n|\theta) = \Phi(u(x_1, \dots, x_n)|\theta) \cdot h(x_1, \dots, x_n)$$