Algorithmique 2

L3 RI

Table des matières

1 NP-Complétude

1.1 Définitions

Réduction Soient L_1, L_2 des langages. Une réduction polynomiale de L_1 à L_2 est une fonction f calculable en temps polynomial telle que :

$$f(x) \in L_2 \Longleftrightarrow x \in L_1$$

On note $L_1 \leq L_2$ (L_1 plus facile que L_2 = Si on sait résoudre L_2, on sait résoudre L_1)

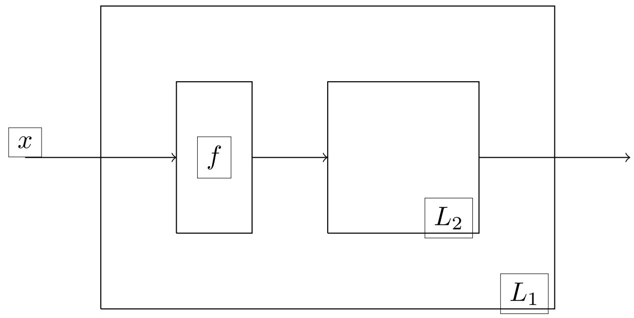


FIGURE 1 – Schéma de réduction de L_1 à L_2

Classe NP Soit L un langage. L est dit dans la classe NP s'il existe une machine de Turing non-déterministe en temps polynomial par rapport à la taille de l'entrée qui décide L.

NP-Complétude Soit L un langage. L est dit NP-dur si pour tout $L' \in \mathrm{NP}$, $L' \leq L$. L est dit NP-complet si $L \in \mathrm{NP}$ et L est NP-dur.

Remarques Si un problème NP-complet est dans P, alors P = NP. Pour montrer que L' est NP-dur, il suffit de montrer qu'il existe L NP-dur tel que $L \leq L'$.

1.2 Satisfiabilité d'une formule

Problème de décision : SAT

Entrée φ formule de la logique propositionnelle
Sortie Oui si φ est satisfiable, c'est-à-dire s'il existe une valuation v des variables qui rend φ vraie

Théorème de Cook SAT est NP-complet. (*Réduction de L à SAT pour $L \in \mathrm{NP}$ en considérant une machine de Turing $\mathcal{M}$ non-déterministe qui décide L. On construit une formule qui traduit une exécution de $\mathcal{M}$.*)

Problème de décision : i-SAT

Restriction de SAT à des formules en forme normale conjonctive (CNF) tel que chaque clause contient au plus i littéraux

Théorème 3-SAT est NP-complet. (*Réduction de SAT à 3-SAT.*)

Théorème 2-SAT est dans P. (*Réduction de 2-SAT à la détermination des CFC d'un graphe.*)

Problème de décision : MAX-2-SAT

Entrée φ formule en 2-forme normale conjonctive et $k \in \mathbb{N}$
Sortie Oui s'il existe une valuation qui satisfait au moins k clauses de φ

Théorème MAX-2-SAT est NP-complet. (*Réduction de 3-SAT à MAX-2-SAT.*)

1.3 Graphes

Problème de décision : ENS_INDEP

Entrée	$G = (V, E)$ un graphe non-orienté et $k \in \mathbb{N}$
Sortie	Oui s'il existe $V' \subseteq V$ tel que $|V'| = k$ et $(V' \times V') \cap E = \varnothing$

Théorème ENS_INDEP est NP-complet. (*Réduction de 3-SAT à ENS_INDEP.*)

Problème de décision : MAX_CUT

Entrée	$G = (V, E)$ un graphe non-orienté et $k \in \mathbb{N}$
Sortie	Oui s'il existe S_1 et S_2, $S = S_1 \uplus S_2$ et $\#\{(u, v) \in E \mid u \in S_1$ et $v \in S_2\} \geq k$

Théorème MAX_CUT est NP-complet. (*Réduction de MAX-2-SAT à MAX_CUT.*)

2 Algorithmes d'approximation

2.1 Définitions

Problème de décision (DEC) $\neq$ Problème d'optimisation (OPT)

- Un problème OPT (par exemple « x tel $f(x)$ minimal ») peut être traduit en un problème DEC (« Pour un b donné, existe-t'il x tel que $f(x) \leq b$? »).
- OPT permet de résoudre DEC
- Souvent, DEC permet de résoudre OPT par dichotomie.

Instance d'un problème d'optimisation

- ensemble de solution admissibles
- coût pour chaque solution admissibles
- hypothèse : il y a une solution de coût optimal C^*

Garantie de performance Un algorithme d'approximation a une garantie de performance $\rho(n)$ (appelé facteur d'approximation) si

$$\frac{C(\text{solution calculée})}{C^*} \leq \rho(n)$$

pour un problème de minimisation, ou

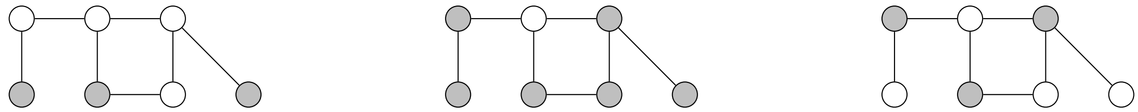
$$\frac{C^*}{C(\text{solution calculée})} \leq \rho(n)$$

pour un problème de maximisation.

2.2 Exemples

Problème d'optimisation : VERTEX COVER

Entrée	$G = (V, E)$ un graphe non orienté
Sortie	$S \subset V$ de cardinal minimal tel que S couvre les arêtes de G, ie $\forall (v, v') \in E, v \notin S \implies v' \in S$



(a) S n'est pas admissible (b) S est une solution non optimale (c) S est une solution optimale

Figure 2 – S est constitué des nœuds grisés

Théorème Le problème de décision associé à VERTEX COVER est NP-complet. (*VERTEX COVER* $\equiv$ *ENS_INDEP*)

Théorème Un algorithme glouton permet d'obtenir une 2-approximation pour VERTEX COVER..

Problème d'optimisation : SET COVER

Entrée X ensemble fini d'éléments, $\mathcal{F}$ une famille de sous ensembles de X.

Sortie $S \subset \mathcal{F}$ de cardinal minimal tel que S couvre tout X, ie $\forall x \in X, \exists\, \mathcal{E} \in S$ tel que $x \in \mathcal{E}$

Théorème VERTEX COVER $\leq$ SET COVER

Théorème Un algorithme glouton permet d'obtenir une $ln(n)$-approximation pour VERTEX COVER.

Problème d'optimisation : VOYAGEUR DU COMMERCE

Entrée n villes, distances entre chaque ville

Sortie Une tournée qui minimise la distance parcourue.

Théorème Si P $\neq$ NP, alors pour toutes constante $\rho \geq 1$, il n'existe pas d'algorithme d'approximation polynomial de garantie de performance ρ pour le voyageur de commerce.

3 Algorithmes probabilistes

Introduire de l'aléatoire pour :
- Réduire la complexité
- Simplifier les algorithmes.

Contrepartie : solution approchée (avec bonne proba d'être près de l'optimale) ou complexité bonne en moyenne mais pas dans le pire des cas.

3.1 Premiers exemples

Random Quick Sort Comme le tri rapide déterministe mais le pivot est choisi aléatoirement. La complexité est quadratique dans le pire des cas mais en $\mathcal{O}(n \cdot ln(n))$ en moyenne.

Pour le montrer, on calcule l'espérance de $X_{i,j}$ qui vaut 1 si i et j sont comparées et 0 sinon. Si X est le temps d'exécution, on a :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{1 \leq i < j \leq n}^{n} \mathbb{E}(X_{i,j})$$

Random Min Cut Soit G un graphe non orienté, pondéré par des entiers. On veut trouver la coupe de poids minimal (ie un ensemble d'arêtes à supprimer pour rendre le graphe non connexe). On contracte des arêtes au hasard. Si G a n sommets, la probabilité que la coupe renvoyée soit minimale est supérieure à $\frac{2}{n^2}$

3.2 Classes de complexité des algorithmes probabilistes

ZPP : Zero Error Probabilistic Polynomial Pour toute entrée de taille n, si il termine l'algo renvoie la réponse exacte et le temps moyen d'exécution et borné par $P(n)$, où P est un polynôme.

Exemple : Random quick sort.

RP : Randomized Polynomial Pour toute entrée de taille n, l'algo A s'exécute en temps borné par $P(n)$, ou P est un polynôme, et si $x \in L$, A répond « oui » avec probabilité $\frac{1}{2}$, sinon il répond non avec probabilité 1.

Exemple : Random min cut.

Théorème RP $\subset$ NP.

Théorème P $\subset$ ZPP.

Théorème ZPP = RP $\cap$ co-RP.

Rappel : $L \in$ co-RP $\iff \Sigma^* \setminus L \in$ RP.

3.3 Déterminisation ou dérandomisation

But Passer d'un algorithme probabiliste à un algorithme déterministe en conservant les même facteurs d'approximation. *Exemple :* Déterminisation de Random Max Cut (NP-Complet).

3.4 Schéma d'approximation probabiliste entièrement polynomial

En anglais : Fully Polynomial Randomized Approximation (FPRA)

Exemple développé : SAT-DNF (nombre de valuations qui satisfont une formule en DNF - NP-dur).

Définition Si k est une valeur, X est (ε, δ)-approximation de k si $\mathbb{P}(|X - k| \leq \varepsilon \cdot k) \geq 1 - \delta$.

Schéma d'approximation probabiliste entièrement polynomial C'est un algorithme A qui prend $\varphi, \varepsilon, \delta$ en entrée et calcule $A(\varphi)$ une (ε, δ)-approximation de la valeur recherchée, en temps polynomial en $|\varphi|$, $log(\frac{1}{\varphi})$ et $\frac{1}{\varepsilon}$.

Bornes de Chernoff Soient $0 < p, \delta, \varepsilon < 1$ et $N \geq \dfrac{3 \cdot log(\frac{2}{\delta})}{p \cdot \varepsilon^2}$.

Si $X_1, \ldots, X_N$ sont des variables aléatoires indépendantes et à valeur dans $\{0, 1\}$, alors

$$\mathbb{P}\left(\left| \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i\right) - p \right| \leq \varepsilon \cdot p\right) \geq 1 - \delta.$$

4 Géométrie algorithmique

4.1 Enveloppe convexe

Calcul de l'enveloppe convexe

Entrée Un ensemble S de points (x, y) du plan

Sortie $C \subseteq S$ une énumération dans le sens trigonométrique des points extrémaux de l'enveloppe convexe de S

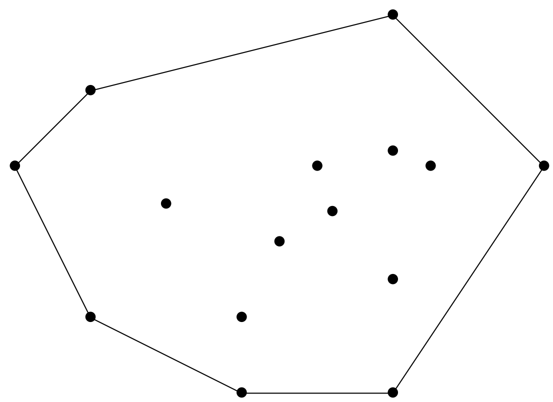


FIGURE 3 – Exemple d'enveloppe convexe d'un ensemble de points

Position d'un point par rapport à une droite On suppose qu'il n'existe pas trois points alignés. p_2 est à gauche de la droite orientée $(p_0\vec{p}_1)$ si et seulement si :

$$\det(p_0\vec{p}_1, p_0\vec{p}_2) > 0$$

Marche de Jarvis Algorithme du paquet cadeau

- Partir du point de plus petite ordonnée p_0
- Prendre un point suivant, parcourir tous les points et le remplacer s'il en existe un plus à gauche de la droite orientée $(p_{actuel}\ \vec{p}_{suivant})$
- Recommencer jusqu'à retomber sur p_0

Complexité de la marche de Jarvis Si n est la taille de S et h le nombre de points dans l'enveloppe convexe : $O(nh)$

La complexité dépend de la sortie (*output sensitive*).

Balayage de Graham On utilise une pile pour représenter l'enveloppe. p_0 point d'ordonnée minimale. $p_1 \dots p_n$ énumération des autres points, triés par angle polaire croissant (par rapport à p_0). On est alors certains que les 3 premiers (et et les deux derniers) points sont dans l'enveloppe convexe.

- Au début, empiler p_0, p_1 puis p_2
- Pour i de 1 à n
  - Tant que p_i est à droite du vecteur formé par les deux points en haut de la pile (ie p_i est à l'extérieur de la proposition d'enveloppe que représente la pile), on dépile.
  - Puis on empile p_i.
- On retourne la pile.

Complexité du balayage de Graham $\mathcal{O}(nlog(n))$ pour trier les points. Dans la boucle, on empile ou dépile au maximum n fois.

Donc complexité en $\mathcal{O}(nlog(n))$.

4.2 Points les plus rapprochés

Points les plus rapprochés

Entrée Un ensemble S de points (x, y) du plan
Sortie d^* la distance minimale entre deux points de S

Algorithme Principe de diviser pour régner, on divise le plan en deux. On obtient récursivement δ_D et δ_G. Soit $\delta = \min(\delta_G, \delta_D)$. On considère l'ensemble M des points dans la bande de largeur 2δ. $M = p_1 \dots p_k$ énumérés par ordonnées croissantes.

Lemme S'il existe $i < j$ tel que $d(p_i, p_j) < \delta$ alors il existe $i' < j' \leq i' + 8$ tel que $d(p_{i'}, p_{j'}) < \delta$.

En effet, on considère un rectangle qu'on divise en huit parties. On peut alors prendre 9 points et appliquer le principe des tiroirs.

Complexité Pré-tris en $O(n \log n)$. Au total, avec le *Master Theorem* : $O(n \log n)$

5 Algorithmes distribués

5.1 Généralités

Un système distribué est constitué de **processus** communiquant par des objets de partage ou par **envoi de messages**.

— **Communications**
Asynchrones (pas de confirmation de réception du message)
Par rendez-vous (Transmission uniquement sir le récepteur est prêt, problème d'interblocage)
— **Primitives**
Point à point
broadcast
— **Topologie**
Graphe fortement connexe
Graphe complet
— **Degré de synchronie**
Synchrone (horloges locales des processus son synchronisées, delai d'acheminement des message borné par Δ, vitesse relative des processus bornée par ϕ)
Asynchrone (Δ et ϕ n'existent pas a priori)
— **Types de défaillances**
Processus (crash, omission, byzantin)
Liens de communication, perte de messages, altération, duplication, création

5.2 Problème du consensus

Chaque processus p_i a une valeur v_i et une variale de décision d_i initialement à $\perp$ qui est *write once*.

Un algorithme résout le consensus s'il garantit :
— **Accord :** Si deux processus décident, alors ils décident la même valeur
— **Terminaison :** Tout processus correct va finalement décider
— **Validité :** Si v est une valeur de décision d'un processus correct, alors v était une valeur initiale
Si on ôte une des trois propriétés, le problème du consensus affaibli devient trivial.

5.3 Consensus dans le cas synchrone

Si on formalise, un processus p_i a un ensemble d'états ($states_i$), des états initiaux possibles ($start_i \subseteq states_i$) une fonction msg_i qui à un état et un voisin associe un message (ou *null*) et une fonction de transition. Un round est constitué d'une application de la fonction msg_i et d'un envoi des messages aux destinataires, puis d'une réception des messages et une mise à jour de l'état courant.

Un algorithme résout le problème du consensus et tolère t défaillances si pour toute exécution σ telle que $f(\sigma) \leq t$ (nombre de défaillances au cours de σ), on a les trois propriétés : accord, terminaison, validité.

Algorithme Flood Set Chaque processus commence avec $W_i = \{v_i\}$. Pour tout round d'indice inférieur à t, chaque processus envoie W_i à tout le monde, et ajoute à W_i ce qu'il reçoit des autres. Quand l'indice du round est $t+1$, on décide $d_i = \min_i W_i$. L'algorithme Flood Set résout le problème du consensus pour les systèmes synchrones et tolère t défaillances de type crash.

Preuve Terminaison : décision au tour $t+1$. Validité : à tout instant, W_i contient des valeur initiales. Accord : Il existe un round sans crash, à l'issue de ce round tous les processus ont le même W_i, et l'égalité est conservée.

5.4 Consensus dans le cas asynchrone

Théorème de Fischer Lynch Paterson Il n'existe pas d'algorithme résolvant le consensus dans le cas asynchrone qui tolère même une seule défaillance de type crash.

TODO formalisation, propriété du diamant, bivalence, étapes de la preuve (cf TD6)