Théorie des graphes

Concepts fondamentaux

François Delbot

25 janvier 2019

Origines de la théorie des graphes
Les 7 ponts de Königsberg (problème du *XVII*^{e} siècle)

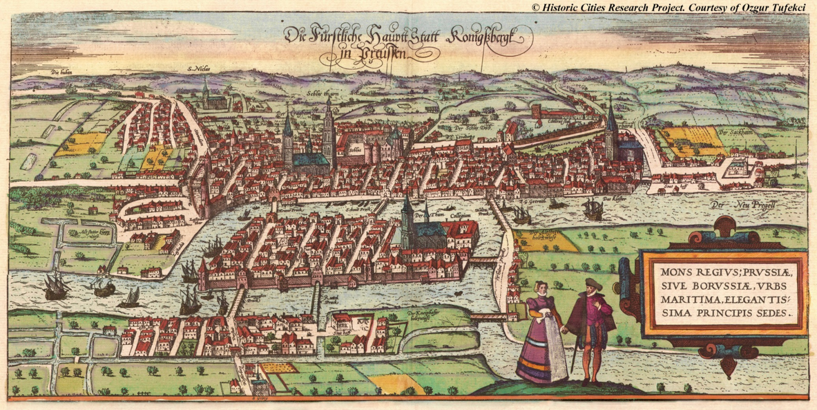


FIGURE – La ville de Konigsburg

Cette ville est composée de 4 parties :

1. La partie nord.
2. La partie sud.
3. L'ilot central.
4. L'ile est.

Ces différentes parties sont reliées par 7 ponts :

- Deux ponts entre l'ilot central et la partie nord.
- Deux ponts entre l'ilot central et la partie sud.
- Un pont entre l'ilot central et l'ile est.
- Un pont entre la partie nord et l'ile est.
- Un pont entre la partie sud et l'ile est.

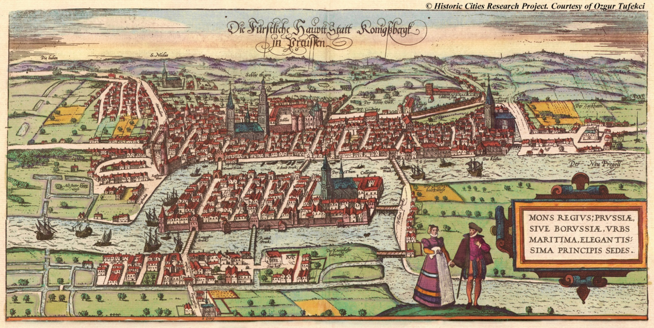


FIGURE – La ville de Konigsburg

Existe-t-il ou non une promenade permettant de partir de l'une des parties de la ville, de passer une fois, et une fois seulement par chaque pont, tout en retournant en fin de promenade sur la même partie de la ville ?

Origines de la théorie des graphes

Les 7 ponts de Königsberg (problème du *XVII*^{e} siècle)

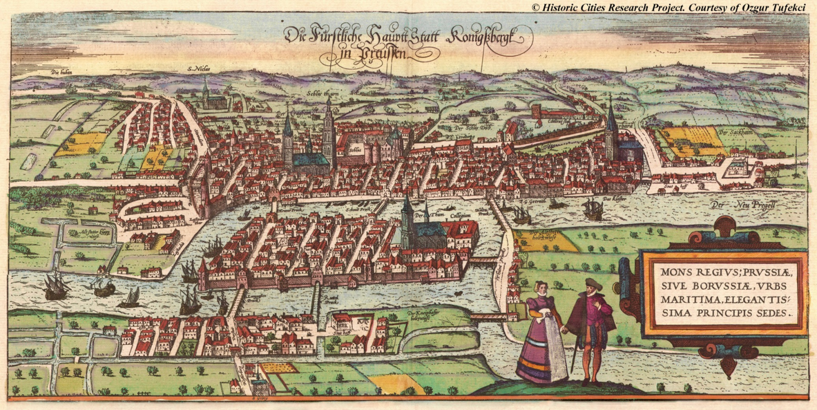


FIGURE – La ville de Konigsburg

A vous de jouer, vous avez 5 minutes !

Réponse

Leonhard Euler (mathématicien) a apporté la preuve qu'il n'existe pas de solution à ce problème.

Intuition de la preuve 1/2

Représenter les ponts horizontalement et à les trier de manière à ce que deux extrémités adjacentes de deux ponts successifs soient sur le même terrain (à savoir la partie nord, la partie sud, l'ilot central ou encore l'ile est), et en considérant que le premier et le dernier soient consécutifs, puisqu'on doit retourner au point de départ.

Intuition de la preuve 2/2

Ainsi tout terrain est-il obligatoirement incident à un nombre pair de ponts (puisque si le terrain est incident à un pont, il est aussi incident au précédent ou bien au suivant dans notre tri.). Mais la ville de Königsberg possède des terrains (L'ilot central et la partie nord) qui sont incidents à trois ponts, d'où l'impossibilité.

1. On peut se passer de la configuration exacte de la ville.
2. Il faut connaitre les différentes parties de la villes et les liens (les ponts) permettant de passer de l'une à l'autre.

C'est l'idée sous-jacente à toute la théorie des graphes.

Origines de la théorie des graphes

Les 7 ponts de Königsberg (problème du *XVII*^{e} siècle)

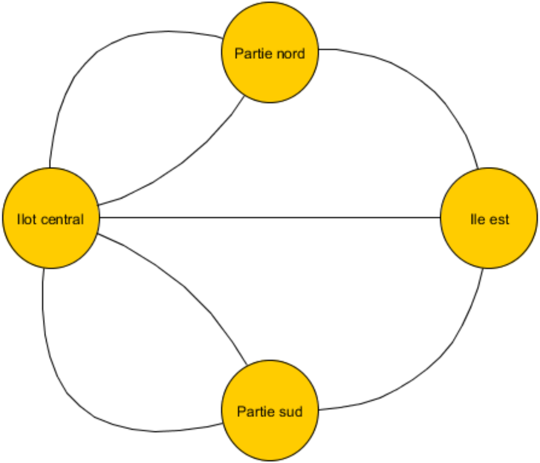


FIGURE – Modélisation du problème par un graphe

Les graphes, un outil de modélisation

- Un graphe est outil permettant de modéliser de nombreuses situations où des objets sont en interaction.
- Malgré sa simplicité apparente (des ronds et des traits), un graphe permet d'utiliser un grand nombre de techniques, outils mathématiques et algorithmes issus de la théorie des graphes et des mathématiques pour démontrer des propriétés, déterminer des méthodes de résolution, ...

Exemples d'applications

Déterminer le plus court chemin entre deux villes, former des couples fortement compatibles sur un site de rencontre, routage de messages dans un réseau, régulation du flux des usagers dans le RER etc ...

Definition (Graphe non orienté)

Un graphe non-orienté $G = (V, E)$ est défini par un couple d'ensembles : $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ l'ensemble des sommets du graphe (vertices en anglais) et $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ l'ensemble des arêtes du graphe (edges en anglais).

Definition (Arête)

Soit $G = (V, E)$ un graphe non-orienté, $u \in V$ et $v \in V$ deux de ses sommets. Une arête $e = (u, v) \in E$ est un couple de sommets et représente un lien entre ces deux sommets. u et v sont dits voisins, adjacents.

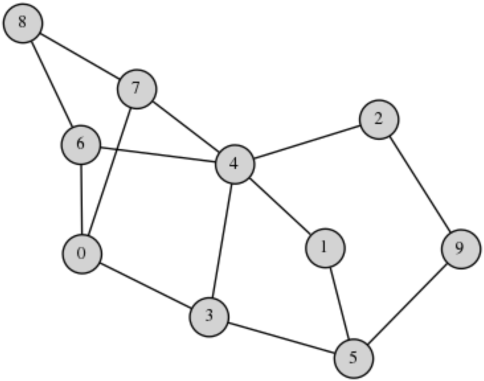


FIGURE – Exemple de graphe non-orienté

- Ensemble des sommets : $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
- Ensemble des arêtes : $\{(0, 3), (0, 6), (0, 7), (1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 9), (3, 4), (3, 5), (4, 6), (4, 7), (5, 9), (6, 8), (7, 8)\}$

Definition (Graphe orienté)

Un graphe $G = (V, A)$ est défini par un couple d'ensembles : V l'ensemble des sommets du graphe et A l'ensemble des arcs du graphe. La différence avec un graphe non-orienté est que les liens (les arcs) sont directionnels et ne peuvent donc êtres parcourus que dans un seul sens.

Definition (Arc)

Soit $G = (V, A)$ un graphe orienté, $u \in V$ et $v \in V$ deux de ses sommets. Un arc $e = (u, v) \in A$ est un couple de sommets et représente un lien directionnel allant du sommet u vers le sommet v. u est le prédécesseur de v et v est le successeur de u.

Définitions et concepts fondamentaux

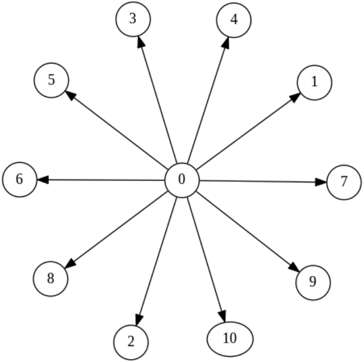


FIGURE – Exemple de graphe orienté

- Ensemble des sommets : $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
- Ensemble des arcs : $\{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (0, 4), (0, 5), (0, 6), (0, 7), (0, 8), (0, 9), (0, 10)\}$

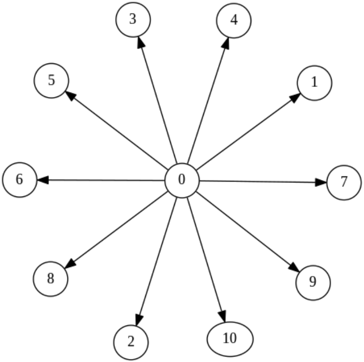


FIGURE – Exemple de graphe orienté

- le sommet 0 est le prédécesseur de tous les autres sommets.
- Les sommets $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ sont les successeurs du sommet 0.

Important

1. Pour une arête (u, v) l'ordre des sommets n'a pas d'importance puisque le lien n'est pas directionnel. Parler de l'arête (u, v) revient à parler de l'arête (v, u).
2. Pour un arc (u, v) l'ordre est important puisqu'il implique une relation allant de u vers v mais pas l'inverse.

Definition (Taille d'un graphe)

La taille d'un graphe correspond au nombre de sommets du graphe.

Définitions et concepts fondamentaux

Definition (Voisinage sortant)

Soit $G = (V, A)$ un graphe orienté et $u \in V$ l'un de ses sommets. Le voisinage sortant de u, noté $N^+(u)$, est l'ensemble des sommets ayant u comme prédécesseur.

Definition (Voisinage entrant)

Soit $G = (V, A)$ un graphe orienté et $u \in V$ l'un de ses sommets. Le voisinage entrant de u, noté $N^-(u)$, est l'ensemble des sommets ayant u comme successeur.

Definition (Voisinage d'un sommet)

Soit $G = (V, E)$ un graphe et $u \in V$ l'un de ses sommets. Le voisinage de u, noté $N(u)$, est l'ensemble des sommets partageant une arête avec u. Si le graphe est orienté, $N(u) = N^+(u) \cup N^-(u)$.

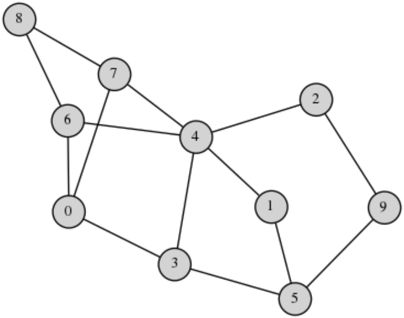


FIGURE – Exemple de graphe non-orienté

Le voisinage du sommet 4 est : $N(4) = \{1, 2, 3, 6, 7\}$.

Exercice

Pour chaque sommet, donnez son voisinage.

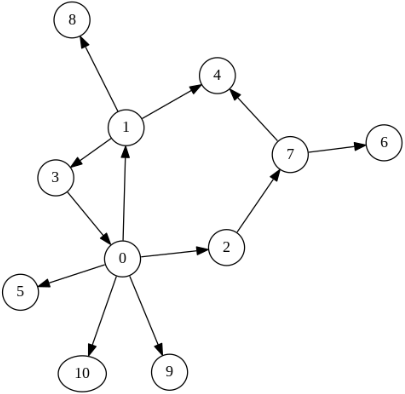
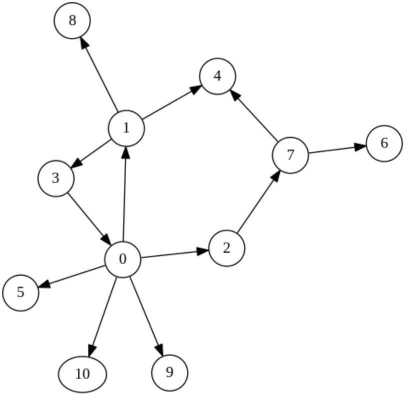


FIGURE – Exemple de graphe orienté

- Le voisinage sortant du sommet 7 est : $N^+(7) = \{4, 6\}$.
- Le voisinage entrant du sommet 7 est : $N^-(7) = \{2\}$.

Définitions et concepts fondamentaux



Exercice

Pour chaque sommet, donnez son voisinage sortant, son voisinage sortant et son voisinage.

Définitions et concepts fondamentaux

Definition (Graphe simple et multi-graphe)

Soit $G = (V, E)$ un graphe. Si pour tout couple de sommet (u, v) il existe au plus une arête possédant u et v comme extrémités, alors G est un graphe simple. La même définition s'applique pour les graphes orientés, où un arc du graphe ne peut apparaitre plus d'une seule fois. Dans le cas contraire, on parle de multi-graphe.

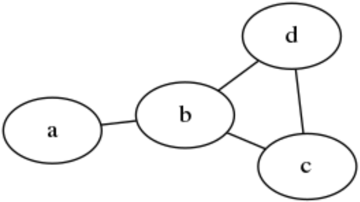


FIGURE – Graphe simple

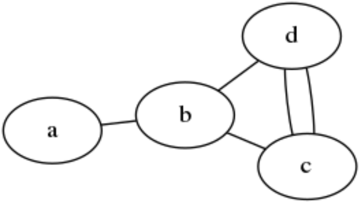


FIGURE – Multi-graphe

Definition (Boucle)

Une boucle est une arête ou un arc d'un graphe pour lequel les deux extrémités sont identiques.

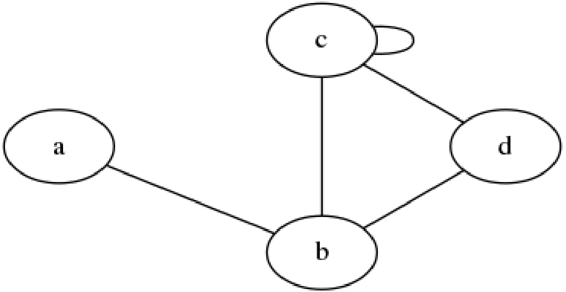


FIGURE – Exemple de graphe contenant une boucle sur le sommet c

Définitions et concepts fondamentaux

Definition (Sommet isolé)

Un sommet sans aucun voisin est dit isolé.

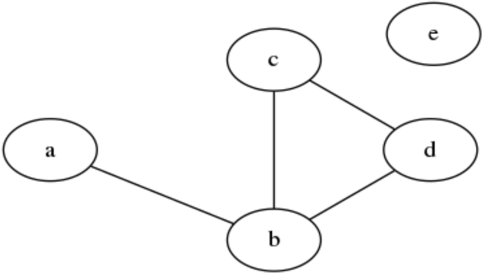
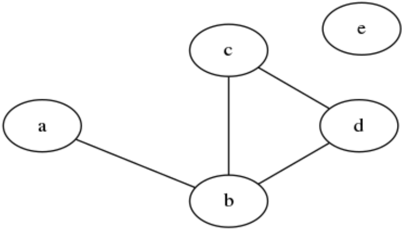


FIGURE – Exemple de graphe pour lequel un sommet est isolé

Definition (Adjacence)

Soient u et v deux sommets d'un graphe. Ces deux sommets sont dits adjacents si il existe, dans le graphe, une arête ou un arc ayant u et v pour extrémités.



Dans ce graphe, les sommets c et d sont adjacents. Le sommet e n'est adjacent à aucun sommet.

Definition (Attributs)

Un graphe est un outil de modélisation très souple pouvant s'adapter à de nombreuses situations. En particulier, il est possible d'ajouter des attributs aux sommets, arcs ou arêtes d'un graphe.

Par exemple, il est possible de pondérer (ajouter un poids, une valeur) à un sommet, un arc ou une arête. Si les arcs ou les arêtes sont pondérés, on parle de graphe pondéré.

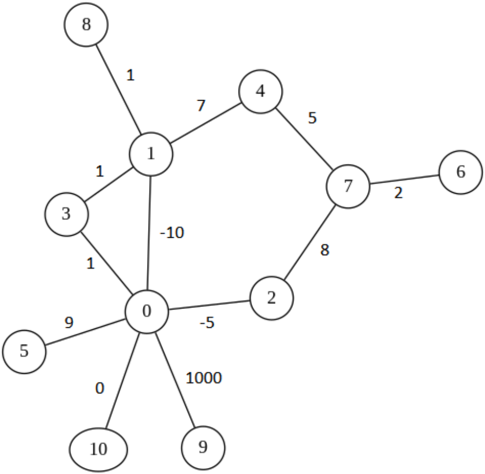


Figure – Exemple de graphe pondéré

Definition (chemin, chaîne)

Un chemin (une chaîne si le graphe est non-orienté) reliant deux sommets u et v est une succession d'arcs (d'arêtes) consécutifs partant du sommet u et arrivant au sommet v.

1. Un chemin (chaîne) est dit élémentaire si il ne passe pas deux fois par le même sommet.
2. Un chemin (chaîne) est dit simple si il ne passe pas deux fois par le même arc (arête).

Pour faciliter les choses, et lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on utilisera simplement le terme de chemin (chaîne) pour signifier chemin (chaîne) élémentaire.

Definition (Taille d'un chemin ou d'une chaîne)

La taille d'un chemin (chaîne) correspond au nombre de sommets appartenant à ce chemin.

Definition (Longueur d'un chemin ou d'une chaîne)

1. Si le graphe est non pondéré, la longueur d'un chemin (chaîne) correspond au nombre d'arcs (arêtes) traversés.
2. Si le graphe est pondéré, la longueur du chemin (chaîne) correspond à la somme des poids des arcs (arêtes) traversés.

Exercice

1. Donnez un graphe simple, sans boucle et non pondéré contenant un chemin de taille 5.
2. Donnez un graphe simple, sans boucle et non pondéré contenant un chemin de longueur 6.
3. Donnez un graphe simple, sans boucle et pondéré contenant un chemin de taille 5 et de longueur 40.

Definition (Graphe connexe)

Un graphe est connexe si, pour tout couple de sommets (u, v), il existe un chemin (on ignore l'orientation des arc si le graphe est orienté) allant de u vers v.
Un graphe orienté est dit fortement connexe si, pour tout couple de sommets (u, v), il existe une chaîne allant de u à v ET une chaîne allant de v à u.

Exercice

1. Donnez deux graphes simples, sans boucles et non orientés. L'un doit être connexe et l'autre non.
2. Donnez deux graphes simples, sans boucles et orientés. L'un doit être connexe et l'autre non.
3. Donnez un graphe simple, sans boucle et orienté. Ce graphe doit être fortement connexe.

Definition (Composante connexe)

Une composante connexe $CC \in V$ est un sous ensemble connexe et maximal des sommets du graphe. Le mot maximal signifie ici que si on ajoute un autre sommet de V à CC, alors CC ne sera plus connexe.

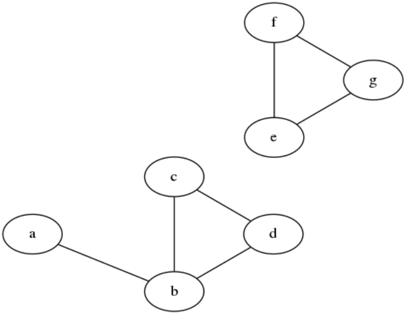


FIGURE – Exemple de graphe contenant 2 composantes connexes

Definition (Cycle)

Un cycle est un chemin de taille strictement supérieur à 1 partant et arrivant au même sommet.

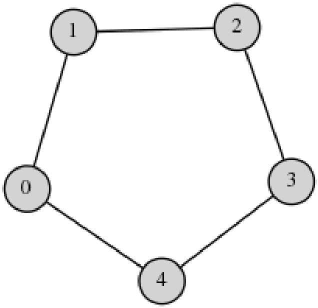


FIGURE – Exemple de graphe contenant un cycle