

Soluciones simétricas del problema de los N -cuerpos

Fernando Mazzone

Depto de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas, Físico-Químicas y
Naturales, Universidad Nacional de Río Cuarto
CONICET



Seminario de Investigación en Matemática Aplicada

Problema

Soluciones
simétricas

F. Mazzone

Problema de
los N -cuerpos

Ecuación
Simetrías

Soluciones
homográficas

Configuraciones
Centrales

Soluciones
homotéticas

Movimientos planos

Equilibrios relativos

Soluciones
homográficas para
 $d > 3$

Configuraciones
Centrales

Invariencias

Finitud de ER

Configuraciones de
Euler, Lagrange y
Moulton ($d = 3$)

Sistema físico

Espacio: Espacio euclideo d dimensional $d \geq 2$ (\mathbb{R}^d).

Objetos: N -puntos de masas m_1, m_2, \dots, m_N ,

Variables: tiempo t , posiciones $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i(t) \in \mathbb{R}^d$,
 $i = 1, \dots, N$,

Fuerzas: gravitacionales,

Leyes físicas: Mecánica Newtoniana: Segunda Ley y Ley
de gravitación universal.

Ecuación de los N -cuerpos

Soluciones
simétricas

F. Mazzone

Problema de
los N -cuerpos

Ecuación
Simetrías

Soluciones
homográficas

Configuraciones
Centrales

Soluciones
homotéticas

Movimientos planos

Equilibrios relativos

Soluciones
homográficas para
 $d > 3$

Configuraciones
Centrales

Invariencias

Finitud de ER

Configuraciones de
Euler, Lagrange y
Moulton ($d = 3$)

Ecuaciones N -cuerpos

$$\mathbf{x}_i''(t) = G \sum_{j \neq i} m_j \frac{\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i}{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|^3}.$$

G constante gravitación universal, supondremos $G = 1$.

Problemas: mapa conceptual

Soluciones
simétricas

F. Mazzone

Problema de
los N -cuerpos

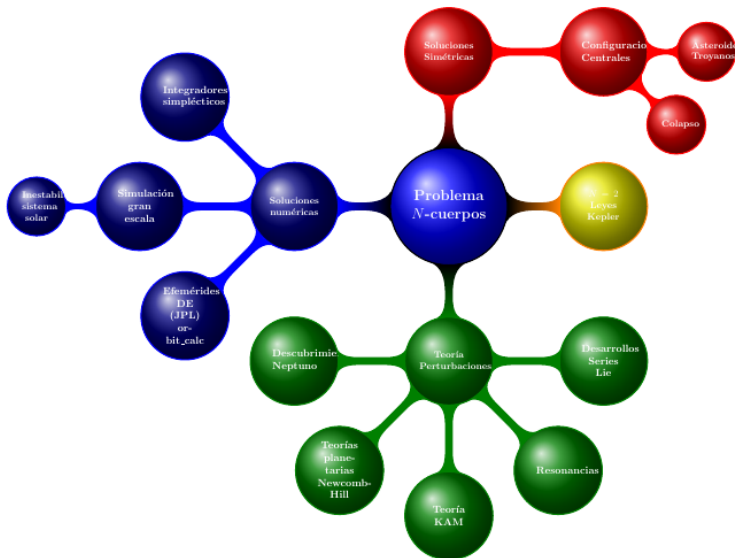
Ecuación
Simetrías

Soluciones
homográficas

Configuraciones
Centrales
Soluciones
homotéticas
Movimientos planos
Equilibrios relativos
Soluciones
homográficas para
 $d > 3$

Configuraciones
Centrales

Invariantes
Finitud de ER
Configuraciones de
Euler, Lagrange y
Moulton ($d = 3$)



Notaciones

Soluciones
simétricas

F. Mazzone

Problema de
los N -cuerpos

Ecuación
Simetrías

Soluciones
homográficas

Configuraciones
Centrales

Soluciones
homotéticas

Movimientos planos

Equilibrios relativos

Soluciones
homográficas para
 $d > 3$

Configuraciones
Centrales

Invariantes

Finitud de ER

Configuraciones de
Euler, Lagrange y
Moulton ($d = 3$)

$\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) \in \mathbb{R}^{d \times N}$, Matriz configuración, \mathbf{x} ,

$r_{ij} = \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|$, distancias relativas,

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & 0_{d \times d} & \cdots & 0_{d \times d} \\ 0_{d \times d} & M_2 & \cdots & 0_{d \times d} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0_{d \times d} & \cdots & & M_N \end{pmatrix}, M_j = \begin{pmatrix} m_j & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & m_j \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d \times d}$$

$$U(\mathbf{x}) = \sum_{i < j} \frac{m_i m_j}{r_{ij}} \quad \text{Potencial newtoniano}$$

$\Delta = \{\mathbf{x}_j = \mathbf{x}_j \mid \text{para algunos } i \neq j\}$,

$\mathbb{R}^{dN} - \Delta$ Espacio de configuraciones .

Notaciones

Soluciones
simétricas

F. Mazzone

Problema de
los N -cuerpos

Ecuación
Simetrías

Soluciones
homográficas

Configuraciones
Centrales

Soluciones
homotéticas

Movimientos planos

Equilibrios relativos

Soluciones
homográficas para
 $d > 3$

Configuraciones
Centrales

Invariantias

Finitud de ER

Configuraciones de
Euler, Lagrange y
Moulton ($d = 3$)

$\mathbf{v} = \mathbf{x}'$ (Velocidades)

$$K(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot M \mathbf{v} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N m_j \|\mathbf{v}_j\|^2, \quad (\text{Energía cinética})$$

$$\mathbf{c} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^N m_j \mathbf{x}_j, \quad \text{con } m := \sum_{j=1}^N m_j \quad (\text{Centro masas})$$

$$\mathbf{p} = \sum_{j=1}^N m_j \mathbf{v}_j, \quad (\text{momento total})$$

$$\omega_{kl} = \sum_{j=1}^N m_j (\mathbf{x}_{jk} \mathbf{v}_{jl} - \mathbf{x}_{jl} \mathbf{v}_{jk}), \quad (\text{Momento angular total } \omega^t = -\omega)$$

Notaciones

Soluciones
simétricas

F. Mazzone

Problema de
los N -cuerpos

Ecuación
Simetrías

Soluciones
homográficas

Configuraciones
Centrales

Soluciones
homotéticas

Movimientos planos

Equilibrios relativos

Soluciones
homográficas para
 $d > 3$

Configuraciones
Centrales

Invariencias

Finitud de ER

Configuraciones de
Euler, Lagrange y
Moulton ($d = 3$)

$$\mathbf{x} - \mathbf{c} = (\mathbf{x}_1 - \mathbf{c}, \dots, \mathbf{x}_N - \mathbf{c})$$

$$I(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{c}) \cdot M(\mathbf{x} - \mathbf{c}) \quad (\text{Momento de inercia})$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N m_j \|\mathbf{x}_j - \mathbf{c}\|^2,$$

Ecuación N -cuerpos

$$M\mathbf{x}''(t) = \nabla U(\mathbf{x}), \text{ (Ecuación } N\text{-cuerpos)}$$



Simetrías e integrales primeras (Emmy Noether)

Soluciones simétricas

F. Mazzone

Problema de
los N -cuerpos

Ecuación
Simetrías

Soluciones
homográficas

Configuraciones
Centrales

Soluciones
homotéticas

Movimientos planos

Equilibrios relativos

Soluciones
homográficas para
 $d > 3$

Configuraciones
Centrales

Invariantes

Finitud de ER

Configuraciones de
Euler, Lagrange y
Moulton ($d = 3$)

- **Simetría por traslaciones** ($\mathbf{x}_j \rightarrow \mathbf{x}_j + \mathbf{v}_0 t + \mathbf{c}_0$, $\mathbf{c}_0, \mathbf{v}_0 \in \mathbb{R}^d$) \Rightarrow conservación $\mathbf{p} = \mathbf{c}'$ \Rightarrow movimiento rectilíneo uniforme de \mathbf{c}

- **Simetría por rotaciones** ($\mathbf{x}_j \rightarrow Q\mathbf{x}_j$, $Q \in O(d)$) \Rightarrow conservación ω

- **La energía total** $H : \underbrace{(\mathbb{R}^d - \Delta) \times \mathbb{R}^d}_{\text{Espacio fases}} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = K(\mathbf{v}) - U(\mathbf{x}),$$

se conserva



Simetrías e integrales primeras (Emmy Noether)

Soluciones
simétricas

F. Mazzone

Problema de
los N -cuerpos

Ecuación
Simetrías

Soluciones
homográficas

Configuraciones
Centrales

Soluciones
homotéticas

Movimientos planos

Equilibrios relativos

Soluciones
homográficas para
 $d > 3$

Configuraciones
Centrales

Invariencias

Finitud de ER

Configuraciones de
Euler, Lagrange y
Moulton ($d = 3$)

- **Simetría por traslaciones** ($\mathbf{x}_j \rightarrow \mathbf{x}_j + \mathbf{v}_0 t + \mathbf{c}_0$, $\mathbf{c}_0, \mathbf{v}_0 \in \mathbb{R}^d$) \Rightarrow conservación $\mathbf{p} = \mathbf{c}'$ \Rightarrow movimiento rectilíneo uniforme de \mathbf{c}

- **Simetría por rotaciones** ($\mathbf{x}_j \rightarrow Q\mathbf{x}_j$, $Q \in O(d)$) \Rightarrow conservación ω

- La **energía total** $H : \underbrace{(\mathbb{R}^d - \Delta) \times \mathbb{R}^d}_{\text{Espacio fases}} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = K(\mathbf{v}) - U(\mathbf{x}),$$

se conserva



Simetrías e integrales primeras (Emmy Noether)

Soluciones
simétricas

F. Mazzone

Problema de
los N -cuerpos

Ecuación
Simetrías

Soluciones
homográficas

Configuraciones
Centrales

Soluciones
homotéticas

Movimientos planos

Equilibrios relativos

Soluciones
homográficas para
 $d > 3$

Configuraciones
Centrales

Invariantes

Finitud de ER

Configuraciones de
Euler, Lagrange y
Moulton ($d = 3$)

- **Simetría por traslaciones** ($\mathbf{x}_j \rightarrow \mathbf{x}_j + \mathbf{v}_0 t + \mathbf{c}_0$, $\mathbf{c}_0, \mathbf{v}_0 \in \mathbb{R}^d$) \Rightarrow conservación $\mathbf{p} = \mathbf{c}'$ \Rightarrow movimiento rectilíneo uniforme de \mathbf{c}
- **Simetría por rotaciones** ($\mathbf{x}_j \rightarrow Q\mathbf{x}_j$, $Q \in O(d)$) \Rightarrow conservación ω
- La **energía total** $H : \underbrace{(\mathbb{R}^d - \Delta) \times \mathbb{R}^d}_{\text{Espacio fases}} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = K(\mathbf{v}) - U(\mathbf{x}),$$

se conserva

Otras simetrías

Soluciones simétricas

F. Mazzone

Problema de
los N -cuerpos

Ecuación

Simetrías

Soluciones
homográficas

Configuraciones
Centrales

Soluciones
homotéticas

Movimientos planos

Equilibrios relativos

Soluciones
homográficas para
 $d > 3$

Configuraciones
Centrales

Invariencias

Finitud de ER

Configuraciones de
Euler, Lagrange y
Moulton ($d = 3$)

- $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m$ se denomina homogénea de grado $\alpha \in \mathbb{R}$ si $f(t\mathbf{x}) = t^\alpha f(\mathbf{x})$.
- Si f es homogénea de grado α entonces $\nabla f(\mathbf{x})$ es homogénea de grado $\alpha - 1$.
- **Teorema Euler:** Si f es homogénea de grado α entonces $\nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} = \alpha f(\mathbf{x})$.
- U es homogénea de grado -1 , ∇U es homogénea de grado -2 e I es homogénea de grado 2 .
- **Invariencia por traslaciones:** si $\mathbf{c}_0 \in \mathbb{R}^d \Rightarrow U(\mathbf{x} + \mathbf{c}_0) = U(\mathbf{x})$.
- **Invariencia por rotaciones:** si $Q \in O(d) \Rightarrow U(Q\mathbf{x}) = U(\mathbf{x})$. Por consiguiente $\nabla U(Q\mathbf{x}) = Q\nabla U(\mathbf{x})$.

Otras simetrías

Soluciones simétricas

F. Mazzone

Problema de
los N -cuerpos

Ecuación
Simetrías

Soluciones
homográficas

Configuraciones
Centrales

Soluciones
homotéticas

Movimientos planos

Equilibrios relativos

Soluciones
homográficas para
 $d > 3$

Configuraciones
Centrales

Invariencias

Finitud de ER

Configuraciones de
Euler, Lagrange y
Moulton ($d = 3$)

- $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m$ se denomina homogénea de grado $\alpha \in \mathbb{R}$ si $f(t\mathbf{x}) = t^\alpha f(\mathbf{x})$.
- Si f es homogénea de grado α entonces $\nabla f(\mathbf{x})$ es homogénea de grado $\alpha - 1$.
- **Teorema Euler:** Si f es homogénea de grado α entonces $\nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} = \alpha f(\mathbf{x})$.
- U es homogénea de grado -1 , ∇U es homogénea de grado -2 e I es homogénea de grado 2 .
- **Invariancia por traslaciones:** si $\mathbf{c}_0 \in \mathbb{R}^d \Rightarrow U(\mathbf{x} + \mathbf{c}_0) = U(\mathbf{x})$.
- **Invariancia por rotaciones:** si $Q \in O(d) \Rightarrow U(Q\mathbf{x}) = U(\mathbf{x})$. Por consiguiente $\nabla U(Q\mathbf{x}) = Q\nabla U(\mathbf{x})$.

Otras simetrías

Soluciones simétricas

F. Mazzone

Problema de
los N -cuerpos

Ecuación
Simetrías

Soluciones
homográficas

Configuraciones
Centrales

Soluciones
homotéticas

Movimientos planos

Equilibrios relativos

Soluciones
homográficas para
 $d > 3$

Configuraciones
Centrales

Invariencias

Finitud de ER

Configuraciones de
Euler, Lagrange y
Moulton ($d = 3$)

- $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m$ se denomina homogénea de grado $\alpha \in \mathbb{R}$ si $f(t\mathbf{x}) = t^\alpha f(\mathbf{x})$.
- Si f es homogénea de grado α entonces $\nabla f(\mathbf{x})$ es homogénea de grado $\alpha - 1$.
- **Teorema Euler:** Si f es homogénea de grado α entonces $\nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} = \alpha f(\mathbf{x})$.
- U es homogénea de grado -1 , ∇U es homogénea de grado -2 e I es homogénea de grado 2 .
- **Invariancia por traslaciones:** si $\mathbf{c}_0 \in \mathbb{R}^d \Rightarrow U(\mathbf{x} + \mathbf{c}_0) = U(\mathbf{x})$.
- **Invariancia por rotaciones:** si $Q \in O(d) \Rightarrow U(Q\mathbf{x}) = U(\mathbf{x})$. Por consiguiente $\nabla U(Q\mathbf{x}) = Q\nabla U(\mathbf{x})$.

Otras simetrías

Soluciones simétricas

F. Mazzone

Problema de
los N -cuerpos

Ecuación
Simetrías

Soluciones
homográficas

Configuraciones
Centrales

Soluciones
homotéticas

Movimientos planos

Equilibrios relativos

Soluciones
homográficas para
 $d > 3$

Configuraciones
Centrales

Invariencias

Finitud de ER

Configuraciones de
Euler, Lagrange y
Moulton ($d = 3$)

- $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m$ se denomina homogénea de grado $\alpha \in \mathbb{R}$ si $f(t\mathbf{x}) = t^\alpha f(\mathbf{x})$.
- Si f es homogénea de grado α entonces $\nabla f(\mathbf{x})$ es homogénea de grado $\alpha - 1$.
- **Teorema Euler:** Si f es homogénea de grado α entonces $\nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} = \alpha f(\mathbf{x})$.
- U es homogénea de grado -1 , ∇U es homogénea de grado -2 e I es homogénea de grado 2 .
- **Invariancia por traslaciones:** si $\mathbf{c}_0 \in \mathbb{R}^d \Rightarrow U(\mathbf{x} + \mathbf{c}_0) = U(\mathbf{x})$.
- **Invariancia por rotaciones:** si $Q \in O(d) \Rightarrow U(Q\mathbf{x}) = U(\mathbf{x})$. Por consiguiente $\nabla U(Q\mathbf{x}) = Q\nabla U(\mathbf{x})$.

Otras simetrías

Soluciones simétricas

F. Mazzone

Problema de
los N -cuerpos

Ecuación
Simetrías

Soluciones
homográficas

Configuraciones
Centrales

Soluciones
homotéticas

Movimientos planos

Equilibrios relativos

Soluciones
homográficas para
 $d > 3$

Configuraciones
Centrales

Invariencias

Finitud de ER

Configuraciones de
Euler, Lagrange y
Moulton ($d = 3$)

- $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m$ se denomina homogénea de grado $\alpha \in \mathbb{R}$ si $f(t\mathbf{x}) = t^\alpha f(\mathbf{x})$.
- Si f es homogénea de grado α entonces $\nabla f(\mathbf{x})$ es homogénea de grado $\alpha - 1$.
- **Teorema Euler:** Si f es homogénea de grado α entonces $\nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} = \alpha f(\mathbf{x})$.
- U es homogénea de grado -1 , ∇U es homogénea de grado -2 e I es homogénea de grado 2 .
- **Invariancia por traslaciones:** si $\mathbf{c}_0 \in \mathbb{R}^d \Rightarrow U(\mathbf{x} + \mathbf{c}_0) = U(\mathbf{x})$.
- **Invariancia por rotaciones:** si $Q \in O(d) \Rightarrow U(Q\mathbf{x}) = U(\mathbf{x})$. Por consiguiente $\nabla U(Q\mathbf{x}) = Q\nabla U(\mathbf{x})$.

Otras simetrías

Soluciones simétricas

F. Mazzone

Problema de
los N -cuerpos

Ecuación
Simetrías

Soluciones
homográficas

Configuraciones
Centrales

Soluciones
homotéticas

Movimientos planos

Equilibrios relativos

Soluciones
homográficas para
 $d > 3$

Configuraciones
Centrales

Invariencias

Finitud de ER

Configuraciones de
Euler, Lagrange y
Moulton ($d = 3$)

- $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m$ se denomina homogénea de grado $\alpha \in \mathbb{R}$ si $f(t\mathbf{x}) = t^\alpha f(\mathbf{x})$.
- Si f es homogénea de grado α entonces $\nabla f(\mathbf{x})$ es homogénea de grado $\alpha - 1$.
- **Teorema Euler:** Si f es homogénea de grado α entonces $\nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} = \alpha f(\mathbf{x})$.
- U es homogénea de grado -1 , ∇U es homogénea de grado -2 e I es homogénea de grado 2 .
- **Invariancia por traslaciones:** si $\mathbf{c}_0 \in \mathbb{R}^d \Rightarrow U(\mathbf{x} + \mathbf{c}_0) = U(\mathbf{x})$.
- **Invariancia por rotaciones:** si $Q \in O(d) \Rightarrow U(Q\mathbf{x}) = U(\mathbf{x})$. Por consiguiente $\nabla U(Q\mathbf{x}) = Q\nabla U(\mathbf{x})$.

Configuraciones centrales (CC)

Soluciones
simétricas

F. Mazzone

Problema de
los N -cuerpos

Ecuación
Simetrías

Soluciones
homográficas

Configuraciones
Centrales

Soluciones
homotéticas

Movimientos planos

Equilibrios relativos

Soluciones
homográficas para
 $d > 3$

Configuraciones
Centrales

Invariantes

Finitud de ER

Configuraciones de
Euler, Lagrange y
Moulton ($d = 3$)

Definición

Una configuración de puntos masa, con masas m_1, \dots, m_N y posiciones $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N$ es central si existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\nabla U(\mathbf{x}) + \lambda M(\mathbf{x} - \mathbf{c}) = \nabla U(\mathbf{x}) + \lambda \nabla I(\mathbf{x} - \mathbf{c}) = 0.$$

Observación: En una configuración central el vector aceleración sobre cada cuerpo apunta hacia \mathbf{c} y es proporcional a la distancia a \mathbf{c} .

Configuraciones centrales (CC)

Soluciones
simétricas

F. Mazzone

Problema de
los N -cuerpos

Ecuación
Simetrías

Soluciones
homográficas

Configuraciones
Centrales

Soluciones
homotéticas

Movimientos planos

Equilibrios relativos

Soluciones
homográficas para
 $d > 3$

Configuraciones
Centrales

Invariantes

Finitud de ER

Configuraciones de
Euler, Lagrange y
Moulton ($d = 3$)

Definición

Una configuración de puntos masa, con masas m_1, \dots, m_N y posiciones $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N$ es central si existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\nabla U(\mathbf{x}) + \lambda M(\mathbf{x} - \mathbf{c}) = \nabla U(\mathbf{x}) + \lambda \nabla I(\mathbf{x} - \mathbf{c}) = 0.$$

Observación: En una configuración central el vector aceleración sobre cada cuerpo apunta hacia \mathbf{c} y es proporcional a la distancia a \mathbf{c} .

Existencia de CC

Soluciones simétricas

F. Mazzone

Problema de
los N -cuerpos

Ecuación
Simetrías

Soluciones
homográficas

Configuraciones
Centrales

Soluciones
homotéticas
Movimientos planos
Equilibrios relativos
Soluciones
homográficas para
 $d > 3$

Configuraciones
Centrales

Invariantes
Finitud de ER
Configuraciones de
Euler, Lagrange y
Moulton ($d = 3$)

- Cuando $N = 2$ todas las configuraciones son centrales.
- Para masas arbitrarias la existencia es poco clara.
- **Soluciones sencillas** Si todas las masas son iguales $m_1 = m_2 = \dots = m_N$ podemos ponerlas como vértices de un polítopo, polígono regular del plano, poliedro regular (sólido platónico), etc. Claramente la configuración es central. Se puede agregar una masa arbitraria en el centro.
- Notoriamente en el caso del regular d -simplex (triángulo equilátero, tetraedro, etc) tenemos CC independientemente de las masas.

Existencia de CC

Soluciones simétricas

F. Mazzone

Problema de
los N -cuerpos

Ecuación
Simetrías

Soluciones
homográficas

Configuraciones
Centrales

Soluciones
homotéticas

Movimientos planos

Equilibrios relativos

Soluciones
homográficas para
 $d > 3$

Configuraciones
Centrales

Invariantes

Finitud de ER

Configuraciones de
Euler, Lagrange y
Moulton ($d = 3$)

- Cuando $N = 2$ todas las configuraciones son centrales.
- Para masas arbitrarias la existencia es poco clara.
- **Soluciones sencillas** Si todas las masas son iguales $m_1 = m_2 = \dots = m_N$ podemos ponerlas como vértices de un polítopo, polígono regular del plano, poliedro regular (sólido platónico), etc. Claramente la configuración es central. Se puede agregar una masa arbitraria en el centro.
- Notoriamente en el caso del regular d -simplex (triángulo equilátero, tetraedro, etc) tenemos CC independientemente de las masas.

Existencia de CC

Soluciones simétricas

F. Mazzone

Problema de
los N -cuerpos

Ecuación
Simetrías

Soluciones
homográficas

Configuraciones
Centrales

Soluciones
homotéticas

Movimientos planos

Equilibrios relativos

Soluciones
homográficas para
 $d > 3$

Configuraciones
Centrales

Invariantes

Finitud de ER

Configuraciones de
Euler, Lagrange y
Moulton ($d = 3$)

- Cuando $N = 2$ todas las configuraciones son centrales.
- Para masas arbitrarias la existencia es poco clara.
- **Soluciones sencillas** Si todas las masas son iguales $m_1 = m_2 = \dots = m_N$ podemos ponerlas como vértices de un polítopo, polígono regular del plano, poliedro regular (sólido platónico), etc. Claramente la configuración es central. Se puede agregar una masa arbitraria en el centro.
- Notoriamente en el caso del regular d -simplex (triángulo equilátero, tetraedro, etc) tenemos CC independientemente de las masas.

Existencia de CC

Soluciones simétricas

F. Mazzone

Problema de
los N -cuerpos

Ecuación
Simetrías

Soluciones
homográficas

Configuraciones
Centrales

Soluciones
homotéticas
Movimientos planos
Equilibrios relativos
Soluciones
homográficas para
 $d > 3$

Configuraciones
Centrales

Invariantes
Finitud de ER
Configuraciones de
Euler, Lagrange y
Moulton ($d = 3$)

- Cuando $N = 2$ todas las configuraciones son centrales.
- Para masas arbitrarias la existencia es poco clara.
- **Soluciones sencillas** Si todas las masas son iguales $m_1 = m_2 = \dots = m_N$ podemos ponerlas como vértices de un polítopo, polígono regular del plano, poliedro regular (sólido platónico), etc. Claramente la configuración es central. Se puede agregar una masa arbitraria en el centro.
- Notoriamente en el caso del regular d -simplex (triángulo equilátero, tetraedro, etc) tenemos CC independientemente de las masas.

Soluciones homográficas

Soluciones
simétricas

F. Mazzone

Problema de
los N -cuerpos

Ecuación
Simetrías

Soluciones
homográficas

Configuraciones
Centrales

Soluciones
homotéticas

Movimientos planos

Equilibrios relativos

Soluciones
homográficas para
 $d > 3$

Configuraciones
Centrales

Invariantias

Finitud de ER

Configuraciones de
Euler, Lagrange y
Moulton ($d = 3$)

Definición

Una solución $\mathbf{x}(t)$ de las ecuaciones de los N -cuerpos es homográfica si, y sólo si, existe una función escalar $r : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$, una matricial $Q : \mathbb{R} \rightarrow SO(d)$ y un vector fijo $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^{dN}$ tal que

$$\mathbf{x}(t) - \mathbf{c}(t) = r(t)Q(t)(\mathbf{x}_0 - \mathbf{c}_0),$$

donde \mathbf{c}_0 y $\mathbf{c}(t)$ son los centros de masas de \mathbf{x}_0 y $\mathbf{x}(t)$ respectivamente.

Soluciones homotéticas

Soluciones
simétricas

F. Mazzone

Problema de
los N -cuerpos

Ecuación
Simetrías

Soluciones
homográficas

Configuraciones
Centrales

Soluciones
homotéticas

Movimientos planos

Equilibrios relativos

Soluciones
homográficas para
 $d > 3$

Configuraciones
Centrales

Invariantes

Finitud de ER

Configuraciones de
Euler, Lagrange y
Moulton ($d = 3$)

Definición

Si $Q = I$ (identidad $d \times d$) la solución se dice homotética.

Remplazando en la ecuación de los N cuerpos

$$r''(t)M(\mathbf{x}_0 - \mathbf{c}_0) = \frac{1}{r^2(t)} \nabla U(\mathbf{x}_0)$$

Por consiguiente debe existir $\lambda \in \mathbb{R}$

$$r''(t) = -\frac{\lambda}{r^2(t)} \quad \text{y} \quad M(\mathbf{x}_0 - \mathbf{c}_0) = -\lambda \nabla U(\mathbf{x}_0).$$

$r(t)$ es una solución del problema de Kepler unidimensional
y \mathbf{x}_0 es una CC.

Soluciones homotéticas

Soluciones
simétricas

F. Mazzone

Problema de
los N -cuerpos

Ecuación
Simetrías

Soluciones
homográficas

Configuraciones
Centrales

Soluciones
homotéticas

Movimientos planos

Equilibrios relativos

Soluciones
homográficas para
 $d > 3$

Configuraciones
Centrales

Invariantes

Finitud de ER

Configuraciones de
Euler, Lagrange y
Moulton ($d = 3$)

Definición

Si $Q = I$ (identidad $d \times d$) la solución se dice homotética.

Remplazando en la ecuación de los N cuerpos

$$r''(t)M(\mathbf{x}_0 - \mathbf{c}_0) = \frac{1}{r^2(t)} \nabla U(\mathbf{x}_0)$$

Por consiguiente debe existir $\lambda \in \mathbb{R}$

$$r''(t) = -\frac{\lambda}{r^2(t)} \quad \text{y} \quad M(\mathbf{x}_0 - \mathbf{c}_0) = -\lambda \nabla U(\mathbf{x}_0).$$

$r(t)$ es una solución del problema de Kepler unidimensional
y \mathbf{x}_0 es una CC.

Soluciones homotéticas

Soluciones
simétricas

F. Mazzone

Problema de
los N -cuerpos

Ecuación

Simetrías

Soluciones
homográficas

Configuraciones

Centrales

**Soluciones
homotéticas**

Movimientos planos

Equilibrios relativos

Soluciones
homográficas para
 $d > 3$

Configuraciones
Centrales

Invariantes

Finitud de ER

Configuraciones de
Euler, Lagrange y
Moulton ($d = 3$)

Imagen: Richard Moeckel

Movimiento plano

Soluciones
simétricas

F. Mazzone

Problema de
los N -cuerpos

Ecuación
Simetrías

Soluciones
homográficas

Configuraciones
Centrales

Soluciones
homotéticas

Movimientos planos

Equilibrios relativos
Soluciones
homográficas para
 $d > 3$

Configuraciones
Centrales

Invariantes

Finitud de ER

Configuraciones de
Euler, Lagrange y
Moulton ($d = 3$)

Suponiendo $d = 2$ (movimiento plano):

$$Q(t) = \begin{pmatrix} \cos(\theta(t)) & \sin(\theta(t)) \\ -\sin(\theta(t)) & \cos(\theta(t)) \end{pmatrix} \in SO(2)$$

Remplazando $\mathbf{x} - \mathbf{c} = rQ(\mathbf{x}_0 - \mathbf{c}_0)$ en la ecuación

$$r'' - r\theta'^2 = -\frac{\lambda}{r^2}, \quad r\theta'' + 2r'\theta' = 0 \quad \text{y} \quad -\lambda M(\mathbf{x}_0 - \mathbf{c}_0) = \nabla U(\mathbf{x}_0)$$

r, θ resuelven la ecuación (coordenadas polares) de la ecuación de los dos cuerpos. Los cuerpos describen elipses keplerianas homotéticas.

Movimiento plano

Soluciones
simétricas

F. Mazzone

Problema de
los N -cuerpos

Ecuación
Simetrías

Soluciones
homográficas

Configuraciones
Centrales

Soluciones
homotéticas

Movimientos planos

Equilibrios relativos
Soluciones
homográficas para
 $d > 3$

Configuraciones
Centrales

Invariantes

Finitud de ER

Configuraciones de
Euler, Lagrange y
Moulton ($d = 3$)

Suponiendo $d = 2$ (movimiento plano):

$$Q(t) = \begin{pmatrix} \cos(\theta(t)) & \sin(\theta(t)) \\ -\sin(\theta(t)) & \cos(\theta(t)) \end{pmatrix} \in SO(2)$$

Remplazando $\mathbf{x} - \mathbf{c} = rQ(\mathbf{x}_0 - \mathbf{c}_0)$ en la ecuación

$$r'' - r\theta'^2 = -\frac{\lambda}{r^2}, \quad r\theta'' + 2r'\theta' = 0 \quad \text{y} \quad -\lambda M(\mathbf{x}_0 - \mathbf{c}_0) = \nabla U(\mathbf{x}_0)$$

r, θ resuelven la ecuación (coordenadas polares) de la ecuación de los dos cuerpos. Los cuerpos describen elipses keplerianas homotéticas.

Movimiento plano

Soluciones
simétricas

F. Mazzone

Problema de
los N -cuerpos

Ecuación
Simetrías

Soluciones
homográficas

Configuraciones
Centrales

Soluciones
homotéticas

Movimientos planos

Equilibrios relativos
Soluciones
homográficas para
 $d > 3$

Configuraciones
Centrales

Invariantes

Finitud de ER

Configuraciones de
Euler, Lagrange y
Moulton ($d = 3$)

Suponiendo $d = 2$ (movimiento plano):

$$Q(t) = \begin{pmatrix} \cos(\theta(t)) & \sin(\theta(t)) \\ -\sin(\theta(t)) & \cos(\theta(t)) \end{pmatrix} \in SO(2)$$

Remplazando $\mathbf{x} - \mathbf{c} = rQ(\mathbf{x}_0 - \mathbf{c}_0)$ en la ecuación

$$r'' - r\theta'^2 = -\frac{\lambda}{r^2}, \quad r\theta'' + 2r'\theta' = 0 \quad \text{y} \quad -\lambda M(\mathbf{x}_0 - \mathbf{c}_0) = \nabla U(\mathbf{x}_0)$$

r, θ resuelven la ecuación (coordenadas polares) de la ecuación de los dos cuerpos. Los cuerpos describen elipses keplerianas homotéticas.

Movimiento rígido (equilibrio relativo)

Definición

Si $r(t) \equiv 1$ la solución (independientemente que $d = 2$) se dice que es un movimiento rígido o equilibrio relativo.

Soluciones
simétricas

F. Mazzone

Problema de
los N -cuerpos

Ecuación
Simetrías

Soluciones
homográficas

Configuraciones
Centrales

Soluciones
homotéticas

Movimientos planos

Equilibrios relativos

Soluciones
homográficas para
 $d > 3$

Configuraciones
Centrales

Invariantes

Finitud de ER

Configuraciones de
Euler, Lagrange y
Moulton ($d = 3$)

Soluciones homográficas para $d \geq 3$

Soluciones
simétricas

F. Mazzone

Problema de
los N -cuerpos

Ecuación
Simetrías

Soluciones
homográficas

Configuraciones
Centrales

Soluciones
homotéticas

Movimientos planos

Equilibrios relativos

Soluciones
homográficas para
 $d > 3$

Configuraciones
Centrales

Invariantes

Finitud de ER

Configuraciones de
Euler, Lagrange y
Moulton ($d = 3$)

En $d = 3$ la única solución no planar es el movimiento homotético

[Wintner, 2014, Moeckel, 1994, Jaume Llibre, 2016].

En $d > 3$ la situación es más compleja

[Albouy and Chenciner, 1997, Chenciner, 2011,
Chenciner and Jiménez-Pérez, 2013], ver

[Jaume Llibre, 2016].

Soluciones homográficas $d > 3$

Soluciones
simétricas

F. Mazzone

Problema de
los N -cuerpos

Ecuación
Simetrías

Soluciones
homográficas

Configuraciones
Centrales

Soluciones
homotéticas

Movimientos planos

Equilibrios relativos

Soluciones
homográficas para
 $d > 3$

Configuraciones
Centrales

Invariantes

Finitud de ER

Configuraciones de
Euler, Lagrange y
Moulton ($d = 3$)

Teorema

Sea \mathbf{x}_0 una CC y $C = \langle \mathbf{x}_{01} - \mathbf{c}_0, \dots, \mathbf{x}_{0N} - \mathbf{c}_0 \rangle$. Supongamos que existe $J \in \mathbb{R}^{d \times d}$ antisimétrica que satisface $J^2|_C = -I|_C$. Si r, θ son solución del problema de Kepler plano, entonces existe

$$\mathbf{x} - \mathbf{c} = r(t)Q(t)(\mathbf{x}_0 - \mathbf{c}_0)$$

con

$$Q(t) = e^{\theta(t)J}.$$

es una solución homográfica. Toda solución homográfica no rígida es de esta forma.

Soluciones homográficas $d > 3$

Soluciones
simétricas

F. Mazzone

Problema de
los N -cuerpos

Ecuación
Simetrías

Soluciones
homográficas

Configuraciones
Centrales

Soluciones
homotéticas

Movimientos planos

Equilibrios relativos

Soluciones
homográficas para
 $d > 3$

Configuraciones
Centrales

Invariantes

Finitud de ER

Configuraciones de
Euler, Lagrange y
Moulton ($d = 3$)

Definición

Si $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$

$$e^A = I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \dots$$

Ejemplo: $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $e^{tJ} = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$

Si A es antisimétrica e^A es ortogonal:

$$[e^A]^t e^A = e^{A^t} e^A = e^{-A} e^A = e^{-A+A} = I.$$

Soluciones homográficas $d > 3$

Soluciones
simétricas

F. Mazzone

Problema de
los N -cuerpos

Ecuación
Simetrías

Soluciones
homográficas

Configuraciones
Centrales

Soluciones
homotéticas

Movimientos planos

Equilibrios relativos

Soluciones
homográficas para
 $d > 3$

Configuraciones
Centrales

Invariencias

Finitud de ER

Configuraciones de
Euler, Lagrange y
Moulton ($d = 3$)

Definición

Si $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$

$$e^A = I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \dots$$

Ejemplo: $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e^{tJ} = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$

Si A es antisimétrica e^A es ortogonal:

$$[e^A]^t e^A = e^{A^t} e^A = e^{-A} e^A = e^{-A+A} = I.$$

Soluciones homográficas $d > 3$

Soluciones
simétricas

F. Mazzone

Problema de
los N -cuerpos

Ecuación
Simetrías

Soluciones
homográficas

Configuraciones
Centrales

Soluciones
homotéticas

Movimientos planos

Equilibrios relativos

Soluciones
homográficas para
 $d > 3$

Configuraciones
Centrales

Invariantes

Finitud de ER

Configuraciones de
Euler, Lagrange y
Moulton ($d = 3$)

Definición

Si $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$

$$e^A = I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \dots$$

Ejemplo: $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $e^{tJ} = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$

Si A es antisimétrica e^A es ortogonal:

$$[e^A]^t e^A = e^{A^t} e^A = e^{-A} e^A = e^{-A+A} = I.$$

Estructuras Hermitianas

Soluciones
simétricas

F. Mazzone

Problema de
los N -cuerpos

Ecuación
Simetrías

Soluciones
homográficas

Configuraciones
Centrales

Soluciones
homotéticas

Movimientos planos

Equilibrios relativos

Soluciones
homográficas para
 $d > 3$

Configuraciones
Centrales

Invariantes

Finitud de ER

Configuraciones de
Euler, Lagrange y
Moulton ($d = 3$)

Definición

Una estructura Hermitiana sobre un subespacio H viene dada por producto interno sobre H y una función lineal $J : H \rightarrow H$ que es antisimétrica respecto al producto interno.

Si J es la matriz del Teorema

- $H = C + JC$ tendrá una estructura Hermitiana, es invariante y $J^2|_H = -I|_H$.
- Una transformación antisimétrica tiene rango par.
Corolario: homográfico no homotético \Rightarrow plano.
- Es una condición necesaria que C este contenido en un espacio con dimensión par.
- A la vez es suficiente.

Estructuras Hermitianas

Soluciones
simétricas

F. Mazzone

Problema de
los N -cuerpos

Ecuación
Simetrías

Soluciones
homográficas

Configuraciones
Centrales

Soluciones
homotéticas

Movimientos planos

Equilibrios relativos

Soluciones
homográficas para
 $d > 3$

Configuraciones
Centrales

Invariantes

Finitud de ER

Configuraciones de
Euler, Lagrange y
Moulton ($d = 3$)

Definición

Una estructura Hermitiana sobre un subespacio H viene dada por producto interno sobre H y una función lineal $J : H \rightarrow H$ que es antisimétrica respecto al producto interno.

Si J es la matriz del Teorema

- $H = C + JC$ tendrá una estructura Hermitiana, es invariante y $J^2|_H = -I|_H$.
- Una transformación antisimétrica tiene rango par. Corolario: homográfico no homotético \Rightarrow plano.
- Es una condición necesaria que C este contenido en un espacio con dimensión par.
- A la vez es suficiente.

Estructuras Hermitianas

Soluciones
simétricas

F. Mazzone

Problema de
los N -cuerpos

Ecuación
Simetrías

Soluciones
homográficas

Configuraciones
Centrales

Soluciones
homotéticas

Movimientos planos

Equilibrios relativos

Soluciones
homográficas para
 $d > 3$

Configuraciones
Centrales

Invariantes

Finitud de ER

Configuraciones de
Euler, Lagrange y
Moulton ($d = 3$)

Definición

Una estructura Hermitiana sobre un subespacio H viene dada por producto interno sobre H y una función lineal $J : H \rightarrow H$ que es antisimétrica respecto al producto interno.

Si J es la matriz del Teorema

- $H = C + JC$ tendrá una estructura Hermitiana, es invariante y $J^2|_H = -I|_H$.
- Una transformación antisimétrica tiene rango par. Corolario: homográfico no homotético \Rightarrow plano.
- Es una condición necesaria que C este contenido en un espacio con dimensión par.
- A la vez es suficiente.

Estructuras Hermitianas

Soluciones
simétricas

F. Mazzone

Problema de
los N -cuerpos

Ecuación
Simetrías

Soluciones
homográficas

Configuraciones
Centrales

Soluciones
homotéticas

Movimientos planos

Equilibrios relativos

Soluciones
homográficas para
 $d > 3$

Configuraciones
Centrales

Invariantes

Finitud de ER

Configuraciones de
Euler, Lagrange y
Moulton ($d = 3$)

Definición

Una estructura Hermitiana sobre un subespacio H viene dada por producto interno sobre H y una función lineal $J : H \rightarrow H$ que es antisimétrica respecto al producto interno.

Si J es la matriz del Teorema

- $H = C + JC$ tendrá una estructura Hermitiana, es invariante y $J^2|_H = -I|_H$.
- Una transformación antisimétrica tiene rango par. Corolario: homográfico no homotético \Rightarrow plano.
- Es una condición necesaria que C este contenido en un espacio con dimensión par.
- A la vez es suficiente.

Estructuras Hermitianas

Soluciones
simétricas

F. Mazzone

Problema de
los N -cuerpos

Ecuación
Simetrías

Soluciones
homográficas

Configuraciones
Centrales

Soluciones
homotéticas

Movimientos planos

Equilibrios relativos

Soluciones
homográficas para
 $d > 3$

Configuraciones
Centrales

Invariantes

Finitud de ER

Configuraciones de
Euler, Lagrange y
Moulton ($d = 3$)

Teorema

Para todo movimiento rígido existe una matriz de configuración \mathbf{x}_0 (no necesariamente central) y una matriz antisimétrica $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ tal que

$$\mathbf{x} - \mathbf{c} = Q(t)(\mathbf{x}_0 - \mathbf{c}_0)$$

con

$$Q(t) = e^{\theta(t)A}.$$

A su vez, para $d = 4$, existen \mathbf{x}_0 no centrales tales que la fórmula anterior define un movimiento rígido.

Simetrías para CC

\mathbf{x} es CC si existe $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\nabla U(\mathbf{x}) + \lambda \nabla I(\mathbf{x} - \mathbf{c}) = 0.$$

con

$$U(\mathbf{x}) = \sum_{i < j} \frac{m_i m_j}{r_{ij}} \quad \text{e} \quad I(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N m_j \|\mathbf{x}_j - \mathbf{c}\|^2.$$

- Si \mathbf{x} es CC para λ y $\mathbf{c}_0 \in \mathbb{R}^d$ entonces $\mathbf{x} + \mathbf{c}_0$ es CC para el mismo λ .
- Si \mathbf{x} es CC para λ y $Q \in SO(d)$ entonces $Q\mathbf{x}$ es CC para el mismo λ .
- Si \mathbf{x} es CC para λ y $\sigma \in \mathbb{R}$ entonces $\sigma\mathbf{x}$ es CC para $\sigma^{-3}\lambda$,

Simetrías para CC

\mathbf{x} es CC si existe $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\nabla U(\mathbf{x}) + \lambda \nabla I(\mathbf{x} - \mathbf{c}) = 0.$$

con

$$U(\mathbf{x}) = \sum_{i < j} \frac{m_i m_j}{r_{ij}} \quad \text{e} \quad I(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N m_j \|\mathbf{x}_j - \mathbf{c}\|^2.$$

- Si \mathbf{x} es CC para λ y $\mathbf{c}_0 \in \mathbb{R}^d$ entonces $\mathbf{x} + \mathbf{c}_0$ es CC para el mismo λ .
- Si \mathbf{x} es CC para λ y $Q \in SO(d)$ entonces $Q\mathbf{x}$ es CC para el mismo λ .
- Si \mathbf{x} es CC para λ y $\sigma \in \mathbb{R}$ entonces $\sigma\mathbf{x}$ es CC para $\sigma^{-3}\lambda$,

Simetrías para CC

\mathbf{x} es CC si existe $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\nabla U(\mathbf{x}) + \lambda \nabla I(\mathbf{x} - \mathbf{c}) = 0.$$

con

$$U(\mathbf{x}) = \sum_{i < j} \frac{m_i m_j}{r_{ij}} \quad \text{e} \quad I(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N m_j \|\mathbf{x}_j - \mathbf{c}\|^2.$$

- Si \mathbf{x} es CC para λ y $\mathbf{c}_0 \in \mathbb{R}^d$ entonces $\mathbf{x} + \mathbf{c}_0$ es CC para el mismo λ .
- Si \mathbf{x} es CC para λ y $Q \in SO(d)$ entonces $Q\mathbf{x}$ es CC para el mismo λ .
- Si \mathbf{x} es CC para λ y $\sigma \in \mathbb{R}$ entonces $\sigma\mathbf{x}$ es CC para $\sigma^{-3}\lambda$,

Finitud de equilibrios relativos

Soluciones
simétricas

F. Mazzone

Problema de
los N -cuerpos

Ecuación
Simetrías

Soluciones
homográficas

Configuraciones
Centrales

Soluciones
homotéticas

Movimientos planos

Equilibrios relativos
Soluciones
homográficas para
 $d > 3$

Configuraciones
Centrales

Invariantes

Finitud de ER

Configuraciones de
Euler, Lagrange y
Moulton ($d = 3$)

Definición

Dos CC \mathbf{x} e \mathbf{y} son equivalentes si existe $\sigma \in \mathbb{R}$, $Q \in SO(d)$ y $\mathbf{c}_0 \in \mathbb{R}^d$ tales que $\mathbf{y} = \sigma Q\mathbf{x} + \mathbf{c}_0$.

Problema de Chazy-Wintner-Smale, Steve Smale,
“Mathematical problems for the next century”, [[Smale, 2000](#)]

*Existe un número finito de clases de equivalencias
de CC.*

Finitud de equilibrios relativos ¿Qué sabemos?

Soluciones
simétricas

F. Mazzone

Problema de
los N -cuerpos

Ecuación
Simetrías

Soluciones
homográficas

Configuraciones
Centrales

Soluciones
homotéticas

Movimientos planos

Equilibrios relativos

Soluciones
homográficas para
 $d > 3$

Configuraciones
Centrales

Invariantes

Finitud de ER

Configuraciones de
Euler, Lagrange y
Moulton ($d = 3$)

- Para $N = 2$ todo \mathbf{x} es CC, pero hay una sólo clase de equivalencia.
- Para $N = 3$ hay 5 clases distintas, Euler-Lagrange.
- Para $N = 4$. Dadas 4 masas m_1, m_2, m_3, m_4 el número de clases distintas está comprendido entre 32 y 8472 ([Hampton and Moeckel, 2006]).
- Para $N = 5$ y $d = 2$. En [Albouy and Kaloshin, 2012] se obtuvo finitud para todas las masas excepto en una variedad de codimensión 2 en el espacio de masas.

Finitud de equilibrios relativos ¿Qué sabemos?

Soluciones
simétricas

F. Mazzone

Problema de
los N -cuerpos

Ecuación
Simetrías

Soluciones
homográficas

Configuraciones
Centrales

Soluciones
homotéticas

Movimientos planos

Equilibrios relativos

Soluciones
homográficas para
 $d > 3$

Configuraciones
Centrales

Invariantes

Finitud de ER

Configuraciones de
Euler, Lagrange y
Moulton ($d = 3$)

- Para $N = 2$ todo \mathbf{x} es CC, pero hay una sólo clase de equivalencia.
- Para $N = 3$ hay 5 clases distintas, Euler-Lagrange.
- Para $N = 4$. Dadas 4 masas m_1, m_2, m_3, m_4 el número de clases distintas está comprendido entre 32 y 8472 ([Hampton and Moeckel, 2006]).
- Para $N = 5$ y $d = 2$. En [Albouy and Kaloshin, 2012] se obtuvo finitud para todas las masas excepto en una variedad de codimensión 2 en el espacio de masas.

Finitud de equilibrios relativos ¿Qué sabemos?

Soluciones
simétricas

F. Mazzone

Problema de
los N -cuerpos

Ecuación
Simetrías

Soluciones
homográficas

Configuraciones
Centrales

Soluciones
homotéticas

Movimientos planos

Equilibrios relativos

Soluciones
homográficas para
 $d > 3$

Configuraciones
Centrales

Invariantes

Finitud de ER

Configuraciones de
Euler, Lagrange y
Moulton ($d = 3$)

- Para $N = 2$ todo \mathbf{x} es CC, pero hay una sólo clase de equivalencia.
- Para $N = 3$ hay 5 clases distintas, Euler-Lagrange.
- Para $N = 4$. Dadas 4 masas m_1, m_2, m_3, m_4 el número de clases distintas está comprendido entre 32 y 8472 ([Hampton and Moeckel, 2006]).
- Para $N = 5$ y $d = 2$. En [Albouy and Kaloshin, 2012] se obtuvo finitud para todas las masas excepto en una variedad de codimensión 2 en el espacio de masas.

Finitud de equilibrios relativos ¿Qué sabemos?

Soluciones
simétricas

F. Mazzone

Problema de
los N -cuerpos

Ecuación
Simetrías

Soluciones
homográficas

Configuraciones
Centrales

Soluciones
homotéticas

Movimientos planos

Equilibrios relativos

Soluciones
homográficas para
 $d > 3$

Configuraciones
Centrales

Invariantes

Finitud de ER

Configuraciones de
Euler, Lagrange y
Moulton ($d = 3$)

- Para $N = 2$ todo \mathbf{x} es CC, pero hay una sólo clase de equivalencia.
- Para $N = 3$ hay 5 clases distintas, Euler-Lagrange.
- Para $N = 4$. Dadas 4 masas m_1, m_2, m_3, m_4 el número de clases distintas está comprendido entre 32 y 8472 ([Hampton and Moeckel, 2006]).
- Para $N = 5$ y $d = 2$. En [Albouy and Kaloshin, 2012] se obtuvo finitud para todas las masas excepto en una variedad de codimensión 2 en el espacio de masas.

CC y teoría puntos críticos

[Smale, 1970a, Smale, 1970b]

Soluciones
simétricas

F. Mazzone

Problema de
los N -cuerpos

Ecuación
Simetrías

Soluciones
homográficas

Configuraciones
Centrales

Soluciones
homotéticas

Movimientos planos

Equilibrios relativos

Soluciones
homográficas para
 $d > 3$

Configuraciones
Centrales

Invariantes

Finitud de ER

Configuraciones de
Euler, Lagrange y
Moulton ($d = 3$)

- Cambiando de coordenadas a abricéntricas podemos asumir $\mathbf{c} = 0$.
- Cambiando de escala podemos asumir $I(\mathbf{x}) = 1$.

Por la técnica de los multiplicadores de Lagrange,
interpretamos

$$\nabla U(\mathbf{x}) + \lambda \nabla I(\mathbf{x}) = 0.$$

como que una CC es un punto crítico del potencial con la
restricción de que $\mathbf{x} \in S$ donde S es el elipsoide

$$S = \{\mathbf{x} | I(\mathbf{x}) = 1\}.$$

Soluciones Lagrangianas ($d = 2$)

Soluciones
simétricas

F. Mazzone

Problema de
los N -cuerpos

Ecuación
Simetrías

Soluciones
homográficas

Configuraciones
Centrales

Soluciones
homotéticas

Movimientos planos

Equilibrios relativos

Soluciones
homográficas para
 $d > 3$

Configuraciones
Centrales

Invariantes

Finitud de ER

Configuraciones de
Euler, Lagrange y
Moulton ($d = 3$)

U es función de las distancias relativas, $r_{ij} = \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|$.
Veamos que I también

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^N m_i m_j \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|^2 &= \sum_{i,j=1}^N m_i m_j \|\mathbf{x}_i\|^2 \\ &\quad - 2 \sum_{i,j=1}^N m_i m_j \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j + \sum_{i,j=1}^N m_i m_j \|\mathbf{x}_j\|^2 \\ &= 4mI\end{aligned}$$

Pongamos \mathbf{r} al vector de distancias relativas. Luego

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}} + \lambda \frac{\partial I}{\partial \mathbf{x}} = \left(\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} + \lambda \frac{\partial I}{\partial \mathbf{r}} \right) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{x}}$$

Soluciones Lagrangianas ($d = 2$)

Soluciones
simétricas

F. Mazzone

Problema de
los N -cuerpos

Ecuación
Simetrías

Soluciones
homográficas

Configuraciones
Centrales

Soluciones
homotéticas

Movimientos planos

Equilibrios relativos

Soluciones
homográficas para
 $d > 3$

Configuraciones
Centrales

Invariantes

Finitud de ER

Configuraciones de
Euler, Lagrange y
Moulton ($d = 3$)

U es función de las distancias relativas, $r_{ij} = \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|$.
Veamos que I también

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^N m_i m_j \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|^2 &= \sum_{i,j=1}^N m_i m_j \|\mathbf{x}_i\|^2 \\ &\quad - 2 \sum_{i,j=1}^N m_i m_j \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j + \sum_{i,j=1}^N m_i m_j \|\mathbf{x}_j\|^2 \\ &= 4mI\end{aligned}$$

Pongamos \mathbf{r} al vector de distancias relativas. Luego

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}} + \lambda \frac{\partial I}{\partial \mathbf{x}} = \left(\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} + \lambda \frac{\partial I}{\partial \mathbf{r}} \right) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{x}}$$

Soluciones Lagrangianas ($d = 2$)

Soluciones
simétricas

F. Mazzone

Problema de
los N -cuerpos

Ecuación
Simetrías

Soluciones
homográficas

Configuraciones
Centrales

Soluciones
homotéticas

Movimientos planos

Equilibrios relativos

Soluciones
homográficas para
 $d > 3$

Configuraciones
Centrales

Invariantes

Finitud de ER

Configuraciones de
Euler, Lagrange y
Moulton ($d = 3$)

Queremos ver que si los cuerpos no están alineados

$$0 = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}} + \lambda \frac{\partial I}{\partial \mathbf{x}} \Leftrightarrow 0 = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} + \lambda \frac{\partial I}{\partial \mathbf{r}}.$$

Pero

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2}{r_{12}} & -\frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2}{r_{12}} & 0 \\ \frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3}{r_{13}} & 0 & -\frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3}{r_{13}} \\ 0 & \frac{\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3}{r_{23}} & -\frac{\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3}{r_{23}} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 6}$$

La afirmación sale de que si los cuerpos no están alineados $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ y $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3$ son LI, lo mismo $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ y $\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3$

Soluciones Lagrangianas ($d = 2$)

Soluciones
simétricas

F. Mazzone

Problema de
los N -cuerpos

Ecuación
Simetrías

Soluciones
homográficas

Configuraciones
Centrales

Soluciones
homotéticas

Movimientos planos

Equilibrios relativos

Soluciones
homográficas para
 $d > 3$

Configuraciones
Centrales

Invariantes

Finitud de ER

Configuraciones de
Euler, Lagrange y
Moulton ($d = 3$)

Así tenemos que resolver

$$0 = -\frac{m_i m_j}{r_{ij}^2} + \lambda m_i m_j r_{ij}$$

Entonces

$$r_{ij} = \lambda^{-1/3}.$$

La configuración es un triángulo equilátero.

Soluciones Lagrangianas

Soluciones
simétricas

F. Mazzone

Problema de
los N -cuerpos

Ecuación
Simetrías

Soluciones
homográficas

Configuraciones
Centrales

Soluciones
homotéticas

Movimientos planos

Equilibrios relativos

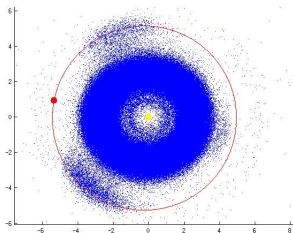
Soluciones
homográficas para
 $d > 3$

Configuraciones
Centrales

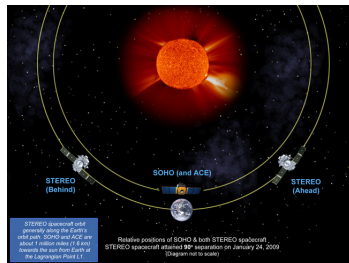
Invariantes

Finitud de ER

Configuraciones de
Euler, Lagrange y
Moulton ($d = 3$)



Asteroides troyanos de Júpiter (orbit_calc)



Sondas STEREO y SOHO

Configuraciones de Moulton (colineales)

Soluciones
simétricas

F. Mazzone

Problema de
los N -cuerpos

Ecuación
Simetrías

Soluciones
homográficas

Configuraciones
Centrales

Soluciones
homotéticas

Movimientos planos

Equilibrios relativos

Soluciones
homográficas para
 $d > 3$

Configuraciones
Centrales

Invariantes

Finitud de ER

Configuraciones de
Euler, Lagrange y
Moulton ($d = 3$)

Definición

Una CC se denomina colineal si todos los cuerpos están sobre una línea recta.

Teorema [Moulton, 1910]

Dadas N masas existen $N!/2$ configuraciones centrales colineales

Discutiremos la idea de la demostración para $N = 3$.

Configuraciones de Moulton (colineales)

Soluciones
simétricas

F. Mazzone

Problema de
los N -cuerpos

Ecuación
Simetrías

Soluciones
homográficas

Configuraciones
Centrales

Soluciones
homotéticas

Movimientos planos

Equilibrios relativos

Soluciones
homográficas para
 $d > 3$

Configuraciones
Centrales

Invariantes

Finitud de ER

Configuraciones de
Euler, Lagrange y
Moulton ($d = 3$)

Definición

Una CC se denomina colineal si todos los cuerpos están sobre una línea recta.

Teorema [Moulton, 1910]

Dadas N masas existen $N!/2$ configuraciones centrales colineales

Discutiremos la idea de la demostración para $N = 3$.

Configuraciones de Moulton (colineales)

Soluciones
simétricas

F. Mazzone

Problema de
los N -cuerpos

Ecuación
Simetrías

Soluciones
homográficas

Configuraciones
Centrales

Soluciones
homotéticas

Movimientos planos

Equilibrios relativos

Soluciones
homográficas para
 $d > 3$

Configuraciones
Centrales

Invariantes

Finitud de ER

Configuraciones de
Euler, Lagrange y
Moulton ($d = 3$)

Definición

Una CC se denomina colineal si todos los cuerpos están sobre una línea recta.

Teorema [Moulton, 1910]

Dadas N masas existen $N!/2$ configuraciones centrales colineales

Discutiremos la idea de la demostración para $N = 3$.

Demostración Teorema de Moulton

Soluciones
simétricas

F. Mazzone

Problema de
los N -cuerpos

Ecuación
Simetrías

Soluciones
homográficas

Configuraciones
Centrales

Soluciones
homotéticas

Movimientos planos

Equilibrios relativos

Soluciones
homográficas para
 $d > 3$

Configuraciones
Centrales

Invariantes

Finitud de ER

Configuraciones de
Euler, Lagrange y
Moulton ($d = 3$)

Usando un conveniente sistema de coordenadas podemos suponer las posiciones en \mathbb{R} , $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$. Escribamos $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$.

Sean $H = \{\mathbf{x} | m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 = 0\}$, el elipsoide $S = \{\mathbf{x} | m_1 x_1^2 + m_2 x_2^2 + m_3 x_3^2 = 0\}$ y el conjunto de colisiones $\Delta = \{x_i = x_j | i \neq j\}$.

Se observa que hay que encontrar un punto crítico de U en el conjunto

$$S \cap H \setminus \Delta.$$

$S \cap H$ es un elipsoide de una dimensión menor, en el caso $N = 3$ es una elipse

Demostración Teorema de Moulton

Soluciones
simétricas

F. Mazzone

Problema de
los N -cuerpos

Ecuación
Simetrías

Soluciones
homográficas

Configuraciones
Centrales

Soluciones
homotéticas

Movimientos planos

Equilibrios relativos

Soluciones
homográficas para
 $d > 3$

Configuraciones
Centrales

Invariantes

Finitud de ER

Configuraciones de
Euler, Lagrange y
Moulton ($d = 3$)

Usando un conveniente sistema de coordenadas podemos suponer las posiciones en \mathbb{R} , $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$. Escribamos

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$.

Sean $H = \{\mathbf{x} | m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 = 0\}$, el elipsoide

$S = \{\mathbf{x} | m_1 x_1^2 + m_2 x_2^2 + m_3 x_3^2 = 0\}$ y el conjunto de colisiones

$\Delta = \{x_i = x_j | i \neq j\}$.

Se observa que hay que encontrar un punto crítico de U en el conjunto

$$S \cap H \setminus \Delta.$$

$S \cap H$ es un elipsoide de una dimensión menor, en el caso $N = 3$ es una elipse

Demostración Teorema de Moulton

Soluciones
simétricas

F. Mazzone

Problema de
los N -cuerpos

Ecuación
Simetrías

Soluciones
homográficas

Configuraciones
Centrales

Soluciones
homotéticas

Movimientos planos

Equilibrios relativos

Soluciones
homográficas para
 $d > 3$

Configuraciones
Centrales

Invariantes

Finitud de ER

Configuraciones de
Euler, Lagrange y
Moulton ($d = 3$)

Usando un conveniente sistema de coordenadas podemos suponer las posiciones en \mathbb{R} , $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$. Escribamos $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$.

Sean $H = \{\mathbf{x} | m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 = 0\}$, el elipsoide $S = \{\mathbf{x} | m_1 x_1^2 + m_2 x_2^2 + m_3 x_3^2 = 0\}$ y el conjunto de colisiones $\Delta = \{x_i = x_j | i \neq j\}$.

Se observa que hay que encontrar un punto crítico de U en el conjunto

$$S \cap H \setminus \Delta.$$

$S \cap H$ es un elipsoide de una dimensión menor, en el caso $N = 3$ es una elipse

Demostración Teorema de Moulton

Soluciones
simétricas

F. Mazzone

Problema de
los N -cuerpos

Ecuación
Simetrías

Soluciones
homográficas

Configuraciones
Centrales

Soluciones
homotéticas

Movimientos planos

Equilibrios relativos

Soluciones
homográficas para
 $d > 3$

Configuraciones
Centrales

Invariantes

Finitud de ER

Configuraciones de
Euler, Lagrange y
Moulton ($d = 3$)

Usando un conveniente sistema de coordenadas podemos suponer las posiciones en \mathbb{R} , $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$. Escribamos $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$.

Sean $H = \{\mathbf{x} | m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 = 0\}$, el elipsoide $S = \{\mathbf{x} | m_1 x_1^2 + m_2 x_2^2 + m_3 x_3^2 = 0\}$ y el conjunto de colisiones $\Delta = \{x_i = x_j | i \neq j\}$.

Se observa que hay que encontrar un punto crítico de U en el conjunto

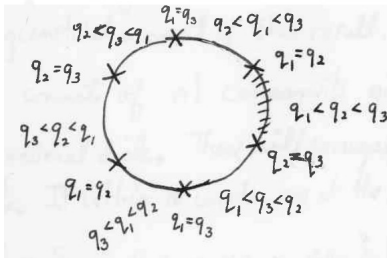
$$S \cap H \setminus \Delta.$$

$S \cap H$ es un elipsoide de una dimensión menor, en el caso $N = 3$ es una elipse

Problema de los N -cuerpos

Configuraciones Centrales

Configuraciones de Euler, Lagrange y Moulton ($d = 3$)



Nos quedan $N!/2$ componentes conexas. Se demuestra que hay un mínimo (punto crítico) de U en cada una de ellas y que hay a lo sumo 1 punto crítico



Albouy, A. and Chenciner, A. (1997).

Le probleme des n corps et les distances mutuelles.

Inventiones mathematicae, 131(1):151–184.



Albouy, A. and Kaloshin, V. (2012).

Finiteness of central configurations of five bodies in the plane.

Annals of mathematics, 176(1):535–588.



Chenciner, A. (2011).

The lagrange reduction of the n -body problem, a survey.

arXiv preprint arXiv:1111.1334.



Chenciner, A. and Jiménez-Pérez, H. (2013).

Angular momentum and horn's problem.

Moscow Mathematical Journal, 13(4):621–630.



Hampton, M. and Moeckel, R. (2006).

Finiteness of relative equilibria of the four-body problem.

Inventiones mathematicae, 163(2):289–312.



Jaume Llibre, Richard Moeckel, C. S. (2016).

Central Configurations, Periodic Orbits, and Hamiltonian Systems.

Advanced Courses in Mathematics - CRM Barcelona.
Birkhäuser.



Moeckel, R. (1994).

Celestial Mechanics—especially central configurations.

[http://www.math.umn.edu/rmoeckel/notes/
Notes.html](http://www.math.umn.edu/rmoeckel/notes/Notes.html).



Moulton, F. R. (1910).

The straight line solutions of the problem of n bodies.

The Annals of Mathematics, 12(1):1–17.



Smale, S. (1970a).

Topology and mechanics. i.

Inventiones mathematicae, 10(4):305–331.



Smale, S. (1970b).

Topology and mechanics. ii.

Inventiones mathematicae, 11(1):45–64.



Smale, S. (2000).

Mathematical problems for the next century.

In Arnol'd, V., editor, *Mathematics: Frontiers and Perspectives*.



Wintner, A. (2014).

The Analytical Foundations of Celestial Mechanics.
Dover Books on Physics. Dover Publications.