Generalizaciones del Teorema de Weierstrass

Teorema 1. ***Weierstrass clásico.*** *Sea f una función continua del intervalo $[a, b]$ en $\mathbb{R}$. Entonces f alcanza un máximo y un mínimo.*

Objetivo de la clase: Encontrar condiciones necesarias y suficientes sobre un conjunto K de un espacio métrico (X, d) de modo tal que toda función continua alcance un máximo y un mínimo sobre K.

¿Por qué nos planteamos esto?

«Nada ocupa un lugar en el mundo que no pueda ser entendido como algún máximo o mínimo.»

L. Euler

➢ *Principio de mínima acción o Principio de Hamilton.* Pensemos un sistema mecánico caracterizado por las coordenadas $q = q_1, ..., q_s$. Por ejemplo la posición de $s/3$ puntos en el espacio. Este pricipio postula la existencia de una función

$$L(t, q_1, ..., q_s, \dot{q}_1, ..., \dot{q}_s),$$

que caracteriza al sistema en el siguiente sentido. Supongamos que en los instantes $t = t_1$ y $t = t_2$ tenemos determinadas las coordenadas q, $q(t_1) = q^1$ y $q(t_2) = q^2$. Entonces, entre t_1 y t_2 el sistema evolucionará de modo tal que la integral

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(t, q_1, ..., q_s, \dot{q}_1, ..., \dot{q}_s) dt$$

sea mínima.

Conjuntos Compactos

Recordemos algunas definiciones. Sea (X, d) un espacio métrico.

- Un conjunto $K \subset X$ se llamará compacto si todo cubrimiento por abiertos relativos de K tiene un subcubrimiento finito. Es decir, si $K = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$, con G_λ abierto en K $\forall \lambda$, entonces existe un conjunto finito $\Lambda_0 \subset \Lambda$ tal que $K = \bigcup_{\lambda \in \Lambda_0} G_\lambda$.
- Un conjunto $K \subset X$ se llama precompacto si para cada $\epsilon > 0$ podemos cubrir K por un conjunto finito de bolas de radio ϵ y centro perteneciente a K.
- Un espacio métrico se dice completo si toda sucesión de Cauchy es convergente.

Teorema 2. *Un conjunto K es compacto si, y solo si, es precompacto y completo.*

La precompacidad es condición necesaria

Teorema 3. *Sea (X, d) un espacio métrico y $K \subset X$. Supongamos que toda función continua, alcanza un máximo (y por ende un mínimo) sobre K, entonces K es precompacto.*

Demostración. Supongamos K no precompacto.

Existe $\epsilon > 0$ tal que K no se puede cubrir por una cantidad finita de bolas de radio ϵ.

Elijamos $x_1 \in K$.

Como $B(x_1, \epsilon) \neq K$, tomemos $x_2 \in K - B(x_1, \epsilon)$.

De la misma forma elegimos $x_3 \in K - B(x_1, \epsilon) \cup B(x_2, \epsilon)$.

Continuamos de esta forma, producimos una sucesión x_n tal que

$$x_n \in K - B(x_1, \epsilon) \cup \cdots \cup B(x_{n-1}, \epsilon).$$

Consideremos $\delta = \epsilon/2$.

Tenemos que, para $i \neq j$, $B(x_i, \delta) \cap B(x_j, \delta) \neq \emptyset$ (**Ejercicio**)

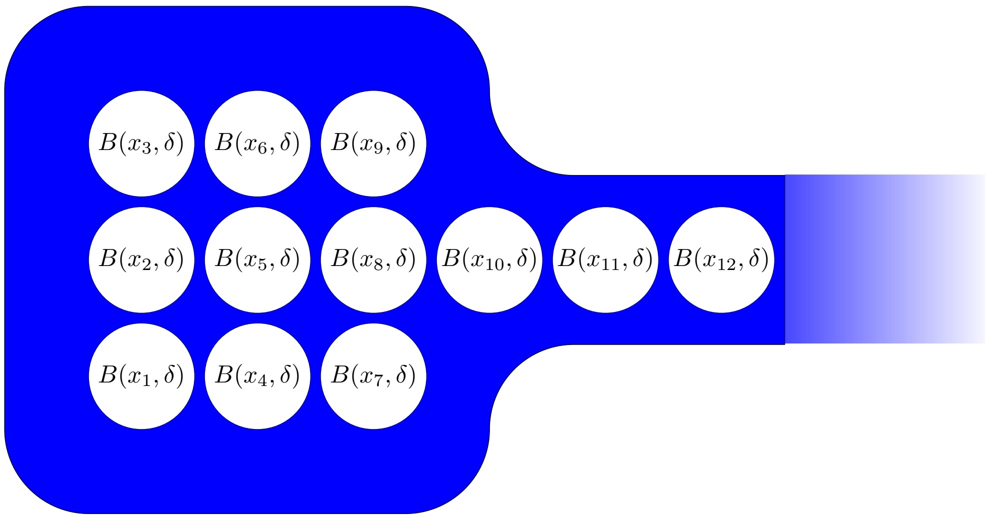

Figura 1: Bolas $B(x_j, \delta)$

Ahora consideremos las funciones:

$$f_k(x) = \text{máx}\{\delta - d(x, x_k), 0\}$$

1. f_k es continua, pues es un máximo de funciones continuas.

2. $f(x) = 0$ si $x \notin B(x_k, \delta)$

3. $0 \leq f_k \leq \delta$ y $f_k(x_k) = \delta$.

Definimos:

$$f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{k}\right) f_k(x).$$

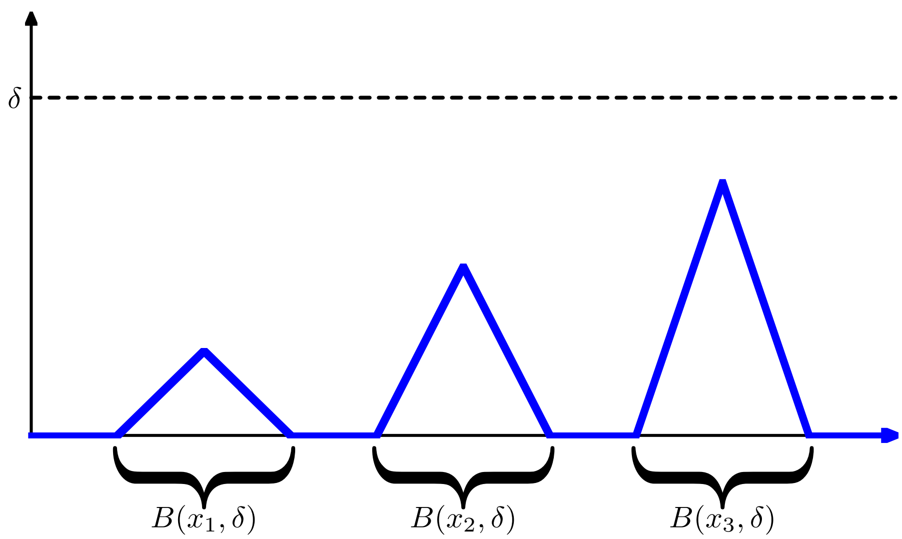

Figura 2: Función f

f no alcanza un máximo, pues $0 \leq f < \delta$ y $f(x_k) = \delta(1 - \frac{1}{k}) \to \delta$ cuando $k \to \infty$.

Afirmación si $x^* \in K$ existe un $\eta = \eta(x^*) > 0$ tal que para $d(x, x^*) < \eta$

$$|f(x) - f(x^*)| \leq d(x, x^*). \tag{1}$$

Por lo tanto f es continua.

Demostremos (1).

Sea $x^* \in K$.

1. Si $\exists k$ con $x^* \in \ B(x_k, \delta)$ **Ejercicio**

2. Supongamos $x^* \notin B(x_k, \delta)$, $\forall k$.

   Sea $\delta > \eta > 0$.

   Supongamos que $d(x, x^*) < \eta$.

   a) Si $x \notin B(x_k, \delta)$, $\forall k$, entonces

   $$f(x) = f(x^*) = 0.$$

   Por ende (1) es cierta.

b) Si $\exists k$ con $x \in B(x_k, \delta)$, entonces

$$\delta \leq d(x_k, x^*) \leq d(x_k, x) + d(x, x^*).$$

Entonces

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x^*)| &= f(x) \\ &= \left(1 - \frac{1}{k}\right)\big(\delta - d(x, x_k)\big) \\ &< d(x^*, x). \end{aligned}$$

$\square$

La completitud es necesaria

Teorema 4. *Sea (X, d) un espacio métrico y $K \subset X$. Supongamos que toda función continua, alcanza un máximo (y por ende un mínimo) sobre K, entonces K es completo.*

Demostración. Supongamos K no completo. Sea $\{a_n\}$ una sucesión de Cauchy en K que no converge.

Definamos

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} d(x, a_n).$$

Afirmación: El límite anterior existe.

Se prueba así. La desigualdad

$$|d(x, x_n) - d(x, x_m)| \leq d(x_n, x_m),$$

implica que la sucesión $d(x, x_n)$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$.

Como $\mathbb{R}$ es completo, la sucesión $d(x, x_n)$ es convergente.

Veamos que f es continua y de hecho Lipschitz.

$$\begin{aligned}|f(x)-f(y)| &= |\lim_{n\to\infty} d(x,x_n) - \lim_{n\to\infty} d(y,x_n)| \\ &= \lim_{n\to\infty} |d(x,x_n) - d(y,x_n)| \\ &\leq d(x,y).\end{aligned}$$

Veamos que f no alcanza un mínimo.

Si $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x_n, x_m) < \epsilon \quad \text{para } n, m > N.$$

Haciendo $m \to \infty$ obtenemos

$$f(x_n) = \lim_{m\to\infty} d(x_n, x_m) \leq \epsilon.$$

Esto implica que

$$\inf_{x\in K} f(x) = 0.$$

Pero, para $x \in K$ tenemos que $f(x) \neq 0$, de lo contrario $\{a_n\}$ convergería. Así f no tiene mínimo.

$\square$

Compacto es necesario y suficiente

Teorema 5. *Sea K un subconjunto compacto de X. Toda función continua alcanza un máximo (o un mínimo) sobre K si, y sólo si, K es compacto.*

Demostración. Sólo falta la suficiencia.

Supongamos K compacto.

Sólo probaremos que f alcanza un máximo, aplicando este resultado a $-f$ demostramos que f alcanza un mínimo.

Supongamos que f no alcanza un máximo.

Para cada $y \in f(K)$ definimos el conjunto

$$G_y := f^{-1}\big((-\infty, y)\big) = \{x \in K : f(x) < y\}.$$

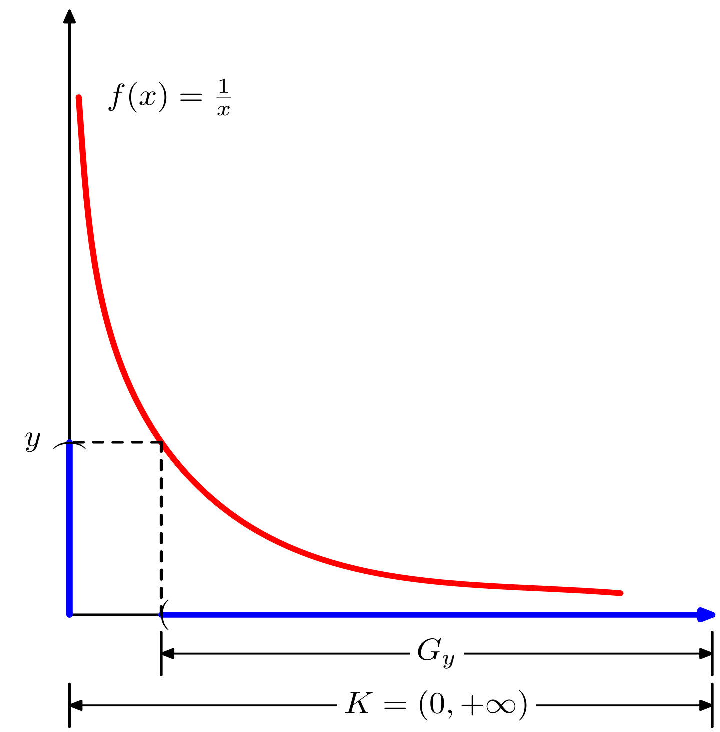

Figura 3: Conjuntos G_y

- Los conjuntos G_y son abiertos relativos a K, pues f es continua.
- $\{G_y\}_{y \in f(K)}$ es un cubrimiento de K.

  Sea $x \in K$.

  x no es un punto de máximo $\Rightarrow \exists z \in K$ tal que

  $$f(x) < f(z)$$

  Esto implica que $x \in G_{f(z)}$.

- Si $y_1 < y_2 \Rightarrow G_{y_1} \subset G_{y_2}$

K es compacto $\Rightarrow$ existe un subconjunto finito $\{y_1, ..., y_n\} \subset f(K)$ tal que

$$K = G_{y_1} \cup \cdots \cup G_{y_n}. \tag{2}$$

Sea $y^* = \max\{y_1, ..., y_n\}$.

Se tiene que $y^* \in f(K)$.

Por la igualdad (2),

$$\forall x \in K : f(x) < y^*.$$

Lo que es una contradicción. $\square$