Métodos Variacionales y Sistemas Hamiltonianos

Jornadas de Ciencia y Técnica 2016 - UNLPam
20 años de las Jornadas de Ciencia y Técnica

Resolución CD FCEyN N° 38/16 - Período: 01/01/2016-31/12/2018.

Director: Fernando Mazzone[1,2,3].
Integrantes: Sonia Acinas[1], Lorenzo Sierra[4], Stefanía Demaría[2,3] y Leopoldo Buri[2].

[1] Dpto. de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Nacional de La Pampa.
[2] Dpto. de Matemática, Universidad Nacional de Río Cuarto.
[3] CONICET.
[4] Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de La Pampa.

Ecuaciones de Euler-Lagrange

Muchos sistemas físicos se modelan con un sistema de ecuaciones del tipo

$$\frac{d}{dt}D_y\mathcal{L}(t,u(t),\dot{u}(t)) = D_x\mathcal{L}(t,u(t),\dot{u}(t)) \quad \text{en c.t.p. } t\in(0,T) \tag{1}$$

donde $T>0$, $u:[0,T]\to\mathbb{R}^d$ y la función $\mathcal{L}:[0,T]\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ se denomina *Lagrangiano*.

Ejemplos

- Las ecuaciones que gobiernan el movimiento de un cuerpo de masa m sujeta a un resorte son de la forma (1) con $\mathcal{L}=m\frac{y^2}{2}+k\frac{x^2}{2}$. Aquí x representa el desplazamiento de la masa desde su posición de equilibrio.
- Las ecuaciones que gobiernan el movimiento de una masa sujeta a un péndulo son de la forma (1) con $\mathcal{L}=m\frac{y^2}{2}+\sqrt{\frac{g}{l}}\sin(x)$. En este caso, x representa el desplazamiento angular desde la vertical del péndulo.
- Las ecuaciones que gobiernan el movimiento de n-cuerpos graves interactuando entre sí a través de sus campos gravitatorios son de la forma (1) con
$$\mathcal{L}(t,x,y)=\frac{1}{2}\sum_i^n m_i\|y_i\|^2+G\sum_{i<j}\frac{m_im_j}{\|x_i-x_j\|},$$
con $x=(x_1,\dots,x_n)$ siendo $x_i(t)\in\mathbb{R}^3$ las posiciones de los cuerpos.
- En general, las ecuaciones (1) son características de sistemas mecánicos conservativos. O sea, sistemas donde la energía total $E=T+U$ se conserva, con T la energía cinética, U la energía potencial y $\mathcal{L}=T-U$.

Soluciones Periódicas

Es importante saber si los sistemas mecánicos poseen soluciones periódicas. Por ejemplo, si se trata del problema de los n-cuerpos esta información resulta útil para la planificación de misiones espaciales.
Soluciones periódicas se hallan resolviendo las ecuaciones del sistema (1) sujeto a las condiciones de contorno

$$u(0)-u(T)=u'(0)-u'(T)=0. \tag{2}$$

Objetivo y Metodología

En este proyecto pretendemos encontrar soluciones de (1) sujeto a (2) a través de métodos variacionales.
Estos métodos se basan en la observación de que las soluciones del problema de contorno son puntos críticos de la *integral de acción*

$$I(u)=\int_0^T\mathcal{L}(t,u(t),\dot{u}(t))\,dt. \tag{3}$$

Un punto crítico es una función u tal que cuando la integral de acción es perturbada infinitesimalmente $I(u+\epsilon v)$, la integral de acción cambia en un infinitésimo menor al de la perturbación para toda función v que satisface las condiciones de contorno. O sea,

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\int_0^T(\mathcal{L}(t,u+\epsilon v,u'+\epsilon v')-\mathcal{L}(t,u,u'))dt=0.$$

Cuando el límite anterior existe (independientemente que de 0) y el resultado del límite es una función lineal y acotada Λ de v, se dice que Λ es la **derivada Gâteaux** de I. Decir que Λ es función lineal y acotada es afirmar que Λ pertenece al espacio dual del espacio en el que consideramos a u.
Un problema importante es hallar condiciones sobre $\mathcal{L}$ para que I tenga una derivada Gâteaux.
Hay una variedad muy grande de métodos variacionales: directo, dual, teorema de punto silla de Rabinowitz, teoría de Morse, teoría de Leray-Schauder, teoremas minimax, etc.
En una primera etapa estamos investigando la aplicabilidad del método directo y del método dual a cierto tipo especial de Lagrangianos.

Método directo

Se basa en el hecho de que los puntos extremos de I son puntos críticos. Es así que, pretendemos determinar condiciones que garanticen la existencia de puntos extremos, normalmente mínimos.
El éxito del método radica en establecer:

- **semicontinuidad inferior** de I, o sea, si $u_n\to u$ entonces $I(u)\leqslant\liminf_{n\to\infty}I(u_n)$;
- **coercitividad** de I, esto es, $\lim_{\|u\|\to\infty}I(u)=\infty$.

Lagrangianos, integrales de acción y sus dominios

Nuestro interés es estudiar Lagrangianos que satisfacen las siguientes condiciones estructurales

$$|\mathcal{L}(t,x,y)|\leqslant a(|x|)\left(b(t)+\Phi\left(\frac{|y|}{\lambda}+f(t)\right)\right) \tag{4}$$

$$|D_x\mathcal{L}(t,x,y)|\leqslant a(|x|)\left(b(t)+\Phi\left(\frac{|y|}{\lambda}+f(t)\right)\right), \tag{5}$$

$$|D_y\mathcal{L}(t,x,y)|\leqslant a(|x|)\left(c(t)+\varphi\left(\frac{|y|}{\lambda}+f(t)\right)\right). \tag{6}$$

Aquí hemos introducido varios entes nuevos, a saber

- λ un número positivo.
- $a:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ continua.
- Φ es una N-función (este es un concepto técnico y remitimos a [Krasnosel'skiĭ and Rutickiĭ, 1961] para su tratamiento) y $\varphi=\Phi'$.
- $b\in L^1([0,T])$, $c\in L^\Psi$ y $f\in E^\Phi$, donde Ψ es la N-función complementaria de Φ y L^1 es el espacio de Banach clásico de funciones integrables y L^Φ, L^Ψ y E^Φ son espacios de Orlicz y ciertos subespacios de ellos (ver [Krasnosel'skiĭ and Rutickiĭ, 1961]).
- $f\in E^\Phi$.

Consideramos este tipo de estructura para los Lagrangianos porque generaliza la tratada previamente en la literatura y por nuestra experiencia en el trabajo con N-funciones.
Las condiciones de estructura (4), (5) y (6) garantizan que nuestras integrales de acción tengan como dominios espacios de Sobolev-Orlicz [Adams and Fournier, 2003, Acinas et al., 2015].

Algunos resultados

Presentaremos resultados de derivabilidad Gâteaux y resultados de coercitividad.
La semicontinuidad inferior de las integrales de acción se obtiene a partir de resultados generales que esencialmente ya existen en la literatura.

Derivabilidad Gâteaux

Teorema [Acinas et al., 2015]

Sea $\mathcal{L}$ Lagrangiano que satisface (4), (5) y (6). Entonces I es derivable Gâteaux sobre W^1E^Φ y

$$\langle I'(u),v\rangle=\int_0^T\{D_x\mathcal{L}(t,u(t),u'(t))\cdot v(t)+D_y\mathcal{L}(t,u(t),u'(t))\cdot v'(t)\}\,dt.$$

De este resultado se infiere que los puntos críticos de (3) son soluciones de (1).

Coercitividad

Sea $\mathcal{L}$ Lagrangiano que satisface (4), (5) y (6).
Además consideramos

$$\mathcal{L}(t,x,y)\geqslant\Phi(|y|)+F(t,x),$$

donde $F:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ tal que $F(t,x)$ es medible con respecto a t para cada $x\in\mathbb{R}^d$ fijo y F es continua en x para c.t.p. $t\in[0,T]$.
Y supongamos que

$$\int_0^T F(t,x)\,dt\to\infty \quad \text{as} \quad |x|\to\infty.$$

Entonces, la integral de acción I es **coercitiva** si

Teorema [Acinas et al., 2015]: Coercitividad I

- existen $b_0\in L^1([0,T])$ y $a:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ continua tales que
$$|F(t,x)|\leqslant a(|x|)b_0(t),\quad \text{en c.t.p. } t\in[0,T] \quad \text{y para cada } x\in\mathbb{R}^d;$$
- existen una función no negativa $b_1\in L^1([0,T])$ y constantes $0<\mu<\alpha_\Phi$ tales que para cualquier $x_1,x_2\in\mathbb{R}^d$ y en c.t.p. $t\in[0,T]$
$$|F(t,x_2)-F(t,x_1)|\leqslant b_1(t)(1+|x_2-x_1|^\mu),$$
- $\Psi\in\Delta_2$.

Teorema [Acinas and Mazzone, 2016]: Coercitividad II

- existen $a:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ continua, no decreciente y $0\leqslant b\in L^1([0,T],\mathbb{R})$ tal que
$$|F(t,x)|+|\nabla F(t,x)|\leqslant a(|x|)b(t),$$
- existen $b_1,b_2\in L^1([0,T])$ y ciertas N-funciones Φ_0 relacionadas con Φ tales que
$$|\nabla F(t,x)|\leqslant b_1(t)\Phi_0'(|x|)+b_2(t).$$

Herramienta para Coercitividad II

Lema CMρ: Coercitividad del modular $\rho_\Phi(u)$

Sean Φ,Ψ N-funciones complementarias con $\Psi\in\Delta_2^\infty$.
Entonces existe una N-función Φ^* con $\Phi^*\prec\Phi$, tal que para cada N-función Φ_0 que satisface $\Phi_0\ll\Phi^*$ y para cada $k>0$, tenemos

$$\lim_{\|u\|_{L^\Phi}\to\infty}\frac{\int_0^T\Phi(|u|)\,dt}{\Phi_0(k\|u\|_{L^\Phi})}=\infty. \tag{7}$$

Recíprocamente, si (7) vale para alguna N-función Φ_0, entonces $\Psi\in\Delta_2^\infty$.

GPS: Dónde estamos y hacia dónde vamos

- Espacios de Orlicz anisotrópicos: nos interesa estudiar funciones con valores en $\mathbb{R}^d$ en espacios normados cuya norma es disímil con respecto a la dirección (anisotropía). Hemos visto que este tema tiene aplicaciones al siguiente punto.
- Método dual: consiste en transformar las ecuaciones de Euler-Lagrange en ecuaciones Hamiltonianas y considerar, para ellas, la llamada acción dual. Este método provee soluciones para las ecuaciones originales (dualización de Clarke).
El procedimiento fue empleado con éxito en espacios de Sobolev $W^{1,p}$ ([Tian and Ge, 2007]) y queremos generalizar esos resultados a espacios de Sobolev-Orlicz.

Referencias

- Acinas, S., Buri, L., Giubergia, G., Mazzone, F., and Schwindt, E. (2015).
Some existence results on periodic solutions of Euler-Lagrange equations in an Orlicz-Sobolev space setting.
Nonlinear Analysis, TMA., 125:681 – 698.
- Acinas, S. and Mazzone, F. (2016).
Periodic solutions of Euler-Lagrange equations with "sublinear nonlinearity" in an Orlicz-Sobolev space setting.
Submitted.
- Adams, R. and Fournier, J. (2003).
Sobolev spaces.
Elsevier/Academic Press, Amsterdam.
- Krasnosel'skiĭ, M. A. and Rutickiĭ, J. B. (1961).
Convex functions and Orlicz spaces.
P. Noordhoff Ltd., Groningen.
- Tian, Y. and Ge, W. (2007).
Periodic solutions of non-autonomous second-order systems with a p-Laplacian.
Nonlinear Anal., 66(1):192–203.