Problèmes de transports et flots

François Delbot

24 octobre 2019

Introduction

De nombreux problèmes peuvent êtres modélisés par un problème de flot, c'est-à-dire calculer la quantité maximum d'un fluide pouvant transiter sur un réseau dont les capacités sont limitées. Par exemple :

1. Distribution d'eau dans un réseau de canalisations, transport de pétrole sur un réseau de pipelines.
2. Systèmes de transports en commun dans une grande ville.
3. Transport d'énergie électrique sur le réseau EDF.
4. Débit de données sur le réseau d'un opérateur (neutralité du net).

Introduction

Nous allons voir comment modéliser de tels problèmes, comment les résoudre au moyen de l'algorithme de Ford-Fulkerson, puis un exemple illustrant le lien entre théorie des flots et un problème classique de théorie des graphes.

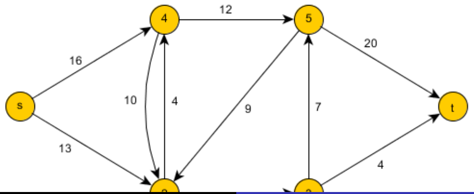
Réseau de transport

Définition

Un réseau de transport peut-être vu comme un graphe orienté, chaque arc étant associé à une quantité maximum de flot pouvant le traverser à un instant donné :

Definition (Réseau de transport)

Un réseau de transport est un graphe $G = (V, A, c, s, t)$ tel que chaque arc (u, v) possède une capacité $c(u, v)$. Un réseau de transport possède également deux sommets particuliers notés s (la source) et t (le puit) tels que $N^+(s) = 0$ et $N^-(t) = 0$.

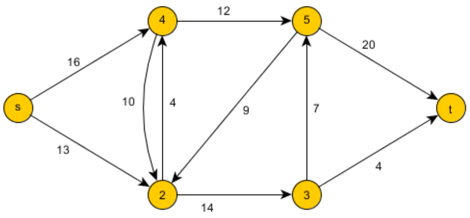


Réseau de transport

Simplification

Pour plus de simplicité, on suppose que :

1. Le graphe est connexe
2. Tout sommet du graphe se trouve sur un chemin reliant s à t.



Réseau de transport

Fonction de flot

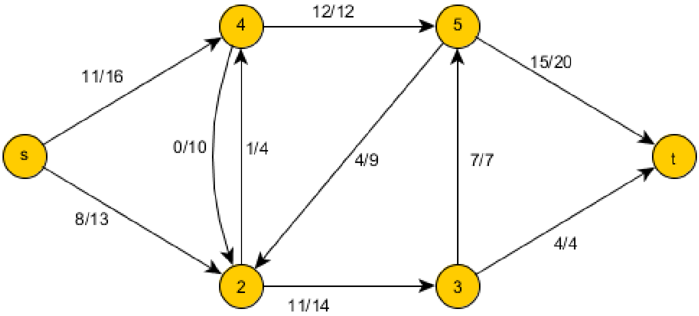
Definition (Flot)

Un flot est une fonction f, appliquée à un réseau de transport $G = (V, A, c, s, t)$, qui associe à chaque arc (u, v) une valeur $f(u, v)$ qui respecte les trois propriétés suivantes :

1. Contrainte de capacité : Pour tout arc (u, v), $f(u, v) \leq c(u, v)$.
2. Symétrie : Pour tout couple de sommets (u, v), $f(u, v) = -f(v, u)$.
3. Conservation du flot : Pour tout sommet autre que s ou t, la somme des flots entrants est égale à la somme des flots sortants.

Réseau de transport

Exemple de flot

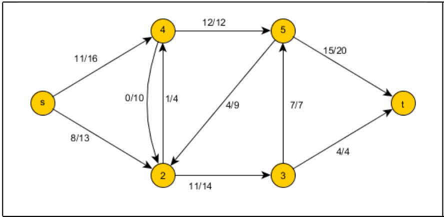


Réseau de transport

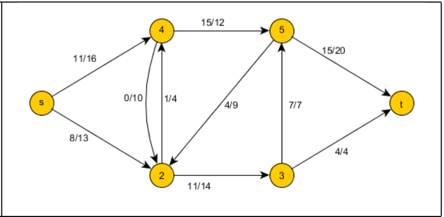
Flot réalisable

Definition (Flot réalisable)

Si pour tout arc du réseau de transport, la valeur du flot ne dépasse pas la capacité, alors on dit que le flot est réalisable.



flot réalisable

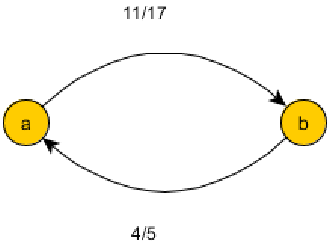


flot non réalisable car le flot de l'arc (4,5) dépasse sa capacité

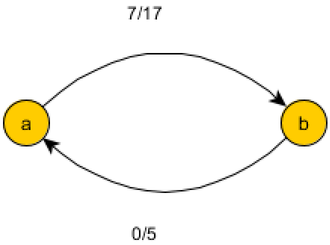
Réseau de transport

Annulation de flot

Quand deux arcs en sens inverse relient deux sommets, on peut toujours annuler la fonction flot sur l'un des deux arcs.



Exemple de deux arcs en sens inverse, l'un avec un flot de 11, l'autre avec un flot de 4.



Les deux mêmes arcs après annulation du flot sur l'un d'entre eux.

Réseau de transport

Saturation d'un arc

Definition (Saturation)

Lorsqu'un flot passant par un arc (u, v) atteint la capacité, on dit alors que cet arc est saturé.

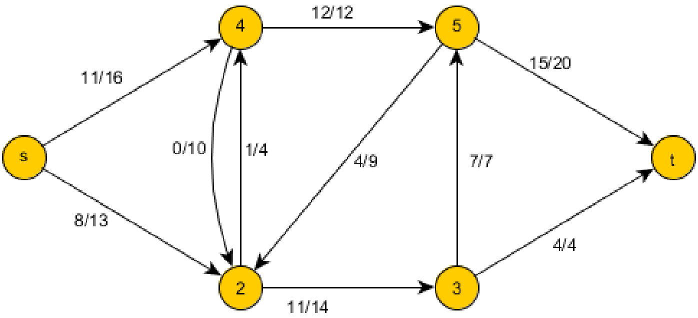
Definition (Valeur du flot)

La valeur d'un flot, est égale à la somme des flots sortants du sommet s, ou bien, de manière équivalente, à la somme des flots entrants au sommet t.

Réseau de transport

Valeur d'un flot

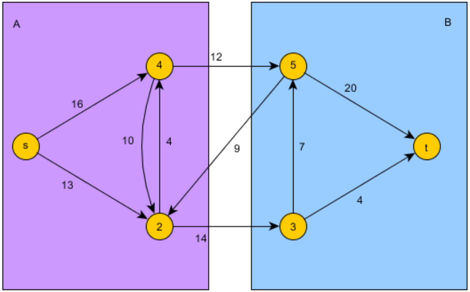
En particulier, le flot présent sur la figure suivante a une valeur de 19.



Coupe minimum

Definition (Coupe)

une coupe est une séparation des sommets en deux sous-ensembles A et B, tels que $s \in A$, $t \in B$ et $B = V - A$.

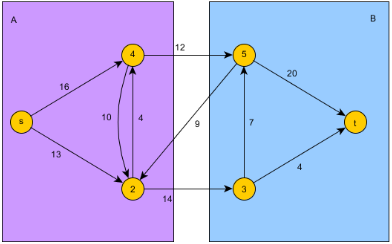


Coupe minimum

Definition (Capacité d'une coupe)

La capacité d'une coupe (A, B), notée $C(A, B)$, est égale à la somme des capacités des arcs allant de A vers B :

$$C(A, B) = \sum_{i \in A,\ j \in B} c(i, j)$$

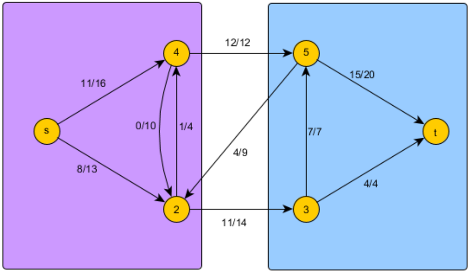


La capacité de cette coupe (A, B) vaut $12 + 14 = 26$.

Coupe minimum

Definition (Flot net)

Étant donnée une coupe séparant les sommets en deux ensembles A et B. La somme des valeurs du flot sur les arcs allant de A vers B moins la somme des valeurs du flot sur les arcs allant de B vers A est appelée flot net traversant la coupe. Le flot net traversant une coupe ne dépend pas de la coupe.



Exemple de coupe pour laquelle le flot net vaut $12 - 4 + 11 = 19$.

Coupe minimum

Theorem (Ford-Fulkerson)

Pour tout flot F de valeur $V(F)$, et pour toute coupe (A, B) de capacité $C(A, B)$ on a :

$$V(F) \leq C(A, B)$$

Definition (Coupe minimale)

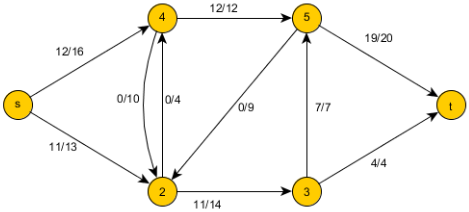
Une coupe (A, B) est dite minimale pour un flot F si tous les arcs allant de A vers B sont saturées et aucun arc de B vers A n'est saturé.

Coupe minimum

Theorem (Coupe minimale et flot maximum)

Si il existe une coupe minimale pour un flot F alors ce flot est maximum.

En utilisant ce théorème, que pouvez vous en déduire à propos du flot suivant ?



Il est trivial de trouver un flot réalisable, puisqu'il suffit d'appliquer un flot nul à chaque arc. Le problème qui nous intéresse ici est de trouver un flot dont la valeur est maximum.

Graphe résiduel

Étant donnés un réseau de transport et un flot associé, le graphe résiduel correspond au graphe représentant la quantité de flot pouvant être ajouté ou retiré sur chaque arc. On peut le construire de la manière suivante :

1. On utilise le même ensemble de sommets du graphe.
2. Pour chaque arc $f(u, v) \leq c(u, v)$, on peut augmenter le flot de $c(u, v) - f(u, v)$ et on peut le diminuer de $f(u, v)$, ce qui revient à faire passer un flot $-f(u, v)$ sur un arc (v, u).

Chemin augmentant

Definition (Chemin augmentant)

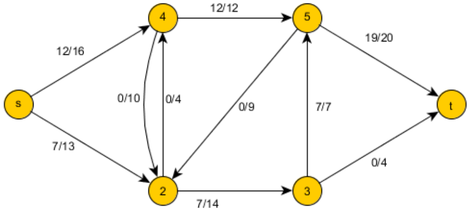
Pour un réseau de transport associé à un flot, un chemin augmentant est un chemin allant de s à t dans le graphe résiduel.

Un chemin augmentant p déterminé d'un graphe résiduel G_r calculé à partir d'un réseau de transport G associé à un flot f peut être vu comme la possibilité d'augmentation du flot f en modifiant la valeur du flot sur les arcs de p dans f.

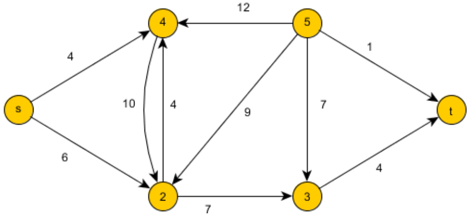
Afin de conserver un flot réalisable, ces arcs ne peuvent êtres augmentés que de la valeur minimum des capacités résiduelle de p.

Graphe résiduel

Exemple de flot



Graphe résiduel associé



Algorithme de Ford-Fulkerson

Algorithm 10: Ford-Fulkerson($G = (V, A, c, s, t)$)

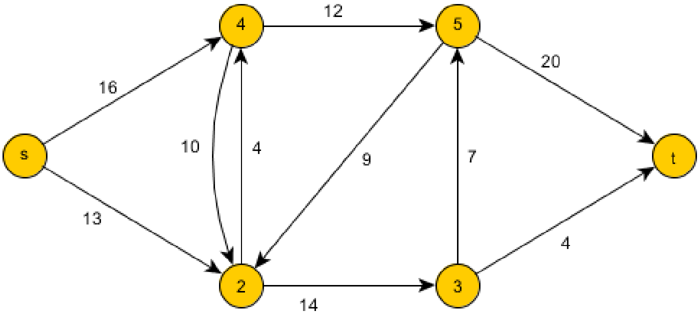
Data: $G = (V, A, c, s, t)$ un réseau de transport
Result: Un flot maximum pour ce réseau

foreach $(u, v) \in A$ **do**
  $f(u, v) = 0$;
end
while $\exists$ *un chemin* p *de* s *à* t *dans le graphe résiduel* **do**
  $c_f(p) \leftarrow min\{c_f(u, v) : (u, v) \in p\}$;
  foreach $(u, v) \in p$ **do**
    $f(u, v) = f(u, v) + c_f(p)$;
  end
end
return Vrai;

Déroulement de l'algorithme

Réseau de transport

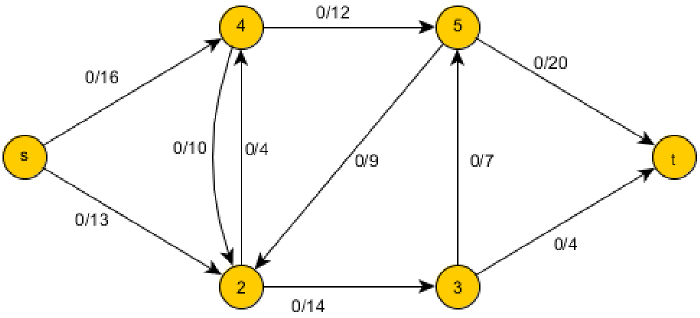
Nous allons dérouler l'algorithme de Ford-Fulkerson sur le réseau de transport suivant :



Déroulement de l'algorithme

Initialisation avec un flot nul

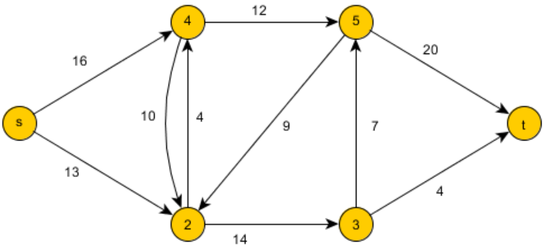
Pour débuter, on initialise avec un flot nul, qui est nécessairement un flot réalisable.



Déroulement de l'algorithme

Étape 1. Calcul du graphe résiduel

A partir de ce flot réalisable, nous calculons son graphe résiduel.



Sélection d'un chemin allant de s à t dans le graphe résiduel Prenons le chemins $s \to 4 \to 5 \to t$. L'arc de poids minimum sur ce chemin vaut 12. Nous allons donc augmenter de 12 le flot des arcs $(s, 4), (4, 5), (5, t)$.

Déroulement de l'algorithme

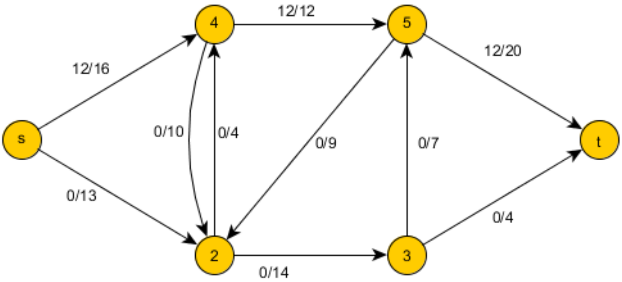
Étape 1. Calcul du graphe résiduel

Important. Le chemin est sélectionné de manière totalement arbitraire. Si on souhaite implémenter cet algorithme, il est possible d'utiliser n'importe quel algorithme, par exemple celui du parcours en largeur ou celui de Dijkstra.

Déroulement de l'algorithme

Étape 1. Flot réalisable

On obtient le flot réalisable suivant :

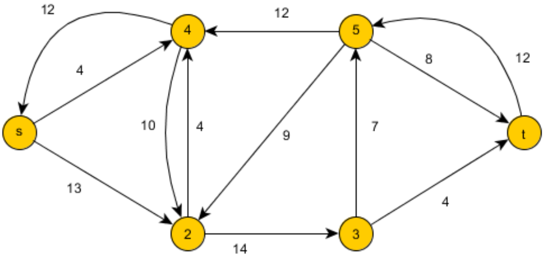


On peut remarquer directement qu'on ne pourra donc plus augmenter le flot parcourant l'arc $(4,5)$ puisqu'il est saturé.

Déroulement de l'algorithme

Étape 2. Calcul du graphe résiduel

A partir de ce flot réalisable, nous calculons son graphe résiduel.

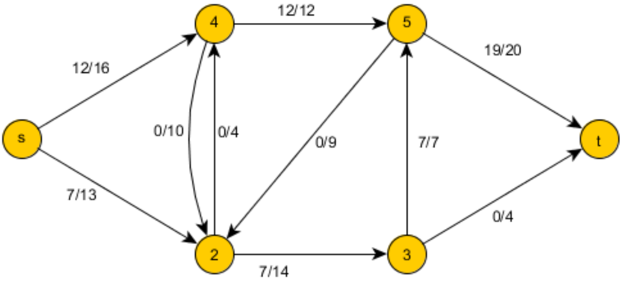


Sélection d'un chemin allant de s à t dans le graphe résiduel. Prenons le chemins $s \to 2 \to 3 \to 5 \to t$. L'arc de poids minimum vaut 7. Nous allons donc augmenter de 7 le flot des arcs $(s, 2), (2, 3), (3, 5), (5, t)$.

Déroulement de l'algorithme

Étape 2. Flot réalisable

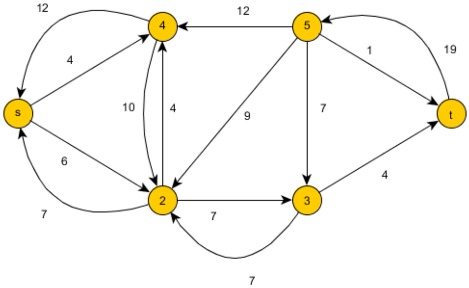
On obtient le flot réalisable suivant :



Déroulement de l'algorithme

Étape 3. Calcul du graphe résiduel

A partir de ce flot réalisable, nous calculons son graphe résiduel.

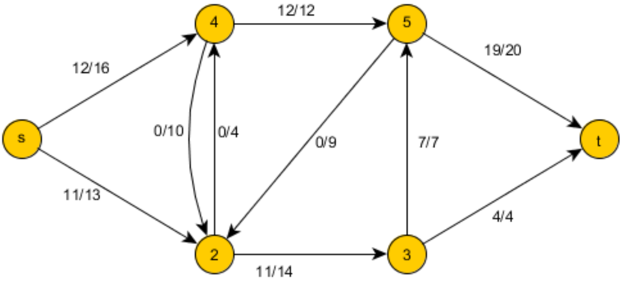


Sélection d'un chemin allant de s à t dans le graphe résiduel Prenons le chemins $s \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow t$. L'arc de poids minimum vaut 4. Nous allons donc augmenter de 4 le flot des arcs $(s, 2), (2, 3), (3, t)$.

Déroulement de l'algorithme

Étape 3. Flot réalisable

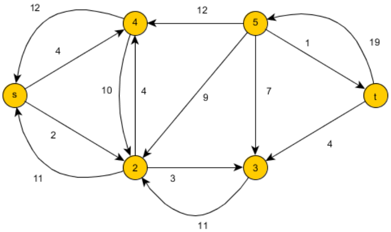
On obtient le flot réalisable suivant :



Déroulement de l'algorithme

Étape 4. Calcul du graphe résiduel

A partir de ce flot réalisable, nous calculons son graphe résiduel.



Sélection d'un chemin allant de s à t dans le graphe résiduel : Il n'existe pas de chemin permettant de relier le sommet s au sommet t dans le graphe résiduel.

Fin de l'algorithme. Le flot maximum a pour valeur 23.

Exemples d'application des flots

Déterminer des chemins indépendants

Lorsque la capacité de chaque arc du réseau est de 1, alors un flot corresponds à un ensemble de chemins n'ayant aucun arc en commun. La capacité de ce flot est égale au nombre de ces chemins.

Exemples d'application des flots

Couplage maximum dans un graphe biparti

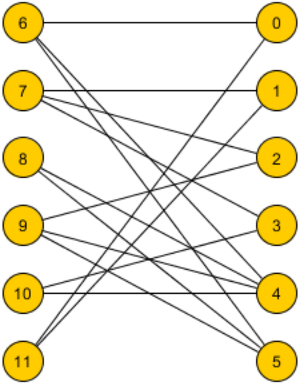
Definition (Couplage)

Un couplage d'un graphe est un ensemble d'arêtes deux à deux non adjacentes. Un couplage est dit maximal (au sens de l'inclusion) lorsqu'on ne peut plus ajouter d'arête dans le couplage. Un couplage est dit maximum lorsqu'il n'existe pas d'autre couplage contenant plus d'arêtes.

Exemples d'application des flots

Couplage maximum dans un graphe biparti

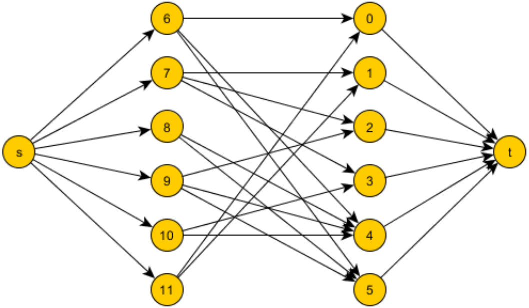
Trouver un couplage maximum dans un graphe biparti revient à un problème de flot maximum. Considérons le graphe suivant :



Exemples d'application des flots

Couplage maximum dans un graphe biparti

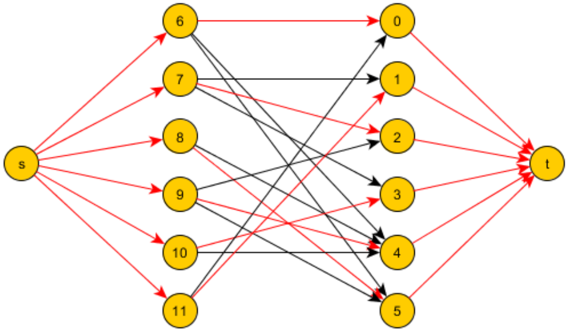
Il suffit d'ajouter une source reliée aux sommets du premier ensemble, et un puits relié aux sommets du second ensemble. Ensuite, chaque arête du graphe est transformée en arc allant de la source vers le puits.



Exemples d'application des flots

Couplage maximum dans un graphe biparti

En considérant que la capacité de chaque arc est de 1, on calcule ensuite un flot maximum.



Exemples d'application des flots

Couplage maximum dans un graphe biparti

Chaque arc saturé entre les deux ensembles appartient ainsi au couplage, qui est maximum.