

Ecuaciones Diferenciales

Fernando Mazzone

22 de marzo de 2017

Índice general

1. Teoría de Lie y ecuaciones diferenciales	2
1.1. Introducción histórica	2
1.2. Cambios de Variables	3
1.2.1. Cómputos de cambios de variables	3
1.3. Grupos	7
1.3.1. Definición y ejemplos	7
1.3.2. Teoría de grupos computacional: GAP	8
1.4. Grupos continuos de simetrías	8
1.4.1. Grupos y cambios de variables	8
1.4.2. Grupos de Lie uniparamétricos	9
1.4.3. Grupos de simetrías de EDO	10
1.5. Órbitas, tangentes y curvas invariantes	13
1.6. Simetrías a partir de Infinitesimales	16
1.7. Coordenadas canónicas	17
1.7.1. Definición y ejemplos	17
1.7.2. Generador Infinitesimal	18
1.8. Encontrando coordenadas canónicas	18
1.8.1. Integrales primeras	18
1.8.2. Infinitesimales→Simetrías (Revisitado)	20
1.9. Resolviendo EDO con grupos de Lie de simetrías	21
1.9.1. Método de solución	21
1.9.2. Ecuaciones homogéneas	23
1.9.3. Método de Lie y SymPy	23
Apéndices	24
1.A. Formas Diferenciales, una introducción ingenua	24

Capítulo 1

Teoría de Lie y ecuaciones diferenciales

1.1 Introducción histórica

«Marius Sophus Lie fue un matemático noruego (17 de diciembre de 1842-18 de febrero de 1899) que creó en gran parte la teoría de la simetría continua, y la aplicó al estudio de la geometría y las ecuaciones diferenciales. La herramienta principal de Lie, y uno de sus logros más grandes fue el descubrimiento de que los grupos continuos de transformación (ahora llamados grupos de Lie), podían ser entendidos mejor "linealizándolos", y estudiando los correspondientes campos vectoriales generadores (los, así llamados, generadores infinitesimales). Los generadores obedecen una versión linealizada de la ley del grupo llamada el corchete o conmutador, y tienen la estructura de lo que hoy, en honor suyo, llamamos un álgebra de Lie.»



Wikipedia

« La historia del análisis de simetrías comenzó a mediados del siglo XIX cuando S. Lie Y F. Klein se reunieron en Berlín. Ambos matemáticos contribuyeron mucho a la teoría de las simetrías. S. Lie presentó su famosa obra para examinar las simetrías en relación con ecuaciones algebraicas y diferenciales. En su programa de Erlangen, Klein desarrolló las contrapartes discreta y algebraica de la aplicación de las simetrías a las funciones. S. Lie creó un gran campo de las ecuaciones diferenciales, que fue muy útil para clasificar las ecuaciones diferenciales de una forma nueva. La teoría desarrollada por Lie es muy laboriosa, si se hace a mano. Esta es una de las razones por las que la aplicación de esta teoría desapareció en la práctica de resolver problemas. Muy pocas personas usaron los procedimientos de Lie para examinar ecuaciones diferenciales. Uno de ellos fue Birkhoff, quien en la década de 1950 aplicó la teoría a problemas hidrodinámicos. En los últimos años, se prestó más atención a la teoría de Lie como uno de los métodos raros para obtener soluciones, especialmente para ecuaciones diferenciales no lineales. Hoy el procedimiento de Lie es accesible para su aplicación, si es usado el poder computacional del álgebra computacional. Los cálculos algebraicos muy extendidos hoy en día se llevan a cabo por computadoras. En los últimos 20 años, ha habido un enorme aumento de la potencia de las computadoras y del desarrollo de lenguajes simbólicos, permitiendo abordar problemas en una manera más sencilla.»

Symmetry Analysis of Differential Equations with Mathematica®
?

1.2 Cambios de Variables

Vamos a seguir estudiando ecuaciones no lineales de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (1.1)$$

o, utilizando la escritura en *forma diferencial*

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0. \quad (1.2)$$

En el apéndice 1.A discutimos muy sumariamente el concepto de forma diferencial.

Problema 1 (Cambio de variables).

Dada la ecuación (1.1) o (1.2) en las variables x, y . Queremos encontrar nuevas variables

$$\begin{cases} \hat{x} = \hat{x}(x, y) \\ \hat{y} = \hat{y}(x, y) \end{cases} \quad (1.3)$$

tales que la ecuación se transforme en una que podamos resolver.

Para no correr riesgos de perder información en la ecuación transformada, es conveniente que x e y también se expresan en función de \hat{x} e \hat{y} , vale decir que la transformación pueda invertirse:

$$\begin{cases} x = x(\hat{x}, \hat{y}) \\ y = y(\hat{x}, \hat{y}) \end{cases} \quad (1.4)$$

1.2.1. Cómputos de cambios de variables

Vamos a estudiar en primer lugar como computar cambios de variables. Empezaremos por casos más sencillos hasta ir a la situación más general.

Cambio de la variable dependiente manteniendo la independiente

Supongamos que el conjunto de variables se relacionan por las identidades $x = \hat{x}$ e $y = y(x, \hat{y})$. Notar que en este caso usamos la relación inversa. Entoces, derivando y respecto a x y usando la regla de la cadena (que sería más apropiado llamarla regla de cambio de variables para la derivada)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \hat{y}} \frac{d\hat{y}}{dx}.$$

La ecuación se convierte

$$\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \hat{y}} \frac{d\hat{y}}{dx} = f(x, y(x, \hat{y})).$$

Que es una expresión sólo en \hat{y} y x . Parece más complicada, pero en un ejemplo concreto puede ser más simple.

Ejemplo 1. Hacer el cambio de variable propuesto en la ecuación indicada

$$y = \frac{e^{\hat{y}}}{x} \quad \text{en} \quad y' = [\ln(xy)]^2 xy - \frac{y}{x}.$$

Es costumbre recurrir a un abuso de notación que suele producir confusión al estudiante.

Nos referimos a diferenciar las derivadas $\partial y / \partial x$ y dy / dx . Tratándose y en el caso que nos ocupa, de una función de x e \hat{y} , la derivada $\partial y / \partial x$ representa la derivada parcial de y respecto a su primera variable. Como \hat{y} es a su vez función de x , por dy / dx denotamos la derivada de y atendiendo a que la segunda variable también depende de x .

1) Expresemos dy/dx sólo con x , \hat{y} y $d\hat{y}/dx$.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{e^{\hat{y}}}{x^2} + \frac{e^{\hat{y}}}{x} \frac{d\hat{y}}{dx}.$$

2) Remplacemos y' e y en la ecuación

$$-\frac{e^{\hat{y}}}{x^2} + \frac{e^{\hat{y}}}{x} \frac{d\hat{y}}{dx} = \left[\ln \left(x \frac{e^{\hat{y}}}{x} \right) \right]^2 x \frac{e^{\hat{y}}}{x} - \frac{e^{\hat{y}}}{x}.$$

3) Simplifiquemos

$$\frac{d\hat{y}}{dx} = \hat{y}^2 x. \quad (1.5)$$

⚡ **Importante:** Observar que en un cambio de variable, ya se cambie la variable dependiente, independiente o ambas, las derivadas (tratándose de la velocidad de cambio de unas variables respecto a otras) también hay que cambiarlas.

Podemos resolver los cambios de variables con SymPy, lo cual es muy útil por dos motivos. El primero porque nos permite hacer cambios de variables en expresiones muy grandes, resolviendo operaciones que a mano son sumamente tediosas. El segundo, y no menos importante para nosotros, es que es muy rico explorar un procedimiento enmarcándolo en un contexto muy distinto. En este caso, el procedimiento es realizar un cambio de variables y estamos explorando el mismo a través de un breve código que lo implementa en un lenguaje de programación.

```
1 from sympy import *
  x=symbols('x') #unico simbolo primitivo
3 y_n=Function('y_n')(x) #declaro las variables nuevas, funciones de las
  viejas
  y=exp(y_n)/x #relacion entre y, y_n
5 eq=Eq(y.diff(x)-(ln(x*y))**2*x*y+y/x,0) #la ecuacion
  simplify(eq) # simplifica expresiones
```

scripts/sust1.py



Obtenemos la ecuación

$$\frac{1}{x} \left(-x \log^2 \left(e^{y_n(x)} \right) + \frac{d}{dx} y_n(x) \right) e^{y_n(x)} = 0$$

que SymPy no simplifica a nuestro gusto

Cambio de la variable independiente manteniendo la dependiente

Supongamos $\hat{x} = \hat{x}(x)$. Usamos la relación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\hat{x}} \frac{d\hat{x}}{dx}.$$

Suponiendo que la relación $\hat{x} = \hat{x}(x)$ se invierte en $x = x(\hat{x})$, todo lo que resta es sustituir x por su igual en términos de \hat{x}

$$\frac{dy}{d\hat{x}} = f(x(\hat{x}), y) \left[\frac{d\hat{x}}{dx} \Big|_{x=x(\hat{x})} \right]^{-1}.$$

Que es una expresión sólo en \hat{x} e y . Describir el procedimiento en general puede hacer parecer que es más difícil de lo que en realidad es en un caso concreto.

Ejemplo 2. Hacer el cambio de variable en la ecuación indicados

$$x = \cos \hat{x} \quad \text{en} \quad -\frac{dy}{dx} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} y = 0.$$

1) $\hat{x} = \arcsen x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\hat{x}} \frac{d\hat{x}}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{dy}{d\hat{x}}.$$

2) Remplacemos x e y' en la ecuación

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{dy}{d\hat{x}} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} y = 0$$

3) Reemplazando x por $\cos(\hat{x})$ y simplificando

$$\frac{dy}{d\hat{x}} + \cos(\hat{x})y = 0.$$

Para hacer esto con SymPy (de ahora en más omitiremos la sentencia de importación del módulo, esta operación se hace sólo una vez por sesión).

```

1 x, x_n=symbols('x, x_n')
2 x_n=acos(x)
3 y=Function('y')(x_n)
4 Ecuacion=-y.diff()+1/(sqrt(1-x**2))*y
5 xn=symbols('xn')
6 Ecuacion.subs(x,cos(xn))

```

scripts/sust2.py



Obtenemos la ecuación

$$\frac{y(\arcsin(\cos(xn))) \cos(xn)}{\sqrt{-\cos^2(xn)+1}} + \frac{1}{\sqrt{-\cos^2(xn)+1}} \frac{d}{d\xi_1} y(\xi_1) \Big|_{\xi_1=\arcsin(\cos(xn))}$$

Nuevamente SymPy no simplifica a nuestro gusto, esto ocurre aún con aquellas expresiones que parece muy evidente como se simplifican. El caso es que la operación de simplificación es por un lado subjetiva, depende de un supuesto tácito de a que expresión se quiere arribar y por otro algunas expresiones, por ejemplo $\ln \exp(z)$, se simplifican en determinados campos numéricos y en otros no. En el caso del ejemplo $\ln \exp(z)$, la expresión es simplificable si $z \in \mathbb{R}$, pero no lo es si por ejemplo $z \in \mathbb{C}$. De modo que no puede esperarse que SymPy efectúe esta simplificación a menos que conozca que se trabaja en el campo numérico indicado. Hay que distinguir que supuestos tácitos está haciendo uno y hay que indicárselos a SymPy. El lector debe tener en cuenta que en ningún momento uno le dijo a SymPy que tipo de ente estaba manipulando en expresiones del tipo $x_n = \arcsin(x)$. Puede parecer natural que se trata de números reales, no obstante esta información nunca fue comunicada al interprete de SymPy. ¿Porqué el habría de entender que x es real? Si al fin y al cabo $x_n = \arcsin(x)$ tiene sentido si x es complejo y aún si es una matriz. Muchas veces las operaciones que se simplifican en un campo no lo pueden hacer en otro. El comando `symbols` tiene la opción de informar a SymPy que tipo de ente representa x de la siguiente forma `x=symbols('x', real=True)`. De esta forma se consiguen mejores resultados en las simplificaciones.

Cambio de variable general $\hat{x} = \hat{x}(x, y)$, $\hat{y} = \hat{y}(x, y)$

1. Calculamos $d\hat{y}/d\hat{x}$ en las variables x, y

$$\frac{d\hat{y}}{d\hat{x}} = \frac{\frac{d\hat{y}}{dx}}{\frac{d\hat{x}}{dx}} = \frac{\frac{\partial \hat{y}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{y}}{\partial y} y'}{\frac{\partial \hat{x}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{x}}{\partial y} y'} = \frac{\frac{\partial \hat{y}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{y}}{\partial y} f(x, y)}{\frac{\partial \hat{x}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{x}}{\partial y} f(x, y)}. \quad (1.6)$$

2. En la expresión resultante sustituimos x, y por las transformaciones inversas $x = x(\hat{x}, \hat{y})$ y $y = y(\hat{x}, \hat{y})$

Ejemplo 3. Transformar a polares

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^3 + x^2y - x - y}{x^3 + xy^2 - x + y}.$$

Dado que el cálculo es extenso lo haremos con SymPy, el procedimiento seguido ilustra como hacerlo a mano. Es ilustrativo hacer esto último para apreciar la utilidad de usar un sistema de álgebra computacional (SAC) como SymPy.

```

1 x=symbols('x')
2 y=Function('y')(x)
3 r=sqrt(x**2+y**2)
4 theta=atan(y/x)
Expr2=r.diff(x)/theta.diff(x)

```

scripts/sust3.py



Obtenemos la siguiente expresión

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\frac{dr}{dx}}{\frac{d\theta}{dx}} = \frac{\left(1 + \frac{1}{x^2}y^2(x)\right) \left(x + y(x)\frac{d}{dx}y(x)\right)}{\sqrt{x^2 + y^2(x)} \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}y(x) - \frac{1}{x^2}y(x)\right)}.$$

Ahora sustituimos $y'(x)$ usando la ecuación diferencial, redefinimos r, θ fundamentalmente para limpiar el valor que tenían asignado en el código previo, que era una expresión de x, y , y finalmente sustituimos x e y por su expresión en polares.

```

1 Expr3=Expr2.subs(y.diff(x),(y**3+x**2*y-x-y)/(x**3+x*y**2-x+y))
2 r,theta=symbols('r,theta',positive=True)
3 Expr4=Expr3.subs([(y,r*sin(theta)),(x,r*cos(theta))])
4 Expr5=simplify(Expr4)

```

scripts/sust4.py



Encontramos que en polares la ecuación es mucho más simple

$$\frac{dr}{d\theta} = -r^3 + r.$$

Quizás usar la notación como forma diferencial sea más efectivo. Como r y θ son funciones de x e y , ellas son 0-formas. Usando las reglas de la diferencial, hay que reemplazar

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta; & dx &= \cos \theta dr - \sin \theta r d\theta \\ y &= r \sin \theta; & dy &= \sin \theta dr + \cos \theta r d\theta \end{aligned}$$

en la 1-forma:

$$(y^3 + x^2y - x - y)dx - (x^3 + xy^2 - x + y)dy$$

Sympy posee un módulo para operar con formas diferenciales que nos permite resolver el ejemplo anterior. Se trata del módulo de geometría diferencial, donde se pueden definir formas diferenciales y otros entes propios de la geometría diferencial: campos escalares y vectoriales. No es posible entender completamente este módulo sin introducir conceptos básicos de geometría diferencial, cosa que no haremos pues nos alejaría del propósito del curso. De modo que vamos a discutir superficialmente la solución de este problema. Es suficiente importar del módulo de geometría diferencial el submódulo R2, que ya nos crea las formas diferenciales dx, dy (se accede por `R2.dx, R2.dy`), como así también las formas dr y $d\theta$ (`R2.dr, R2.dtheta`). Tecnicamente hablando R2 es una variedad diferencial --en este caso el espacio euclideo bidimensional-- con toda la estructura algebraica que lleva consigo.

En el siguiente código, luego de las sentencias de importación, cada línea efectúa lo siguiente: 4-define la forma diferencial en coordenadas cartesianas, 5

y 6-calcula el valor de M y N en coordenadas polares $--Md\theta + Ndr--$. Sin embargo el resultado, todavía tiene apelaciones a las coordenadas x e y . Por este motivo en las líneas 7 y 8 introducimos los símbolos r y θ y en las líneas 9 a 11 sustituimos x e y por $r \cos \theta$ y $r \sin \theta$ respectivamente. Hay que notar que los símbolos que introducimos r y θ son diferentes de $R2.\theta$ y $R2.r$, a los que sympy despliega en negritas en la consola de ipython. Por ese motivo, también sustituimos $R2.\theta$ y $R2.r$ por θ y r respectivamente.

```

1 from sympy import *
2 from sympy.diffgeom.rn import R2
  init_printing()
4 forma=(R2.y**3+R2.x**2*R2.y-R2.x-R2.y)*R2.dx-(R2.x**3+R2.x*R2.y**2-R2.x+R2
  .y)*R2.dy
  M=forma.rcall(R2.e_theta)
6 N=forma.rcall(R2.e_r)
  r=symbols('r', positive=True)
8 theta=symbols('theta')
  sust={R2.x:r*cos(theta), R2.y:r*sin(theta), R2.theta:theta, R2.r:r}
10 Mpol=M.subs(sust).simplify()
  Npol=N.subs(sust).simplify()
12 forma_pol=Mpol*R2.dtheta+Npol*R2.dr

```

scripts/sust_formas.py

La forma obtenida es $-rdr + (-r^4 + r^2)d\theta$.

1.3 Grupos

1.3.1. Definición y ejemplos

Definición 1 (Grupo).

Sean G un conjunto y α una función tal que $\alpha : G \times G \rightarrow G$. En el contexto de grupos es más usual la notación $\alpha(g_1, g_2) = g_1 g_2$. El par (G, α) se llama un grupo si se satisface

1. $(g_1 g_2) g_3 = g_1 (g_2 g_3)$, para todos $g_1, g_2, g_3 \in G$,
2. Existe $e \in G$ tal que $eg = ge = g$, para todo $g \in G$.
3. Para todo $g \in G$ existe $h \in G$ tal que $gh = hg = e$. Se acostumbra denotar $h = g^{-1}$.

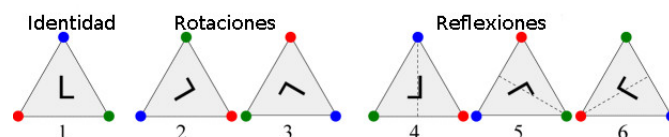
Ejemplo 4. Sea Π un plano euclideo y G el conjunto de todas las transformaciones rígidas de Π en si mismo. Entonces G es un grupo con la operación de composición. Se llama el grupo de transformaciones rígidas.

Ejemplo 5. Sea $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ un conjunto de n elementos y S_n definido por

$$S_n = \{\sigma | \sigma : X \rightarrow X \text{ y } \sigma \text{ es biyectiva} \}$$

Entonces S_n es un grupo con la operación de composición. Se denomina grupo simétrico.

Ejemplo 6. Sea Δ un polígono regular de n lados en un plano euclideo Π y D_{2n} el conjunto de todas las transformaciones rígidas de Π en si mismo que llevan Δ en si mismo. D_{2n} se llama el grupo diedral de orden $2n$. Para un triángulo equilátero:



Las raíces históricas de la teoría de grupos son la teoría de las ecuaciones algebraicas, la teoría de números y la geometría. Euler, Gauss, Lagrange, Abel y Galois fueron los creadores que ponen los cimientos de esta rama del álgebra abstracta. Otros importantes matemáticos que contribuyen son Cayley, Emil Artin, Emmy Noether, Peter Ludwig Mejdell Sylow, A.G. Kurosch, Iwasawa entre muchos otros. (Wikipedia)

1.3.2. Teoría de grupos computacional: GAP

« GAP (Groups, Algorithms, Programming) es un sistema de álgebra discreta computacional, con especial énfasis en la teoría de grupos computacional. GAP proporciona un lenguaje de programación, una biblioteca de miles de funciones implementando algoritmos algebraicos escritos en el lenguaje GAP, así como bibliotecas de datos de objetos algebraicos de gran tamaño [...] GAP se utiliza en la investigación y la enseñanza para estudiar grupos y sus representaciones, anillos, espacios vectoriales, álgebras, estructuras combinatorias, y más. El sistema, incluida la fuente, se distribuye libremente.»

(Página Oficial de GAP)

Hasta donde sabemos Sympy no implementa objetos de teoría de grupos. Sin embargo existe software libre para estudiar grupos. El más conocido de ellos es GAP. Este sistema provee un lenguaje muy sencillo y transparente. Lamentablemente el estudio de esta herramienta está más allá de los alcances de este documento. Desarrollemos un simple ejemplo.

Ejemplo 7. En el siguiente ejemplo de sesión con línea de comandos de GAP introducimos sentencias que quedan indicadas en cada línea iniciada con el símbolo de sistema (prompt) `>gap`. Las líneas que no inician con el símbolo de sistema indican la salida correspondiente a la sentencia que antecede dichas líneas. En línea 1 introducimos el grupo simétrico de orden 3 y lo llamamos G . En línea 3 pedimos que nos enumere los elementos de G . En línea 5, introducimos el elemento de G que en notación cíclica se escribe $(1, 3, 2)$. En líneas 7 y 9 calculamos potencias de r . En 11 definimos como H el subgrupo generado por r y en 13 enumeramos los elementos de H . En 15 averiguamos si H es normal. Siendo este el caso, podemos calcular el grupo cociente en 17 y lo llamamos K . Por último averiguamos el orden de K en 19.

```

gap> G:=SymmetricGroup(3);
2 Sym( [ 1 .. 3 ] )
gap> Elements(G);
4 [ (), (2,3), (1,2), (1,2,3), (1,3,2), (1,3) ]
gap> r:=(1,3,2);
6 (1,3,2)
gap> r^2;
8 (1,2,3)
gap> r^3;
10 ()
gap> H:=Subgroup(G,[r]);
12 Group([ (1,3,2) ])
gap> Elements(H);
14 [ (), (1,2,3), (1,3,2) ]
gap> IsNormal(G,H);
16 true
gap> K:=FactorGroup(G,H);
18 Group([ f1 ])
gap> Size(K);
20 2

```

scripts/gap_basico.g

1.4 Grupos continuos de simetrías

1.4.1. Grupos y cambios de variables

Los cambios de variables de un conjunto de dos variables, digamos x e y , son funciones Γ , invertibles, de clase C^1 , donde $\Gamma : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$, con Ω_1, Ω_2 abiertos de \mathbb{R}^2 . Acostumbraremos escribir $(\hat{x}, \hat{y}) = \Gamma(x, y)$ y diremos que (\hat{x}, \hat{y}) son la variables nuevas e (x, y) las viejas.

Llamaremos \mathcal{T} al conjunto de todos los cambios de variables Γ . El conjunto \mathcal{T} tiene una estructura de grupo con la operación de composición.

El grupo de las transformaciones rígidas, los grupos diedrales D_{2n} , el grupo de todas las rotaciones alrededor del origen son subgrupos de \mathcal{T} .

Ejemplo 8. Coordenadas polares. Es más fácil describir la transformación que lleva coordenadas polares en cartesianas. En este caso $(x, y) = \Gamma(r, \theta)$ y

$$\begin{aligned}\Gamma(r, \theta) &= (r \cos(\theta), r \sin(\theta)), \\ \Omega_1 &= (0, \infty) \times (-\pi, \pi), \\ \Omega_2 &= \mathbb{R}^2 - \{(x, y) | y = 0, x \leq 0\}\end{aligned}$$

1.4.2. Grupos de Lie uniparamétricos

Definición 1 (Grupos de Lie uniparamétricos).

Sea \mathcal{T} el grupo de cambios de variables de \mathbb{R}^2 . Supongamos dado un homomorfismo de grupos $\Gamma : (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathcal{T}, \circ)$. Para $\varepsilon \in \mathbb{R}$ escribiremos $\Gamma_\varepsilon = \Gamma(\varepsilon)$. Si $\Gamma_\varepsilon(x, y)$ es diferenciable, con inversa diferenciable, respecto a (x, y) y analítica respecto a ε diremos que $\{\Gamma_\varepsilon | \varepsilon \in \mathbb{R}\}$ es un grupo de Lie uniparamétrico de simetrías.

Si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ escribimos

$$(\hat{x}, \hat{y}) = \Gamma_\varepsilon(x, y). \quad (1.7)$$

Notar que \hat{x}, \hat{y} son funciones de x, y y ε .

Propiedades de grupos de Lie uniparamétricos

1. $\Gamma_\varepsilon : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ es un difeomorfismo, con $\Omega_i, i = 1, 2$, abiertos de \mathbb{R}^2 .
2. $\Gamma_{\varepsilon_1} \circ \Gamma_{\varepsilon_2} = \Gamma_{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}$.
3. $\Gamma_0 = I$.
4. $(\Gamma_\varepsilon)^{-1} = \Gamma_{-\varepsilon}$.
5. Las funciones $\hat{x}(x, y, \varepsilon)$ y $\hat{y}(x, y, \varepsilon)$ se desarrollan en serie de potencias respecto a ε . Es decir para todo $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}$ existen coeficientes a_j y $b_j, j = 0, 1, \dots$, y $r > 0$ tal que

$$\begin{aligned}\hat{x}(x, y, \varepsilon) &= a_0(x, y) + a_1(x, y)(\varepsilon - \varepsilon_0) + \dots \\ \hat{y}(x, y, \varepsilon) &= b_0(x, y) + b_1(x, y)(\varepsilon - \varepsilon_0) + \dots\end{aligned}$$

para $|\varepsilon - \varepsilon_0| < r$.

Ejemplo 9. Demostrar que las siguientes aplicaciones inducen grupos de Lie uniparamétricos

1. $\Gamma_\varepsilon(x, y) = (x + \varepsilon, y)$ y $\Gamma_\varepsilon(x, y) = (x, y + \varepsilon)$.
2. $\Gamma_\varepsilon(x, y) = (e^\varepsilon x, y)$
3. $\Gamma_\varepsilon(x, y) = \left(\frac{x}{1 - \varepsilon x}, \frac{y}{1 - \varepsilon x} \right)$

$$4. \Gamma_\varepsilon(x, y) = \begin{pmatrix} \cos(\varepsilon) & -\sin(\varepsilon) \\ \sin(\varepsilon) & \cos(\varepsilon) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Podemos usar SymPy para la tarea con este breve código

```

1 >>> from sympy import *
2 >>> T=lambda x,y,epsilon: Matrix([x+epsilon,y])
3 >>> x,y,epsilon1,epsilon2=symbols('x,y,epsilon1,epsilon2')
4 >>> x_copete=T(x,y,epsilon1)[0]
5 >>> y_copete=T(x,y,epsilon1)[1]
6 >>> PropGrupo=T(x_copete,y_copete,epsilon2)-T(x,y,epsilon1+epsilon2)
7 >>> PropGrupo
Matrix([
8 [0],
9 [0]])

```

El mismo ejemplo lo podemos desarrollar usando expresiones en lugar del operador lambda.

```

1 >>> from sympy import *
2 >>> x,y,epsilon,epsilon1,epsilon2=symbols('x,y,epsilon,epsilon1,epsilon2')
3 >>> T=Matrix([x+epsilon,y])
4 >>> x_copete=T.subs(epsilon,epsilon1)[0]
5 >>> y_copete=T.subs(epsilon,epsilon1)[1]
6 >>> PropGrupo=T.subs([(x,x_copete),(y,y_copete),(epsilon,epsilon2)])-T.subs(epsilon,epsilon1+epsilon2)
7 >>> PropGrupo
8 Matrix([
9 [0],
10 [0]])

```

Definición 2 (Grupo de simetrías de una ecuación).

Consideremos una ecuación

$$y' = f(x, y). \quad (1.8)$$

Una transformación $\Gamma \in \mathcal{T}$ se denomina una *simetría* de la ecuación si el cambio de variables dado por $(\hat{x}, \hat{y}) = \Gamma(x, y)$ deja invariante la ecuación. El conjunto de todas las simetrías de una ecuación es un subgrupo de (\mathcal{T}, \circ) . Lo llamaremos *grupo de simetrías* de la ecuación.

1.4.3. Grupos de simetrías de EDO

De acuerdo con (1.6) para que $(\hat{x}, \hat{y}) = \Gamma(x, y)$ sea una simetría de (1.8) se debe cumplir que

$$\frac{\frac{\partial \hat{y}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{y}}{\partial y} f(x, y)}{\frac{\partial \hat{x}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{x}}{\partial y} f(x, y)} = f(\hat{x}, \hat{y}) \quad (1.9)$$

Esta ecuación se llama *condición de simetría*. Es una ecuación en derivadas parciales, en principio más compleja que la ecuación original. Tiene varios grados de libertad, por lo que suele haber muchas simetrías. Es común que encontremos soluciones a través de un ansatz.

Ejemplo 10. Consideremos la ecuación

$$y' = 0. \quad (1.10)$$

La condición de simetría se reduce a

$$\frac{\partial \hat{y}}{\partial \hat{x}} = 0$$

Debemos tener que $\frac{\partial \hat{y}}{\partial x} = 0$. Vale decir \hat{y} es independiente de x . La forma general de una simetría es PUES

$$\hat{x} = \hat{x}(x, y) \quad \hat{y} = \hat{y}(y).$$

Hay muchas simetrías. Las traslaciones en cualquier dirección $(x, y) \mapsto (x + \alpha, y + \beta)$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$). Cambios de escala en ambos ejes $(x, y) \mapsto (e^\varepsilon x, y)$, $(x, y) \mapsto (x, e^\varepsilon y)$. Reflexiones respecto ambos ejes $(x, y) \mapsto (-x, y)$, $(x, y) \mapsto (x, -y)$. Observar que el gráfico de las soluciones posee las mismas simetrías, pues en general las simetrías de una ecuación llevan soluciones en soluciones.

De todas las simetrías encontradas $\Gamma_\varepsilon(x, y) = (e^\varepsilon x, y)$, $\Gamma_\varepsilon(x, y) = (x + \varepsilon, y)$ y $\Gamma_\varepsilon(x, y) = (x + \varepsilon, y)$ se llaman *triviales* pues llevan una curva solución en si misma. Cualquier cambio de la forma $\hat{x} = \hat{x}(x, y) \quad \hat{y} = y$ es trivial.

Estamos interesados en hallar grupos de Lie uniparamétricos de simetrías no triviales.

Las reflexiones $\Gamma(x, y) = (-x, y)$ no pertenecen a tal tipo de grupo. Para demostrar esto supongamos que Γ es alguna instancia de un tal grupo Γ_ε , supongamos por ejemplo que $\Gamma = \Gamma_{\varepsilon_0}$. Consideramos el jacobiano de la transformación:

$$J(\varepsilon) := \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} & \frac{\partial \hat{x}}{\partial y} \\ \frac{\partial \hat{y}}{\partial x} & \frac{\partial \hat{y}}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Tenemos que $J(0) = 1$ y $J(\varepsilon_0) = -1$. Y $J(\varepsilon)$ es continua respecto a ε . Por ende existiría ε' con $J(\varepsilon') = 0$. Esto implica que la matriz jacobiana $D\Gamma$ es singular y esto contradice que $\Gamma : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es difeomorfismo ($D\Gamma D\Gamma^{-1} = I$).

Γ genera un grupo discreto, ya que $\Gamma^2 = \Gamma \circ \Gamma = I$. Luego Γ genera el grupo $G = \{I, \Gamma\}$ que es isomorfo a \mathbb{Z}_2 . En este caso diremos que $\{I, \Gamma\}$ es un *grupo discreto* de simetrías.

Ejemplo 11. Hallar simetrías de

$$\frac{dy}{dx} = f(x).$$

De acuerdo con (1.6) se debe cumplir que

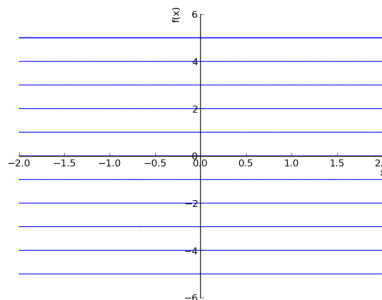
$$\frac{\frac{\partial \hat{y}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{y}}{\partial y} f(x)}{\frac{\partial \hat{x}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{x}}{\partial y} f(x)} = f(\hat{x})$$

La forma de la ecuación sugiere el ansatz

$$\boxed{\hat{x} = x}, \quad \frac{\partial \hat{y}}{\partial x} = \frac{\partial \hat{x}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \hat{y}}{\partial y} = \frac{\partial \hat{x}}{\partial x}.$$

Luego

$$\frac{\partial \hat{y}}{\partial y} = 1 \Rightarrow \boxed{\hat{y} = y + \varepsilon}$$



con ε constante arbitraria. Hallamos que

$$\Gamma_\varepsilon(x, y) = (x, y + \varepsilon)$$

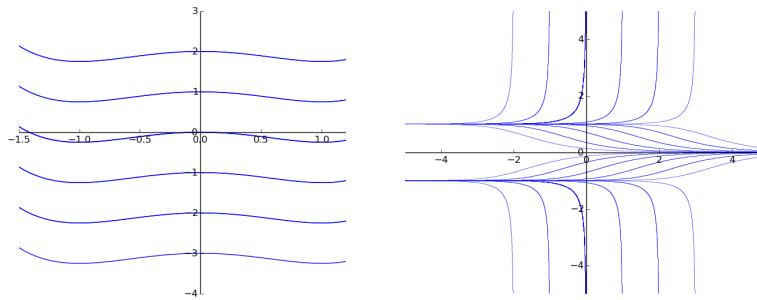
es un grupo de Lie uniparamétrico de simetrías. De manera similar

$$\Gamma_\varepsilon(x, y) = (x + \varepsilon, y)$$

es un grupo uniparamétrico de simetrías para

$$\frac{dy}{dx} = f(y).$$

Geoméricamente en el primer caso todas las soluciones se obtienen trasladando una cualquiera verticalmente y en el segundo caso horizontalmente.



Soluciones de $y' = x^3 - x$

Soluciones de $y' = y^3 - y$

Ejemplo 12. Demostrar que las rotaciones alrededor del origen es un grupo de Lie uniparamétrico de simetrías de

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^3 + x^2y - x - y}{x^3 + xy^2 - x + y}.$$

Sea Γ_ε la transformación que rota un ángulo ε alrededor del origen. Es un ejercicio demostrar que $\{\Gamma_\varepsilon | \varepsilon \in \mathbb{R}\}$ es un grupo uniparamétrico de simetrías. Se tiene la representación matricial

$$\Gamma_\varepsilon(x, y) = \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varepsilon) & -\sin(\varepsilon) \\ \sin(\varepsilon) & \cos(\varepsilon) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Gamma_\varepsilon^{-1}(\hat{x}, \hat{y}) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varepsilon) & \sin(\varepsilon) \\ -\sin(\varepsilon) & \cos(\varepsilon) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix}$$

Para el cálculo recurrimos a SymPy (usamos x_n en lugar de \hat{x})

```

1 from sympy import *
2 x, theta = symbols('x, theta')
3 y = Function('y')(x)
4 x_n = cos(theta)*x - sin(theta)*y
5 y_n = sin(theta)*x + cos(theta)*y
6 Expr2 = y_n.diff(x)/x_n.diff(x)
7 Expr3 = Expr2.subs(y.diff(), \
8 (y**3 + x**2*y - x - y)/(x**3 + x*y**2 - x + y))
9 x_n, y_n = symbols('x_n, y_n')
10 Expr4 = Expr3.subs([(y, -sin(theta)*x_n + cos(theta)*y_n), \
11 (x, cos(theta)*x_n + sin(theta)*y_n)])
12 Expr5 = simplify(Expr4)

```

La ecuación resultante es la misma

$$\frac{dy_n}{dx_n} = \frac{x_n^2 y_n - x_n + y_n^3 - y_n}{x_n^3 + x_n y_n^2 - x_n + y_n}.$$

A la misma conclusión arribábamos si recordábamos que en coordenadas polares la ecuación se escribe

$$\frac{dr}{d\theta} = r - r^3,$$

y que esta ecuación tiene las simetrías $\Gamma_\varepsilon : (r, \theta) \mapsto (r, \theta + \varepsilon)$. Si rotamos un ángulo fijo el gráfico de una solución obtenemos el gráfico de otra solución.

Simetrías resuelven ecuaciones **Ejemplo:** Supongamos que $y' = f(x, y)$ tiene el grupo de Lie uniparamétrico de simetrías

$$(\hat{x}, \hat{y}) = \Gamma_\varepsilon(x, y) = (x, y + \varepsilon) \quad (1.11)$$

Usando la condición de simetrías (1.9) tenemos

$$f(x, y) = f(\hat{x}, \hat{y}) = f(x, y + \varepsilon).$$

Luego

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \varepsilon) - f(x, y)}{\varepsilon} = 0$$

Así f es independiente de y : $f(x, y) = f(x)$ y la ecuación

$$y' = f(x),$$

se resuelve simplemente integrando.

1.5 Órbitas, tangentes y curvas invariantes

Definición 1 (Órbitas).

Dado un grupo uniparamétrico de simetrías $G = \{\Gamma_\varepsilon | \varepsilon \in \mathbb{R}\}$, y $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ llamamos *órbita* (x_0, y_0) bajo la acción de G (simplemente órbita si es claro quien es G) a la curva

$$\{\Gamma_\varepsilon(x_0, y_0) | \varepsilon \in \mathbb{R}\}$$

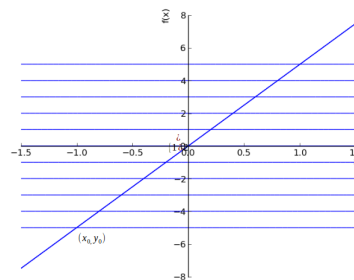
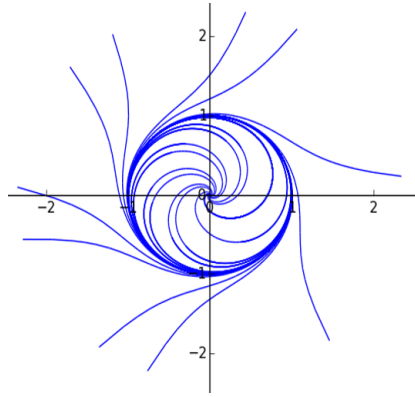
Si G es un grupo de simetrías no trivial, entonces es de esperar que la órbita de (x_0, y_0) cruce transversalmente las curvas solución. La órbita se usará como una nueva coordenada. La órbita a través de (x, y) es el conjunto de puntos de coordenadas

$$(\hat{x}(x, y, \varepsilon), \hat{y}(x, y, \varepsilon)) = \Gamma_\varepsilon(x, y), \quad (1.12)$$

donde

$$(\hat{x}(x, y, 0), \hat{y}(x, y, 0)) = (x, y).$$

Las ecuaciones (1.12) son ecuaciones paramétricas (parámetro ε) de una curva en el plano.



Definición 2 (Puntos invariantes).

Un punto (x, y) se llama invariante si su órbita se reduce a $\{(x, y)\}$, vale decir

$$(x, y) = \Gamma_\varepsilon(x, y), \quad \forall \varepsilon > 0$$

Ejemplo 13. La órbita de (x, y) bajo la acción del grupo de Lie uniparamétrico

$$\Gamma_\varepsilon(x, y) = \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varepsilon) & -\sin(\varepsilon) \\ \sin(\varepsilon) & \cos(\varepsilon) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Son circunsferencias con centro en el origen. El punto $(0, 0)$ es invariante.

Definición 3 (Campo vectorial de tangentes).

Dado un grupo de Lie uniparamétrico $(\hat{x}(x, y, \varepsilon), \hat{y}(x, y, \varepsilon)) = \Gamma_\varepsilon(x, y)$ definimos el campo vectorial

$$(\xi(\hat{x}, \hat{y}), \eta(\hat{x}, \hat{y})) = \left(\left. \frac{d\hat{x}}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}, \left. \frac{d\hat{y}}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \right).$$

ξ y η se llaman *símbolos infinitesimales*.

Ejemplo 14. Campo vectorial de infinitesimales para las rotaciones.

```

x,y,epsilon = var('x,y,epsilon')
x_n=cos(epsilon)*x-sin(epsilon)*y
y_n=sin(epsilon)*x+cos(epsilon)*y
4 xi=x_n.diff(epsilon)(epsilon=0)
eta=y_n.diff(epsilon)(epsilon=0)
6 p=plot([])
for x_abs in srange(0,1,.2):
8     p+=parametric_plot([x_n(x=x_abs,y=0),\
y_n(x=x_abs,y=0)], (epsilon,0,2*pi))
10 p+=plot_vector_field((xi,eta),(x,-1,1),\
(y,-1,1))

```

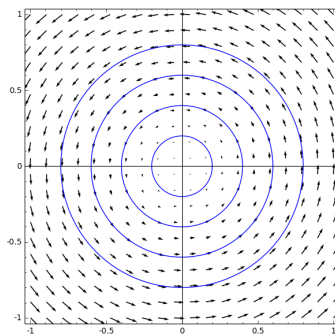


Figura 1.1: Campo vectorial de infinitesimales (ξ, η) por Sage

Como \hat{x}, \hat{y} eran analíticas respecto a ε :

$$\begin{aligned} \hat{x} &= x + \varepsilon \xi(x, y) + O(\varepsilon^2) \\ \hat{y} &= y + \varepsilon \eta(x, y) + O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

En un punto invariante $\xi(x, y) = \eta(x, y) = 0$.

Definición 4 (Curvas invariantes).

Una curva plana C se dice invariante por un grupo uniparamétrico de simetrías de Lie si y sólo si la tangente a C en cada punto (x, y) es paralela a $(\xi(x, y), \eta(x, y))$. Si C es el gráfico de una función $x \mapsto y(x)$, como $(1, y'(x))$ es un vector tangente a la gráfica, la condición que C es invariante se escribe

$$Q(x, y, y') = \eta(x, y) - y'\xi(x, y) \equiv 0 \quad (1.13)$$

Esta se llama *ecuación característica*.

Si Γ_ε es un grupo de Lie de simetrías de $y' = f(x, y)$ entonces una solución $y(x)$ es una curva invariante si y sólo si

$$\overline{Q}(x, y) = \eta(x, y) - f(x, y)\xi(x, y) \equiv 0 \quad (1.14)$$

Se llama *ecuación característica reducida*. Conviene tener soluciones no invariantes

Ejemplo 15. La EDO

$$y' = y \quad (1.15)$$

tiene simetrías de escala

$$(\hat{x}, \hat{y}) = \Gamma_\varepsilon(x, y) = (x, e^\varepsilon y).$$

Luego

$$(\xi, \eta) = \left(\left. \frac{d\hat{x}}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}, \left. \frac{d\hat{y}}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \right) = (0, y)$$

Cualquier punto en el conjunto $\{(x, 0) | x \in \mathbb{R}\}$ es invariante. La ecuación característica reducida es.

$$\overline{Q}(x, y) = 0 \Rightarrow y = 0$$

Esta formada enteramente por puntos invariantes.

Ejemplo 16. Demostrar que la siguiente expresión es un grupo de Lie uniparamétrico de simetrías

$$(\hat{x}, \hat{y}) = \Gamma_\varepsilon(x, y) = (e^\varepsilon x, e^{(e^\varepsilon - 1)x} y),$$

para la ecuación (1.15). Para este grupo tenemos

$$(\xi, \eta) = (x, xy)$$

Todo punto en $x = 0$ es invariante. La ecuación característica reducida es

$$\overline{Q}(x, y) = 0 \Rightarrow xy - xy = 0$$

De modo que estas simetrías actúan trivialmente sobre las soluciones. Llevan una solución en sí misma. Chequeemos esta afirmación de manera directa.

Buscamos el cambio de variables inverso

$$\left. \begin{aligned} \hat{x} &= e^\varepsilon x \\ \hat{y} &= e^{(e^\varepsilon - 1)x} y \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} x &= e^{-\varepsilon} \hat{x} \\ y &= e^{(e^{-\varepsilon} - 1)\hat{x}} \hat{y} \end{aligned} \right\}$$

Las soluciones son $y = ke^x$, sustituimos en esta expresión, luego de unas operaciones, llegamos a $\hat{y} = ke^{\hat{x}}$.

Ejemplo 17. La ecuación de Riccati

$$y' = xy^2 - \frac{2y}{x} - \frac{1}{x^3}, \quad x \neq 0$$

Tiene el grupo de Lie de simetrías

$$(\hat{x}, \hat{y}) = \Gamma_\varepsilon(x, y) = (e^\varepsilon x, e^{-2\varepsilon} y).$$

Tenemos

$$(\xi, \eta) = (x, -2y).$$

La característica reducida

$$\overline{Q}(x, y) = \frac{1}{x^2} - x^2 y^2 = 0.$$

Tenemos dos soluciones invariantes

$$y = \pm \frac{1}{x^2}.$$

1.6 Simetrías a partir de Infinitesimales

La mayoría de los métodos de simetría usan (ξ, η) en lugar de las simetrías en si mismas. Por otra parte $(\xi(\hat{x}, \hat{y}), \eta(\hat{x}, \hat{y}))$ determinan las simetrías a través de las ecuaciones

$$\begin{cases} \frac{d\hat{x}}{d\varepsilon} &= \xi(\hat{x}, \hat{y}) \\ \frac{d\hat{y}}{d\varepsilon} &= \eta(\hat{x}, \hat{y}) \\ \hat{x}(x, y, 0) &= x \\ \hat{y}(x, y, 0) &= y \end{cases} \quad (1.16)$$

Justificación de las ecuaciones. Si ponemos $(\hat{x}, \hat{y}) = \Gamma_\varepsilon(x, y)$, de la propiedad de grupo $(\Gamma_{\Delta\varepsilon} \circ \Gamma_\varepsilon = \Gamma_{\varepsilon+\Delta\varepsilon})$, deducimos

$$\hat{x}(\Gamma_\varepsilon(x, y), \Delta\varepsilon) = \hat{x}(x, y, \varepsilon + \Delta\varepsilon).$$

Luego

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{x}}{d\varepsilon} &= \lim_{\Delta\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\hat{x}(x, y, \varepsilon + \Delta\varepsilon) - \hat{x}(x, y, \varepsilon)}{\Delta\varepsilon} \\ &= \lim_{\Delta\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\hat{x}(\Gamma_\varepsilon(x, y), \Delta\varepsilon) - \hat{x}(x, y, \varepsilon)}{\Delta\varepsilon} \\ &= \lim_{\Delta\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\hat{x}(\hat{x}(x, y, \varepsilon), \hat{y}(x, y, \varepsilon), \Delta\varepsilon) - \hat{x}(\hat{x}(x, y, \varepsilon), \hat{y}(x, y, \varepsilon), 0)}{\Delta\varepsilon} \\ &= \left. \frac{d\hat{x}}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \xi(\hat{x}, \hat{y}) \end{aligned}$$

El sistema de ecuaciones (1.16) pueden ser difíciles de resolver. Pero en algunos casos sencillos puede ser fácil.

Ejemplo 18. Encontrar el grupo de simetrías para los infinitesimales $\xi(x, y), \eta(x, y) = (x^2, xy)$.

$$\frac{d\hat{x}}{d\varepsilon} = \xi(\hat{x}, \hat{y}) = \hat{x}^2 \text{ y } \hat{x}(x, y, 0) = x \Rightarrow \hat{x} = \frac{x}{1 - \varepsilon x}$$

y

$$\frac{d\hat{y}}{d\varepsilon} = \eta(\hat{x}, \hat{y}) = \hat{x}\hat{y} \text{ y } \hat{y}(x, y, 0) = y \Rightarrow \hat{y} = \frac{y}{1 - \varepsilon x}$$

1.7 Coordenadas canónicas

1.7.1. Definición y ejemplos

Definición 1 (Coordenadas canónicas).

Diremos que las coordenadas (r, s) son canónicas respecto a el grupo de Lie de simetrías Γ_ε si en las coordenadas (r, s) la acción de grupo es la traslación

$$(\hat{r}, \hat{s}) := (r(\hat{x}, \hat{y}), s(\hat{x}, \hat{y})) = (r(x, y), s(x, y) + \varepsilon). \quad (1.17)$$

Ejemplo 19. Las coordenadas polares son canónicas respecto al grupo de Lie de rotaciones. Las rotaciones en coordenadas cartesianas y polares se escriben

$$\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varepsilon) & -\sin(\varepsilon) \\ \sin(\varepsilon) & \cos(\varepsilon) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} \hat{r} &= r \\ \hat{\theta} &= \theta + \varepsilon \end{aligned}$$

Derivando las ecuaciones (1.17) respecto a ε obtenemos

$$\begin{aligned} \xi(x, y) \frac{\partial r}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial r}{\partial y} &= 0 \\ \xi(x, y) \frac{\partial s}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial s}{\partial y} &= 1 \end{aligned} \quad (1.18)$$

Los cambios de coordenadas deben ser invertibles, de modo que pediremos la condición de no degeneración

$$\frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial y} - \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial s}{\partial x} \neq 0 \quad (1.19)$$

Definición 2 (Coordenadas canónicas generalizadas).

Cualquier par de coordenadas que satisfacen (1.18) y (1.19) se llaman canónicas.

Observaciones:

1. El vector tangente en cualquier punto no invariante es paralelo a la curva $r = \text{cte}$ que pasa por ese punto. Luego esa curva es una órbita. Las órbitas son invariantes, así r se llama la *coordenada invariante*. Las curvas $s = \text{cte}$ son transversales a las órbitas.
2. Las coordenadas canónicas no están definidas en un punto (x, y) invariante pues en esos puntos $\xi(x, y) = \eta(x, y) = 0$.
3. Las coordenadas canónicas están definidas en un entorno de cualquier punto no invariante.
4. Las coordenadas canónicas no son únicas. De hecho si (r, s) son canónicas $(\tilde{r}, \tilde{s}) = (F(r), G(r) + s)$ lo son para cualquier F y G con $F'(r) \neq 0$ (para la no degeneración).

1.7.2. Generador Infinitesimal

Definición 3 (Generador Infinitesimal).

Al operador diferencial

$$X = \xi(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial}{\partial y} \quad (1.20)$$

se lo suele denominar *Generador Infinitesimal*. La acción del operador sobre una función f diferenciable es tomar la derivada direccional en la dirección del campo (ξ, η) .

Las ecuaciones (1.18) se escriben de manera compacta

$$\begin{aligned} Xr &= 0 \\ Xs &= 1 \end{aligned} \quad (1.21)$$

La primera expresa que r no cambia en la dirección del campo.

1.8 Encontrando coordenadas canónicas

1.8.1. Integrales primeras

Definición 1 (Integrales primera).

Una integral primera de la EDO $y' = f(x, y)$ es una función $\phi(x, y)$ que es constante a lo largo de una curva solución de la EDO. Se la denomina también magnitud conservada.

Teorema 1 (Propiedad de conservación de coordenadas canónicas).

Si (r, s) son coordenadas canónicas de una grupo de Lie de simetrías entonces r es una integral primera de la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\eta(x, y)}{\xi(x, y)}. \quad (1.22)$$

Dem. Supongamos $y(x)$ solución de la EDO, es suficiente demostrar que $\frac{d}{dx}r(x, y(x)) = 0$. En efecto

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}r(x, y(x)) &= \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial s}{\partial y} y' && \text{(regla cadena)} \\ &= \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial s}{\partial y} \frac{\eta(x, y)}{\xi(x, y)} && \text{(Ec. (1.22))} \\ &= 0 && \text{(Ec. (1.18))} \end{aligned}$$

□

Ejemplo 20. Ya conocemos las coordenadas canónicas de las rotaciones,

$$\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varepsilon) & -\sin(\varepsilon) \\ \sin(\varepsilon) & \cos(\varepsilon) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

hallemosla por el método propuesto. Hay que resolver

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \Rightarrow ydy = -xdx \Rightarrow y^2 + x^2 = C$$

Luego $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ es una integral primera.

La coordenada r es constante sobre los puntos en la gráfica de una solución de (1.22). Sobre esos puntos $(x, y(x))$, la coordenada s satisface:

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dx} &= \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial s}{\partial y} y'(x) \quad (\text{Regla cadena}) \\ &= \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial s}{\partial y} \frac{\eta}{\xi} \quad (1.22) \\ &= \frac{1}{\xi} \quad (1.18). \end{aligned} \tag{1.23}$$

Ahora podemos aprovechar que ya conocemos r y expresar y como función de r, x . Luego

Teorema 2 (Expresión para s).

$$s = \int \frac{ds}{dx} dx = \int \frac{dx}{\xi(x, y(r, x))}. \tag{1.24}$$

En la igualdad resultante puede ser necesario reemplazar r por su expresión en las variables x, y .

Si ocurriese que $\xi = 0$ y $\eta \neq 0$. Entonces por (1.22) $r_y = 0$, de modo que r es sólo función de x . Se puede asumir $r = x$. Además $\eta s_y = 1$, entonces

$$s = \int \frac{dy}{\eta(r, y)}. \tag{1.25}$$

Ejemplo 21. Retornando al ejemplo de las rotaciones, donde hallamos que $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, vemos que

$$s = \int \frac{dx}{-y} = - \int \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \arccos\left(\frac{x}{r}\right).$$

Por consiguiente s es el ángulo polar.

Ejemplo 22. Encontrar coordenadas canónicas para el grupo de Lie de simetrías

$$(\hat{x}, \hat{y}) = (e^\varepsilon x, e^{k\varepsilon} y) \quad k > 0.$$

El vector tangente es

$$(\xi, \eta) = \left(\frac{d\hat{x}}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0}, \frac{d\hat{y}}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \right) = (x, ky).$$

Resolvamos la ecuación (1.22)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ky}{x} \Rightarrow y = Cx^k.$$

Luego $\Phi = y/x^k$ es integral primera. Entonces podemos tomar $r = y/x^k$. Para

$$s = \int \frac{dx}{\xi} = \frac{dx}{x} = \ln|x|.$$

Entonces $(r, s) = (yx^{-k}, \ln|x|)$ son coordenadas canónicas. No están definidas en $x = 0$. Podemos encontrar coordenadas canónicas definidas en $x = 0$ del siguiente modo. Recordamos que para todas F y G

$$(\tilde{r}, \tilde{s}) = (F(r), G(r) + s) = (F(x^{-k}y), G(x^{-k}y) + \ln|x|).$$

Son canónicas también. Si tomamos $F(r) = 1/r$ y $G(r) = \frac{1}{k} \ln|r|$, evitamos la singularidad. Luego

$$(\tilde{r}, \tilde{s}) = (x^k y^{-1}, \frac{1}{k} \ln|y|).$$

Son canónicas, están definidas en $x = 0$ pero no en $y = 0$.

Ejemplo 23. Encontrar coordenadas canónicas para

$$(\hat{x}, \hat{y}) = \left(\frac{x}{1 - \varepsilon x}, \frac{y}{1 - \varepsilon x} \right).$$

$$(\xi, \eta) = \left(\left. \frac{d\hat{x}}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}, \left. \frac{d\hat{y}}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \right) = (x^2, xy).$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\eta}{\xi} = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{y}{x} = \text{cte.}$$

Podemos tomar $r = y/x$. Para s

$$s = \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}.$$

Luego $(r, s) = (\frac{y}{x}, -\frac{1}{x})$ son canónicas.

En este caso los puntos sobre $x = 0$ son invariantes, no podemos definir coordenadas canónicas allí.

Lo podemos desarrollar con SymPy.

```

1 >>> from sympy import *
2 >>> x, y, epsilon = symbols('x, y, epsilon')
3 >>> T = Matrix([x/(1-epsilon*x), y/(1-epsilon*x)])
4 >>> xi = T[0].diff(epsilon).subs(epsilon, 0)
5 >>> xi
6 x**2
7 >>> eta = T[1].diff(epsilon).subs(epsilon, 0)
8 >>> eta/xi
9 y/x
10 >>> y = Function('y')(x)
11 >>> dsolve(y.diff(x) - y/x, y)
12 y(x) == C1*x
13 >>> Integral(1/xi, x).doit()
-1/x

```

1.8.2. Infinitesimales → Simetrías (Revisitado)

Las coordenadas canónicas nos dan otra manera de encontrar simetrías a partir de los infinitesimales siguiendo el procedimiento:

1. Determinar las coordenadas canónicas (sólo necesitamos conocer los infinitesimales).
2. Expresamos las relaciones $\hat{r} = r$ y $\hat{s} = s + \varepsilon$ en las coordenadas x, y .

Ejemplo 24. Hallar el grupo de simetrías asociado al generador infinitesimal

$$X = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + xy \frac{\partial}{\partial y}.$$

1. En la sección 1.8.1 hallamos las coordenadas canónicas $(r, s) = \left(\frac{y}{x}, -\frac{1}{x}\right)$ asociadas a los infinitesimales dados.
2. Entonces

$$\begin{aligned}(\hat{r}, \hat{s}) = (r, s + \varepsilon) &\Rightarrow \frac{\hat{y}}{\hat{x}} = \frac{y}{x}, \quad -\frac{1}{\hat{x}} = -\frac{1}{x} + \varepsilon \\ &\Rightarrow \hat{x} = \frac{x}{1 - \varepsilon x}, \quad \hat{y} = \frac{y}{1 - \varepsilon x}.\end{aligned}$$

1.9 Resolviendo EDO con grupos de Lie de simetrías

1.9.1. Método de solución

Finalmente, toda la teoría expuesta no permiten elaborar un método que puede resolver una ecuación dada supuesto que conocemos un grupo de Lie de simetrías de ella. Supongamos dado un grupo de Lie de simetrías (\hat{x}, \hat{y}) de la ecuación

$$y' = f(x, y) \quad (1.26)$$

Supongamos que las simetrías son no triviales. Según (1.14) debemos tener

$$\eta(x, y) \neq f(x, y)\xi(x, y)$$

La razón de esta condición es que si fuese falsa entonces la ecuación (1.22) es la misma que la ecuación (1.26) y el método es inútil.

Supongamos (r, s) coordenadas canónicas. La ecuación en las coordenadas (r, s) , según (1.6), se escribirá

$$\frac{ds}{dr} = \hat{f}(r, s) := \frac{s_x + f(x, y)s_y}{r_x + f(x, y)r_y}. \quad (1.27)$$

Las coordenadas canónicas se definen por (1.17) de modo que el grupo de simetrías actúe por traslación $(\hat{r}, \hat{s}) = (r, s + \varepsilon)$. Por los resultados de la página 1.4.3, \hat{f} es independiente de s . Y la ecuación se reduce a

$$\frac{ds}{dr} = \hat{f}(r) \quad (1.28)$$

que se resuelve integrando.

Ejemplo 25. Resolver

$$y' = xy^2 - \frac{2y}{x} - \frac{1}{x^3}, \quad x \neq 0,$$

sabiendo que la ecuación es invariante para el grupo de simetrías

$$(\hat{x}, \hat{y}) = (e^\varepsilon x, e^{-2\varepsilon} y).$$

Por los resultados de la sección 1.8.1:

$$(r, s) = (x^2 y, \ln |x|)$$

son canónicas. Según (1.27) la ecuación en (r, s) es:

$$\frac{dr}{ds} = \frac{\frac{1}{x}}{2xy + x^2 \left(xy^2 - \frac{2y}{x} - \frac{1}{x^3} \right)} = \frac{1}{x^4 y^2 - 1} = \frac{1}{r^2 - 1}$$

Como sabíamos que debía suceder el resultado del segundo miembro no depende sólo de r . Integrando

$$s = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{r-1}{r+1} \right) + C.$$

Sustituyendo

$$\ln |x| = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x^2 y - 1}{x^2 y + 1} \right) + C.$$

Despejando

$$y = -\frac{x^2 + C}{x^2(x^2 - C)} \quad (1.29)$$

La ecuación característica reducida (1.14) es para la ecuación de este ejemplo:

$$0 = \bar{Q} = -2y - \left(xy^2 - \frac{2y}{x} - \frac{1}{x^3} \right) x = -x^2 y^2 + \frac{1}{x^2}$$

Cuyas soluciones son

$$y = \pm \frac{1}{x^2}.$$

Que además son solución de la ecuación diferencial. La curva $y = -1/x^2$ se obtiene de (1.29) con $C = 0$. La curva $y = -1/x^2$. En la figura 1.2 graficamos las distintas soluciones. Las curvas azules y naranjas se corresponden con las gráficas de (1.29) con $c > 0$ y $c < 0$ respectivamente. La verde es la de $y = 1/x^2$ y la roja de $y = -1/x^2$.

Ejemplo 26. Resolver

$$y' = \frac{y+1}{x} + \frac{y^2}{x^3}, \quad x \neq 0,$$

sabiendo que la ecuación es invariante para el grupo de simetrías

$$(\hat{x}, \hat{y}) = \left(\frac{x}{1 - \varepsilon x}, \frac{y}{1 - \varepsilon x} \right).$$

Ya hemos computado las coordenadas canónicas en la subsección 1.8.1:

$$(r, s) = \left(\frac{y}{x}, \frac{1}{x} \right).$$

Por (1.27) la ecuación se escribe

$$\frac{dr}{ds} = \frac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{y}{x^2} + \frac{1}{x} \left(\frac{y+1}{x} + \frac{y^2}{x^3} \right)} = \frac{1}{1 + r^2},$$

cuya solución es

$$s = \arctan(r) + C \Rightarrow y = -x \tan \left(\frac{1}{x} + C \right).$$

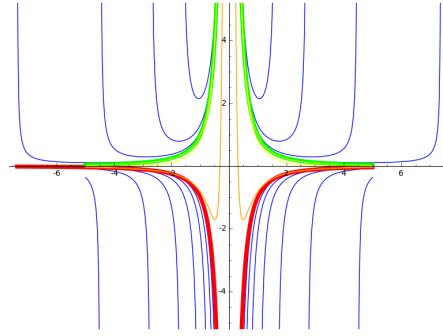


Figura 1.2: Soluciones de $y' = xy^2 - \frac{2y}{x} - \frac{1}{x^3}$

1.9.2. Ecuaciones homogéneas

Ejemplo 27. En este ejemplo deduciremos nuevamente el método de solución de ecuaciones homogéneas apelando a las simetrías. Es decir, queremos resolver la ecuación

$$y' = F\left(\frac{y}{x}\right). \quad (1.30)$$

Aquí tenemos el Grupo de Lie de simetrías de cambio de escalas

$$(\hat{x}, \hat{y}) = (e^\varepsilon x, e^\varepsilon y).$$

Por los resultados de la subsección 1.8.1, $(r, s) = (y/x, \ln|x|)$ son canónicas y la ecuación se escribe

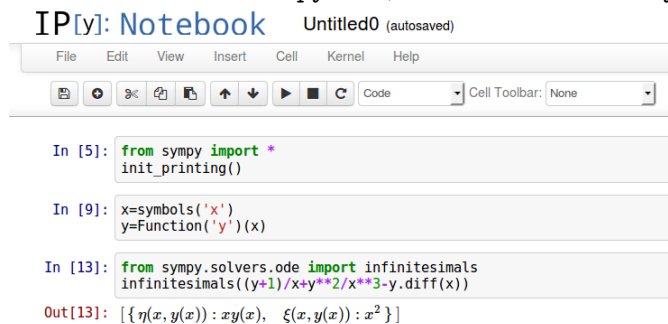
$$\frac{ds}{dr} = \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{y}{x^2} + \frac{F(\frac{y}{x})}{x}} = \frac{1}{F(r) - r}.$$

La solución general es

$$\ln|x| = \int^{y/x} \frac{dr}{F(r) - r} + c.$$

1.9.3. Método de Lie y SymPy

SymPy Incorpora distintas estrategias para resolver ecuaciones por el método de Lie. Hay mucho por indagar al respecto, pero sólo vamos a mencionar una función para calcular los infinitesimales (ξ, η) . Aprovechamos para mostrar como luce una consola de ipython, otra manera de usar Python y SymPy.



The screenshot shows an IPython Notebook titled 'Untitled0 (autosaved)'. The interface includes a menu bar (File, Edit, View, Insert, Cell, Kernel, Help) and a toolbar with icons for file operations, execution, and cell management. The code is as follows:

```
In [5]: from sympy import *
init_printing()

In [9]: x=symbols('x')
y=Function('y')(x)

In [13]: from sympy.solvers.ode import infinitesimals
infinitesimals((y+1)/x+y**2/x**3-y.diff(x))

Out[13]: [{eta(x,y(x)): xy(x),  xi(x,y(x)): x^2}]
```


Apéndices

1.A Formas Diferenciales, una introducción ingenua

La expresión (1.1) es más asimétrica, entre las variables x e y una de ellas es independiente (x) y la otra independiente (y). La expresión (??) es más simétrica, las dos variables tienen el mismo estatus.

Las expresiones del tipo (1.2) representan un ente matemático importante llamado forma diferencial. No disponemos del tiempo necesario para dotar con entidad matemática el concepto de forma diferencial. Tampoco resulta de vital importancia. Pero las reglas que rigen la combinación de las formas diferenciales son muy simples y nos gustaría describir este aspecto de las formas diferenciales brevemente; como motivación para un estudio posterior más profundo y para que el lector gane en confianza en su manipulación. Daremos así una pintura de las formas diferenciales incompleta, por cuanto sólo diremos como ellas se combinan pero no contestaremos la pregunta de que son. Sólo digamos, para advertir al lector sobre los requisitos teóricos que se requieren, que las formas diferenciales se encuentran asociados al concepto de variedad diferencial, concepto este que generaliza al de curva y superficie. Más concretamente, las formas diferenciales son funciones que toman valores en los duales de los espacios tangentes a las variedades diferenciales. En particular hay formas diferenciales asociadas a los espacios euclideo, que podemos identificar con \mathbb{R}^n .

Aquí vamos a pensar a las formas diferenciales como objetos puramente formales sobre los que actúa un operador d , leyes de composición internas y externas. Se construyen formas diferenciales invocando un sistema de coordenadas x_1, \dots, x_n . Estas coordenadas, deben ser coordenadas de alguna variedad diferencial, pero, por simplicidad, supondremos que son coordenadas cartesianas ortogonales de un espacio euclideo. Las formas diferenciales forman un espacio vectorial con una operación de suma $+$ y producto por un escalar. Además tienen definido un producto \wedge , llamado producto exterior, que posee algunas particularidades. Como los polinomios, las formas diferenciales tienen grado. Por eso se dice que forman un álgebra graduada. A diferencia de los polinomios, este grado no supera la dimensión n del espacio (\mathbb{R}^n o más generalmente una variedad) a la que están asociadas. Para ser más exactas, la única forma de grado $k > n$ es la trivial, esto es la nula. Denotamos Λ_k las formas de grado k , siendo $\Lambda = \bigoplus_{k=0}^n \Lambda_k$ el espacio vectorial de todas ellas. Luego $d : \Lambda \rightarrow \Lambda$ y $\wedge : \Lambda \times \Lambda \rightarrow \Lambda$. Ahora describimos unas simples reglas de las formas, d y \wedge .

1. Una 0-forma diferencial es una función $g(x_1, \dots, x_n)$.
2. Si $\alpha \in \Lambda_k$ y $\beta \in \Lambda_p$ entonces $\alpha \wedge \beta \in \Lambda_{k+p}$.
3. El producto \wedge es asociativo, distributivo y satisface una especie de anti-conmutatividad, específicamente si $\alpha \in \Lambda_k$ y $\beta \in \Lambda_p$ entonces $\alpha \wedge \beta = (-1)^{kp} \beta \wedge \alpha$. En particular $\alpha \wedge \alpha = 0$ cuando α es un k -forma con k impar.
4. El diferencial satisface
 - a) Si ω es una k -forma diferencial $d\omega$ es una $k + 1$ forma diferencial.
 - b) $d^2\omega = d(d\omega) = 0$, para toda $\omega \in \Lambda$.

c) Si $\alpha \in \Lambda_k$ entonces $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta$.

d) En el caso de 0-forma (función) $g(x_1, \dots, x_n)$ el diferencial se define

$$dg = \frac{\partial g}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial g}{\partial x_n} dx_n$$

5. Las expresiones $dx_i, i = 1, \dots, n$ forman una especie de base del espacio de las formas Λ , en el sentido que cualquier k forma α se expresa de la siguiente manera:

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} g_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k},$$

para ciertas funciones $g_{i_1 \dots i_k}$. Observar que la suma se extiende sobre todos los subconjuntos ordenados de $\{1, \dots, n\}$.

Una k -forma diferencial α se llama exacta cuando es el diferencial de una $k-1$ -forma y se dice cerrada cuando $d\alpha = 0$. Las propiedades de las formas implican que toda forma exacta es cerrada. Un famoso Lema de Poincare trata con el recíproco de esta afirmación.

Las reglas anteriores permiten computar cualquiera de las operaciones. **Ejemplo 28.** Si $\alpha = M(x, y)dx + N(x, y)dy$ es una 1-forma de \mathbb{R}^2 , entonces

$$\begin{aligned} d\alpha &= dM \wedge dx - Md^2x + dN \wedge dy - Nd^2y \\ &= \left(\frac{\partial M}{\partial x} dx + \frac{\partial M}{\partial y} dy \right) \wedge dx + \left(\frac{\partial N}{\partial x} dx + \frac{\partial N}{\partial y} dy \right) \wedge dy \\ &= \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx \wedge dy \end{aligned}$$

Recordemos el famoso Teorema de Green, que afirmaba que si $D \subset \mathbb{R}^2$ era una región cuyo borde $C = \partial D$ era una curva cerrada simple, entonces

$$\oint_{\partial D} Mdx + Ndy = \iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy.$$

Utilizando formas diferenciales este resultado se escribe de la manera, mucho más compacta y sugerente

$$\oint_{\partial D} \alpha = \iint_D d\alpha,$$

donde $\alpha = M(x, y)dx + N(x, y)dy$. Esto es una relación clave de las formas diferenciales que se generaliza en un teorema fundamental de la matemática llamado Teorema de Stokes.

Ejemplo 29. Computemos d^2g , cuando g es una función (0-forma).

$$\begin{aligned} d^2g &= d \left(\frac{\partial g}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial g}{\partial x_n} dx_n \right) \\ &= d \left(\frac{\partial g}{\partial x_1} \right) \wedge dx_1 + \dots + d \left(\frac{\partial g}{\partial x_n} \right) \wedge dx_n - \frac{\partial g}{\partial x_1} \wedge d^2x_1 - \dots - \frac{\partial g}{\partial x_n} \wedge d^2x_n \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_1} dx_i \right) \wedge dx_1 + \dots + \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_n} dx_i \right) \wedge dx_n \\ &= \sum_{i \neq 1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_1} dx_i \wedge dx_1 + \dots + \sum_{i \neq n}^n \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_n} dx_i \wedge dx_n \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left\{ \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 g}{\partial x_j \partial x_i} \right\} dx_i \wedge dx_j = 0. \end{aligned}$$

Que es lo que tenía que ser.