

# Estudio de Geodésicas a través de Análisis Numérico

Francisco de Izaguirre (4.425.135-0),  
Francisco Fernandez (4.596.080-9),  
Gabriela Mullukian (5.121.434-9), Marco Rolón (4.916.721-9)

*Instituto de Matemática y Estadística  
Facultad de Ingeniería. Universidad de la República  
Montevideo, Uruguay*

---

## Abstract

El camino más corto entre dos puntos en un plano, es el segmento de recta que los une. Si se quiere analizar qué pasa en superficies curvas el problema deja de ser trivial. Dada una superficie y dos puntos cualesquiera contenidos en ella, se define la curva **geodésica** como la curva de menor longitud, de dicha superficie, que une esos dos puntos.

En este trabajo se realiza una introducción al problema, una descripción matemática del mismo. Se demuestra que puede ser modelado como un PVI. Luego se utiliza el Método de Euler Hacia Adelante para su resolución. Posteriormente se presentan los resultados obtenidos, se realiza un análisis de los errores cometidos.

## CONCLUSION BREVE

*Keywords:* Geodésicas, Métodos Numéricos, Euler hacia Adelante.

---

---

<sup>1</sup> Emails: {francisco.de.izaguirre, francisco.fernandez, maria.mullukian, marco.rolon}@fing.edu.uy

## Contents

1	Introducción	3
2	Problema	5
2.1	Ecuaciones diferenciales que rigen una geodésica	5
2.2	Cálculo de las ecuaciones en superficie paramétrica	10
3	Metodología	14
3.1	Problema de Valor Inicial (PVI)	14
3.2	Discretización del problema	15
4	Estudio Experimental	17
4.1	Ambiente de trabajo	17
4.2	Resultados Obtenidos	17
5	Conclusiones	19
	References	20

# 1 Introducción

Trasladarse desde un punto a otro sobre una superficie recorriendo el camino más corto es un problema tan añejo como vigente. Por mencionar un par de ejemplos reales presentes en la ingeniería actual están la construcción de carreteras, la realización de un cableado subterráneo o el movimiento de un brazo robótico. Este problema también aparece en la teoría de la relatividad general: las partículas materiales se mueven a lo largo de geodésicas temporales del espacio-tiempo curvo.

El primer registro matemático vinculado a este problema es de 1697 cuando Johann Bernoulli resolvió el problema de la distancia más corta entre dos puntos en una superficie convexa, y demostró que el plano osculador de la geodésica debe ser perpendicular al plano tangente de la misma.

Más tarde Euler, en 1732, obtuvo las ecuaciones implícitas de las geodésicas. Posteriormente Gilbert Bliss obtuvo las líneas geodésicas en el anillo de anclaje con forma de toroide. Munchmeyer y Haw aplicaron las curvas geodésicas al diseño de cascos de embarcaciones. Beck et al. resolvieron el problema de dos valores iniciales de la curva geodésica, usando el método de cuarto orden de Runge-Kutta en un spline bicúbico. Patrikalakis y Bardis calcularon los desplazamientos geodésicos de curvas en superficies B-spline racionales utilizando la integración de valores iniciales de geodésicas a una curva generatriz en la superficie.

Sneyd y Peskin investigaron el cálculo de trayectos geodésicos en un cilindro generalizado basado en un problema de valor inicial usando un método de Runge-Kutta de segundo orden. Kimmel et al. presentó un método numérico para encontrar el camino más corto en la superficie mediante el cálculo de la propagación de un contorno de igual distancia geodésica desde un punto o una región fuente en la superficie. El algoritmo funciona en una cuadrícula rectangular usando aproximaciones de diferencias finitas.

Maekawa y Robinson y Armstrong calcularon las geodésicas discretizando las ecuaciones diferenciales que rigen la curva geodésica utilizando una aproximación de diferencia finita en una malla de puntos, lo que reduce el problema a un conjunto de ecuaciones no lineales. El conjunto de las ecuaciones no lineales se pueden resolver mediante el método de Newton.

El documento está organizado de la siguiente manera:

- La Sección 2 define formalmente el problema de estudio.
- La Sección 3 presenta la metodología empleada para su resolución.
- La Sección 4 desarrolla un análisis del rendimiento del método de Euler hacia adelante.
- La Sección 5, finalmente, se presenta las principales conclusiones de este trabajo, los elementos aprendidos y posibles líneas de trabajo futuro.

## 2 Problema

### 2.1 Ecuaciones diferenciales que rigen una geodésica

En el caso de una superficie plana, hallar la mínima distancia, es trivial: es una línea recta desde el punto de partida en dirección al de llegada. En el caso de superficies curvas el análisis pasa a ser y más complejo. En este trabajo se realizará, mediante la geometría de Riemann. Los espacios de Riemann son aquellos espacios medibles.

El concepto de geodésica es la generalización de las rectas en una geometría plana.

Aunque las variedades de Riemann son generalmente "curvas", no obstante, puede encontrarse que dados dos puntos diferentes y suficientemente cercanos existe una curva de longitud mínima (que no necesariamente es única). Estas líneas de mínima longitud, se llaman líneas geodésicas y son una generalización del concepto "línea recta" o "línea de mínima longitud". Son las curvas que localmente conectan sus puntos a lo largo de las trayectorias más cortas.

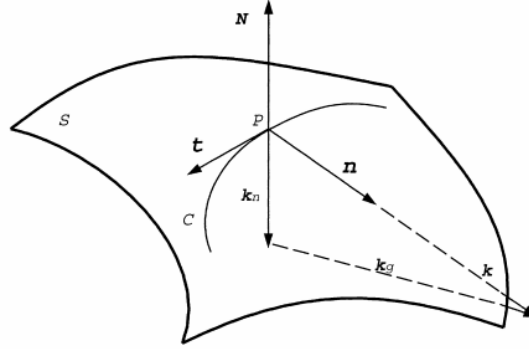
El análisis se hará bajo superficies de Riemann y de las curvas, solamente se requiere que en cada uno de sus puntos, haya una métrica euclídea definida sobre el espacio tangente, que cambie suavemente de punto a punto. Cuando una curva, en una superficie, tenga la propiedad de minimizar la longitudes de las curvas que unen dos puntos determinados, se la llamará geodésica minimizante.

Previo al estudio de las curvas geodésicas en particular, se definirán propiedades de una superficie.

Cuando se quiere cuantificar la curvatura de una superficie  $S$  en cierto punto, se considera una curva  $C$  de dicha superficie que contenga al punto  $P$  en cuestión.

Los vectores unitarios  $t$  (tangente) y  $n$  (normal) a la curva  $C$  en  $P$ , están relacionados en la figura 1.

Fig. 1. Definición del Vector Normal a una Curva



MODIFICAR ESTO:

$$k = \frac{dt}{ds} = \kappa \mathbf{n} = k_n + k_g, \quad (1)$$

Donde  $k_n$  es el vector normal de curvatura, y  $k_g$  es el vector de curvatura geodésica. Este par de vectores, son las componentes del vector de curvatura  $k$  de  $C$ . De esta forma, el vector normal de curvatura, puede expresarse como:

$$\mathbf{k}_n = \kappa_n \mathbf{N} \quad (2)$$

siendo  $\kappa_n$  el valor de la curvatura de la superficie en  $P$  en la dirección de  $t$ . En otras palabras,  $\kappa_n$  es la magnitud de la proyección de  $k$  en la superficie normal a  $P$ , con el signo determinado por la orientación de la superficie normal a  $P$ .

Siguiendo la definición del libro sugerido [1] en este trabajo se a definen a las curvas geodesicas, como aquellas que su curvatura geodesica es 0.

Se observa que el plano osculador a una curva geodesica (aquel formado por los vectores  $t$  y  $n$ ) contiene la superficie normal. A partir de esto, puede verse con facilidad que la geodesica entre dos puntos de una esfera, es siempre un gran círculo. El problema ahora pasa a ser que existen dos arcos entre esos puntos y solo uno de ellos proviene de la curva con menor distancia (excepto si los dos puntos están diametralmente opuestos en ese círculo). Este caso, indica que es posible que existan más de una curva geodesica entre dos puntos en una superficie.

Dada la parametrización de una superficie como  $r = r(u, v)$  y  $C$  un arco

parametrizado que pase por el punto P tal cual se muestra en la figura 1 y denotada por:

$$r(s) = r(u(s), v(s)) \quad (3)$$

Entonces las primeras formas fundamentales se definen como:

$$I = ds^2 = dr.dr = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

Donde los coeficientes de la *primera forma fundamental* son:

$$E = r_u.r_u \quad (4)$$

$$F = r_u.r_v \quad (5)$$

$$G = r_v.r_v \quad (6)$$

Siendo t el vector tangente a C en P, n el vector normal a C en P, N el vector unitario normal a S en P y u el vector unitario perpendicular a t en el plano tangente a la superficie. Definido  $u = N \times t$ . La componente u en el vector de curvatura k de r(s), es la curvatura geodesica  $k_g$  y está dada por la siguiente ecuación.

$$k_g = (k.u)u \quad (7)$$

La función escalar

$$k_g = (k.u) \quad (8)$$

es llamada curvatura geodésica de C en P. O, equivalentemente:

$$k_g = \frac{dt}{ds} \cdot (Nxt) \quad (9)$$

El vector tangente unitario, a la curva C puede obtenerse derivando la ecuacion 3 respecto al arco, usando la siguiente relacion:

$$t = \frac{dr(u(s), v(d))}{ds} = r_u \frac{du}{ds} + r_v \frac{dv}{ds} \quad (10)$$

Por lo que se obtiene:

$$\frac{dt}{ds} = r_{uu} \left( \frac{du}{ds} \right)^2 + 2r_{uv} \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + r_{vv} \left( \frac{dv}{ds} \right)^2 + r_u \frac{d^2u}{ds^2} + r_v \frac{d^2v}{ds^2} \quad (11)$$

en este sentido, sustituyendo en 9 los resultado de 10 y 11:

$$k_g = [(r_u x r_{uu}) \left( \frac{du}{ds} \right)^3 + (2r_u x r_{uv} + r_v + r_{uu}) \left( \frac{du}{ds} \right)^2 \frac{dv}{ds} + (r_u x r_{vv} + 2r_v + r_{uv}) \frac{du}{ds} \left( \frac{dv}{ds} \right)^2 + (r_v x r_{vv}) \left( \frac{dv}{ds} \right)^3] \cdot N + (r_u x r_v) \cdot N \left( \frac{du}{ds} \frac{d^2v}{ds^2} - \frac{d^2u}{ds^2} \frac{dv}{ds} \right) \quad (12)$$

**Paraboloide** Se observa que los coeficientes de  $\left( \frac{du}{ds} \right)^3$ ,  $\left( \frac{du}{ds} \right)^2 \frac{dv}{ds}$ ,  $\frac{du}{ds} \left( \frac{dv}{ds} \right)^2$ ,  $\left( \frac{dv}{ds} \right)^3$ ,  $\left( \frac{du}{ds} \frac{d^2v}{ds^2} - \frac{d^2u}{ds^2} \frac{dv}{ds} \right)$  son todos funciones de los coeficientes definidos en 4-6 y de sus derivadas respecto a u y v. Es interesante notar que la curvatura geodesica depende solamente de la primera forma fundamental.

Usando los símbolos de Christoffel  $\Gamma_{jk}^i (i, j, k = 1, 2)$  definidos de la siguiente forma:

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG - F^2)} \quad (13)$$

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{2EF_u - EE_v + FE_u}{2(EG - F^2)} \quad (14)$$

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{GE_v - FG_u}{2(EG - F^2)} \quad (15)$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{EG_u - FE_v}{2(EG - F^2)} \quad (16)$$

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{2GF_v - GG_u + FG_v}{2(EG - F^2)} \quad (17)$$

$$\Gamma_{22}^2 = \frac{EG_u - FE_v}{2(EG - F^2)} \quad (18)$$



la curvatura geodésica se reduce a:

$$k_g = [\Gamma_{11}^2 \left(\frac{du}{ds}\right)^3 + (2\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) \left(\frac{du}{ds}\right)^2 \frac{dv}{ds} + (\Gamma_{22}^2 - 2\Gamma_{12}^1) \frac{du}{ds} \left(\frac{dv}{ds}\right)^2 - \Gamma_{22}^1 \left(\frac{dv}{ds}\right)^3 + \frac{du}{ds} \frac{d^2v}{ds^2} - \frac{d^2u}{ds^2} \frac{dv}{ds}] \sqrt{(EG - F^2)} \quad (19)$$

Acorde a la definición, se puede determinar la ecuación diferencial de cualquier geodésica de cualquier superficie simplemente exigiendo que el valor  $k_g = 0$ . Al imponer esto en la ecuación 20 se obtiene:

$$\frac{du}{ds} \frac{d^2v}{ds^2} - \frac{d^2u}{ds^2} \frac{dv}{ds} = -\Gamma_{11}^2 \left(\frac{du}{ds}\right)^3 - (2\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) \left(\frac{du}{ds}\right)^2 \frac{dv}{ds} + (2\Gamma_{12}^1 - \Gamma_{22}^2) \frac{du}{ds} \left(\frac{dv}{ds}\right)^2 + \Gamma_{22}^1 \left(\frac{dv}{ds}\right)^3 \quad (20)$$

Alternativamente, se puede derivar la ecuacion diferencial de la geodesica considerando que la superficie normal  $N$  tiene la direccion normal a la curva geodesica  $+ - n$ .

$$nr_u = 0, nr_v = 0 \quad (21)$$

Mientras  $kn = \frac{dt}{ds}$ , la ecuacion 21 puede ser escrita de la forma:

$$\frac{dt}{ds} r_u = 0, \frac{dt}{ds} r_v = 0 \quad (22)$$

Si se sustituye en la ecuacion 22 en la 11 se tiene:

$$(r_{uu}r_u) \left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2(r_{uv}r_u) \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + (r_{vv}r_u) \left(\frac{dv}{ds}\right)^2 + E \frac{d^2u}{ds^2} + F \frac{d^2v}{ds^2} = 0 \quad (23)$$

$$(r_{uu}r_v) \left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2(r_{uv}r_v) \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + (r_{vv}r_v) \left(\frac{dv}{ds}\right)^2 + F \frac{d^2u}{ds^2} + G \frac{d^2v}{ds^2} = 0 \quad (24)$$

Al eliminar el término  $\frac{d^2v}{ds^2}$  de 2.1, usando 2.1, y eliminando en usando , empleando los símbolos de Christoffel, se obtiene:

$$\frac{du}{ds} = p, \quad (25)$$

$$\frac{dv}{ds} = q, \quad (26)$$

Las ecuaciones y están relacionadas por la primera forma fundamental,  $ds^2 = E ds^2 + 2F du dv + G dv^2$ . Si se elimina el término  $ds$  de ambas ecuaciones, estas ecuaciones se reducen a la 20

$$\frac{du}{ds} = p, \quad (27)$$

$$\frac{dv}{ds} = q, \quad (28)$$

$$\frac{dp}{ds} = -\Gamma_{11}^1 p^2 - 2\Gamma_{12}^1 pq - \Gamma_{22}^1 q^2, \quad (29)$$

$$\frac{dq}{ds} = -\Gamma_{11}^2 p^2 - 2\Gamma_{12}^2 pq - \Gamma_{22}^2 q^2. \quad (30)$$

## 2.2 Cálculo de las ecuaciones en superficie paramétrica

En pos de reforzar el entendimiento del lector sobre el problema se presentan algunos ejemplos de superficies y sus respectivos sistemas de ecuaciones diferenciales que determinan las curvas geodésicas.

### 2.2.1 Plano por el origen

Sean  $V_1 = (x_1, y_1, z_1)$  y  $V_2 = (x_2, y_2, z_2)$  los vectores que generan el plano. La ecuación paramétrica 31 representa dicho plano.

$$r(u, v) = (x_1 u + x_2 v, y_1 u + y_2 v, z_1 u + z_2 v) \quad (31)$$

Utilizando las ecuaciones de la geodésica 27-30, las ecuaciones de la primera forma fundamental 4-6 y la ecuación paramétrica 31 del plano obtenemos E, F y G en 32 y en 33-34 sus respectivas derivadas parciales.

$$E = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2, \quad F = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2, \quad G = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2, \quad (32)$$

$$E_u = 0, \quad F_u = 0, \quad G_u = 0, \quad (33)$$

$$E_v = 0, \quad F_v = 0, \quad G_v = 0, \quad (34)$$

Entonces, como todas las derivadas parciales son nulas, usando 13-18, los símbolos de Christoffel valen cero.

Finalmente obtenemos las ecuaciones de la geodésica para el plano en 35-38.

$$\frac{du}{ds} = p, \quad (35)$$

$$\frac{dv}{ds} = q, \quad (36)$$

$$\frac{dp}{ds} = 0, \quad (37)$$

$$\frac{dq}{ds} = 0 \quad (38)$$

### 2.2.2 Esfera unitaria centrada en el origen

La ecuación paramétrica 39 representa una esfera unitaria centrada en el origen.

$$r(u, v) = (\cos(u)\sin(v), \sin(u)\sin(v), \cos(v)), (u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi] \quad (39)$$

De forma análoga que el caso anterior, utilizamos las ecuaciones de la geodésica 27-30, las ecuaciones de la primera forma fundamental 4-6 y la ecuación paramétrica 39 del plano obtenemos E, F y G en 40 las ecuaciones de la primera forma fundamental y en 41-42 sus respectivas derivadas parciales.

$$E = \sin^2(v), \quad F = 0, \quad G = 1, \quad (40)$$

$$E_u = 0, \quad F_u = 0, \quad G_u = 0, \quad (41)$$

$$E_v = 2\sin(v)\cos(v), \quad F_v = 0, \quad G_v = 0, \quad (42)$$

De esta forma, usando 13-18, obtenemos los símbolos de Christoffel en 43-45

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{11}^1 = \Gamma_{22}^1 = \Gamma_{22}^2 = 0, \quad (43)$$

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{\cos(v)}{\sin(v)}, \quad (44)$$

$$\Gamma_{11}^2 = -\sin(v)\cos(v). \quad (45)$$

Las ecuaciones de la geodésica para la esfera son 46-49.

$$\frac{du}{ds} = p, \quad (46)$$

$$\frac{dv}{ds} = q, \quad (47)$$

$$\frac{dp}{ds} = \frac{-2\cos(v)}{\sin(v)}pq, \quad (48)$$

$$\frac{dq}{ds} = \sin(v)\cos(v)p^2. \quad (49)$$

### 2.2.3 Paraboloide hiperbólico

La ecuación paramétrica 50 representa el paraboloide hiperbólico.

$$r(u, v) = (u, v, uv) \quad (50)$$

Nuevamente, a partir de las ecuaciones de la geodésica 27-30, las ecuaciones de la primera forma fundamental 4-6 y la ecuación paramétrica 50 del plano obtenemos E, F y G en 51 las ecuaciones de la primera forma fundamental y en 52-53 sus respectivas derivadas parciales.

$$E = 1 + v^2, \quad F = uv, \quad G = 1 + u^2, \quad (51)$$

$$E_u = 0, \quad F_u = v, \quad G_u = 2u, \quad (52)$$

$$E_v = 2v, \quad F_v = u, \quad G_v = 0, \quad (53)$$

A partir de lo anterior se sustituye en 13-18 y se obtienen los símbolos de Christoffel en 54-56.

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{22}^1 = \Gamma_{22}^2 = 0, \quad (54)$$

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{v}{u^2 + v^2 + 1}, \quad (55)$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{u}{u^2 + v^2 + 1}. \quad (56)$$

Las ecuaciones de la geodésica para el paraboloides hiperbólico son [57-60](#).

$$\frac{du}{ds} = p, \quad (57)$$

$$\frac{dv}{ds} = q, \quad (58)$$

$$\frac{dp}{ds} = \frac{-2v}{u^2 + v^2 + 1}pq, \quad (59)$$

$$\frac{dq}{ds} = \frac{-2u}{u^2 + v^2 + 1}pq. \quad (60)$$

### 3 Metodología

El sistema de ecuaciones diferenciales 27-30 puede resolverse modelándolo de las siguientes dos formas:

- Problema de Valor Inicial (PVI).
- Problema con Condiciones de Borde (PCB).

La primera forma consiste en proporcionar el valor inicial para cada una de las cuatro ecuaciones diferenciales del sistema. Como la solución de un PVI es única, al indicar los valores iniciales queda determinada una sola curva.

En el caso del PCB se dan dos puntos del espacio como condiciones de borde por lo que las ecuaciones diferenciales del sistema tienen muchas soluciones o incluso ninguna.

Generalmente problema a resolver se asemeja más a un PCB que a un PVI, por lo que la forma más natural de resolverlo sería a partir del segundo. Debido a que la complejidad computacional que implica el PCB es considerablemente mayor que el PVI se optó por el primer método para la resolución. En 3.1 se demuestra que es posible modelar las geodésicas como un PVI.

Por otro lado el sistema presentado en 27-30 es un sistema analítico y no puede resolverse computacionalmente por lo que es necesario utilizar un algoritmo numérico para modelar y aproximar el problema. El método seleccionado para el estudio del fue el método de Euler hacia adelante, que fue elegido debido a su simplicidad en comparación a otros métodos considerados como el Método del Trapecio.

#### 3.1 Problema de Valor Inicial (PVI)

El Problema de Valor Inicial, también conocido como problema de Cauchy, es básicamente un sistema de ecuaciones compuesto de una EDO y una condición inicial de la misma.

A continuación se explica en más detalle y demuestra que las ecuaciones que rigen las geodésicas se pueden considerar un PVI.

Previamente, las siguientes definiciones REFCURSO nos ayudaran en la muestra:

- Una ecuación diferencial es una ecuación que relaciona las derivadas de una o

más variables dependientes respecto a una o más variables independientes.

- Una ecuación diferencial ordinaria (EDO) es una ecuación diferencial que relaciona una función desconocida de una única variable independiente con sus derivadas.
- Dada una función  $f : R^2 \rightarrow R$  el Problema de Valores Iniciales consiste en hallar la función  $y = y(x)$  tal que:

$$(PVI) : \begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y(y_0) \in R \end{cases}$$

Entonces utilizando las ecuaciones planteadas en 27 - 30 y considerando la siguiente notación:

$$u'(s) = \frac{du}{ds} = p \quad \rightarrow u'(s) = f_1(s, u(s)), \quad (61)$$

$$v'(s) = \frac{dv}{ds} = q \quad \rightarrow v'(s) = f_2(s, v(s)), \quad (62)$$

$$p'(s) = \frac{dp}{ds} = -\Gamma_{11}^1 p^2 - 2\Gamma_{12}^1 pq - \Gamma_{22}^1 q^2 \quad \rightarrow p'(s) = f_3(s, p(s)), \quad (63)$$

$$q'(s) = \frac{dq}{ds} = -\Gamma_{11}^2 p^2 - 2\Gamma_{12}^2 pq - \Gamma_{22}^2 q^2. \quad \rightarrow q'(s) = f_4(s, p(s)). \quad (64)$$

se puede representar las ecuaciones diferenciales como un PVI de la siguiente manera:

$$(PVI) : \begin{cases} y'(s) = f(s, u(s), v(s), p(s), q(s)) \\ y(s_0) = (u(s_0), v(s_0), p(s_0), q(s_0)) \in R^4 \end{cases}$$

Como los ejemplos de la sección 2.2 son casos particulares de las ecuaciones 27-30 también son PVI, en particular el paraboloide hiperbólico.

### 3.2 Discretización del problema

El método de Euler, denominado así en honor a su autor Leonhard Euler, es un algoritmo matemático empleado para la resolución del Problema de Valor Inicial. Por su simplicidad este método se utiliza como base para métodos ms complejos y de mayor precisión.

Es un mtodo de primer orden, lo cual implica que el error local es proporcional al cuadrado del paso, y el error global es proporcional al paso. Tiene dos variantes:

Euler hacia Adelante y Euler hacia Atrás.

En este caso limitamos nuestro análisis al paraboloide hiperbólico, pero el razonamiento es análogo en las otras superficies.

Partiendo de las ecuaciones (57-60) y utilizando Euler hacia Adelante, se calcula a continuación las ecuaciones en su forma discreta.

Para  $u$ :

$$\frac{du}{ds} = p \Rightarrow \frac{u_{k+1} - u_k}{h} = p_k \Rightarrow u_{k+1} = u_k + p_k h$$

Para  $v$ :

$$\frac{dv}{ds} = q \Rightarrow \frac{v_{k+1} - v_k}{h} = q_k \Rightarrow v_{k+1} = v_k + q_k h$$

Para  $p$ :

$$\frac{dp}{ds} = \frac{-2v}{u^2 + v^2 + 1} p q \Rightarrow \frac{p_{k+1} - p_k}{h} = \frac{-2v_k}{u_k^2 + v_k^2 + 1} p_k q_k \Rightarrow p_{k+1} = \frac{-2v_k}{u_k^2 + v_k^2 + 1} p_k q_k h + p_k$$

Finalmente, para  $q$ :

$$\frac{dq}{ds} = \frac{-2u}{u^2 + v^2 + 1} p q \Rightarrow \frac{q_{k+1} - q_k}{h} = \frac{-2u_k}{u_k^2 + v_k^2 + 1} p_k q_k \Rightarrow q_{k+1} = \frac{-2u_k}{u_k^2 + v_k^2 + 1} p_k q_k h + q_k$$

En resumen:

$$u_{k+1} = u_k + p_k h \quad (65)$$

$$v_{k+1} = v_k + q_k h \quad (66)$$

$$p_{k+1} = \frac{-2v_k}{u_k^2 + v_k^2 + 1} p_k q_k h + p_k \quad (67)$$

$$q_{k+1} = \frac{-2u_k}{u_k^2 + v_k^2 + 1} p_k q_k h + q_k \quad (68)$$

El siguiente pseudocódigo 1 expresa una forma de introducir el problema en softwares tales como "Octave", "R", "Python", etc.



---

**Algorithm 1** Pseudocódigo para resolver el PVI mediante el método "Euler hacia adelante"

---

**Require:**  $y(0) = y_0; x(0) = 0; i = 1; h; f$

```
1: while  $x(i) < x_f$  do  
2:    $y(i+1) \leftarrow y(i) + h * f(x(i), y(i))$   
3:    $x(i+1) \leftarrow x(i) + h$   
4:    $i \leftarrow i + 1$   
5: end while
```

---

## 4 Estudio Experimental

### 4.1 Ambiente de trabajo

Durante el desarrollo de la experiencia se trabajo con:

- Lenguaje de programación: Octave.
- Características de la computadora utilizada:
  - HP Pavilion 15 Notebook
  - Procesador: AMD A10-7300 Radeon R6, 10 Compute Cores 4C+6G
  - Memoria RAM: 8 GB
  - Sistema Operativo: Manjaro 17.1.12 x64 (Deepin desktop)
  - Versión de Octave: 4.4.1

### 4.2 Resultados Obtenidos

En las condiciones del ambiente de trabajo descrito en 4.1 se realizó la ejecución de los scripts creados.

En las figuras 2 - 4 se puede apreciar el resultado obtenido

Fig. 2. Euler

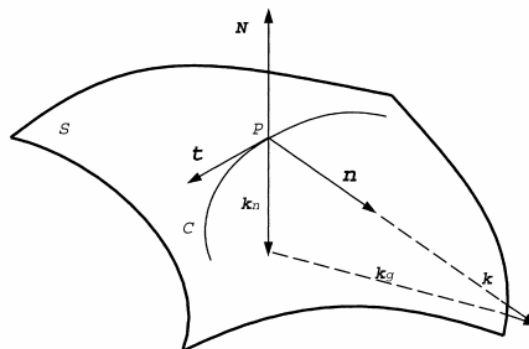


Fig. 3. Euler

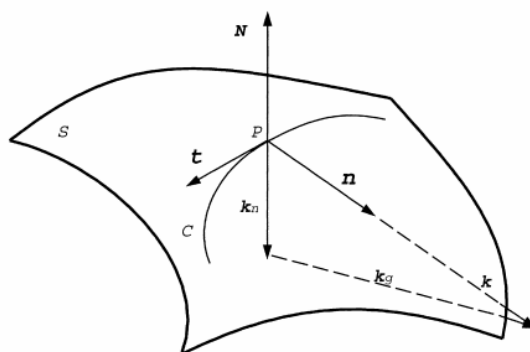
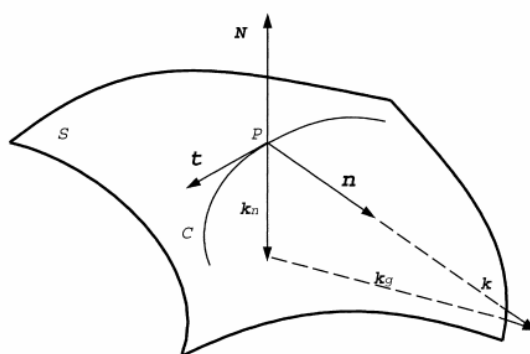


Fig. 4. Euler



## **5 Conclusiones**

## References

- [1] I. Horváth. “shape interrogation for computer aided design and manufacturing“, by nicholas m. patrikalakis and takashi maekawa, springer-verlag, berlin, heidelberg, new york, 2002, isbn 3-540-42454-7, 408 pages. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 24(6):467–468, Dec 2002.

Octave:Función Tic() <https://octave.sourceforge.io/octave/function/tic.html>