# Soluciones simétricas del problema de los $N$-cuerpos

Fernando Mazzone

Depto de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas, Físico-Químicas y Naturales, Universidad Nacional de Río Cuarto
CONICET

Seminario de Investigación en Matemática Aplicada

# Problema



## Sistema físico

**Espacio:** Espacio euclideano $d$ dimensional $d \geq 2$ ($\mathbb{R}^d$).

**Objetos:** $N$-puntos de masas $m_1, m_2, \ldots, m_N$,

**Variables:** tiempo $t$, posiciones $\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{x}_i(t) \in \mathbb{R}^d$, $i = 1, \ldots, N$,

**Fuerzas:** gravitacionales,

**Leyes físicas:** Mecánica Newtoniana: Segunda Ley y Ley de gravitación universal.

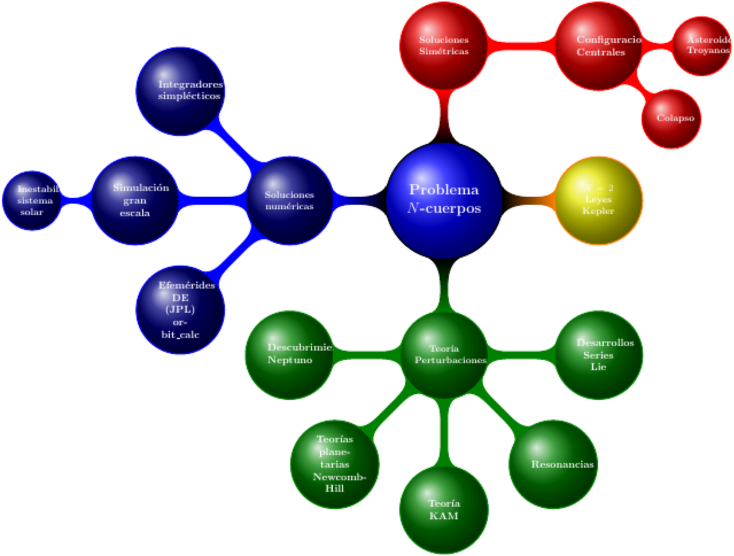
# Ecuación de los $N$-cuerpos

## Ecuaciones $N$-cuerpos

$$\boldsymbol{x}_i''(t) = G \sum_{j \neq i} m_j \frac{\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_i}{\|\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_i\|^3}.$$

$G$ constante gravitación universal, supondremos $G = 1$.

# Problemas: mapa conceptual



# Notaciones

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_N) \in \mathbb{R}^{d\times N}, \quad \text{Matríz configuración, } \boldsymbol{x},$$

$$r_{ij} = \|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j\|, \quad \text{distancias relativas,}$$

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & 0_{d\times d} & \cdots & 0_{d\times d} \\ 0_{d\times d} & M_2 & \cdots & 0_{d\times d} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0_{d\times d} & \cdots & & M_N \end{pmatrix}, \; M_j = \begin{pmatrix} m_j & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & m_j \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d\times d}$$

$$U(\boldsymbol{x}) = \sum_{i<j} \frac{m_i m_j}{r_{ij}} \quad \text{Potencial newtoniano}$$

$$\Delta = \{\boldsymbol{x}_j = \boldsymbol{x}_j | \text{ para algunos } i \neq j\},$$

$$\mathbb{R}^{dN} - \Delta \quad \text{Espacio de configuraciones .}$$

# Notaciones

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{x}' \quad \text{(Velocidades)}$$

$$K(\boldsymbol{v}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{v} \cdot M\boldsymbol{v} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} m_j \|\boldsymbol{v}_j\|^2, \quad \text{(Energía cinética)}$$

$$\boldsymbol{c} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{N} m_j \boldsymbol{x}_j, \quad \text{con } m := \sum_{j=1}^{N} m_j \quad \text{(Centro masas)}$$

$$\boldsymbol{p} = \sum_{j=1}^{N} m_j \boldsymbol{v}_j, \quad \text{(momento total)}$$

$$\omega_{kl} = \sum_{j=1}^{N} m_j \left(\boldsymbol{x}_{jk}\boldsymbol{v}_{jl} - \boldsymbol{x}_{jl}\boldsymbol{v}_{jk}\right), \text{ (Momento angular total } \omega^t = -\omega$$

# Notaciones

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{c}, \ldots, \boldsymbol{x}_N - \boldsymbol{c})$$

$$I(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}) \cdot M(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}) \quad \text{(Momento de inercia)}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} m_j \|\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{c}\|^2,$$

## Ecuación $N$-cuerpos

$$M\boldsymbol{x}''(t) = \nabla U(\boldsymbol{x}), \text{ (Ecuación } N\text{-cuerpos)}$$

# Simetrías e integrales primeras (Emmy Noether)

- **Simetría por traslaciones** ($\boldsymbol{x}_j \to \boldsymbol{x}_j + \boldsymbol{v}_0 t + \boldsymbol{c}_0$, $\boldsymbol{c}_0, \boldsymbol{v}_0 \in \mathbb{R}^d$) $\Rightarrow$ $\boxed{\text{conservación } \boldsymbol{p} = \boldsymbol{c}'}$ $\Rightarrow$ movimiento rectilineo uniforme de $\boldsymbol{c}$
- **Simetría por rotaciones** ($\boldsymbol{x}_j \to Q\boldsymbol{x}_j$, $Q \in O(d)$) $\Rightarrow$ $\boxed{\text{conservación } \omega}$
- La **energía total** $H : \underbrace{\left(\mathbb{R}^d - \Delta\right) \times \mathbb{R}^d}_{\text{Espacio fases}} \to \mathbb{R}$,

$$H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) = K(\boldsymbol{v}) - U(\boldsymbol{x}),$$

se conserva

# Otras simetrías

- $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ se denomina homogénea de grado $\alpha \in \mathbb{R}$ si $f(t\boldsymbol{x}) = t^\alpha f(\boldsymbol{x})$.
- Si $f$ es homogénea de grado $\alpha$ entonces $\nabla f(x)$ es homkogénea de grado $\alpha - 1$.
- **Teorema Euler:** Si $f$ es homogénea de grado $\alpha$ entonces $\nabla f(x) \cdot x = \alpha f(x)$.
- $U$ es homogénea de grado $-1$, $\nabla U$ es homogénea de grado $-2$ e $I$ es homogénea de grado 2.
- **Invariancia por traslaciones:** si $\boldsymbol{c}_0 \in \mathbb{R}^d \Rightarrow U(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}_0) = U(\boldsymbol{x})$.
- **Invariancia por rotaciones:** si $Q \in O(d) \Rightarrow U(Q\boldsymbol{x}) = U(\boldsymbol{x})$. Por consiguiente $\nabla U(Q\boldsymbol{x}) = Q\nabla U(\boldsymbol{x})$.

# Configuraciones centrales (CC)



## Definición

Una configuración de puntos masa, con masas $m_1, \ldots, m_N$ y posiciones $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_N$ es central si existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\nabla U(\boldsymbol{x}) + \lambda M(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}) = \nabla U(\boldsymbol{x}) + \lambda \nabla I(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}) = 0.$$

**Observación:** En una configuración central el vector aceleración sobre cada cuerpo apunta hacia $\boldsymbol{c}$ y es proporcional a la distancia a $\boldsymbol{c}$.

# Existencia de CC

- Cuando $N = 2$ todas las configuraciones son centrales.
- Para masas arbitrarias la existencia es poco clara.
- **Soluciones sencillas** Si todas las masas son iguales $m_1 = m_2 = \cdots = m_N$ podemos ponerlas como vértices de un polítopo, polígono regular del plano, poliedro regular (sólido platónico), etc. Claramente la configuración es central. Se puede agregar una masa arbitraria en el centro.
- Notoriamente en el caso del regular $d$-simplex (triángulo equilátero, tetraedro, etc) tenemos CC independientemente de las masas.

# Soluciones homográficas

## Definición

Una solución $\boldsymbol{x}(t)$ de las ecuaciones de los $N$-cuerpos es homográfica si, y sólo si, existe una función escalar $r : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, una matricial $Q : \mathbb{R} \to SO(d)$ y un vector fijo $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^{dN}$ tal que

$$\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{c}(t) = r(t)Q(t)(\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{c}_0),$$

donde $\boldsymbol{c}_0$ y $\boldsymbol{c}(t)$ son los centros de masas de $\boldsymbol{x}_0$ y $\boldsymbol{x}(t)$ respectivamente.

## Soluciones homotéticas



### Definicion

Si $Q = I$ (identidad $d \times d$) la solución se dice homotética.

Remplazando en la ecuación de los $N$ cuerpos

$$r''(t)M(\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{c}_0) = \frac{1}{r^2(t)}\nabla U(\boldsymbol{x}_0)$$

Por consiguiente debe existir $\lambda \in \mathbb{R}$

$$r''(t) = -\frac{\lambda}{r^2(t)} \quad \text{y} \quad M(\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{c}_0) = -\lambda\nabla U(\boldsymbol{x}_0).$$

$r(t)$ es una solución del problema de Kepler unidimensional y $\boldsymbol{x}_0$ es una CC.

# Soluciones homotéticas

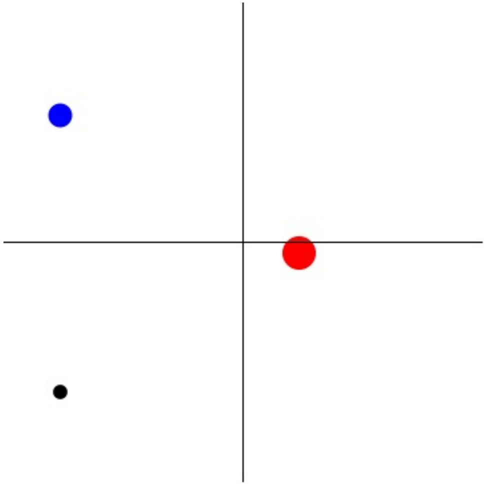


Imagen: Richard Moeckel