ESPACIOS DE ORLICZ ANISOTRÓPICOS VECTORIALES 2016

FERNANDO Y SONIA

1. Funciones convexas

Definición 1.1. *Sea φ una función de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$. Se dice que φ es convexa si para cualquier $x, y \in \mathbb{R}^n$ y $0 < \lambda < 1$ se verifica la siguiente desigualdad:*

$$\varphi[\lambda x + (1-\lambda)y] \leq \lambda\varphi(x) + (1-\lambda)\varphi(y).$$

Si $\varphi(0) = 0$, entonces $\varphi(\lambda x) \leq \lambda\varphi(x)$ si $0 \leq \lambda \leq 1$ y $\varphi(\lambda x) \geq \lambda\varphi(x)$ si $\lambda \geq 1$.

Definición 1.2. *Sea φ una función no trivial de $\mathbb{R}^n$ en $[0, \infty]$. Se dice que φ es coercitiva si y sólo si $\lim\limits_{|x|\to\infty} \frac{\varphi(x)}{|x|} = \infty$.*

Definición 1.3. *Sea φ una función convexa de $\mathbb{R}^n$ en $[0, \infty]$. La conjugada (de Fenchel??? se llamará así???) φ^* de φ está dada por*

$$\varphi^* : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$$

$$\varphi^*(x) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \{\langle x^*, x\rangle - \varphi(x)\}$$

La desigualdad de Fenchel/Young??? se satisface para todo $x, x^* \in \mathbb{R}^n$ y dice

$$\langle x, x^*\rangle \leq \varphi(x) + \varphi^*(x^*)$$

Por Aubin, Thm. 4.3, p. 63 (chequear), para una función φ y $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $\varphi(x) < \infty$ es posible encontrar $x^* \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\langle x, x^*\rangle = \varphi(x) + \varphi^*(x^*)$$

Definición 1.4. *Una función no trivial φ de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ se dice semicontinua inferior débil en x_0 si*

$$\varphi(x_0) \leq \liminf_{x\to x_0} \varphi(x)$$

La función φ se dice semicontinua inferior, si φ es semicontinua inferior en cada punto de $x \in \mathbb{R}^n$.

Teorema 1.5. *Sea φ no trivial, convexa de $\mathbb{R}^n$ en $[0, \infty]$. Entonces son equivalentes:*

1. *φ es acotada sobre un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$,*
2. *φ es localmente Lipschitz en el interior del dominio efectivo de φ, o sea, sobre el interior de $Dom(\varphi) = \{x \in \mathbb{R}^n : \varphi(x) < \infty\}$.*

Demostración. Chequear prueba en Aubin, Thm 2.1, p. 25. □

Notemos que si φ es acotada sobre subconjuntos acotados de $\mathbb{R}^n$, entonces $Dom(\varphi) = \mathbb{R}^n$ y φ es continua en $\mathbb{R}^n$.

Teorema 1.6. *Sea φ una función no trivial, convexa y semicontinua inferior de $\mathbb{R}^n$ en $[0, \infty]$ y φ^* la conjugada de Fenchel de φ. Son equivalentes:*

1. *φ es acotada sobre subconjuntos acotados de $\mathbb{R}^n$,*
2. *φ^* es coercitiva.*

Demostración. Gudrun p.360 para espacios de Banach gral. □

Las propiedades de crecimiento de funciones convexas φ son importantes en la dualidad, reflexividad o separabilidad de espacios de Orlicz a valores vectoriales. Las condiciones de crecimiento más importantes que son las condiciones Δ_2 y ∇_2 aseguran que la función convexa φ puede ser comparada con las funciones φ_p donde $\varphi_p(x) = |x|^p$ para $p > 1$. En la teoría clásica de espacios de Orlicz, este resultado se encuentra en la Prop. 12 de Rao. En el caso de $\mathbb{R}^n$, prueba se encuentra en Desch. CHEQUEAR!!!!

Definición 1.7. *Sea φ una función de $\mathbb{R}^n$ a $[0, \infty]$.*

La función φ se dice que satisface la condición Δ_2 si existen $L > 1$ y $M \geq 0$ tal que $\varphi(2x) \leq L\varphi(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ con $|x| \geq M$.

La función φ se dice que satisface la condición ∇_2 si existen $l > 1$ y $M \geq 0$ tal que $\varphi(x) \leq \frac{1}{2l}\varphi(\frac{x}{l})$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ con $|x| \geq M$.

Hay una relación muy importante entre las condiciones de crecimiento de φ y su conjungada de Fenchel φ^*. Para funciones convexas $\varphi : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ las relaciones están bien estudiadas en RAO. En DESCH (buscarlo!!!), se prueba el siguiente resultado.

Observación 1. Sea $\varphi : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ y sea φ^* su conjugada de Fenchel. Sean φ y φ^* coercitivas. Entonces, $\varphi \in \Delta_2$ si y sólo si $\varphi^* \in \nabla_2$.

2. Espacios de Orlicz

Notamos con $\mathcal{M} := \mathcal{M}([0, T], \mathbb{R}^n)$ el conjunto de todas las funciones medibles definidas sobre $[0, T]$ con valores en $\mathbb{R}^n$ y escribimos $u = (u_1, \ldots, u_n)$ for $u \in \mathcal{M}$.

Definimos el espacio de Orlicz

$$L^\Phi(\mathbb{R}^n) = \{u \in \mathcal{M} : \exists \lambda > 0, \int_0^T \Phi(\lambda^{-1}u)\, dx < \infty\}$$

A continuación definimos la clase de Orlicz $C^\Phi = C^\Phi([0, T], \mathbb{R}^n)$ del siguiente modo

$$C^\Phi := \{u \in L^\Phi(\mathbb{R}^n) : \int_0^T \Phi(u) < \infty\}$$

Para $u \in L^{\Phi}(\mathbb{R}^n)$ definimos

$$\|u\|_{L^{\Phi}} = \text{ínf}\{\lambda > 0 : \int_0^T \Phi(\lambda^{-1}u)\, dx \leq 1\}$$

En la teoría clásica $\|\cdot\|_{L^{\Phi}}$ es llamada norma de Luxemburgo de u.

Teorema 2.1. *$\|\cdot\|_{L^{\Phi}}$ es semicontinua inferior, o sea, para cada sucesión $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^{\Phi}(\mathbb{R}^n)$ que converge en c.t.p.a alguna función $u \in L^{\Phi}(\mathbb{R}^n)$ se tiene que*

$$\|u\|_{L^{\Phi}} \leq \liminf_{n\to\infty} \|u_n\|_{L^{\Phi}}$$

Demostración. La prueba para el caso clásico está en [RR91, Prop. 4, pp. 56-57]. Se supone que sale con modificaciones menores CHEQUEAR!!!!!!! □

Teorema 2.2. *$L^{\Phi}(\mathbb{R}^n)$ es un espacio lineal si y sólo si $\Phi \in \Delta_2$.*

Demostración. $\Rightarrow$) Sigue de [RR91, Thm. 2, pp. 46-47]. Y, la otra parte sale como en el Gudrum sin necesidad de aclarar que la medida es difusa ni que [0,T] tiene medida finita. □

Los siguientes resultados siguen las consideraciones de [Ska69, Sub-cap 4].

Teorema 2.3. *Si $E \in \mathcal{A}$, $|E| > 0$ y $\Phi \in \Delta_2$. Entonces existe $u \in C^{\Phi}$ tal que $\beta u \notin L^{\Phi}(\mathbb{R}^n)$ para todo $\beta > 1$.*

Corolario 2.4. *Suspongamos que $\Phi \notin \Delta_2$, $E \in \mathcal{A}$, $|E| > 0$. Entonces existe $u \in L^{\Phi}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\beta u \in C^{\Phi}$ para todo $0 \leq \beta < 1$ y $\beta u \notin C^{\Phi}$ para todo $\beta \geq 1$.*

3. Normas absolutamente continuas

Definición 3.1. *Sea $\{u_n\} \subseteq L^{\Phi}(\mathbb{R}^n)$, $u \in L^{\Phi}(\mathbb{R}^n)$. Decimos que u_n converge monótonamente a u si existe una sucesión $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in L^1([0,T],\mathbb{R})$ con $0 \leq \alpha_n(t) \leq \alpha_{n+1}(t) \leq 1$, $\alpha_n \to 1$ en c.t.p y $u_n(t) = \alpha_n(t)u(t)$.*

Lema 3.2. *Sea $\Phi \in \Delta_2$ y $u_n \to u$ monótonamente. Entonces $\lim_{n\to\infty} \|u - u_n\|_{L^{\Phi}} = 0$.*

Demostración. Ver [DG01] para demostraciión en detalle. □

Proposición 3.3. *Si $\Phi \notin \Delta_2$, entonces existe $u \in L^{\Phi}(\mathbb{R}^n)$ y una sucesión $\{u_n\} \subseteq L^{\Phi}(\mathbb{R}^n)$ tal que $u_n \to u$ monótonamente, pero $\|u - u_n\|_{L^{\Phi}}$ no converge a 0.*

Demostración. [Sch05] □

Lema 3.4. *Sea $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^{\infty}([0,T],\mathbb{R}^n)$. Si $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente acotada y u_n converge a 0 en c.t.p. Entonces $\|u_n\|_{L^{\Phi}} \to 0$ para $n \to \infty$.*

Demostración. Ver [DG01]. □

Definición 3.5. *Sea* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *un espacio de medida y* $(B, \|\cdot\|)$ *un espacio vectorial normado de funciones medibles de* Ω *en* X*. Sea* $u \in B$

1. *Decimos que* u *tiene* **norma absolutamente continua en el sentido fuerte** *si y sólo si* $\|\chi E_n u\| \to 0$ *para cada sucesión* $E_n \in \mathcal{A}$ *con* $\chi E_n(w) \to 0$ *para casi todo* $w \in \Omega$*.*
2. *Decimos que* u *tiene* **norma absolutamente continua en el sentido débil** *si y sólo si* $\|\chi E_n u\| \to 0$ *para cada sucesión* $E_n \in \mathcal{A}$ *con* $\mu(E_n) \to 0$*.*

A continuación presentamos un ejemplo de que la absoluta continuidad de la norma en el sentido débil no implica la absoluta continuidad de la norma en el sentido fuerte.

Lema 3.6. *Sea* $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ *continua, monótona creciente con* $\varphi(0) = 0$ *y tal que*

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\varphi(2x)}{\varphi(x)} = \infty.$$

Entonces existe una función medible $u : [0, \infty) \to [0, 1]$ *tal que*

$$\int_0^\infty \varphi(u(t))\, dt \leq 1, \quad y \quad \int_0^\infty \varphi(2u(t))\, dt = \infty.$$

Ejemplo 1. Sea $\varphi(x) = \int_0^{|x|}(|x| - y)e^{\frac{-1}{y}}\, dy$, entonces φ es convexa, par, creciente en $[0, \infty)$, $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$ y $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\varphi(2x)}{\varphi(x)} = \infty$.

Sea $\|\cdot\|$ la norma de Luxemburgo con respecto a φ. Sea u construída de acuerdo al Lema anterior, entonces u tiene norma absolutamente continua en el sentido débil pero no en el sentido fuerte.

Demostración. Ver [Sch05, p.366]. □

Sea $D^\Phi(\mathbb{R}^n)$ el espacio lineal de todas las funciones de $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ que tienen norma absolutamente continua en el sentido débil.

Teorema 3.7. *Sea* $u \in L^\Phi(\mathbb{R}^n)$*. Entonces, son equivalentes:*

1. $u \in D^\Phi(\mathbb{R}^n)$
2. *toda sucesión* $\{u_n\}$ *que converge monótonamente a* u *también converge en norma, o sea,* $\|u - u_n\|_\Phi \to 0$*.*

Demostración. Ver [Sch05, pp. 366-367]. □

Teorema 3.8. *Sea* $u \in L^\Phi(\mathbb{R}^n)$*. Entonces son equivalentes:*

1. *u tiene norma absolutamente continua en el sentido fuerte;*
2. *u tiene norma absolutamente continua en el sentido débil y existe una sucesión* $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \cdots \subset [0, T]$ *tal que* $\|(1 - \chi\Omega_k)u\|_\Phi \to 0$*.*
3. *Si* $u_n \to u$ *monótonamente, entonces* $\|u - u_n\|_\Phi \to 0$

Demostración. Ver [Sch05, p. 368] □

4. La clausura de L^Φ

Definición 4.1. *Con $E^\Phi(\mathbb{R}^n)$ notamos el conjunto de todas las funciones $u \in \mathcal{M}$ tal que existe una sucesión de funciones acotadas $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ con $\|u - u_n\|_\Phi \to 0$ para $n \to \infty$.*

Observación 2. $E^\Phi(\mathbb{R}^n)$ es un subespacio lineal de $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. [Sch05, p. 369]. □

Teorema 4.2. *$E^\Phi(\mathbb{R}^n) \subset C^\Phi(\mathbb{R}^n)$.*

Demostración. [Sch05, pp. 369-370]. □

Teorema 4.3. *$\varphi \in \Delta_2$ sii $E^\Phi(\mathbb{R}^n) = L^\Phi(\mathbb{R}^n)$.*

Demostración. Corolario 5.1 en [Sch05, pp. 371]. □

Teorema 4.4. *Si u tiene norma absolutamente continua en el sentido fuerte, entonces $u \in E^\Phi(\mathbb{R}^n)$. Y como $[0,T]$ tiene medida finita, lo mismo es cierto para cualquier u con norma absolutamente continua en el sentido débil, o sea $D^\Phi(\mathbb{R}^n) \subseteq E^\Phi(\mathbb{R}^n)$.*

Demostración. [Sch05, p. 372]. □

De acuerdo a lo que sigue, lo anterior no tiene importancia!!!!!

Más aún,

Teorema 4.5. *Como Φ está acotada sobre conjuntos acotados y $[0,T]$ tiene medida finita, entonces $D^\Phi(\mathbb{R}^n) = E^\Phi(\mathbb{R}^n)$.*

Demostración. [Sch05, p.373] □

Corolario 4.6. *Toda $u \in L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ tiene norma absolutamente continua en el sentido débil sii $\Phi \in \Delta_2$.*

Demostración. Cor. 5.2 en [Sch05, p. 373] □

Corolario 4.7. *Sea $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E^\Phi(\mathbb{R}^n)$ una sucesión que converge monótonamente a alguna $u \in E^\Phi(\mathbb{R}^n)$, entonces $\|u - u_n\|_\Phi \to 0$.*

Demostración. Cor. 5.3 en [Sch05, p.373] □

Definición 4.8. *Para cualquier $u \in L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ definimos*

$$d_{E^\Phi(\mathbb{R}^n)}(u) := \inf\{\|u - v\|_\Phi, v \in E^\Phi(\mathbb{R}^n)\}.$$

Valen las siguientes propiedades:

1. $d_{E^\Phi(\mathbb{R}^n)}(u+v) \leq d_{E^\Phi(\mathbb{R}^n)}(u) + d_{E^\Phi(\mathbb{R}^n)}(v)$, para todos $u, v \in L^\Phi(\mathbb{R}^n)$,
2. $d_{E^\Phi(\mathbb{R}^n)}(\beta u) = |\beta| d_{E^\Phi(\mathbb{R}^n)}(u)$, para todo $u \in L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ y para todo $\beta \in \mathbb{R}$.

Teorema 4.9. *Si $u \in L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ y*

$$u_n(w) = \begin{cases} u(w) & \|u(u)\|_\Phi \leq n \\ 0 & enotrocaso \end{cases}$$

entonces $d_{E^\Phi(\mathbb{R}^n)}(u) = \liminf_{n\to\infty} \|u - u_n\|_\Phi$.

Demostración. La prueba sigue la demostración de [RR91, Prop. 3, pp. 92-92]. □

Definición 4.10. *Definimos los subconjuntos de $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$:*

$$S^\Phi := \{u \in L^\Phi(\mathbb{R}^n) : d_{E^\Phi(\mathbb{R}^n)}(u) < 1\}$$

$$\overline{S}^\Phi := \{u \in L^\Phi(\mathbb{R}^n) : d_{E^\Phi(\mathbb{R}^n)}(u) \leq 1\}$$

Teorema 4.11.

$$S^\Phi \subseteq C^\Phi \subseteq \overline{S}^\Phi$$

Si $\Phi \notin \Delta_2$,

$$S^\Phi \subset C^\Phi \subset \overline{S}^\Phi$$

Demostración. [Sch05, pp. 374-375] □

5. Completitud y separabilidad de $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$

Teorema 5.1. *Sea $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ una sucesión de Cauchy, i.e. para cada $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|u_{n+m} - u_n\|_\Phi < \epsilon$ para todo $n \geq n_0$ y $m \geq 1$. Entonces existe $u \in L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ tal que $\|u - u_n\|_\Phi \to 0$ para $n \to \infty$.*

Demostración. [Sch05, pp. 375-376] □

Teorema 5.2. *Si $\Phi \notin \Delta_2$, entonces $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ NO es separable.*

Demostración. [Sch05, p. 376] □

Teorema 5.3. *$E^\Phi(\mathbb{R}^n)$ es separable.*

Demostración. [Sch05, p. 376] □

Corolario 5.4. *$L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ es separable sii $\Phi \in \Delta_2$.*

6. Propiedades de dualidad de $L^{\Phi}(\mathbb{R}^n)$

Definición 6.1. *Por $(L^{\Phi}(\mathbb{R}^n))^*$ notamos el conjunto de todas las funciones $F : L^{\Phi}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ con las siguientes propiedades:*

1. *F es lineal*
2. *existe $M > 0$ tal que $|F(u)| \leq M\|u\|_{\Phi}$ para toda $u \in L^{\Phi}(\mathbb{R}^n)$ y $O_{\Phi}(F) := \text{ínf}\{M > 0 : \forall u \in L^{\Phi}(\mathbb{R}^n), |F(u)| \leq M\|u\|_{\Phi}\}$*

Definición 6.2. *$F \in (L^{\Phi}(\mathbb{R}^n))^*$ se dice que tiene la propiedad de la convergencia monótona sii para cada $u \in L^{\Phi}(\mathbb{R}^n)$ y para cada sucesión $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^{\Phi}(\mathbb{R}^n)$ que converge monótonamente a u se tiene que $F(u_n) \to F(u)$.*

Sea $P^{\Phi^*}(\mathbb{R}^n)$ el conjunto de todas las funciones con la propiedad de la convergencia monótona y $P^{\Phi^*}(\mathbb{R}^n) \subseteq (L^{\Phi}(\mathbb{R}^n))^*$.

Teorema 6.3. $(L^{\Phi}(\mathbb{R}^n))^* = P^{\Phi^*}(\mathbb{R}^n)$

FALTA EL RESTO DEL TRABAJO DE [Sch05]

7. Operadores de Nemitsky

Sean $f : \Omega \times \mathbb{R}^{d_2} \to \mathbb{R}^{d_3}$, $u : \Omega \to \mathbb{R}^{d_2}$ y $\boldsymbol{f}u(x) = f(x, u(x)) \in \mathbb{R}^{d_3}$ con $x \in \mathbb{R}^{d_1}$.

Definición 7.1. *Sea $u : \Omega \to \mathbb{R}^{d_2}$. Diremos que u es medible sii $u^{-1}(B) \in \mathcal{B}_{d_1}(\Omega)$ $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d_2})$ donde $\mathcal{B}(E) = \sigma$-álgebra de Borel.*

Definición 7.2. *f satisface la condición de Caratheodory si $f(x, u)$ es medible en x $\forall u$ y es continua en u para c.t.p $x \in \Omega$.*

Notamos con $\mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^d)$ al conjunto de las funciones medibles Borel de Ω en $\mathbb{R}^d$.

Teorema 7.3. *Sea $u : \Omega \to \mathbb{R}^{d_1}$. Si u es medible, entonces $\boldsymbol{f}(u) \in \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^{d_3})$.*

Demostración. Veamos que si $u \in \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^{d_1})$, entonces $u_i \in \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R})$ para $i = 1, \ldots, d_1$ y donde $u_i = p_i \circ u$ siendo p_i la proyección.

Si $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $u_i^{-1}(B) = u^{-1}(p_i^{-1}(B)) \in \mathcal{B}(\Omega)$ con $p_i^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d_1})$.

Si u es simple, $u(s) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$ para $\alpha_i \in \mathbb{R}^{d_1}$.

Luego $\boldsymbol{f}(u)(x) = f(x, u(x)) = \sum_{i=1}^{n} f(x, \alpha_i \chi_{A_i}) - (n-1)f(x, 0)$ resulta medible porque, debido a la condición de Caratheodory tanto $f(x, 0)$ como cada $f(x, \alpha_i \chi_{A_i})$ son medibles. Observemos que

$$f(x, \alpha\chi_A) = \begin{cases} f(x,0) & en \quad A^C \\ f(x,\alpha) & en \quad A \end{cases}$$

siendo $f(x, 0)$ y $f(x, \alpha)$ medibles en Ω.

Si u es medible de $\Omega \to \mathbb{R}^{d_1}$, existen funciones simples u_n tales que $u_n \to u$ "puntualmente". Ahora,

$$f(x, u(x)) = \lim_{n\to\infty} f(x, u_n(x))$$

en c.t.p $x \in \Omega$ siendo u_n medibles (por el paso anterior) porque f es continua en u para c.t.p de Ω. Además $f(x, u_n(x))$ es medible en x para todo u_n, luego $f(x, u(x))$ es medible en Ω (en c.t.p $x \in \Omega$, $f(x, u(x))$ es medible por ser el límite de medibles y en el conjunto de medida nula porque la pre-imagen es medible). □

Lema 7.4. *Supongamos que $f(x, u)$ satisface la condición de Caratheodory, entonces $\forall\delta > 0$ $\exists\Omega_\delta \subset \Omega$ tal que $m(\Omega - \Omega_\delta) < \delta$, entonces $f : \Omega_\delta \times \mathbb{R}^{d_2} \to \mathbb{R}^{d_3}$ continua (con respecto a la variable combinada (x, u)).*

Demostración. Siguiendo las mismas líneas que la demostración de [KZPS11, Lemma 17.1] obtenemos que para todo $n_0 \in \mathbb{N}$ y $\delta > 0$, obtenemos un $G = G(n_0, \delta)$ y un $\eta = \eta(\delta, n_0)$ tal que

$$|\Omega - G| < 2^{-n_0-1}\delta$$

y

$$|u_1 - u_2| < \eta, \quad u_1, u_2 \in [-n_0, n_0]^{d_2} \text{ y } x \in G \Rightarrow |f(x, u_1) - f(x, u_2)| \leq \frac{1}{n_0}$$

Ahora consideramos una "partición/descomposición" $[-n_0, n_0]^{d_2} = \bigcup_{k=1}^{N} Q_k$, donde $\operatorname{diam}(Q_j) <$ $\overline{B(0, n_0)} = \bigcup_{i=1}^{q} B(u_i, \frac{1}{2k_0})$ Por el Teorema de Luisin, existe para cada función $f(s, u_i)$ un conjunto cerrado $G_{n_0}^{(i)}$ tal que

$$|G_{k_0} - G_{n_0}^{(i)}| < \frac{\delta}{2^{n_0+1}q} \; i = 1, \ldots, q$$

y donde $f(s, u_i)$ es continua.

Ponemos $\Omega_{n_0} = \bigcap_{i=1}^{q} G_{n_0}^{(i)}$, entonces

$$|G_{k_0} - \Omega_{n_0}| = |G_{k_0} - \bigcap_{i=1}^{q} G_{n_0}^{(i)}| \leq \sum_{i=1}^{q} |G_{k_0} - G_{n_0}^{(i)}| \leq 2^{-n_0-1}\delta$$

y como $|\Omega - \Omega_{n_0}| < 2^{-n_0-1}\delta$, entonces $|\Omega - G_{k_0}| < 2^{-n_0}\delta$.

Consideramos la función $f_{n_0}(s, u)$, $s \in \Omega_{n_0}$, $u \in \overline{B(0, n_0)}$ definida por su valor en $u =$??? combinación convexa o algo así!!!! BUSCAR PROGRAMACIÓN LINEAL SIMPLEX!!!! □

Referencias

[DG01] W. Desch and R. Grimmer. On the well-posedness of constitutive laws involving dissipation potentials. *Trans. Amer. Math. Soc*, (353):5095–5120, 2001.

[KZPS11] M.A. Krasnosel'skii, P.P. Zabreyko, E.I. Pustylnik, and P.E. Sobolevski. *Integral operators in spaces of summable functions*. Mechanics: Analysis. Springer Netherlands, 2011.

[RR91] M.M. Rao and Z.D. Ren. *Theory of Orlicz spaces*. M. Dekker, 1991.

[Sch05] Gudrun Schappacher. A notion of orlicz spaces for vector valued functions. *Applications of Mathematics*, 50(4):355–386, 2005.

[Ska69] Michael Skaff. Vector valued orlicz spaces generalized n-functions. i. *Pacific Journal of Mathematics*, 28(1):193–206, 1969.