

# Tutorium 1

## Funktionentheorie

05. & 06. Mai 2025

# Was bedeutet „Ableitung“?

---

<sup>1</sup><https://arxiv.org/abs/math/9404236>

# Was bedeutet „Ableitung“?

Aus „On Proof and Progress in Mathematics“ von William P. Thurston<sup>1</sup>:

---

<sup>1</sup><https://arxiv.org/abs/math/9404236>

# Was bedeutet „Ableitung“?

Aus „On Proof and Progress in Mathematics“ von William P. Thurston<sup>1</sup>:

- (1) Infinitesimal: the ratio of the infinitesimal change in the value of a function to the infinitesimal change in a function.

---

<sup>1</sup><https://arxiv.org/abs/math/9404236>

# Was bedeutet „Ableitung“?

Aus „On Proof and Progress in Mathematics“ von William P. Thurston<sup>1</sup>:

- (1) Infinitesimal: the ratio of the infinitesimal change in the value of a function to the infinitesimal change in a function.
- (2) Symbolic: the derivative of  $x^n$  is  $nx^{n-1}$ , the derivative of  $\sin(x)$  is  $\cos(x)$ , the derivative of  $f \circ g$  is  $f' \circ g \cdot g'$ , etc.

---

<sup>1</sup><https://arxiv.org/abs/math/9404236>

# Was bedeutet „Ableitung“?

Aus „On Proof and Progress in Mathematics“ von William P. Thurston<sup>1</sup>:

- (1) Infinitesimal: the ratio of the infinitesimal change in the value of a function to the infinitesimal change in a function.
- (2) Symbolic: the derivative of  $x^n$  is  $nx^{n-1}$ , the derivative of  $\sin(x)$  is  $\cos(x)$ , the derivative of  $f \circ g$  is  $f' \circ g \cdot g'$ , etc.
- (3) Logical:  $f'(x) = d$  if and only if for every  $\epsilon$  there is a  $\delta$  such that when  $0 < |\Delta x| < \delta$ ,

$$\left| \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} - d \right| < \epsilon.$$

---

<sup>1</sup><https://arxiv.org/abs/math/9404236>

# Was bedeutet „Ableitung“?

Aus „On Proof and Progress in Mathematics“ von William P. Thurston<sup>1</sup>:

- (1) Infinitesimal: the ratio of the infinitesimal change in the value of a function to the infinitesimal change in a function.
- (2) Symbolic: the derivative of  $x^n$  is  $nx^{n-1}$ , the derivative of  $\sin(x)$  is  $\cos(x)$ , the derivative of  $f \circ g$  is  $f' \circ g \cdot g'$ , etc.
- (3) Logical:  $f'(x) = d$  if and only if for every  $\epsilon$  there is a  $\delta$  such that when  $0 < |\Delta x| < \delta$ ,

$$\left| \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} - d \right| < \epsilon.$$

- (4) Geometric: the derivative is the slope of a line tangent to the graph of the function if the graph has a tangent.

---

<sup>1</sup><https://arxiv.org/abs/math/9404236>

# Was bedeutet „Ableitung“?

Aus „On Proof and Progress in Mathematics“ von William P. Thurston<sup>1</sup>:

- (1) Infinitesimal: the ratio of the infinitesimal change in the value of a function to the infinitesimal change in a function.
- (2) Symbolic: the derivative of  $x^n$  is  $nx^{n-1}$ , the derivative of  $\sin(x)$  is  $\cos(x)$ , the derivative of  $f \circ g$  is  $f' \circ g \cdot g'$ , etc.
- (3) Logical:  $f'(x) = d$  if and only if for every  $\epsilon$  there is a  $\delta$  such that when  $0 < |\Delta x| < \delta$ ,

$$\left| \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} - d \right| < \epsilon.$$

- (4) Geometric: the derivative is the slope of a line tangent to the graph of the function if the graph has a tangent.
- (5) Rate: the instantaneous speed of  $f(t)$ , when  $t$  is time.

---

<sup>1</sup><https://arxiv.org/abs/math/9404236>



# Was bedeutet „Ableitung“?

Aus „On Proof and Progress in Mathematics“ von William P. Thurston<sup>1</sup>:

- (1) Infinitesimal: the ratio of the infinitesimal change in the value of a function to the infinitesimal change in a function.
- (2) Symbolic: the derivative of  $x^n$  is  $nx^{n-1}$ , the derivative of  $\sin(x)$  is  $\cos(x)$ , the derivative of  $f \circ g$  is  $f' \circ g \cdot g'$ , etc.
- (3) Logical:  $f'(x) = d$  if and only if for every  $\epsilon$  there is a  $\delta$  such that when  $0 < |\Delta x| < \delta$ ,

$$\left| \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} - d \right| < \epsilon.$$

- (4) Geometric: the derivative is the slope of a line tangent to the graph of the function if the graph has a tangent.
- (5) Rate: the instantaneous speed of  $f(t)$ , when  $t$  is time.
- (6) Approximation: The derivative of a function is the best linear approximation to the function near a point.

---

<sup>1</sup><https://arxiv.org/abs/math/9404236>

# Was bedeutet „Ableitung“?

Aus „On Proof and Progress in Mathematics“ von William P. Thurston<sup>1</sup>:

- (1) Infinitesimal: the ratio of the infinitesimal change in the value of a function to the infinitesimal change in a function.
- (2) Symbolic: the derivative of  $x^n$  is  $nx^{n-1}$ , the derivative of  $\sin(x)$  is  $\cos(x)$ , the derivative of  $f \circ g$  is  $f' \circ g \cdot g'$ , etc.
- (3) Logical:  $f'(x) = d$  if and only if for every  $\epsilon$  there is a  $\delta$  such that when  $0 < |\Delta x| < \delta$ ,

$$\left| \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} - d \right| < \epsilon.$$

- (4) Geometric: the derivative is the slope of a line tangent to the graph of the function if the graph has a tangent.
- (5) Rate: the instantaneous speed of  $f(t)$ , when  $t$  is time.
- (6) Approximation: The derivative of a function is the best linear approximation to the function near a point.
- (7) Microscopic: The derivative of a function is the limit of what you get by looking at it under a microscope of higher and higher power.

<sup>1</sup><https://arxiv.org/abs/math/9404236>

# Was bedeutet „Ableitung“?

Aus „On Proof and Progress in Mathematics“ von William P. Thurston<sup>1</sup>:

- (1) Infinitesimal: the ratio of the infinitesimal change in the value of a function to the infinitesimal change in a function.
- (2) Symbolic: the derivative of  $x^n$  is  $nx^{n-1}$ , the derivative of  $\sin(x)$  is  $\cos(x)$ , the derivative of  $f \circ g$  is  $f' \circ g \cdot g'$ , etc.
- (3) Logical:  $f'(x) = d$  if and only if for every  $\epsilon$  there is a  $\delta$  such that when  $0 < |\Delta x| < \delta$ ,

$$\left| \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} - d \right| < \epsilon.$$

- (4) Geometric: the derivative is the slope of a line tangent to the graph of the function if the graph has a tangent.
- (5) Rate: the instantaneous speed of  $f(t)$ , when  $t$  is time.
- (6) Approximation: The derivative of a function is the best linear approximation to the function near a point.
- (7) Microscopic: The derivative of a function is the limit of what you get by looking at it under a microscope of higher and higher power.

<sup>1</sup><https://arxiv.org/abs/math/9404236>

# Was bedeutet „Ableitung“?

Aus „On Proof and Progress in Mathematics“ von William P. Thurston<sup>1</sup>:

- (1) Infinitesimal: the ratio of the infinitesimal change in the value of a function to the infinitesimal change in a function.
- (2) Symbolic: the derivative of  $x^n$  is  $nx^{n-1}$ , the derivative of  $\sin(x)$  is  $\cos(x)$ , the derivative of  $f \circ g$  is  $f' \circ g \cdot g'$ , etc.
- (3) Logical:  $f'(x) = d$  if and only if for every  $\epsilon$  there is a  $\delta$  such that when  $0 < |\Delta x| < \delta$ ,

$$\left| \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} - d \right| < \epsilon.$$

- (4) Geometric: the derivative is the slope of a line tangent to the graph of the function if the graph has a tangent.
- (5) Rate: the instantaneous speed of  $f(t)$ , when  $t$  is time.
- (6) Approximation: The derivative of a function is the best linear approximation to the function near a point.
- (7) Microscopic: The derivative of a function is the limit of what you get by looking at it under a microscope of higher and higher power.

<sup>1</sup><https://arxiv.org/abs/math/9404236>

„[...] one person's clear mental image is another person's intimidation:

- (37) The derivative of a real-valued function  $f$  in a domain  $D$  is the Lagrangian section of the cotangent bundle  $T^*(D)$  that gives the connection for the unique flat connection on the trivial  $\mathbb{R}$ -bundle  $D \times \mathbb{R}$  for which the graph of  $f$  is parallel.“

# Holomorphe Funktionen

## Definition

Sei  $\Omega \subset \mathbb{C}$  offen. Eine Funktion

$$f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$$

heißt *holomorph im Punkt*  $z_0 \in \Omega$ , falls der Grenzwert

$$f'(z_0) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{C}}} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

in  $\mathbb{C}$  existiert. Wir nennen  $f'(z_0)$  die *Ableitung* von  $f$  im Punkt  $z_0$ .

# Die Cauchy-Riemann-Gleichungen

Gegeben  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  betrachten wir die Funktionen  $\operatorname{Re} f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\operatorname{Im} f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  als Funktionen  $u, v: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  indem wir  $z = x + iy \in \Omega$  mit  $(x, y) \in \tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$  identifizieren.

# Die Cauchy-Riemann-Gleichungen

Gegeben  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  betrachten wir die Funktionen  $\operatorname{Re} f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\operatorname{Im} f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  als Funktionen  $u, v: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  indem wir  $z = x + iy \in \Omega$  mit  $(x, y) \in \tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$  identifizieren.

Hierdurch können wir  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $F: \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^2$  identifizieren.



# Die Cauchy-Riemann-Gleichungen

Gegeben  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  betrachten wir die Funktionen  $\operatorname{Re} f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\operatorname{Im} f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  als Funktionen  $u, v: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  indem wir  $z = x + iy \in \Omega$  mit  $(x, y) \in \tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$  identifizieren.

Hierdurch können wir  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $F: \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^2$  identifizieren.

## Theorem

*Die Funktion  $f$  ist genau dann holomorph in  $z_0$ , wenn die mit ihr identifizierte Funktion  $F = (u, v)^T$  in  $z_0$  (reell) differenzierbar ist und die partiellen Ableitungen in diesem Punkt die Cauchy-Riemann-Gleichungen erfüllen:*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{and} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

# Interpretation

Erinnern wir uns zu Beginn an Charakterisierung (6) der Ableitung, nämlich als beste lineare Approximation.

# Interpretation

Erinnern wir uns zu Beginn an Charakterisierung (6) der Ableitung, nämlich als beste lineare Approximation.

Eine  $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ist gegeben durch  $z \mapsto az$  für ein  $a \in \mathbb{C}$ .

# $\mathbb{C}$ -(Anti-)Linearität

Im folgenden identifizieren wir oft implizit  $\mathbb{R}^2$  und  $\mathbb{C}$ .

# $\mathbb{C}$ -(Anti-)Linearität

Im folgenden identifizieren wir oft implizit  $\mathbb{R}^2$  und  $\mathbb{C}$ .

- Die *reelle* Ableitung  $DF: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  von  $F$  ist linear – allerdings  $\mathbb{R}$ -linear, d.h.  
 $\forall \lambda \in \mathbb{R} : DF(\lambda x) = \lambda DF(x)$ .

# $\mathbb{C}$ -(Anti-)Linearität

Im folgenden identifizieren wir oft implizit  $\mathbb{R}^2$  und  $\mathbb{C}$ .

- Die *reelle* Ableitung  $DF: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  von  $F$  ist linear – allerdings  $\mathbb{R}$ -linear, d.h.  
 $\forall \lambda \in \mathbb{R} : DF(\lambda x) = \lambda DF(x)$ .  
Diese Gleichheit gilt nicht zwingend  $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ !

# $\mathbb{C}$ -(Anti-)Linearität

Im folgenden identifizieren wir oft implizit  $\mathbb{R}^2$  und  $\mathbb{C}$ .

- Die *reelle* Ableitung  $DF: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  von  $F$  ist linear – allerdings  $\mathbb{R}$ -linear, d.h.  $\forall \lambda \in \mathbb{R} : DF(\lambda x) = \lambda DF(x)$ .  
Diese Gleichheit gilt nicht zwingend  $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ !
- Fakt: Die  $\mathbb{R}$ -linearen Abbildungen  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  sind direkte Summe  $\mathbb{C}$ -linearer und  $\mathbb{C}$ -anti-linearer<sup>2</sup> Abbildungen  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ .

---

<sup>2</sup>Anti-linear bedeutet, dass  $f(\lambda x) = \bar{\lambda} f(x)$ .

# $\mathbb{C}$ -(Anti-)Linearität

Im folgenden identifizieren wir oft implizit  $\mathbb{R}^2$  und  $\mathbb{C}$ .

- Die *reelle* Ableitung  $DF: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  von  $F$  ist linear – allerdings  $\mathbb{R}$ -linear, d.h.  $\forall \lambda \in \mathbb{R} : DF(\lambda x) = \lambda DF(x)$ .


Diese Gleichheit gilt nicht zwingend  $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ !

- Fakt: Die  $\mathbb{R}$ -linearen Abbildungen  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  sind direkte Summe  $\mathbb{C}$ -linearer und  $\mathbb{C}$ -anti-linearer<sup>2</sup> Abbildungen  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ .

In der Tat, eine  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung  $L: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  kann zerlegt werden in  $\frac{1}{2}(L(z) - iL(iz))$  ( $\mathbb{C}$ -linear) und  $\frac{1}{2}(L(z) + iL(iz))$  ( $\mathbb{C}$ -anti-linear).<sup>3</sup>

---

<sup>2</sup>Anti-linear bedeutet, dass  $f(\lambda x) = \overline{\lambda} f(x)$ .

<sup>3</sup>Dies erinnert eventuell an Funktionen  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  als direkte Summe achsen- und punktsymmetrischer Funktionen. Dies geht natürlich auch ein wenig allgemeiner mittels beliebiger Involutionen, s. beispielsweise <https://math.stackexchange.com/questions/4286284>. 



# $\mathbb{C}$ -(Anti-)Linearität

Im folgenden identifizieren wir oft implizit  $\mathbb{R}^2$  und  $\mathbb{C}$ .

- Die *reelle* Ableitung  $DF: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  von  $F$  ist linear – allerdings  $\mathbb{R}$ -linear, d.h.  $\forall \lambda \in \mathbb{R} : DF(\lambda x) = \lambda DF(x)$ .

Diese Gleichheit gilt nicht zwingend  $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ !

- Fakt: Die  $\mathbb{R}$ -linearen Abbildungen  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  sind direkte Summe  $\mathbb{C}$ -linearer und  $\mathbb{C}$ -anti-linearer<sup>2</sup> Abbildungen  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ .

In der Tat, eine  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung  $L: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  kann zerlegt werden in  $\frac{1}{2}(L(z) - iL(iz))$  ( $\mathbb{C}$ -linear) und  $\frac{1}{2}(L(z) + iL(iz))$  ( $\mathbb{C}$ -anti-linear).<sup>3</sup>

- Die Cauchy-Riemann-Gleichungen garantieren, dass die Abbildung  $DF$   $\mathbb{C}$ -linear ist, d.h.  $\mathbb{C}$ -anti-linearen Teil = 0 hat.

---

<sup>2</sup>Anti-linear bedeutet, dass  $f(\lambda x) = \overline{\lambda} f(x)$ .

<sup>3</sup>Dies erinnert eventuell an Funktionen  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  als direkte Summe achsen- und punktsymmetrischer Funktionen. Dies geht natürlich auch ein wenig allgemeiner mittels beliebiger Involutionen, s. beispielsweise <https://math.stackexchange.com/questions/4286284>. 