Teoría de Lie y ODE

Fernando Mazzone

Depto de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas Físico-Químicas y Naturales
Universidad Nacional de Río Cuarto

14 de diciembre de 2014

Consideremos la ecuación diferencial general de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1}$$

O su equivalente como forma diferencial

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{2}$$

La expresión $\frac{dy}{dx}$ implica una asimetría entre las variables x e y, una de ellas es independiente (x) y la otra (y) independiente. La expresión $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ es más simétrica, las dos variables tienen el mismo estatus en la expresión. Además las expresiones del tipo (2) representan un ente matemático importante llamado forma diferencial

Formas diferenciales, idea somera

1. Como los polinomios, las formas diferenciales tienen grado.
2. Dadas dos (pueden ser mas) variables x, y una 0-forma diferencial es una función $g(x, y)$ de x, y.
3. La expresión (2) es una 1-forma diferencial.
4. Hay un operador llamado diferencial y denotado por d. Si ω es una k-forma diferencial $d\omega$ es una $k + 1$ forma diferencial.
5. En el caso de 0-forma (función) $g(x, y)$ el diferencial se define
$$dg = \frac{\partial M}{\partial x}dx + \frac{\partial N}{\partial y}dy.$$
Una k-forma diferencial se llama exacta cuando es el diferencial de una $k - 1$-forma.

Cambio de variable general $\xi = \xi(x, y)$**,** $\eta = \eta(x, y)$
1) Calculamos $d\eta/d\xi$ en las variables x, y

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{d\eta dx}{\frac{d\xi}{dx}} = \frac{\frac{\partial\eta}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y}y'}{\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\xi}{\partial y}y'} = \frac{\frac{d\eta}{dx}}{\frac{d\xi}{dx}} = \frac{\frac{\partial\eta}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y}f(x,y)}{\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\xi}{\partial y}f(x,y)}. \tag{3}$$

2) En la expresión resultante sustituir x, y por las tansformaciones inversas $x = x(\xi, \eta)$ y $y = y(\xi, \eta)$

Ejemplo 3. Transformar a polares: $\frac{dy}{dx} = \frac{y^3+x^2y-x-y}{x^3+xy^2-x+y}$.
Dado que el cálculo es extenso lo haremos sólo con `SymPy`

```
from sympy import *
x=symbols('x')
y=Function('y')(x)
r=sqrt(x**2+y**2)
theta=atan(y/x)
Expr2=r.diff()/theta.diff()
Expr3=Expr2.subs(y.diff(),\
(y**3+x**2*y-x-y)/(x**3+x*y**2-x+y))
r,theta=symbols('r,theta',positive=True)
Expr4=Expr3.subs([(y,r*sin(theta)),\
(x,r*cos(theta))])
Expr5=simplify(Expr4)
```

Cambios de variables

Encontramos que en polares la ecuación es mucho más simple

$$\frac{dr}{d\theta} = -r^3 + r.$$

Grupos

Sean G un conjunto y α una función tal que $\alpha : G \times G \to G$. En el contexto de grupos es más usual la notación $\alpha(g_1, g_2) = g_1 g_2$. El par (G, α) se llama un grupo si se satisface

1. $(g_1 g_2) g_3 = g_1 (g_2 g_3)$, para todos $g_1, g_2, g_3 \in G$,
2. Existe $e \in G$ tal que $eg = ge = g$, para todo $g \in G$.
3. Para todo $g \in G$ existe $h \in G$ tal que $gh = hg = e$. Se acostumbra denotar $h = g^{-1}$.

Ejemplos de grupos

Ejemplo 1 Sea Π un plano euclideano y G el conjunto de todas las transformaciones rígidas de Π en si mismo. Entonces G es un grupo con la operación de composición. Se llama el grupo de transformaciones rígidas

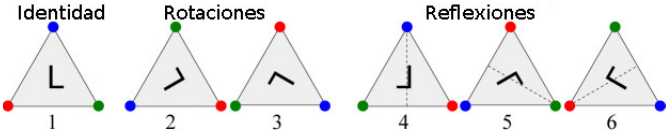
Ejemplo 2 Sea $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ un conjunto de n elementos y S_n definido por

$$S_n = \{\sigma | \sigma : X \to X \text{ y } \sigma \text{ es biyectiva } \}$$

Entonces S_n es un grupo con la operación de composición. Se denomina grupo simétrico

Ejemplos de grupos

Ejemplo 3 Sea Δ un polígono regular de n lados en un plano euclideano Π y D_{2n} el conjunto de todas las transformaciones rígidas de Π en si mismo que llevan Δ en si mismo. D_{2n} se llama el grupo diedral de orden $2n$. Para un triángulo equilatero grupo diedral



Teoría de grupos computacional: SAGE y GAP

GAP - Groups, Algorithms, Programming Lenguaje de programación para algebra discreta
SAGE: es un sistema de software de matemáticas libre de código abierto bajo la licencia GPL. Se basa en muchos paquetes de código abierto existentes: NumPy, SciPy, matplotlib, SymPy, Maxima, GAP, FLINT, R y muchos más. Acceda a su poder combinado a través de un lenguaje común, basado en Python Misión: Creación de una alternativa libre de código abierto viable a Magma, Maple, Mathematica y Matlab.

Teoría de grupos computacional: SAGE y GAP

```
sage: G=SymmetricGroup(5)
sage: sigma=G([(1,2,3),(4,5)])
sage: sigma^2
(1,3,2)
sage: sigma^3
(4,5)
sage: sigma^6
()
sage: G.order()
120
sage: H=G.subgroup([sigma])
sage: H.order()
6
```

Teoría de grupos computacional: SAGE y GAP

```
sage: H.list()
[(), (4,5), (1,2,3), (1,2,3)(4,5), (1,3,2),
   (1,3,2)(4,5)]
sage: H.is_normal()
False
sage: G1=DihedralGroup(3)
sage: G1[-2]
(1,3,2)
sage: H1=G1.subgroup(G1[-2])
sage: H1.is_normal()
True
sage: G1.quotient(H1)
Permutation Group with generators [(1,2)]
```

Grupos de simetrías

Los cambios de variables de un conjunto de dos variables, digamos x e y, son funciones φ, invertibles, de clase C^∞, donde $\varphi : \Omega_1 \to \Omega_2$, con Ω_1, Ω_2 abiertos de $\mathbb{R}^2$.
Acostumbraremos escribir $(\xi, \eta) = \varphi(x, y)$ y diremos que (ξ, η) son la variables nuevas e (x, y) las viejas.
Llamaremos $\mathscr{T}$ al conjunto de todas los cambios de variables φ. El conjunto $\mathscr{T}$ tiene una estructura de grupo con la operación de composición.

Ejemplo, polares: Es más facil describir la transformación que lleva coordenadas polares en cartesinas. En este caso $(x, y) = \varphi(r, \theta)$ y

$$
\begin{aligned}
\varphi(r, \theta) &= (r\cos(\theta), r\,\mathrm{sen}(\theta)), \\
\Omega_1 &= (0, \infty) \times (-\pi, \pi), \\
\Omega_2 &= \mathbb{R}^2 - \{(x, y) | y = 0, x \leq 0\}
\end{aligned}
$$

GRUPOS DE LIE UNIPARAMÉTRICOS

GRUPOS UNIPARAMÉTRICOS DE SIMETRÍAS

Sea $\mathscr{T}$ el grupo de cambios de variables. Supongamos dado un homomorfismo de grupos $P : (\mathbb{R}, +) \to (\mathscr{T}, \circ)$.

Notación:

1. Para $\lambda \in \mathbb{R}$ escribiremos $P_\lambda = P(\lambda)$
2. Si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ escribimos $(\xi, \eta) = f(x, y, \lambda) := P_\lambda(x, y)$.

Si $f(x, y, \lambda)$ es diferenciable respecto a (x, y) y analítica respecto a λ diremos que $\{P_\lambda | \lambda \in \mathbb{R}\}$ es un grupo de Lie uniparamétrico de simetrías.

Grupos de Lie uniparamétricos

Propiedades de P_λ

1. P_λ es biyectiva y diferenciable sobre su domio de definición en su imagen.
2. $P_{\lambda_1} \circ P_{\lambda_2} = P_{\lambda_1+\lambda_2}$, equivalentemente $f(f(x,y,\lambda_1),\lambda_2) = f(x,y,\lambda_1+\lambda_2)$.
3. $P_0 = I$, o $f(x,y,0) = (x,y)$.
4. $(P_\lambda)^{-1} = P_{-\lambda}$
5. Si $P_\lambda(x,y) = (\xi,\eta)$, entonces $\xi(x,y,\lambda)$ y $\eta(x,y,\lambda)$ son diferenciables respecto (x,y) y se desarrollan en serie de potencias respecto a λ. Es decir para todo $\lambda_0 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \xi(x,y,\lambda) &= a_0(x,y) + a_1(x,y)(\lambda-\lambda_0) + \cdots \\ \eta(x,y,\lambda) &= b_0(x,y) + b_1(x,y)(\lambda-\lambda_0) + \cdots \end{aligned}$$

Ejemplos grupos de Lie uniparamétricos

Ejercicio: Demostrar que las siguientes aplicaciones inducen grupos de Lie uniparamétricos

1. $P_\lambda(x,y) = (x+\lambda, y)$ y $P_\lambda(x,y) = (x, y+\lambda)$.
2. $P_\lambda(x,y) = (e^\lambda x, y)$
3. $P_\lambda(x,y) = \left(\frac{x}{1-\lambda x}, \frac{y}{1-\lambda x}\right)$
4. $P_\lambda(x,y) = \begin{pmatrix} \cos(\lambda) & -\operatorname{sen}(\lambda) \\ \operatorname{sen}(\lambda) & \cos(\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Grupo de simetrías de una ecuación

Definición

Consideremos una ecuación

$$y' = f(x, y).$$

Una transformación $P \in \mathscr{T}$ se denomina una simetría de la ecuación si el cambio de variables dado por $(\xi, \eta) = P(x, y)$ deja invariante la ecuación.

Ejercicio: el conjunto de todas las simetría de una ecuación es un subgrupo de $(\mathscr{T}, \circ)$. Lo llamaremos grupo de simetrías de la ecuación.

Ejemplo: hallar simetrías de

$$\frac{dy}{dx} = f(x).$$

De acuerdo con (3) se debe cumplir que

$$\frac{\frac{\partial\eta}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y} f(x)}{\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\xi}{\partial y} f(x)} = f(\xi)$$

Parece que debemos hacer las elecciones

$$\boxed{\xi = x}, \quad \frac{\partial\eta}{\partial x} = \frac{\partial\xi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial\eta}{\partial y} = \frac{\partial\xi}{\partial x}.$$

Luego

$$\frac{\partial\eta}{\partial y} = 1 \Rightarrow \boxed{\eta = y + \lambda}$$

con λ constante arbitraria.

ENCONTRAR SIMETRÍAS

Hallamos que el

$$P_\lambda(x, y) = (x, y + \lambda)$$

es un grupo uniparamétrico de simetrías. De manera similar

$$P_\lambda(x, y) = (x + \lambda, y)$$

es un grupo uniparamétrico de simetrías para

$$\frac{dy}{dx} = f(y).$$

ENCONTRAR SIMETRÍAS

Demostrar que las rotaciones alrededor del origen es un grupo uniparamétrico de simetrías de

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^3 + x^2y - x - y}{x^3 + xy^2 - x + y}.$$

Sea P_λ la transformación que rota un ángulo λ alrededor del origen. Era un ejercicio demostrar que $\{P_\lambda | \lambda \in \mathbb{R}\}$ es un grupo uniparamétrico de simetrías. Se tiene la representación matricial

$$P_\lambda(x, y) = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\lambda) & -\operatorname{sen}(\lambda) \\ \operatorname{sen}(\lambda) & \cos(\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$P_\lambda^{-1}(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\lambda) & \operatorname{sen}(\lambda) \\ -sen(\lambda) & \cos(\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

ENCONTRAR SIMETRÍAS

Para el cálculo recurrimos a `SymPy`

```
from sympy import *
x,theta=symbols('x,theta')
y=Function('y')(x)
xi=cos(theta)*x-sin(theta)*y
eta=-sin(theta)*x+cos(theta)*y
Expr2=eta.diff(x)/xi.diff(x)
Expr3=Expr2.subs(y.diff(),\
(y**3+x**2*y-x-y)/(x**3+x*y**2-x+y))
xi,eta=symbols('xi,eta')
Expr4=Expr3.subs([(y, -sin(theta)*xi+cos(theta)*
(x,cos(theta)*xi+sin(theta)*eta)])
Expr5=simplify(Expr4)
Expr6=simplify(Expr5)
Expr7=Expr6.subs([(sin(2*theta + pi/4),sin(2*the
```

Encontrar simetrías

$$\frac{1}{\eta^2\xi + \eta + \xi^3 - \xi}\left(\eta^3\left(\cos^2(\theta) + 1\right) - \eta^2\xi\sin^2(\theta) + \eta\xi^2\left(\cos^2(\theta) + 1\right.\right.$$