

# UM MODELO DE OTIMIZAÇÃO DE CARTEIRAS BASEADO EM PREDIÇÃO

**Fábio Daros de Freitas**

Secretaria da Receita Federal  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica  
Departamento de Engenharia Elétrica  
freitas@computer.org

**Alberto Ferreira De Souza**

Programa de Pós-Graduação em Informática  
Departamento de Informática  
albertodesouza@gmail.com

**Ailson Rosetti de Almeida**

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica  
Departamento de Engenharia Elétrica  
ailson@ele.ufes.br

Universidade Federal do Espírito Santo  
Av. Fernando Ferrari, s/n, 29075-910, Vitória, ES - Brasil

## RESUMO

Este trabalho apresenta um modelo preditivo de otimização de carteiras que utiliza erros de predição Normais como medida de risco. Neste modelo, um novo preditor neural auto-regressivo é utilizado para prever os retornos futuros de ações, e os seus erros de predição são utilizados como medida do risco do investimento nestas ações. Neste preditor, as diferenças entre os valores das séries de retornos e um determinado retorno passado são utilizadas como variáveis de regressão. Um grande número de experimentos com dados reais do mercado de ações Brasileiro foi utilizado na avaliação do nosso modelo de otimização de carteiras. Nossos resultados mostraram que é possível obter erros de predição Normais a partir de séries de retornos de ações não Normais, e que o nosso modelo de otimização de carteiras baseado em predição supera o modelo de Markowitz, apresentando melhores retornos para o mesmo nível de risco.

**PALAVRAS CHAVE. Otimização de Carteiras. Predição de Séries Históricas. Redes Neurais. Economia e Finanças.**

## ABSTRACT

This work presents a prediction-based portfolio optimization model that uses Normal prediction errors as risk measure. In this model, a new autoregressive neural network predictor is used to predict future stock returns and its prediction errors are used as risk measure. In this predictor, the differences between the values of the series and a specified past value are the regression variables. A large set of experiments with real data from the Brazilian stock market was employed to evaluate our portfolio optimization model, which included the examination of the Normality of the errors of prediction. Our results showed that it is possible to obtain Normal prediction errors with non-Normal series of stock returns, and that our prediction-based portfolio optimization model outperforms the Markowitz portfolio selection model showing better return for the same risk.

**KEYWORDS. Portfolio Optimization. Time Series Prediction. Neural Networks. Economics & Finance.**

## 1. Introdução

A Modelagem Estatística pode ser utilizada para fornecer medidas de incerteza da realização do retorno futuro de investimentos. Estas medidas de incerteza, denominadas *risco*, tornam a Modelagem Estatística adequada para a comparação de alternativas de investimento. Essa característica está no cerne da Moderna Teoria de Carteiras (MTC), introduzida por Harry Markowitz através do seu celebrado modelo de seleção de carteiras<sup>1</sup> (Markowitz, 1952, 1991). Neste modelo, o risco total do investimento em várias ações é minimizado através da seleção ótima de ações com baixo risco conjunto, implementando, assim, um mecanismo de compensação de perdas denominado *diversificação eficiente*. O processo de seleção de carteiras consiste, então, em encontrar, num grande conjunto de ações, as participações (i.e. proporções individuais) de cada ação que minimizam o risco da carteira para um determinado nível de retorno desejado, ou maximizam o retorno da carteira para um determinado nível de risco. O modelo assume que as séries históricas dos retornos<sup>2</sup> das ações seguem uma distribuição Normal, e utiliza a média de cada uma destas séries como predição do retorno futuro de cada ação, a variância de cada série como medida de risco de cada ação, e a covariância entre pares de séries de retornos como medida de risco conjunto de cada par de ações (o desvio padrão, a semivariância e o desvio absoluto também podem ser utilizados como medida de risco no modelo).

Após o modelo de Markowitz, diversos outros modelos baseados nas suas premissas básicas (que as séries de retorno são Normais e seus momentos podem ser utilizados como medidas de retorno futuro e risco) surgiram (Sharpe, 1963; Konno, 1991; Elton, 2003). Em todos estes modelos, conhecidos como modelos clássicos de seleção de carteiras, o retorno esperado da carteira é dado pela combinação linear dos retornos esperados (o retorno médio) segundo a participação de cada ação na carteira. O risco da carteira, por sua vez, assume formulações variadas, mas é sempre relacionado aos momentos centrais da distribuição Normal conjunta dos retornos das ações que compõem a carteira.

Em que pese a ampla adoção dos modelos clássicos, é importante mencionar que as distribuições das séries de retornos frequentemente apresentam curtose e assimetria (Fama, 1965; Kon, 1984; Freitas, 2005), contrariando, assim, a premissa da Normalidade das séries de retornos. Além disso, a realização dos retornos médios tende a ser verificada somente no longo prazo. Estes fatos têm estimulado o desenvolvimento de modelos preditivos baseados na *Análise de Séries Temporais* e outros métodos não-lineares (e.g. redes neurais artificiais), como forma de suportar o investimento em horizontes mais curtos.

Este artigo apresenta um modelo preditivo de otimização de carteiras que utiliza erros de predição Normais como medida de risco. Um novo preditor auto-regressivo baseado em redes neurais artificiais (RNAR) foi utilizado para prever os retornos futuros das ações, e a variância dos seus erros de predição foi utilizada como medida de risco. Neste preditor, as variáveis de regressão são as diferenças entre os valores da série de retornos e um determinado valor passado, ao invés dos próprios valores da série de retornos, como nos métodos tradicionais. Nossos resultados experimentais sugerem que os erros de predição são Normais (uma versão anterior desta verificação de Normalidade dos erros de predição aparece em Freitas (2005)), e mostram que o desempenho do modelo preditivo de seleção de carteiras supera o desempenho do modelo de Markowitz, apresentando retornos melhores para o mesmo nível de risco.

## 2. Preditores Neurais Auto-regressivos com Referência Móvel (RNAR-RM)

O retorno de uma ação no tempo  $t$ ,  $r_t$ , é definido com a diferença entre o preço da ação no tempo  $t$  e o seu preço no tempo  $t-1$ , dividida pelo seu preço no tempo  $t-1$ , como mostrado na Eq. (1):

---

<sup>1</sup> Uma carteira é um conjunto de ações ou outros ativos de risco. Este artigo considera apenas carteiras de ações.

<sup>2</sup> A diferença entre o preço da ação no tempo  $t$  e o seu preço no tempo  $t-1$ , dividida pelo seu preço no tempo  $t-1$ .

$$r_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} \quad (1)$$

onde  $P_t$  e  $P_{t-1}$  são os preços da ação nos tempos  $t$  e  $t-1$ , respectivamente.

A série histórica dos  $N$  retornos passados de uma ação,  $r'$ , é definida como:

$$r' = (r_{t-N+1}, \dots, r_{t-1}, r_t) \quad (2)$$

A predição baseada em séries temporais do retorno futuro de uma ação pode ser definida como o processo de se utilizar os elementos de  $r'$  para obter uma estimativa de  $r_{t+l}$ . O número de períodos futuros,  $l$  ( $l \geq 1$ ), afeta diretamente a escolha do método de predição: para  $l=1$ , ou predição para um período futuro, a escolha padrão são os métodos auto-regressivos (Box, 1994), enquanto que para  $l>1$ , ou predição para múltiplos períodos, técnicas como o método das Diferenças Temporais (Sutton, 1988) são utilizadas; também podem ser utilizadas  $l$  predições recursivas para um período futuro neste último caso. Este trabalho investiga apenas o problema da predição para um período futuro.

O preditor de séries temporais baseado em redes neurais clássico é um preditor auto-regressivo (White, 1988),  $S_R$ , cujas entradas são o valor presente e os  $p-1$  valores passados da série. A saída deste preditor é o valor para o próximo período, como mostrado na Eq. (3) para o caso das séries de retornos das ações. O número de valores de entrada,  $p$  ( $p>0$ ), é a *ordem da regressão*, e algumas técnicas para sua determinação são mostradas em Box (1994).

$$(r_{t-p+1}, \dots, r_{t-1}, r_t) \rightarrow S_R \rightarrow \hat{r}_{t+1} \quad (3)$$

Assim, depois de ser treinado com os pares entrada-saída, o preditor neural  $S_R$  implementa um modelo de regressão não linear múltipla para a série de retornos, com seus parâmetros de modelo estimados pelo algoritmo de treinamento utilizado.

Neste trabalho, propomos um novo método auto-regressivo inspirado no método intuitivo que tipicamente empregamos para analisar visualmente o gráfico de uma série histórica com a finalidade de extrapolar seu próximo valor, qual seja, concentrar nossa atenção visual nos últimos pontos do gráfico, criando uma janela imaginária que delimita uma região capaz de oferecer uma imagem com quantidade de informação visual suficiente para a extrapolação do próximo ponto do gráfico. Neste método de predição, tipicamente utilizamos algum ponto dentro da região analisada como uma referência a partir da qual o valor do próximo ponto é estimado. Nós imitamos esse método intuitivo no nosso método auto-regressivo de predição através da subtração do valor de um dos retornos, usado como referência, dos demais retornos apresentados como entrada da rede neural do preditor. Este valor de referência é fornecido por um dos elementos da série no interior da janela de observação do preditor, que compreende os retornos de ordem  $t-p-k+1, \dots, t$  ( $p, k>0$ ). Nós denominamos este preditor de *rede neural auto-regressiva com referência móvel* –  $RNAR-RM(p, k)$ , onde  $p$  é a ordem da regressão e  $k$  é o retardo da referência (a partir de  $p$ ). As entradas e saídas da  $RNAR-RM(p, k)$  são:

$$(r_{t-p+1} - z, \dots, r_t - z) \rightarrow S_R \rightarrow \langle r_{t+1} - z \rangle \quad (4)$$

onde

$$z = r_{t-p-k+1} \quad (5)$$

Após o treinamento,  $\hat{r}_{t+1}$  é obtido a partir da predição  $\langle r_{t+1} - z \rangle$  utilizando a Eq. (6):

$$\hat{r}_{t+1} = \langle r_{t+1} - z \rangle + z \quad (6)$$

Na rede neural auto-regressiva com referência móvel, os valores codificados nos pesos da rede são tipicamente menores que os valores das séries, o que minimiza a possibilidade de saturação das saídas dos neurônios, aumenta a faixa dinâmica da rede neural e a sua capacidade

de representar as séries históricas. Como consequência, as necessidades de pré-processamentos, tais como a normalização e a eliminação de tendências, podem ser aliviadas, assim como a possibilidade de se obter valores de pesos menores no término do treinamento pode regularizar a rede neural, melhorando a sua generalização através da redução do *overfitting* (Haykin, 1999).

### 3. Um Novo Modelo de Seleção de Carteiras com Predição de Retornos

Nesta seção, apresentaremos brevemente o modelo de seleção de carteiras de Markowitz, o nosso novo modelo baseado em predição, e uma comparação qualitativa entre ambos.

#### 3.1. Modelo de Seleção de Carteiras de Markowitz

O modelo de Markowitz é baseado nas medidas de retorno e risco de uma combinação de ações, as quais são obtidas a partir das medidas individuais de retorno e risco de cada ação integrante da combinação. A medida de retorno esperado de uma ação proposta por Markowitz, e ainda amplamente utilizada, é a média aritmética da série de retornos da ação, definida na Eq. (7),

$$\bar{r} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N r_t \quad (7)$$

onde  $\bar{r}$  é o retorno esperado da ação no tempo  $t+1$ ,  $N$  é o número de valores passados e  $r_t$  é o retorno passado realizado no tempo  $t$  (Eq. (1)).

A medida de risco proposta por Markowitz, a variância da série de retornos,  $v$  (Eq. (8)), reflete a incerteza da realização do retorno esperado (Eq. (7)).

$$v = \sigma^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{t=1}^N (r_t - \bar{r})^2 \quad (8)$$

O risco da carteira é definido como a variância da combinação linear das suas ações, ponderada pela participação individual de cada ação na carteira<sup>3</sup>, conforme formulado na Eq. (9).

$$V = v_p = \sum_{i=1}^M X_i^2 v_i + \sum_{i=1}^M \sum_{j=1, i \neq j}^M X_i X_j \gamma_{ij} \quad (9)$$

Na Eq. (9): o primeiro somatório contabiliza o risco individual das participações de cada uma das  $M$  ações que compõem a carteira; o segundo grupo de somatórios contabiliza os riscos conjuntos das participações dos pares de ações;  $V$  é o risco total da carteira, que é igual à variância da carteira,  $v_p$ ;  $X_i$  é a participação da ação  $i$  na carteira;  $v_i$  é o risco individual da ação  $i$ ; e o termo  $\gamma_{ij}$  é a covariância das ações  $i$  e  $j$ , definida como:

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{N-1} \sum_{t=1}^N (r_{it} - \bar{r}_i)(r_{jt} - \bar{r}_j) \quad (10)$$

onde  $r_{it}$  e  $r_{jt}$  são os retornos das ações  $i$  e  $j$  no tempo  $t$ ,  $\bar{r}_i$  e  $\bar{r}_j$  são os retornos médios das ações  $i$  e  $j$ , e  $N$  é o número de observações das séries.

O risco conjunto, ou *risco interativo*, de duas ações na carteira é dado pela sua covariância pelas suas participações, e o seu efeito na composição do risco total da carteira,  $V$ , é crucial para a obtenção de carteiras com riscos inferiores à soma dos riscos individuais das suas ações: o risco interativo é o alicerce do *Modelo de Otimização de Carteiras de Markowitz* (Markowitz, 1952). O modelo de Markowitz minimiza o risco da carteira  $V$  (Eq. (9)) para um

<sup>3</sup> Este desenvolvimento é detalhado em Markowitz (1991).

retorno de carteira desejado,  $R$ , resolvendo o problema de programação quadrática formulado como:

*Minimize*

$$V = \sum_{i=1}^M X_i^2 v_i + \sum_{i=1}^M \sum_{j=1, i \neq j}^M X_i X_j \gamma_{ij} \quad (11)$$

*Sujeito a*

$$r_p = \sum_{i=1}^M X_i \bar{r}_i \geq R \quad (12)$$

$$\sum_{i=1}^M X_i = 1 \quad (13)$$

$$X_i \geq 0, i = 1, \dots, M \quad (14)$$

A Eq. (11) é a função objetivo a ser minimizada, o risco total da carteira, a restrição da Eq. (12) garante ao menos a obtenção do retorno de carteira desejado  $R$ , a restrição da Eq. (13) garante a alocação total dos recursos, e a restrição da Eq. (14) restringe o modelo às negociações de compra apenas.

O conjunto das carteiras de risco mínimo para diversos retornos desejados pode ser obtido através da parametrização do modelo para  $R$ . Estas carteiras são denominadas *Carteiras Eficientes*, e esta estratégia de investimento é denominada *Diversificação Eficiente*. O locus bidimensional no espaço risco-retorno onde estão todas as carteiras eficientes possíveis é denominado *Fronteira Eficiente*. A cada conjunto de ações distinto está associada uma Fronteira Eficiente, a qual depende unicamente dos retornos esperados e riscos individuais de cada ação, e das covariâncias das suas séries históricas de retornos.

### 3.2. Seleção de Carteiras com Predição de Retornos

Desde a proposição original do arcabouço média-variância por Markowitz, sua viabilidade computacional, simplificações e extensões de modelo, e o desenvolvimento de medidas de risco alternativas têm sido foco de intensa pesquisa. Estes esforços contribuíram fortemente para estabelecer a teoria e prática da seleção de carteiras, produzindo resultados notáveis (Markowitz, 1956; Sharpe, 1963, 1971; Konno, 1990, 1991, 1992; Sortino, 1991; Hamza, 1996; Gilli, 2000). Contudo, as estimativas de retornos futuros baseadas na média das séries de retornos tendem a ser verificadas somente no longo prazo; portanto, elas não se mostram adequadas à gerência ativa de carteiras e a outras estratégias de curto prazo. A utilização de melhores métodos de predição para obter as estimativas dos retornos futuros de curto prazo, acompanhada de medidas de risco adequadas, pode derivar novos modelos preditivos mais adequados às aplicações de curto prazo. Esta seção formula um novo modelo de otimização de carteiras no qual a variância dos erros de predição, produzidos por um preditor RNAR-RM, é a medida de risco utilizada.

Seja  $r_t$  o retorno real da ação no tempo  $t$ , dado por:

$$r_t = \hat{r}_t + \varepsilon_t \quad (15)$$

onde  $\hat{r}_t$  é o retorno predito da ação para o tempo  $t$ , obtido no tempo  $t-1$ , e  $\varepsilon_t$  é o erro de predição para o tempo  $t$ . Para um preditor não tendencioso, a série  $\varepsilon' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$  dos  $n$  erros de

predição, definidos por:

$$\varepsilon_t = r_t - \hat{r}_t \quad (16)$$

deve ser estatisticamente independente e identicamente distribuída (iid), com média e variância dadas por:

$$\mu_\varepsilon = \bar{\varepsilon} = 0 \quad (17)$$

$$\hat{v} = \sigma_\varepsilon^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^n \varepsilon_t^2 \quad (18)$$

A variância dos erros de predição (Eq. (18)) é uma medida da incerteza da predição do retorno futuro, sendo utilizada no modelo como medida do risco individual das ações.

**Retorno e Risco.** Neste novo modelo de otimização de carteiras, o retorno predito da carteira,  $\hat{r}_p$ , é igual à soma dos retornos preditos para as suas ações,  $\hat{r}_i$ , ponderados pela participação de cada ação na carteira,  $X_i$ :

$$\hat{r}_p = \sum_{i=1}^M X_i \hat{r}_i \quad (19)$$

O risco da carteira é a variância da distribuição Normal conjunta da combinação dos erros de predição, expressa por:

$$\hat{V} = \hat{v}_p = \hat{\sigma}_p^2 = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M X_i X_j \hat{\gamma}_{ij} \quad (20)$$

onde as covariâncias  $\hat{\gamma}_{ij}$  são obtidas com as séries dos erros de predição *ex-ante* das ações  $i$  e  $j$ :

$$\hat{\gamma}_{ij} = \gamma_{\varepsilon_{ij}} = \frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^n \varepsilon_{it} \varepsilon_{jt} \quad (21)$$

**Modelo de Otimização de Carteiras.** A partir das definições das suas medidas fundamentais, o modelo de otimização de carteiras baseado na predição de retornos é formulado como:

*Minimize*

$$\hat{V} = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M X_i X_j \hat{\gamma}_{ij} \quad (22)$$

*Sujeito a*

$$\hat{r}_p = \sum_{i=1}^M X_i \hat{r}_i \geq R \quad (23)$$

$$\sum_{i=1}^M X_i = 1 \quad (24)$$

$$X_i \geq 0, i = 1, \dots, M \quad (25)$$

A Eq. (22) é a função objetivo a ser minimizada, o risco total da carteira com retornos preditos, a restrição da Eq. (23) é a que garante ao menos a obtenção do retorno de carteira desejado  $R$ , a restrição da Eq. (24) garante a alocação total dos recursos, e a restrição da Eq. (25) restringe o modelo às negociações de compra apenas.

Apesar da utilização da modelagem Normal conjunta, este modelo difere fundamentalmente do modelo de Markowitz nos seguintes aspectos: (i) os retornos esperados são os retornos preditos, ao invés das médias das séries de retornos; (ii) os riscos das ações são obtidos com as distribuições *ex-ante* dos erros de predição centradas nos retornos preditos de cada ação, e não com as distribuições das suas séries de retornos; e (iii) o risco interativo das ações é obtido através das covariâncias *ex-ante* dos erros de predição (Eq.(21)), e não das covariâncias das séries de retornos. Esta modelagem é baseada na hipótese da Eq. (17) e na Normalidade dos erros de predição, a qual é experimentalmente suportada pelos resultados mostrados na Seção 5.1.

#### 4. Métodos Experimentais

Um conjunto de experimentos foi conduzido com o objetivo de: (i) verificar a Normalidade dos erros de predição; e (ii) avaliar o desempenho do modelo de seleção de carteiras com predição de retornos em relação ao modelo de Markowitz.

##### 4.1. Dados

Foram selecionadas 46 ações participantes do índice Ibovespa da Bolsa de Valores do Estado de São Paulo (BOVESPA) no primeiro quadrimestre de 2005. Para cada ação, os retornos semanais amostrados às quartas-feiras no período entre 16-fev-2000 e 09-mar-2005 foram computados, obtendo-se assim 46 séries com 265 retornos para o conjunto de dados dos experimentos. Implementamos preditores neurais individuais para cada uma das ações, utilizando uma janela móvel de 200 semanas para treinamento e outra de 5 semanas para teste, com os quais foram realizadas 60 predições para cada ação ( $46 \times 60 = 2.760$  predições realizadas), conforme descrito a seguir.

##### 4.2. Preditores Neurais

Utilizamos preditores de referência móvel com retardo  $k = 1$  e ordem  $p = 4$ , ou RNAR-RM(4,1), que foram implementados com uma rede neural *feedforward* totalmente conectada, com 2 camadas internas, função de ativação sigmoideal e topologia 4:30:15:1 (4 neurônios na entrada, 30 neurônios na primeira camada interna, 15 neurônios na segunda camada interna e 1 neurônio na saída). Uma rede RNAR-RM(4,1) foi treinada para cada uma das 46 ações em cada uma das 60 predições ( $46 \times 60 = 2.760$  sessões de treinamento; utilizamos o cluster Enterprise com 64 nós ATHLON XP 1800 do Departamento de Informática da Universidade Federal do Espírito Santo – <http://www.inf.ufes.br/~lcad> para esta finalidade). O treinamento foi conduzido durante 200.000 épocas com o algoritmo *backpropagation*, com taxa de aprendizado de 0.009 e inércia de 0.95 (Haykin, 1999). Estes parâmetros topológicos e de treinamento foram determinados empiricamente.

Para reduzir o *overfitting* no treinamento das redes neurais, empregamos uma forma simplificada de validação cruzada (Haykin, 1999), a qual consistiu em dividir o conjunto de treinamento para cada uma das 60 predições em dois segmentos: um segmento de treinamento e um segmento de teste ou validação. O segmento de treinamento para a primeira das 60 predições, as 200 semanas entre 16-fev-2000 e 10-dez-2003, foi utilizado para atualizar os pesos das redes neurais durante as 200.000 épocas de treinamento, enquanto o segmento de validação, com 5 retornos semanais entre 17-dez-2003 e 14-jan-2004, foi utilizado para selecionar o melhor



conjunto de pesos obtido durante o treinamento. Para selecionar este melhor conjunto de pesos, a cada 1.000 épocas de atualização dos pesos, a rede neural da ação foi utilizada para prever os retornos do segmento de validação. O conjunto de pesos responsável pelo menor erro RMSE (raiz do erro médio quadrático) observado no segmento de validação foi preservado e utilizado para prever o retorno para 21-jan-2004. Este procedimento foi repetido para cada uma das 59 predições restantes, avançando a janela de 205 semanas, uma semana por vez, nas datas mencionadas acima. Os tamanhos dos segmentos de treinamento e validação foram obtidos com a heurística proposta em Haykin (1999, pág. 217).

Tabela 1. Normalidade dos erros de predição para os preditores RNAR-RM e para as séries de retornos

Teste do Qui-quadrado para as 46 séries dos erros de predição		
RNAR-RM(4,1)		
$\alpha$	$H_0$ não rejeitada	$H_0$ rejeitada
0.01	44 (96%)	2 (4%)
0.05	39 (85%)	7 (15%)
0.10	36 (78%)	10 (22%)
Teste do Qui-quadrado para as 46 séries de retornos		
$\alpha$	$H_0$ não rejeitada	$H_0$ rejeitada
0.01	14 (30%)	32 (70%)
0.05	6 (13%)	40 (87%)
0.10	5 (11%)	41 (89%)

## 5. Experimentos e Resultados

Os resultados dos experimentos conduzidos com o métodos descritos na Seção 4 são apresentados a seguir.

### 5.1. Normalidade dos Erros de Predição

A Normalidade dos erros de predição dos preditores RNAR-RM(4,1) e das séries de retornos utilizadas nos experimentos foi testada e os resultados são mostrados na Tabela 1. Os testes do Qui-quadrado para as 46 séries dos erros de predição, cada uma com 60 observações, foram conduzidos para os níveis de significância ( $\alpha$ ) padrão de 0.01, 0.05 e 0.10. A Normalidade dos erros de predição foi aceita (i.e. não rejeitada) para 44 (96%), 39 (85%) e 36 (78%) dos preditores RNAR-RM(4,1), respectivamente. Contudo, para os mesmos níveis de significância ( $\alpha$ ), a normalidade das séries de retornos foi aceita para apenas 14 (30%), 6 (13%) e 5 (11%) das ações, respectivamente. Estes resultados sugerem a possibilidade de se obter erros de predição Normais a partir de séries de retornos não Normais. Este fato é especialmente importante para o desenvolvimento de novos modelos preditivos de seleção de carteiras que se beneficiem dos desenvolvimentos teóricos do arcabouço Normal.

### 5.2. Desempenho do Modelo de Carteiras com Predição de Retornos

Utilizamos uma janela de 40 predições, iniciada na primeira das 60 predições realizadas, para estimar as variâncias e covariâncias dos erros de predição necessárias ao modelo preditivo de seleção de carteiras (Eqs. (20), (21) e (22)). Os retornos médios, variâncias e covariâncias necessárias ao modelo de Markowitz foram calculados a partir de uma janela com 245 das 265 semanas disponíveis, iniciada na primeira semana. As carteiras formadas com os modelos de Markowitz e preditivo foram comparadas utilizando as 20 semanas restantes do conjunto de dados. A comparação foi conduzida selecionando-se carteiras das Fronteiras Eficientes de cada modelo, obtidas através dos procedimentos de otimização descritos na Seção 3. A estratégia de investimento utilizada foi re-balancear as carteiras a cada 4 semanas



consecutivas; assim, formamos um total de 5 carteiras para cada modelo (20 semanas/4 semanas de vigência para cada carteira).

A Fig. 1 mostra as Fronteiras Eficientes para os modelos de Markowitz e preditivo, obtidas através da parametrização dos modelos da Seção 3 para  $R$ . Os valores de  $R$  foram escolhidos de forma que, a partir de um determinado valor mínimo, fossem obtidas Fronteiras Eficientes com 30 carteiras ótimas para cada modelo, e que todo o espaço de soluções viáveis de cada problema fosse percorrido ( $30 \times 5 \times 2 = 300$  problemas quadráticos). Desta forma, foram utilizados valores de  $R$  entre 0.005 e 0.011 para as carteiras de Markowitz, e entre 0.005 e 0.2 para as carteiras preditivas. A parte superior da Fig. 1 mostra as 5 Fronteiras Eficientes para o modelo de Markowitz, FE-M1, FE-M2, FE-M3, FE-M4 e FE-M5, obtidas no período inicial e na sequência dos 4 re-balanceamentos durante as simulações. Seus riscos ótimos ficaram entre 0.000827 e 0.003, para retornos entre 0.005 e 0.0108, respectivamente. Na parte inferior da Fig. 1 temos as 5 Fronteiras Eficientes para o modelo preditivo, FE-P1, FE-P2, FE-P3, FE-P4 e FE-P5, obtidas da mesma forma e com riscos ótimos entre 0.000537 e 0.0075, para retornos entre 0.005 e 0.2128, respectivamente. Desta forma, podemos verificar que as carteiras preditivas apresentaram resultados de risco e retorno significativamente melhores do que aqueles apresentados pelas carteiras de Markowitz, em termos de Fronteira Eficiente. Esta superioridade pode ser explicada pela maior diversidade de soluções encontradas pelo modelo preditivo (veja os formatos e as localizações das Fronteiras Eficientes dos modelos na Fig. 1), demonstrando capturar melhor as dinâmicas de curto prazo do que o modelo de Markowitz.

Após a obtenção das Fronteiras Eficientes, nós realizamos simulações dos investimentos no período acima citado e computamos os retornos acumulados para ambos modelos. Cada carteira foi selecionada no nível de risco de 0.001 (variância da distribuição Normal conjunta das carteiras) da sua respectiva Fronteira Eficiente vigente (linhas verticais tracejadas da Fig. 1), e sua rentabilidade foi acompanhada durante 4 semanas consecutivas. Este processo se repetiu para cada um dos 4 períodos de re-balanceamento das carteiras

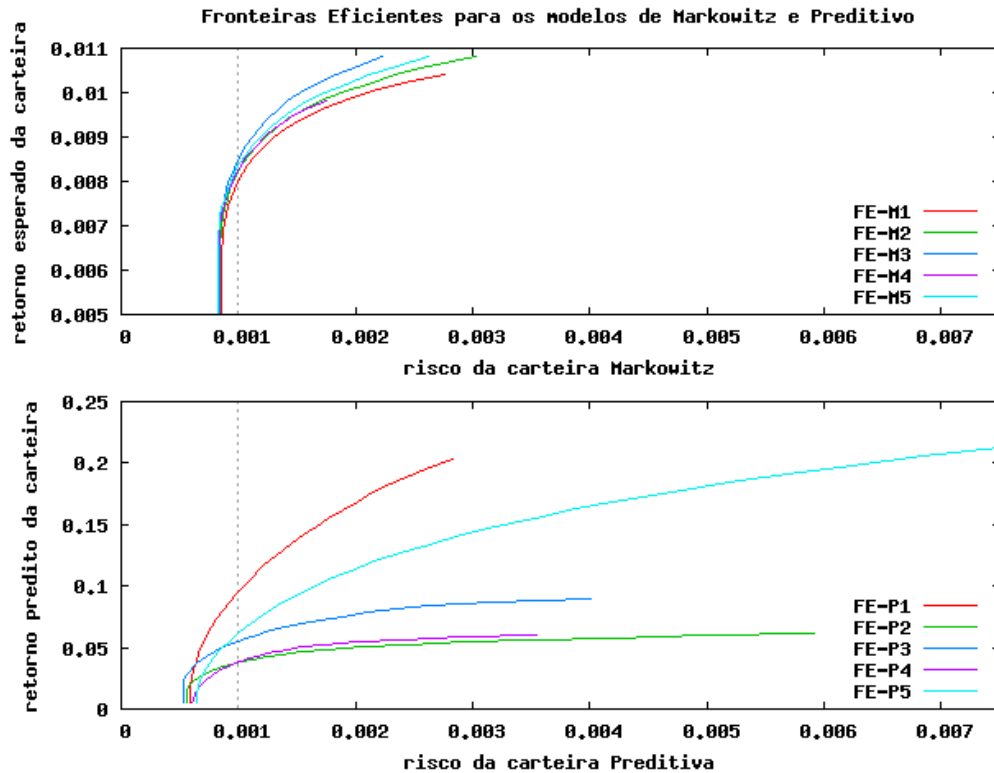


Fig. 1. Fronteiras Eficientes para os modelos de Markowitz (superior) e Preditivo (inferior).

A Fig. 2 mostra as distribuições Normais para cada uma das 5 carteiras selecionadas

para os modelos de Markowitz e preditivo, obtidas a partir dos seus respectivos retornos esperados e riscos. As carteiras M1, M2, M3, M4 e M5 foram obtidas com o modelo de Markowitz e suas distribuições são mostradas na parte superior da Fig. 2. Elas apresentaram retornos esperados bastante similares devido à pequena variação da média ponderada (por cada  $X_i$ ) dos retornos das ações no período das 245 semanas, que também pode ser verificada pela similaridade das suas Fronteiras Eficientes na parte superior da Fig. 1. As carteiras P1, P2, P3, P4 e P5 foram obtidas com o modelo preditivo e são mostradas na parte inferior da Fig. 2. Como mostrado no gráfico, elas apresentaram valores de retorno esperados bastante distintos, exibindo suas propriedades preditivas de curto prazo, verificadas também pela diversidade das suas Fronteiras Eficientes na parte inferior da Fig. 1.

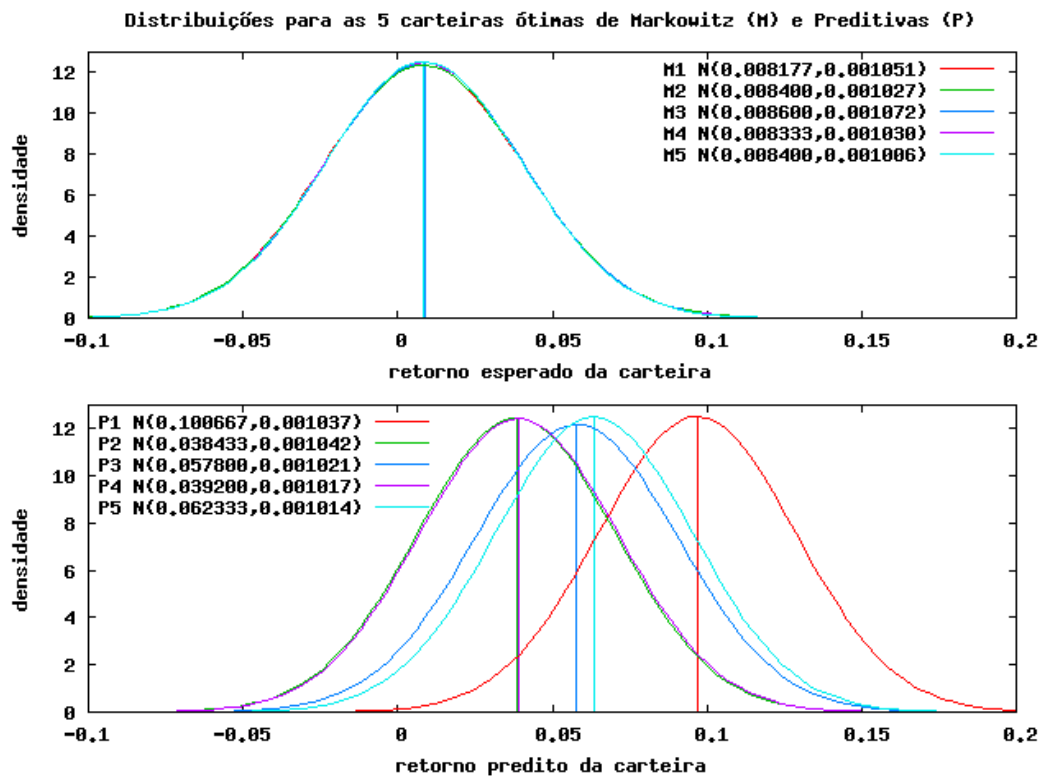


Fig. 2. Distribuições Normais para cada uma das 5 carteiras selecionadas para os modelos de Markowitz (superior) e Preditivo (inferior).

A Fig. 3 mostra uma comparação dos retornos acumulados no período de simulação para as 5 carteiras de Markowitz, as 5 carteiras preditivas e o índice Ibovespa (IBOV). Como mencionado acima, as carteiras foram re-balanceadas 4 vezes, nas semanas 4, 8, 12 e 16 do período de simulação, utilizando os dados disponíveis nestes momentos. Os períodos de simulação para cada um dos 5 pares de carteiras é mostrado entre as linhas verticais da Fig. 3.

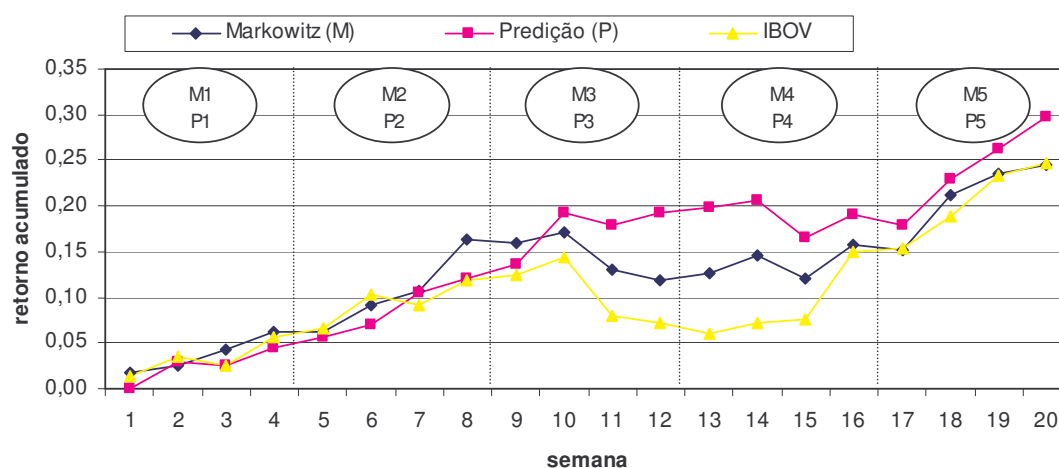


Fig. 3. Retornos acumulados para as carteiras de Markowitz e preditivas comparadas com o índice Ibovespa (IBOV). As carteiras preditivas (P) melhor se sustentaram frente à queda do IBOV após a semana 10, em comparação com as carteiras de Markowitz (M).

Como a Fig. 3 mostra, inicialmente, ambos modelos de carteiras e o Ibovespa tiveram desempenho equivalente. Na semana 8, a carteira de Markowitz apresentou um aumento significativo de desempenho, porém foi ultrapassada pela carteira preditiva na semana 10, que se sustentou melhor que a carteira de Markowitz frente a uma importante baixa do mercado na semana seguinte (veja o gráfico do Ibovespa). As carteiras preditivas subsequentes mantiveram este desempenho superior até o final do período de análise, inclusive frente ao período remanescente da baixa do Ibovespa. As carteiras preditivas obtiveram um retorno acumulado de 29.83% no período, enquanto as carteiras de Markowitz obtiveram 24.45%, próximos aos 24.66% do Ibovespa.

## 6. Conclusão e Trabalhos Futuros

Neste artigo utilizamos um novo método de predição denominado *rede neural auto-regressiva com referência móvel (RNAR-RM)* para prever os retornos futuros do mercado de ações Brasileiro. Neste método, as variáveis de regressão são as diferenças dos valores das séries históricas e um determinado valor passado. A Normalidade dos erros de predição produzidos pelos preditores RNAR-RM foi examinada, sendo verificada para 45 das 46 séries estudadas, enquanto a Normalidade das séries de retornos foi verificada para apenas 14 das 46 séries. Este fato sugere a possibilidade de se produzir erros de predição Normais a partir de séries de retorno não Normais. Esta característica dos erros de predição suportou o desenvolvimento de um novo modelo de seleção de carteiras baseado em predição que utiliza o arcabouço Normal. Simulações de investimento com este novo modelo mostraram que ele pode produzir resultados melhores que o modelo de seleção de carteiras de Markowitz – ele alcançou retornos acumulados 5.17% superiores aos do modelo de Markowitz no período estudado. Também, as carteiras preditivas demonstraram uma melhor capacidade de acompanhamento do índice de mercado, alcançando retornos 6.38% superiores aos do índice Ibovespa, enquanto as carteiras de Markowitz alcançaram uma superioridade de apenas 1.21%.

Nossos trabalhos futuros incluem a investigação de melhores sistemas neurais de predição, que minimizem os erros de predição e a sua variância, e novas estratégias de investimento que capturem dinamicamente as oportunidades de re-balanceamento mais promissoras.

## Agradecimentos

Os autores agradecem o apoio da empresa Enfoque Informações Financeiras Ltda. – (<http://www.enfoque.com.br>), no fornecimento das séries históricas de longo prazo utilizadas neste trabalho.

## Referências

- Box, G. E. P., Jenkins G. M. e Reinsel G. C.**, *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. Prentice Hall, third edition, 1994.
- Elton, E. J., Gruber, M. J., Brown, S. J. e Goetzmann, W. N.**, *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis*. John Wiley & Sons, Inc., sixth edition, 2003.
- Fama, E.** (1965), Portfolio Analysis in a Stable Paretian Market. *Management Science*, Vol. 11, No. 3 Series A, pp 404-419.
- Freitas, F. D., De Souza, A. F. e Almeida, A. R.** (2005), Autoregressive neural network predictors in the Brazilian stock markets. *VII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente (SBAI)/II IEEE Latin American Robotics Symposium (IEEE-LARS)*, São Luis, Brasil.
- Gilli, M. e Kellezi, E.** (2000), Heuristic approaches for portfolio optimization. *VI International Conference on Computing in Economics and Finance*.
- Hamza, F. e Janssen, J.** (1996), Linear approach for solving large-scale portfolio optimization problems in a lognormal market. In *IAA/AFIR Colloquium*, pages 1019–1039, Nürnberg, Germany.
- Haykin, S.**, *Neural Networks: a Comprehensive Foundation*. Prentice Hall, Inc., 2 edition, 1999.
- Kon, S. J.** (1984), Models of stock returns - a comparison. *Journal of Finance*, XXXIX(1):147–165.
- Konno, H.** (1990), Piecewise linear risk functions and portfolio optimization. *Journal of Operations Research Society of Japan*, (33):139–156.
- Konno, H. e Suzuki, S.** (1992), A fast algorithm for solving large scale mean-variance models by compact factorization of covariance matrices. *Journal of Operations Research Society of Japan*, (35):93–104.
- Konno, H. e Yamazaki, H.** (1991), Mean-absolute deviation portfolio optimization model and its applications to Tokyo stock market. *Management Science*, 37(5):519–531.
- Markowitz, H. M.** (1952), Portfolio selection. *Journal of Finance*, VII(1):77–91.
- Markowitz, H. M.** (1956), The optimization of a quadratic function subject to linear constraints. *Naval Research Logistics Quarterly*, (3): 111–1331.
- Markowitz, H. M.**, *Portfolio Selection: Efficient Diversification on Investment*. John Wiley & Sons, New York, 2 edition, 1991.
- Sharpe, W. F.** (1963), A simplified model for portfolio analysis. *Management Science*, (9):277–293.
- Sharpe, W. F.** (1971), A linear programming approximation for the general portfolio selection problem. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, (6):1263–1275.
- Sortino, F. A. e Van der Meer, R.** (1991), Downside risk. *Journal of Portfolio Management*, pages 27–31.
- Sutton, R. S.** (1988), Learning to predict by the methods of temporal differences. *Machine Learning*, 3:9–44.
- White, H.** (1988), Economic prediction using neural networks: The case of IBM daily stock returns. In *Proceedings of The IEEE International Conference on Neural Networks*.