

# Distribución $\chi$ -cuadrado

DANIEL LÓPEZ  
DAVID CHARTE  
*Universidad de Granada*  
5 de enero de 2016

## Índice

<b>1. Deducción de función de densidad</b>	<b>2</b>
<b>2. Función generatriz de momentos</b>	<b>2</b>
2.1. Esperanza . . . . .	2
2.2. Varianza . . . . .	2
<b>3. Estimador máximo verosimil</b>	<b>2</b>
3.1. Inssegadez . . . . .	2
3.2. Eficiencia . . . . .	2
3.3. Consistencia . . . . .	2
3.4. Suficiencia . . . . .	3

## 1. Deducción de función de densidad

La distribución  $\chi$ -cuadrado es un caso particular de la distribución Gamma. Recordamos la función de densidad de esta distribución:

**Definición 1.1** (Distribución Gamma). *Decimos que la variable aleatoria  $X$  sigue una distribución Gamma si su función de densidad es:*

$$f(x | \alpha, \beta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}, \quad x \in [0, +\infty[, \quad \alpha, \beta > 0 .$$

Ahora, si  $2\alpha$  es un natural, llamamos  $p = 2\alpha$  y evaluamos en  $\beta = 2$ , nos queda la siguiente expresión:

$$\frac{1}{\Gamma(\frac{p}{2})2^{\frac{p}{2}}} x^{\frac{p}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} .$$

**Definición 1.2** (Distribución  $\chi$ -cuadrado). *Decimos que la variable aleatoria  $X$  sigue una distribución  $\chi$ -cuadrado si su función de densidad es:*

$$f(x | p) = \frac{1}{\Gamma(\frac{p}{2})2^{\frac{p}{2}}} x^{\frac{p}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, \quad x \in [0, +\infty[, \quad p \in \{1, 2, \dots\} .$$

## 2. Función generatriz de momentos

### 2.1. Esperanza

### 2.2. Varianza

## 3. Estimador máximo verosímil

### 3.1. Insesgadez

**Definición 3.1** (Insesgadez). *Se denomina sesgo de un estimador a la diferencia entre la esperanza del estimador y el verdadero valor del parámetro a estimar. Un estimador es insesgado si su sesgo es nulo por ser su esperanza igual al parámetro que se desea estimar.*

### 3.2. Eficiencia

**Definición 3.2** (Eficiencia). *Un estimador  $\hat{\theta}_1$  se dice que es más eficiente que otro estimador  $\hat{\theta}_2$ , si la varianza del primero es menor que la del segundo  $\text{Var}(\hat{\theta}_1) < \text{Var}(\hat{\theta}_2)$ .*

### 3.3. Consistencia

**Teorema 3.1.** *Una condición suficiente para que  $\hat{\theta}$  sea un estimador consistente es que dicho estimador tiene que verificar:*

$$E[\hat{\theta}] \rightarrow \theta$$

$$Var(\hat{\theta}) \rightarrow 0$$

Con  $n \rightarrow \infty$ .

### 3.4. Suficiencia

**Teorema 3.2.** Sean  $X_1, X_2, \dots, X_n$  variables aleatorias independientes con una función distribución de distribución conjunta  $f(x_1, x_2, \dots, x_n|\theta)$  que depende del parámetro  $\theta$ .

Entonces se dice que el estadístico  $u(x_1, \dots, x_n)$  es suficiente para  $\theta$  si y solamente si  $f(x_1, x_2, \dots, x_n|\theta)$  se puede factorizar de la siguiente forma:

$$f(x_1, \dots, x_n|\theta) = \Phi(u(x_1, \dots, x_n)|\theta) \cdot h(x_1, \dots, x_n)$$