# Ecuaciones Diferenciales

Fernando Mazzone

3 de mayo de 2017

# Índice general

# Prólogo

**CARRERA:** Lic en Matemática.
**PLAN DE ESTUDIOS:** 2008 versión 1
**ASIGNATURA:** Ecuaciones Diferenciales **CÓDIGO:** 1913
**DOCENTES RESPONSABLES:** Fernando Mazzone
**EQUIPO DOCENTE:** Fernando Mazzone
**AÑO ACADÉMICO:** 2017
**REGIMEN DE LA ASIGNATURA:** Cuatrimestral
**RÉGIMEN DE CORRELATIVIDADES:**

| Aprobada | Regular |
|---|---|
| | Álgebra Lineal Aplicada (2261) |
| | Topología (1917) |

**CARGA HORARIA TOTAL:** 80 hs.
**Teóricas:** 40 hs., **Prácticas:** 40 hs..
**CARÁCTER DE LA ASIGNATURA:** Obligatoria

A. **CONTEXTUALIZACIÓN DE LA ASIGNATURA**
Primer cuatrimestre de cuarto año

B. **OBJETIVOS PROPUESTOS**

- Presentar la teoría de las ecuaciones diferenciales desde un perspectiva rigurosa.
- Poner en evidencia la retroalimentación entre teoría matemática y modelos físicos. En este sentido se desarrollan aplicaciones a la caída de cuerpos a lo largo de guías (y su relación con la óptica), problema de la braquistócrona, vibraciones de sistemas mecánicos, membranas, potencial sobre una esfera, movimiento planetario, etc.
- Integrar la asignatura a otras asignaturas del plan de estudios de la Lic. en Matemática. En este sentido se desarrolla la teoría de Lie de solución de ecuaciones por medios de grupos continuos. No es costumbre que esta teoría se desarrolle en cursos introductorios.
- Incorporar el uso de sistemas algebraicos computacionales en la práctica del alumno. Se utilizaran recursos de código abierto que derivan del lenguaje Python, en particular SymPy y SAGE.

C. **CONTENIDOS BÁSICOS DEL PROGRAMA A DESARROLLAR** Ecuaciones de primer orden, métodos de solución. Métodos de Lie. Teorema de existencia y unicidad. Ecuaciones lineales de orden superior. Osciladores armónicos. Método de desarrollo en serie. Método de Frobenius. Sistemas de Ecuaciones.

D. **FUNDAMENTACIÓN DE LOS CONTENIDOS**
La gran parte del curso versa sobre temas que ya son estándar en las ecuaciones diferenciales y se consideran básicos en el desarrollo de esta área. No creemos necesario abundar en fundamentos sobre la incorporación de ellos. Si merece fundamentarse aquellos que no son del todo habituales.

Con frecuencia las leyes de la física o modelos matemáticos de sistemas biológicos, sociales, económicos, etc, se expresan por medio de ecuaciones y particularmente con ecuaciones diferenciales. Con igual frecuencia en nuestras aulas la enseñanza de esta, como de otras ramas de la matemática, omite la consideración de las relaciones entre los conceptos matemáticos y otras ciencias. A lo sumo se suele presentar alguna aplicación de la teoría como medio de justificar la relevancia de ella. Se hace extensivo al quehacer pedagógico el postulado formalista que la matemática se valida por si misma y es independiente de cualquier realidad ajena a ella.

Nuestro punto de vista es que las relaciones de la teoría matemática con su entorno constituye un ingrediente insoslayable en la enseñanza de la teoría. Fundamentamos este punto de vista, en que es frecuente que el sistema físico que es modelizado por cierta teoría, ilumine el entendiemiento de la teoría misma. Por ejemplo, el principio de máximo, que afirma que una solución de la ecuación $\triangle u = 0$ en un abierto y acotado $\Omega$ alcanza su máximo en la frontera de $\Omega$, no es evidente de la ecuación en si misma, pero si lo es en gran medida de una de las situaciones físicas que modeliza: la temperatura en estado estacionario de un cuerpo sobre el cual el calor fluye por difusión. No puede desaprovecharse el recurso de pensar una solución de la ecuación aludida en estos dos sentidos.

También ocurre el camino inverso, esto es que el desarrollo de la teoría matemática ilumine el entendimiento del sistema físico. Al fin y al cabo, ese es el propósito primario de la modelización matemática. Por ejemplo, para quien escribe no resulta físicamente evidente que un sistema de resortes acoplados tenga esencialmente sólo dos modos normales de vibración, cosa que se demuestra en el actual curso. Por estas consideraciones, entre otras, también estamos convencidos que la demostración matemática rigurosa también constituye un ingrediente insoslayable para el entendimiento de la teoría.

Se incorpora activamente el uso de sistemas algebraicos computacionales SAC. Una causa es contar con asistencia para el desarrollo de cálculos que son engorrosos. Pero la causa fundamental de la introducción de SAC es que ponen al alumno en la situación de hacer un programa que implemente procedimientos de la teoría. Esto suele ser una tarea no trivial para el recién iniciado y obliga a desarrollar aptitudes de programación, pero más importante, obliga a repensar la teoría matemática para adaptarla al nuevo contexto.

En el mismo orden de ideas, esto es poner los conocimientos de la asignatura en diversos contextos, se buscó una integración con otras materias del plan de estudios. Por supuesto que hay algunas de ellas que son absolutamente necesarias para desarrollar la teoría de las ecuaciones diferenciales, pero no es costumbre en los cursos elementales sobre ecuaciones diferenciales recurrir a algunas ramas, por ejemplo teoría de grupos. Sin embargo la teoría de grupos tiene cosas importantes para decir sobre las ecuaciones. Se buscó establecer estas vinculaciones menos tradicionales, por ejemplo se desarrollo una unidad sobre la utilización de grupos de Lie de simetrías para resolver EDO. Utilizamos un concepto particular de grupo de Lie, para evitar las complicaciones técnicas en la definición de este concepto en general. La consideración de simetrías es una técnica matemática básica y las simetrías están indisolublemente ligadas al concepto de grupo.

E. **ACTIVIDADES A DESARROLLAR**

**CLASES TEÓRICAS:** Presencial, 4 horas semanales. La metodología que se desarrollará es la exposición por parte del docente de los fundamentos teóricos de los contenidos impartidos. Se incentivará la participación de los alumnos durante la clase, requiriendo que ellos aporten, por ejemplo, demostraciones de determinados hechos o, en general, soluciones a determinadas situaciones problemáticas que plantea el desarrollo teórico de la materia.

**CLASES PRÁCTICAS:** Presencial 4 horas semanales. Se espera que los alumnos trabajen sobre los ejercicios de la práctica en forma independiente fuera de los horarios de la asignatura. Posteriormente estos ejercicios se discutirán durante la clase, el profesor tratará de limitar su participación de modo tal de favorecer que los alumnos autogestionen su aprendizaje.

Internet: Se utilizaron diversos recursos de internet, que estan compendiados en una página de la asignatura y en un repositorio de Git Hub. En la red hay excelentes recursos, videos, páginas web, wikis y, en general, distintos materiales multimedia especialmente útiles para visualizar algunos conceptos, métodos, etc.

F. **NÓMINA DE TRABAJOS PRÁCTICOS** Hay un trabajo práctico por cada unidad de la materia.

G. **HORARIOS DE CLASES:** martes y jueves de 14 a 18.

**Horario de clases de consultas:** Se convendrá con los alumnos, durante el desarrollo de la materia, los horarios de consultas.

H. **MODALIDAD DE EVALUACIÓN:**

**Evaluaciones Parciales:** Se le presentará al alumno una serie de problemas que deberá resolver.

**Evaluación Final:** Será oral, el alumno deberá desarrollar los ejes conceptuales y fundamentos teóricos de la materia.

**Condiciones de regularidad:** Aprobar los exámenes parciales o sus respectivos recuperatorios.

**Condiciones de promoción:** no se prevé

I. **CONTENIDOS:**

*El asterísco al lado de las referencias citadas más abajo indica la bibliografía considerada principal. Las citas sin el asterísco corresponden a bibliografía suplementaria.*

**Unidad 0. Python, SymPy, SAGE.** Panorama de instalación, distribuciones y recursos online. Tipos de datos en Python, programación elemental.

**Unidad 1. Ecuaciones de Primer Orden.** Noción de ecuación diferencial y clasificación. Ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO). Problemas de valores iniciales. Familia de curvas y la famila ortogonal. Método de separación de variables. Aplicaciones: dinámica de mezclas, cuerpos en caída a lo largo de guías, curvas braquistócrona y tautócrona. Ecuaciones homogéneas. Ecuaciones exactas. Factores integrantes. Ecuaciones lineales de primer orden. Métodos de reducción de orden. Curvas de persecución. Velocidad de escape. Problema del resorte. Cambios de variables. Usando SymPy para cambiar variables. Grupos de Lie uniparamétricos. Grupos de simetrías. Generadores infinitesimales. Variables canónicas. Solución de EDO por medio de sus grupos de Lie de simetrías. **????**

**Unidad 2. Teorema de Existencia y Unicidad.** Presentación filosófica: determinismo científico. Funciones Lipschitzianas. Teorema de punto fijo de Banach. Método iterativo de Picard. Teorema de existencia y unicidad para sistemas de EDO de primer orden.**????**

**Unidad 3. Ecuaciones Lineales de Segundo Orden.** Ecuaciones lineales. Reducción de orden. Ecuaciones homogéneas a coeficientes constantes. El problema no homogéneo. Independencia lineal. Bases de soluciones. Polinomio característico. Ecuaciones no homogéneas. Coeficientes indeterminados y variación de los parámetros. Vibraciones mecánicas. Solución del problema Kepleriano de los dos cuerpos. Osciladores armónicos acoplados. **??**

**Unidad 4. Métodos cualitativos.** Teoremas de separación y de comparación de Sturn. Aplicaciones, ceros de las funciones de Bessel.**??**

**Unidad 5. Desarrollo en serie de potencias.** Repaso de series de potencias. Método de coeficientes indeterminados. Resolución de problemas de desarrollo en serie con SymPy. Ecuaciones lineales de segundo orden: puntos regulares. Puntos singulares regulares. Series de Frobenius. Teoremas fundamentales.**??**

**Unidad 6. Sistemas lineales.** Base de soluciones. Matriz fundamental. Sistemas lineales a coeficientes constantes. Solución del problema homogéneo con formas de Jordan. Problema no homogéneo. Sistemas no-lineales. **??**

J. **CÓDIGO QR** Algunos bolques de código Python que expondremos en el texto vienen acompañados de un código QR como note al margen. La finalidad es que el alumno pueda leer este código con algún dispositivo movil y ejecutar el código dentro del dispositivo

K. **MARGENES** El significado de las imágenes en los margenes es el siguiente:

| | |
|---|---|
| | Enlace de Internet |
| | Prestar atención |
| | Lectura adicional |
| | Actividad práctica |

# Capítulo 1

# Teoremas de Existencia y Unicidad

### 1.0.1. Introducción

« El determinismo es una doctrina filosófica que sostiene que todo acontecimiento físico, incluyendo el pensamiento y acciones humanas, está causalmente determinado por la irrompible cadena causa-consecuencia, y por tanto, el estado actual “determina” en algún sentido el futuro...En física, el determinismo sobre las leyes físicas fue dominante durante siglos, siendo algunos de sus principales defensores Pierre Simon Laplace y Albert Einstein». Wikipedia (2017).

«Podemos mirar el estado presente del universo como el efecto del pasado y la causa de su futuro. Se podría condensar un intelecto que en cualquier momento dado sabría todas las fuerzas que animan la naturaleza y las posiciones de los seres que la componen. Si este intelecto fuera lo suficientemente vasto para someter los datos al análisis, podría condensarse en una simple fórmula de movimiento de los grandes cuerpos del universo y del átomo más ligero; para tal intelecto nada podría ser incierto y el futuro, así como el pasado, estaría frente sus ojos». Laplace, citado en Wikipedia (2017).

La ciencia se vale de estructuras matemáticas para describir a traves de modelos la evolución de sistemas reales. Usualmente esas estructuras son ecuaciones (diferenciales) donde el tiempo es una de sus variables. Conocer el «estado actual» de un sistema (las «posiciones» que menciona Laplace) es conocer las condiciones iniciales. Mientras que las ecuaciones en si mismas se derivan de «las fuerzas que animan la naturaleza». Así, para que la matemática colabore con la filosofía determinista, debería ella misma plantear problemas deterministas. En ese sentido, hablando específicamente de ecuaciones diferenciales, para que podamos decir que un PVI sea determinista, el problema debería tener solución (existencia de soluciones), caso contrario este PVI no produciría ninguna predicción del futuro. Pero también esta solución debería ser única (unicidad de soluciones), porque de no ser así, el problema produciría múltiples predicciones y por tanto el estado actual no determinaría el futuro. Un problema que satisfaga estas condiciones lo denominaremos *bien planteado*[1] .

Por lo expuesto, es de trascendencia para la ciencia en general que se pueda establecer que los problemas matemáticos que modelizan problemas de estas ciencias sean bien planteados. Este es el propósito de este capítulo.

Para nuestra sorpresa, PVIs sin ningun problema aparente a la vista no son problemas bien planteados.

**Ejemplo 1.0.** Considerar el siguiente PVI:

$$\begin{cases} y'(x) &= y(x)^{2/3} \\ y(0) &= 0 \end{cases}$$

[1]Es común en la literatura requerir, además de la existencia y unicidad, la estabilidad para hablar de problema bien planteado

La ecuacion s en varialbles separables. Deberíamos dividir por $y(x)$, pero notar antes de hacer ello que $y \equiv 0$ es solución. Supongamos $y(x) \neq 0$, una vez dividido

$$\frac{dy}{y^{2/3}} = dx \Rightarrow 3y^{1/3} = x + C \Rightarrow y(x) = \left(\frac{x}{3} + C\right)^3.$$

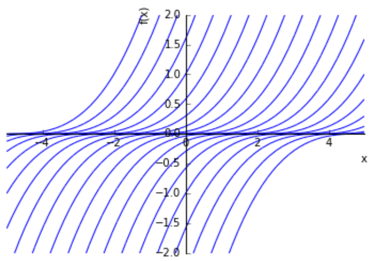
A pesar de la limitación original de que $y(x) \neq 0$, la expresión para $y(x)$ que hemos hallado es solución para todo $x \in \mathbb{R}$. Notar que $y(x) = 0$ cuando $x = -C/3$. Sin embargo, el valor problemático $y = 0$ nos trae aparejado un inesperado problema. Ocure que la función $y_C(x) := \left(\frac{x}{3} + C\right)^3$ tiene derivada igual a cero en $x = -C/3$. Esto implica que si $C_1 < C_2$ entonces la función

$$y_{C_1,C_2}(x) := \begin{cases} y_{C_1}(x) & \text{si } x \leq -C_2 \\ 0 & \text{si } x \in [C_1, C_2] \\ y_{C_2}(x) & \text{si } x \geq -C_1 \end{cases}$$

está bien definida y es diferenciable en $\mathbb{R}$. Además de ello, cualquiera de estas funciones con $C_1 \leq 0 \leq C_2$ resuelven el PVI. De esta manera hemos encontrado un PVI con infinitas soluciones.

```
from sympy import *
x,y=symbols('x,y')
Rango=range(-10,11)
C=[k/6.0 for k in Rango]
p=plot((x/3+C[0])**3,(x,-5,5),show=
     False,xlim=(-5,5),\
ylim=(-2,2),aspect_ratio=(1,1))
for pend in C[1:]:
     p1=plot((x/3+pend)**3,(x,-5,5),
     show=False,xlim=(-5,5),\
ylim=(-2,2),aspect_ratio=(1,1))
     p.append(p1[0])
p.show()
```

scripts/no-unicidad.py




## 1.1 Sistemas de Ecuaciones Diferenciales

### 1.1.1. Definición y ejemplos

Un *sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden* es un conjunto de ecuaciones que relacionan una variable independiente, digamos $x$, un conjunto de variables dependientes, digamos $y_1(x), \ldots, y_n(x)$, y sus derivadas respecto a $x$. A las ecuaciones diferenciales con una incognita y una ecuación las denominaremos *ecuaciones escalares*.

**Definición 1.**

Un sistema de ecuaciones diferenciales es una conjunto de ecuaciones de la forma

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx}(x) = f_1(x, y_1(x), \dots, y_n(x)) \\ \dfrac{dy_2}{dx}(x) = f_2(x, y_1(x), \dots, y_n(x)) \\ \qquad \vdots \\ \dfrac{dy_n}{dx}(x) = f_n(x, y_1(x), \dots, y_n(x)) \end{cases}, \tag{1.1}$$

donde $f_j : [a, b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, n$, son funciones.
Una manera alternativa y compacta de denotar un sistema se logra introduciendo las funciones $y = (y_1, \dots, y_n)$ y $f = (f_1, \dots, f_n)$. Entonces $y : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ es una función con valores en $\mathbb{R}^n$ y $f : [a, b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es un campo vectorial dependiente de $x$. Con estas notaciones el sistema se escribe:

$$y'(x) = f(x, y(x)). \tag{1.2}$$

**Ejemplo 1.1. Ecuación del péndulo.** Si $x(t)$ es el ángulo que forma un péndulo, de longitud $l$, con la vertical en el tiempo $t$ y $v(t) = x'(t)$, entonces $x(t)$ y$v(t)$ deben satisfacer el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x'(t) = v(t) \\ v'(t) = -\dfrac{g}{l}\operatorname{sen}(x(t)). \end{cases} \tag{1.3}$$


Vito Volterra (1860-1940)

**Ejemplo 1.2. Sistemas de ecuaciones de Lotka-Volterra** En 1925 y 1926, Alfred J. Lotka y Vito Volterra respectivamente, introdujeron las ecuaciones de Lotka-Volterra . Se trata de un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden que se usan para describir dinámicas de sistemas biológicos en el que dos especies interactúan, una como presa y otra como depredador. Se definen como:

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)(\alpha - \beta y(t)) \\ y'(t) = -y(t)(\gamma - \delta x(t)) \end{cases} \tag{1.4}$$

La variable $y$ representa el número de individuos de algún predador (por ejemplo, un lobo) y $x$ es el número de sus presas (por ejemplo, conejos), $t$ representa el tiempo; y $\alpha, \beta, \gamma$ y $\delta$ son parámetros (positivos)

### 1.1.2. Sistemas de ecuaciones y ecuaciones de orden superior

*Es posible convertir el sistema* (1.1) *de $n$-ecuaciones diferenciales de primer orden en una ecuación escalar de orden $n$*

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}). \tag{1.5}$$

*y viceverza.*

Para justificar la aseveración anterior supongamos que $y = y(x)$ resuelven (1.5) y escribamos:

$$y_1 = y,\ y_2 = y',\ y_3 = y'', \dots, y_n = y^{(n-1)}.$$

Entonces notar que

$$\begin{cases} y_1'(x) & = y_2(x) \\ y_2'(x) & = y_3(x) \\ & \vdots \\ y_{n-1}'(x) & = y_n(x) \\ y_n'(x) & = f(x, y_1(x), \dots, y_n(x)) \end{cases}, \tag{1.6}$$

Reciprocamente, supongamos que $y_1, \dots, y_n$ resuelven (1.1). Por simplicidad vamos a suponer que las $f_j$ son independientes de $x$, el procedimiento general sigue las mismas líneas que el caso que discutimos aquí. Se toma $y = y_n$ (podríamos usar cualquier $y_j$, $j = 1, \dots, n$). Ahora derivamos sucesivamente $n$-veces respecto a $x$ la ecuación para $y_n$, y reemplazamos cada derivada $y_j'$ por $f_j$ (vamos a omitir los argumentos de $f_j$ que son en todos los casos $(y_1, \dots, y_n)$):

$$\begin{array}{lcl} y_n'(x) = & f_n(y_1, \dots, y_n) & =: g_1(y_1, \dots, y_n) \\ y_n''(x) = & \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_n}{\partial y_j} f_j + & =: g_2(y_1, \dots, y_n) \\ y_n'''(x) = & \sum_{k,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f_n}{\partial y_k \partial y_j} f_k f_j + \sum_{k,j=1}^{n} \frac{\partial f_n}{\partial y_j} \frac{\partial f_j}{\partial y_k} f_k & =: g_k(y_1, \dots, y_n) \\ & \vdots & \vdots \\ y_n^{(n)}(x) = & \cdots & =: g_n(y_1, \dots, y_n) \end{array}$$

Las igualdades anteriores tienen la estructura $z = G(y)$, donde $y = (y_1, \dots, y_n)$, $z = (y_n', y_n'', \dots, y_n^{(n)})$ y $G = (y_1, \dots, y_n)$. Si la función $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es invertible y escribimos $H = G^{-1}$ entonces

$$y_n = H_n(z) = H_n(y_n', y_n'', \dots, y_n^{(n)}).$$

La anterior es una ecuación escalar de orden $n$ para $y_n$. Por consiguiente hemos logrado reducir el sistema de $n$-ecuaciones a una ecuación de orden $n$. Observar que si resolvemos esta ecuación, encontrando $y_n$, podemos hallar el resto de las incognitas $y_j$, $j = 1, \dots, n-1$, usando que $y_j = H_j(y_n', y_n'', \dots, y_n^{(n)})$.

**Ejemplo 1.3. Ecuaciones de Lotka-Volterra.** Reduzcamos las ecuaciones de Lotka-Volterra a una ecuación de orden 2 y luego revirtamos el camino.

La primera parte la resolvemos con Sympy:

```
t=symbols('t')
y=Function('y')(t)
x=Function('x')(t)
alpha,beta,gamma,delta=symbols('alpha,beta,gamma,delta',positive=True)
ec=y.diff()+gamma*y-delta*x*y
ec1=alpha*x-beta*x*y
ec2=ec.diff(t)
ec3=ec2.subs(x.diff(),ec1)
ec4=(y+gamma*y)/delta/y #Esto es  x
ec5=ec3.subs(x,ec4)
ec6=ec5.simplify()
ec6
```

scripts/Sist-Ecua.py

Resulta en

$$\frac{d^2}{dt^2} y(t) - \frac{d}{dt} y(t) + (-\alpha\gamma - \alpha)\, y(t) + (\beta\gamma + \beta)\, y^2(t) = 0 \tag{1.7}$$

El camino inverso es más sencillo. Llamamos $z = y'$. Usando las variables $y, z$ la ecuación (1.7) se escribe

$$\begin{cases} y'(t) & = v(t) \\ v'(t) & = v + (\alpha\gamma + \alpha)\, y(t) - (\beta\gamma + \beta)\, y^2(t) \end{cases}$$

No llegamos a la ecuación de partida. Hay que tener presente que una ecuación tiene diferentes representaciones en diferentes variables y que las variables que hemos elegido para el camino de vuelta $y, v$, no son las originales del problema $y, x$.

Émile Picard (1856-1941)

## 1.2 Método de iteraciones de Picard

En esta sección vamos a describir la estrategia que emplearemos para la demostración de la existencia de soluciones. El método que seguiremos fue ideado por Émile Picard

Introducimos previamente algunas definiciones elementales.

**Definición 1.**

Sea $\alpha$ una función definida en un intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ con valores en $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, tal que cada componete es una función integrable. Entonces, como es usual, escribimos

$$\int_a^b \alpha(s)ds = \left(\int_a^b \alpha_1(s)ds, \dots, \int_a^b \alpha_n(s)ds\right)$$

Es un ejercicio muy sencillo demostrar que vales las propiedades elementales de las integrales, para esta extensión del concepto de integral a funciones con valores vectoriales. En particular vale el Teorema Fundamental del Cálculo: *Si $\alpha$ es continuamente diferenciable entonces*

$$\int_a^b \alpha'(s)ds = \alpha(b) - \alpha(a).$$

Nuestra intención es demostrar la existencia de soluciones de un PVI para el sistema de EDOs

$$\begin{cases} y'(x) & = f(x, y) \\ y(x_0) & = y_0 \end{cases}, \tag{1.8}$$

donde $f : \Omega \subset (a, b) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\Omega$ abierto, $y : (a, b) \to \mathbb{R}^n$ (se debe satisfacer que $(x, y(x)) \in \Omega$, para $x \in [a, b]$), $x_0 \in (a, b)$ e $y_0 \in \mathbb{R}^n$ son dados con $(x_0, y_0) \in \Omega$.

Integremos la ecuación diferencial en un intervalo de extremos $x_0$ y $x$ y tomando en consideeración las condiciones iniciales obtenemos una nueva ecuación para $y(x)$, en este caso una ecuación integral :

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t))dt. \tag{1.9}$$

Esta ecuación presenta una estructura muy particular. Podemos pensar el miembro derecho de (1.9) como una trasformación (función) $T$ que lleva la función $y = y(x)$ en la función

$$T(y)(x) := y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t))dt.$$

Pensando de esta manera (1.9) se escribe sencillamente

$$T(y) = y.$$

Vale decir, la ecuación integral expresa el hecho que $T$ lleva a la función $y$ en si misma. Esto en matemática es conocido como un punto fijo . En análisis numérico los puntos fijos son utilizados para resolver ecuaciones algebraicas del tipo $h(x) = x$, donde $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. En aquel copntexto se ve que un procedimiento para aproximar soluciones es interar la función $h$, i.e. dado un $x_0$ cualquiera considerar la sucesión de *aproximaciones sucesivas*

$$x_n = h(x_{n-1}), \quad n = 1, 2, \dots.$$

El fundamento de proceder así es que si la sucesión $x_n$ converge a algún valor $x^*$ y si $h$ es continua entonces $x^*$ resuelve $h(x) = x$ pues

$$h(x^*) = h\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} h(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x^*. \tag{1.10}$$

Vamos a proceder por analogía y proponer el siguiente proceso iterativo que genera las funciones $\varphi_k$, $k = 0, 1, \dots$:

$$\begin{cases} \varphi_0 & = y_0 \\ \varphi_{k+1}(x) & = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi_k(t))dt. \end{cases} \tag{1.11}$$

Ernst L. Lindelöf (1870—1946)

Este proceso se denomina *método de las aproximaciones sucesivas de Picard* y fué propuesto por E. Picard en Picard (1893) y luego generalizado por Ernest Lindelöf en Lindelöf (1894).

Deberemos indagar por condiciones que nos aseguren que la sucesión $\varphi_k$ converja a una función $\varphi$ y que esta función $\varphi$ es solución del PVI. Antes de adentrarnos en los detalles de las demostraciones, constatemos que la idea funciona en algunos ejemplos sencillos.

**Ejemplo 1.4.** Resolver

$$\begin{cases} y'(x) & = y(x) \\ y(0) & = y_0 \end{cases},$$

donde $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y_0$ es un punto arbitrario de $\mathbb{R}$.

Aplicando el método de picard:

$$\begin{aligned}
\varphi_0(x) &= y_0 \\
\varphi_1(x) &= y_0 + \int_0^x \varphi_0(t)dt && = y_0(1 + x) \\
\varphi_2(x) &= y_0 + \int_0^x \varphi_1(t)dt && = y_0(1 + x + \tfrac{x^2}{2}) \\
&\vdots && \vdots \\
\varphi_k(x) &= y_0 + \int_0^x \varphi_k(t)dt && = y_0(1 + x + \dots + \tfrac{x^k}{k!})
\end{aligned}$$

Se aprecia que en $\varphi_k$ aparecen las sumas parciales del desarrollo en serie de Taylor alrededor de 0 de la función exponencial. Luego tenemos que $\varphi_k$ converge a $y_0 e^x$ que es justamente la solución delm PVI propuesto.

Más ejemplos será tratados en la actividad práctica.

## 1.3 Teorema de punto fijo Banach

**Definición 1.**

Sea $(X, d)$ un espacio métrico completo. Una función $K : X \to X$ se denominará una contracción si existe un $\theta \in [0, 1)$ tal que

$$d(K(x), K(y)) \le \theta d(x, y), \quad x, y \in X.$$

Dada una función $K : X \to X$ escribiremos

$$K^n(x) = \underbrace{K\left(K\left(K \cdots K(x) \cdots\right)\right)}_{n-\text{veces}}.$$

Cuando $n = 0$ ponemos $K^0(x) = x$.

**Teorema 1** (Principio de contracción de Banach)**.**

Sea $(X, d)$ un espacio métrico completo y $K : X \to X$ una contracción. Entonces $K$ tiene un único punto fijo $x^*$. Además para todo $x$

$$d(K^n(x), x^*) \leq \frac{\theta^n}{1-\theta} d(K(x), x).$$

Stefan Banach (1892—1945)

*Demostración.* Sea $x \in X$ un punto arbitrario y definimos $x_n := K^n(x)$. Entonces si $m < n$

$$\begin{aligned} d(K^n(x), K^m(x)) &\leq d(K^n(x), K^{n-1}(x)) + \cdots + d(K^{m+1}(x), K^m(x)) \\ &\leq \theta^{n-1} d(K(x), x) + \cdots + \theta^m d(K(x), x) \\ &\leq \frac{\theta^m}{1-\theta} d(K(x), x) \end{aligned}$$

Como $\theta < 1$ vemos que si $m, n$ son suficientemente grandes podemos hacer que $d(K^n(x), K^m(x))$ sea arbitrariamente chico. Hemos probado que la sucesión $K^n(x)$ es de Cauchy, de allí tiene límite, al que llamaremos $x^*$. Que $x^*$ es punto fijo se justifica como en (1.10) (notar que una contracción es continua).

Que el punto fijo es único, se deduce de suponer que existe otro $z^*$ y aplicar lque $K$ es contracción

$$d(x^*, z^*) = d(K(x^*), K(z^*)) \leq \theta d(x^*, z^*) < d(x^*, z^*).$$

Lo que es una contradicción. $\square$

# Bibliografía


Lindelöf, E. (1894). Sur l'application des méthodes d'approximations successives à l'étude des intégrales réelles des équations différentielles ordinaires. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 10:117--128. Available from: `http://eudml.org/doc/235150`.

Picard, E. (1893). Sur l'application des méthodes d'approximations successives à l'étude de certaines équations différentielles ordinaires. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 9:217--272. Available from: `http://eudml.org/doc/234079`.

Wikipedia (2017). Determinismo --- wikipedia, la enciclopedia libre. [Internet; descargado 2-mayo-2017]. Available from: `https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Determinismo&oldid=98219046`.