licence STS mention informatique

parcours recherche et innovation

2015–2016

LOGIQUE

examen final

Durée 2 h. Notes de cours et de TD autorisées. Les quatre parties sont indépendantes.

Remarque : la plus grande attention sera portée à la qualité de la rédaction, à la rigueur et la précision des argumentations.

I Question de cours (1 page maximum)

Quelle différence y a-t-il entre syntaxe et sémantique ? Quels liens faites-vous entre ces deux notions ? Illustrez vos propos par des exemples.

II Résolution

Répondez grâce à la méthode de résolution au problème suivant.

— Nul ne peut être loup et agneau à la fois.
— Un loup qui mange un agneau est cruel.
— Un agneau médisant sera forcément mangé par un loup.
— Si un agneau n'est pas mangé par un loup, alors nécessairement son frère est médisant.
— Il existe au moins un agneau.
— Existe-t-il un loup cruel ?

Indication : on supposera que tout agneau a un frère, ce qui nous permet d'utiliser la fonction f d'arité 1 plutôt qu'une relation pour modéliser la notion de frère.

III Modèles

On se donne la formule φ suivante.

$\{0, 1\}$

$$(\exists x \forall y\ \neg f(y) = x) \wedge \forall x\ g(f(x)) = x.$$

1. Proposez un modèle pour φ.
2. La formule φ admet-elle un modèle de domaine de base fini ?

$f\ x \mapsto x+1$

0

IV Calcul des séquents

Soit P un symbole de prédicat d'arité 1.

1. Expliquer pourquoi la formule $\exists x \forall y (P(x) \Rightarrow P(y))$ est universellement valide.
2. Donner une dérivation dans LK du séquent $\exists x \forall y (P(x) \Rightarrow P(y))$.
3. Donner une dérivation dans LK, *sans coupure*, du séquent $\exists x \forall y (P(x) \Rightarrow P(y))$.
4. On suppose qu'il existe une preuve π, dans LK *sans coupure ni contraction*, du séquent $\exists x \forall y (P(x) \Rightarrow P(y))$.
   (a) Montrer que le dernier pas de π est nécessairement une introduction de connecteur ou de quantificateur.
   (b) En déduire que π est de la forme

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{P(t) \vdash P(y)}}{\vdash P(t) \Rightarrow P(y)}\,(\vdash\Rightarrow)}{\vdash \forall y (P(t) \Rightarrow P(y))}\,(\vdash \forall)}{\vdash \exists x \forall y (P(x) \Rightarrow P(y))}\,(\vdash \exists)$$

   (c) Montrer que $P(t) \vdash P(y)$ n'est pas un axiome.
   (d) Peut-on dériver $P(t) \vdash P(y)$? En conclure que π ne peut pas exister.
5. (bonus) Donner une dérivation dans LK, *sans contraction*, du séquent $\exists x \forall y (P(x) \Rightarrow P(y))$.