1. Ecuaciones lineales de orden superior

Definición 1.1 (Ecuación lineal general de orden n) *Es una ecuación de la forma*

$$y^{(n)}(x) + p_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + p_0(x)y(x) = r(x) \tag{1}$$

donde p_i, r, $i = 0, \ldots, n-1$ son funciones definidas en un intervalo I

Los resultados y técnicas que hemos desarollado para ecuaciones de orden 2 se aplican con cambios menores a ecuaciones de mayor orden. No vamos a repetir la demostración de estos resultados, dado que es prácticamente la misma que para el caso $n = 2$. Los exponemos de manera sumaria.

Teorema 1.2 (Teorema de existencia y unicidad de soluciones) *Supongamos p_i, r, $i = 0, \ldots, n-1$ continuas sobre I. Sean $x_0 \in I$ e $y_0, y_1, \ldots y_{n-1} \in \mathbb{R}$ dados. Entonces existe una única solución del PVI*

$$\begin{cases} y^{(n)}(x) + & p_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + p_0(x)y(x) = r(x), x \in I \\ y(x_0) & = y_0 \\ y'(x_0) & = y_1 \\ & \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) & = y_{n-1} \end{cases}$$

1.1. Estructura del conjunto de soluciones

Teorema 1.3 *Teorema: estructura conjunto de soluciones ecuaciones homogéneas Supongamos $y_1, y_2, \ldots, y_n$ soluciones linealmente independientes de*

$$y^{(n)}(x) + p_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + p_0(x)y(x) = 0.$$

Entonces

$$y = c_1y_1 + \cdots + c_ny_n, \quad c_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n,$$

es solución general. Vale decir, el conjunto de soluciones es un espacio vectorial n-dimensional.

Teorema 1.4 (Estructura conjunto de soluciones ecuaciones no homogéneas) *Una solución general de la ecuación no homogénea*

$$y^{(n)}(x) + p_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + p_0(x)y(x) = r(x),$$

es la suma de una solución particular de esta ecuación más una solución general de la ecuación homogénea asociada.

1.2. Wronskiano

Teorema 1.5 (Fórmula Abel) *Si $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son soluciones de la ecuación homogénea*

$$y^{(n)}(x) + p_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + p_0(x)y(x) = 0, \tag{2}$$

Entonces el Wronskiano satisface

$$W(y_1, \ldots, y_n)(x) = W(y_1, \ldots, y_n)(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} p_{n-1}(t)dt}. \tag{3}$$

En particular $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ son linalmente independientes si y solo si $W(x) \neq 0$ para todo $x \in I$.

Dem. Las demostraciones de los resultados anteriores es tan similar a su análogo de orden 2 que no vale la pena invertir tiempo en ellas. La demostración de la fórmula de Abel, si nos parece lo suficientemente interesante para dejarla como **Ejercicio**.

1.3. Ecuaciones homogéneas con coeficientes constantes

Las ecuaciones lineales de orden n, homogeneas con coeficientes constantes se resuelven por métodos análogos a los considerados para ecuaciones de segundo orden. Se propone $y(x) = e^{rx}$ como solución. Reemplazando esta función en (2) vemos que y sería solución si y solo si r es solución de la ecuación característica

$$r^n + p_{n-1}r^{n-1} + \cdots + p_1 r + p_0 = 0. \tag{4}$$

Ahora se presentan casos algo diferentes.

1.3.1. Raices reales distintas.

Si la ecuación característica (4) tiene n raíces $r_1, \ldots, r_n$ reales y distintas entonces $y_1(x) = e^{r_1 x}, \ldots, y_n(x) = e^{r_n x}$ son soluciones linealmente independientes y por ende

$$\boxed{y(x) = c_1 e^{r_1 x} + \cdots + c_n e^{r_n x}}$$

es solución general.

Dejamos como ejercicio la demostración de la independencia lineal. En lugar de usar el Wronskiano, se puede utilizar la siguiente idea basada en métodos operacionales.

Por D vamos a denotar el operador diferenciación, esto es D es sencillamente la función definida sobre el conjunto de funciones diferenciables sobre un intervalo abierto y que actúa derivando, esto es $Dy = y'(x)$.

Dado un polinomio $p(X) = p_n X^n + p_{n-1}X^{n-1} + \cdots + p_1 X + p_0$, $p_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, \ldots, n$, denotamos por $p(D)$ el operador definido por

$$p(D)y = p_n y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + p_1 y' + p_0 y.$$

Diremos que $p(D)$ es un operador diferencial polinomial.

Ejercicio 1 Dado que dos polinomios se pueden sumar y multiplicar resultando estas operaciones en un nuevo polinomio, es posible hacer lo propio con operadores diferenciales polinomiales. Demostrar que el producto de dos de tales operadores $p(D)$ y $q(D)$ es conmutativo. Esta propiedad es lo mismo que afirmar que el producto de polinomios es conmutativo. Analizar que ocurriría si permitiesemos que los coeficientes p_i fuese funciones de x, $p_i = p_i(x)$.

Ejercicio 2 Supongamos ahora que $r_1, \ldots, r_n$ son números reales distintos y que

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + \cdots + c_n e^{r_n x}.$$

Considerar el operador diferencial

$$p(D) = (D - r_1) \cdots (D - r_{i-1})(D - r_{i+1}) \cdots (D - r_n).$$

Demostrar que

$$p(D)y = (r_i - r_1) \cdots (r_i - r_{i-1})(r_i - r_{i+1}) \cdots (r_i - r_n) e^{r_i x}.$$

Deducir de esto la independencia lineal de $\{e^{r_1 x}, \ldots, e^{r_n x}\}$.

1.3.2. Raices reales repetidas.

Supongamos que la ecuación característica (4) tiene raíces reales repetidas. Sean $r_1, \ldots, r_k$ las raices distintas y m_j la multiplicidad de la raíz r_j. Por cada raíz r_j considerar las m_j funciones

$$\mathcal{B}_j := \{y_j^0(x) = e^{r_j x}, y_j^1(x) = x e^{r_j x}, \ldots y_j^{m_j - 1}(x) = x^{m_j - 1} e^{r_j x}\}.$$

Ejericio 2 Demostrar que $\mathcal{B} := \mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_k$ forma un conjunto de n soluciones linealmente independientes.

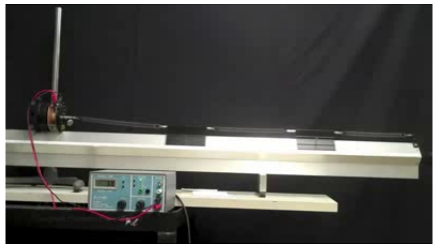
1.3.3. Raices complejas.

Supongamos que la ecuación característica (4) tiene raíces complejas. Como la ecuación característica tiene coeficientes reales, las raices aparecen de a pares conjugados $\mu \pm \nu i$.

Si las raices son simples por cada uno de estos pares hay que considerar las soluciones $e^{\mu x} \cos x$ y $e^{\mu x} \operatorname{sen} x$. Si son múltiples con multiplicidad k hay que considerar las $2k$ soluciones $e^{\mu x} \cos x, x e^{\mu x} \cos x, \ldots, x^{k-1} e^{\mu x} \cos x$ y $e^{\mu x} \operatorname{sen} x, x e^{\mu x} \operatorname{sen} x \ldots x^{k-1} e^{\mu x} \operatorname{sen} x$. Dejamos los detalles que es necesario completar como trabajo práctico.

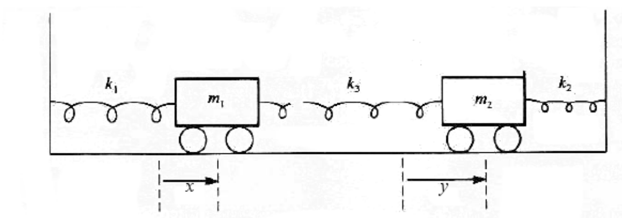
1.4. Osciladores armónicos acoplados

Supongamos dos masas m_1 y m_2 sujetas a dos puntos fijos por sendos resortes y, a su vez, unidas entre si por un tercer resorte.



Vamos a medir la posición de las masas desde origenes distintos situados en los respectivos puntos de equilibrio. Por consiguiente las posiciones x e y de las masas representan también su desplazamiento desde el equilibrio. Utilizando la segunda ley de Newton, la Ley de Elasticidad de Hooke y tomando en consideración que el resorte central esta desplazado desde su estado de equilibrio en una cantidad igual a $y - x$, vemos que se debe satisfacer que

$$\begin{cases} m_1 x''(t) = -k_1 x + k_3(y - x) & \text{(5a)} \\ m_2 y''(t) = -k_3(y - x) - k_2 y & \text{(5b)} \end{cases}$$



Se nos presentó un sistema de ecuaciones de segundo orden. Vamos a poder convertirlo en una ecuación pagando el precio de incrementar el orden. El procedimiento es derivar (5a) (obviamente es lo mismo empezar por (5b)) dos veces respecto a t. En el resultado sustituímos y'' por su igual según (5b). El resultado es una ecuación que todavía tiene la variable y, pero podemos usar (5a) para sustituir y por una expresión que sólo tiene x y sus derivadas. Todo esto lo haremos con SAGE.

```
x,y,t,m1,m2,k1,k2,k3=\
var('x,y,t,m1,m2,k1,k2,k3')
x=function('x',t)
y=function('y',t)
eq1=m1*x.diff(2)==-k1*x+k3*(y-x)
eq2=m2*y.diff(2)==-k2*y-k3*(y-x)
sust1,=solve(eq2,y.diff(2))
sust2,=solve(eq1,y)
eq3=eq1.diff(t,2).subs_expr(sust1).\
subs_expr(sust2).simplify_full()
```

Obtenemos la ecuación de cuarto orden

$$m_1 D[0,0,0,0](x)(t) = -\frac{(k_1 k_2 + (k_1 + k_2) k_3) x(t) + ((k_2 + k_3) m_1 + (k_1 + k_3) m_2) D[0,0](x)(t)}{m_2}$$

Vamos a suponer todos los parámetros igual a 1. Encontremos y resolvamos la ecuación característica

```
eq4=eq3.subs(m1=1,m2=1,k1=1,k2=1,k3=1)
r=var('r')
z=e^(r*t)
eq5=eq4.subs_expr(x==z,x.diff(4)==\
z.diff(t,4),x.diff(2)==z.diff(t,2))/z
eq5=eq5.simplify_full()
sol=solve(eq5,r)
```

Las soluciones de la ecuación característica son $\left[r = \left(-i\right), r = i, r = -i\sqrt{3}, r = i\sqrt{3}\right]$.

Según lo que hemos dicho antes, la solución general será

```
A,B,C,D=var('A,B,C,D')
x=A*cos(t)+B*sin(t)+C*cos(sqrt(3)*t)\
+D*sin(sqrt(3)*t)
```

$$x = C\cos\left(\sqrt{3}t\right) + A\cos\left(t\right) + D\sin\left(\sqrt{3}t\right) + B\sin\left(t\right) \qquad (6)$$

La solución es una superposición de ondas con frecuencias inconmensurables. Decimos que dos magnitudes no nulas son inconmensurables cuando su cociente es irracional.

¿Tendra el sistema de osciladores acoplados soluciones periódicas? Esto nos lleva a una pregunta más general. Si $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son funciones periódicas de período T_1y T_2, será $f + g$ períodica. La respuesta es el Teorema de abajo.

Teorema 1.6 *Si $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son funciones no constantes, periódicas y continuas de período T_1 y T_2, la función $f+g$ será períodica si y sólo si T_1 y T_2 son conmensurables.*

Dem. La demostración descansa sobre varios hechos, que poco tienen que ver con las ecuaciones diferenciales. Pero, el Teorema nos parece tan interesante, que vamos a dar algunos detalles y otros los dejaremos como ejercicio.

Ejercicio. Sea $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función períodica y sea $\mathfrak{P}$ el conjunto de todos los períodos. Entonces

1. $\mathfrak{P}$ es un subgrupo aditivo de $\mathbb{R}$. Si F es continua $\mathfrak{P}$ es cerrado.

2. Si $\mathfrak{P}$ es cualquier subgrupo aditivo propio y cerrado de $\mathbb{R}$ entonces $\mathfrak{P}$ es un grupo ciclico, es decir existe $a > 0$ con $\mathfrak{P} = a\mathbb{Z}$. Como corolario, si $\mathfrak{P}$ es cualquier subgrupo aditivo cerrado propio y $T_1, T_2 \in \mathfrak{P}$ entonces T_1 y T_2 son conmensurables. Ayuda: Considerar

$$a := \inf\{x \in \mathfrak{P} : x > 0\}$$

Entonces si $a > 0$, $\mathfrak{P} = a\mathbb{Z}$ y si $a = 0$, $\mathfrak{P} = \mathbb{R}$.

¿Qué ocurrirá si no suponemos $\mathfrak{P}$ cerrado?

3. Demostrar el Teorema. Ayuda: Supongamos que $f + g$ tiene período $T > 0$. Entonces:
$$F(x) := f(x + T) - f(x) = g(x) - g(x + T).$$
y por consiguiente F tendrá períodos T_1 y T_2.

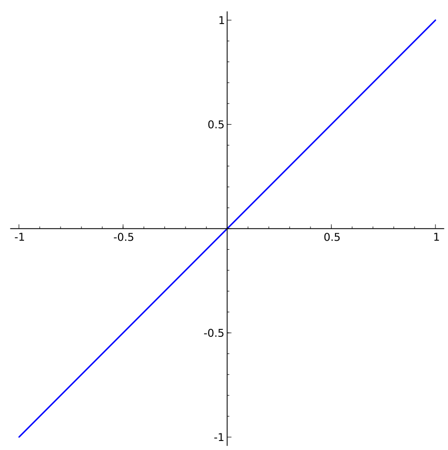
Retornando al oscilador armónico y a su solución general (6), el ejercicio anterior nos dice que la solución no será periódica, a menos que $A = B = 0$ o $C = D = 0$.

Estos casos especiales de soluciones se denominan modos normales. Usemos SAGE para encontrar y graficar algunos modos normales.

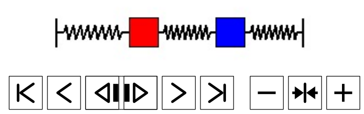
Gráficaremos las soluciones sobre el espacio de configuraciones. Esto es decir que graficaremos las curvas $t \mapsto (x(t), y(t))$.

1.4.1. Primer modo normal

```
x1=x.subs({A:1,B:0,C:0,D:0})
y1=x1.diff(t,2)+2*x1
gra=parametric_plot([x1,y1],(t,0,10*pi))
```

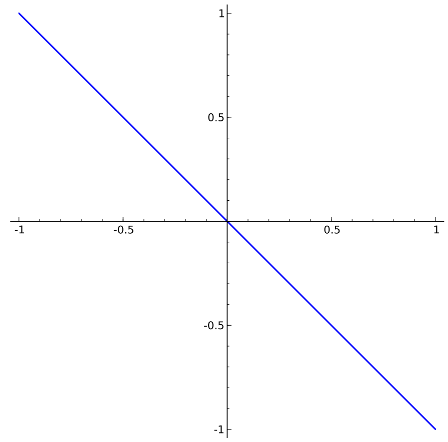


Los desplazamientos de las dos masas estan sobre la recta $y = x$, vale decir las masas se mueven perfectamente en fase.

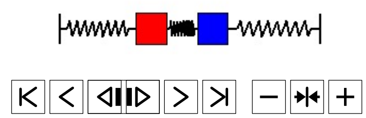


1.4.2. Segundo modo normal

```
x1=x.subs({A:0,B:0,C:1,D:0})
y1=x1.diff(t,2)+2*x1
gra=parametric_plot([x1,y1],(t,0,10*pi))
```

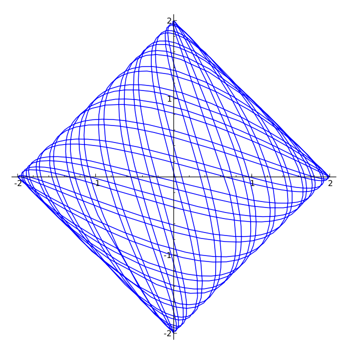


Los desplazamientos de las dos masas estan sobre la recta $y = -x$, vale decir las masas se mueven perfectamente fuera de fase. Cuando una alcanza el desplazamiento negativo menor la otra alcanza el mayor positivo.



1.4.3. Fuera de un modo normal

```
x1=x.subs({A:1,B:0,C:1,D:0})
y1=x1.diff(t,2)+2*x1
gra=parametric_plot([x1,y1],(t,0,30*pi))
```



Se obtienen gráficas bonitas llamadas Curvas de Lissajous, que fuera de los modos normales llenan densamente un cuadrado del plano.

1.5. Métodos Operacionales

1.5.1. Introducción

En las subsección 1.3.1 hemos empezado a desarrollar una técnica denominada Método Operacional. Esta técnica fue iniciada por Oliver Heavside (1850-1925).

Hemos mencionado que una ecuación lineal de orden n con coeficientes constantes y no homogénea se puede pensar como

$$p(D)y = r(x), \tag{7}$$

donde $p(D) = D^n + p_{n-1}D^{n-1} + \cdots + p_1 D + p_0$ es un operador diferencial polinomial.

La idea central del método es proceder desde una manera puramente formal, para afirmar que si y resuelve (7) entonces

$$y = \frac{1}{p(D)} r(x), \tag{8}$$

Esto no parece más que un juego de símbolos del que no se puede desprender nada interesante. Vamos a ver que no es ese el caso.

El símbolo $1/p(D)$ debería ser interpretado como el operador inverso de $p(D)$. Por ejemplo, supongamos que $p(D) = D$. entonces $p(D)y = y'$. En este caso $1/p(D)$ puede ser definido como

$$\frac{1}{p(D)} r = \int r(x)dx \tag{9}$$

Si tuviesemos $p(D) = D - q$, $q \in \mathbb{R}$, entonces $p(D)y = y' - qy$. En este caso, teniendo en mente que $y(x) = (1/p(D))r(x)$ debería resolver la ecuación lineal de primer orden $y' - qy = r(x)$, y por la fórmula explícita que obtuvimos para esta solución, es natural definir

$$\frac{1}{p(D)} r = e^{qx} \int e^{-qx} r(x)dx \tag{10}$$

Supongamos ahora que p es un polinomio que se factoriza en monomios de primer orden

$$p(D) = (D - p_0) \cdots (D - p_k).$$

Estamos en condiciones de definir

$$\frac{1}{p(D)} r = \frac{1}{D - p_0} \left(\frac{1}{D - p_1} \left(\cdots \frac{1}{D - p_k} (r) \cdots \right) \right) \tag{11}$$

Problema. Resolver $y'' - 3y' + 2y = xe^x$. Por supuesto que las cuentas las haremos con SAGE. Primero veamos si el polinomio se factoriza

```
P.<D>=PolynomialRing(QQ,"D")
p=D^2-3*D+2
q=p.factor()
```

Vemos que $p = (D-2)\cdot(D-1)$. Ahora programemos la fórmula (10) y usemosla para resolver la ecuación.

```
x=var('x')
LinInv=lambda r,a: e^(a*x)* (e^(-a*x)*r )\
.integral(x)
y=LinInv(LinInv(x*e^x,1),2)
```

Deducimos $y = -\frac{1}{2}\left(x^2 + 2\,x + 2\right)e^x$ es solución.
Veamos si es verdad

```
sage: (y.diff(x,2)-3*y.diff(x)+2*y).simplify_full()
x*e^x
```

Métodos Operacionales, fracciones simples Otra idea es descomponer $1/p(D)$ en fracciones simples.

$$\frac{1}{(D-p_0)\cdots(D-p_k)} = \left\{\frac{1}{(D-p_0)} + \cdots + \frac{1}{(D-p_k)}\right\}.$$

Como cada témino del miembro de la derecha lo tenemos definido, sólo tenemos que sumar cada uno de ellos. Reprocesemos con esta idea el ejemplo de antes.

```
q=(1/p).partial_fraction_decomposition()
```

Esto nos da la descomposición en fracciones simples

$$\left(0, \left[\frac{1}{D-2}, \frac{-1}{D-1}\right]\right).$$

El output es una lista con dos componentes. Recordar que cuando uno descompone una función racional $P(X)/Q(X)$ en fracciones simples resulta en una expresión de la forma $P_0(X) + R(x)$, donde P_0 es un polinomio y $R(X)$ es hablando mal y pronto la parte propiamente fraccionaria.

1.5.2. Fracciones simples

En nuestro caso

$$\frac{1}{p(D)} = \frac{1}{D-2} + \frac{-1}{D-1}.$$

Entonces la siguiente expresión debería darnos una solución

```
z=LinInv(x*e^x,2)-LinInv(x*e^x,1)
```

Chequeemos si esto es asi

```
sage: (z.diff(x,2)-3*z.diff(x)+2*z).simplify_full()
x*e^x
```

¿Será la misma solución que obtuvimos antes?

```
sage: bool(y==z)
True
```

1.5.3. Desarrollos en serie

En algunas ocasiones es conveniente desarrollar en serie $1/p(D)$:

$$\frac{1}{p(D)}r(x) = \left(a_0 + a_1 D + a_2 D^2 + \cdots\right) r(x). \tag{12}$$

Por ejemplo es conveniente cuando r es un polinomio, puesto que salvo una cantidad finita, todas las derivadas de r son cero.

Ejemplo. Resolver $y''' + 2y'' + y = x^4 + 2 * x + 5$. Como r es un polinomio de grado 4, desarrollemos en serie $1/p(D)$ hasta ese orden

```
D=var('D')
L=(1/(1+2*D^2+D^3)).\
taylor(D,0,4).coefficients()
```

Obtenemos los siguientes coeficientes asociados a cada exponente $[[1,0]\,,[-2,2]\,,[-1,3]\,,[4,4]]$.

Ahora el siguiente código evalúa el segundo miembro de (12)

```
r=x^4+2*x+5
y=sum([k[0]*r.diff(x,ZZ(k[1])) for k in L])
    #ZZ() convierte a entero
```

Llegamos a la solución

$$y = x^4 - 24\,x^2 - 22\,x + 101$$

Veamos si es correcta

```
sage: bool(y.diff(x,3)+2*y.diff(2)+y==r)
True
```