FACULTAD DE CS. EXACTAS, FCO-QCAS Y NATURALES
DEPTO DE MATEMÁTICA.
PRIMER CUATRIMESTRE DE 2017
ECUACIONES DIFERENIALES. COD. 1913
PRÁCTICA 4: EXISTENCIA Y UNICIDAD.

Ejercicio 1 Transformar los siguientes sistemas de ecuaciones de primer orden en una ecuación de segundo orden.

a.
$$\begin{cases} x'(t) &= x^2(t) + y(t) \\ y'(t) &= x(t) + 2y(t) \end{cases}$$

b.
$$\begin{cases} x'(t) &= x(t) + z(t) \\ y'(t) &= tx(t) - z(t) \\ z'(t) &= -t^2x(t) + y(t) \end{cases}$$

c.
$$\begin{cases} x'(t) &= x(t)y(t) \\ y'(t) &= x(t) - y(t) \end{cases}$$

Ejercicio 2 Encontrar o demostrar que no existe una constante de Lipschitz para las siguientes funciones en los dominios indicados.

a. $f(t,x) = t|x|$, en $|t| < a$, $x \in \mathbb{R}^n$.

b. $f(t,x) = x^{1/3}$ en $|x| < 1$.

c. $f(t,x) = \frac{1}{x}$ en $1 \leq x < \infty$.

d. $f(t,x) = (x_1^2x_2, t + x_3, x_3^2)$ en $|t| \leq a$, $|x| \leq b$

Ejercicio 3 Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Considerar el sistema

$$\begin{cases} x'(t) = A \cdot x(t) \\ \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{1}$$

a. Sea $y(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ continua, demostrar que

$$\int_0^t A \cdot y(s) ds = A \cdot \int_0^t y(s) ds.$$

b. Aplicar la iteración de Picard con la función de partida $\varphi_0(t) \equiv x_0$ y demostrar que

$$\varphi_n(t) = \left(\sum_{i=0}^{n} A^i \frac{t^i}{i!} \right) \cdot x_0,$$

donde $A^i = \underbrace{A \cdots A}_{i-\text{veces}}$ y $A^0 = I$.

Ejercicio 4 El movimiento escilatorio de una partícula de masa m, que se encuentra en un extremo de un resorte, y este está fijado a la pared, está dado por la ecuación

$$mx''(t) = -kx(t),$$

donde $x(t)$ es la posición de la partícula, el origen de coordenadas está en la posición de reposo de la masa cuando el resorte no está estirado ni contraído, y k es la constante de elasticidad del resorte.

Para una partícula que inicialmente está en la posición $x(0) = 0$ y se le da una velocidad inicial $x'(0) = 1\frac{mts}{s}$ la función que modela su movimiento resuelve el problema

$$\begin{cases} mx''(t) = -kx(t) \quad t \in [0, \infty) \\ \\ x(0) = 0 \\ \\ x'(0) = 1. \end{cases} \tag{2}$$

a. Transformar el problema anterior a un sistema de ecuaciones de primer orden.

b. Aproximar la solución con el método de Picard. Tomar como función inicial $\varphi_0 \equiv (0, 1)$ y comparar φ_n con el polinomio de grado n de la solución de (2).

Ejercicio 5 Considerar el problema

$$\begin{cases} x''(t) + 2x'(t) + x(t) = 0 \\ x(0) = 0 \\ x'(0) = 1. \end{cases} \tag{3}$$

a. Transformar la ecuación de segundo orden en un sistema de ecuaciónes de primer orden y obtener un problema a valores iniciales de primer orden.

b. Aplicar el método de Picard al problema obtenido en el ítem a, tomando como función inicial $\varphi_0 \equiv (0,1)$ y demostrar que, para $n \geq 1$,

$$\varphi_n(t) = \left(t \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \frac{t^i}{i!}, \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (i+1) \frac{t^i}{i!} \right)$$

.

c. Utilizar el resultado obtenido en el ítem b para demostrar que te^{-t} es la solución de (3).

Ejercicio 6 Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(t,x) = \sqrt{|x|}$. Consideremos el PVI:

$$\begin{cases} x' = f(t,x); \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

a. Encontrar alguna solución.

b. ¿Es la única?

c. Si no lo fuera, ¿Contradice el Teorema de Picard?

Ejercicio 7 Consideremos la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y),$$

donde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ está dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a. Demostrar que la ecuación admite soluciones para condiciones iniciales $y(x_0) = y_0$ arbitrarias.

b. ¿Satisface localmente f las condiciones del Teorema de Picard?

Sugerencia: $y(x) \equiv 0$ es solución de la ecuación. Notar que si $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ entonces $f(x, x) = \frac{1}{2}$.

Ejercicio 8 Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es de clase C^1, supongamos que $\varphi(t)$ está definida en $\mathbb{R}$ y es solución de:

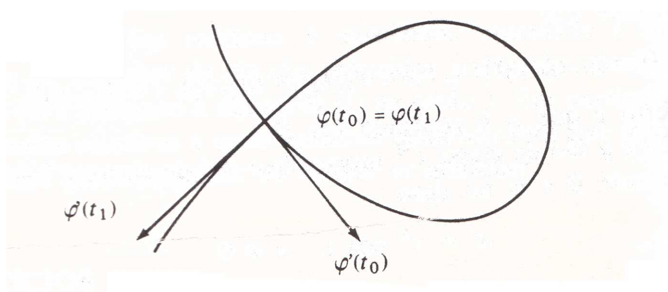
$$\begin{cases} x' = f(x); \\ \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

a. ¿Es posible que exista $t_1 \neq t_0$ tal que $\varphi(t_1) = \varphi(t_0)$ y $\varphi'(t_1) \neq \varphi'(t_0)$?

Si ahora $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de clase C^1, y $\varphi(t)$ está definida en $\mathbb{R}$ y es una solución de:

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

b. ¿Es posible que exista $t_1 \neq t_0$ tal que $\varphi(t_1) = \varphi(t_0)$ y sin embargo que $\varphi'(t_1)$ y $\varphi'(t_0)$ sean linealmente independientes?



Sugerencia: Notar que:

$$\frac{d}{dt}(t\text{sen } t) = t\cos t + \text{sen } t \quad \text{y} \quad \frac{d}{dt}(t^2\text{sen } t) = t^2\cos t + 2t\text{sen } t.$$

Sea φ una solución de (8) con $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por:

$$f(t, (x, y)) = (t\cos t + \text{sen } t, t^2\cos t + 2t\text{sen } t)$$

y condiciones iniciales $(x(0), y(0)) = (0, 0)$. Calcular entonces $\varphi(\pi)$, $\varphi(2\pi)$, $\varphi'(\pi)$ y $\varphi'(2\pi)$.

c. En caso de que b sea afirmativo, estudiar esto en términos de la unicidad de las soluciones dada por el Teorema de Picard.

d. Comparar los resultados de los incisos a y b.

Ejercicio 9 Sea $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ Lipschitziana. Demostrar que existe una solución de:

$$\begin{cases} x' = f(t,x); \\ \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

definida en $\mathbb{R}$.

Ejercicio 10 En el rectángulo $P = \{(t,x) : |t - t_0| < a, |x - x_0| < b\} \subset \mathbb{R}^2$, sean f, g dos funciones continuas y localmente lipschitzianas. Si $f < g$ en P entonces para ψ y φ soluciones de

$$x' = g(t,x), x(t_0) = x_0 \quad \text{y} \quad x' = f(t,x), x(t_0) = x_0$$

respectivamente, definidas en $0 \leq t \leq c$, demostrar que $\varphi(t) \leq \psi(t)$ para todo $t_0 < t \leq c$.

Ejercicio 11 Sea $\{\varphi_n\}$ una sucesión de funciones definidas por

$$\varphi_0(x) = 0, \quad \varphi_n(x) = 1 + \int_0^x (\varphi_{n-1}(t))^2 dt.$$

Demostrar que φ_n es un polinomio de grado $2^{n-1} - 1$ cuyos coeficientes están en $[0,1]$. Demostrar que para $|x| < 1$, $\varphi_n \to \varphi$, donde φ es solución de $y' = y^2$, $y(0) = 1$.

Ejercicio 12 Sea $f(t,x)$ definida y continua en $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Supongamos que $f(t,x) = f(t+1,x)$ y que f es lipschitziana en $[0,1] \times \mathbb{R}^n$. Probar que toda solución $\varphi(t,t_0,x_0)$ está definida para todo $t \in \mathbb{R}$ y $\varphi(t,t_0,x_0) = \varphi(t+1,t_0+1,x_0)$.