

1. Ecuación de la membrana, separación de variables

El movimiento de una membrana elástica sujeta a un aro circular viene gobernada por la ecuación de [ondas bidimensional](#)

$$u_{tt} = \Delta u := u_{xx} + u_{yy}$$

Esta ecuación es un ejemplo de [ecuación en derivadas parciales](#). Aquí la función incógnita u depende de tres variables independientes x, y, t . No hemos tratado hasta aquí este tipo de ecuaciones, en esta breve unidad vamos a ver como los resultados que desarrollamos antes nos sirven para encontrar algunas soluciones de esta ecuación.

En la deducción de esta ecuación, que no haremos, se supone que no actúa otra fuerza más que la tensión de la membrana, que el material de esta membrana es uniforme, que la dirección de desplazamientos de un punto sobre la membrana es perpendicular al plano que contiene al aro de sujeción.

El significado de las variables es el siguiente: t es el tiempo, las variables x, y, u son las coordenadas de un punto sobre la membrana en un sistema de coordenadas ortogonal. Las coordenadas x, y se toman en el plano que contiene al aro de sujeción y por ende son independientes de t . Se supone que u es función de x, y y de t . Suponemos que la ecuación se satisface en la bola de radio 1 y centro $(0, 0)$ de \mathbb{R}^2 . Se impone además una [condición de contorno](#) $u = 0$ en ∂B y una [condición inicial](#) $u_t(x, y, 0) = 0$.

Buscaremos soluciones de la ecuación de ondas en variables separadas, esto es supondremos que u se escribe $u(x, y, t) = v(x, y)T(t)$. Estas soluciones tienen el significado físico de ser tonos normales, esto es regímenes de vibración donde todos los puntos de la membrana vibran a la misma frecuencia. Asumamos además que u parte del reposo, esto es $u_t(x, y, 0) = 0$.

Reemplazando $u(x, y, t) = v(x, y)T(t)$ en la ecuación obtenemos

$$v(x, y)T''(t) = T(t) (v_{xx}(x, y) + v_{yy}(x, y)).$$

Vale decir que

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{v_{xx}(x, y) + v_{yy}(x, y)}{v(x, y)}.$$

Las variables t, x, y son independientes entre si. En el miembro de la izquierda sólo aparece t y en el de la derecha sólo x, y . Por consiguiente podríamos cambiar t en el miembro de la izquierda dejando x, y fijos. La conclusión es entonces que el miembro de la izquierda no cambia por cambiar t , vale decir T''/T es una función constante y por lo tanto $\Delta v/v$ es constante. Debe existir $\lambda > 0$ tal que

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{v_{xx}(x, y) + v_{yy}(x, y)}{v(x, y)} = -\lambda.$$

Tenemos así las dos ecuaciones

$$T''(t) + \lambda T(t) = 0, \quad (1)$$

$$v_{xx}(x, y) + v_{yy}(x, y) + \lambda v(x, y) = 0 \quad (2)$$

Además se deben satisfacer la condiciones de contorno $u(x, y, t) = 0$ para $(x, y) \in \partial B$. Esta condición implica que ¹

$$v = 0 \text{ en } \partial B. \quad (3)$$

No olvidemos la condición inicial $u_t(x, y, 0) = 0$. Atendiendo a la separación de variables debe ocurrir que $T'(0)v(x, y) = 0$ y esto implica que $T'(0) = 0$ o $v(x, y) \equiv 0$. La segunda opción nos llevaría a encontrar la solución trivial de la ecuación, lo que no es de nuestro interés. De modo que aceptaremos

$$T'(0) = 0. \quad (4)$$

La ecuación (1) es una ecuación de segundo orden, lineal con coeficientes constantes, que hemos considerado en multiples oportunidades. Si $\lambda \leq 0$ obtendríamos soluciones que tienden a infinito cuando $t \rightarrow \infty$ lo que no es compatible con el comportamiento esperado para una membrana. Hay que tener en cuenta que la validez física del modelo matemático alcanza solo a pequeñas oscilaciones, esto es valores chicos de u . De modo que podemos suponer $\lambda = \omega^2$. La ecuación resulta la ecuación del oscilador armónico.

```
sage: t, omega=var('t, omega') 1
sage: assume(omega>0) 2
None 3
sage: T=function('T', t) 4
sage: T=desolve(T.diff(t, 2)+omega^2*T, T, ivar=t) 5
```

Luego

$$T(t) = k_1 \sin(\omega t) + k_2 \cos(\omega t)$$

Se debe cumplir (4)

```
sage: k1, k2=var('k1, k2') 6
sage: solve(T.diff(t) (t=0), [k1, k2]) 7
[ 8
k1 == 0 9
] 10
```

De modo que $k_1 = 0$ y k_2 es arbitrario, entonces

$$T = k_2 \cos(\omega t).$$

¹Otra posible solución sería tomar $T = 0$ nos llevaría a la solución trivial

La segunda ecuación, que ahora escribimos

$$v_{xx}(x, y) + v_{yy}(x, y) + \omega^2 v(x, y) = 0, \quad (5)$$

se conoce como la ecuación de autovalores del Laplaciano o ecuación de Helmholtz. Los valores de ω para los que esta ecuación tiene solución (no todo ω lo es) son justamente los autovalores del operador de Laplace. Es decir los autovalores de Laplaciano resultan ser los cuadrados de las frecuencias de los tonos normales. Para encontrar estos autovalores vamos a escribir v en coordenadas polares $v = v(r, \theta)$. Acorde a la (14) del Apéndice 2 tenemos que (5) equivale a

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} + \omega^2 v = 0 \quad (6)$$

Nuevamente vamos a considerar la técnica de separación de variables. Proponemos que

$$v(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$$

Reemplazando en (6)

$$R''\Theta + \frac{1}{r}R'\Theta + \frac{1}{r^2}R\Theta'' + \omega^2 R\Theta = 0.$$

Multiplicando por $r^2/R\Theta$

$$\frac{r^2 R''}{R} + \frac{r R'}{R} + \frac{\Theta''}{\Theta} + \omega^2 r^2 = 0. \quad (7)$$

2. Apéndice: Laplaciano en coordenadas polares

En primera instancia escribamos el operador de Laplace en coordenadas polares. Las coordenadas cartesianas x, y se escriben en función de las coordenadas polares r, θ de la siguiente forma

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta.$$

Tenemos que expresar las derivadas tomadas respecto a las coordenadas cartesianas en términos de derivadas tomadas respecto a coordenadas polares.

$$\begin{aligned} u_x &= u_r r_x + u_\theta \theta_x \\ u_{xx} &= (u_r)_x r_x + u_r r_{xx} + (u_\theta)_x \theta_x + u_\theta \theta_{xx} \\ &= u_{rr} r_x^2 + u_{\theta\theta} \theta_x^2 + 2u_{r\theta} r_x \theta_x + u_r r_{xx} + u_\theta \theta_{xx} \end{aligned} \quad (8)$$

Usemos SAGE para calcular $r_x, \theta_x, r_{xx}, \theta_{xx}$

sage: <code>x,y=var('x,y')</code>	11
sage: <code>r=sqrt(x^2+y^2)</code>	12
sage: <code>theta=atan2(y,x)</code>	13
sage: <code>rho,phi=var('rho,phi')</code>	14

sage: `r.diff(x) (x=rho*cos(phi), y=rho*sin(phi)) .` 15

`simplify_full()`

`cos(phi)` 16

Es decir

$$r_x = \cos(\theta). \quad (9)$$

En el cálculo anterior `rho` y `phi` son introducidas en reemplazo de `r` y `theta` aunque son exactamente iguales. La razón de hacer esto es que SAGE reemplaza `r` y `theta` por sus expresiones en términos de `x` e `y`. Oviamente SAGE “no se da cuenta” que nosotros queremos expresar todo en función de `r` y `theta`. Las restantes derivadas son

sage: `r.diff(x, 2) (x=rho*cos(phi), y=rho*sin(phi)) .` 17

`simplify_full()`

`sin(phi)^2/rho` 18

$$r_{xx} = \frac{\sin^2(\theta)}{r}. \quad (10)$$

sage: `theta.diff(x) (x=rho*cos(phi), y=rho*sin(phi)) .` 19

`simplify_full()`

`-sin(phi)/rho` 20

$$\theta_x = -\frac{\sin(\theta)}{r}. \quad (11)$$

sage: `theta.diff(x, 2) (x=rho*cos(phi), y=rho*sin(phi)) .` 21

`simplify_full()`

`2*sin(phi)*cos(phi)/rho^2` 22

$$\theta_{xx} = \frac{2 \sin(\theta) \cos(\theta)}{r^2}. \quad (12)$$

Sustituyendo en (8), (9), (10) y (11) en (7)

$$u_{xx} = u_{rr} \cos^2 \theta + u_{\theta\theta} \frac{\sin^2 \theta}{r^2} - 2u_{r\theta} \frac{\cos \theta \sin \theta}{r} + u_r \frac{\sin^2(\theta)}{r} + u_\theta \frac{2 \sin(\theta) \cos(\theta)}{r^2}.$$

(13)

Para las derivadas respecto a y tenemos

$$u_{yy} = u_{rr} r_y^2 + u_{\theta\theta} \theta_y^2 + 2u_{r\theta} r_y \theta_y + u_r r_{yy} + u_\theta \theta_{yy}$$

Y las derivadas

```

sage: theta.diff(y) (x=rho*cos(phi), y=rho*sin(phi)) .      23
      simplify_full()
cos(phi)/rho                                                  24
sage: r.diff(y) (x=rho*cos(phi), y=rho*sin(phi)) .          25
      simplify_full()
sin(phi)                                                       26
sage: theta.diff(y, 2) (x=rho*cos(phi), y=rho*sin(phi)) .    27
      simplify_full()
-2*sin(phi)*cos(phi)/rho^2                                     28
sage: r.diff(y, 2) (x=rho*cos(phi), y=rho*sin(phi)) .        29
      simplify_full()
cos(phi)^2/rho                                                30

```

Luego

$$u_{yy} = u_{rr} \sin^2 \theta + u_{\theta\theta} \frac{\cos^2 \theta}{r^2} + 2u_{r\theta} \frac{\cos \theta \sin \theta}{r} + u_r \frac{\cos^2(\theta)}{r} - u_\theta \frac{2 \sin(\theta) \cos(\theta)}{r^2}.$$

(14)

De (12) y (13) obtenemos

$$u_{xx} + u_{yy} = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} \quad (15)$$