Soluciones simétricas del problema de los N-cuerpos

Fernando Mazzone

Depto de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas, Físico-Químicas y Naturales, Universidad Nacional de Río Cuarto
CONICET

Seminario de Investigación en Matemática Aplicada

Problema

Sistema físico

Espacio: Espacio euclideano d dimensional $d \geq 2$ ($\mathbb{R}^d$).

Objetos: N-puntos de masas $m_1, m_2, \ldots, m_N$,

Variables: tiempo t, posiciones $\vec{r}_i = \vec{r}_i(t) \in \mathbb{R}^d$, $i = 1, \ldots, N$,

Fuerzas: gravitacionales,

Leyes físicas: Mecánica Newtoniana: Segunda Ley y Ley de gravitación universal.

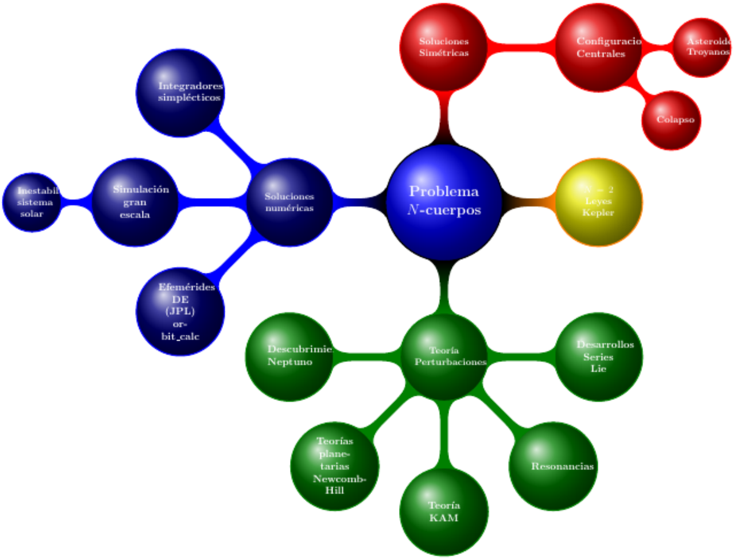
Ecuación de los N-cuerpos

Ecuaciones N-cuerpos

$$\vec{r}_i''(t) = G \sum_{j \neq i} m_j \frac{\vec{r}_j - \vec{r}_i}{\|\vec{r}_j - \vec{r}_i\|^3}.$$

G constante gravitación universal, supondremos $G = 1$.

Problemas: mapa conceptual



Notaciones

$$\vec{r} = (\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N) \in \mathbb{R}^{dN}, \quad \text{Vector configuración,}$$

$$r_{ij} = \|\vec{r}_i - \vec{r}_j\|, \quad \text{distancias relativas,}$$

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & 0_{d\times d} & \cdots & 0_{d\times d} \\ 0_{d\times d} & M_2 & \cdots & 0_{d\times d} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0_{d\times d} & \cdots & & M_N \end{pmatrix}, \; M_j = \begin{pmatrix} m_j & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & m_j \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d\times d}$$

$$U(\vec{r}) = \sum_{i<j} \frac{m_i m_j}{r_{ij}} \quad \text{Potencial newtoniano}$$

$$\Delta = \{\vec{r}_j = \vec{r}_j | \text{ para algunos } i \neq j\},$$

$$\mathbb{R}^{dN} - \Delta \quad \text{Espacio de configuraciones .}$$

Notaciones

$$\vec{v} = \vec{r}' \quad \text{(Velocidades)}$$

$$K(\vec{v}) = \frac{1}{2}\vec{v} \cdot M\vec{v} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} m_j \|\vec{v}_j\|^2, \quad \text{(Energía cinética)}$$

$$\vec{c} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{N} m_j \vec{r}_j, \quad \text{con } m := \sum_{j=1}^{N} m_j \quad \text{(Centro masas)}$$

$$\vec{p} = \sum_{j=1}^{N} m_j \vec{v}_j, \quad \text{(momento total)}$$

$$\omega_{kl} = \sum_{j=1}^{N} m_j \left(\vec{r}_{jk}\vec{v}_{jl} - \vec{r}_{jl}\vec{v}_{jk}\right), \ \text{(Momento angular total } \omega^t = -\omega)$$

$$\boxed{M\vec{r}''(t) = \nabla U(\vec{r})}, \quad \text{(Ecuación } N\text{-cuerpos)}$$

Notaciones

$$I(\vec{r}) = \frac{1}{2}(\vec{r} - \vec{c}) \cdot M(\vec{r} - \vec{c}) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} m_j \|\vec{r}_j - \vec{c}\|^2,$$

(Momento de inercia)

$$\boxed{M\vec{r}''(t) = \nabla U(\vec{r}), \text{ (Ecuación } N\text{-cuerpos)}} \tag{1}$$

Simetrías e integrales primeras (Emmy Noether)

- **Simetría por traslaciones** ($\vec{r}_j \to \vec{r}_j + \vec{v}_0 t + \vec{c}_0$, $\vec{c}_0, \vec{v}_0 \in \mathbb{R}^d$) $\Rightarrow$ $\boxed{\text{conservación } \vec{p} = \vec{c}'}$ $\Rightarrow$ movimiento rectilineo uniforme de $\vec{c}$
- **Simetría por rotaciones** ($\vec{r}_j \to Q\vec{r}_j$, $Q \in O(d)$) $\Rightarrow$ $\boxed{\text{conservación } \omega}$
- La **energía total** $H : \underbrace{\left(\mathbb{R}^d - \Delta\right) \times \mathbb{R}^d}_{\text{Espacio fases}} \to \mathbb{R}$,

$$H(\vec{r}, \vec{v}) = K(\vec{v}) - U(\vec{r}),$$

se conserva

Configuraciones centrales (CC)

Definición

Una configuración de puntos masa, con masas $m_1, \ldots, m_N$ y posiciones $\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N$ es central si existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\nabla U(\vec{r}) + \lambda M(\vec{r} - \vec{c}) = \nabla U(\vec{r}) + \lambda \nabla I(\vec{r} - \vec{c}) = 0.$$

Observación: En una configuración central el vector aceleración sobre cada cuerpo apunta hacia $\vec{c}$ y es proporcional a la distancia a $\vec{c}$.

Existencia de CC

- Para masas arbitrarias la existencia es poco clara.
- **Soluciones sencillas** Si todas las masas son iguales $m_1 = m_2 = \cdots = m_N$ podemos ponerlas como vértices de un polítopo, polígono regular del plano, poliedro regular (sólido platónico), etc. Claramente la configuración es central
- Notoriamente en el caso del regular d-simplex, triángulo equilátero, tetraedro, etc, tenemos CC independientemente de las masas.