

Métodos Variacionales y Sistemas Hamiltonianos

Jornadas de Ciencia y Técnica 2016 - UNLPam

20 años de las Jornadas de Ciencia y Técnica

Resolución CD N° 38/16 - Período: 01/01/2016-31/12/2018.

Director: Fernando Mazzone^(1,2,3).

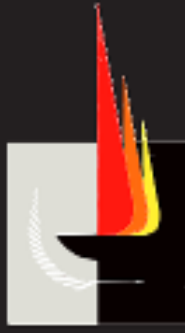
Integrantes: Sonia Acinas⁽¹⁾, Lorenzo Sierra⁽⁴⁾, Stefanía Demaría^(2,3) y Leopoldo Buri⁽²⁾.

⁽¹⁾ Dpto. de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Nacional de La Pampa.

⁽²⁾ Dpto. de Matemática, Universidad Nacional de Río Cuarto.

⁽³⁾ CONICET.

⁽⁴⁾ Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de La Pampa.



FACULTAD DE CIENCIAS
EXACTAS Y NATURALES

Universidad Nacional de La Pampa



Ecuaciones de Euler-Lagrange

Muchos sistemas físicos se modelan con un sistema de ecuaciones del tipo

$$\frac{d}{dt}D_y\mathcal{L}(t,u(t),\dot{u}(t))=D_x\mathcal{L}(t,u(t),\dot{u}(t)) \quad \text{en c.t.p. } t\in(0,T) \quad (1)$$

donde $T>0$, $u:[0,T]\rightarrow\mathbb{R}^d$ y la función $\mathcal{L}:[0,T]\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\rightarrow\mathbb{R}$ se denomina *Lagrangiano*.

Ejemplos

- Las ecuaciones que gobiernan el movimiento de un cuerpo de masa m sujeta a un resorte son de la forma (1) con $\mathcal{L}=m\frac{v^2}{2}+k\frac{x^2}{2}$. Aquí x representa el desplazamiento de la masa desde su posición de equilibrio.
- Las ecuaciones que gobiernan el movimiento de una masa sujeta a un péndulo son de la forma (1) con $\mathcal{L}=m\frac{v^2}{2}+\sqrt{g}\sin(x)$. En este caso, x representa el desplazamiento angular desde la vertical del péndulo.
- Las ecuaciones que gobiernan el movimiento de n -cuerpos graves interactuando entre sí a través de sus campos gravitatorios son de la forma (1) con

$$\mathcal{L}(t,x,y)=\frac{1}{2}\sum_i^n m_i\|y_i\|^2+G\sum_{i<j}\frac{m_i m_j}{\|x_i-x_j\|},$$

con $x=(x_1,\dots,x_n)$ siendo $x_i(t)\in\mathbb{R}^3$ las posiciones de los cuerpos.

- En general, las ecuaciones (1) son características de sistemas mecánicos conservativos. O sea, sistemas donde la energía total $E=T+U$ se conserva, con T la energía cinética, U la energía potencial y $\mathcal{L}=T-U$.

Soluciones Periódicas

Es importante saber si los sistemas mecánicos poseen soluciones periódicas. Por ejemplo, si se trata del problema de los n -cuerpos esta información resulta útil para la planificación de misiones espaciales. Soluciones periódicas se hallan resolviendo las ecuaciones del sistema (1) sujeto a las condiciones de contorno

$$u(0)-u(T)=u'(0)-u'(T)=0. \quad (2)$$

Objetivo y Metodología

En este proyecto pretendemos encontrar soluciones de (1) sujeto a (2) a través de métodos variacionales. Estos métodos se basan en la observación de que las soluciones del problema de contorno son puntos críticos de la *integral de acción*

$$I(u)=\int_0^T\mathcal{L}(t,u(t),\dot{u}(t))\,dt. \quad (3)$$

Un punto crítico es una función u tal que cuando la integral de acción es perturbada infinitesimalmente $I(u+\epsilon v)$, la integral de acción cambia en un infinitésimo menor al de la perturbación para toda función v que satisface las condiciones de contorno. O sea,

$$\lim_{\epsilon\rightarrow 0}\frac{1}{\epsilon}\int_0^T(\mathcal{L}(t,u+\epsilon v,u'+\epsilon v')-\mathcal{L}(t,u,u'))dt=0. \quad (4)$$

Cuando el límite anterior existe (independientemente que de 0) y el resultado del límite es una función lineal y acotada Λ de v , se dice que Λ es la **derivada Gâteaux** de I . Decir que Λ es función lineal y acotada es afirmar que Λ pertenece al espacio dual del espacio en el que consideramos a u .

Un problema importante es hallar condiciones sobre \mathcal{L} para que I tenga una derivada Gâteaux. Hay una variedad muy grande de métodos variacionales: directo, dual, teorema de punto silla de Rabinowitz, teoría de Morse, teoría de Leray-Schauder, teoremas minimax, etc.

En una primera etapa estamos investigando la aplicabilidad del método directo y del método dual a cierto tipo especial de Lagrangianos.

Método directo

Se basa en el hecho de que los puntos extremos de I son puntos críticos. Es así que, pretendemos determinar condiciones que garanticen la existencia de puntos extremos, normalmente mínimos. El éxito del método radica en establecer:

- semicontinuidad inferior** de I , o sea, si $u_n\rightarrow u$ entonces $I(u)\leq\liminf_{n\rightarrow\infty}I(u_n)$;
- coercitividad** de I , esto es, $\lim_{\|u\|\rightarrow\infty}I(u)=\infty$.

Lagrangianos, integrales de acción y sus dominios

Nuestro interés es estudiar Lagrangianos que satisfacen las siguientes condiciones estructurales

$$|\mathcal{L}(t,x,y)|\leq a(|x|)\left(b(t)+\Phi\left(\frac{|y|}{\lambda}+f(t)\right)\right) \quad (5)$$

$$|D_x\mathcal{L}(t,x,y)|\leq a(|x|)\left(b(t)+\Phi\left(\frac{|y|}{\lambda}+f(t)\right)\right), \quad (6)$$

$$|D_y\mathcal{L}(t,x,y)|\leq a(|x|)\left(c(t)+\varphi\left(\frac{|y|}{\lambda}+f(t)\right)\right). \quad (7)$$

Aquí hemos introducido varios entes nuevos, a saber

- λ un número positivo.
- $a:\mathbb{R}^+\rightarrow\mathbb{R}^+$ continua.
- Φ es una N -función (este es un concepto técnico y remitimos a [Krasnosel'skiĭ and Rutickiĭ, 1961] para su tratamiento) y $\varphi=\Phi'$.
- $b\in L^1([0,T])$, $c\in L^\Psi$ y $f\in E^\Phi$, donde Ψ es la N -función complementaria de Φ y L^1 es el espacio de Banach clásico de funciones integrables y L^Φ , L^Ψ y E^Φ son espacios de Orlicz y ciertos subespacios de ellos (ver [Krasnosel'skiĭ and Rutickiĭ, 1961]).
- $f\in E^\Phi$.

Consideramos este tipo de estructura para los Lagrangianos porque generaliza la tratada previamente en la literatura y por nuestra experiencia en el trabajo con N -funciones.

Las condiciones de estructura (5),(6) y (7) garantizan que nuestras integrales de acción tienen como dominios espacios de Sobolev-Orlicz [Adams and Fournier, 2003, Acinas et al., 2015].

Algunos resultados

Presentaremos resultados de derivabilidad Gâteaux y resultados de coercitividad.

La semicontinuidad inferior de las integrales de acción se obtiene a partir de resultados generales que esencialmente ya existen en la literatura.

Crítical points?????

Derivabilidad Gâteaux

Teorema [Acinas et al., 2015]

Sea \mathcal{L} Lagrangiano que satisface (5), (6) y (7). Entonces I es Gâteaux diferenciable sobre W^1E^Φ y

$$\langle I'(u),v\rangle=\int_0^T\{D_x\mathcal{L}(t,u(t),u'(t))\cdot v(t)+D_y\mathcal{L}(t,u(t),u'(t))\cdot v'(t)\}\,dt.$$

Coercitividad

Sea \mathcal{L} Lagrangiano que satisface (5), (6) y (7).

Además consideramos

$$\mathcal{L}(t,x,y)\geq\Phi(|y|)+F(t,x), \quad (8)$$

donde $F:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d\rightarrow\mathbb{R}$ tal que $F(t,x)$ es medible con respecto a t para cada $x\in\mathbb{R}^d$ fijo y F es continua en x para c.t.p. $t\in[0,T]$.

Y supongamos que

$$\int_0^TF(t,x)\,dt\rightarrow\infty\quad\text{as}\quad|x|\rightarrow\infty. \quad (9)$$

Entonces, la integral de acción I es coercitiva si

Teorema [Acinas et al., 2015]: Coercitividad I

- existen $b_0\in L^1([0,T])$ y $a:\mathbb{R}^+\rightarrow\mathbb{R}^+$ continua tales que

$$|F(t,x)|\leq a(|x|)b_0(t), \quad \text{en c.t.p. } t\in[0,T] \quad \text{y para cada } x\in\mathbb{R}^d; \quad (10)$$

- existen una función no negativa $b_1\in L^1([0,T])$ y constantes $0<\mu<\alpha_\Phi$ tales que para cualquier $x_1,x_2\in\mathbb{R}^d$ y en c.t.p. $t\in[0,T]$

$$|F(t,x_2)-F(t,x_1)|\leq b_1(t)(1+|x_2-x_1|^\mu), \quad (11)$$

- $\Psi\in\Delta_2$.

Teorema [Acinas and Mazzone, 2016]: Coercitividad II

- existen $a:\mathbb{R}^+\rightarrow\mathbb{R}^+$ continua, no decreciente y $0\leq b\in L^1([0,T],\mathbb{R})$ tal que

$$|F(t,x)|+|\nabla F(t,x)|\leq a(|x|)b(t), \quad (C \text{ y } A)$$

- existen $b_1,b_2\in L^1([0,T])$ y ciertas N -funciones Φ_0 relacionadas con Φ tales que

$$|\nabla F(t,x)|\leq b_1(t)\Phi_0(|x|)+b_2(t). \quad (A_5)$$

Herramientas para coercitividad???Conviene agregar esto????

Lema CM $_{\rho}$: Coercitividad del modular $\rho_\Phi(u)$

Sean Φ,Ψ N -funciones complementarias con $\Psi\in\Delta_2^\infty$.

Entonces existe una N -función Φ^* con $\Phi^*<\Phi$, tal que para cada N -función Φ_0 que satisface $\Phi_0\ll\Phi^*$ y para cada $k>0$, tenemos

$$\lim_{\|u\|_{L\Phi}\rightarrow\infty}\frac{\int_0^T\Phi(|u|)\,dt}{\Phi_0(k\|u\|_{L\Phi})}=\infty. \quad (12)$$

Recíprocamente, si (12) vale para alguna N -función Φ_0 , entonces $\Psi\in\Delta_2^\infty$.

GPS: Dónde estamos y hacia dónde vamos

Estamos estudiando....

- Espacios de Orlicz anisotrópicos
- Método dual
-

Bibliografía

- Acinas, S., Buri, L., Giubergia, G., Mazzone, F., and Schwindt, E. (2015). Some existence results on periodic solutions of Euler-Lagrange equations in an Orlicz-Sobolev space setting. *Nonlinear Analysis, TMA.*, 125:681 – 698.
- Acinas, S. and Mazzone, F. (2016). Periodic solutions of Euler-Lagrange equations with “sublinear nonlinearity” in an Orlicz-Sobolev space setting. Submitted.
- Adams, R. and Fournier, J. (2003). *Sobolev spaces*. Elsevier/Academic Press, Amsterdam.
- Krasnosel’skiĭ, M. A. and Rutickiĭ, J. B. (1961). *Convex functions and Orlicz spaces*. P. Noordhoff Ltd., Groningen.