École normale supérieure de Rennes
DIT 1ère année

2015-2016

Optimisation et méthodes numériques - Contrôle continu

Exercice 1. Questions de cours.

1. Rappeler la formule de Taylor à l'ordre 2 pour une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^2 autour d'un point $x \in \mathbb{R}^n$.
2. (a) Rappeler la condition nécessaire d'ordre 1 du cours pour qu'une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^1 admette un minimum local en un point $x \in \mathbb{R}^n$.
   (b) Montrer que la condition n'est pas suffisante.

Exercice 2. Déterminer les extrema locaux de la fonction

$$f : (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mapsto {x_1}^2 - x_1 x_2 + {x_2}^2.$$

Exercice 3. Le but de cet exercice est de trouver les minima globaux de la fonction

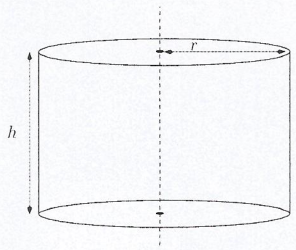
$$f : (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x_1(1 + {x_2}^2)$$

sous les contraintes :

$$\begin{aligned} {x_1}^2 + {x_2}^2 &\leqslant 4, \\ x_2 &\geqslant 1 - \frac{{x_1}^2}{4} \end{aligned}$$

1. Représenter le domaine des points admissibles.
2. Étudier la condition de qualification des contraintes.
3. Écrire le problème de Karush-Kuhn-Tucker associé au problème d'optimisation.
4. Conclure.

Exercice 4. On cherche à savoir quel cylindre ayant pour surface 2π est de volume maximal. On admet qu'il existe un tel cylindre. On paramètrera un cylindre par sa hauteur h, et le rayon r de sa base :



On pourra supposer sans perte de généralité que $h > 0$ et $r > 0$.

1. Écrire le problème d'optimisation en précisant bien le domaine admissible.
2. Étudier la qualification des contraintes.
3. Écrire le système d'équations associé au problème, et le résoudre. Conclure.

Bonus. On a admis l'existence de solution dans l'exercice, proposer une démarche pour montrer ce point.

MATH4 - Examen

16 décembre 2015

Il est demandé de rendre deux copies séparées pour la partie Calcul formel et la partie Optimisation. Les documents sont interdits. L'usage des calculatrices est autorisé.

Les exercices sont indépendants. Il est rappelé que la clarté de la rédaction sera largement prise en compte dans la correction.

I. Calcul formel

Exercice 1

1 Donner la définition d'un nombre de Carmichael.

2 Énoncer le théorème de la borne de Singleton sur les codes correcteurs linéaires.

Exercice 2

Soient a, b des entiers, et soit P le polynôme $X^2 - aX + b \in \mathbb{Z}[X]$. On note $\Delta = a^2 - 4b$ le discriminant de P, et α, β les deux racines (complexes, éventuellement confondues) de P. Pour tout entier $k \geq 0$, on définit

$$U_k = \frac{\alpha^k - \beta^k}{\alpha - \beta}, \quad V_k = \alpha^k + \beta^k.$$

1 Montrer que U_k et V_k vérifient la relation de récurrence $X_{k+2} = aX_{k+1} - bX_k$.

2 En déduire que U_k et V_k sont entiers pour tout $k \geq 0$.

3 Après avoir rappelé pourquoi $\Delta = (\alpha - \beta)^2$, montrer les relations de récurrence suivantes :

$$U_{2k} = U_k V_k, \; V_{2k} = V_k^2 - 2b^k, \; U_{2k+1} = \frac{1}{2}(aU_{2k} + V_{2k}), \; V_{2k+1} = \frac{1}{2}(aV_{2k} + \Delta U_{2k}).$$

4 Soit p un nombre premier impair, et $\bar{P}$ l'image de P par le morphisme canonique $\mathbb{Z}[X] \to \mathbb{F}_p[X]$. On suppose désormais que le symbole de Legendre $\left(\frac{\Delta}{p}\right)$ vaut -1. Que cela signifie-t-il pour Δ modulo p ? En déduire que $\bar{P}$ est irréductible dans $\mathbb{F}_p[X]$.

5 On se place dans le corps $K = \mathbb{F}_p[X]/(\bar{P})$ et on note x la classe de X dans K. Démontrer que x et x^p sont racines de $\bar{P}$ vu comme polynôme à coefficients dans K.

6 Montrer que pour tout $k \geq 0$, $U_k \equiv \frac{x^{pk} - x^k}{x^p - x}$ (mod p). En déduire que U_{p+1} est divisible par p.

7 Proposer un test de primalité basé sur l'étude précédente. On discutera de l'efficacité des calculs ainsi que de ce que l'on pourrait faire pour étudier la fiabilité de ce test.

Exercice 3

On considère le corps $K = \mathbb{F}_7$.

1 Pour $a \in K$, on considère la courbe projective sur K dont la partie affine a pour équation :

$$y^2 = x^3 + x + a$$

Donner l'équation de cette courbe dans $\mathbf{P}^2(K)$ et les coordonnées de son point à l'infini.

2 Pour quelles valeurs de a l'équation précédente définit-elle une courbe elliptique ? On note E_a la courbe elliptique obtenue pour ces valeurs de a.
3 On fixe $a = 1$. Pour $x \in K$, calculer $(x^3 + x + 1)^3$. En déduire pour quelles valeurs de x la quantité $x^3 + x + 1$ est un carré dans K.
4 En déduire le cardinal de E_1. Quelle est la structure du groupe E_1 ?
5 Déterminer le cardinal de E_0. Quelles sont les structures possibles pour E_0 ?
6 Montrer que $P = [5 : 2 : 1] \in E_0$. Donner les coordonnées homogènes de $-P$.
7 Déterminer l'ordre du sous-groupe de E_0 engendré par P.
8 Soit $F = \mathbb{F}_{p^3}$, et $a \in K$. On considère la courbe elliptique sur F, notée $E_a(F)$, dont la partie affine a pour équation $y^2 = x^3 + x + a$. Démontrer que $E_a(F)$ a au moins un point d'ordre 2. En déduire que $E_a(F)$ est de cardinal pair.

Rappel : Sur une courbe elliptique d'équation $Y^2Z = X^3 + \alpha XZ^2 + \beta Z^3$, soient A et B sont deux points de coordonnées homogènes $[x_A : y_A : 1]$ et $[x_B : y_B : 1]$,
- si $A \neq \pm B$, on pose $\lambda = \frac{x_B - x_A}{y_B - y_A}$;
- si $A = B$ et $y_A \neq 0$, on pose $\lambda = \frac{3x_A^2 + \alpha}{2y_A}$.

Alors, en posant $x = \lambda^2 - (x_A + x_B)$, et $y = \lambda(x_A - x) - y_A$, le point $A + B$ a pour coordonnées homogènes $[x : y : 1]$.

II. Optimisation

Exercice 1 *Questions de cours indépendantes*

1. On considère une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Dans chacun des cas suivants, a-t-on existence d'un mininmum de f sur $\mathbb{R}^n$? A-t-on unicité ? Si la réponse est négative, justifier par un exemple.
   a. f est convexe,
   b. f est strictement convexe,
   c. f est fortement convexe.
2. Énoncer le théorème de Karush-Kuhn-Tucker dans le cas de contraintes d'inégalité, en précisant bien la notion de qualification.
3. Expliquer comment la méthode de Newton peut être utilisée pour la minimisation d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fortement convexe et sous quelles conditions. On précisera bien la suite approchant la solution.
4. On considère la fonction
$$f : (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mapsto {x_1}^2 + 100\, {x_2}^2.$$
   a. Montrer que f admet un unique minimum sur $\mathbb{R}^2$.
   b. Expliquer pourquoi la méthode du gradient à pas optimal n'est pas la plus adaptée pour approcher le minimum de f, et proposer une meilleure méthode, on justifiera ce choix.

Exercice 2

Soient α, β deux réels non nuls. On définit la fonction :
$$f \;:\; (x_1, x_2) \;\longmapsto\; (\alpha + \beta){x_1}^2 + \beta {x_2}^2 - 2\beta x_1 x_2.$$

1. Calculer le gradient et la hessienne de f en un point $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.
2. Montrer que f admet un seul point critique, qu'on précisera.

3. Que dire du point critique
   a. si $\alpha, \beta > 0$?
   b. si $\alpha, \beta < 0$?
   c. si $\alpha > 0$ et $\beta < 0$?

   Dans chacune de ces situations, on mentionnera le théorème du cours qui permet de conclure.

Exercice 3 *Équilibre d'un système mécanique*

On considère un système mécanique constitué de 2 masses ponctuelles m_1 et m_2, avec $m_1, m_2 > 0$. On suppose que les masses sont reliées entre elles par un fil de longueur $l_1 > 0$.
Le système est contenu dans un plan vertical muni d'un repère (O, x, y). La masse m_1 est reliée à l'origine $(0,0)$ par un fil de longueur $l_0 > 0$ et la masse m_2 est reliée au point $(1,0)$ par un fil de longueur $l_2 > 0$ (voir un exemple d'équilibre du système Figure 1).
On suppose tous les fils inélastiques et de masse nulle. On cherche à déterminer les positions des masses à l'équilibre en minimisant l'énergie du système. On note (x_1, y_1) et (x_2, y_2) les positions respectives des masses m_1 et m_2. On posera

$$x = (x_1, x_2), \quad y = (y_1, y_2), \quad (x_0, y_0) = (0,0), \quad \cancel{(x_{n+1}, y_{n+1})} = (1,0).$$

(x_3, y_3)

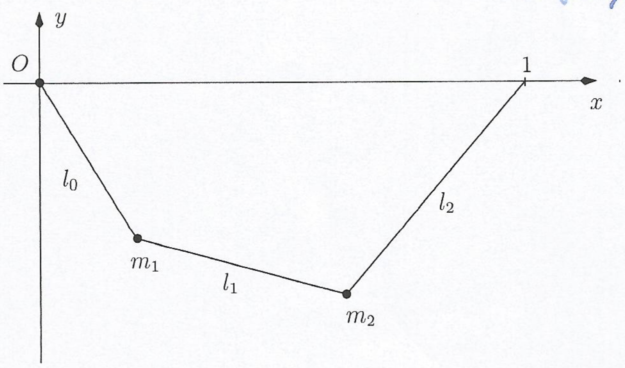


FIGURE 1 – Un exemple d'équilibre

On se ramène alors à la minimisation de l'énergie donnée par

$$\boxed{f(x, y) \;=\; \frac{1}{2}(m_1 y_1 + m_2 y_2).}$$

sous les contraintes

$$(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2 \leqslant l_i^{\,2}, \quad 0 \leqslant i \leqslant 2.$$

On prendra bien garde au fait qu'on travaille dans $\mathbb{R}^4$: $(x, y) = (x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^4$.

Étude théorique

1. Expliquer pourquoi les contraintes sont des contraintes d'inégalité. Donner sans justification un exemple de choix des longueurs l_i tel qu'une des contraintes n'est pas saturée à l'équilibre (on pourra faire un dessin).
2. Écrire le domaine admissible A associé au problème de minimisation. Montrer qu'il est borné.
3. On suppose que $l_0 + l_1 + l_2 \geqslant 1$. Montrer qu'il y a existence d'une solution au problème de minimisation.
4. Les contraintes sont-elles qualifiées en tout point (x_1, x_2, y_1, y_2) de A ?

5. Expliquer rapidement pourquoi la situation où les masses m_1 et m_2 sont confondues, ou sont placées sur une des extrémités $(0,0)$ et $(1,0)$ n'est pas optimale (on pourra avoir recours à des dessins). Que peut-on en conclure sur l'étude du problème ?
6. Écrire le système d'équations associé au problème.

Étude numérique

6. On souhaite résoudre le problème par la méthode de pénalisation. Expliquer la méthode et préciser l'expression de la fonction pénalisée.
7. Proposer un algorithme simple pour la résolution du problème pénalisé. Justifier ce choix.
8. Donner la suite approchant la solution du problème pénalisé pour la méthode choisie.