Índice

Índice

Ecuaciones escalares

Las ecuaciones escalares de segundo orden

$$u'' + f(u) = h(t),$$

son siempre conservativas, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua, pues f tiene la primitiva

$$F(u) = \int_0^u f(s)ds$$

Así tenemos el potencial

$$U(t, u) = F(u) - uh(t).$$

PROBLEMA DE DIRICHLET ECUACIÓN LINEAL NO RESONANTE

$$\begin{cases} u''(t) + \frac{1}{2}u = \operatorname{sen}(t), \quad 0 < t < \pi \\ u(0) = u(\pi) = 0 \end{cases}$$

Por medios elementales hallamos la solución general de la ecuación diferencial. Usamos el método de coeficientes indeterminados. Proponemos

$$u(t) = A\cos(t) + B\operatorname{sen}(t).$$

reemplazamos en la ecuación y hallamos

$$\boxed{\text{A=0}}, \boxed{\text{B=-2}}$$

Problema de Dirichlet ecuación lineal no resonante

La solución general es la solución particular más una general del homogéneo

$$u = c_1 \cos\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) - 2\operatorname{sen}(t).$$

La condición de contorno $u(0) = u(\pi) = 0$ implica $c_1 = c_2 = 0$. El problema tiene una única solución

$$\boxed{u = -2\operatorname{sen}(t).}$$

El lagrangiano es

$$L(t, x, y) = \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{4} + \operatorname{sen}(t)x.$$