

## 1. Teorema de separación de Sturm

El objetivo de esta unidad es mostrar como se pueden estudiar propiedades de las soluciones sin resolver la ecuación diferencial. En particular estudiaremos propiedades de los ceros de las soluciones.

**Teorema 1.1 (Separación de Sturm)** Sean  $y_1$  e  $y_2$  soluciones linealmente independientes de

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0. \quad (1)$$

Entonces entre dos ceros consecutivos de  $y_2$  hay exactamente un cero de  $y_1$ .

**Dem.** Sean  $x_1$  y  $x_2$  ceros sucesivos de  $y_2$ . Podemos suponer  $y_2 > 0$  en  $(x_1, x_2)$ . Vamos a considerar el Wronskiano de las soluciones

$$W = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x),$$

que es no nulo por la independencia lineal y por lo tanto tiene siempre el mismo signo. En los puntos  $x_1$  y  $x_2$  tenemos  $W = y_1(x)y_2'(x)$ . Notar que

$$y_2'(x_1) = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{y_2(x_1 + h)}{h} \geq 0.$$

De manera similar deducimos  $y_2'(x_2) \leq 0$ . Por la invariancia del signo de  $W = y_1 y_2'$  debe ocurrir que  $y_1(x_1)$  e  $y_1(x_2)$  tiene signos diferentes. Y por lo tanto  $y_1$  se debe anular en  $(x_1, x_2)$

**Teorema 1.2** Existe una función  $v$  tal que el cambio de variables  $y(x) = v(x)u(x)$  transforma la ecuación (1) en la ecuación

$$u'' + q(x)u = 0. \quad (2)$$

**Dem.**

```
x=var('x')
y=function('y',x)
u=function('u',x)
v=function('v',x)
P=function('P',x)
Q=function('Q',x)
y=u*v
eq=y.diff(2)+P*y.diff()+Q*y
eq1=eq.coefficient(u.diff())==0
v=desolve(eq1,v)
```

Obtenemos que  $v(x) = ce^{(-\frac{1}{2} \int P(x) dx)}$  resuelve nuestro problema.

Halleemos  $q$ .

```

y=u*v
eq=y.diff(x,2)+P*y.diff(x)+Q*y
eq=(eq/v).simplify_full()

```

Obtenemos

$$-\frac{1}{4}u(x)P(x)^2 + u(x)Q(x) - \frac{1}{2}u(x)D[0](P)(x) + D[0,0](u)(x) = 0.$$

y por lo tanto

$$q = -\frac{1}{4}P(x)^2 + Q(x) - \frac{1}{2}D[0](P)(x).$$

□