# Programmation linéaire

## L'algorithme du simplexe

François Delbot

17 novembre 2019

# L'algorithme du simplexe

## Introduction

L'algorithme du simplexe est l'un des algorithmes les plus utilisés pour résoudre les problèmes de programmation linéaire. Cet algorithme a été conçu en 1947 par George Dantzig. Il existe plusieurs versions de cet algorithme. Nous verrons la méthode du dictionnaire.

# L'algorithme du simplexe

## Introduction

Nous allons considérer une version simplifiée de l'algorithme du simplexe. Cette version intègre la préparation du problème (forme canonique et forme normale) et considère qu'il existe toujours une solution initiale que l'on peut déterminer de manière triviale.

# L'algorithme du simplexe

## Les différentes étapes

**Algorithm 11:** Algorithme du simplexe

**Data:** Un programme linéaire
**Result:** Une solution optimale pour ce programme linéaire
Placer le problème sous forme canonique;
Placer le problème sous forme normale;
Déterminer une solution de base réalisable initiale grâce aux variables d'écart;
Reformuler les équations :

- membre gauche : les variables en base
- membre droit : expression n'utilisant que des variables hors base

**while** *La solution optimale n'est pas atteinte* **do**
  Déterminer la variable entrante;
  Déterminer la variable sortante;
  Réaliser l'opération de pivotage;
**end**
**return** La solution optimale;

# Algorithme du simplexe (méthode du dictionnaire)

## Exemple

Nous allons dérouler cette méthode directement sur un exemple.
On considère que le programme linéaire de notre exemple se trouve déjà sous forme normale :

### Programme linéaire sous forme normale

$$
\begin{array}{lccccccccccccc}
z= & 7X_1 & + & 9X_2 & + & 18X_3 & + & 17X_4 & + & 0e_1 & + & 0e_2 & + & 0e_3 & & \\
\text{t.q.} & 2X_1 & + & 4X_2 & + & 5X_3 & + & 7X_4 & + & e_1 & & & & & = & 42 \\
 & X_1 & + & X_2 & + & 2X_3 & + & 2X_4 & + & & & e_2 & & & = & 17 \\
 & X_1 & + & 2X_2 & + & 3X_3 & + & 3X_4 & + & & & & & e_3 & = & 24 \\
 & X_1 & & X_2 & & X_3 & & X_4 & & e_1 & & e_2 & & e_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

# Algorithme du simplexe (méthode du dictionnaire)

## Solution de base réalisable

On cherche une solution de base réalisable. Le plus simple étant de placer les $n$ variables du problème initial hors base (on leur affecte donc la valeur 0) et de placer les variables d'écart en base. Cela permet de déterminer directement leur valeur. Par exemple :

- $2 \cdot X_1 + 4 \cdot X_2 + 5 \cdot X_3 + 7 \cdot X_4 + e_1 = 42$
- $\Rightarrow 2 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 5 \cdot 0 + 7 \cdot 0 + e_1 = 42$
- $\Rightarrow e_1 = 42$

Cela ne fonctionne que parce que parce que les problèmes que nous considérons dans ce cours admettent une solution nulle. Si ce n'est pas le cas, il faut considérer certaines méthodes, comme celle des deux phases.

# Algorithme du simplexe (méthode du dictionnaire)

## Pour résumer

- Variables hors base : $X_1, X_2, X_3, X_4$
- Variables en base : $e_1 = 42, e_2 = 17, e_3 = 24$
- Comme $X_1 = X_2 = X_3 = X_4 = 0$, on obtient directement que $e_1 = 42, e_2 = 17, e_3 = 24$
- La solution de base réalisable obtenue est la suivante :

$$X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 0, X_4 = 0, e_1 = 42, e_2 = 17, e_3 = 24$$

- On peut ainsi calculer la valeur de la fonction objectif : $z = 0$

# Algorithme du simplexe (méthode du dictionnaire)

## Reformulation du problème

A partir de cette solution, on peut reformuler chaque équation en plaçant les variables en base comme membre gauche (et rien d'autre). Par exemple, la première équation nous permet d'exprimer la variable $e_1$ :

$$2 \cdot X_1 + 4 \cdot X_2 + 5 \cdot X_3 + 7 \cdot X_4 + e_1 = 42$$

$$\Rightarrow e_1 = 42 - 2 \cdot X_1 - 4 \cdot X_2 - 5 \cdot X_3 - 7 \cdot X_4$$

# Algorithme du simplexe (méthode du dictionnaire)

## Reformulation du problème

On obtient ainsi le problème reformulé :

**Reformulation**

$$
\begin{array}{llllllllll}
z= & & & & 7X_1 & + & 9X_2 & + & 18X_3 & + & 17X_4 \\
e_1 & = & 42 & - & 2X_1 & - & 4X_2 & - & 5X_3 & - & 7X_4 \\
e_2 & = & 17 & - & X_1 & - & X_2 & - & 2X_3 & - & 2X_4 \\
e_3 & = & 24 & - & X_1 & - & 2X_2 & - & 3X_3 & - & 3X_4
\end{array}
$$

# Algorithme du simplexe (méthode du dictionnaire)

## Étape 1.

Nous entrons maintenant dans la boucle de l'algorithme. Nous devons déterminer à chaque étape quelle variable va rentrer en base, et quelle variable va sortir de base. Il s'agit de l'opération de pivotage :

### Comment réaliser un pivotage

1. Opération de pivotage
   - Une variable hors base entre en base
   - Une variable en base sort de la base
2. Choix des variables
   - Variable entrante : max des coefficients dans la fonction objectif
   - Variable sortante : celle correspondant à la ligne contraignant le plus la variable entrante

# Algorithme du simplexe (méthode du dictionnaire)

## Étape 1. Critère de Dantzig pour la variable entrante.

Critère de sélection de la variable entrante : la variable hors base dont le coefficient est le plus élevé dans la fonction objectif. Il s'agit du **critère de Dantzig**.

### Choix de la colonne pivot

$$\begin{array}{ccccccccccc}
z= & & & & 7X_1 & + & 9X_2 & + & \color{red}{18X_3} & + & 17X_4 \\
e_1 & = & 42 & - & 2X_1 & - & 4X_2 & - & 5X_3 & - & 7X_4 \\
e_2 & = & 17 & - & X_1 & - & X_2 & - & 2X_3 & - & 2X_4 \\
e_3 & = & 24 & - & X_1 & - & 2X_2 & - & 3X_3 & - & 3X_4
\end{array}$$

Le critère de Dantzig nous fait sélectionner $X_3$

# Algorithme du simplexe (méthode du dictionnaire)

## Étape 1. Déterminer la variable sortante.

Une fois la variable entrante sélectionnée, il faut déterminer la variable sortante. Cette variable sortante est nécessairement l'une des variables en base, soit $e_1, e_2$ ou $e_3$. Pour déterminer quelle variable va sortir de la base, nous allons vérifier pour chaque équation laquelle va contraindre le plus notre variable entrante, soit $X3$ dans notre cas.

# Algorithme du simplexe (méthode du dictionnaire)

## Étape 1. Déterminer la variable sortante.

On sait que les variables en base on une valeur supérieure ou égale à 0. Par exemple, grâce à la première équation on a :

$$\underbrace{e_1}_{\geq 0} = \underbrace{42 - 2 \cdot X_1 - 4 \cdot X_2 - 5 \cdot X_3 - 7 \cdot X_4}_{\geq 0}$$

$$\Rightarrow 42 - 2 \cdot X_1 - 4 \cdot X_2 - 5 \cdot X_3 - 7 \cdot X_4 \geq 0$$

$$\Rightarrow 42 - 2 \cdot X_1 - 4 \cdot X_2 - 7 \cdot X_4 \geq 5 \cdot X_3$$

Or $X_1 = X_2 = X_4 = 0$ donc :

$$42 \geq 5 \cdot X_3$$

$$e_1 \geq 0 \Rightarrow X_3 \leq 8.4$$

# Algorithme du simplexe (méthode du dictionnaire)

## Étape 1. Déterminer la variable sortante.

On fait de même avec $e_2$ et $e_3$. On trouve

- $e_1 \geq 0 \Rightarrow X_3 \leq 8.4$
- $e_2 \geq 0 \Rightarrow X_3 \leq 8.5$
- $e_3 \geq 0 \Rightarrow X_3 \leq 8$

On peut ainsi se rendre compte que $e_3$ contraint le plus la valeur de $X_3$. C'est donc $e_3$ que nous allons faire sortir de base.

# Algorithme du simplexe (méthode du dictionnaire)

## Étape 1. Opération de pivotage.

$X_3$ entre en base et $e_3$ sors de base.

Pour rappel, les équations du programme linéaire doivent avoir les variables en base comme membre gauche. Nous allons donc modifier l'équation qui possède $e_3$ comme membre gauche pour exprimer $X_3$ en fonction des variables hors base (y compris $e_3$)

# Algorithme du simplexe (méthode du dictionnaire)

## Étape 1. Opération de pivotage.

$$e_3 = 24 - X_1 - 2 \cdot X_2 - 3 \cdot X_3 - 3 \cdot X_4$$

$$\Rightarrow 3 \cdot X_3 = 24 - X_1 - 2 \cdot X_2 - 3 \cdot X_4 - e_3$$

$$\Rightarrow X_3 = 8 - \frac{1}{3} \cdot X_1 - \frac{2}{3} \cdot X_2 - X_4 - \frac{1}{3} \cdot e_3$$

Cette équation va remplacer la précédente dans le programme linéaire. De plus, nous allons remplacer $X_3$ dans chacune des autres équations ainsi que dans la fonction objectif. Par exemple, la fonction objectif sera transformée de la manière suivante :

- $z = 7 \cdot X_1 + 9 \cdot X_2 + 18 \cdot X_3 + 17 \cdot X_4$
- $z = 7 \cdot X_1 + 9 \cdot X_2 + 18 \cdot (8 - \frac{1}{3} \cdot X_1 - \frac{2}{3} \cdot X_2 - X_4 - \frac{1}{3} \cdot e_3) + 17 \cdot X_4$
- $z = 144 + X_1 - 3 \cdot X_2 - X_4 - 6 \cdot e_3$

# Algorithme du simplexe (méthode du dictionnaire)

## Étape 1. Opération de pivotage.

On fait de même pour les autres équations et on obtient :

**Programme mis à jour**

$$
\begin{array}{lclclclclcl}
z= & & 144 & + & X_1 & - & 3\cdot X_2 & - & X_4 & - & 6\cdot e_3 \\
X_3 & = & 8 & - & \frac{1}{3}\cdot X_1 & - & \frac{2}{3}\cdot X_2 & - & X_4 & - & \frac{1}{3}\cdot e_3 \\
e_1 & = & 2 & - & \frac{1}{3}\cdot X_1 & - & \frac{2}{3}\cdot X_2 & - & 2\cdot X_4 & + & \frac{5}{3}\cdot e_3 \\
e_2 & = & 1 & - & \frac{1}{3}\cdot X_1 & + & \frac{1}{3}\cdot X_2 & & & + & \frac{2}{3}\cdot e_3
\end{array}
$$

# Algorithme du simplexe (méthode du dictionnaire)

## Étape 2. Critère de Dantzig pour la variable entrante.

Dans notre exemple, la variable dont le coefficient est le plus élevé dans la fonction objectif est la variable $X_1$ :

### Choix de la colonne pivot

$$\begin{array}{lcccccccccc}
z= & & 144 & + & \color{red}{X_1} & - & 3\cdot X_2 & - & X_4 & - & 6\cdot e_3 \\
X_3 & = & 8 & - & \frac{1}{3}\cdot X_1 & - & \frac{2}{3}\cdot X_2 & - & X_4 & - & \frac{1}{3}\cdot e_3 \\
e_1 & = & 2 & - & \frac{1}{3}\cdot X_1 & - & \frac{2}{3}\cdot X_2 & - & 2\cdot X_4 & + & \frac{5}{3}\cdot e_3 \\
e_2 & = & 1 & - & \frac{1}{3}\cdot X_1 & + & \frac{1}{3}\cdot X_2 & & & + & \frac{2}{3}\cdot e_3
\end{array}$$

# Algorithme du simplexe (méthode du dictionnaire)

## Étape 2. Déterminer la variable sortante.

Il faut maintenant déterminer la variable sortante :

- $X_3 \geq 0 \Rightarrow X_1 \leq 24$
- $e_1 \geq 0 \Rightarrow X_1 \leq 6$
- $e_2 \geq 0 \Rightarrow X_1 \leq 3$

La variable qui va sortir de base est donc la variable $e_2$.

# Algorithme du simplexe (méthode du dictionnaire)

## Étape 2. Opération de pivotage.

On va donc utiliser l'équation contenant $e_2$ comme membre gauche pour exprimer $X_1$ en fonction des variables hors base. Ainsi, on trouve :

$$X_1 = 3 + X_2 - 3 \cdot e_2 + 2 \cdot e_3$$

Cette équation va remplacer la précédente dans le programme linéaire. De plus, nous allons remplacer $X_1$ dans chacune des autres équations ainsi que dans la fonction objectif.

# Algorithme du simplexe (méthode du dictionnaire)

## Étape 2. Opération de pivotage.

On obtient le programme linéaire suivant :

### Programme mis à jour

$$
\begin{array}{lcccccccccc}
z= & & 147 & - & 2 \cdot X_2 & - & X_4 & - & 3 \cdot e_2 & - & 4 \cdot e_3 \\
X_3 & = & 7 & - & X_2 & - & X_4 & + & e_2 & - & e_3 \\
e_1 & = & 1 & - & X_2 & - & 2 \cdot X_4 & - & e_2 & + & e_3 \\
X_1 & = & 3 & + & X_2 & & & - & 3 \cdot e_2 & + & 2 \cdot e_3
\end{array}
$$

# Algorithme du simplexe (méthode du dictionnaire)

## Fin de l'algorithme

Il n'existe plus de variables dans la fonction objectif possédant un coefficient positif. C'est la fin de l'algorithme. $X_2, X_4, e_2$ et $e_3$ étant hors base, elles valent 0. On peut donc calculer la valeur de la fonction objectif, qui est de 147. On peut également calculer la valeur des différentes variables en base : $X_3 = 7, e_1 = 1$ et $X_1 = 3$. La solution finale pour le problème sous forme normale peut donc s'exprimer comme ceci :

$$(X_1 = 3, X_2 = 0, X_3 = 7, X_4 = 0, e_1 = 1, e_2 = 0, e_3 = 0)$$

La solution pour la forme canonique est :

$$(X_1 = 3, X_2 = 0, X_3 = 7, X_4 = 0)$$