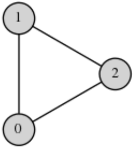
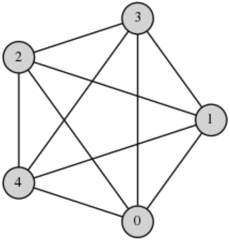
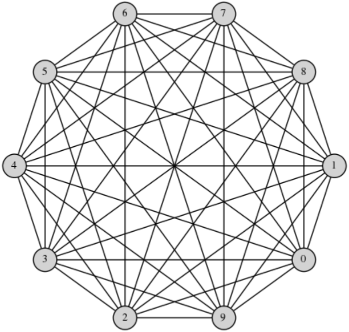
# Exemples de familles de graphes

François Delbot

28 août 2019

# Graphes complets

Un graphe complet à $n$ sommets, noté $K_n$ est un graphe pour lequel chaque sommet est voisin de tous les autres sommets du graphe. Il s'agit des graphes ayant le plus d'arêtes.

| | | |
|---|---|---|
|  |  |  |
| $K_3$ | $K_5$ | $K_{10}$ |

Ce type de graphe peut être utilisé pour modéliser toutes les interactions possibles entre divers protagonistes.

# Graphes complets

Les pokemons sont des créatures fictives, qui possèdent diverses caractéristiques et peuvent combattre en duel. Chaque pokemon possède un type (sol, air, vol, psy etc.) et peut lancer des attaques pour faire chuter les points de vie de son adversaire. Si les points de vie chutent à 0, le pokemon perd le combat. Chaque attaque possède également un type. Le nombre de points de dégâts infligés par une attaque dépend de son type et du type du pokemon attaqué, sur le même principe que le jeu « pierre, feuille, ciseaux ».

Le graphe[1] suivant représente le bonus (ou le malus) dont bénéficie une attaque en fonction du type du pokemon attaqué (noir $\times 0$, jaune $\times \frac{1}{2}$, bleu $\times 1$ et rouge $\times 2$)

1. Merci à Anani Agondja Thibault et Lourme Matthieu, étudiants de la Miage de Nanterre pour la génération de ce graphe.

# Graphes complets

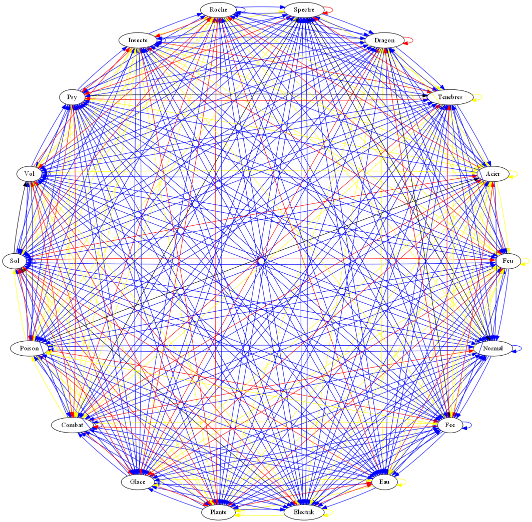



FIGURE – Bonus et malus d'attaque en fonction du type des pokemons

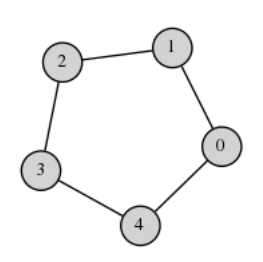
# Chemins

Un chemin à $n$ sommets est un graphe connexe sans cycle où tous les sommets sont de degré 2 sauf deux qui sont de degré 1. Cette famille de graphe possède exactement n-1 arêtes. la suppression d'un sommet ou d'une arête permet d'obtenir deux chemins de taille inférieure.

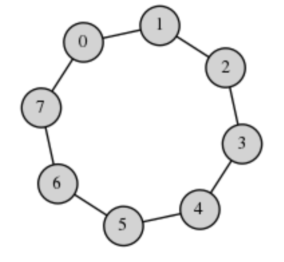

Chemin de taille 7

# Cycles

Un cycle de taille $n$ est un graphe connexe et dont tous les sommets sont de degré 2. On peut le voir comme un chemin de taille $n$ auquel on ajoute l'une arête entre le premier et le dernier sommet. Cette arête supplémentaire peut avoir un impact important sur la structure des solutions.



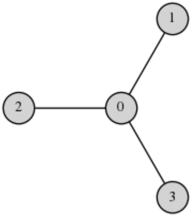
Cycle de taille 5



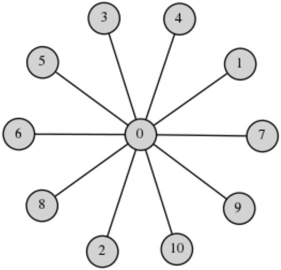
Cycle de taille 8

# Étoiles

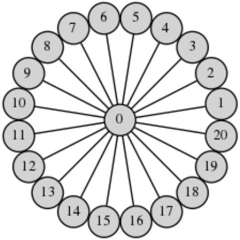
Une étoile de taille $n$ est un graphe à $n+1$ sommets. L'un des sommets est relié à tous les autres et il n'y a aucune autre arête. Ce graphe permet d'obtenir de manière triviale un sommet de degré maximum et autant de sommets de degré minimum, soit 1, tout en conservant la connexité. Cette famille de graphe permet souvent d'exhiber un contre exemple lors d'une tentative de preuve ou un cas d'exécution pathologique pour un algorithme.




Étoile de taille 3

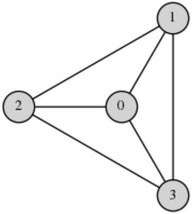



Étoile de taille 10

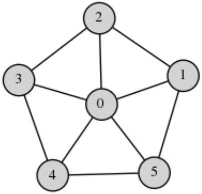



Étoile de taille 20

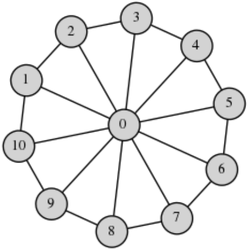
Une roue de taille $n$ est un graphe à $n+1$ sommet. $n$ de ces sommets forment un cycle de taille $n$, et le dernier sommet est relié à tous les autres. On peut voir cette famille comme la fusion d'une étoile et d'un cycle.



Roue de taille 3



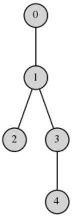
Roue de taille 5



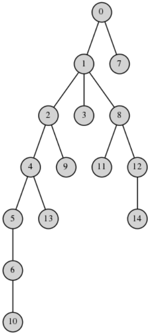
Roue de taille 10

# Arbres

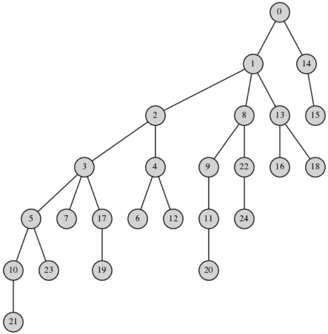
Un arbre de taille $n$ est un graphe connexe contenant $n$ sommets et sans cycle. Il s'agit d'une famille de graphes très importante souvent utilisée dans les réseaux pour créer une structure de communication entre les différents membres.




Arbre de taille 5



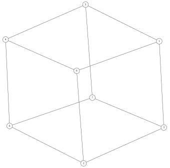
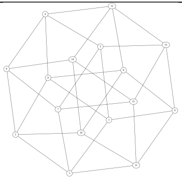
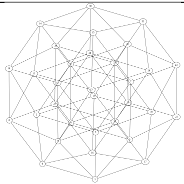

Arbre de taille 15




Chemin de taille 25

# Hypercubes

Un hypercube de dimension $n$ peut être vu comme la généralisation multi-dimensionnelle d'un carré ($n = 2$) et d'un cube ($n = 3$).

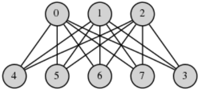
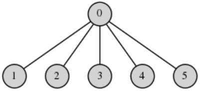
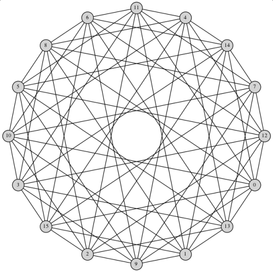
| | |
|---|---|
|  |  |
| Hypercube de dimension 3 | Hypercube de dimension 4 |
| | <br>Hypercube de dimension 5 |

# Graphes bipartis

Un graphe biparti est un graphe sans cycle de longueur impair. Concrètement, on peut partitionner ses sommets en deux ensembles tels qu'il n'existe pas d'arête entre deux sommets d'un même ensemble. Ainsi, les seules arêtes autorisées sont celle qui possèdent une extrémité dans chaque ensemble. Ces graphes sont très souvent utilisés pour modéliser les relations entre deux populations. Par exemple, un site de rencontre peux souhaiter représenter les affinités entre un groupe de femmes et un groupe d'hommes pour ensuite déterminer le nombre de couples maximum pouvant êtres constitués.

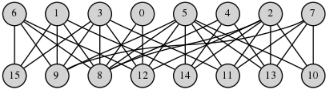
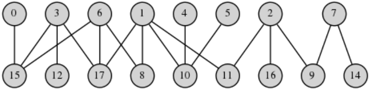
# Graphes bipartis complets

Un graphe biparti complet est un graphe biparti pour lequel chaque sommet d'un ensemble est relié à tous les sommets de l'autre ensemble.

| | |
|---|---|
|   |   |
| Biparti complet $3 \times 5$ | Biparti complet $1 \times 5$ |
| |  |
| | Biparti complet $8 \times 8$ |

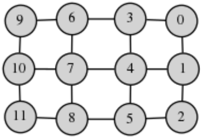
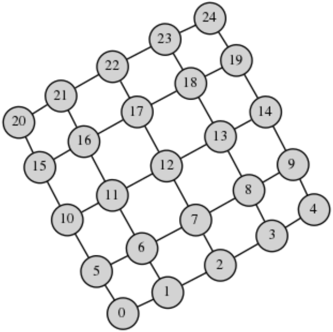
# Graphes bipartis aléatoires

Un graphe biparti aléatoire est un graphe biparti pour lequel les arêtes sont tirées aléatoirement, avec une probabilité fournie en entrée.

|  |  |
|---|---|
| Biparti aléatoire $8 \times 8$ et $p = \frac{1}{2}$ | Biparti aléatoire $8 \times 10$ et $p = \frac{1}{3}$ |

# Grilles

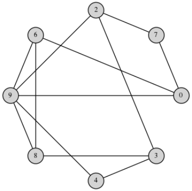
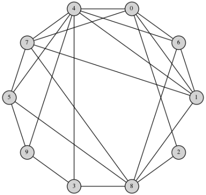
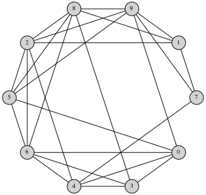
Une grille de taille $n \times m$ est un graphe contenant $n \times m$ sommets disposés en $m$ lignes de $n$ sommets. Chaque sommet est relié aux sommets se situant à sa gauche, sa droite, au dessus et en dessous de lui (lorsqu'ils existent). Cette famille possède un certain nombre de propriétés (par exemple il s'agit de graphes biparti, et à partir de l'identifiant d'un sommet on peut déduire la liste de ses voisins).

| | |
|---|---|
|  |  |
| Grille de taille $3 \times 4$ | Grille de taille $5 \times 5$ |

# Graphe aléatoire de Erdös-Reyni

Un graphe aléatoire de Erdos-Renyi, noté $G_{n,p}$, est un graphe aléatoire de taille $n$ dans lequel chaque arête potentielle existe avec probabilité $p$. Notez bien que l'existence d'une arête est indépendante de celle des autres. Cette famille est très importante, en particulier pour l'analyse théorique. La maitrise de la probabilité d'existence d'une arête permet de contrôler l'espérance du nombre d'arêtes présentes dans le graphe soit $p \cdot \frac{n \cdot (n-1)}{2}$ ou l'espérance du nombre de triangles soit $p^3 \cdot \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{6}$.

# Graphe aléatoire de Erdos-Reyni

| | |
|---|---|
|  |  |
| Erdos-Renyi ($n = 10$ et $p = 30$) | Erdos-Renyi ($n = 10$ et $p = 50$) |
| |  |
| | Erdos-Renyi ($n = 10$ et $p = 70$) |

On peut distinguer plusieurs valeurs de probabilité d'arête :

1. $p < \frac{1}{n}$, alors avec forte probabilité, le graphe ne possédera pas de composante connexe de taille plus grande que $log(n)$.
2. $p = \frac{1}{n}$, alors avec forte probabilité, le graphe possédera pas de composante connexe de taille $n^{\frac{2}{3}}$.
3. $p > \frac{1}{n}$, alors avec forte probabilité, le graphe possédera une composante connexe géante et aucune autre composante ne sera de taille plus grande que $log(n)$.
4. $p = \frac{c}{n}$, avec $c$ une constante. Permet d'obtenir un graphe dont le degré moyen est de $c$. Ces graphes sont considérés comme peu denses (relativement au nombre d'arêtes possible).
5. $p = \frac{1}{2}$, revient à tirer au sort un graphe de taille $n$ de manière équiprobable parmi l'ensemble des graphes de taille $n$.

# Graphe petit monde

Le concept de petit monde est l'hypothèse selon laquelle chaque individu peut être relié (par un lien de connaissance, d'amitié) à n'importe quel autre individu du monde par une courte chaîne de relations sociales.

Par exemple, un individu connait le maire de son village. Le maire connais un député, qui connait le président de la république, qui connait n'importe quel autre chef d'état. Il existe un mécanisme similaire pour « redescendre »de ce chef d'état vers n'importe quel individu de son propre pays. Ainsi chaque individu du monde doit pouvoir être relié à n'importe quel autre individu par une chaine de taille 8.

# Graphe petit monde

On dit d'un graphe qu'il est « petit monde », si :

1. La distance moyenne entre deux sommets est au plus logarithmique en le nombre de sommets du graphe.
2. La densité locale est assez forte.
3. La densité globale est plutôt faible.

En particulier, les réseaux sociaux respectent généralement cette propriété.

Cette définition est malheureusement floue.

# Graphe petit monde

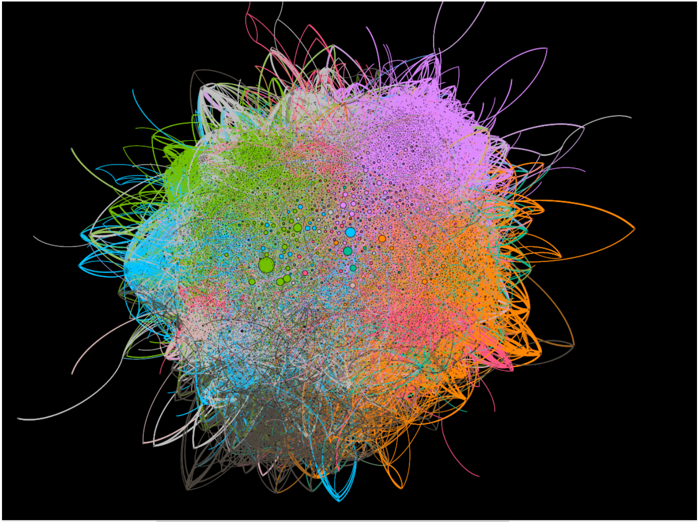


FIGURE – Graphe du réseau de collaboration issu du Programme Cadre européen H2020 (voir l'article du chapitre 1 de ce cours)

Ce qui est intéressant dans ce type graphe, c'est qu'il est possible de détecter différentes communautés. C'est à dire un ensemble d'individus plus fortement liés entre eux par rapport au reste du graphe (par exemple un groupe d'amis sur facebook). Chaque communauté peut être représentée par une couleur différente, ce qui peut donner un résultat assez esthétique. Le scientifique interviendra par la suite pour tenter de caractériser ces différentes communautés.

Par exemple, grâce aux données issues du grand débat national réalisé en France en 2019, une distance entre deux individus est calculée. Si cette distance était inférieure à une certaine valeur, une arête est ajoutée. Un algorithme de détection de communautés permet d'obtenir le résultat suivant :

# Graphe petit monde

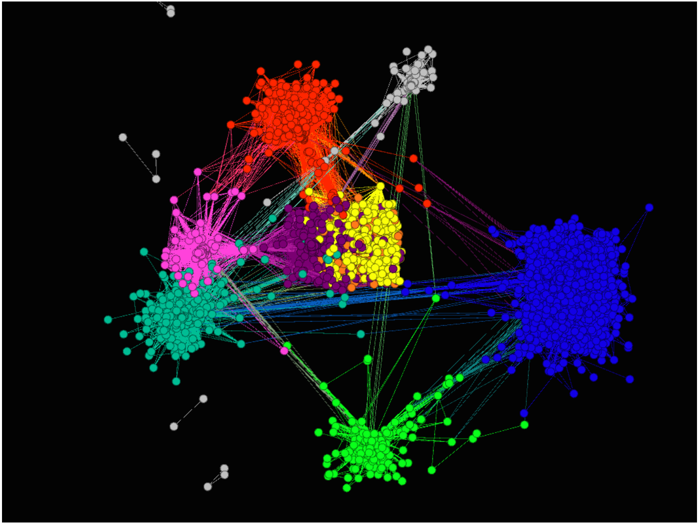


Figure – Communautés issues du grand débat