Programmation linéaire

François Delbot

2 novembre 2019

La programmation linéaire

Un autre outil de la recherche opérationnelle

- Un outil de modélisation.
- Un outil de résolution, grâce à de nombreux solveurs.
- Permet de traiter des problèmes de grande ou petite taille.

Exemple introductif

Un problème de production

Un fabricant produit 2 types de yaourts à la fraise A et B à partir de Fraise, de Lait et de Sucre. Chaque pot de yaourt doit respecter les proportions suivantes de matières premières :

	A	B
Fraise	2 kg	1 kg
Lait	1 kg	2 kg
Sucre	0 kg	1 kg

On dispose de 800 Kg de Fraises, 700 Kg de Lait et 300 Kg de sucre. La vente de 1 pot de yaourts A et B rapporte respectivement 4 euros et 5 euros. Le fabricant cherche à maximiser son profit.

Exemple introductif

Modélisation

Pour modéliser un tel problème, il convient de se poser un certain nombre de questions :

- Sur quelles quantités peut-on travailler ?
- Que cherche-t-on à optimiser ?
- Quelles sont les contraintes du problème ?

Modélisation

Sur quelles quantités peut-on travailler ?

Identifier les variables

1. Seules valeurs non constantes : les quantités de yaourts A et B produites.
2. On parle de variables.
3. On les notera X_A et X_B (par exemple).

Modélisation

Que cherche-t-on à optimiser ?

Identifier les variables

1. Le profit, souvent noté Z
2. Calculé à partir de X_A et X_B
3. On parle de fonction objectif

La vente de 1 pot de yaourts A et B rapporte respectivement 4 euros et 5 euros. Le nombre de pots produits est représenté par les variables. Ainsi : $Z = 4 \cdot X_A + 5 \cdot X_B$. C'est la fonction que nous allons chercher à maximiser.

Modélisation

Quelles sont les contraintes du problème ?

Optimiser une fonction objectif est une chose, a priori, simple. Cependant, il ne faut pas négliger les contraintes induites par les quantités limités de ressources à notre disposition.

Identifier les contraintes (exemple avec les fraises)

1. Première contrainte : 800 Kg de fraises disponibles
2. La quantité utilisée dépend de la production : $2X_A + X_B$
3. D'où la contrainte : $2X_A + X_B \leq 800$

Modélisation

Quelles sont les contraintes du problème ?

En suivant le même raisonnement, on obtient les trois contraintes suivantes :

1. $2X_A + X_B \leq 800$ (fraises)
2. $X_A + 2X_B \leq 700$ (lait)
3. $X_B \leq 300$ (sucre)

De plus, le nombre de pots de yaourts A et B est forcement positif. D'où les deux contraintes supplémentaires :

1. $X_A \geq 0$
2. $X_B \geq 0$

Modélisation

Le programme linéaire

Ainsi, avec les différentes informations, on obtient le programme linéaire suivant :

Programme linéaire final

$$
\begin{array}{llcccl}
\text{Max} & 4X_A & + & 5X_B & & \\
 & 2X_A & + & X_B & \leq & 800 \\
 & X_A & + & 2X_B & \leq & 700 \\
 & & & X_B & \leq & 300 \\
 & X_A, X_B & \geq & 0 & &
\end{array}
$$

Ce type de modèle peut évoluer très facilement :

1. Si on rajoute un produit alors il suffit de rajouter une variable.
2. Si on ajoute une ressource critique il suffit d'ajouter une contrainte.

Modélisation par un programme linéaire

Un programme linéaire possède trois composantes :

1. Les variables.
2. Une fonction économique (aussi appelée fonction objectif).
3. Un ensemble de contraintes.

Modélisation par un programme linéaire

Les variables

Les variables

Les variables correspondent aux quantités variables (des produits fabriqués, par exemple). Il s'agit des éléments sur lesquels nous allons avoir un impact en ayant la possibilité de modifier leurs valeurs.

Modélisation par un programme linéaire

La fonction économique

La fonction objectif

La fonction objectif correspond à une combinaison linéaire des différentes variables. C'est cette fonction que l'on souhaite optimiser, en la maximisant ou en la minimisant.

Modélisation par un programme linéaire

Les contraintes

Les contraintes

L'optimisation de la fonction objectif se fait en tenant compte des différentes contraintes liées aux variables. Chaque contrainte peut être représentée par une équation ou une inéquation. Chaque contrainte doit être linéaire.

Modélisation par un programme linéaire

On peut écrire ainsi un programme linéaire avec n variables $X_1, \dots, X_n$ et m contraintes.

$$Min \ ou \ Max \ \sum_{i=1}^{n} C_i X_i$$

sous les contraintes

$$\sum_{i=1}^{n} A_{ij} X_i \leq B_j, (j = 1 \dots m)$$

$$X_i \in \mathbb{R}, (i = 1 \dots n)$$

1. **Linéarité :** Objectif et contraintes sont des fonctions linéaires des variables de décision (les coefficients C_i et A_{ij} des variables sont constants)
2. **Continuité :** Les variables peuvent prendre n'importe quelle valeur réelle respectant les contraintes linaires.

Comment résoudre un programme linéaire

Résolution graphique

- Un programme linéaire à 2 variables.
- Un repère orthonormé.
- Chaque point du plan possède une abscisse et une ordonnée.
- La valeur de la première variable représentera l'abscisse d'un point et la valeur de la seconde représentera son ordonnée.
- Chaque point du plan correspond une solution, éventuellement non réalisable.

Comment résoudre un programme linéaire

Résolution graphique

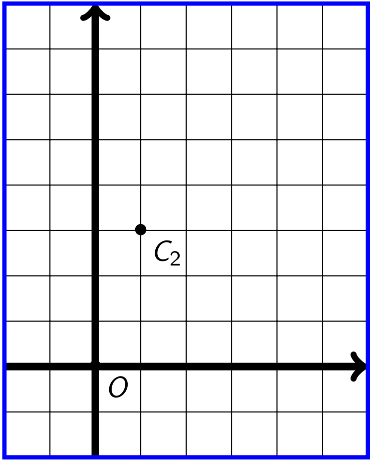
Reprenons notre exemple introductif :

Exemple de programme linéaire

$$\begin{array}{lccccc}
\text{Max} & 4X_A & + & 5X_B & & & \text{(Fonction objectif)} \\
 & 2X_A & + & X_B & \leq & 800 & \text{(C1)} \\
 & X_A & + & 2X_B & \leq & 700 & \text{(C2)} \\
 & & & X_B & \leq & 300 & \text{(C3)} \\
X_A, X_B & \geq & 0 & & & & \text{(C4) et (C5)}
\end{array}$$

Comment résoudre un programme linéaire

Résolution graphique



La fonction objectif que nous souhaitons maximiser vaut :

$$4X_A + 5X_B$$

Le point C_2 a pour coordonnées $(1, 3)$. Son abscisse va correspondre à la variable X_A tandis que son ordonnée va correspondre à la variable X_B. Ainsi, le point C_2 correspond à la solution

$$4 \cdot 1 + 5 \cdot 3 = 19$$

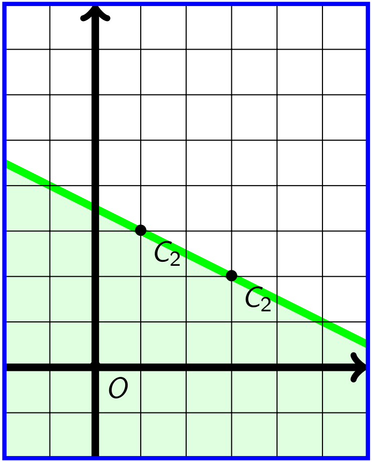
Comment résoudre un programme linéaire

Résolution graphique

Chaque contrainte étant de la forme $A \cdot X + B \cdot Y \leq C$, on peut en déduire un demi-plan contenant tous les points respectant cette contrainte. La frontière de ce demi-plan étant déterminée par l'équation de droite suivante : $A \cdot X + B \cdot Y = C$.

Comment résoudre un programme linéaire

Résolution graphique



Prenons par exemple la contrainte $C_2 : X_A + 2X_B \leq 700$. Chaque unité de la grille vaut 100. On considère la frontière de l'inéquation, c'est à dire la droite $X_A + 2X_B = 700$. Il suffit de calculer deux points de la droite :

1. Posons $X_A = 100$. On en déduit que X_B vaut $X_B = \frac{700-X_A}{2} = 300$.
2. Posons $X_A = 300$. On en déduit que X_B vaut $X_B = \frac{700-X_A}{2} = 200$.

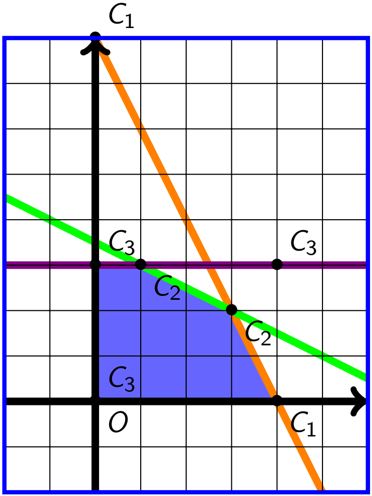
Comment résoudre un programme linéaire

Résolution graphique

L'intersection de ces demi-plans va former un polyèdre contenant l'ensemble des points qui respectent toutes les contraintes. Il ne reste plus qu'à déterminer lequel de ces point permet d'optimiser notre fonction objectif.

Comment résoudre un programme linéaire

Résolution graphique



Zone admissible induite par l'ensemble des contraintes. Cette zone est aussi appelée polyèdre des solutions.

Chaque point situé à l'intérieur ou sur les frontières correspond à une solution admissible.

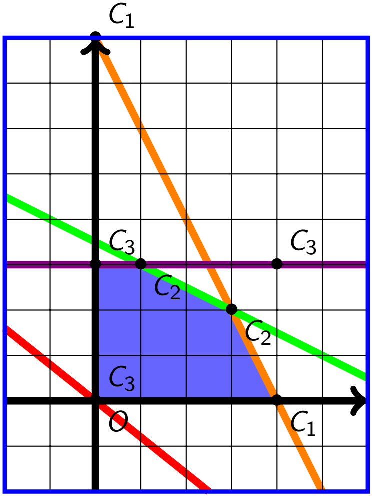
Comment résoudre un programme linéaire

Résolution graphique

Considérons maintenant la fonction objectif. Étant une combinaison linéaire des deux variables, elle peut être vu comme une équation de droite. En déterminant une valeur triviale (généralement en mettant la valeur de la fonction objectif à 0), il est possible de tracer cette droite.

Comment résoudre un programme linéaire

Résolution graphique



Droite représentant la fonction objectif initialisée à une valeur triviale :
$4X_A + 5X_B = 0$

1. $(X_A = 0, X_B = 0)$
2. $(X_A = -200, X_B = 160)$

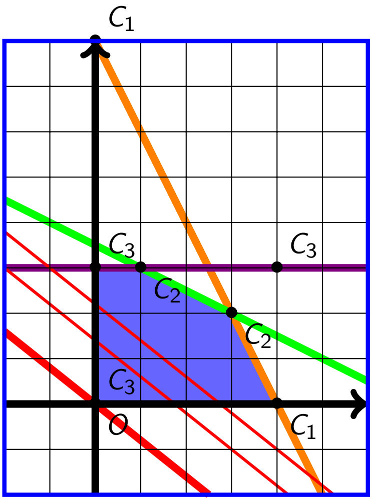
Comment résoudre un programme linéaire

Résolution graphique

Changer la valeur de la fonction objectif n'aura aucun impact sur les coefficients des variables. Ainsi, toutes les droites générée pour différentes valeurs de la fonction objectif seront parallèles.

Comment résoudre un programme linéaire

Résolution graphique



- Augmentation de la valeur de la fonction objectif : $4X_A + 5X_B = 700$
  1. $(X_A = -200, X_B = 300)$
  2. $(X_A = 425, X_B = -200)$
- Augmentation de la valeur de la fonction objectif : $4X + 5Y = 1100$
  1. $(X_A = -200, X_B = 380)$
  2. $(X_A = 525, X_B = -200)$

Comment résoudre un programme linéaire

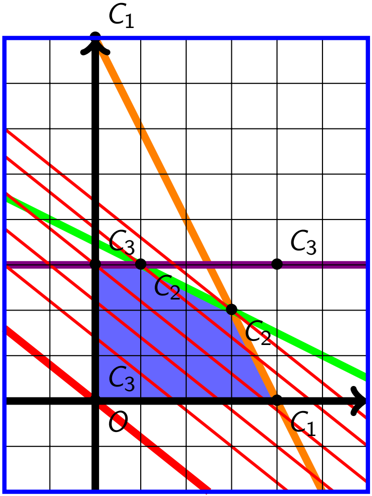
Résolution graphique

C'est ici que l'idée de résolution graphique intervient. On va dessiner plusieurs fois la droite correspondant à la fonction objectif pour des valeurs l'optimisant de plus en plus, tout en la faisant traverser (au moins par un point) l'espace des solutions réalisables.

Enfin, n'importe quel point situé sur la dernière droite ET appartenant à l'espace des solutions réalisables correspond à une solution optimale.

Comment résoudre un programme linéaire

Résolution graphique



Droite représentant la fonction objectif : $4X_A + 5X_B = 2200$

1. $(X_A = -200, X_B = 600)$
2. $(X_A = 600, X_B = -40)$

La solution optimale est atteinte au point $(300, 200)$.

Comment résoudre un programme linéaire

Résolution graphique

1. Chaque axe représente une des deux variables.
2. Chaque contrainte représente un demi-plan.
3. Si il existe une solution, l'ensemble des contraintes détermine une zone, un polyèdre, représentant l'espace des solutions possibles du problème, c'est-à-dire le domaine réalisable.
4. La fonction objectif, valant initialement 0 et dont la valeur va changer peut être représentée par une succession de droites parallèles.
5. La droite parallèle, intersectant le polyèdre, représentant la valeur la plus importante (dans le cas d'un problème de maximisation) correspond à une solution optimale.

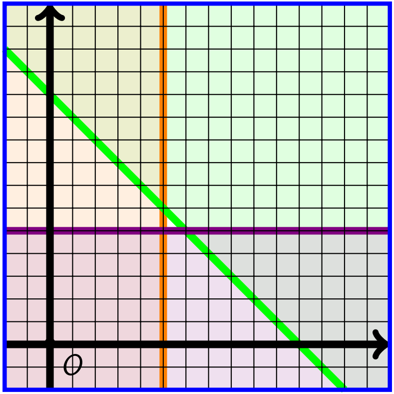
Problèmes sans solution

Voici un exemple de programme linéaire ne possédant pas de solution :

$$\begin{array}{lccccccl}
\text{Max} & X_1 & + & X_2 & & & & \text{(Fonction objectif)} \\
 & & & X_2 & \leq & 1 & & \text{(C1)} \\
 & X_1 & & & \leq & 1 & & \text{(C2)} \\
 & X_1 & + & X_2 & \geq & 2.2 & & \text{(C3)} \\
X_1, X_2 & \geq & 0 & & & & & \text{(C4) et (C5)}
\end{array}$$

Problème sans solution

Les trois demi-plans ne s'intersectent pas en même temps.



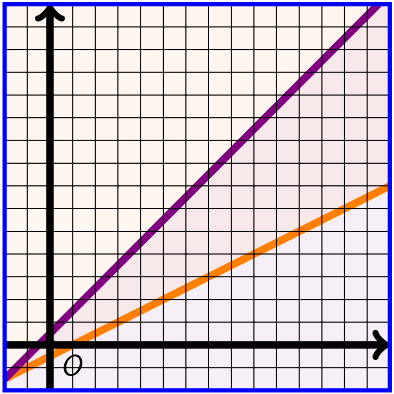
Échelle du graphique : 1 carreau = 0.2.

Solutions non bornées

Il existe des problèmes non bornés. Cela signifie qu'il n'est pas possible de les optimiser, puisque pour toute solution admissible, il en existe une autre dont la valeur est plus grande (ou plus petite dans le cas d'un problème de minimisation).

$$\begin{array}{lccccccr}
\text{Max} & X_1 & + & X_2 & & & & \text{(Fonction objectif)} \\
 & -2 \cdot X_1 & + & 2 \cdot X_2 & \leq & 1 & & \text{(C1)} \\
 & X_1 & \text{-} & 2 \cdot X_2 & \geq & 1 & & \text{(C2)} \\
X_1, X_2 & \geq & 0 & & & & & \text{(C4) et (C5)}
\end{array}$$

Solutions non bornées



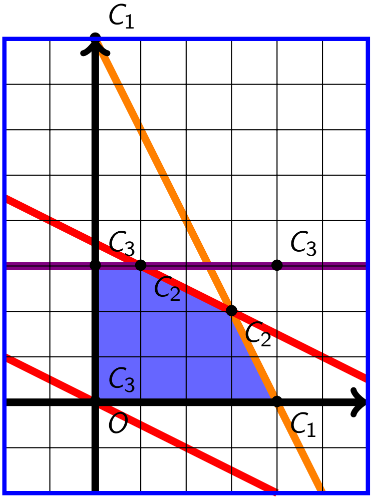
Échelle du graphique : 1 carreau = 1.

Solutions multiples

Certains problèmes possèdent une infinité de solutions optimales. Par exemple, lorsque la fonction objectif n'intersecte pas le polyèdre en un point mais sur un segment. Considérons le programme linéaire suivant (la fonction objectif a changé par rapport à notre exemple introductif) :

$$\begin{array}{lccccccc} \text{Max} & 2X_A & + & 4X_B & & & & \text{(Fonction objectif)} \\ & 2X_A & + & X_B & \leq & 800 & & \text{(C1)} \\ & X_A & + & 2X_B & \leq & 700 & & \text{(C2)} \\ & & & X_B & \leq & 300 & & \text{(C3)} \\ X_A, X_B & \geq & 0 & & & & & \text{(C4) et (C5)} \end{array}$$

Solutions multiples



Tous les points, présents sur le segment situé entre les deux points C_2, à savoir $(100, 300)$ et $(300, 200)$, correspondent à une solution optimale. Il y a donc une infinité de solutions.

Sommets et solutions.

Comme nous venons de le voir, si le programme linéaire possède une solution optimale, il ne peut y avoir que deux cas :

1. La droite de la fonction objectif intersecte le polyèdre en un point.
2. La droite de la fonction objectif intersecte le polyèdre sur un segment.

Dans le second cas, on peut remarquer que, comme tous les points du segment correspondent à une solution optimale, alors les extrémité de ce segment forment, en particulier, une solution optimale.

Conclusion : Si le programme linéaire possède une solution optimale, alors il existe au moins un sommet du polyèdre qui correspond à cette solution optimale.