Modélisation et résolution de problèmes par des graphes

François Delbot

28 août 2019

Exemple introductif

Un berger, en compagnie d'un loup (qu'il souhaite dresser), d'une chèvre (pour le lait) et d'un chou (son repas du soir), souhaite traverser une rivière. Pour cela, il dispose d'une petite barque qui ne peut contenir que lui-même ainsi qu'un et un seul autre légume ou animal. Malheureusement, laisser le loup sans surveillance avec la chèvre signifie la fin de cette pauvre bête. De la même manière, laisser la chèvre seule avec le chou priverait le berger de son repas du soir.

1. Trouvez une solution à ce problème.
2. Modélisez ce problème sous forme de graphe et expliquez comment obtenir une solution à partir de celui-ci.

Le loup, la chèvre et le choux (solution)

Trouver une solution n'est pas trop difficile :

1. Le berger traverse avec la chèvre.
2. Il revient à vide.
3. Le berger traverse avec le loup.
4. Le berger revient avec la chèvre.
5. Le berger fait traverser le chou.
6. Il revient à vide.
7. Le berger traverse avec la chèvre.

Mais, supposons que pour une raison ou une autre, le berger souhaite une autre solution. Sans outil approprié, cela n'est pas aisé.

Le loup, la chèvre et le choux (Modélisation)

Un graphe modélise des entités ainsi que des relations entre entités.

1. Quelles sont les entités ?
2. Que représentent les relations entre ces entités ?
3. Le graphe doit-il être orienté ?

Le loup, la chèvre et le choux (Modélisation)

Ce problème peut être modélisé à l'aide d'un graphe non orienté.

Désignons par B le berger, par C la chèvre, par K le chou et par L le loup. Les sommets du graphe sont des couples précisant qui est sur la rive de départ et qui est sur la rive de destination.

Ainsi, le couple (BCK,L) signifie que le berger est sur la rive de départ avec la chèvre et le chou (qui sont donc sous surveillance), alors que le loup est sur l'autre rive.

Le loup, la chèvre et le choux (Modélisation)

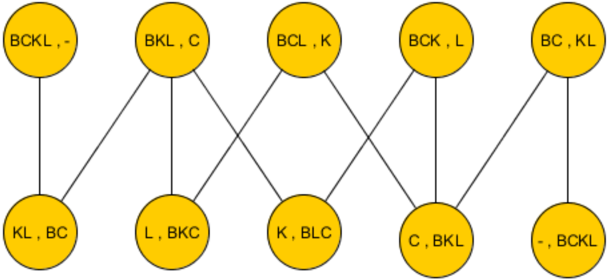
Une arête relie deux sommets lorsqu'il est possible de passer d'une situation à une autre.

En transportant la chèvre, le berger passe par exemple du sommet (BCK,L) au sommet (K,BCL).

Dans ce graphe, nous n'ajouterons pas les situations interdites.

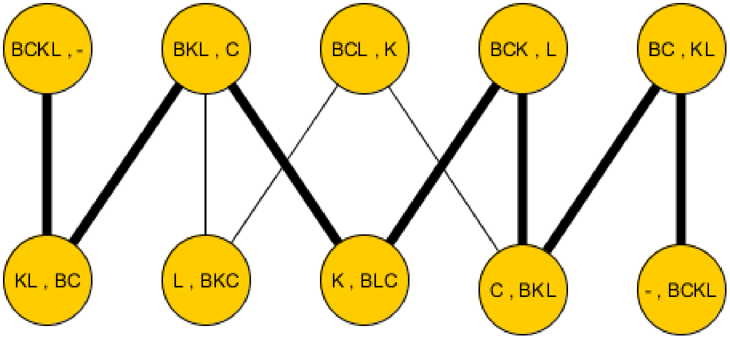
Le loup, la chèvre et le choux (Modélisation)

Le graphe suivant représente l'ensemble des états possibles ainsi que les passages possibles d'un état à un autre :



Il suffit ensuite de trouver un chemin (n'importe lequel, mais le plus court étant le plus simple pour nous) entre la situation initiale (BCKL,-) et notre objectif (-,BCKL).

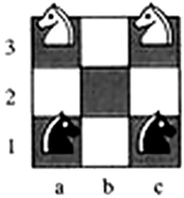
Le loup, la chèvre et le choux (Modélisation)



Serez-vous capable d'énumérer toutes les solutions sans passer deux fois par le même sommet ?

Le problème des cavaliers
Énoncé

Sur un échiquier 3x3, les deux cavaliers noirs sont placés sur les cases $a1$ et $c1$, les deux cavaliers blancs occupant les cases $a3$ et $c3$. L'objectif est d'échanger les positions des cavaliers blancs avec celles des cavaliers noirs. Pour cela, vous devez utiliser un graphe pour déterminer les mouvements possibles des différents cavaliers. Grâce à ce graphe, déterminez la suite des mouvements alternés qui permettrons d'échanger les positions des cavaliers. Les cavaliers blancs commencent.



Le problème des cavaliers

Les questions à se poser

Pour chaque problème, il convient d'analyser calmement l'ensemble des données. Il faut, bien sur, faire preuve de créativité. Mais l'expérience, les similarités avec des situations déjà rencontrées vont vous faciliter la tache. L'essentiel étant de partir sur de bonnes bases, il faut répondre aux questions suivantes :

1. Que vont représenter les sommets ?
2. Le graphe doit-il être orienté ?
3. Que vont représenter les arêtes (arcs) ?

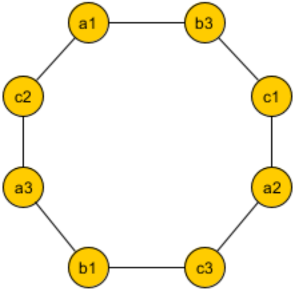
Le problème des cavaliers

Proposition

Il existe souvent plusieurs possibilités. Mais pensez à rester le plus simple possible.

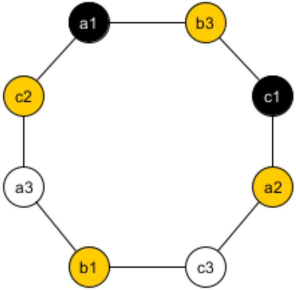
1. Les sommets représentent les cases de l'échiquier.
2. Une arête entre deux cases A et B représente la possibilité pour une pièce de passer de la case A à la case B (et inversement).
3. Le graphe n'est pas orienté.

Le problème des cavaliers
Solution



On obtient le graphe ci-contre, représentant les transitions possibles pour les cavaliers. Pour obtenir la solution, il suffit de placer les cavaliers sur les sommets de départ puis de les déplacer alternativement.

Le problème des cavaliers
Solution



A partir de cette situation initiale, nous allons déplacer chaque cavalier d'un cran :

1. $a1 \rightarrow b3$
2. $c1 \rightarrow a2$
3. $c3 \rightarrow b1$
4. $a3 \rightarrow c2$

En répétant cette opération 4 fois, on obtient la solution voulue.

Graphe d'intervalle

Définition

Un intervalle est un ensemble compris entre deux valeurs. On peut parler d'intervalle de temps entre deux horaires, par exemple entre 17h00 et 18h30. Considérons ensuite un ensemble d'intervalles $I_1, I_2, \ldots, I_n \subset \mathbb{R}$. Ces intervalles peuvent bien sur s'intersecter :

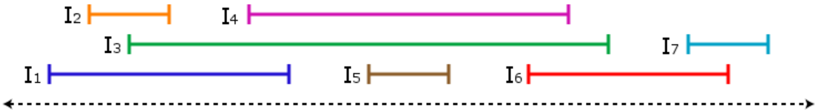


FIGURE – Exemple de 7 intervalles

Graphe d'intervalle

Definition (Graphe d'intervalle)

Un graphe d'intervalle est le graphe d'intersection d'un ensemble d'intervalles et se construit de la manière suivante :

1. Chaque sommet du graphe d'intervalle représente un intervalle de l'ensemble.
2. Une arête relie deux sommets lorsque les deux intervalles correspondants s'intersectent.

Graphe d'intervalle

En reprenant l'exemple de la figure 1 on obtient donc le graphe d'intervalle suivant :

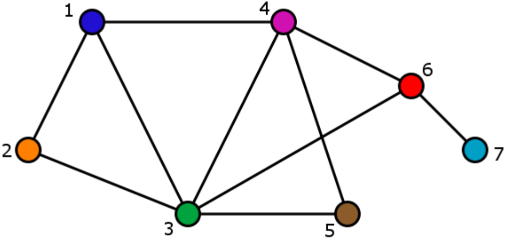


FIGURE – Exemple de graphe d'intervalle

Déterminer si un graphe est un graphe d'intervalles

Corde

Definition (Corde)

Une corde est une arête reliant deux sommets non adjacents d'un cycle.

Par exemple, si on considère le graphe précédent et le cycle formé par les sommets $(1, 2, 3, 5, 4)$, on peut remarquer que l'arête $(1, 3)$ constitue une corde pour ce cycle.

Déterminer si un graphe est un graphe d'intervalles

Definition (Graphe cordal)

Un graphe est cordal si chaque cycle de taille supérieure ou égale à 4 possède une corde. Un graphe cordal est aussi appelé graphe triangulé.

En particulier, le graphe d'intervalles vu juste avant est cordal.
Cette définition revient à dire que tout cycle sans corde possède au plus trois sommets.

Déterminer si un graphe est un graphe d'intervalles

Definition (Graphe de comparabilité)

Un graphe de comparabilité est un graphe non orienté qui relie les paires d'éléments qui sont comparables les uns aux autres dans un ordre partiel donné. Cela revient à dire que dans un tel graphe, si les arêtes (a, b) et (b, c) sont présentes, alors l'arête (a, c) est également présente.

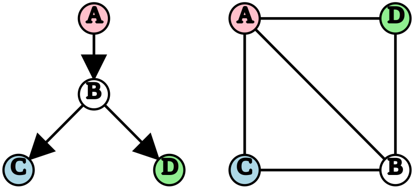


FIGURE – Exemple de graphe représentant un ordre partiel et son graphe de comparabilité associé.

Déterminer si un graphe est un graphe d'intervalles

Exemple de graphe de comparabilité

Le graphe orienté de la figure précédente représente un ordre partiel :

- Le sommet A est situé avant le sommet B.
- Le sommet B est situé avant les sommets C et D.
- On ne peut pas comparer l'ordre relatif des sommets C et D.

Déterminer si un graphe est un graphe d'intervalles

Exemple de graphe de comparabilité

Ainsi, le graphe non orienté représente le graphe de comparabilité associé au graphe orienté :

- Le sommet A est comparable au sommet B, et donc aux sommets C et D : les arêtes (A,B), (A,C) et (A,D) existent.
- Le sommet B est comparable aux sommets A, C et D : les arêtes (A,B), (B,C) et (B,D) existent.
- Les sommets C et D sont comparables au sommet B et donc au sommet A, mais ne sont pas comparables entre eux : les arêtes (B,C), (B,D), (A,C), (A,D) existent, mais l'arête (C,D) n'existe pas.

Déterminer si un graphe est un graphe d'intervalles

Algorithm 1: Algorithme permettant de déterminer si un graphe est un graphe de comparabilité

Data: $G = (V, E)$ un graphe non-orienté
Result: Vrai si le graphe est un graphe de comparabilité, faux sinon.

```
F = ∅;
while F ≠ E do
    Choisir une arête e ∈ E − F;
    Donner une orientation à e;
    Propager cette orientation de sorte à assurer une orientation transitive de G;
    if une arête est orienté dans les deux sens then
        return faux;
    end
    else
        Rajouter à F toutes les arêtes nouvellement orientées;
    end
end
return Vrai;
```

Exemple de déroulement de l'algorithme

Nous allons vérifier si le graphe non-orienté est un graphe de comparabilité :

- **[Initialisation.]** $F = \emptyset$.
  $E = \{(A, B), (A, C), (A, D), (B, C), (B, D)\}$.
- **[Etape 1.]** On choisi l'arête (B, C). On oriente cette arête de C vers B. $F = \{(C, B)\}$.
- **[Etape 2.]** On choisi l'arête (B, D). On oriente cette arête de D vers B. $F = \{(C, B), (D, B)\}$. Le choix de l'orientation de l'arête nous est imposé. En effet, choisir l'orientation allant de B vers D aurait imposé la transitivité de C vers D. Ors, l'arête (C, D) n'existe pas.

Exemple de déroulement de l'algorithme

- **[Etape 3.]** On choisi l'arête (A, C). On oriente cette arête de A vers C. Ce choix impose également de propager cette orientation à l'arête (A, B) afin d'assurer la transitivité $(A \rightarrow C$ et $C \rightarrow B$ donc $A \rightarrow B)$
$F = \{(C, B), (D, B), (A, C), (A, B)\}$.
- **[Etape 4.]** On choisi la dernière arête disponible (A, D) ainsi qu'une orientation. De fait, les deux orientations possibles sont compatibles avec la transitivité. Choisissons de D vers A.
$F = \{(C, B), (D, B), (A, C), (A, B), (D, A)\}$.
- **[Fin.]** $F \Leftrightarrow E$. Retourner vrai, le graphe est un graphe de comparabilité.

Déterminer si un graphe est un graphe d'intervalles

Definition (Graphe complémentaire)

Un graphe complémentaire G_c d'un graphe simple G est un graphe simple tel que deux sommets distincts de G_c sont adjacents si et seulement si ils ne sont pas adjacents dans G.

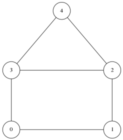


FIGURE – Exemple de graphe

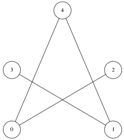


FIGURE – Graphe complémentaire associé

Déterminer si un graphe est un graphe d'intervalles

Theorem (Graphe d'intervalle)

Un graphe G est un graphe d'intervalles si et seulement si son graphe complémentaire est un graphe de comparabilité et si G est un graphe cordal.

Qui a tué le Duc de Densmore ? (1/4)

Cet exercice est inspiré de la nouvelle de Claude Berge « Qui a tué le Duc de Densmore » (Bibliothèque Oulipienne numéro 67, 1994, Réédition Castor Astral, 2000). Dans cette nouvelle policière, le lecteur peut découvrir le meurtrier en manipulant des intervalles, et en tentant de construire le graphe d'intervalle associé.

Qui a tué le Duc de Densmore ? (1/4)

Un jour, Sherlock Holmes reçoit la visite de son ami Watson que l'on avait chargé d'enquêter sur un assassinat mystérieux datant de plus de trois ans. À l'époque, le Duc de Densmore avait été tué par l'explosion d'une bombe, qui avait entièrement détruit le château de Densmore où il s'était retiré. Les journaux d'alors relataient que le testament, détruit lui aussi dans l'explosion, avait tout pour déplaire à l'un de ses proches. Or, avant de mourir, le Duc les avait tous invités à passer quelques jours dans sa retraite écossaise.

Qui a tué le Duc de Densmore ? (1/4)

– **Holmes :** Je me souviens de cette affaire ; ce qui est étrange, c'est que la bombe avait été fabriquée spécialement pour être cachée dans l'armure de la chambre à coucher, ce qui suppose que l'assassin a nécessairement effectué plusieurs visites au château !
– **Watson :** Certes, et pour cette raison, j'ai interrogé chacun de ses proches : Anne, Betty, Charlotte, Edith, François, Grégoire et Hamed. Il ont tous juré qu'ils n'avaient été au château de Densmore qu'une seule fois dans leur vie.
– **Holmes :** Hum ! Leur avez-vous demandé à quelle période ils ont eu leur séjour respectif ?
– **Watson :**Hélas ! Aucun ne se rappelait les dates exactes, après plus de trois ans ! Néanmoins, je leur ai demandé qui ils avaient rencontré :

Qui a tué le Duc de Densmore ? (1/4)

- Anne a rencontré Betty, Charlotte, François et Grégoire.
- Betty a rencontré Anne, Charlotte, Edith, François et Hamed.
- Charlotte a rencontré Anne, Betty et Edith.
- Edith a rencontré Betty, Charlotte et François.
- François a rencontré Anne, Betty, Edith et Hamed.
- Gregoire a rencontré Anne et Hamed.
- Hamed a rencontré Betty, François et Grégoire.

Vous voyez, mon cher Holmes, les réponses sont concordantes ! C'est alors que Holmes prit un crayon et dessina un étrange petit dessin, avec des points marqué A, B, C, E, F, G, H et des lignes reliant certains de ces points. Puis Holmes déclara :

– **Holmes :** Tiens, tiens ! Ce que vous venez de me dire détermine d'une façon unique l'assassin.

Serez-vous capable de retrouver l'assassin ?