Modelo Determinístico para calendarización de partidos de fútbol

1. Formulation of the Model

Comenzamos la formulación del modelo definiendo la notación que será utilizada en su formulación.

Los conjuntos:

$\mathcal{F}$	:	conjunto de fechas que restan por jugar en el campeonato.
$\mathcal{I}$	:	conjunto de equipos que conforman el torneo.
$\mathcal{N}$	:	conjunto de partidos (equipo local vs equipo visitante) que aún deben enfrentarse en alguna de las fechas restantes del campeonato.
$\mathcal{S}$	:	conjunto de patrones de localías y visitas posibles en las K fechas que restan por jugar en el torneo.

Los índices:

f, l	:	índice asociado al conjunto de fechas que restan por jugar ($f \in \mathcal{F}$).
i, j	:	índices asociados al conjunto de equipos que conforman el torneo ($i, j \in \mathcal{I}$)
n	:	índice asociado al conjunto de partidos (equipo local vs equipo visitante) que debe programarse en alguna de las fechas restantes del torneo ($n \in \mathcal{N}$).
s	:	índice asociado al conjunto de patrones de localías y visitas ($s \in \mathcal{S}$).

Los parámetros:

PI_i	:	parámetro discreto que indica la cantidad de puntos que tiene el equipo i justo al terminar la fecha anterior a la primera de las fechas que quedan por jugar.

R_{in} : parámetro discreto que toma valor 0, 1 o 3, y que corresponde a la cantidad de puntos que gana el equipo i al jugar el partido n (en el que juegan i vs otro equipo).

EL_{in} : parámetro binario que toma valor 1 si el equipo i es local en el partido n, y 0 en cualquier otro caso.

EV_{in} : parámetro binario que toma valor 1 si el equipo i es visita en el partido n, y 0 en cualquier otro caso.

W_{is} : parámetro binario que toma valor 1 si al equipo i se le puede asignar el patrón de localías y visitas s, y 0 en cualquier otro caso.

L_s^f : parámetro binario que toma el valor 1 si el patrón de localías y visitas s indica que el partido es de local en la fecha f, y 0 en cualquier otro caso.

Las variables:

x_n^f : variable binaria que toma valor 1 si el partido n se programa en la fecha f, y 0 en cualquier otro caso.

y_{is} : variable binaria que toma valor 1 si al equipo i se le asigna el patrón de localías y visitas s, y 0 en cualquier otro caso.

p_{ji}^{lf} : variable discreta que indica la cantidad de puntos que tiene el equipo j al finalizar la fecha f teniendo información finalizada la fecha l $(f > l)$, en el mejor conjunto de resultados futuros para el equipo i.

$\hat{p}_{ji}^{lf}$: variable discreta que indica la cantidad de puntos que tiene el equipo j al finalizar la fecha f teniendo información finalizada la fecha l $(f > l)$, en el peor conjunto de resultados futuros para el equipo i.

v_{ni}^{lf} : variable binaria que toma valor 1 si el equipo local gana el partido n de la fecha f teniendo información finalizada la fecha l $(f > l)$, en el mejor conjunto de resultados futuros para el equipo i.

a_{ni}^{lf} : variable binaria que toma valor 1 si el equipo visitante gana el partido n de la fecha f teniendo información finalizada la fecha l $(f > l)$, en el mejor conjunto de resultados futuros para el equipo i.

e_{ni}^{lf} : variable binaria que toma valor 1 si se empata el partido n de la fecha f teniendo información finalizada la fecha l $(f > l)$, en el mejor conjunto de resultados futuros para el equipo i.

$\hat{v}_{in}^{lf}$: variable binaria que toma valor 1 si el equipo local gana el partido n de la fecha f teniendo información finalizada la fecha l $(f > l)$, en el peor conjunto de resultados futuros para el equipo i.

$\hat{a}_{in}^{lf}$: variable binaria que toma valor 1 si el equipo visitante gana el partido n de la fecha f teniendo información finalizada la fecha l $(f > l)$, en el peor conjunto de resultados futuros para el equipo i.

$\hat{e}_{in}^{lf}$: variable binaria que toma valor 1 si se empata el partido n de la fecha f teniendo información finalizada la fecha l $(f > l)$, en el peor conjunto de resultados futuros para el equipo i.

α_{ji}^{l} : variable binaria que toma valor 1 si el equipo j termina con menos puntos que el equipo i en el mejor conjunto de resultados futuros para el equipo i, teniendo información finalizada la fecha l.

$\hat{\alpha}_{ji}^{l}$: variable binaria que toma valor 1 si el equipo j termina con menos puntos que el equipo i en el peor conjunto de resultados futuros para el equipo i, teniendo información finalizada la fecha l.

β_{i}^{l} : variable discreta que indica la mejor posición que puede alcanzar al final del torneo el equipo i en su mejor conjunto de resultados futuros, teniendo información finalizada la fecha l.

$\hat{\beta}_{i}^{l}$: variable discreta que indica la peor posición que puede alcanzar al final del torneo el equipo i en su peor conjunto de resultados futuros, teniendo información finalizada la fecha l.

Dado todo lo anterior, proponemos el siguiente modelo determinístico para determinar la programación óptima de los partidos que resta por disputar, buscando maximizar el valor en la atractividad de lo que resta de campeonato. Este problema lo llamamos *Scheduling Soccer Tournament Problem under measures of Attractiveness (SSTPA)*, y el siguiente modelo de programación matemática permite resolverlo.

$$\text{(SSTPA)} \qquad \text{Max} \sum_{l\in\mathcal{F}}\sum_{i\in\mathcal{I}}\left(\hat{\beta}_i^l - \beta_i^l\right) \tag{1}$$

s.t:

$$\sum_{f\in\mathcal{F}} x_n^f = 1 \qquad \forall\, n\in\mathcal{N}. \tag{2}$$

$$\sum_{n\in\mathcal{N}:EL_{in}+EV_{in}=1} x_n^f = 1 \qquad \forall\, i\in\mathcal{I}; f\in\mathcal{F}. \tag{3}$$

$$\sum_{s\in\mathcal{S}:W_{is}=1} y_{is} = 1 \qquad \forall i \in \mathcal{I}. \tag{4}$$

$$y_{is} = 0 \qquad \forall i \in \mathcal{I}; s \in \mathcal{S} : W_{i,s} = 0. \tag{5}$$

$$\sum_{n\in\mathcal{N}:EL_{in}=1} x_n^f = \sum_{s\in\mathcal{S}:L_s^f=1} y_{is} \qquad \forall\, i \in \mathcal{I}; f \in \mathcal{F}. \tag{6}$$

$$\sum_{n\in\mathcal{N}:EV_{in}=1} x_n^f = \sum_{s\in\mathcal{S}:L_s^f=0} y_{is} \qquad \forall\, i \in \mathcal{I}; f \in \mathcal{F}. \tag{7}$$

$$x_n^f = v_{ni}^{lf} + e_{ni}^{lf} + a_{ni}^{lf} \qquad \forall n \in \mathcal{N}; i \in \mathcal{I}; f, l \in \mathcal{F} : f > l. \tag{8}$$

$$x_n^f = \hat{v}_{ni}^{lf} + \hat{e}_{ni}^{lf} + \hat{a}_{ni}^{lf} \qquad \forall n \in \mathcal{N}; i \in \mathcal{I}; f, l \in \mathcal{F} : f > l. \tag{9}$$

$$\begin{aligned} p_{ji}^{lf} = PI_j &+ \sum_{\theta\in\mathcal{F}:l\geq\theta} \sum_{n\in\mathcal{N}:EL_{jn}+EV_{jn}=1} R_{jn} x_n^\theta + \sum_{n\in\mathcal{N}:EL_{jn}=1} \sum_{\theta\in\mathcal{F}:f\geq\theta>l} 3v_{ni}^{l\theta} \\ &+ \sum_{n\in\mathcal{N}:EV_{jn}=1} \sum_{\theta\in\mathcal{F}:f\geq\theta>l} 3a_{ni}^{l\theta} + \sum_{n\in\mathcal{N}:EL_{jn}+EV_{jn}=1} \sum_{\theta\in\mathcal{F}:f\geq\theta>l} e_{ni}^{l\theta} \qquad \forall i, j \in \mathcal{I}; f, l \in \mathcal{F} : f > l. \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} \hat{p}_{ji}^{lf} = PI_j &+ \sum_{\theta\in\mathcal{F}:l\geq\theta} \sum_{n\in\mathcal{N}:EL_{jn}+EV_{jn}=1} R_{jn} x_n^\theta + \sum_{n\in\mathcal{N}:EL_{jn}=1} \sum_{l\in\mathcal{F}:f\geq\theta>l} 3\hat{v}_{ni}^{l\theta} \\ &+ \sum_{n\in\mathcal{N}:EV_{jn}=1} \sum_{l\in\mathcal{F}:f\geq\theta>l} 3\hat{a}_{ni}^{l\theta} + \sum_{n\in\mathcal{N}:EL_{jn}+EV_{jn}=1} \sum_{l\in\mathcal{F}:f\geq\theta>l} \hat{e}_{ni}^{l\theta} \qquad \forall i, j \in \mathcal{I}; f, l \in \mathcal{F} : f > l. \end{aligned} \tag{11}$$

$$M\alpha_{ji}^l \geq p_{ii}^{lF} - p_{ji}^{lF} \qquad \forall l \in \mathcal{F}; i, j \in \mathcal{I} : i \neq j. \tag{12}$$

$$M(1 - \alpha_{ji}^l) \geq p_{ji}^{lF} - p_{ii}^{lF} \qquad \forall l \in \mathcal{F}; i, j \in \mathcal{I} : i \neq j. \tag{13}$$

$$M\hat{\alpha}^l_{ji} \geq \hat{p}^{lF}_{ii} - \hat{p}^{lF}_{ji} \qquad l \in \mathcal{F}; \forall i, j \in \mathcal{I} : i \neq j. \tag{14}$$

$$M(1 - \hat{\alpha}^l_{ji}) \geq \hat{p}^{lF}_{ji} - \hat{p}^{lF}_{ii} \qquad l \in \mathcal{F}; \forall i, j \in \mathcal{I} : i \neq j. \tag{15}$$

$$\beta^l_i = \text{Card}(\mathcal{I}) - \sum_{j \in \mathcal{I}: j \neq i} \alpha^l_{ji} \qquad \forall i \in \mathcal{I}; l \in \mathcal{F}. \tag{16}$$

$$\hat{\beta}^l_i = 1 + \sum_{j \in \mathcal{I}: j \neq i} (1 - \hat{\alpha}_{ij}) \qquad \forall i \in \mathcal{I}; l \in \mathcal{F}. \tag{17}$$

$$x^f_n \in \{0, 1\} \qquad \forall\, n \in \mathcal{N}; f \in \mathcal{F}. \tag{18}$$

$$y_{is} \in \{0, 1\} \qquad \forall\, i \in \mathcal{I}; s \in \mathcal{S}. \tag{19}$$

$$p^{lf}_{ji}, \hat{p}^f_{ji} \in \mathbb{Z}^+_0 \qquad \forall\, i, j \in \mathcal{I}; f, l \in \mathcal{F}. \tag{20}$$

$$v^{lf}_{ni}, \hat{v}^{lf}_{ni}, e^{lf}_{ni}, \hat{e}^{lf}_{ni}, a^{lf}_{ni}, \hat{a}^{lf}_{ni}, \in \{0, 1\} \qquad \forall\, i \in \mathcal{I}; n \in \mathcal{N}; f, l \in \mathcal{F}. \tag{21}$$

$$\alpha^l_{ji}, \hat{\alpha}^l_{ji} \in \{0, 1\} \qquad \forall\, i, j \in \mathcal{I}; l \in \mathcal{F}. \tag{22}$$

$$\beta^l_i, \hat{\beta}^l_i \in \{0, 1\} \qquad \forall\, i \in \mathcal{I}; l \in \mathcal{F}. \tag{23}$$

La restricciones se describen a continuación. La restricción (2) asegura que cada uno de los partidos que se deben programar es programado en exactamente una de las fechas por programar. La restricción (3) asegura que todo equipo juega exactamente un partido en cada fecha. La restricción (4) asigna un único patrón válido (que sea consistente con los dos partidos que ese equipo tuvo antes de la primera de las fechas que se deben programar) de localías/visitas a cada equipo. La restricción (5) se eliminan las asignaciones de patrones no válidas para cada equipo. Las restricciones (6) y (7) relaciona consistentemente la asignación de patrones y la programación de partidos para cada equipo. Las restricciones

(8), (9), (10) y (11) son para calcular los puntos que tendrá cada equipo al finalizar cada fecha, dado que se conocen los resultados de cada partido y el patrón de resultados que se le asigna a cada equipo. Las restricciones (12), (14), (16 y (17) permiten clasificar si el partido programado para cada equipo en cada fecha es atractivo aún para determinar el campeón del campeonato. Las restricciones (**??**), (**??**), (**??**) y (**??**) permiten clasificar si el partido programado para cada equipo en cada fecha es atractivo aún para determinar el último equipo del campeonato. Las restricciones (18), (19), (20), y (21) corresponden a la naturaleza de las variables.

La función objetivo definida en (1) busca maximizar el atractivo total de la programación de los partidos en las fechas por programar.