Análise de algoritmos

Profª. Rose Yuri Shimizu

Eficácia x Eficiência

```c
int p1(int n)
{
    if (n == 1 || n == 2)
        return 1;
    else
        return p1(n - 1) + p1(n - 2);
}

```

```c
int p2(int n)
{
    int i, f1 = 1, f2 = 1, soma;
    for (i=3; i<=n; i=i+1)
    {
        soma = f1 + f2;
        f1 = f2;
        f2 = soma;
    }
    return f2;
}

```

Eficácia x Eficiência

```
int p1(int n)
{
    if (n == 1 || n == 2) // <- p1(5) verifica
        return 1;
    else
        return p1(n - 1) + p1(n - 2);
}

```

```
          p1(5)
            |
      (n==1||n==2)?





```

```
     stack

|                              |
|                              |
|                              |
|                              |
|    p1(5)                     |

```

Eficácia x Eficiência

```
int p1(int n)
{
    if (n == 1 || n == 2)
        return 1;
    else
        return p1(n - 1) + p1(n - 2);
        //     ________ p1(5) chama p1(4)
}

```

```
        _______ p1(5)
       /
    p1(4)

```

```
|                              |
|                              |
|                              |
|   p1(4)                      |
|   p1(5) -> p1(4)             |

```

Eficácia x Eficiência

```
int p1(int n)
{
    if (n == 1 || n == 2) //<- p1(4) verifica
        return 1;
    else
        return p1(n - 1) + p1(n - 2);
}

```

```
          ______ p1(5)
         /
      p1(4)
         |
   (n==1||n==2)?

```

```
|                                  |
|                                  |
|                                  |
|    p1(4)                         |
|    p1(5) -> p1(4)                |

```

Eficácia x Eficiência

```
int p1(int n)
{
    if (n == 1 || n == 2)
        return 1;
    else
        return p1(n - 1) + p1(n - 2);
        //     ________ p1(4) chama (p1(3)
}

```

```
          _______ p1(5)
         /
      p1(4)
     /
  p1(3)

```

```
|                              |
|                              |
|    p1(3)                     |
|    p1(4) -> p1(3)            |
|    p1(5) -> p1(4)            |

```

Eficácia x Eficiência

```
int p1(int n)
{
    if (n == 1 || n == 2) //<- p1(3) verifica
        return 1;
    else
        return p1(n - 1) + p1(n - 2);
}

```

```
          _______ p1(5)
         /
       p1(4)
      /
    p1(3)
      |
(n==1||n==2)?

```

```
|                          |
|                          |
|   p1(3)                  |
|   p1(4) -> p1(3)         |
|   p1(5) -> p1(4)         |

```

Eficácia x Eficiência

```
int p1(int n)
{
    if (n == 1 || n == 2)
        return 1;
    else
        return p1(n - 1) + p1(n - 2);
        //      ___________ p1(3) chama p1(2)
}

```

```
          _______ p1(5)
         /
      p1(4)
     /
   p1(3)
  /
p1(2)

```

```
|                          |
|    p1(2)                 |
|    p1(3) -> p1(2)        |
|    p1(4) -> p1(3)        |
|    p1(5) -> p1(4)        |

```

Eficácia x Eficiência

```
int p1(int n)
{
    if (n == 1 || n == 2) //<- p1(2) verifica
        return 1; //<- p1(2) devolve
    else
        return p1(n - 1) + p1(n - 2);
}

```

```
              _______ p1(5)
             /
        p1(4)
          /
    p1(3)
      /
p1(2)
   |
(n==1||n==2)?

```

```
|                                    |
|    p1(2) ->    1                   |
|    p1(3) -> p1(2)                  |
|    p1(4) -> p1(3)                  |
|    p1(5) -> p1(4)                  |

```

Eficácia x Eficiência

```
int p1(int n)
{
    if (n == 1 || n == 2)
        return 1;
    else
        return p1(n - 1) + p1(n - 2);
        //                ____________ p1(3) chama p1(1)
}

```

```
          _______ p1(5)
         /
       p1(4)
      /
   p1(3)
  /     \
  1      p1(1)

```

```
|                              |
|    p1(1)                     |
|    p1(3) -> 1 + p1(1)        |
|    p1(4) -> p1(3)            |
|    p1(5) -> p1(4)            |

```

Eficácia x Eficiência

```
    int p1(int n)
    {
        if (n == 1 || n == 2) //<- p1(1) verifica
            return 1; //<- p1(1) devolve
        else
            return p1(n - 1) + p1(n - 2);
    }

```

```
            _______ p1(5)
           /
        p1(4)
       /
    p1(3)
   /     \
   1      p1(1)
           |
    (n==1||n==2)?

```

```
|                              |
|    p1(1) ->            1     |
|    p1(3) ->     1  +  p1(1)  |
|    p1(4) -> p1(3)            |
|    p1(5) -> p1(4)            |

```

Eficácia x Eficiência

```
    int p1(int n)
    {
        if (n == 1 || n == 2)
            return 1;
        else
            return p1(n - 1) + p1(n - 2); //<- p1(3) devolve
    }
```

```
            _______ p1(5)
           /
         p1(4)
        /
      p1(3)
     /    \
    1      1
```

```
|                                   |
|                                   |
|   p1(3) ->   1  +    1            |
|   p1(4) -> p1(3)                  |
|   p1(5) -> p1(4)                  |
```

Eficácia x Eficiência

```
    int p1(int n)
    {
        if (n == 1 || n == 2)
            return 1;
        else
            return p1(n - 1) + p1(n - 2);
            //                 ______ p1(4) chama p1(2)
    }

```

```
            _______ p1(5)
           /
      p1(4)
     /      \
    2        p1(2)

```

```
|                               |
|                               |
|   p1(2)                       |
|   p1(4) ->   2  +  p1(2)      |
|   p1(5) -> p1(4)              |

```

Eficácia x Eficiência

```c
    int p1(int n)
    {
        if (n == 1 || n == 2) //<- p1(2) verifica
            return 1; //<- p1(2) devolve
        else
            return p1(n - 1) + p1(n - 2);
    }

```

```
         _______ p1(5)
        /
      p1(4)
     /     \
    2      p1(2)
             |
      (n==1||n==2)?

```

```
|                                  |
|                                  |
|    p1(2) ->            1         |
|    p1(4) ->     2  +  p1(2)      |
|    p1(5) -> p1(4)                |

```

Eficácia x Eficiência

```
    int p1(int n)
    {
        if (n == 1 || n == 2)
            return 1;
        else
            return p1(n - 1) + p1(n - 2); //<- p1(4) devolve
    }

```

```
         _______ p1(5)
        /
      p1(4)
     /     \
    2       1

```

```
|                                 |
|                                 |
|                                 |
|    p1(4) ->   2  +   1          |
|    p1(5) -> p1(4)               |

```

Eficácia x Eficiência

```
int p1(int n)
{
    if (n == 1 || n == 2)
        return 1;
    else
        return p1(n - 1) + p1(n - 2);
        //                  ———————— p1(5) chama p1(3)
}

```

```
      _______ p1(5) _______
     /                     \
    3                       p1(3)

```

```
|                              |
|                              |
|                              |
|   p1(3)                      |
|   p1(5) -> 3 + p1(3)         |

```

Eficácia x Eficiência

```
    int p1(int n)
    {
        if (n == 1 || n == 2) //<- p1(3) verifica
            return 1;
        else
            return p1(n - 1) + p1(n - 2);
    }

```

```
    ______ p1(5) ______
   /                   \
   3                   p1(3)
                         |
                    (n==1||n==2)?

```

```
|                                      |
|                                      |
|                                      |
|    p1(3)                             |
|    p1(5) ->    3  +  p1(3)           |

```

Eficácia x Eficiência

```
int p1(int n)
{
    if (n == 1 || n == 2)
        return 1;
    else
        return p1(n - 1) + p1(n - 2);
        //      ________  p1(3) chama p1(2)
}

```

```
      _______ p1(5) _______
     /                     \
     3                      p1(3)
                           /
                        p1(2)

```

```
|                                |
|                                |
|    p1(2)                       |
|    p1(3) -> p1(2)              |
|    p1(5) ->    3  +  p1(3)     |

```

Eficácia x Eficiência

```
    int p1(int n)
    {
        if (n == 1 || n == 2) //<- p1(2) verifica
            return 1; //<- p1(2) devolve
        else
            return p1(n - 1) + p1(n - 2);
    }

```

```
      ______ p1(5) ______
     /                   \
    3                    p1(3)
                        /
                     p1(2)
                       |
                 (n==1||n==2)?

```

```
|                              |
|                              |
|   p1(2) ->   1               |
|   p1(3) -> p1(2)             |
|   p1(5) ->   3  +  p1(3)     |

```

Eficácia x Eficiência

```c
int p1(int n)
{
    if (n == 1 || n == 2)
        return 1;
    else
        return p1(n - 1) + p1(n - 2);
        //                 ________ p1(3) chama p1(1)
}
```

```
        _______ p1(5) _______
       /                     \
      3                      p1(3)
                             /   \
                            1    p1(1)
```

```
|                                  |
|                                  |
|    p1(1)                         |
|    p1(3) ->    1  +  p1(1)       |
|    p1(5) ->    3  +  p1(3)       |
```

Eficácia x Eficiência

```
    int p1(int n)
    {
        if (n == 1 || n == 2) //<- p1(1) verifica
            return 1; //<- p1(1) devolve
        else
            return p1(n - 1) + p1(n - 2);
    }

```

```
      _______ p1(5) _______
     /                     \
    3                     p1(3)
                         /     \
                        1      p1(1)
                                 |
                        (n==1||n==2)?

```

```
|                                |
|                                |
|   p1(1) ->              1      |
|   p1(3) ->      1  +  p1(1)    |
|   p1(5) ->      3  +  p1(3)    |

```

Eficácia x Eficiência

```
    int p1(int n)
    {
        if (n == 1 || n == 2)
            return 1;
        else
            return p1(n - 1) + p1(n - 2); //<- p1(3) devolve
    }

```

```
    ______ p1(5) ______
   /                   \
  3                    p1(3)
                      /     \
                     1       1

```

```
|                                  |
|                                  |
|                                  |
|   p1(3) ->   1  +     1          |
|   p1(5) ->   3  +   p1(3)        |

```

Eficácia x Eficiência

```c
int p1(int n)
{
    if (n == 1 || n == 2)
        return 1;
    else
        return p1(n - 1) + p1(n - 2); //<- p1(5) devolve
}

```

```
      ______ p1(5) ______
     /                   \
    3                     2

```

```
|                           |
|                           |
|                           |
|                           |
|   p1(5) ->   3  +    2    |

```

Eficácia x Eficiência

```c
#include <stdio.h>

int p1(int n)
{
    if (n == 1 || n == 2)
        return 1;
    else
        return p1(n - 1) + p1(n - 2);
}

int main(){

    printf("%d\n", p1(5)); //5

    return 0;
}

```

Eficácia x Eficiência

```

                     _____ p1(5) _____
                    /                 \
                  p1(4)              p1(3)
                /       \          /       \
            p1(3)      p1(2)     p1(2)    p1(1)
            /   \        |         |        |
         p1(2) p1(1)     1         1        1
          |      |
          1      1

```

Eficácia x Eficiência

```
int p2(int n) //<- chamada da funcao
{
    int i, f1 = 1, f2 = 1, soma;
    for (i=3; i<=n; i=i+1)
    {
        soma = f1 + f2;
        f1 = f2;
        f2 = soma;
    }
    return f2;
}

p2(5)
```

Eficácia x Eficiência

```
int p2(int n)
{
    int i, f1 = 1, f2 = 1, soma; //<-
    for (i=3; i<=n; i=i+1)
    {
        soma = f1 + f2;
        f1 = f2;
        f2 = soma;
    }
    return f2;
}

p2(5)
  |____ soma=?, f1=1, f2=1
```

Eficácia x Eficiência

```
int p2(int n)
{
    int i, f1 = 1, f2 = 1, soma;
    for (i=3; i<=n; i=i+1)
    {
        soma = f1 + f2;
        f1 = f2;
        f2 = soma;
    }
    return f2;
}

p2(5)
  |____ soma=?, f1=1, f2=1
  |____ for


```

Eficácia x Eficiência

```
int p2(int n)
{
    int i, f1 = 1, f2 = 1, soma;
    for (i=3; i<=n; i=i+1)
    {
        soma = f1 + f2;
        f1 = f2;
        f2 = soma;
    }
    return f2;
}

p2(5)
  |_____ soma=?, f1=1, f2=1
  |_____ for
     |    |_____ i=3 -> soma = 1+1 = 2, f1 = 1, f2 = 2
     |_____________________________________________|

```

Eficácia x Eficiência

```
int p2(int n)
{
    int i, f1 = 1, f2 = 1, soma;
    for (i=3; i<=n; i=i+1)
    {
        soma = f1 + f2;
        f1 = f2;
        f2 = soma;
    }
    return f2;
}

p2(5)
  |_____ soma=?, f1=1, f2=1
  |_____ for
      |   |_____ i=3 -> soma = 1+1 = 2, f1 = 1, f2 = 2
      |   |_____ i=4 -> soma = 1+2 = 3, f1 = 2, f2 = 3
      |________________________________________________________|
```

Eficácia x Eficiência

```
int p2(int n)
{
    int i, f1 = 1, f2 = 1, soma;
    for (i=3; i<=n; i=i+1)
    {
        soma = f1 + f2;
        f1 = f2;
        f2 = soma;
    }
    return f2;
}

p2(5)
   |_____ soma=?, f1=1, f2=1
   |_____ for
       |   |_____ i=3 -> soma = 1+1 = 2, f1 = 1, f2 = 2
       |   |_____ i=4 -> soma = 1+2 = 3, f1 = 2, f2 = 3
       |   |_____ i=5 -> soma = 2+3 = 5, f1 = 3, f2 = 5
       |__________________________________________________|
```

Eficácia x Eficiência

```
int p2(int n)
{
    int i, f1 = 1, f2 = 1, soma;
    for (i=3; i<=n; i=i+1)
    {
        soma = f1 + f2;
        f1 = f2;
        f2 = soma;
    }
    return f2;
}

p2(5)
  |_____ soma=?, f1=1, f2=1
  |_____ for
  |      |_____ i=3 -> soma = 1+1 = 2, f1 = 1, f2 = 2
  |      |_____ i=4 -> soma = 1+2 = 3, f1 = 2, f2 = 3
  |      |_____ i=5 -> soma = 2+3 = 5, f1 = 3, f2 = 5
  |_____ return 5
```

Eficácia x Eficiência

Eficácia

Faz o que deveria fazer

Eficiência

Faz bem o que deveria fazer

Como calcular a eficiência do algoritmo?

Tempo real de máquina como medida?

```
rysh@mundodalua:~/Documents/FGA$ time ./a.out

real	0m1,301s
user	0m1,297s
sys	0m0,004s
```

```
rysh@mundodalua:~/Documents/FGA$ time ./a.out

real	0m18,300s
user	0m1,431s
sys	0m0,000s
```

Figura: Máquina com *load* baixo e alto, respectivamente

- real: tempo total para execução (contando todos os processos em execução)
- user: tempo exclusivo do processo executado
- sys: tempo que do sistema dedicado a execução do processo
- Problema: são dependentes de fatores como a linguagem, hardware e/ou processos em execução
- Precisamos de uma medida independente da máquina

Como calcular a eficiência do algoritmo?

Tempo real de máquina como medida?

```
rysh@mundodalua:~/Documents/FGA$ time ./a.out

real    0m1,301s
user    0m1,297s
sys     0m0,004s
```

```
rysh@mundodalua:~/Documents/FGA$ time ./a.out

real    0m18,300s
user    0m1,431s
sys     0m0,000s
```

Figura: Máquina com *load* baixo e alto, respectivamente

- real: tempo total para execução (contando todos os processos em execução)
- user: tempo exclusivo do processo executado
- sys: tempo que do sistema dedicado a execução do processo

- Problema: são dependentes de fatores como a linguagem, hardware e/ou processos em execução
- Precisamos de uma medida independente da máquina

Como calcular a eficiência do algoritmo?

Tempo real de máquina como medida?

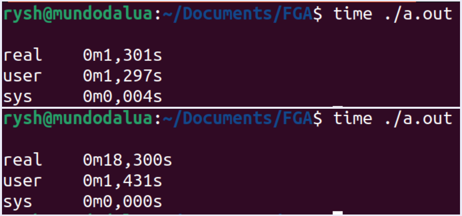


Figura: Máquina com *load* baixo e alto, respectivamente

- real: tempo total para execução (contando todos os processos em execução)
- user: tempo exclusivo do processo executado
- sys: tempo que do sistema dedicado a execução do processo

- Problema: são dependentes de fatores como a linguagem, hardware e/ou processos em execução
- Precisamos de uma medida independente da máquina

Como calcular a eficiência do algoritmo?

Contar quantas instruções são executadas?

- Analisar somente as operações **relevantes**
- Observando a **tendência do comportamento** a medida que a **entrada cresce**
- Fazendo o **cálculo aproximado** dos custos das operações

Como calcular a eficiência do algoritmo?

Contar quantas instruções são executadas?

- Analisar somente as operações **relevantes**
- Observando a **tendência do comportamento** a medida que a **entrada** cresce
- Fazendo o **cálculo aproximado** dos custos das operações

Como calcular a eficiência do algoritmo?

Contar quantas instruções são executadas?

- Analisar somente as operações **relevantes**
- Observando a **tendência do comportamento** a medida que a **entrada cresce**
- Fazendo o **cálculo aproximado** dos custos das operações

Como calcular a eficiência do algoritmo?

Contar quantas instruções são executadas?

- Analisar somente as operações **relevantes**
- Observando a **tendência do comportamento** a medida que a **entrada cresce**
- Fazendo o **cálculo aproximado** dos custos das operações
  - Definindo a complexidade dos algoritmos
  - Complexidade de um algoritmo particular
  - Complexidade de uma classe de algoritmos

Como calcular a eficiência do algoritmo?

Contar quantas instruções são executadas?

- Analisar somente as operações **relevantes**
- Observando a **tendência do comportamento** a medida que a **entrada cresce**
- Fazendo o **cálculo aproximado** dos custos das operações
  - Definindo a **complexidade dos algoritmos**
  - Complexidade de um algoritmo particular
  - Complexidade de uma classe de algoritmos

Como calcular a eficiência do algoritmo?

Contar quantas instruções são executadas?

- Analisar somente as operações **relevantes**
- Observando a **tendência do comportamento** a medida que a **entrada cresce**
- Fazendo o **cálculo aproximado** dos custos das operações
  - Definindo a **complexidade dos algoritmos**
  - **Complexidade de um algoritmo particular**
    - Busca-se o custo de um algoritmo para resolver um problema específico
    - Podemos observar quantas repetições cada trecho executa e quanta memória é gasta
  - **Complexidade de uma classe de algoritmos**

Como calcular a eficiência do algoritmo?

Contar quantas instruções são executadas?

- Analisar somente as operações **relevantes**
- Observando a **tendência do comportamento** a medida que a **entrada cresce**
- Fazendo o **cálculo aproximado** dos custos das operações
  - Definindo a **complexidade dos algoritmos**
  - **Complexidade de um algoritmo particular**
    - Busca-se o custo de um algoritmo para resolver um problema específico
    - Podemos observar quantas repetições cada trecho executa e quanta memória é gasta
  - Complexidade de uma classe de algoritmos

Como calcular a eficiência do algoritmo?

Contar quantas instruções são executadas?

- Analisar somente as operações **relevantes**
- Observando a **tendência do comportamento** a medida que a **entrada cresce**
- Fazendo o **cálculo aproximado** dos custos das operações
  - Definindo a **complexidade dos algoritmos**
  - **Complexidade de um algoritmo particular**
    - Busca-se o custo de um algoritmo para resolver um problema específico
    - Podemos observar quantas repetições cada trecho executa e quanta memória é gasta
  - **Complexidade de uma classe de algoritmos**

Como calcular a eficiência do algoritmo?

Contar quantas instruções são executadas?

- Analisar somente as operações **relevantes**
- Observando a **tendência do comportamento** a medida que a **entrada cresce**
- Fazendo o **cálculo aproximado** dos custos das operações
  - Definindo a **complexidade dos algoritmos**
  - **Complexidade de um algoritmo particular**
    - Busca-se o custo de um algoritmo para resolver um problema específico
    - Podemos observar quantas repetições cada trecho executa e quanta memória é gasta
  - **Complexidade de uma classe de algoritmos**
    - Busca-se o menor custo para resolver um **problema particular**
    - Analisa-se uma **família de algoritmos** que resolvem um problema específico
    - Exemplo: nos algoritmos de ordenação, qual o número mínimo possível de comparações para ordenar n números

Como calcular a eficiência do algoritmo?

Contar quantas instruções são executadas?

- Analisar somente as operações **relevantes**
- Observando a **tendência do comportamento** a medida que a **entrada cresce**
- Fazendo o **cálculo aproximado** dos custos das operações
  - Definindo a **complexidade dos algoritmos**
  - **Complexidade de um algoritmo particular**
    - Busca-se o custo de um algoritmo para resolver um problema específico
    - Podemos observar quantas repetições cada trecho executa e quanta memória é gasta
  - **Complexidade de uma classe de algoritmos**
    - Busca-se o menor custo para resolver um **problema particular**
    - Analisa-se uma **família de algoritmos** que resolvem um problema específico
    - Exemplo: nos algoritmos de ordenação, qual o número mínimo possível de comparações para ordenar n números

Como calcular a eficiência do algoritmo?

Contar quantas instruções são executadas?

- Analisar somente as operações **relevantes**
- Observando a **tendência do comportamento** a medida que a **entrada cresce**
- Fazendo o **cálculo aproximado** dos custos das operações
  - Definindo a **complexidade dos algoritmos**
  - **Complexidade de um algoritmo particular**
    - Busca-se o custo de um algoritmo para resolver um problema específico
    - Podemos observar quantas repetições cada trecho executa e quanta memória é gasta
  - **Complexidade de uma classe de algoritmos**
    - Busca-se o menor custo para resolver um **problema particular**
    - Analisa-se uma **família de algoritmos** que resolvem um problema específico

      Exemplo: nos algoritmos de ordenação, qual o número mínimo possível de comparações para ordenar n números

Como calcular a eficiência do algoritmo?

Contar quantas instruções são executadas?

- Analisar somente as operações **relevantes**
- Observando a **tendência do comportamento** a medida que a **entrada cresce**
- Fazendo o **cálculo aproximado** dos custos das operações
  - Definindo a **complexidade dos algoritmos**
  - **Complexidade de um algoritmo particular**
    - Busca-se o custo de um algoritmo para resolver um problema específico
    - Podemos observar quantas repetições cada trecho executa e quanta memória é gasta
  - **Complexidade de uma classe de algoritmos**
    - Busca-se o menor custo para resolver um **problema particular**
    - Analisa-se uma **família de algoritmos** que resolvem um problema específico
    - Exemplo: nos algoritmos de ordenação, qual o número mínimo possível de comparações para ordenar n números

Complexidade ou Função de Custo *f(n)*

Analisamos

Tendência do comportamento do algoritmo a medida que o tamanho da instância aumenta.

Tamanho da instância do problema n

- Problemas em ordenação de vetores: tamanho do vetor
- Problemas de pesquisa em memória: número de registros
- Busca em texto: número de caracteres ou padrão de busca
- etc.

Cenários (dependentes da entrada)

- **Melhor caso**: menor tempo de execução
- **Caso médio**: média dos tempos de execução
- **Pior caso**: maior tempo de execução

Complexidade ou Função de Custo *f(n)*

Analisamos

Tendência do comportamento do algoritmo a medida que o tamanho da instância aumenta.

Tamanho da instância do problema n

- Problemas em ordenação de vetores: tamanho do vetor
- Problemas de pesquisa em memória: número de registros
- Busca em texto: número de caracteres ou padrão de busca
- etc.

Cenários (dependentes da entrada)

- **Melhor caso**: menor tempo de execução
- **Caso médio**: média dos tempos de execução
- **Pior caso**: maior tempo de execução

Complexidade ou Função de Custo *f(n)*

Analisamos

Tendência do comportamento do algoritmo a medida que o tamanho da instância aumenta.

Tamanho da instância do problema *n*

- Problemas em ordenação de vetores: tamanho do vetor
- Problemas de pesquisa em memória: número de registros
- Busca em texto: número de caracteres ou padrão de busca
- etc.

Cenários (dependentes da entrada)

- **Melhor caso**: menor tempo de execução
- **Caso médio**: média dos tempos de execução
- **Pior caso**: maior tempo de execução

Complexidade ou Função de Custo *f(n)* - Exemplo

Busca sequencial em vetor

1. **Caso 1:**

```
int v[] = {23, 22, 98, 49, 21, 5, 3, 456, 16, 83, 50, 97};
int x = 23;
procura(x, v);
```

- Melhor caso $f(n) = 1$: procurado é o primeiro consultado

2. **Caso 2:**

```
int v[] = {23, 22, 98, 49, 21, 5, 3, 456, 16, 83, 50, 97};
int x = 97;
procura(x, v);
```

- Pior caso $f(n) = n$: procurado é o último consultado

3. **Caso 3:**

```
int v[] = {23, 22, 98, 49, 21, 5, 3,456, 16, 83, 50, 97};
int x = 49;
procura(x, v);
```

- Caso médio $f(n) = (n+1)/2$: examina cerca de metade dos registros

Complexidade ou Função de Custo *f(n)* - Exemplo

Busca sequencial em vetor

1. **Caso 1:**

```c
int v[] = {23, 22, 98, 49, 21, 5, 3, 456, 16, 83, 50, 97};
int x = 23;
procura(x, v);
```

- **Melhor caso $f(n) = 1$: procurado é o primeiro consultado**

2. **Caso 2:**

```c
int v[] = {23, 22, 98, 49, 21, 5, 3, 456, 16, 83, 50, 97};
int x = 97;
procura(x, v);
```

- **Pior caso $f(n) = n$: procurado é o último consultado**

3. **Caso 3:**

```c
int v[] = {23, 22, 98, 49, 21, 5, 3,456, 16, 83, 50, 97};
int x = 49;
procura(x, v);
```

- **Caso médio $f(n) = (n+1)/2$: examina cerca de metade dos registros**

Complexidade ou Função de Custo *f(n)* - Exemplo

Busca sequencial em vetor

1. **Melhor caso** $f(n) = 1$: procurado é o primeiro consultado
2. **Pior caso** $f(n) = n$: procurado é o último consultado
3. **Caso médio** $f(n) = (n+1)/2$: examina aproximadamente metade

```
    int v[] = {23, 22, 98, 49, 21, 5, 3,456, 16, 83, 50, 97};
    int x = 49;
    procura(x, v);
```

- p_i a probabilidade de encontrar o elemento na posição i
- Todos tem o mesmo $p_i = 1/n$, $1 \leq i \leq n$
- f(n) = soma do número de comparações x probabilidade

$$
\begin{aligned}
f(n) &= 1(\frac{1}{n}) + 2(\frac{1}{n}) + \ldots + n(\frac{1}{n}) \\
&= \frac{1}{n}(1 + 2 + \ldots + n) \\
&= \frac{1}{n}(\frac{n(n+1)}{2}) = \frac{(n+1)}{2}
\end{aligned}
$$

Valores comuns da função de custo: $f(n) = 1$

Complexidade constante (tempo constante)

- Independem do tamanho de n
- As instruções são executadas um número fixo de vezes

```
void
    int
    if
```

Valores comuns da função de custo: $f(n) = 1$

Complexidade constante (tempo constante)

- Independem do tamanho de n
- As instruções são executadas um número fixo de vezes

```
void
    int
    if
```

Valores comuns da função de custo: $f(n) = 1$

Complexidade constante (tempo constante)

- Independem do tamanho de n
- As instruções são executadas um número fixo de vezes
  - Atribuições
  - Comparações (relacionais)
  - Operações aritmética
  - Acessos a memória
  - Comando de decisão

```
void f1(){
    int i = 19;
    if(i==0){
        i++;
    }
}
```

Valores comuns da função de custo: $f(n) = 1$

Complexidade constante (tempo constante)

- Independem do tamanho de n
- As instruções são executadas um número fixo de vezes
  - Atribuições
  - Comparações (relacionais)
  - Operações aritmética
  - Acessos a memória
  - Comando de decisão

```
void f1(){
    int i = 19;
    if(i==0){
        i++;
    }
}
```

Valores comuns da função de custo: $f(n) = 1$

Complexidade constante (tempo constante)

- Independem do tamanho de n
- As instruções são executadas um número fixo de vezes
  - Atribuições
  - Comparações (relacionais)
  - Operações aritmética
  - Acessos a memória
  - Comando de decisão

```
void f1(){
    int i = 19;
    if(i==0){
        i++;
    }
}
```

Valores comuns da função de custo: $f(n) = 1$

Complexidade constante (tempo constante)

- Independem do tamanho de n
- As instruções são executadas um número fixo de vezes
  - Atribuições
  - Comparações (relacionais)
  - Operações aritmética
  - Acessos a memória
  - Comando de decisão

```
void f1(){
    int i = 19;
    if(i==0){
        i++;
    }
}
```

Valores comuns da função de custo: $f(n) = 1$

Complexidade constante (tempo constante)

- Independem do tamanho de n
- As instruções são executadas um número fixo de vezes
    - Atribuições
    - Comparações (relacionais)
    - Operações aritmética
    - Acessos a memória
    - Comando de decisão

```
void f1(){
    int i = 19;
    if(i==0){
        i++;
    }
}
```

Valores comuns da função de custo: $f(n) = 1$

Complexidade constante (tempo constante)

- Independem do tamanho de n
- As instruções são executadas um número fixo de vezes
  - Atribuições
  - Comparações (relacionais)
  - Operações aritmética
  - Acessos a memória
  - Comando de decisão

```

    void f1(){
        int i = 19;
        if(i==0){
            i++;
        }
    }

```

Valores comuns da função de custo $f(n) = n$

Complexidade linear

- Realiza-se um pequeno trabalho sobre cada elemento da entrada
- n entradas, n saídas
- Anel ou laço

```
int pesquisa(int x, int n, int v[])
{
    for (int i=0; i<n && v[i]!=x; i=i+1);
    return i;
}
```

- Outro exemplo: ??

Valores comuns da função de custo $f(n) = n$

Complexidade linear

- Realiza-se um pequeno trabalho sobre cada elemento da entrada
- *n* entradas, *n* saídas
- Anel ou laço

```
int pesquisa(int x, int n, int v[])
{
    for (int i=0; i<n && v[i]!=x; i=i+1);
    return i;
}
```

- Outro exemplo: ??

Valores comuns da função de custo $f(n) = n$

Complexidade linear

- Realiza-se um pequeno trabalho sobre cada elemento da entrada
- n entradas, n saídas
- Anel ou laço
  - (Tempos comandos internos + avaliação da condição) x número de iterações

```c

int pesquisa(int x, int n, int v[])
{
    for (int i=0; i<n && v[i]!=x; i=i+1);
    return i;
}

```

- Outro exemplo: ??

Valores comuns da função de custo $f(n) = n$

Complexidade linear

- Realiza-se um pequeno trabalho sobre cada elemento da entrada
- n entradas, n saídas
- Anel ou laço
  - (Tempos comandos internos + avaliação da condição) x número de iterações

```

int pesquisa(int x, int n, int v[])
{
    for (int i=0; i<n && v[i]!=x; i=i+1);
    return i;
}

```

- Outro exemplo: ??

Valores comuns da função de custo $f(n) = n$

Complexidade linear

- Realiza-se um pequeno trabalho sobre cada elemento da entrada
- n entradas, n saídas
- Anel ou laço
  - (Tempos comandos internos + avaliação da condição) x número de iterações

```
int pesquisa(int x, int n, int v[])
{
    for (int i=0; i<n && v[i]!=x; i=i+1);
    return i;
}
```

- Outro exemplo: ??

Valores comuns da função de custo $f(n) = n$

Complexidade linear

```c
int p2(int n)
{
    int i, f1 = 1, f2 = 1, soma;
    for (i=3; i<=n; i=i+1)
    {
        soma = f1 + f2;
        f1 = f2;
        f2 = soma;
    }
    return f2;
}

p2(5)
  |_____ soma=?, f1=1, f2=1
  |_____ for
  |      |_____ i=3 -> soma = 1+1 = 2, f1 = 1, f2 = 2
  |      |_____ i=4 -> soma = 1+2 = 3, f1 = 2, f2 = 3
  |      |_____ i=5 -> soma = 2+3 = 5, f1 = 3, f2 = 5
  |_____ return 5
```

Valores comuns da função de custo $f(n) = n^2$

Complexidade quadrática

- Caracterizam-se pelo processamento dos dados em pares, muitas vezes com vários aninhamentos
- Se n dobra, o tempo quadruplica
- Úteis para problemas pequenos

```
//versao quadradica != ordenacao seja quadratica (algoritmo
 de quicksort)
void ordenacao_insercao(int n, int v[]){
    int i, j, x;

    for (i = 1; i < n; i++) {
        x = v[i];
        for (j = i-1; j >=0 && v[j] > x; j--)
            v[j+1] = v[j];
        v[j+1] = x;
    }
}
```

Valores comuns da função de custo $f(n) = n^2$

Complexidade quadrática

- Caracterizam-se pelo processamento dos dados em pares, muitas vezes com vários aninhamentos
- Se n dobra, o tempo quadruplica
- Úteis para problemas pequenos

```c
//versao quadradica != ordenacao seja quadratica (algoritmo de quicksort)
void ordenacao_insercao(int n, int v[]){
    int i, j, x;

    for (i = 1; i < n; i++) {
        x = v[i];
        for (j = i-1; j >=0 && v[j] > x; j--)
            v[j+1] = v[j];
        v[j+1] = x;
    }
}
```

Valores comuns da função de custo $f(n) = n^2$

Complexidade quadrática

- Caracterizam-se pelo processamento dos dados em pares, muitas vezes com vários aninhamentos
- Se n dobra, o tempo quadruplica
- Úteis para problemas pequenos

```
//versao quadradica != ordenacao seja quadratica (algoritmo de quicksort)
void ordenacao_insercao(int n, int v[]){
    int i, j, x;

    for (i = 1; i < n; i++) {
        x = v[i];
        for (j = i-1; j >=0 && v[j] > x; j--)
            v[j+1] = v[j];
        v[j+1] = x;
    }
}
```

Valores comuns da função de custo $f(n) = n^2$

Complexidade quadrática

- Caracterizam-se pelo processamento dos dados em pares, muitas vezes com vários aninhamentos
- Se n dobra, o tempo quadruplica
- Úteis para problemas pequenos

```
//versao quadradica != ordenacao seja quadratica (algoritmo
 de quicksort)
void ordenacao_insercao(int n, int v[]){
    int i, j, x;

    for (i = 1; i < n; i++) {
        x = v[i];
        for (j = i-1; j >=0 && v[j] > x; j--)
            v[j+1] = v[j];
        v[j+1] = x;
    }
}
```

Valores comuns da função de custo $f(n) = n^3$

Complexidade cúbica

- Eficientes apenas para pequenos problemas.

```
//versao cubica != multiplicacao seja cubica (algoritmo de
    Strassen)
void multiplica_matrizes(int A[3][2], int B[2][3], int C[3][3])
{
    for (int l = 0; l < 3; l++) {
        for (int c = 0; c < 3; c++) {
            C[l][c] = 0;
            for (int i = 0; i < 2; i++) {
                C[l][c] += A[l][i] * B[i][c];
            }
        }
    }
}

```

Valores comuns da função de custo $f(n) = 2^n$

Complexidade exponencial

- Resultantes de problemas resolvidos por força bruta (verificar todas as possibilidades)
- Quando n é 20, o tempo é cerca de 1 milhão
- Exemplo: enumerar as linhas de uma tabela verdade
- Complexidade fatorial - $f(n) = n!$: pior que a exponencial
- Exemplo: ???

Valores comuns da função de custo $f(n) = 2^n$

Complexidade exponencial

```
int p1(int n){
    if (n == 1 || n == 2)
        return 1;
    else
        return p1(n - 1) + p1(n - 2);
}
```

```

2^0                 _____ p1(5) _____
                   /                  \
2^1             p1(4)                 p1(3)
               /     \               /     \
2^2        p1(3)     p1(2)       p1(2)     p1(1)
           /   \       |           |         |
2^3    p1(2) p1(1)     1           1         1
         |     |
         1     1

```

Valores comuns da função de custo: $f(n) = \log n$

Complexidade logarítmica

- Função logarítmica é a inversa da função exponencial
- Um pouco mais lento a medida que n cresce
- Tempo típico de algoritmos que divide o problema em problemas menores
- Não importa a base de log pois a grandeza do resultado não tem alterações significativas

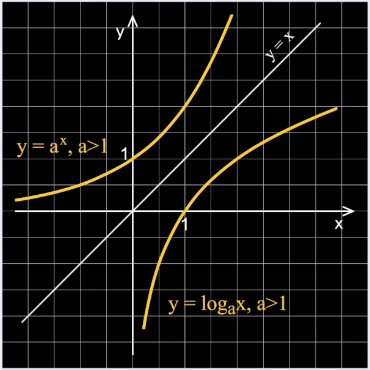
```
int                int      int         int         int
     int

     if                        return
     if                     return
     else  if
          return
     else
          return
```

Valores comuns da função de custo: $f(n) = \log n$

Complexidade logarítmica

- Função logarítmica é a inversa da função exponencial



- Um pouco mais lento a medida que n cresce
- Tempo típico de algoritmos que divide o problema em problemas menores
- Não importa a base de log pois a grandeza do resultado não tem alterações significativas

Valores comuns da função de custo: $f(n) = \log n$

Complexidade logarítmica

- Função logarítmica é a inversa da função exponencial
- Um pouco mais lento a medida que n cresce
- Tempo típico de algoritmos que divide o problema em problemas menores
- Não importa a base de log pois a grandeza do resultado não tem alterações significativas

Valores comuns da função de custo: $f(n) = \log n$

Complexidade logarítmica

- Função logarítmica é a inversa da função exponencial
- Um pouco mais lento a medida que n cresce
- Tempo típico de algoritmos que divide o problema em problemas menores
- Não importa a base de log pois a grandeza do resultado não tem alterações significativas

Valores comuns da função de custo: $f(n) = \log n$

Complexidade logarítmica

- Função logarítmica é a inversa da função exponencial
- Um pouco mais lento a medida que n cresce
- Tempo típico de algoritmos que divide o problema em problemas menores
- Não importa a base de log pois a grandeza do resultado não tem alterações significativas
  - Sendo $n = 1000$, $\log_2 n \approx 10$ ($\log_{10} n = 3$)
  - Sendo $n = 1000000$, $\log_2 n \approx 20$ ($\log_{10} n = 6$)

```
//vetor ordenado
int pesquisa (int x, int v[], int esq, int dir){
    int meio = (esq + dir)/2;

    if (v[meio] == x) return meio;
    if (esq >= dir) return -1;
    else if (v[meio] < x)
        return pesquisa(x, v, meio+1, dir);
    else
        return pesquisa(x, v, esq, meio-1);
}
```

Valores comuns da função de custo: $f(n) = \log n$

Complexidade logarítmica

- Função logarítmica é a inversa da função exponencial
- Um pouco mais lento a medida que n cresce
- Tempo típico de algoritmos que divide o problema em problemas menores
- Não importa a base de log pois a grandeza do resultado não tem alterações significativas
  - Sendo $n = 1000$, $\log_2 n \approx 10$ ($\log_{10} n = 3$)
  - Sendo $n = 1000000$, $\log_2 n \approx 20$ ($\log_{10} n = 6$)

```
//vetor ordenado
int pesquisa (int x, int v[], int esq, int dir){
    int meio = (esq + dir)/2;

    if (v[meio] == x) return meio;
    if (esq >= dir) return -1;
    else if (v[meio] < x)
        return pesquisa(x, v, meio+1, dir);
    else
        return pesquisa(x, v, esq, meio-1);
}
```

Valores comuns da função de custo: $f(n) = \log n$

Complexidade logarítmica

- Função logarítmica é a inversa da função exponencial
- Um pouco mais lento a medida que n cresce
- Tempo típico de algoritmos que divide o problema em problemas menores
- Não importa a base de log pois a grandeza do resultado não tem alterações significativas
  - Sendo $n = 1000$, $\log_2 n \approx 10$ ($\log_{10} n = 3$)
  - Sendo $n = 1000000$, $\log_2 n \approx 20$ ($\log_{10} n = 6$)

```
//vetor ordenado
int pesquisa (int x, int v[], int esq, int dir){
    int meio = (esq + dir)/2;

    if (v[meio] == x) return meio;
    if (esq >= dir) return -1;
    else if (v[meio] < x)
        return pesquisa(x, v, meio+1, dir);
    else
        return pesquisa(x, v, esq, meio-1);
}
```

Valores comuns da função de custo $f(n) = n \log n$

Complexidade "linearítmica(?)"

- Caracterizam-se por resolver um problema quebrando em **problemas menores**, resolvendo cada um deles independentemente e **depois juntando as soluções**.
- Divisão e conquista

```
divisao_conquista(d) {
    se simples
        calculo_direto(d)
    senao
        combina(divisao_conquista(decompoe(d)))
}
```

Valores comuns da função de custo $f(n) = n \log n$

Complexidade "linearítmica(?)"

- Caracterizam-se por resolver um problema quebrando em **problemas menores**, resolvendo cada um deles independentemente e **depois juntando as soluções**.
- Divisão e conquista

```
divisao_conquista(d) {
    se simples
        calculo_direto(d)
    senao
        combina(divisao_conquista(decompoe(d)))
}
```

Valores comuns da função de custo $f(n) = n \log n$

Complexidade "linearítmica(?)"

- Caracterizam-se por resolver um problema quebrando em **problemas menores**, resolvendo cada um deles independentemente e **depois juntando as soluções**.
- Divisão e conquista

```
    divisao_conquista(d) {
        se simples
            calculo_direto(d)
        senao
            combina(divisao_conquista(decompoe(d))
    }
```

Valores comuns da função de custo $f(n) = n \log n$

Complexidade “linearítmica(?)”

- Caracterizam-se por resolver um problema quebrando em **problemas menores**, resolvendo cada um deles independentemente e **depois juntando as soluções**.
- Divisão e conquista

```
    void intercala (int p, int q, int r, int v[]) {...}

    void mergesort (int p, int r, int v[])
    {
        if (p < r-1) {
            int q = (p + r)/2;
            mergesort (p, q, v);
            mergesort (q, r, v);
            intercala (p, q, r, v);
        }
    }
```

Como calcular formalmente? Análise Assintótica

- É uma medição formal (matematicamente consistente) de se **calcular aproximadamente** a eficiência de algoritmos
- Descreve o **crescimento de funções**
- A ideia é achar uma **função** $g(n)$ que represente algum **limite** de $f(n)$
- E como representamos esse comportamento assintótico?

Como calcular formalmente?
Análise Assintótica

- É uma medição formal (matematicamente consistente) de se **calcular aproximadamente** a eficiência de algoritmos
- Descreve o **crescimento de funções**
- A ideia é achar uma **função** $g(n)$ que represente algum **limite** de $f(n)$
- E como representamos esse comportamento assintótico?

Como calcular formalmente? Análise Assintótica

- É uma medição formal (matematicamente consistente) de se **calcular aproximadamente** a eficiência de algoritmos
- Descreve o **crescimento de funções**
- A ideia é achar uma **função** $g(n)$ que represente algum **limite** de $f(n)$
- E como representamos esse comportamento assintótico?

Como calcular formalmente?
Análise Assintótica

- É uma medição formal (matematicamente consistente) de se **calcular aproximadamente** a eficiência de algoritmos
- Descreve o **crescimento de funções**
- A ideia é achar uma **função** $g(n)$ que represente algum **limite** de $f(n)$
- E como representamos esse comportamento assintótico?

Notação O

- Para representar a relação assintótica surgiram diversas notações

- A mais utilizada é a **notação O**

- Para $f(n) = n^2 + 2n + 1$, sua complexidade em $O(n^2)$

- A relação assintótica entre duas funções distintas f(n) e g(n) é:

- Exemplo: busca sequencial

Notação O

- Para representar a relação assintótica surgiram diversas notações
- A mais utilizada é a **notação O**
- Para $f(n) = n^2 + 2n + 1$, sua complexidade em $O(n^2)$
- A relação assintótica entre duas funções distintas f(n) e g(n) é:
- Exemplo: busca sequencial

Notação O

- Para representar a relação assintótica surgiram diversas notações
- A mais utilizada é a **notação O**
- Para $f(n) = n^2 + 2n + 1$, sua complexidade em $O(n^2)$
- A relação assintótica entre duas funções distintas f(n) e g(n) é:
- Exemplo: busca sequencial

Notação O

- Para representar a relação assintótica surgiram diversas notações
- A mais utilizada é a **notação O**
- Para $f(n) = n^2 + 2n + 1$, sua complexidade em $O(n^2)$
- A relação assintótica entre duas funções distintas f(n) e g(n) é:
  - **Comparação da tendência de crescimento de $f(n)$ e $g(n)$**
  - Para poder concluir que $f(n) = O(g(n))$
  - Informalmente: $f(n)$ cresce, no máximo, tão rapidamente quanto $g(n)$
  - $g(n)$ é o **limite superior** para a taxa de crescimento de $f(n)$
  - Diz-se que $g(n)$ **domina assintoticamente** $f(n)$
- Exemplo: busca sequencial

Notação O

- Para representar a relação assintótica surgiram diversas notações
- A mais utilizada é a **notação O**
- Para $f(n) = n^2 + 2n + 1$, sua complexidade em $O(n^2)$
- A relação assintótica entre duas funções distintas f(n) e g(n) é:
  - **Comparação da tendência de crescimento de $f(n)$ e $g(n)$**
  - Para poder concluir que $f(n) = O(g(n))$
  - Informalmente: $f(n)$ cresce, no máximo, tão rapidamente quanto $g(n)$
  - $g(n)$ é o **limite superior** para a taxa de crescimento de $f(n)$
  - Diz-se que $g(n)$ **domina assintoticamente** $f(n)$
- Exemplo: busca sequencial

Notação O

- Para representar a relação assintótica surgiram diversas notações
- A mais utilizada é a **notação O**
- Para $f(n) = n^2 + 2n + 1$, sua complexidade em $O(n^2)$
- A relação assintótica entre duas funções distintas f(n) e g(n) é:
  - **Comparação da tendência de crescimento de $f(n)$ e $g(n)$**
  - Para poder concluir que $f(n) = O(g(n))$
  - Informalmente: $f(n)$ cresce, no máximo, tão rapidamente quanto $g(n)$
  - $g(n)$ é o **limite superior** para a taxa de crescimento de $f(n)$
  - Diz-se que $g(n)$ **domina assintoticamente** $f(n)$
- Exemplo: busca sequencial

Notação O

- Para representar a relação assintótica surgiram diversas notações
- A mais utilizada é a **notação O**
- Para $f(n) = n^2 + 2n + 1$, sua complexidade em $O(n^2)$
- A relação assintótica entre duas funções distintas f(n) e g(n) é:
  - **Comparação da tendência de crescimento de $f(n)$ e $g(n)$**
  - Para poder concluir que $f(n) = O(g(n))$
  - Informalmente: $f(n)$ cresce, no máximo, tão rapidamente quanto $g(n)$
  - $g(n)$ é o **limite superior** para a taxa de crescimento de $f(n)$
  - Diz-se que $g(n)$ **domina assintoticamente** $f(n)$
- Exemplo: busca sequencial

Notação O

- Para representar a relação assintótica surgiram diversas notações
- A mais utilizada é a **notação O**
- Para $f(n) = n^2 + 2n + 1$, sua complexidade em $O(n^2)$
- A relação assintótica entre duas funções distintas f(n) e g(n) é:
  - **Comparação da tendência de crescimento de $f(n)$ e $g(n)$**
  - Para poder concluir que $f(n) = O(g(n))$
  - Informalmente: $f(n)$ cresce, no máximo, tão rapidamente quanto $g(n)$
  - $g(n)$ é o **limite superior** para a taxa de crescimento de $f(n)$
  - Diz-se que $g(n)$ **domina assintoticamente** $f(n)$
- Exemplo: busca sequencial

Notação O

- Para representar a relação assintótica surgiram diversas notações
- A mais utilizada é a **notação O**
- Para $f(n) = n^2 + 2n + 1$, sua complexidade em $O(n^2)$
- A relação assintótica entre duas funções distintas f(n) e g(n) é:
  - **Comparação da tendência de crescimento de** $f(n)$ **e** $g(n)$
  - Para poder concluir que $f(n) = O(g(n))$
  - Informalmente: $f(n)$ cresce, no máximo, tão rapidamente quanto $g(n)$
  - $g(n)$ é o **limite superior** para a taxa de crescimento de $f(n)$
  - Diz-se que $g(n)$ **domina assintoticamente** $f(n)$
- Exemplo: busca sequencial

Notação O

- Para representar a relação assintótica surgiram diversas notações
- A mais utilizada é a **notação O**
- Para $f(n) = n^2 + 2n + 1$, sua complexidade em $O(n^2)$
- A relação assintótica entre duas funções distintas f(n) e g(n) é:
  - **Comparação da tendência de crescimento de $f(n)$ e $g(n)$**
  - Para poder concluir que $f(n) = O(g(n))$
  - Informalmente: $f(n)$ cresce, no máximo, tão rapidamente quanto $g(n)$
  - $g(n)$ é o **limite superior** para a taxa de crescimento de $f(n)$
  - Diz-se que $g(n)$ **domina assintoticamente** $f(n)$
- Exemplo: busca sequencial
  - $O(n)$, custo cresce, no máximo, conforme n cresce

Notação O

- Para representar a relação assintótica surgiram diversas notações
- A mais utilizada é a **notação O**
- Para $f(n) = n^2 + 2n + 1$, sua complexidade em $O(n^2)$
- A relação assintótica entre duas funções distintas f(n) e g(n) é:
  - **Comparação da tendência de crescimento de $f(n)$ e $g(n)$**
  - Para poder concluir que $f(n) = O(g(n))$
  - Informalmente: $f(n)$ cresce, no máximo, tão rapidamente quanto $g(n)$
  - $g(n)$ é o **limite superior** para a taxa de crescimento de $f(n)$
  - Diz-se que $g(n)$ **domina assintoticamente** $f(n)$
- Exemplo: busca sequencial
  - $O(n)$, custo cresce, no máximo, conforme n cresce

Notação O

- Supondo em um programa
  - Com tempo de execução $f(n) = 4n^2 + 4n + 1$
  - A medida que n aumenta, o termo quadrático começa a dominar
  - Para n muito grandes, diminui-se o impacto da constante que multiplica o termo quadrático
  - Assim, temos que $f(n) = O(n^2)$

Notação O

- Supondo em um programa
  - Com tempo de execução $f(n) = 4n^2 + 4n + 1$
  - A medida que n aumenta, o termo quadrático começa a dominar
  - Para n muito grandes, diminui-se o impacto da constante que multiplica o termo quadrático
  - Assim, temos que $f(n) = O(n^2)$

Notação O

- Supondo em um programa
  - Com tempo de execução $f(n) = 4n^2 + 4n + 1$
  - A medida que n aumenta, o termo quadrático começa a dominar
  - Para n muito grandes, diminui-se o impacto da constante que multiplica o termo quadrático
  - Assim, temos que $f(n) = O(n^2)$

Notação O

- Supondo em um programa
  - Com tempo de execução $f(n) = 4n^2 + 4n + 1$
  - A medida que n aumenta, o termo quadrático começa a dominar
  - Para n muito grandes, diminui-se o impacto da constante que multiplica o termo quadrático
  - Assim, temos que $f(n) = O(n^2)$

Notação O - observações

- A dominação assintótica revela a **equivalência** entre os algoritmos
  - Sendo F e G algoritmos da mesma classe
  - Com $f(n) = 3.g(n)$, mesmo F sendo 3 vezes mais lento que G
  - Possuem a mesma complexidade $O(f(n)) = O(g(n))$
  - Nestes casos, o comportamento assintótico não é indicado na comparação dos algoritmos F e G
    - ⋆ Pois são avaliados pela comparação das funções (tendência)
    - ⋆ Ignorando as constantes de proporcionalidade

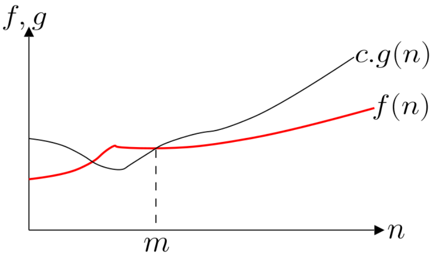
Notação O - observações

- Outro aspecto a ser considerado é o **tamanho do problema** a ser executado
  - Uma complexidade $O(n)$ em geral representa um programa mais eficiente que um $O(n^2)$
  - Porém dependendo do valor de n, um algoritmo $O(n^2)$ poder ser mais indicado do que o $O(n)$
  - Por exemplo, com $f(n) = 100.n$ e $g(n) = 2.n^2$
    - ★ Problemas com $n < 50$
    - ★ $g(n) = 2.n^2$ é mais eficiente do que um $f(n) = 100.n$

- Ressalta-se que **algoritmos de complexidade polinomial** e os de **complexidade exponencial** tem significativa distinção quando o tamanho de n cresce:
  - Um **problema** é considerado **bem resolvido** quando existe um **algoritmo polinomial** para resolvê-lo
  - Polinomial: $O(n^2)$, $O(n^3)$, $O(n)$, $O(\log n)$, $O(n \log n)$
  - Exponencial: $f(n) = 2^n$, $f(n) = n!$

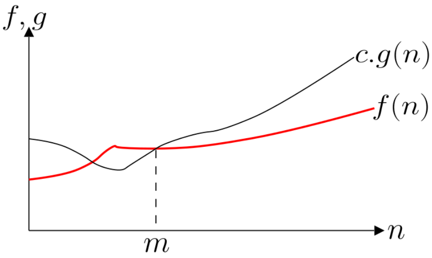
Notação O

- Formalmente, define-se:
  - Uma função $f(n) = O(g(n))$
  - Se $f(n) \leq c.g(n)$, para algum c positivo e para todo n suficiente grande, ou seja,



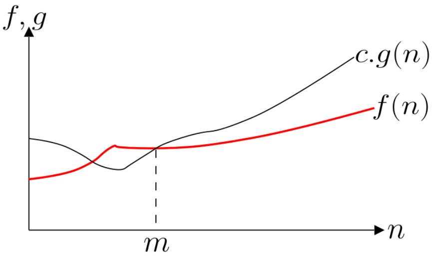
Notação O

- Formalmente, define-se:
  - Uma função $f(n) = O(g(n))$
  - Se $f(n) \leq c.g(n)$, para algum c positivo e para todo n suficiente grande, ou seja,
    - Existem duas constantes positivas c e m
    - Tais que, $f(n) \leq c.g(n)$
    - Para todo $n \geq m$ (ponto inicial do tendência para o comportamento)



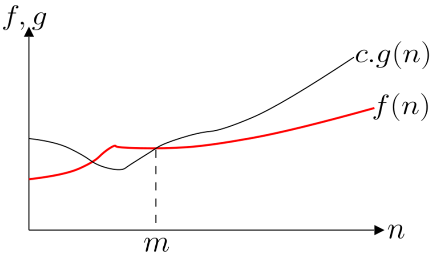
Notação O

- Formalmente, define-se:
  - Uma função $f(n) = O(g(n))$
  - Se $f(n) \leq c.g(n)$, para algum c positivo e para todo n suficiente grande, ou seja,
    - ★ Existem duas constantes positivas c e m
    - ★ Tais que, $f(n) \leq c.g(n)$
    - ★ Para todo $n \geq m$ (ponto inicial do tendência para o comportamento)



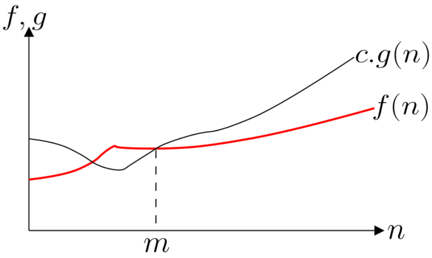
Notação O

- Formalmente, define-se:
  - Uma função $f(n) = O(g(n))$
  - Se $f(n) \leq c.g(n)$, para algum c positivo e para todo n suficiente grande, ou seja,
    - ★ Existem duas constantes positivas c e m
    - ★ Tais que, $f(n) \leq c.g(n)$
    - ★ Para todo $n \geq m$ (ponto inicial do tendência para o comportamento)



Notação O

- Formalmente, define-se:
  - Uma função $f(n) = O(g(n))$
  - Se $f(n) \leq c.g(n)$, para algum c positivo e para todo n suficiente grande, ou seja,
    - ⋆ Existem duas constantes positivas c e m
    - ⋆ Tais que, $f(n) \leq c.g(n)$
    - ⋆ Para todo $n \geq m$ (ponto inicial do tendência para o comportamento)



Notação O - exemplo

- Com tempo de execução $f(n) = (n+1)^2$
  - Temos que $f(n) = O(n^2)$
  - Existem as constantes $m = 1$ e $c = 4$
  - E para todo $n \geq 1$, temos a relação $n^2 + 2n + 1 \leq 4.n^2$
- Com o tempo de execução $f(n) = 2n^2 + 4$
  - Temos que $f(n) = O(n^2)$
  - Pois $2n^2 + 4 \leq 3n^2$ para $n \geq 2(c = 3, m = 2)$

Notação O - equivalência na tendência ao infinito

- Temos que:
  - $f(n) = O(g(n))$ se $\dfrac{\lim_{n\to\infty} f(n)}{\lim_{n\to\infty} g(n)}$ for constante
- Demonstração:
  - $f(n) = a_i n^i + a_{i-1} n^{i-1} + \ldots + a_1 n^1 + a_0 n^0$
  - $f(n) = O(n^i)$
    Como:

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} f(n) &= \lim_{n\to\infty} (a_i n^i + a_{i-1} n^{i-1} + \ldots + a_1 n^1 + a_0 n^0) \\
&= \lim_{n\to\infty} n^i (a_i + \frac{a_{i-1}}{n} + \ldots + \frac{a_1}{n^{i-1}} + \frac{a_0}{n^i}) \\
&= \lim_{n\to\infty} a_i n^i
\end{aligned}
$$

De forma análoga para $g(n) = n^i$, temos:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_i n^i}{n^i} = \lim_{n\to\infty} a_i = a_i$$

Outras Notações

- Ω (omega)
  - Representa o **limite inferior** para função $f(n)$
  - $f(n)$ cresce, no mínimo, tão lento quanto $g(n)$
  - $f(n)$ é $\Omega(g(n))$
    - ★ Se existirem duas constantes c e m
    - ★ Tais que $|f(n)| \geq c.|g(n)|$
    - ★ Para todo $n \geq m$
- θ (theta)
  - Função $f(n)$ é **limitada superiormente e inferiormente** à $g(n)$
  - $f(n)$ cresce tão rápido quanto $g(n)$
  - Com uma diferença de apenas uma constante, ou seja
    - ★ $0 \leq c1.|g(n)| \leq f(n) \leq c2.|g(n)|$
  - Notação para representar maior precisão

- Similares as notações O e Ω
  - Notações 'o' e ω (omegazinho)
    - $f(n) = o(g(n))$: $f(n)$ cresce mais lentamente que $g(n)$
    - $f(n) = \omega(g(n))$: $f(n)$ cresce mais rapidamente que $g(n)$
  - A diferença entre o O e 'o' é que
    - O 'o' condiciona $0 \leq f(n) \leq c.g(n)$ para todo $c > 0$
    - O O condiciona $0 \leq f(n) \leq c.g(n)$ para algum $c > 0$
  - A diferença entre o Ω e ω é que
    - O ω condiciona o $0 \leq c.g(n) \leq f(n)$ para todo $c > 0$
    - O Ω condiciona o $0 \leq c.g(n) \leq f(n)$ para algum $c > 0$