Métodos Variacionales y Sistemas Hamiltonianos

Jornadas de Ciencia y Técnica 2016, UNLPam
20 años de las Jornadas de Ciencia y Técnica

Fernando Mazzone(1,2,3), Sonia Acinas(1), Lorenzo Sierras(1), Stefanía Demarías(2,3) y Leopoldo Buri(2)

(1) Dpto. de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Nacional de La Pampa.
(2) Depto. de Matemática. Universidad Nacional de Río Cuarto.
(3) CONICET

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
Universidad Nacional de La Pampa

Ecuaciones de Euler-Lagrange

Muchos sistemas físicos se modelan con un sistema de ecuaciones del tipo

$$\frac{d}{dt}D_y\mathcal{L}(t,u(t),\dot{u}(t)) = D_x\mathcal{L}(t,u(t),\dot{u}(t)) \quad \text{a.e. } t\in(0,T) \tag{1}$$

donde $T>0$, $u:[0,T]\to\mathbb{R}^d$ y la función $\mathcal{L}:[0,T]\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ se denomina *Lagrangiano.*

Ejemplos

- Las ecuaciones que gobiernan el movimiento de un cuerpo de masa m sujeta a un resorte son de la forma (1) con $\mathcal{L}=m\frac{y^2}{2}+k\frac{x^2}{2}$. En este caso x representa el desplazamiento de la masa desde su posición de equilibrio.
- Las ecuaciones que gobiernan el movimiento de una masa sujeta a un péndulo son de la forma (1) con $\mathcal{L}=m\frac{y^2}{2}+\sqrt{\frac{g}{l}}\sin(x)$. En este caso x representa el desplazamiento angular desde la vertical del péndulo.
- Las ecuaciones que gobiernan el movimiento de n-cuerpos graves interactuando entre si a traves de sus campos gravitatorios son de la forma (1) con

$$\mathcal{L}(t,x,y)=\frac{1}{2}\sum_i^n m_i\|y_i\|^2+G\sum_{i<j}\frac{m_im_j}{\|x_i-x_j\|},$$

aquí $x=(x_1,\dots,x_n)$ con $x_i(t)\in\mathbb{R}^3$ son las posiciones de los cuerpos.
- En general las ecuaciones (1) son características de sistemas mecánicos conservativos. Esto es, sistemas donde la energía total $E=T+U$, con T la energía cinética y U la energía potencial se conserva. En este caso $\mathcal{L}=T-U$.

Soluciones Periódicas

Es importante conocer si los sistemas mecánicos tienen soluciones periódicas. Por ejemplo, si se trata del problema de los n-cuerpos esto es importante para la planificación de misiones espaciales.
Soluciones periódicas se hallan resolviendo las ecuaciones (1) sujeta a las condiciones de contorno

$$u(0)-u(T)=u'(0)-u'(T)=0. \tag{2}$$

Vamos a presentar nuestros resultados en dos grupos: resultados de derivabilidad Gâteaux y resultados de coeritividad. La semicontinuidad inferior de nuestras integrales de acción es obtenida de resultados generales que esencialmente ya existían en la literatura.

Objetivos-Metodología

En este proyecto planeamos encontrar soluciones de (1) sujeta a (2) a través de métodos variacionales.
Esto se fundamenta en la observación de que las soluciones del problema de contorno son putnos críticos de la *integral de acción*

$$I(u)=\int_0^T\mathcal{L}(t,u(t),\dot{u}(t))\,dt. \tag{3}$$

Un punto crítico es una función u tal que cuando la integral de acción es perturbada infinitesimalmente $I(u+\epsilon v)$ la integral de acción cambia en un infinésimo menor al de la perturbación para toda función v que satisface las condiciones de contorno. Esto es decir

$$\lim_{\epsilon\to0}\frac{1}{\epsilon}\int_0^T(\mathcal{L}(t,u+\epsilon v,u'+\epsilon v')-\mathcal{L}(t,u,u'))dt=0. \tag{4}$$

Cuando el límite anterior existe (independientemente que de 0) y el resultado del límite es una función lineal y acotada Λ de v. Se dice que Λ es la **derivada Gâteaux** de I. Decir que λ es función lineal y acotada es afirmar que Λ pertenece al espacio dual del espacio en el que consideremos a u. Un problema importante es hallar condiciones sobre $\mathcal{L}$ para que I tenga una derivada Gâteaux.
Hay una variedad muy grande métodos variacionales: método directo, método dual, Teorema punto silla de Rabinowitz, Teoría de Morse, Teoría de Leray-Schauder, Teoremas minimax, etc.
En una primera etapa estamos investigando la aplicabilidad del método directo y el método dual a cierto tipo especial de Lagrangianos.

El método directo

Se basa en el hecho que los puntos extremos de I son puntos críticos. Luego quisieramos elaborar condiciones que garanticen la existencia de puntos extremos, normalmente mínimos.
Las funciones u deben pertencer a cierto espacio X normado (Banach) de funciones. El éxito del método radica en establecer la **semicontinuidad inferior** de I, estos que si $u_n\to u$ entonces

$$I(u)\leqslant\liminf_{n\to\infty}I(u_n),$$

y la **coercitividad** de I, esto es

$$\lim_{\|u\|\to\infty}I(u)=\infty.$$

Lagrangianos, integrales de acción y sus dominios

Nuestro interés es estudiar Lagrangianos que satisfacen las siguientes condiciones estructurales

$$|\mathcal{L}(t,x,y)|\leqslant a(|x|)\left(b(t)+\Phi\left(\frac{|y|}{\lambda}+f(t)\right)\right) \tag{5}$$

$$|D_x\mathcal{L}(t,x,y)|\leqslant a(|x|)\left(b(t)+\Phi\left(\frac{|y|}{\lambda}+f(t)\right)\right), \tag{6}$$

$$|D_y\mathcal{L}(t,x,y)|\leqslant a(|x|)\left(c(t)+\varphi\left(\frac{|y|}{\lambda}+f(t)\right)\right). \tag{7}$$

Aquí hemos introducido varias entes nuevos, a saber

- λ un número positivo
- $a:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ continua.
- Φ es una N-función. Este es un concepto algo técnico que remitimos a [Krasnosel'skiĭ and Rutickiĭ, 1961] para su tratamiento.
- $b\in L^1([0,T])$, $c\in L^\Psi$ y $f\in E^\Phi$, donde Ψ es la N-función complementaria de Φ y L^1 es el espacio de Banach clásico de funciones integrables y L^Φ, L^Ψ y E^Φ son espacios de Orlicz y ciertos subespacios de ellos (ver [Krasnosel'skiĭ and Rutickiĭ, 1961]).
- $f\in E^\Phi$.

La idea de considerar la estructura anterior para los Lagrangianos se basa en que este tipo de estructura generaliza a la tratada previamente en la literatura y por nuestra experiencia previa tratando con N-funciones.
Las condiciones de estructura (5),(6) y (7) garantizan que nuestras integrales de acción tienen como dominios espacios de Sobolev-Orlicz [Adams and Fournier, 2003, Acinas et al., 2015].

Critical points

Now we are in condition to show that solutions of (1) are critical points of I on $W^1L^\Phi_T$, where $W^1L^\Phi_T$ denotes the subspace of W^1L^Φ consisting of T-periodic functions.

Theorem

Let $u\in\mathcal{E}^\Phi_d(\lambda)$ be a T-periodic function. The following statements are equivalent:

- $I'(u)\in\left(W^1L^\Phi_T\right)^\perp$.
- *$D_y\mathcal{L}(t,u(t),\dot{u}(t))$ is an absolutely continuous function and u solves the following boundary value problem*

$$\begin{cases}\frac{d}{dt}D_y\mathcal{L}(t,u(t),\dot{u}(t))=D_x\mathcal{L}(t,u(t),\dot{u}(t)) \quad \text{a.e. } t\in(0,T)\\ u(0)-u(T)=D_y\mathcal{L}(0,u(0),\dot{u}(0))-D_y\mathcal{L}(T,u(T),\dot{u}(T))=0.\end{cases} \tag{8}$$

Moreover if $D_y\mathcal{L}(t,x,y)$ is T-periodic with respect to the variable t and strictly convex with respect to y, then $D_y\mathcal{L}(0,u(0),\dot{u}(0))-D_y\mathcal{L}(T,u(T),\dot{u}(T))=0$ is equivalent to $\dot{u}(0)=\dot{u}(T)$.

Coercivity

As usual, in order to establish coercivity of our action integral we need to suppose an adequate bound from below of the lagrangian function. In this respect we assume that

$$\mathcal{L}(t,x,y)\geq\alpha_0\Phi\left(\frac{|y|}{\Lambda}\right)+F(t,x), \tag{9}$$

where $\alpha_0,\Lambda>0$ and $F:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ is a Carathéodory function, i.e. $F(t,x)$ is measurable with respect to t for every fixed $x\in\mathbb{R}^d$ and F is continuous at x for a.e. $t\in[0,T]$. We need to assume

$$|F(t,x)|\leqslant a(|x|)b_0(t), \quad \text{for a.e. } t\in[0,T] \quad \text{and for every } x\in\mathbb{R}^d, \tag{10}$$

where $b_0\in L^1_1$.
We say that F satisfies the condition (A) if $F(t,x)$ is a Carathéodory function, F verifies (10) and F is continuously differentiable with respect to x. Moreover, the next inequality holds

$$|D_xF(t,x)|\leqslant a(|x|)b_0(t), \quad \text{for a.e. } t\in[0,T] \text{ and for every } x\in\mathbb{R}^d. \tag{11}$$

We can show that the coercivity of the action integral I is obtained if the functional

$$J_{C,\nu}(u):=\rho_\Phi\left(\frac{u}{\Lambda}\right)-C\|u\|^\nu_{L^\Phi}, \tag{12}$$

is coercive for $C,\nu>0$.
If $\Phi(x)=|x|^p/p$ then $J_{C,\nu}$ is clearly coercive for $\nu<p$. For more general Φ the situation is more interesting.

Lemma

Let Φ and Ψ be complementary N-functions. Then:

- *If $C\Lambda<1$, then $J_{C,1}$ is coercive.*
- *If $\Psi\in\Delta_2$ globally, then there exists a constant $\alpha_\Phi>1$ such that, for any $0<\mu<\alpha_\Phi$,*

$$\lim_{\|u\|_{L^\Phi}\to\infty}\frac{\rho_\Phi\left(\frac{u}{\Lambda}\right)}{\|u\|^\mu_{L^\Phi}}=+\infty. \tag{13}$$

In particular, the functional $J_{C,\mu}$ is coercive for every $C>0$ and $0<\mu<a_\Phi$. The constant α_Φ is one of the so-called Matuszewska-Orlicz indices.
- *If $J_{C,1}$ is coercive with $C\Lambda>1$, then $\Psi\in\Delta_2$.*

Theorem (Coercivity I)

Let $\mathcal{L}$ be a lagrangian function satisfying (5), (6), (7), (9) and (10). We assume the following conditions:

- *There exist a non negative function $b_1\in L^1_1$ and a constant $\mu>0$ such that for any $x_1,x_2\in\mathbb{R}^d$ and a.e. $t\in[0,T]$*

$$|F(t,x_2)-F(t,x_1)|\leqslant b_1(t)(1+|x_2-x_1|^\mu). \tag{14}$$

We suppose that $\mu<\alpha_\Phi$, with α_Φ as in previous lemma, in the case that $\Psi\in\Delta_2$; and, we suppose $\mu=1$ if Ψ is an arbitrary N-function.
-

$$\int_0^TF(t,x)\,dt\to\infty \quad as \quad |x|\to\infty. \tag{15}$$

- *$\Psi\in\Delta_2$ or, alternatively, $\alpha_0^{-1}T\Phi^{-1}(1/T)\,\|b_1\|_{L^1}\Lambda<1$.*

Then the action integral I is coercive.

We can formulate an alternative coercivity result. We need to mention the following technical fact.

Lemma (Mawhin-Willem)

Suppose that F satisfies condition (A) and (15), $F(t,\cdot)$ is differentiable and convex a.e. $t\in[0,T]$. Then, there exists $x_0\in\mathbb{R}^d$ such that

$$\int_0^TD_xF(t,x_0)\,dt=0. \tag{16}$$

Theorem (Coercivity II)

Let $\mathcal{L}$ be as in Theorem (Coercivity I) and let F be as in previous lemma. Moreover, assume that $\Psi\in\Delta_2$ or, alternatively $\alpha_0^{-1}T\Phi^{-1}(1/T)\,a(|x_0|)\|b_0\|_{L^1}\Lambda<1$, with a and b_0 as in (10) and $x_0\in\mathbb{R}^d$ any point satisfying (16). Then I is coercive.

Main results

Let Φ and Ψ be complementary N-functions. Suppose that the Carathéodory function $\mathcal{L}(t,x,y)$ is strictly convex at y, $D_y\mathcal{L}$ is T-periodic with respect to T and (5), (6), (7), (9), (10) and (15) are satisfied. In addition, assume that some of the following statements hold (we recall the definitions and properties of α_0, b_1, x_0 and b_0 from (9), (14), (16) and (11) respectively):

- $\Psi\in\Delta_2$ and (14).
- (14) and $\alpha_0^{-1}T\Phi^{-1}(1/T)\,\|b_1\|_{L^1}\Lambda<1$.
- $\Psi\in\Delta_2$, F satisfies condition (A) and $F(t,\cdot)$ is convex a.e. $t\in[0,T]$.
- As previous item but with $\alpha_0^{-1}T\Phi^{-1}(1/T)\,a(|x_0|)\|b_0\|_{L^1}\Lambda<1$ instead of $\Psi\in\Delta_2$.

Then, problem (1) has a solution.

Bibliografía

Acinas, S., Buri, L., Giubergia, G., Mazzone, F., and Schwindt, E. (2015).