Constante Óptima desigualdad Poincaré–Wirtinger en L^p (9)

$$\int_0^T |u-\bar{u}|^p dt \leq C_p \frac{T^p}{T^p} \int_0^T |u'|^p dx$$

Con $u \in H^{1,p}_T([0,T], \mathbb{R}^n)$.

La constante óptima satisface:

$$C_p^{-1} := \inf_u \left\{ \frac{T^p \int_0^T |u'|^p dt}{\int_0^T |u-\bar{u}|^p dt} \;\middle|\; u \in H^{1,p}_T \right\}$$

$$= \inf \left\{ \frac{T^p \int_0^T |u'|^p dt}{\int_0^T |u|^p dt} \;\middle|\; u \in H^{1,p}_T,\ \int_0^T u = 0 \right\}$$

Lema C_p independiente de T.

Dem) Sean $T \neq T'$. Si u está cerca de hacer el ínfimo para T.

$$C_p(T)^{-1} + \varepsilon > T^p \frac{\int_0^T |u'(t)|^p dt}{\int_0^T |u(t)|^p dt}$$

Hacemos el cambio de variables.
$s = \frac{T'}{T} t$ en las integrales. $(r = T/T')$

$$T^p \frac{\int_0^T |u'(t)|^p dt}{\int_0^T |u(t)|^p dt} = T^p \frac{\int_0^{T'} |u'(rs)|^p ds}{\int_0^{T'} |u(rs)|^p ds}$$

$$= (T')^p \frac{\int_0^{T'} |v'(s)|^p ds}{\int_0^{T'} |v(s)|^p ds} \geq C_p(T')^{-1}$$

donde $v(s) = u(rs)$. Esto prueba que $C_p(T') \leq C_p(T)$ y por ende $C_p(T') = C_p(T)$ □

Lema

$$C_p^{-1} = \inf \left\{ T^p \int_0^T |u'|^p dt \;\middle|\; u \in H_T^{1,p}, \int_0^T u = 0, \int_0^T |u|^p dt = 1 \right\}$$

Dem Es facil

Luego, la constante óptima es un problema de optimización con restricciones. Aplicamos

(11)

Multiplicadores de Lagrange, Hay que hallar puntos críticos de

$$I = \int_0^T |u'|^p dt + \lambda \int_0^T |u|^p dt + \mu \int_0^T u\, dt \qquad u \in H_T^{1,p}$$

La derivada de Gateaux del funcional es

$$\langle I'(u), v \rangle = \int_0^T p|u'|^{p-2} u' \cdot v' + p\lambda \int_0^T |u|^{p-2} u \cdot v + \mu \int_0^T v\, dt$$

$$= \int_0^T \left\{ -\frac{d}{dt}\left(p|u'|^{p-2}u'\right) - p\lambda |u|^{p-2} u + \mu \right\} \cdot v\, dt$$

$$+ \; p|u'|^{p-2} u' \cdot v \Big|_0^T = 0$$

Tomando v con $v(T) = v(0) = 0$

y como v es arbitrario

(1) $-\frac{d}{dt}\left(p|u'|^{p-2}u'\right) - p\lambda |u|^{p-2} u + \mu = 0$ en L^p

Esto implica $p|u'|^{p-2} u' \cdot v \Big|_0^T = 0 \quad \forall v \in H_T^{1,p}$

$$\left[p|u'(T)|^{p-2}u'(T) - p|u'(0)|^{p-2}u'(0)\right]\cdot v'(0) = 0$$

Luego $\Rightarrow$ $u'(T) = u'(0)$.

Entonces integrando (*)

$$p\lambda \int_0^T |u|^{p-2}u + \mu T = 0$$

A) Si $p=2$ entonces $\mu=0$ y

$$-\begin{cases} u'' + \lambda u = 0 \\ u(0) = u(T) \\ \int_0^T u = 0 \end{cases}$$

La solución normalizada es

$$u(t) = \cos(\sqrt{\lambda}\, t)\, \overset{\in \mathbb{R}^n}{U_0} + \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}\, t)\, \overset{\in \mathbb{R}^n}{U_1}$$

Como $u(0)=u(T)$ $u'(0)=u'(T)$. La función $u(t)$ tiene periodo mínimo $\frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}$ y es solución de EDO, ~~lineal~~ 2^{do} orden autónoma

Luego $u(0)=u(T)$, $u'(0)=u'(T)$ implica que tiene periodo T

Como $u \neq 0$ se tiene

$$k \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}} = T \qquad k = 1, 3 \ldots$$

Entonces $\lambda = k^2 \dfrac{4\pi^2}{T^2}$ (2)

Ahora si

$$u_k(t) = \cos\left(2 \frac{k\pi}{T} t\right) u_0 + \operatorname{sen}\left(2\frac{k\pi}{T} t\right) u_1$$

$$1 = \int_0^T |u_k|^2 dt = \underbrace{\int \left[\cos\left(2\frac{k\pi}{T} t\right)\right]^2 dt}_{T/2} |u_0|^2 + \underbrace{\int_0^T \left(\operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{T} t\right)\right)^2 dt}_{T/2} |u_1|^2 + \underbrace{\int_0^T \cos\left(\frac{2k\pi}{T} t\right) \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{T} t\right) dt}_{0} \, u_0 \cdot u_1$$

$$= \frac{T}{2}\left(|u_0|^2 + |u_1|^2\right)$$

$$T^2 \int_0^T |u_k'|^2 dt = T^2 \left(\frac{2k\pi}{T}\right)^2 \left\{ \int_0^T \left[\operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi t}{T}\right)\right]^2 |u_0|^2 + \int_0^T \left[\cos\left(\frac{2k\pi}{T} t\right)\right]^2 dt \, |u_1|^2 + 0 \right.$$

$$\left(\frac{2k\pi}{T}\right)^2 \frac{T}{2}\left(|u_0|^2+|u_1|^2\right) = 4k^2\pi^2$$

El mínimo es cuando $k=1$

Llegamos

$$\boxed{C_2^{-1} = 4\pi^2}$$

Luego

$$\int_0^T |u|^2 \leq \frac{T^2}{4\pi^2}\int |u'|^2$$

Era más fácil usar la ecuación y(2)

Multiplicando por u la ecuación e integrando

$$\frac{k^2 4\pi^2}{T^2} = \lambda = \frac{\int_0^T (u')^2}{\int (u)^2}$$ El mínimo es $k=1$

Cuando $p \neq 2$ no se simplifica el término con μ