Cambios de variables, Teoría de Lie y EDO

Fernando Mazzone

Depto de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas Físico-Químicas y Naturales
Universidad Nacional de Río Cuarto

22 de diciembre de 2014

Distintas formas para una ecuación

Ecuación diferencial general de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1}$$

Forma diferencial

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{2}$$

La primera expresión es más asimetría, entre las variables x e y una de ellas es independiente (x) y la otra (y) independiente.
La segunda expresión es más simétrica, las dos variables tienen el mismo estatus.
Las expresiones del tipo (2) representan un ente matemático importante llamado forma diferencial

Formas diferenciales, idea somera

1. Como los polinomios, las formas diferenciales tienen grado.
2. Dadas dos (pueden ser mas) variables x, y una 0-forma diferencial es una función $g(x, y)$ de x, y.
3. La expresión (2) es una 1-forma diferencial.
4. Hay un operador llamado diferencial y denotado por d. Si ω es una k-forma diferencial $d\omega$ es una $k+1$ forma diferencial.
5. En el caso de 0-forma (función) $g(x, y)$ el diferencial se define
$$dg = \frac{\partial M}{\partial x}dx + \frac{\partial N}{\partial y}dy.$$
Una k-forma diferencial se llama exacta cuando es el diferencial de una $k-1$-forma.

Cambios de variables

Idea básica

Supongamos la ecuación (1) o (2) en las variables x, y. La idea es encontrar nuevas variables $\hat{x} = \hat{x}(x, y)$ y $\hat{y} = \hat{y}(x, y)$ tales que la ecuación se transforme en una más sencilla de resolver.

Cambio de la variable dependiente $y = h(x, \hat{y})$ manteniendo la independiente

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial \hat{y}}\frac{d\hat{y}}{dx}.} \tag{3}$$

La ecuación se convierte

$$\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial \hat{y}}\frac{d\hat{y}}{dx} = f(x, h(x, \hat{y})).$$

Que es una expresión sólo en $\hat{y}$ y x. Parece más complicada, pero en un ejemplo concreto puede ser más simple.

CÓMPUTOS DE CAMBIOS DE VARIABLES, EJEMPLO

Ejemplo 1 Hacer el cambio de variable en la ecuación

$$y = \frac{e^{\hat{y}}}{x} \quad \text{en} \quad y' = [\ln(xy)]^2\, xy - \frac{y}{x}. \tag{4}$$

1) Expresemos dy/dx sólo con x, $\hat{y}$ y $d\hat{y}/dx$.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{e^{\hat{y}}}{x^2} + \frac{e^{\hat{y}}}{x}\frac{d\hat{y}}{dx}.$$

2) Remplacemos y' e y en la ecuación

$$-\frac{e^{\hat{y}}}{x^2} + \frac{e^{\hat{y}}}{x}\frac{d\hat{y}}{dx} = \left[\ln\left(x\frac{e^{\hat{y}}}{x}\right)\right]^2 x\frac{e^{\hat{y}}}{x} - \frac{\frac{e^{\hat{y}}}{x}}{x}.$$

3) Simplifiquemos

$$\frac{d\hat{y}}{dx} = \hat{y}^2 x. \tag{5}$$

Cómputos de cambios de variables, ejemplo

Lo podemos hacer con `SymPy`

```
from sympy import *
x,y,y_n=symbols('x,y,y_n')
y=Function('y')(x)
y_n=Function('y_n')(x)
y=exp(y_n)/x
eq=Eq(y.diff(x)-(ln(x*y))**2*x*y+y/x,0)
simplify(eq)
```

Obtenemos la ecuación

$$\frac{1}{x}\left(-x\log^2\left(e^{\mathrm{y\_n}(x)}\right)+\frac{d}{dx}\mathrm{y\_n}(x)\right)e^{\mathrm{y\_n}(x)}=0$$

que `SymPy` no simplifica a nuestro gusto

Cambio de la variable independiente $\hat{x} = h(x)$ manteniendo la dependiente

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\hat{x}}\frac{dh}{dx} = \frac{dy}{d\hat{x}}h'(x).} \tag{6}$$

Suponiendo h biyectiva, la ecuación se convierte

$$\frac{dy}{d\hat{x}}h'(h^{-1}(\hat{x})) = f(h^{-1}(\hat{x}), y).$$

Que es una expresión sólo en $\hat{x}$ e y.

Ejemplo 2 Hacer el cambio de variable en la ecuación

$$\boxed{x = \cos\hat{x} \quad \text{en} \quad -\frac{dy}{dx} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}y = 0.} \tag{7}$$

1) $h(x) = \operatorname{arc\,sen} x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\hat{x}}h'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\frac{dy}{d\hat{x}}.$$

2) Remplacemos x e y' en la ecuación

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\frac{dy}{d\hat{x}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}y = 0$$

3) Simplificando

$$\boxed{\frac{dy}{d\hat{x}} + y = 0.} \tag{8}$$

Cómputos de cambios de variables, ejemplo

Lo podemos hacer con SymPy

```
from sympy import *
x,x_n=symbols('x,x_n')
x_n=acos(x)
y=Function('y')(x_n)
Ecuacion=-y.diff()+1/(sqrt(1-x**2))*y
```

Obtenemos la ecuación

$$\frac{1}{\sqrt{-x^2+1}}\left(y(\operatorname{acos}(x)) + \left.\frac{d}{d\xi_1}y(\xi_1)\right|_{\xi_1=\operatorname{acos}(x)}\right) = 0$$

Nuevamente SymPy no simplifica a nuestro gusto

Cambio de variable general $\hat{x} = \hat{x}(x, y)$**,** $\hat{y} = \hat{y}(x, y)$
1) Calculamos $d\hat{y}/d\hat{x}$ en las variables x, y

$$\frac{d\hat{y}}{d\hat{x}} = \frac{\frac{d\hat{y}}{dx}}{\frac{d\hat{x}}{dx}} = \frac{\frac{\partial\hat{y}}{\partial x} + \frac{\partial\hat{y}}{\partial y}y'}{\frac{\partial\hat{x}}{\partial x} + \frac{\partial\hat{x}}{\partial y}y'} = \frac{\frac{\partial\hat{y}}{\partial x} + \frac{\partial\hat{y}}{\partial y}f(x, y)}{\frac{\partial\hat{x}}{\partial x} + \frac{\partial\hat{x}}{\partial y}f(x, y)}. \tag{9}$$

2) En la expresión resultante sustituir x, y por las tansformaciones inversas $x = x(\hat{x}, \hat{y})$ y $y = y(\hat{x}, \hat{y})$

CAMBIOS DE VARIABLES

Ejemplo 3. Transformar a polares: $\frac{dy}{dx} = \frac{y^3+x^2y-x-y}{x^3+xy^2-x+y}$.
Dado que el cálculo es extenso lo haremos sólo con `SymPy`

```
from sympy import *
x=symbols('x')
y=Function('y')(x)
r=sqrt(x**2+y**2)
theta=atan(y/x)
Expr2=r.diff(x)/theta.diff(x)
Expr3=Expr2.subs(y.diff(x),\
(y**3+x**2*y-x-y)/(x**3+x*y**2-x+y))
r,theta=symbols('r,theta',positive=True)
Expr4=Expr3.subs([(y,r*sin(theta)),\
(x,r*cos(theta))])
Expr5=simplify(Expr4)
```

CAMBIOS DE VARIABLES

Encontramos que en polares la ecuación es mucho más simple

$$\frac{dr}{d\theta} = -r^3 + r. \tag{10}$$

Puede que usar la notación como forma diferencial sea más efectivo. Como r y θ son funciones de x e y, son 0-formas. Usando las reglas de la diferencial, hay que reemplazar

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta; \quad dx = \cos\theta dr - \operatorname{sen}\theta r d\theta \\ y &= r\operatorname{sen}\theta; \quad dy = \operatorname{sen}\theta dr + \cos\theta r d\theta \end{aligned} \tag{11}$$

en la 1-forma:

$$(y^3 + x^2y - x - y)dx - (x^3 + xy^2 - x + y)dy \tag{12}$$

SAGE Y FORMAS DIFERENCIALES

Encontramos a SAGE más cómodo para operar con formas diferenciales que SymPy

```
sage: r,theta=var('r,theta')
sage: U = CoordinatePatch((r,theta))
sage: F = DifferentialForms(U)
sage: x= DifferentialForm(F, 0, r*cos(theta))
sage: y= DifferentialForm(F, 0, r*sin(theta))
sage: w=(x^3+x*y^2-x+y)*y.diff()-(y^3+x^2*y-x-y)*x.diff()
sage: w[0].simplify_full()
r
sage: w[1].simplify_full()
r^4 - r^2
```

La forma obtenida es $rdr + (r^4 - r^2)d\theta$.

Grupos, Repaso

Grupos

Sean G un conjunto y α una función tal que $\alpha : G \times G \to G$. En el contexto de grupos es más usual la notación $\alpha(g_1, g_2) = g_1 g_2$. El par (G, α) se llama un grupo si se satisface

1. $(g_1 g_2)g_3 = g_1(g_2 g_3)$, para todos $g_1, g_2, g_3 \in G$,
2. Existe $e \in G$ tal que $eg = ge = g$, para todo $g \in G$.
3. Para todo $g \in G$ existe $h \in G$ tal que $gh = hg = e$. Se acostumbra denotar $h = g^{-1}$.

Ejemplos de grupos

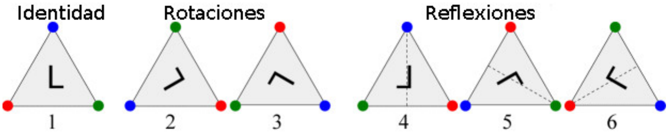
Ejemplo 1 Sea Π un plano euclideano y G el conjunto de todas las transformaciones rígidas de Π en si mismo. Entonces G es un grupo con la operación de composición. Se llama el grupo de transformaciones rígidas

Ejemplo 2 Sea $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ un conjunto de n elementos y S_n definido por

$$S_n = \{\sigma | \sigma : X \to X \text{ y } \sigma \text{ es biyectiva } \}$$

Entonces S_n es un grupo con la operación de composición. Se denomina grupo simétrico

Ejemplo 3 Sea Δ un polígono regular de n lados en un plano euclideano Π y D_{2n} el conjunto de todas las transformaciones rígidas de Π en si mismo que llevan Δ en si mismo. D_{2n} se llama el grupo diedral de orden $2n$. Para un triángulo equilatero grupo diedral



TEORÍA DE GRUPOS COMPUTACIONAL: SAGE Y GAP

GAP - Groups, Algorithms, Programming Lenguaje de programación para algebra discreta
SAGE: es un sistema de software de matemáticas libre de código abierto bajo la licencia GPL. Se basa en muchos paquetes de código abierto existentes: NumPy, SciPy, matplotlib, SymPy, Maxima, GAP, FLINT, R y muchos más. Acceda a su poder combinado a través de un lenguaje común, basado en Python Misión: Creación de una alternativa libre de código abierto viable a Magma, Maple, Mathematica y Matlab.

TEORÍA DE GRUPOS COMPUTACIONAL: SAGE Y GAP

```
sage: G=SymmetricGroup(5)
sage: sigma=G([(1,2,3),(4,5)])
sage: sigma^2
(1,3,2)
sage: sigma^3
(4,5)
sage: sigma^6
()
sage: G.order()
120
sage: H=G.subgroup([sigma])
sage: H.order()
6
```

TEORÍA DE GRUPOS COMPUTACIONAL: SAGE Y GAP

```
sage: H.list()
[(), (4,5), (1,2,3), (1,2,3)(4,5), (1,3,2),
    (1,3,2)(4,5)]
sage: H.is_normal()
False
sage: G1=DihedralGroup(3)
sage: G1[-2]
(1,3,2)
sage: H1=G1.subgroup(G1[-2])
sage: H1.is_normal()
True
sage: G1.quotient(H1)
Permutation Group with generators [(1,2)]
```

Grupos de simetrías

Los cambios de variables de un conjunto de dos variables, digamos x e y, son funciones φ, invertibles, de clase C^∞, donde $\varphi : \Omega_1 \to \Omega_2$, con Ω_1, Ω_2 abiertos de $\mathbb{R}^2$.
Acostumbraremos escribir $(\hat{x}, \hat{y}) = \varphi(x, y)$ y diremos que $(\hat{x}, \hat{y})$ son la variables nuevas e (x, y) las viejas.
Llamaremos $\mathscr{T}$ al conjunto de todas los cambios de variables φ. El conjunto $\mathscr{T}$ tiene una estructura de grupo con la operación de composición.

Ejemplo, polares: Es más facil describir la transformación que lleva coordenadas polares en cartesinas. En este caso $(x, y) = \varphi(r, \theta)$ y

$$\begin{aligned}
\varphi(r, \theta) &= (r\cos(\theta), r\,\mathrm{sen}(\theta)),\\
\Omega_1 &= (0, \infty) \times (-\pi, \pi),\\
\Omega_2 &= \mathbb{R}^2 - \{(x, y) | y = 0, x \leq 0\}
\end{aligned}$$

Grupos de Lie uniparamétricos

Grupos uniparamétricos de simetrías

Sea $\mathscr{T}$ el grupo de cambios de variables. Supongamos dado un homomorfismo de grupos $P : (\mathbb{R}, +) \to (\mathscr{T}, \circ)$.

Notación:

1. Para $\lambda \in \mathbb{R}$ escribiremos $P_\lambda = P(\lambda)$
2. Si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ escribimos $(\hat{x}, \hat{y}) = f(x, y, \lambda) := P_\lambda(x, y)$.

Si $f(x, y, \lambda)$ es diferenciable respecto a (x, y) y analítica respecto a λ diremos que $\{P_\lambda | \lambda \in \mathbb{R}\}$ es un grupo de Lie uniparamétrico de simetrías.

PROPIEDADES DE P_λ

1. P_λ es biyectiva y diferenciable sobre su domio de definición en su imagen.
2. $P_{\lambda_1} \circ P_{\lambda_2} = P_{\lambda_1+\lambda_2}$, equivalentemente $f(f(x,y,\lambda_1),\lambda_2) = f(x,y,\lambda_1+\lambda_2)$.
3. $P_0 = I$, o $f(x,y,0) = (x,y)$.
4. $(P_\lambda)^{-1} = P_{-\lambda}$
5. Si $P_\lambda(x,y) = (\hat{x},\hat{y})$, entonces $\hat{x}(x,y,\lambda)$ y $\hat{y}(x,y,\lambda)$ son diferenciables respecto (x,y) y se desarrollan en serie de potencias respecto a λ. Es decir para todo $\lambda_0 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\hat{x}(x,y,\lambda) &= a_0(x,y) + a_1(x,y)(\lambda-\lambda_0) + \cdots \\
\hat{y}(x,y,\lambda) &= b_0(x,y) + b_1(x,y)(\lambda-\lambda_0) + \cdots
\end{aligned}$$

Ejemplos grupos de Lie uniparamétricos

Ejercicio: Demostrar que las siguientes aplicaciones inducen grupos de Lie uniparamétricos

1. $P_\lambda(x, y) = (x + \lambda, y)$ y $P_\lambda(x, y) = (x, y + \lambda)$.
2. $P_\lambda(x, y) = (e^\lambda x, y)$
3. $P_\lambda(x, y) = \left(\frac{x}{1-\lambda x}, \frac{y}{1-\lambda x}\right)$
4. $P_\lambda(x, y) = \begin{pmatrix} \cos(\lambda) & -\operatorname{sen}(\lambda) \\ \operatorname{sen}(\lambda) & \cos(\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Grupo de simetrías de una ecuación

Definición

Consideremos una ecuación

$$y' = f(x, y).$$

Una transformación $P \in \mathscr{T}$ se denomina una simetría de la ecuación si el cambio de variables dado por $(\hat{x}, \hat{y}) = P(x, y)$ deja invariante la ecuación.

Ejercicio: el conjunto de todas las simetría de una ecuación es un subgrupo de $(\mathscr{T}, \circ)$. Lo llamaremos grupo de simetrías de la ecuación.

Ejemplo: hallar simetrías de

$$\frac{dy}{dx} = f(x).$$

De acuerdo con (9) se debe cumplir que

$$\frac{\frac{\partial \hat{y}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{y}}{\partial y} f(x)}{\frac{\partial \hat{x}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{x}}{\partial y} f(x)} = f(\hat{x})$$

Parece que debemos hacer las elecciones

$$\boxed{\hat{x} = x}, \quad \frac{\partial \hat{y}}{\partial x} = \frac{\partial \hat{x}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \hat{y}}{\partial y} = \frac{\partial \hat{x}}{\partial x}.$$

Luego

$$\frac{\partial \hat{y}}{\partial y} = 1 \Rightarrow \boxed{\hat{y} = y + \lambda}$$

con λ constante arbitraria.

ENCONTRAR SIMETRÍAS

Hallamos que el

$$P_\lambda(x, y) = (x, y + \lambda)$$

es un grupo uniparamétrico de simetrías. De manera similar

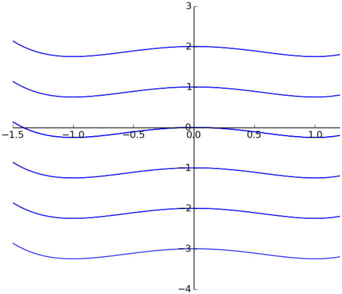
$$P_\lambda(x, y) = (x + \lambda, y)$$

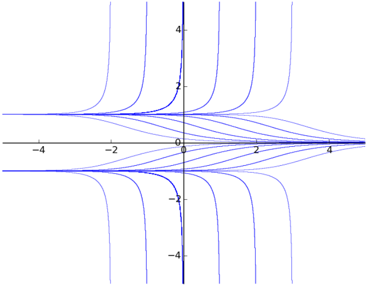
es un grupo uniparamétrico de simetrías para

$$\frac{dy}{dx} = f(y).$$

Geométricamente en el primer caso todas las soluciones seobtienen trasladando una cualquiera verticalmente y en el segundo caso horizontalmente.

ENCONTRAR SIMETRÍAS





Soluciones de $y' = x^3 - x$ Soluciones de $y' = y^3 - y$

Encontrar simetrías

Demostrar que las rotaciones alrededor del origen es un grupo uniparamétrico de simetrías de

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^3 + x^2 y - x - y}{x^3 + xy^2 - x + y}.$$

Sea P_λ la transformación que rota un ángulo λ alrededor del origen. Era un ejercicio demostrar que $\{P_\lambda | \lambda \in \mathbb{R}\}$ es un grupo uniparamétrico de simetrías. Se tiene la representación matricial

$$P_\lambda(x, y) = \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\lambda) & -\operatorname{sen}(\lambda) \\ \operatorname{sen}(\lambda) & \cos(\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$P_\lambda^{-1}(\hat{x}, \hat{y}) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\lambda) & \operatorname{sen}(\lambda) \\ -sen(\lambda) & \cos(\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix}$$

ENCONTRAR SIMETRÍAS

Para el cálculo recurrimos a `SymPy`

```
from sympy import *
x,theta=symbols('x,theta')
y=Function('y')(x)
xi=cos(theta)*x-sin(theta)*y
eta=sin(theta)*x+cos(theta)*y
Expr2=eta.diff(x)/xi.diff(x)
Expr3=Expr2.subs(y.diff(),\
(y**3+x**2*y-x-y)/(x**3+x*y**2-x+y))
xi,eta=symbols('xi,eta')
Expr4=Expr3.subs([(y, -sin(theta)*xi+cos(theta)*
(x,cos(theta)*xi+sin(theta)*eta)])
Expr5=simplify(Expr4)
```

Encontrar simetrías

Tiene problemas para simplificar, lo tenemos que ayudar

```
Expr6=Expr5.subs(sin(2*theta + pi/4),\
sin(2*theta)*sqrt(2)+cos(2*theta)*sqrt(2))
Expr7=Expr6.subs(cos(2*theta),\
1+(cos(theta))**2    )
Expr8=Expr7.subs(cos(2*theta),\
1+(cos(theta))**2)
Expr9=Expr8.subs(sin(2*theta),\
1-(cos(theta))**2)
```

La ecuación resultante es la misma

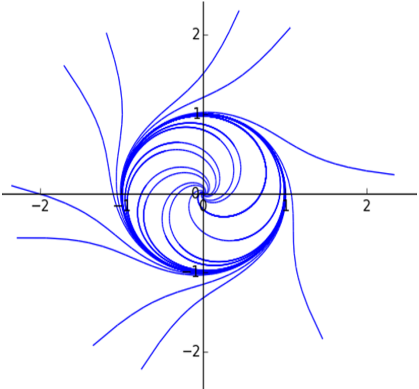
$$\frac{d\hat{y}}{d\hat{x}} = \frac{\eta^3 + \eta\xi^2 - \eta - \xi}{\eta^2\xi + \eta + \xi^3 - \xi}. \tag{13}$$

ENCONTRAR SIMETRÍAS

A la misma cocnclusión arribábamos si observamos que en en coordenadas polares la ecuación se escribe

$$\frac{dr}{d\theta} = r - r^3,$$

y que esta ecuación tiene las simetrías $P_\lambda : (r, \theta) \mapsto (r, \theta + \lambda)$.



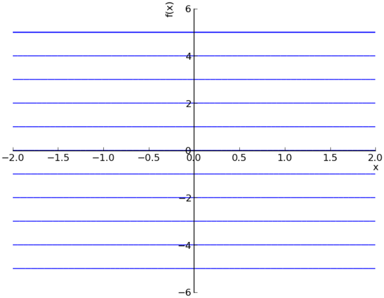
Si rotamos un ángulo fijo el gráfico de una solución obtenemos el gráfico de otra solución.

Simetrías triviales

Consideremos la ecuación

$$y' = 0 \tag{14}$$

Tiene muchas simetrías. Las traslaciones en cualquier dirección $(x, y) \mapsto (x + \alpha\lambda, y + \beta\lambda)$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$. Cambios de escala en ambos ejes $(x, y) \mapsto (e^{\lambda}x, y)$, $(x, y) \mapsto (x, e^{\lambda}y)$. Reflexiones respecto ambos ejes $(x, y) \mapsto (-x, y)$, $(x, y) \mapsto (x, -y)$.



Simetrías triviales

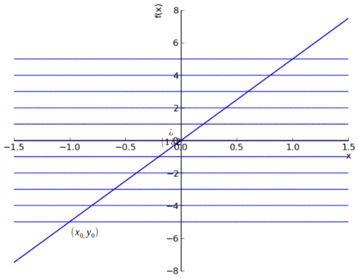
De todas las simetrías encontradas $P_\lambda(x, y) = (e^\lambda x, y)$, $P_\lambda(x, y) = (x + \lambda, y)$ y $P_\lambda(x, y) = (x + \lambda, y)$ se llaman triviales pues llevan una curva solución en si misma.
Estamos interesados en grupo uniparamétricos de simetrías, es decir simetrías que dependan de un parámetro continuo λ.
Las reflexiones $P(x, y) = (-x, y)$ no forman tal grupo, sino que generan un grupo discreto, ya que $P^2 = P \circ P = I$. Luego P genera el grupo $G = \{I, P\}$ que es isomorfo a $\mathbb{Z}_2$. En este caso diremos que $\{I, P\}$ es un grupo discreto de simetrías.

Órbitas

Definición

Dado un grupo uniparamétrico de simetrías $G = \{P_\lambda | \lambda \in \mathbb{R}\}$, y $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ llamamos **órbita (x_0, y_0) bajo la acción de G** (simplemente órbita si es claro quien es G) a la curva

$$\{P_\lambda(x_0, y_0) | \lambda \in \mathbb{R}\}$$



Si G es un grupo de simetrías no trivial, entonces es de esperar que la órbita de (x_0, y_0) cruza transversalmente las curvas solución. La órbita se usará como una nueva coordenada.