Programmation linéaire

L'algorithme du simplexe

François Delbot

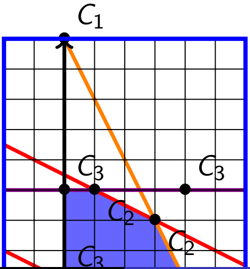
11 novembre 2019

Une évolution naïve de la résolution graphique

Sommets et solutions.

Rappel.

Si le programme linéaire possède une solution optimale, alors il existe au moins un sommet du polyèdre qui correspond à cette solution optimale.



Une évolution naïve de la résolution graphique

Principe de l'algorithme.

- Si plus de deux variables, la résolution graphique n'est pas adaptée, puisqu'il y a autant de dimensions que de variables.
- La notion géométrique de sommet du polyèdre correspond à la notion algébrique de solution réalisable.

Un algorithme naïf

Énumérer tous les sommets du polyèdre. Pour chaque point, évaluer la fonction objectif. Conserver le point qui l'optimise.

Une évolution naïve de la résolution graphique

Principe de l'algorithme.

Un algorithme naïf

Énumérer tous les sommets du polyèdre. Pour chaque point, évaluer la fonction objectif. Conserver le point qui l'optimise.

Cet algorithme fonctionne lorsque le nombre de sommets est limité. Mais, le nombre de sommets peut être très important :

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Et comme chaque sommet ne correspond pas nécessairement à une solution admissible, il est nécessaire de vérifier l'intégralité des contraintes pour vérifier qu'un sommet correspond à une solution admissible. Il est donc impératif d'utiliser un algorithme plus fin.

Bases voisines et pivotage

Le polyèdre des solutions est convexe :

1. Soit un sommet correspond à une solution optimale
2. soit il existe un voisin de ce sommet permettant d'améliorer la valeur de la fonction objectif.

On en déduis l'algorithme suivant :

Principe de l'algorithme.

Passer de point extrême en point extrême, en augmentant la valeur de la fonction objectif, jusqu'à atteindre l'optimum.

Bases voisines et pivotage

Squelette de l'algorithme.

1. Commencer avec une solution de base réalisable : un point extrême
2. Trouver un autre point extrême permettant d'augmenter la fonction objectif
3. Arrêt lorsqu'il n'existe plus de point extrême augmentant la fonction objectif

L'algorithme du simplexe utilise cette méthode. Mais il faut placer le programme linéaire sous forme normale. La mise sous forme normale est elle-même très simple lorsque l'algorithme est placé

Forme canonique

La forme canonique d'un programme linéaire :

- Est une manière de représenter un programme linéaire de manière systématique.
- Simplifie la résolution en diminuant le nombre de cas à traiter.
- Simplifie la programmation d'un algorithme de résolution.

Il s'agit de transformer un programme linéaire P_1 en un autre programme linéaire équivalent P_2. La résolution de P_2 permettra de retrouver automatiquement une solution pour le programme P_1 en effectuant les transformations inverses.

Forme canonique

La forme canonique choisie dans ce cours est la suivante :

1. La fonction objectif doit être maximisée.
2. Toutes les contraintes doivent être du type $\leq$.
3. Toutes les variables sont positives.

Forme canonique

Règles de transformation

Pour obtenir la forme canonique à partir d'un programme linéaire, il suffit d'appliquer un ensemble de règles tant qu'il est possible d'en appliquer une. Suivant l'ordre d'application des règles, il est possible d'obtenir plus ou moins rapidement la forme canonique.

Forme canonique

Règle 1

Règle 1.

Si le programme linéaire doit minimiser sa fonction objectif $f(x)$, alors on peut le transformer en un problème de maximisation qui sera équivalent. Pour cela, il suffit de maximiser $-f(x)$.

Forme canonique

Règle 1

Programme linéaire avant application de la règle 1.

$$\begin{array}{lccccccc} \text{Min} & 3X_1 & - & 2X_2 & + & 8X_3 & & \\ \text{T.Q.} & & & & & & & \\ & 5X_1 & - & 2X_2 & + & 4X_3 & \leq & 8 \\ & X_1 & + & 3X_2 & + & 8X_3 & \leq & 25 \\ & 9X_1 & + & 6X_2 & - & 3X_3 & \leq & 17 \\ & & & & & & & \\ X_1, X_2, X_3 & \geq & 0 & & & & & \end{array}$$

Le programme linéaire doit minimiser la fonction objectif $3X_1 - 2X_2 + 8X_3$.

Cela revient donc à maximiser la fonction objectif $-3X_1 + 2X_2 - 8X_3$.

Forme canonique

Règle 1

Programme linéaire après application de la règle 1.

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\text{Max} & -3X_1 & + & 2X_2 & - & 8X_3 & & \\
\text{T.Q.} & & & & & & & \\
 & 5X_1 & - & 2X_2 & + & 4X_3 & \leq & 8 \\
 & X_1 & + & 3X_2 & + & 8X_3 & \leq & 25 \\
 & 9X_1 & + & 6X_2 & - & 3X_3 & \leq & 17 \\
 & & & & & & & \\
X_1, X_2, X_3 & \geq & 0 & & & & &
\end{array}
$$

Forme canonique
Règle 2

Règle 2.

Si le programme contient une équation, on la remplace par deux inéquations équivalentes, l'une de supériorité, l'autre d'infériorité.

Forme canonique

Règle 2

Programme linéaire avant application de la règle 2.

$$
\begin{array}{lccccccccc}
\text{Max} & 3X_1 & - & 2X_2 & + & 8X_3 & & \\
\text{T.Q.} & & & & & & & \\
 & 5X_1 & - & 2X_2 & + & 4X_3 & \leq & 8 \\
 & X_1 & + & 3X_2 & + & 8X_3 & = & 25 \\
 & 9X_1 & + & 6X_2 & - & 3X_3 & \leq & 17 \\
 & & & & & & & \\
X_1, X_2, X_3 & \geq & 0 & & & & &
\end{array}
$$

$$X_1 + 3X_2 + 8X_3 = 25$$

$$\Leftrightarrow$$

$$X_1 + 3X_2 + 8X_3 \leq 25$$

$$X_1 + 3X_2 + 8X_3 \geq 25$$

Forme canonique

Règle 2

Programme linéaire après application de la règle 2.

$$
\begin{array}{lccccccc}
\text{Max} & 3X_1 & - & 2X_2 & + & 8X_3 & & \\
\text{T.Q.} & & & & & & & \\
 & 5X_1 & - & 2X_2 & + & 4X_3 & \leq & 8 \\
 & X_1 & + & 3X_2 & + & 8X_3 & \geq & 25 \\
 & X_1 & + & 3X_2 & + & 8X_3 & \leq & 25 \\
 & 9X_1 & + & 6X_2 & - & 3X_3 & \leq & 17
\end{array}
$$

$$X_1, X_2, X_3 \quad \geq \quad 0$$

Forme canonique

Règle 3

Règle 3.

Si une variable X_1 n'a pas de contrainte de signe, et que l'on arrive à déterminer que $X_1 \geq -300$, il suffit de poser $X_1^{'} = X_1 + 300$ et l'on aura $X_1^{'} \geq 0$. Mais, si on ne connait pas de borne inférieure pour X_1, on peut poser $X_1 = X_1^{'} - X_1^{''}$ avec $X_1^{'} \geq 0$ et $X_1^{''} \geq 0$ car tout nombre peut être représenté comme la différence de deux nombres positifs ou nuls.
Si une variable X_1 n'a pas de contrainte de signe, on la remplace par deux variables positives $X_1^{'}$ et $X_1^{''}$ telles que $X_1 = X_1^{'} - X_1^{''}$.

Forme canonique

Règle 3

Programme linéaire avant application de la règle 3.

$$
\begin{array}{lccccccc}
\text{Max} & 3X_1 & - & 2X_2 & + & 8X_3 & & \\
\text{T.Q.} & & & & & & & \\
 & 5X_1 & - & 2X_2 & + & 4X_3 & \leq & 8 \\
 & X_1 & + & 3X_2 & + & 8X_3 & \leq & 25 \\
 & 9X_1 & + & 6X_2 & - & 3X_3 & \leq & 17 \\
 & & & & & & & \\
X_1, X_2 & \geq & 0 & & & & &
\end{array}
$$

La variable X_3 n'a pas de contrainte de signe. On la remplace donc par deux variables $X_3^{'} \geq 0$ et $X_3^{''} \geq 0$ positives telles que : $X_3 = X_3^{'} - X_3^{''}$.

Forme canonique

Règle 3

Programme linéaire après application de la règle 3.

$$
\begin{array}{lcccccccccc}
\text{Max} & 3X_1 & - & 2X_2 & + & 8X_3' & - & 8X_3'' & & \\
\text{T.Q.} & & & & & & & & & \\
 & 5X_1 & - & 2X_2 & + & 4X_3' & - & 4X_3'' & \leq & 8 \\
 & X_1 & + & 3X_2 & + & 8X_3' & - & 8X_3'' & \leq & 25 \\
 & 9X_1 & + & 6X_2 & - & 3X_3' & - & 3X_3'' & \leq & 17 \\
\end{array}
$$

$$X_1, X_2, X_3', X_3'' \geq 0$$

Forme canonique

Règle 4

Règle 4.

Si une variable X_1 est négative, on la remplace par une variable positive $X_1' = -X_1$.

Forme canonique

Règle 4

Programme linéaire avant application de la règle 4.

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\text{Max} & 3X_1 & - & 2X_2 & + & 8X_3 & & \\
\text{T.Q.} & & & & & & & \\
 & 5X_1 & - & 2X_2 & + & 4X_3 & \leq & 8 \\
 & X_1 & + & 3X_2 & + & 8X_3 & \leq & 25 \\
 & 9X_1 & + & 6X_2 & - & 3X_3 & \leq & 17 \\
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccc}
X_1, X_2 & \geq & 0 \\
X_3 & \leq & 0
\end{array}
$$

La variable X_3 est négative. On la remplace par une variable $X_3^{'}$ positive telle que : $X_3^{'} = -X_3$.

Forme canonique

Règle 4

Programme linéaire après application de la règle 4.

$$
\begin{array}{lcccccccc}
\text{Max} & 3X_1 & - & 2X_2 & - & 8X_3' & & \\
\text{T.Q.} & & & & & & & \\
 & 5X_1 & - & 2X_2 & - & 4X_3' & \leq & 8 \\
 & X_1 & + & 3X_2 & - & 8X_3' & \leq & 25 \\
 & 9X_1 & + & 6X_2 & + & 3X_3' & \leq & 17
\end{array}
$$

$$
X_1, X_2, X_3' \geq 0
$$

Forme canonique

Règle 5

Règle 5.

Si une contrainte est une inéquation de type $\geq$, on la remplace par une inéquation de type $\leq$ en inversant les signes de tous les membres de l'inéquation.

Forme canonique

Règle 5

Programme linéaire avant application de la règle 5.

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\text{Max} & 3X_1 & - & 2X_2 & - & 8X_3^{'} & & \\
\text{T.Q.} & & & & & & & \\
& 5X_1 & - & 2X_2 & - & 4X_3^{'} & \geq & 8 \\
& X_1 & + & 3X_2 & - & 8X_3^{'} & \leq & 25 \\
& 9X_1 & + & 6X_2 & + & 3X_3^{'} & \leq & 17 \\
\end{array}
$$

$$X_1, X_2, X_3^{'} \geq 0$$

La première contrainte est une inéquation de type $\geq$: $5X_1 - 2X_2 - 4X_3^{'} \geq 8$.
Cette inéquation est équivalente à : $-5X_1 + 2X_2 + 4X_3^{'} \leq -8$.

Forme canonique

Règle 5

Programme linéaire après application de la règle 5.

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\text{Max} & 3X_1 & - & 2X_2 & - & 8X_3' & & \\
\text{T.Q.} & & & & & & & \\
 & -5X_1 & + & 2X_2 & + & 4X_3' & \leq & -8 \\
 & X_1 & + & 3X_2 & - & 8X_3' & \leq & 25 \\
 & 9X_1 & + & 6X_2 & + & 3X_3' & \leq & 17 \\
 & & & & & & & \\
X_1, X_2, X_3' & \geq & 0 & & & & &
\end{array}
$$

Exemple complet

Énoncé

A vous de mettre ce programme linéaire sous forme canonique :

Programme linéaire initial

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\text{Min} & -3X_1 & + & 2X_2 & - & 8X_3 & & \\
\text{T.Q.} & & & & & & & \\
 & 5X_1 & - & 2X_2 & + & 4X_3 & \leq & 8 \\
 & X_1 & + & 3X_2 & + & 8X_3 & = & 25 \\
 & -9X_1 & - & 6X_2 & + & 3X_3 & \geq & 17 \\
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lcr}
X_1 & \geq & 0 \\
X_2 & \leq & 0
\end{array}
$$

Exemple complet

Nous pouvons voir qu'il n'est pas sous forme canonique pour les raisons suivantes :

1. Il s'agit d'un problème de minimisation
2. La deuxième contrainte est une équation
3. La troisième contrainte est une inéquation de type $\geq$
4. La variable X_3 n'a pas de contrainte de signe
5. La variable X_2 est négative

L'ordre d'application des règles est arbitraire. Cet ordre peut avoir un impact sur le nombre d'étapes.

Exemple complet

Étape 1 : application de la règle 1

C'est un problème de minimisation. Nous allons le transformer pour obtenir un programme de maximisation. On obtient :

Programme linéaire après application de la règle 1

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\text{Max} & 3X_1 & - & 2X_2 & + & 8X_3 & & \\
\text{T.Q.} & & & & & & & \\
& 5X_1 & - & 2X_2 & + & 4X_3 & \leq & 8 \\
& X_1 & + & 3X_2 & + & 8X_3 & = & 25 \\
& -9X_1 & - & 6X_2 & + & 3X_3 & \geq & 17
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lcr}
X_1 & \geq & 0 \\
X_2 & \leq & 0
\end{array}
$$

Exemple complet

Étape 2 : application de la règle 4

La variable X_2 est négative. Nous allons procéder à un changement de variable pour obtenir une variable positive : on pose $X_2^{'} = -X_2$, ce qui nous donne :

Programme linéaire après application de la règle 1

$$
\begin{array}{lccccccc}
\text{Max} & 3X_1 & + & 2X_2^{'} & + & 8X_3 & & \\
\text{T.Q.} & & & & & & & \\
 & 5X_1 & + & 2X_2^{'} & + & 4X_3 & \leq & 8 \\
 & X_1 & - & 3X_2^{'} & + & 8X_3 & = & 25 \\
 & -9X_1 & + & 6X_2^{'} & + & 3X_3 & \geq & 17 \\
 & & & & & & & \\
X_1, X_2^{'} & \geq & 0 & & & & &
\end{array}
$$

Exemple complet

Étape 3 : application de la règle 3

La variable X_3 ne possède pas de contrainte de signe. Nous allons procéder à un changement de variable pour obtenir deux variables positives : on pose $X_3 = X_3^{'} - X_3^{''}$, ce qui nous donne :

Programme linéaire après application de la règle 1

$$\begin{array}{lccccccccc}
\text{Max} & 3X_1 & + & 2X_2^{'} & + & 8X_3^{'} & - & 8X_3^{''} & & \\
\text{T.Q.} & & & & & & & & & \\
 & 5X_1 & + & 2X_2^{'} & + & 4X_3^{'} & - & 4X_3^{''} & \leq & 8 \\
 & X_1 & - & 3X_2^{'} & + & 8X_3^{'} & - & 8X_3^{''} & = & 25 \\
 & -9X_1 & + & 6X_2^{'} & + & 3X_3^{'} & - & 3X_3^{''} & \geq & 17
\end{array}$$

$$X_1, X_2^{'}, X_3^{'}, X_3^{''} \geq 0$$

Exemple complet

Étape 4 : application de la règle 2

La deuxième contrainte est une équation. On la remplace par un système équivalent de deux inéquations :

Programme linéaire après application de la règle 1

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcr}
\text{Max} & 3X_1 & + & 2X_2' & + & 8X_3' & - & 8X_3'' & & \\
\text{T.Q.} & & & & & & & & & \\
 & 5X_1 & + & 2X_2' & + & 4X_3' & - & 4X_3'' & \leq & 8 \\
 & X_1 & - & 3X_2' & + & 8X_3' & - & 8X_3'' & \leq & 25 \\
 & X_1 & - & 3X_2' & + & 8X_3' & - & 8X_3'' & \geq & 25 \\
 & -9X_1 & + & 6X_2' & + & 3X_3' & - & 3X_3'' & \geq & 17
\end{array}
$$

$$X_1, X_2', X_3', X_3'' \geq 0$$

Exemple complet

Étape 5 : application de la règle 5

La troisième contrainte ainsi que la quatrième sont des inéquations de type $\geq$. On inverse le signe de chacun de leurs membres pour obtenir deux inéquations de type $\leq$:

Programme linéaire après application de la règle 1

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcr}
\text{Max} & 3X_1 & + & 2X_2' & + & 8X_3' & - & 8X_3'' & & \\
\text{T.Q.} & & & & & & & & & \\
 & 5X_1 & + & 2X_2' & + & 4X_3' & - & 4X_3'' & \leq & 8 \\
 & X_1 & - & 3X_2' & + & 8X_3' & - & 8X_3'' & \leq & 25 \\
 & -X_1 & + & 3X_2' & - & 8X_3' & + & 8X_3'' & \leq & -25 \\
 & 9X_1 & - & 6X_2' & - & 3X_3' & + & 3X_3'' & \leq & -17
\end{array}
$$

$$X_1, X_2', X_3', X_3'' \geq 0$$

Exemple complet

Étape 6 : bilan de la transformation

Le programme linéaire obtenu après l'application des différentes règles est le suivant :

Programme linéaire après application de la règle 1

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcr}
\text{Max} & 3X_1 & + & 2X_2' & + & 8X_3' & - & 8X_3'' & & \\
\text{T.Q.} & & & & & & & & & \\
 & 5X_1 & + & 2X_2' & + & 4X_3' & - & 4X_3'' & \leq & 8 \\
 & X_1 & - & 3X_2' & + & 8X_3' & - & 8X_3'' & \leq & 25 \\
 & -X_1 & + & 3X_2' & - & 8X_3' & + & 8X_3'' & \leq & -25 \\
 & 9X_1 & - & 6X_2' & - & 3X_3' & + & 3X_3'' & \leq & -17 \\
 & & & & & & & & & \\
X_1, X_2', X_3', X_3'' & \geq & 0 & & & & & & &
\end{array}
$$

Exemple complet

Forme canonique

Après vérification, on peut voir que :

1. Il s'agit d'un problème de maximisation
2. Toutes les contraintes sont des inéquations de type $\leq$
3. Toutes les variables sont positives

Le programme est donc sous forme canonique. Trouver une solution à ce problème revient à trouver une solution pour le problème initial.

Exemple complet

Solution finale

Supposons que l'on trouve la solution suivante :
$X_1 = a, X_2^{'} = b, X_3^{'} = c, X_3^{''} = d$.
On va retrouver les valeurs des variables X_2 et X_3 à partir de $X_2^{'}$, $X_3^{'}$ et $X_3^{''}$:

$$X_2 = -X_2^{'} = -b \quad et \quad X_3 = X_3^{'} - X_3^{''} = c - d$$

Nous obtenons donc la solution suivante pour le programme linéaire initial :

$$X_1 = a, \quad X_2 = -b \quad et \quad X_3 = c - d$$

On peut ensuite calculer la valeur de la fonction objectif du programme linéaire initial :

$$\begin{aligned} -3X_1 + 2X_2 - 8X_3 &= -3 \cdot (a) + 2 \cdot (-b) - 8 \cdot (c - d) \\ &= -3 \cdot a - 2 \cdot b - 8 \cdot c + 8 \cdot d \end{aligned}$$

Forme normale

L'algorithme du simplexe a besoin que le programme linéaire soit représenté sous forme standard pour pouvoir le résoudre :

1. La fonction objectif doit être maximisée.
2. Toutes les contraintes sont des équations.
3. Les seconds membres sont des nombres positifs ou nuls.

Forme normale

De la forme canonique vers la forme normale

Tout programme linéaire en forme canonique peut s'écrire, de manière équivalente, en forme standard, et tout programme linéaire sous forme standard peut s'écrire, de manière équivalente, sous forme canonique.

Pour obtenir un programme linéaire sous forme normale, il suffit d'appliquer un certains nombre de règles de transformation à partir de la forme canonique.

Règles de transformation

[Règle 6] Passage d'une inéquation à une équation

Si une contrainte est une inéquation, on la remplace par une équation en ajoutant une variable d'écart au premier membre.

Une variable d'écart est la quantité qui, ajoutée au membre gauche d'une inéquation permet de transformer la contrainte en équation.

Règles de transformation

[Règle 6] Passage d'une inéquation à une équation

Programme linéaire avant application de la règle 6

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\text{Max} & 3X_1 & - & 2X_2 & - & 8X_3 & & \\
\text{T.Q.} & & & & & & & \\
 & 5X_1 & - & 2X_2 & - & 4X_3 & \leq & 8 \\
 & X_1 & + & 3X_2 & - & 8X_3 & \leq & 25 \\
 & 9X_1 & + & 6X_2 & + & 3X_3 & \leq & 17 \\
 & & & & & & & \\
X_1, X_2, X_3 & \geq & 0 & & & & &
\end{array}
$$

Règles de transformation

[Règle 6] Passage d'une inéquation à une équation

Il y a trois contraintes représentées par des inéquations. Il est donc nécessaire d'introduire trois variables d'écart e_1, e_2 et e_3.

Programme linéaire après application de la règle 6

$$
\begin{array}{lcccccccccccc}
\text{Max} & 3X_1 & - & 2X_2 & - & 8X_3 & & & & & & & \\
\text{T.Q.} & & & & & & & & & & & & \\
 & 5X_1 & - & 2X_2 & - & 4X_3 & + & e_1 & & & & = & 8 \\
 & X_1 & + & 3X_2 & - & 8X_3 & & & + & e_2 & & = & 25 \\
 & 9X_1 & + & 6X_2 & + & 3X_3 & & & & & + \; e_3 & = & 17 \\
 & & & & & & & & & & & & \\
X_1, X_2, X_3 & \geq & 0 & & & & & & & & & & \\
e_1, e_2, e_3 & \geq & 0 & & & & & & & & & &
\end{array}
$$

Règles de transformation

[Règle 7] Membre droit positif ou nul

Si une contrainte comporte un second membre négatif, on multiplie par -1 chaque membre de cette contrainte

Règles de transformation

[Règle 7] Membre droit positif ou nul

Programme linéaire avant application de la règle 7

$$
\begin{array}{lccccccc}
\text{Max} & 3X_1 & - & 2X_2 & - & 8X_3 & & \\
\text{T.Q.} & & & & & & & \\
 & 5X_1 & - & 2X_2 & - & 4X_3 & = & 8 \\
 & X_1 & + & 3X_2 & - & 8X_3 & = & -25 \\
 & 9X_1 & + & 6X_2 & + & 3X_3 & = & 17
\end{array}
$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

Règles de transformation

[Règle 7] Membre droit positif ou nul

La deuxième contrainte possède un second membre négatif :

$$X_1 + 3X_2 - 8X_3 = -25$$

En multipliant chaque membre par -1 on obtient :

$$-X_1 - 3X_2 + 8X_3 = 25$$

Règles de transformation

[Règle 7] Membre droit positif ou nul

Programme linéaire après application de la règle 7

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\text{Max} & 3X_1 & - & 2X_2 & - & 8X_3 & & \\
\text{T.Q.} & & & & & & & \\
 & 5X_1 & - & 2X_2 & - & 4X_3 & = & 8 \\
 & -X_1 & - & 3X_2 & + & 8X_3 & = & 25 \\
 & 9X_1 & + & 6X_2 & + & 3X_3 & = & 17
\end{array}
$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

Forme normale et forme canonique

Voici un programme linéaire sous forme canonique, puis le programme linéaire transformé en forme standard :

Programme linéaire sous forme canonique

$$
\begin{array}{lccccc}
\text{Max} & 3X_1 & + & 5X_2 & & \\
\text{T.Q.} & & & & & \\
 & X_1 & & & \leq & 4 \\
 & & & 2X_2 & \leq & 12 \\
 & 3X_1 & + & 2X_2 & \leq & 18 \\
 & & & & & \\
X_1, X_2 & \geq & 0 & & &
\end{array}
$$

Forme normale et forme canonique

Voici un programme linéaire sous forme canonique, puis le programme linéaire transformé en forme standard :

Programme linéaire sous forme standard

$$
\begin{array}{lcccccccccc}
\text{Max} & 3X_1 & + & 5X_2 & & & & & & & \\
\text{T.Q.} & & & & & & & & & & \\
 & X_1 & & & + & e_1 & & & & = & 4 \\
 & & & 2X_2 & & & + & e_2 & & = & 12 \\
 & 3X_1 & + & 2X_2 & & & & & + \; e_3 & = & 18 \\
 & & & & & & & & & & \\
X_1, X_2 & \geq & 0 & & & & & & & &
\end{array}
$$

Forme normale et forme canonique

Il y a une équivalence totale entre les deux formes (canonique et standard) :

1. Toute solution réalisable pour la forme canonique peut être augmentée en une solution réalisable pour la forme standard.
2. Toute solution réalisable pour la forme standard peut être tronquée en une solution réalisable pour la forme canonique.
3. De plus, les fonctions objectifs étant identiques, il y a bien équivalence entre les deux problèmes.

Illustrons cette correspondance entre solutions :

- Forme canonique. Solution : $(3, 2)$
- Forme normale. Solution : $(3, 2, 1, 8, 5)$