Escala y Ondita como filtros

Procesamiento de Señales

2021

1 ϕ y ψ completamente determinadas por un filtro H pasa-bajo.

En este documento ampliaremos lo desarrollado en la sección 8.4 del apunte Onditas a partir de filtros

1.1 Función Escala ϕ determinada por un filtro H pasa-bajo

Como sabemos,una Base Ortonormal para el subespacio V_1 es

$$BON_{V_1} = \{\sqrt{2}\ \phi(2t-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$$

y por lo tanto como $\phi(t) \in V_1$ tenemos la ecuación de dilatación:

$$\phi(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} h\,[k]\,\sqrt{2}\ \phi(2t-k)$$

para ciertos coeficientes que llamamos $h\,[k]$.

Tomando a ambos miembros la Transformada de Fourier y reemplazando $\phi(t)$ obtenemos

$$\Phi(\omega) = \int \phi(t)\ e^{-j\omega t}dt$$

$$\Phi(\omega) = \int \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} h\,[k]\,\sqrt{2}\ \phi(2t-k)\right)\ e^{-j\omega t}dt$$

Intercambiando sumatoria con integral y haciendo cambio de variable $z = 2t - k$ se tiene que $t = \frac{z+k}{2}$, $dz = 2dt$ y reemplazando en la integral:

$$\begin{aligned}\Phi(\omega) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} h\,[k]\,\sqrt{2} \int \phi(z)e^{-j\omega\frac{z+k}{2}}\frac{1}{2}dz \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} h\,[k]\,e^{-jk\frac{\omega}{2}} \int \phi(z)e^{-jz\frac{\omega}{2}}dz\end{aligned}$$

Observando que$\sum_{k\in\mathbb{Z}} h\,[k]\, e^{-jk\frac{\omega}{2}} = H(\frac{\omega}{2})$ y $\int \phi(z)e^{-jz\frac{\omega}{2}}dz = \Phi(\frac{\omega}{2})$, se tiene que

$\Phi(\omega) = \frac{\sqrt{2}}{2}H(\frac{\omega}{2})\Phi(\frac{\omega}{2})$

de aqui podemos notar que tomando $\omega = 0 \Rightarrow H(0) = cte$

y podemos pensar $H(0) = cte = 1$

además iterando el proceso y considerando que podemos reemplazar la constante $\frac{\sqrt{2}}{2}$ por 1

$= H(\frac{\omega}{2})H(\frac{\omega}{4})\Phi(\frac{\omega}{4})$

$= H(\frac{\omega}{2})H(\frac{\omega}{4})H(\frac{\omega}{8})\Phi(\frac{\omega}{8})$

$= ...$

$= \prod_{k=1}^{\infty} H(\frac{\omega}{2^k})\Phi(0)$

Suponiendo que la función escala está normalizada, es decir $\Phi(0) = \int \phi(t)dt = 1$, tenemos que

$$\Phi(\omega) = \prod_{k=1}^{\infty} H(\frac{\omega}{2^k})$$

Es decir que la función escala está completamente determinada por el filtro H.¿Porque es un filtro pasa-bajo?

El hecho de que $\{\phi(t-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}\}$ sea un conjunto ortonormal (es una base ortonrmal del subespacio $V_0 \subset \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$) lleva a que se deba cumplir la siguiente ecuación en frecuencia (lo vamos a creer , no vamos a probarlo):

$$H(\omega)\overline{H(\omega)} + H(\omega+\pi)\overline{H(\omega+\pi)} = 1 \;\forall\; \omega$$

Ya teníamos que $H(0) = 1$. Ahora reemplazando $\omega = 0$ tenemos que

$$\begin{aligned} 1 =& H(0)\overline{H(0)} + H(0+\pi)\overline{H(0+\pi)} \\ =& 1 + |H(0+\pi)|^2 \\ &\Rightarrow H(\pi) = 0 \end{aligned}$$

y entonces H es un filtro pasa bajo.

1.2 Función Ondita ψ determinada por un filtro G pasa-alto

Repitiendo el análisis anterior y como $\psi(t) \in V_1$ tenemos la ecuación Ondita:

$$\psi(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} g\,[k]\,\sqrt{2}\;\phi(2t-k)$$

para ciertos coeficientes que llamamos $g\,[k]$.

Tomando a ambos miembros la Transformada de Fourier y reemplazando $\psi(t)$ obtenemos

$$\Psi(\omega) = \int \psi(t)\ e^{-j\omega t}dt$$

$$\Psi(\omega) = \int \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} g\,[k]\,\sqrt{2}\ \psi(2t-k) \right)\ e^{-j\omega t}dt$$

Intercambiando sumatoria con integral y haciendo cambio de variable $z = 2t - k$ se tiene que $t = \frac{z+k}{2}$, $dz = 2dt$ y reemplazando en la integral:

$$\begin{aligned} \Psi(\omega) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} g\,[k]\,\sqrt{2} \int \psi(z) e^{-j\omega\frac{z+k}{2}} \frac{1}{2} dz \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{k\in\mathbb{Z}} g\,[k]\, e^{-jk\frac{\omega}{2}} \int \psi(z) e^{-jz\frac{\omega}{2}} dz \end{aligned}$$

Observando que $\sum_{k\in\mathbb{Z}} g\,[k]\, e^{-jk\frac{\omega}{2}} = G(\frac{\omega}{2})$ y $\int \psi(z) e^{-jz\frac{\omega}{2}} = \Psi(\frac{\omega}{2})dz$, se tiene que

$$\Psi(\omega) = \frac{\sqrt{2}}{2} G(\frac{\omega}{2}) \Phi(\frac{\omega}{2})$$

reemplazando la expresión obtenida anteriormente para $\Phi(\frac{\omega}{2})$

$$= G(\frac{\omega}{2}) \prod_{k=2}^{\infty} H(\frac{\omega}{2^k})$$

lo que introduce un filtro G para la expresión de la transformada de la función Ondita.

El hecho de que $\{\psi(t-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}\}$ sea un conjunto ortonormal lleva a que se deba cumplir la siguiente ecuación en frecuencia (lo vamos a creer , no vamos a probarlo):

$$H(\omega)\overline{G(\omega)} + H(\omega+\pi)\overline{G(\omega+\pi)} = 0\ \forall\ \omega$$

Una vez que tenemos el filtro H observamos que una solución posible para esta ecuación es

$$G(\omega) = -e^{-j\omega}\overline{H(\omega+\pi)}$$

ya que si reemplazamos esta expresión en la ecuación , tenemos:

$$
\begin{aligned}
&H(\omega)\overline{G(\omega)} + H(\omega+\pi)\overline{G(\omega+\pi)}\\
=&H(\omega)\left(\overline{-e^{-j\omega}\overline{H(\omega+\pi)}}\right) + H(\omega+\pi)\left(\overline{-e^{-j(\omega+\pi)}\overline{H(\omega+2\pi)}}\right)\\
=&H(\omega)\left(\overline{-e^{-j\omega}}H(\omega+\pi)\right) + H(\omega+\pi)\left(\overline{-e^{-j(\omega+\pi)}}H(\omega)\right)\\
=&H(\omega)\left(-e^{j\omega}H(\omega+\pi)\right) + H(\omega+\pi)\left(-e^{j(\omega+\pi)}H(\omega)\right) \text{ y como } e^{j(\omega+\pi)} = e^{j\omega}e^{j\pi} = -e^{j\omega}\\
=&H(\omega)\left(-e^{j\omega}H(\omega+\pi)\right) + H(\omega)\left(e^{j\omega}H(\omega+\pi)\right)\\
=&0
\end{aligned}
$$

El hecho de que $G(\omega) = -e^{-j\omega}\overline{H(\omega+\pi)}$ implica:

1. los coeficientes $h[k]$ y $g[k]$ están vinculados por lo que se llama espejo en cuadratura
$$g[k] = (-1)^k h[L-1-k]$$
donde L es la cantidad de coeficientes usados para h.

2. como $H(0) = 1$ y $H(\pi) = 0$ entonces
$$
\begin{aligned}
G(0) &= -e^{-j0}\overline{H(0+\pi)} = (-1).0\\
G(\pi) &= -e^{-j\pi}\overline{H(\pi+\pi)} = -(-1)H(0) = 1
\end{aligned}
$$
por lo que $G(0) = 0$ y $G(\pi) = 1$ siendo entonces un filtro pasa-alto.