DFT punto N

Procesamiento de Señales

1 DFT punto N de una señal 1-D

Ya vimos que la Transformada de Fourier a Tiempo Discreto (Time Discrete Fourier Transform) convierte una señal a tiempo discreto en el dominio temporal en una señal a variable continua en el frecuencial. Surge entonces la necesidad de una transformada que genera una señal discreta en el dominio frecuencial.

1.1 Ecuación de Análisis y de Síntesis

Dada $x[n]$ una señal discreta y finita de N muestras, con valores nulos $\forall n < 0;\ n \geq N$, la Transformada Discreta de Fourier punto N (si no se aclara el N se toma por defecto la cantidad de muestras de la señal) se define como:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n].e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}\ \forall k = 0, 1, 2, ..., N-1 \text{ Ecuación de Análisis}$$

La Transformada Discreta de Fourier Inversa punto N es:

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k].e^{j\frac{2\pi}{N}kn}\ \forall n = 0, 1, 2, ..., N-1 \text{ Ecuación de Síntesis}$$

Es importante observar que si $x[n]$ tiene M mestras y se desea calcular DFT punto N,

- si $0 < M < N$ se completan con ceros (zero-padding) el número de muestras faltantes
- si $0 < N < M$ se descartan las muestras fuera del intervalo $[0, ...N-1]$ por lo que la DFT es la transformada de la señal truncada y luego no puede recuperarse la señal original sino la truncada.

1.2 Comprendiendo DFT punto N

Para comprender mejor la Ecuación de Análisis calculemos a mano una DFT punto N sencilla. Por ejemplo (como se hizo en clases) si $x[n] = (1, 1)$ y calculamos DFT punto 2, entonces

$$\begin{aligned} X[0] &= \sum_{n=0}^{2-1} x[n].e^{-j\frac{2\pi}{2}0n} \\ &= x[0].e^{-j\pi 00} + x[1].e^{-j\pi 01} \\ &= x[0].e^{0} + x[1].e^{0} \\ &= 1 + 1 \end{aligned}$$

mientras que el cálculo par $X[1]$ es:

$$\begin{aligned} X[1] &= \sum_{n=0}^{2-1} x[n].e^{-j\frac{2\pi}{2}1n} \\ &= x[0].e^{-j\pi 10} + x[1].e^{-j\pi 11} \\ &= x[0].e^{0} + x[1].e^{-j\pi} \\ &= 1 + (cos(\pi) - isen(\pi)) \\ &= 1 + (1 + i0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Con lo que el "cálculo a mano" de DFT punto 2 de la señal da $X[k] = (2, 0)$ (no es el caso, pero puede dar números complejos).

Tarea: dada $x[n] = (-1, 2, -3, -2)$,

- calcular$X[1]$ y $X[2]$ de DFT punto 4.
- calcular$X[0]$ y $X[1]$ de DFT punto 2.
- calcular$X[1]$ y $X[2]$ de DFT punto 8.

1.3 DFT punto N como una transformación lineal

¿Porque decimos que DFT punto N puede ser vista como una transformación/ aplicación lineal (como las estudiadas en Álgebra)?

Pues considerando $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ construimos la matriz $\mathbb{W}_{\mathbb{N}}$ dada por:

$$\mathbb{W}_{\mathbb{N}} = \begin{bmatrix} W_N^{0\ 0} & W_N^{0\ 1} & W_N^{0\ 2} & ... & W_N^{0\ N-1} \\ W_N^{1\ 0} & W_N^{1\ 1} & W_N^{1\ 1} & ... & W_N^{1\ N-1} \\ W_N^{2\ 0} & W_N^{2\ 1} & W_N^{2\ 2} & ... & W_N^{2\ (N-1)} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ W_N^{N-1\ 0} & W_N^{(N-1)\ 2} & W_N^{(N-1)\ 3} & ... & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}$$

Es decir el elemento (i, j) de la matriz es $W_N^{i\ j}$ (¡ojo!, empiezo a contar las potencias siempre desce cero)

Por ejemplo si consideramos DFT punto 8 el elemento $(\mathbb{W}_8)_{(3,7)}$ de la matriz es

$$(\mathbb{W}_8)_{(3,7)} = \mathbb{W}_8{}^{(3)(7)} = (e^{j\frac{2\pi}{8}})^{21} = e^{j\frac{5\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Tarea: calcular

- $(\mathbb{W}_4)_{(3,1)}$
- $(\mathbb{W}_4)_{(1,2)}$

Entonces la DFT punto N entonces puede verse como la siguiente multiplicación matricial (que se corresponde a una Aplicación o Transformación Lineal):

$$\begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ X[2] \\ ... \\ X[N-1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_N^{0\ 0} & W_N^{0\ 1} & W_N^{0\ 2} & ... & W_N^{0\ N-1} \\ W_N^{1\ 0} & W_N^{1\ 1} & W_N^{1\ 1} & ... & W_N^{1\ N-1} \\ W_N^{2\ 0} & W_N^{2\ 1} & W_N^{2\ 2} & ... & W_N^{2\ (N-1)} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ W_N^{N-1\ 0} & W_N^{(N-1)\ 2} & W_N^{(N-1)\ 3} & ... & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ ... \\ x[N-1] \end{bmatrix}$$

Esta matriz es inversible (sus columnas o filas son linealmente independientes),

$$\mathbb{W}_N^{-1} = \frac{1}{N}\mathbb{W}_N^*$$

donde $\mathbb{W}_N^*$ es la matriz compleja conjugada de $\mathbb{W}_N^*$ (Traspuesta y cada elemento conjugado).

Por lo tanto la DFT punto N tiene inversa, de modo que

$$x[n] = \frac{1}{N}\mathbb{W}_N^*\ X[n]$$

1.4 Propiedades

La DFT punto N conserva todas las propiedades de la Transformada clásica de Fourier pero 2 de ellas deben a adaptarse:

1.4.1 Corrimiento Circular

Una de las propiedades de la Transformada clásica de Fourier es la propiedad de corrimiento de una señal . Dadas $x[n]$ y $x[n-m]$ un retraso de dicha señal, se tiene

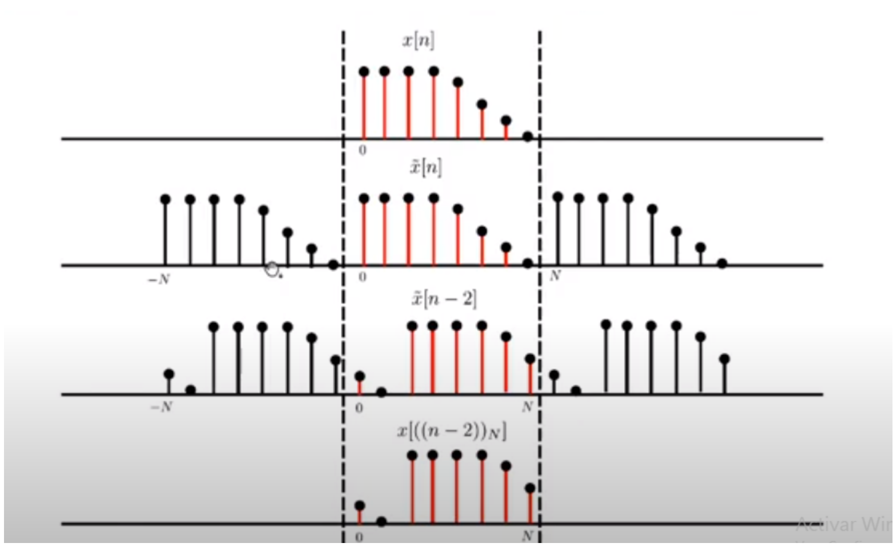
$$x[n] \rightarrow X(\Omega)$$
$$x[n-m] \rightarrow e^{-j\Omega m} X(\Omega)$$

Esto no se cumple ahora en el caso de $x[n]$ una señal de solo N muestras, sino que tenemos que considerar la extensión periódica tanto de $x[n]$, como de su DFT punto N $X[k]$, que denotamos con $\widetilde{x}[n]$ y $\widetilde{X}[k]$ respectivamente.

Con esa consideración ahora si:

$$\widetilde{x}[n] \rightarrow \widetilde{X}[k]$$
$$\widetilde{x}[n-m] \rightarrow e^{-j\frac{2\pi k}{N}m} \widetilde{X}[k]$$

que en definitiva equivale a considerar la señal de N muestras considerando el "corrimiento circular" de la misma $x[n]$, en donde siempre consideramos una señal de N muestras y cuando sale una muestra por la derecha, entra por la izquierda. (que matematicamente se expresa como $x[n-m]_N$)



1.4.2 Convolución Circular punto N

Otra de las propiedades que debemos adaptar es

$$x[n] * y[n] \;\rightarrow\; X(\Omega) \cdot Y(\Omega)$$

Recordando la fórmula para convolución

$$x[n] * y[n] = \sum_{m \in \mathbb{Z}} x[n]\, y[n-m]$$

donde vemos que tenemos el mismo problema con el "corrimiento" de la señal.

Entonces dadas dos señales con N muestras, definimos la convolución cicular punto N; denotada por $\circledast_N$ del siguiente modo: tomamos la extensión periódica de ambas señales , calculamos su convolución pero nos quedamos con un solo período. Aqui también al dezplazarnos estamos tomando considerando el corrimiento circular, es decir que cuando sale una muestra por la derecha, entra por la izquierda.

$$(x \circledast_N y)[n] = \sum_{m=0}^{N-1} \widetilde{x}[n]\, \widetilde{y}[n-m]$$

De este modo si podemos asegurar la propiedad :

$$(x \circledast_N y)[n] \;\rightarrow\; X[k] \cdot Y[k]$$

IMPORTANTE

Si las señales x, y tienen longitudes Lx, Ly se trunca o se hace zero padding. La convolución circular y lineal coinciden si $N \geq L_x + L_y - 1$.