Soluciones simétricas del problema de los N-cuerpos

Fernando Mazzone

Depto de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas, Físico-Químicas y Naturales, Universidad Nacional de Río Cuarto
CONICET

Seminario de Investigación en Matemática Aplicada

Problema

Sistema físico

Espacio: Espacio euclideano d dimensional $d \geq 2$ ($\mathbb{R}^d$).

Objetos: N-puntos de masas $m_1, m_2, \ldots, m_N$,

Variables: tiempo t, posiciones $\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{x}_i(t) \in \mathbb{R}^d$, $i = 1, \ldots, N$,

Fuerzas: gravitacionales,

Leyes físicas: Mecánica Newtoniana: Segunda Ley y Ley de gravitación universal.

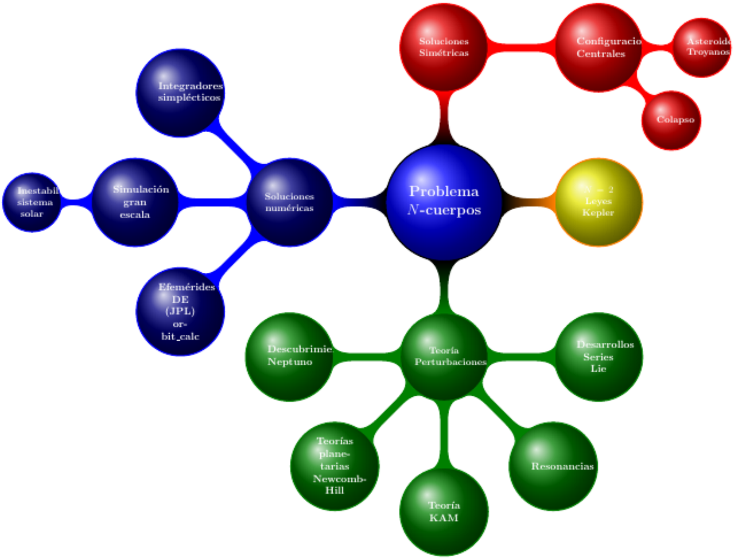
Ecuación de los N-cuerpos

Ecuaciones N-cuerpos

$$\boldsymbol{x}_i''(t) = G \sum_{j \neq i} m_j \frac{\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_i}{\|\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_i\|^3}.$$

G constante gravitación universal, supondremos $G = 1$.

Problemas: mapa conceptual



Notaciones

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_N) \in \mathbb{R}^{d\times N}, \quad \text{Matríz configuración, } \boldsymbol{x},$$

$$r_{ij} = \|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j\|, \quad \text{distancias relativas,}$$

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & 0_{d\times d} & \cdots & 0_{d\times d} \\ 0_{d\times d} & M_2 & \cdots & 0_{d\times d} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0_{d\times d} & \cdots & & M_N \end{pmatrix}, \; M_j = \begin{pmatrix} m_j & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & m_j \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d\times d}$$

$$U(\boldsymbol{x}) = \sum_{i<j} \frac{m_i m_j}{r_{ij}} \quad \text{Potencial newtoniano}$$

$$\Delta = \{\boldsymbol{x}_j = \boldsymbol{x}_j \mid \text{para algunos } i \neq j\},$$

$$\mathbb{R}^{dN} - \Delta \quad \text{Espacio de configuraciones .}$$

Notaciones

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{x}' \quad \text{(Velocidades)}$$

$$K(\boldsymbol{v}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{v} \cdot M\boldsymbol{v} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} m_j \|\boldsymbol{v}_j\|^2, \quad \text{(Energía cinética)}$$

$$\boldsymbol{c} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{N} m_j \boldsymbol{x}_j, \quad \text{con } m := \sum_{j=1}^{N} m_j \quad \text{(Centro masas)}$$

$$\boldsymbol{p} = \sum_{j=1}^{N} m_j \boldsymbol{v}_j, \quad \text{(momento total)}$$

$$\omega_{kl} = \sum_{j=1}^{N} m_j \left(\boldsymbol{x}_{jk}\boldsymbol{v}_{jl} - \boldsymbol{x}_{jl}\boldsymbol{v}_{jk}\right), \quad \text{(Momento angular total } \omega^t = -\omega$$

Notaciones

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{c}, \ldots, \boldsymbol{x}_N - \boldsymbol{c})$$

$$I(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}) \cdot M(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}) \quad \text{(Momento de inercia)}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} m_j \|\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{c}\|^2,$$

Ecuación N-cuerpos

$$M\boldsymbol{x}''(t) = \nabla U(\boldsymbol{x}), \text{ (Ecuación } N\text{-cuerpos)}$$

Simetrías e integrales primeras (Emmy Noether)

- **Simetría por traslaciones** $(\boldsymbol{x}_j \to \boldsymbol{x}_j + \boldsymbol{v}_0 t + \boldsymbol{c}_0,\ \boldsymbol{c}_0, \boldsymbol{v}_0 \in \mathbb{R}^d) \Rightarrow$ $\boxed{\text{conservación } \boldsymbol{p} = \boldsymbol{c}'}$ $\Rightarrow$ movimiento rectilineo uniforme de $\boldsymbol{c}$
- **Simetría por rotaciones** $(\boldsymbol{x}_j \to Q\boldsymbol{x}_j,\ Q \in O(d)) \Rightarrow$ $\boxed{\text{conservación } \omega}$
- La **energía total** $H : \underbrace{\left(\mathbb{R}^d - \Delta\right) \times \mathbb{R}^d}_{\text{Espacio fases}} \to \mathbb{R}$,

$$H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) = K(\boldsymbol{v}) - U(\boldsymbol{x}),$$

se conserva

Simetrías e integrales primeras (Emmy Noether)

- **Simetría por traslaciones** ($\boldsymbol{x}_j \to \boldsymbol{x}_j + \boldsymbol{v}_0 t + \boldsymbol{c}_0$, $\boldsymbol{c}_0, \boldsymbol{v}_0 \in \mathbb{R}^d$) $\Rightarrow$ $\boxed{\text{conservación } \boldsymbol{p} = \boldsymbol{c}'}$ $\Rightarrow$ movimiento rectilineo uniforme de $\boldsymbol{c}$
- **Simetría por rotaciones** ($\boldsymbol{x}_j \to Q\boldsymbol{x}_j$, $Q \in O(d)$) $\Rightarrow$ $\boxed{\text{conservación } \omega}$
- La **energía total** $H : \underbrace{\left(\mathbb{R}^d - \Delta\right) \times \mathbb{R}^d}_{\text{Espacio fases}} \to \mathbb{R}$,

$$H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) = K(\boldsymbol{v}) - U(\boldsymbol{x}),$$

se conserva

Simetrías e integrales primeras (Emmy Noether)

- **Simetría por traslaciones** ($\boldsymbol{x}_j \to \boldsymbol{x}_j + \boldsymbol{v}_0 t + \boldsymbol{c}_0$, $\boldsymbol{c}_0, \boldsymbol{v}_0 \in \mathbb{R}^d$) $\Rightarrow$ $\boxed{\text{conservación } \boldsymbol{p} = \boldsymbol{c}'}$ $\Rightarrow$ movimiento rectilineo uniforme de $\boldsymbol{c}$
- **Simetría por rotaciones** ($\boldsymbol{x}_j \to Q\boldsymbol{x}_j$, $Q \in O(d)$) $\Rightarrow$ $\boxed{\text{conservación } \omega}$
- La **energía total** $H : \underbrace{\left(\mathbb{R}^d - \Delta\right) \times \mathbb{R}^d}_{\text{Espacio fases}} \to \mathbb{R}$,

$$H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) = K(\boldsymbol{v}) - U(\boldsymbol{x}),$$

se conserva

Otras simetrías

- $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ se denomina homogénea de grado $\alpha \in \mathbb{R}$ si $f(t\boldsymbol{x}) = t^\alpha f(\boldsymbol{x})$.
- Si f es homogénea de grado α entonces $\nabla f(x)$ es homogénea de grado $\alpha - 1$.
- **Teorema Euler:** Si f es homogénea de grado α entonces $\nabla f(x) \cdot x = \alpha f(x)$.
- U es homogénea de grado -1, ∇U es homogénea de grado -2 e I es homogénea de grado 2.
- **Invariancia por traslaciones:** si $\boldsymbol{c}_0 \in \mathbb{R}^d \Rightarrow U(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}_0) = U(\boldsymbol{x})$.
- **Invariancia por rotaciones:** si $Q \in O(d) \Rightarrow U(Q\boldsymbol{x}) = U(\boldsymbol{x})$. Por consiguiente $\nabla U(Q\boldsymbol{x}) = Q\nabla U(\boldsymbol{x})$.

Otras simetrías

- $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ se denomina homogénea de grado $\alpha \in \mathbb{R}$ si $f(t\boldsymbol{x}) = t^\alpha f(\boldsymbol{x})$.
- Si f es homogénea de grado α entonces $\nabla f(x)$ es homogénea de grado $\alpha - 1$.
- **Teorema Euler:** Si f es homogénea de grado α entonces $\nabla f(x) \cdot x = \alpha f(x)$.
- U es homogénea de grado -1, ∇U es homogénea de grado -2 e I es homogénea de grado 2.
- **Invariancia por traslaciones:** si $\boldsymbol{c}_0 \in \mathbb{R}^d \Rightarrow U(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}_0) = U(\boldsymbol{x})$.
- **Invariancia por rotaciones:** si $Q \in O(d) \Rightarrow U(Q\boldsymbol{x}) = U(\boldsymbol{x})$. Por consiguiente $\nabla U(Q\boldsymbol{x}) = Q\nabla U(\boldsymbol{x})$.

Otras simetrías

- $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ se denomina homogénea de grado $\alpha \in \mathbb{R}$ si $f(t\boldsymbol{x}) = t^\alpha f(\boldsymbol{x})$.
- Si f es homogénea de grado α entonces $\nabla f(x)$ es homogénea de grado $\alpha - 1$.
- **Teorema Euler:** Si f es homogénea de grado α entonces $\nabla f(x) \cdot x = \alpha f(x)$.
- U es homogénea de grado -1, ∇U es homogénea de grado -2 e I es homogénea de grado 2.
- **Invariancia por traslaciones:** si $\boldsymbol{c}_0 \in \mathbb{R}^d \Rightarrow U(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}_0) = U(\boldsymbol{x})$.
- **Invariancia por rotaciones:** si $Q \in O(d) \Rightarrow U(Q\boldsymbol{x}) = U(\boldsymbol{x})$. Por consiguiente $\nabla U(Q\boldsymbol{x}) = Q\nabla U(\boldsymbol{x})$.

Otras simetrías

- $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ se denomina homogénea de grado $\alpha \in \mathbb{R}$ si $f(t\boldsymbol{x}) = t^\alpha f(\boldsymbol{x})$.
- Si f es homogénea de grado α entonces $\nabla f(x)$ es homogénea de grado $\alpha - 1$.
- **Teorema Euler:** Si f es homogénea de grado α entonces $\nabla f(x) \cdot x = \alpha f(x)$.
- U es homogénea de grado -1, ∇U es homogénea de grado -2 e I es homogénea de grado 2.
- **Invariancia por traslaciones:** si $\boldsymbol{c}_0 \in \mathbb{R}^d \Rightarrow U(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}_0) = U(\boldsymbol{x})$.
- **Invariancia por rotaciones:** si $Q \in O(d) \Rightarrow U(Q\boldsymbol{x}) = U(\boldsymbol{x})$. Por consiguiente $\nabla U(Q\boldsymbol{x}) = Q\nabla U(\boldsymbol{x})$.

Otras simetrías

- $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ se denomina homogénea de grado $\alpha \in \mathbb{R}$ si $f(t\boldsymbol{x}) = t^\alpha f(\boldsymbol{x})$.
- Si f es homogénea de grado α entonces $\nabla f(x)$ es homogénea de grado $\alpha - 1$.
- **Teorema Euler:** Si f es homogénea de grado α entonces $\nabla f(x) \cdot x = \alpha f(x)$.
- U es homogénea de grado -1, ∇U es homogénea de grado -2 e I es homogénea de grado 2.
- **Invariancia por traslaciones:** si $\boldsymbol{c}_0 \in \mathbb{R}^d \Rightarrow U(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}_0) = U(\boldsymbol{x})$.
- **Invariancia por rotaciones:** si $Q \in O(d) \Rightarrow U(Q\boldsymbol{x}) = U(\boldsymbol{x})$. Por consiguiente $\nabla U(Q\boldsymbol{x}) = Q\nabla U(\boldsymbol{x})$.

Otras simetrías

- $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ se denomina homogénea de grado $\alpha \in \mathbb{R}$ si $f(t\boldsymbol{x}) = t^\alpha f(\boldsymbol{x})$.
- Si f es homogénea de grado α entonces $\nabla f(x)$ es homogénea de grado $\alpha - 1$.
- **Teorema Euler:** Si f es homogénea de grado α entonces $\nabla f(x) \cdot x = \alpha f(x)$.
- U es homogénea de grado -1, ∇U es homogénea de grado -2 e I es homogénea de grado 2.
- **Invariancia por traslaciones:** si $\boldsymbol{c}_0 \in \mathbb{R}^d \Rightarrow U(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}_0) = U(\boldsymbol{x})$.
- **Invariancia por rotaciones:** si $Q \in O(d) \Rightarrow U(Q\boldsymbol{x}) = U(\boldsymbol{x})$. Por consiguiente $\nabla U(Q\boldsymbol{x}) = Q\nabla U(\boldsymbol{x})$.

Configuraciones centrales (CC)

Definición

Una configuración de puntos masa, con masas $m_1, \ldots, m_N$ y posiciones $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_N$ es central si existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\nabla U(\boldsymbol{x}) + \lambda M(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}) = \nabla U(\boldsymbol{x}) + \lambda \nabla I(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}) = 0.$$

Observación: En una configuración central el vector aceleración sobre cada cuerpo apunta hacia $\boldsymbol{c}$ y es proporcional a la distancia a $\boldsymbol{c}$.

Configuraciones centrales (CC)

Definición

Una configuración de puntos masa, con masas $m_1, \ldots, m_N$ y posiciones $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_N$ es central si existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\nabla U(\boldsymbol{x}) + \lambda M(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}) = \nabla U(\boldsymbol{x}) + \lambda \nabla I(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}) = 0.$$

Observación: En una configuración central el vector aceleración sobre cada cuerpo apunta hacia $\boldsymbol{c}$ y es proporcional a la distancia a $\boldsymbol{c}$.

Existencia de CC

- Cuando $N = 2$ todas las configuraciones son centrales.
- Para masas arbitrarias la existencia es poco clara.
- **Soluciones sencillas** Si todas las masas son iguales $m_1 = m_2 = \cdots = m_N$ podemos ponerlas como vértices de un polítopo, polígono regular del plano, poliedro regular (sólido platónico), etc. Claramente la configuración es central. Se puede agregar una masa arbitraria en el centro.
- Notoriamente en el caso del regular d-simplex (triángulo equilátero, tetraedro, etc) tenemos CC independientemente de las masas.

Existencia de CC

- Cuando $N = 2$ todas las configuraciones son centrales.
- Para masas arbitrarias la existencia es poco clara.
- **Soluciones sencillas** Si todas las masas son iguales $m_1 = m_2 = \cdots = m_N$ podemos ponerlas como vértices de un polítopo, polígono regular del plano, poliedro regular (sólido platónico), etc. Claramente la configuración es central. Se puede agregar una masa arbitraria en el centro.
- Notoriamente en el caso del regular d-simplex (triángulo equilátero, tetraedro, etc) tenemos CC independientemente de las masas.

Existencia de CC

- Cuando $N = 2$ todas las configuraciones son centrales.
- Para masas arbitrarias la existencia es poco clara.
- **Soluciones sencillas** Si todas las masas son iguales $m_1 = m_2 = \cdots = m_N$ podemos ponerlas como vértices de un polítopo, polígono regular del plano, poliedro regular (sólido platónico), etc. Claramente la configuración es central. Se puede agregar una masa arbitraria en el centro.
- Notoriamente en el caso del regular d-simplex (triángulo equilátero, tetraedro, etc) tenemos CC independientemente de las masas.

Existencia de CC

- Cuando $N = 2$ todas las configuraciones son centrales.
- Para masas arbitrarias la existencia es poco clara.
- **Soluciones sencillas** Si todas las masas son iguales $m_1 = m_2 = \cdots = m_N$ podemos ponerlas como vértices de un polítopo, polígono regular del plano, poliedro regular (sólido platónico), etc. Claramente la configuración es central. Se puede agregar una masa arbitraria en el centro.
- Notoriamente en el caso del regular d-simplex (triángulo equilátero, tetraedro, etc) tenemos CC independientemente de las masas.

Soluciones homográficas

Definición

Una solución $\boldsymbol{x}(t)$ de las ecuaciones de los N-cuerpos es homográfica si, y sólo si, existe una función escalar $r : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, una matricial $Q : \mathbb{R} \to SO(d)$ y un vector fijo $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^{dN}$ tal que

$$\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{c}(t) = r(t)Q(t)(\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{c}_0),$$

donde $\boldsymbol{c}_0$ y $\boldsymbol{c}(t)$ son los centros de masas de $\boldsymbol{x}_0$ y $\boldsymbol{x}(t)$ respectivamente.

Soluciones homotéticas

Definicion

Si $Q = I$ (identidad $d \times d$) la solución se dice homotética.

Remplazando en la ecuación de los N cuerpos

$$r''(t)M(\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{c}_0) = \frac{1}{r^2(t)}\nabla U(\boldsymbol{x}_0)$$

Por consiguiente debe existir $\lambda \in \mathbb{R}$

$$r''(t) = -\frac{\lambda}{r^2(t)} \quad \text{y} \quad M(\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{c}_0) = -\lambda \nabla U(\boldsymbol{x}_0).$$

$r(t)$ es una solución del problema de Kepler unidimensional y $\boldsymbol{x}_0$ es una CC.

Soluciones homotéticas

Definicion

Si $Q = I$ (identidad $d \times d$) la solución se dice homotética.

Remplazando en la ecuación de los N cuerpos

$$r''(t) M(\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{c}_0) = \frac{1}{r^2(t)} \nabla U(\boldsymbol{x}_0)$$

Por consiguiente debe existir $\lambda \in \mathbb{R}$

$$r''(t) = -\frac{\lambda}{r^2(t)} \quad \text{y} \quad M(\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{c}_0) = -\lambda \nabla U(\boldsymbol{x}_0).$$

$r(t)$ es una solución del problema de Kepler unidimensional y $\boldsymbol{x}_0$ es una CC.

Soluciones homotéticas

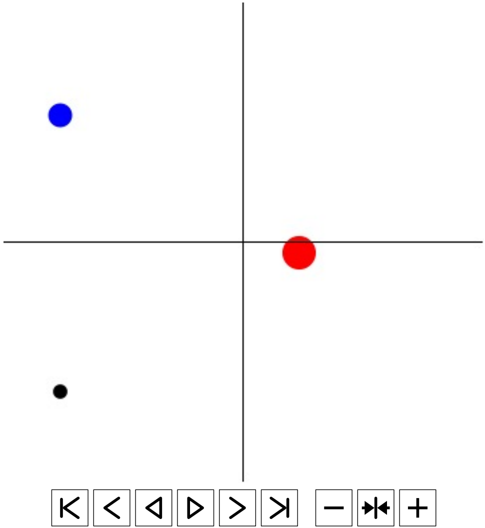


Imagen: Richard Moeckel

Movimiento plano

Suponiendo $d = 2$ (movimiento plano):

$$Q(t) = \begin{pmatrix} \cos(\theta(t)) & \operatorname{sen}(\theta(t)) \\ -\operatorname{sen}(\theta(t)) & \cos(\theta(t)) \end{pmatrix} \in SO(2)$$

Remplazando $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c} = rQ(\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{c}_0)$ en la ecuación

$$r'' - r\theta'^2 = -\frac{\lambda}{r^2}, \quad r\theta'' + 2r'\theta' = 0 \quad \text{y} \ -\lambda M(\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{c}_0) = \nabla U(\boldsymbol{x}_0)$$

r, θ resuelven la ecuación (coordenadas polares) de la ecuación de los dos cuerpos. Los cuerpos describen elipses keplerianas homotéticas.

Movimiento plano

Suponiendo $d = 2$ (movimiento plano):

$$Q(t) = \begin{pmatrix} \cos(\theta(t)) & \operatorname{sen}(\theta(t)) \\ -\operatorname{sen}(\theta(t)) & \cos(\theta(t)) \end{pmatrix} \in SO(2)$$

Remplazando $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c} = rQ(\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{c}_0)$ en la ecuación

$$r'' - r\theta'^2 = -\frac{\lambda}{r^2}, \quad r\theta'' + 2r'\theta' = 0 \quad \text{y} \ -\lambda M(\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{c}_0) = \nabla U(\boldsymbol{x}_0)$$

r, θ resuelven la ecuación (coordenadas polares) de la ecuación de los dos cuerpos. Los cuerpos describen elipses keplerianas homotéticas.

Movimiento plano

Suponiendo $d = 2$ (movimiento plano):

$$Q(t) = \begin{pmatrix} \cos(\theta(t)) & \operatorname{sen}(\theta(t)) \\ -\operatorname{sen}(\theta(t)) & \cos(\theta(t)) \end{pmatrix} \in SO(2)$$

Remplazando $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c} = rQ(\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{c}_0)$ en la ecuación

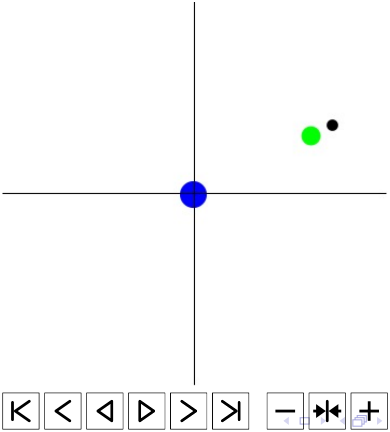
$$r'' - r\theta'^2 = -\frac{\lambda}{r^2}, \quad r\theta'' + 2r'\theta' = 0 \quad \text{y} \ -\lambda M(\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{c}_0) = \nabla U(\boldsymbol{x}_0)$$

r, θ resuelven la ecuación (coordenadas polares) de la ecuación de los dos cuerpos. Los cuerpos describen elipses keplerianas homotéticas.

Movimiento rígido (equilibrio relativo)

Definicion

Si $r(t) \equiv 1$ la solución (independientemente que $d = 2$) se dice que es un moviento rígido o equilibrio relativo.



Soluciones homográficas para $d \geq 3$

En $d = 3$ la única solución no planar es el movimiento homotético [Wintner, 2014, Moeckel, 1994, Jaume Llibre, 2016].
En $d > 3$ la situación es más compleja [Albouy and Chenciner, 1997, Chenciner, 2011, Chenciner and Jiménez-Pérez, 2013], ver [Jaume Llibre, 2016].

Soluciones homográficas $d > 3$

Teorema

Sea $\boldsymbol{x}_0$ una CC y $C = \langle \boldsymbol{x}_{01} - \boldsymbol{c}_0, \ldots, \boldsymbol{x}_{0N} - \boldsymbol{c}_0 \rangle$. Supongamos que existe $J \in \mathbb{R}^{d\times d}$ antisimétrica que satisface $J^2|_C = -I|_C$. Si r, θ son solución del problema de Kepler plano, entonces existe

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c} = r(t)Q(t)(\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{c}_0)$$

con

$$Q(t) = e^{\theta(t)J}.$$

es una solución homográfica. Toda solución homográfica no rígida es de esta forma.

Soluciones homográficas $d > 3$

Definición

Si $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$

$$e^A = I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \cdots$$

Ejemplo: $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $e^{tJ} = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\operatorname{sen}(t) \\ \operatorname{sen}(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$

Si A es antisimétrica e^A es ortogonal:

$$\left[e^A\right]^t e^A = e^{A^t} e^A = e^{-A} e^A = e^{-A+A} = I.$$

Soluciones homográficas $d > 3$

Definición

Si $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$

$$e^A = I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \cdots$$

Ejemplo: $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e^{tJ} = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\operatorname{sen}(t) \\ \operatorname{sen}(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$

Si A es antisimétrica e^A es ortogonal:

$$\left[e^A\right]^t e^A = e^{A^t} e^A = e^{-A} e^A = e^{-A+A} = I.$$

Soluciones homográficas $d > 3$

Definición

Si $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$

$$e^A = I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \cdots$$

Ejemplo: $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e^{tJ} = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\operatorname{sen}(t) \\ \operatorname{sen}(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$

Si A es antisimétrica e^A es ortogonal:

$$\left[e^A\right]^t e^A = e^{A^t} e^A = e^{-A} e^A = e^{-A+A} = I.$$

Estructuras Hermitianas

Definición

Una estructura Hermitiana sobre un subespacio H viene dada por producto interno sobre H y una función lineal $J : H \to H$ que es antisimétrica respecto al producto interno con $J^2 = -I$.

Si J es la matríz del Teorema

- $H = C + JC$ tendrá una estructura Hermitiana, es invariante y $J^2|_H = -I|_H$.
- Una transformación antisimétrica tiene rango par. Corolario: homográfico no homotétitco $\Rightarrow$ plano.
- Es una condición necesaria que C este contenido en un espacio con dimensión par.
- A la vez es suficiente.

Estructuras Hermitianas

Definición

Una estructura Hermitiana sobre un subespacio H viene dada por producto interno sobre H y una función lineal $J : H \to H$ que es antisimétrica respecto al producto interno con $J^2 = -I$.

Si J es la matríz del Teorema

- $H = C + JC$ tendrá una estructura Hermitiana, es invariante y $J^2|_H = -I|_H$.
- Una transformación antisimétrica tiene rango par. Corolario: homográfico no homotétitco $\Rightarrow$ plano.
- Es una condición necesaria que C este contenido en un espacio con dimensión par.
- A la vez es suficiente.

Estructuras Hermitianas

Definición

Una estructura Hermitiana sobre un subespacio H viene dada por producto interno sobre H y una función lineal $J : H \to H$ que es antisimétrica respecto al producto interno con $J^2 = -I$.

Si J es la matríz del Teorema

- $H = C + JC$ tendrá una estructura Hermitiana, es invariante y $J^2|_H = -I|_H$.
- Una transformación antisimétrica tiene rango par. Corolario: homográfico no homotétitco $\Rightarrow$ plano.
- Es una condición necesaria que C este contenido en un espacio con dimensión par.
- A la vez es suficiente.

Estructuras Hermitianas

Definición

Una estructura Hermitiana sobre un subespacio H viene dada por producto interno sobre H y una función lineal $J : H \to H$ que es antisimétrica respecto al producto interno con $J^2 = -I$.

Si J es la matríz del Teorema

- $H = C + JC$ tendrá una estructura Hermitiana, es invariante y $J^2|_H = -I|_H$.
- Una transformación antisimétrica tiene rango par. Corolario: homográfico no homotétitco $\Rightarrow$ plano.
- Es una condición necesaria que C este contenido en un espacio con dimensión par.
- A la vez es suficiente.

Estructuras Hermitianas

Teorema

Para todo movimiento rígido existe una matriz de configuración $\boldsymbol{x}_0$ (no necesariamente central) y una martriz antisimétrica $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ tal que

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c} = Q(t)(\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{c}_0)$$

con

$$Q(t) = e^{\theta(t)A}.$$

A su vez, para $d = 4$, existen $\boldsymbol{x}_0$ no centrales tales que la fórmula anterior define un movimiento rígido.

Simetrías para CC

$\boldsymbol{x}$ es CC si existe $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\nabla U(\boldsymbol{x}) + \lambda \nabla I(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}) = 0.$$

con

$$U(\boldsymbol{x}) = \sum_{i<j} \frac{m_i m_j}{r_{ij}} \quad \text{e} \quad I(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} m_j \|\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{c}\|^2.$$

- Si $\boldsymbol{x}$ es CC para λ y $\boldsymbol{c}_0 \in \mathbb{R}^d$ entonces $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}_0$ es CC para el mismo λ.
- Si $\boldsymbol{x}$ es CC para λ y $Q \in SO(d)$ entonces $Q\boldsymbol{x}$ es CC para el mismo λ.
- Si $\boldsymbol{x}$ es CC para λ y $\sigma \in \mathbb{R}$ entoces $\sigma\boldsymbol{x}$ es CC para $\sigma^{-3}\lambda$,

Simetrías para CC

$\boldsymbol{x}$ es CC si existe $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\nabla U(\boldsymbol{x}) + \lambda \nabla I(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}) = 0.$$

con

$$U(\boldsymbol{x}) = \sum_{i<j} \frac{m_i m_j}{r_{ij}} \quad \text{e} \quad I(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} m_j \|\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{c}\|^2.$$

- Si $\boldsymbol{x}$ es CC para λ y $\boldsymbol{c}_0 \in \mathbb{R}^d$ entonces $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}_0$ es CC para el mismo λ.
- Si $\boldsymbol{x}$ es CC para λ y $Q \in SO(d)$ entonces $Q\boldsymbol{x}$ es CC para el mismo λ.
- Si $\boldsymbol{x}$ es CC para λ y $\sigma \in \mathbb{R}$ entoces $\sigma\boldsymbol{x}$ es CC para $\sigma^{-3}\lambda$,

Simetrías para CC

$\boldsymbol{x}$ es CC si existe $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\nabla U(\boldsymbol{x}) + \lambda \nabla I(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}) = 0.$$

con

$$U(\boldsymbol{x}) = \sum_{i<j} \frac{m_i m_j}{r_{ij}} \quad \text{e} \quad I(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} m_j \|\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{c}\|^2.$$

- Si $\boldsymbol{x}$ es CC para λ y $\boldsymbol{c}_0 \in \mathbb{R}^d$ entonces $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}_0$ es CC para el mismo λ.
- Si $\boldsymbol{x}$ es CC para λ y $Q \in SO(d)$ entonces $Q\boldsymbol{x}$ es CC para el mismo λ.
- Si $\boldsymbol{x}$ es CC para λ y $\sigma \in \mathbb{R}$ entoces $\sigma \boldsymbol{x}$ es CC para $\sigma^{-3}\lambda$,

Finitud de equlibrios relativos

Definición

Dos CC $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ son equivalentes si existe $\sigma \in \mathbb{R}$, $Q \in SO(d)$ y $\boldsymbol{c}_0 \in \mathbb{R}^d$ tales que $\boldsymbol{y} = \sigma Q\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}_0$.

Problema de Chazy-Wintner-Smale, Steve Smale, “Mathematical problems for the next century”, [Smale, 2000]

Existe un número finito de clases de equivalencias de CC.

Finitud de equlibrios relativos ¿Qué sabemos?

- Para $N = 2$ todo $\boldsymbol{x}$ es CC, pero hay una sóla clase de equivalencia.
- Para $N = 3$ hay 5 clases distintas, Euler-Lagrange.
- Para $N = 4$. Dadas 4 masas m_1, m_2, m_3, m_4 el número de clases distintas está comprendido entre 32 y 8472 ([Hampton and Moeckel, 2006]).
- Para $N = 5$ y $d = 2$. En [Albouy and Kaloshin, 2012] se obtuvo finitud para todas las masas excepto en una variedad de codimensión 2 en el espacio de masas.

Finitud de equlibrios relativos ¿Qué sabemos?

- Para $N = 2$ todo $\boldsymbol{x}$ es CC, pero hay una sóla clase de equivalencia.
- Para $N = 3$ hay 5 clases distintas, Euler-Lagrange.
- Para $N = 4$. Dadas 4 masas m_1, m_2, m_3, m_4 el número de clases distintas está comprendido entre 32 y 8472 ([Hampton and Moeckel, 2006]).
- Para $N = 5$ y $d = 2$. En [Albouy and Kaloshin, 2012] se obtuvo finitud para todas las masas excepto en una variedad de codimensión 2 en el espacio de masas.

Finitud de equlibrios relativos ¿Qué sabemos?

- Para $N = 2$ todo $\boldsymbol{x}$ es CC, pero hay una sóla clase de equivalencia.
- Para $N = 3$ hay 5 clases distintas, Euler-Lagrange.
- Para $N = 4$. Dadas 4 masas m_1, m_2, m_3, m_4 el número de clases distintas está comprendido entre 32 y 8472 ([Hampton and Moeckel, 2006]).
- Para $N = 5$ y $d = 2$. En [Albouy and Kaloshin, 2012] se obtuvo finitud para todas las masas excepto en una variedad de codimensión 2 en el espacio de masas.

Finitud de equlibrios relativos ¿Qué sabemos?

- Para $N = 2$ todo $\boldsymbol{x}$ es CC, pero hay una sóla clase de equivalencia.
- Para $N = 3$ hay 5 clases distintas, Euler-Lagrange.
- Para $N = 4$. Dadas 4 masas m_1, m_2, m_3, m_4 el número de clases distintas está comprendido entre 32 y 8472 ([Hampton and Moeckel, 2006]).
- Para $N = 5$ y $d = 2$. En [Albouy and Kaloshin, 2012] se obtuvo finitud para todas las masas excepto en una variedad de codimensión 2 en el espacio de masas.

CC y teoría puntos críticos [Smale, 1970a, Smale, 1970b]

- Cambiando de coordenadas a abricéntricas podemos asumir $\boldsymbol{c} = 0$.
- Cambiando de escala podemos asumir $I(\boldsymbol{x}) = 1$.

Por la técnica de los multiplicadores de Lagrange, interpretamos

$$\nabla U(\boldsymbol{x}) + \lambda \nabla I(\boldsymbol{x}) = 0.$$

como que una CC es un punto crítico del potencial con la restricción de que $\boldsymbol{x} \in S$ donde S es el elipsoide

$$S = \{\boldsymbol{x} | I(\boldsymbol{x}) = 1\}.$$

Soluciones Lagrangianas ($d = 2$)

U es función de las distancias relativas, $r_{ij} = \|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j\|$. Veamos que I también

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{N} m_i m_j \|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j\|^2 &= \sum_{i,j=1}^{N} m_i m_j \|\boldsymbol{x}_i\|^2 \\ &\quad - 2\sum_{i,j=1}^{N} m_i m_j \boldsymbol{x}_i \cdot \boldsymbol{x}_j + \sum_{i,j=1}^{N} m_i m_j \|\boldsymbol{x}_j\|^2 \\ &= 4mI\end{aligned}$$

Pongamos $\boldsymbol{r}$ al vector de distancias relativas. Luego

$$\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{x}} + \lambda \frac{\partial I}{\partial \boldsymbol{x}} = \left(\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}} + \lambda \frac{\partial I}{\partial \boldsymbol{r}}\right) \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{x}}$$

Soluciones Lagrangianas ($d = 2$)

U es función de las distancias relativas, $r_{ij} = \|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j\|$. Veamos que I también

$$\sum_{i,j=1}^{N} m_i m_j \|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j\|^2 = \sum_{i,j=1}^{N} m_i m_j \|\boldsymbol{x}_i\|^2 - 2\sum_{i,j=1}^{N} m_i m_j \boldsymbol{x}_i \cdot \boldsymbol{x}_j + \sum_{i,j=1}^{N} m_i m_j \|\boldsymbol{x}_j\|^2 = 4mI$$

Pongamos $\boldsymbol{r}$ al vector de distancias relativas. Luego

$$\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{x}} + \lambda \frac{\partial I}{\partial \boldsymbol{x}} = \left(\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}} + \lambda \frac{\partial I}{\partial \boldsymbol{r}} \right) \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{x}}$$

Queremos ver que si los cuerpos no estan alineados

$$0 = \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{x}} + \lambda \frac{\partial I}{\partial \boldsymbol{x}} \Leftrightarrow 0 = \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}} + \lambda \frac{\partial I}{\partial \boldsymbol{r}}.$$

Pero

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2}{r_{12}} & -\frac{\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2}{r_{12}} & 0 \\ \frac{\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_3}{r_{13}} & 0 & -\frac{\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_3}{r_{13}} \\ 0 & \frac{\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_3}{r_{23}} & -\frac{\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_3}{r_{23}} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 6}$$

La afirmación sale de que si los cuerpos no estan alineados $\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2$ y $\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_3$ son LI, lo mismo $\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2$ y $\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_3$

Soluciones Lagrangianas ($d = 2$)

Así tenemos que resolver

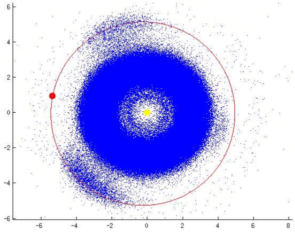
$$0 = -\frac{m_i m_j}{r_{ij}^2} + \lambda m_i m_j r_{ij}$$

Entonces

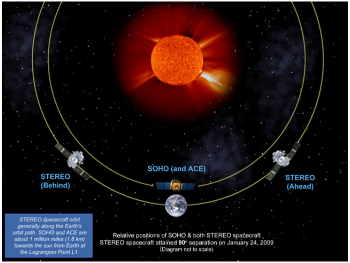
$$r_{ij} = \lambda^{-1/3}.$$

La configuración es un triángulo equilátero.

Soluciones Lagrangianas



Asteroides troyanos de Jupiter (orbit_calc)



Sondas STEREO y SOHO

Configuraciones de Moulton (colineales)

Definición

Una CC se denomina colineal si todos los cuerpos estan sobre una línea recta.

Teorema [Moulton, 1910]

Dadas N masas existen $N!/2$ configuraciones centrales colineales

Discutiremos la idea de la demostración para $N = 3$.

Configuraciones de Moulton (colineales)

Definición

Una CC se denomina colineal si todos los cuerpos estan sobre una línea recta.

Teorema [Moulton, 1910]

Dadas N masas existen $N!/2$ configuraciones centrales colineales

Discutiremos la idea de la demostración para $N = 3$.

Configuraciones de Moulton (colineales)

Definición

Una CC se denomina colineal si todos los cuerpos estan sobre una línea recta.

Teorema [Moulton, 1910]

Dadas N masas existen $N!/2$ configuraciones centrales colineales

Discutiremos la idea de la demostración para $N = 3$.

Demostración Teorema de Moulton

Usando un conveniente sistema de coordenadas podemos suponer las posiciones en $\mathbb{R}$, $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$. Escribamos $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$.

Sean $H = \{\boldsymbol{x} | m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 = 0\}$, el elipsoide $S = \{\boldsymbol{x} | m_1 x_1^2 + m_2 x_2^2 + m_3 x_3^2 = 0\}$ y el conjunto de colisiones $\Delta = \{x_i = x_j | i \neq j\}$.

Se observa que hay que encontrar un punto crítico de U en el conjunto

$$S \cap H \setminus \Delta.$$

$S \cap H$ es un elipsoide de una dimensión menor, en el caso $N = 3$ es una elipse

Demostración Teorema de Moulton

Usando un conveniente sistema de coordenadas podemos suponer las posiciones en $\mathbb{R}$, $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$. Escribamos $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$.
Sean $H = \{\boldsymbol{x} | m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 = 0\}$, el elipsoide $S = \{\boldsymbol{x} | m_1 x_1^2 + m_2 x_2^2 + m_3 x_3^2 = 0\}$ y el conjunto de colisiones $\Delta = \{x_i = x_j | i \neq j\}$.
Se observa que hay que encontrar un punto crítico de U en el conjunto

$$S \cap H \setminus \Delta.$$

$S \cap H$ es un elipsoide de una dimensión menor, en el caso $N = 3$ es una elipse

Demostración Teorema de Moulton

Usando un conveniente sistema de coordenadas podemos suponer las posiciones en $\mathbb{R}$, $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$. Escribamos $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$.
Sean $H = \{\boldsymbol{x} | m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 = 0\}$, el elipsoide $S = \{\boldsymbol{x} | m_1 x_1^2 + m_2 x_2^2 + m_3 x_3^2 = 0\}$ y el conjunto de colisiones $\Delta = \{x_i = x_j | i \neq j\}$.
Se observa que hay que encontrar un punto crítico de U en el conjunto

$$S \cap H \setminus \Delta.$$

$S \cap H$ es un elipsoide de una dimensión menor, en el caso $N = 3$ es una elipse

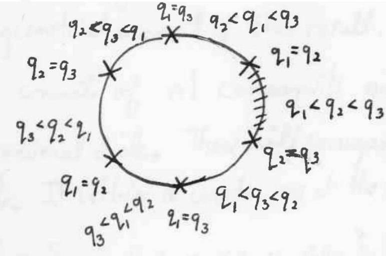
Demostración Teorema de Moulton

Usando un conveniente sistema de coordenadas podemos suponer las posiciones en $\mathbb{R}$, $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$. Escribamos $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$.
Sean $H = \{\boldsymbol{x} | m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 = 0\}$, el elipsoide $S = \{\boldsymbol{x} | m_1 x_1^2 + m_2 x_2^2 + m_3 x_3^2 = 0\}$ y el conjunto de colisiones $\Delta = \{x_i = x_j | i \neq j\}$.
Se observa que hay que encontrar un punto crítico de U en el conjunto

$$S \cap H \setminus \Delta.$$

$S \cap H$ es un elipsoide de una dimensión menor, en el caso $N = 3$ es una elipse

Demostración Teorema de Moulton



Nos quedan $N!/2$ componentes conexas. Se demuestra que hay un mínimo (punto crítico) de U en cada una de ellas y que hay a lo sumo 1 punto crítico

Albouy, A. and Chenciner, A. (1997).
Le probleme des n corps et les distances mutuelles.
Inventiones mathematicae, 131(1):151–184.

Albouy, A. and Kaloshin, V. (2012).
Finiteness of central configurations of five bodies in the plane.
Annals of mathematics, 176(1):535–588.

Chenciner, A. (2011).
The lagrange reduction of the n-body problem, a survey.
arXiv preprint arXiv:1111.1334.

Chenciner, A. and Jiménez-Pérez, H. (2013).
Angular momentum and horn's problem.
Moscow Mathematical Journal, 13(4):621–630.

Hampton, M. and Moeckel, R. (2006).
Finiteness of relative equilibria of the four-body problem.

Inventiones mathematicae, 163(2):289–312.

Jaume Llibre, Richard Moeckel, C. S. (2016).
Central Configurations, Periodic Orbits, and Hamiltonian Systems.
Advanced Courses in Mathematics - CRM Barcelona. Birkhäuser.

Moeckel, R. (1994).
Celestial Mechanics–especially central configurations.
http://www.math.umn.edu/rmoeckel/notes/Notes.html.

Moulton, F. R. (1910).
The straight line solutions of the problem of n bodies.

The Annals of Mathematics, 12(1):1–17.

Smale, S. (1970a).
Topology and mechanics. i.
Inventiones mathematicae, 10(4):305–331.

Smale, S. (1970b).
Topology and mechanics. ii.
Inventiones mathematicae, 11(1):45–64.

Smale, S. (2000).
Mathematical problems for the next century.
In Arnol´d, V., editor, *Mathematics: Frontiers and Perspectives*.

Wintner, A. (2014).
The Analytical Foundations of Celestial Mechanics.
Dover Books on Physics. Dover Publications.