Una de las principales novedades de nuestro trabajo es que se obtiene existencia de soluciones para lagrangianos $\mathcal{L}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ donde la nolinearidad no es una potencia, ni tan siquiera, en virtud de que no hemos supuesto que las N-funciones Φ con las que trabajamos sean de tipo Δ_2, tienen un crecimiento acotado por potencias. Por ejemplo nuestro teorema principal se aplica a lagrangianos del tipo

$$\mathcal{L}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = e^{|\boldsymbol{y}|} + F(t, \boldsymbol{x}),$$

cuando F satisface la condición (A) y es convexa o satisface (38). En este caso podemos considerar la N función $\Phi(x) = e^x - x - 1$ que satisface las condiciones (2),(3) y (4) y su complementaria $\Psi =$???? es Δ_2..

Otra novedad que queremos destacar es la condición (38). Esta condición es una relajación de la hipótesis de que exista $g(t) \in L^1$ con

$$|\nabla F(t, \boldsymbol{x})| \leqslant g(t), \tag{1}$$

considerada por Mawhin y Willem (ver [1, Th.1.5]). Notar que el Teorema de Valor Medio para derivadas y (1) implican nuestra condición (38). En una serie de papers (ver por ejemplo [2, 3, 4]) se consideraron relajaciones de la condición (1) para lagrangianos del tipo potencia.

$$\mathcal{L}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = |\boldsymbol{y}|^p + F(t, \boldsymbol{x}), \quad p > 1 \tag{2}$$

En los papers mencionados (1) fue sustituída por la condición más débil

$$|\nabla F(t, \boldsymbol{x})| \leqslant b(t)|x|^{\mu-1} + b_2(t), \quad b_1, b_2 \in L^1, \mu \geq 1. \tag{3}$$

Además o bien μ es subcrítico, esto es $\mu < p$ o, asumiendo condiciones extras sobre b_1, μ puede ser es crítico, i.e. $\mu = p$. Nuestra condición (38) es diferente que (3), por lo cual nuestros resultados son aún nuevos para Lagrangianos del tipo (2). Por ejemplo sea $f(x)$ una función definida en $\mathbb{R}$, continuamente diferenciable con $f(x) = |x|$, para $|x| > 1$ y definamos $F(t, x) = g(t)(f(x) + \cos(e^x))$, donde g es cualquier función en L^1. Entonces F satisface (38), puesto que como f es Lipschitz tenemos

$$|F(t, x_1) - F(t, x_2)| \leqslant |g(t)|(K|x_1 - x_2| + 2).$$

Además como $f(x) = |x|$ para $|x| > 1$ y como $\cos(e^x)$ es acotada, la función F satisface la condición de coercitividad (39). De allí que nuestro Teorema principal se aplica a esta función F. Pero $\frac{d}{dx}F = g(t)(f'(x) + \cos(e^x)e^x)$ no está acotada por ninguna potencia de x a menos que g sea trivial, i.e. F no satisface (3).

Alternativamente, consideramos la hipótesis de convexidad de F. Queremos destacar que una función convexa no necesariamente satisface (38). Esto se justifica por la siguiente observación: supongamos F independiente de t ($F(t, x) = F(x)$) y que satisface (38), entonces F es sublinear, i.e.

$$|F(x)| \leqslant a|x| + b, \quad a > 0, b > 0$$

Justifiquemos esta aseveración. La desigualdad (38) implica que si $|x-y| \leqslant 1$, entonces $|F(x)-F(y)| \leqslant c$, con $c>0$. Luego si $x \in \mathbb{R}^n$ buscamos $n \in \mathbb{N}$ tal que $n-1 \leqslant |x| < n$. Entonces

$$\begin{aligned}|F(x)| &= \left|F(x) - F\left(\frac{n-1}{n}x\right) + F\left(\frac{n-1}{n}x\right) - \cdots + F\left(\frac{1}{n}x\right) - F(0)\right| \\ &\leqslant nc \\ &\leqslant c(|x|+1).\end{aligned}$$

Ahora vemos que la funcion $F(t,x) = |x|^2$ satisface la hipotesis de convexidad y la condición (A) se aplica a la función F , sin embargo como no essublineal no satisface (38). La misma función muestra que nuestra condición (38) no implica (3). Tampoco (38) implica convexidad, esto es claro como muestra la función $F = g(t)(f(x) + \cos(e^x))$ considerada antes.

References

[1] J. Mawhin, M. Willem, Critical point theory and Hamiltonian systems, Springer-Verlag, New York, 1989.

[2] X.-P. Wu, C.-L. Tang, Periodic solutions of a class of non-autonomous second-order systems, J. Math. Anal. Appl. 236 (2) (1999) 227–235.

[3] F. Zhao, X. Wu, Periodic solutions for a class of non-autonomous second order systems, J. Math. Anal. Appl. 296 (2) (2004) 422–434.

[4] X. Tang, X. Zhang, Periodic solutions for second-order Hamiltonian systems with a p-Laplacian, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska Sect. A 64 (1) (2010) 93–113.