1. Teorema de separaciòn de Sturn

El objetivo de esta unidad es mostrar como se pueden estudiar propiedades de las soluciones sin resolver la ecuación diferencial. En particular estudiaremos propiedades de los ceros de las soluciones.

Teorema 1.1 (Separación de Sturn) *Sean y_1 e y_2 soluciones linealmente independientes de*

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0. \tag{1}$$

Entonces entre dos ceros consecutivos de y_2 hay exactamente un cero de y_1.

Dem. Sean x_1 y x_2 ceros sucesivos de y_2. Podemos suponer $y_2 > 0$ en (x_1, x_2). Vamos a considerar el Wronskiano de las soluciones

$$W = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x),$$

que es no nulo por la independencia lineal y por lo tanto tiene siempre el mismo signo. En los puntos x_1 y x_2 tenemos $W = y_1(x)y_2'(x)$. Notar que

$$y_2'(x_1) = \lim_{h\to 0+} \frac{y_2(x_1+h)}{h} \geq 0.$$

De manera similar deducimos $y_2'(x_2) \leq 0$. Por la invariancia del signo de $W = y_1y_2'$ debe ocurrir que $y_1(x_1)$ e $y_1(x_2)$ tiene signos diferentes. Y por lo tanto y_1 se debe anular en (x_1, x_2)

Teorema 1.2 *Existe una función v tal que el cambio de variables $y(x) = v(x)u(x)$ transforma la ecuación* (1) *en la ecuación*

$$u'' + q(x)u = 0. \tag{2}$$

Dem.

```
x=var('x')
y=function('y',x)
u=function('u',x)
v=function('v',x)
P=function('P',x)

Q=function('Q',x)
y=u*v
eq=y.diff(2)+P*y.diff()+Q*y
eq1=eq.coefficient(u.diff())==0
v=desolve(eq1,v)
```

Obtenemos que $v(x) = ce^{\left(-\frac{1}{2}\int P(x)\,dx\right)}$ resuelve nuestro problema.

Hallemos q.

```
y=u*v
eq=y.diff(x,2)+P*y.diff(x)+Q*y
eq=(eq/v).simplify_full()
```

Obtenemos

$$\boxed{-\frac{1}{4}\,P\left(x\right)^{2}\,u\left(x\right)+Q\left(x\right)u\left(x\right)-\frac{1}{2}\,u\left(x\right)D[0]\left(P\right)\left(x\right)+D[0,0]\left(u\right)\left(x\right)=0}.$$

y por lo tanto

$$\boxed{q=-\frac{1}{4}\,P\left(x\right)^{2}+Q\left(x\right)-\frac{1}{2}\,D[0]\left(P\right)\left(x\right)}.$$

□