Introducción a la Topología

Fernando D. Mazzone

Índice general

Índice de figuras

Capítulo 1

Cardinalidad

En esta unidad estudiaremos el concepto de cardinalidad de un conjunto. Con este concepto se pretende darle un entendimiento a la noción de cantidad de elementos de un conjunto, en especial cuando este es "infinito". Como se verá, y por extraño que parezca, aunque el conjunto involucrado sea "infinito", de todas maneras podremos definir el cardinal de ese conjunto, con esto implicitamente decimos que no todos los conjuntos infinitos tendrán el mismo cardinal. Empezaremos recordando algunas cuestiones básicas de teoría de conjuntos que, a la vez, nos servirán como referencia para las notaciones.

1.1. Repaso de lo básico sobre conjuntos

La siguiente introducción está lejos de ser exhaustiva, solo recordaremos conceptos ya sabidos. Nos dentendremos algo más en aquellos puntos que puedan ser nuevos.

Definición 1.1 *Dados dos conjuntos A y B denotaremos su unión, intersección y diferencia por: $A \cup B$, $A \cap B$ y $A - B$ repectivamente. Estos nuevos conjuntos se definen por:*

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\},$$

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$$

y

$$A - B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\},$$

respectivamente.

Por lo general, tendremos que los conjuntos con los que trabajaremos estarán contenidos en un conjunto que llamaremos el universo $\mathcal{U}$. Aceptado la existencia de este universo, frecuentemente usaremos la siguiente notación para el complemento

$$A^c = \mathcal{U} - A.$$

Además consideraremos la operación de diferencia simétrica, definiéndose esto por:

$$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A).$$

Definición 1.2 *Dados dos elementos arbitrarios a y b se define el par ordenado (a, b), por la siguiente igualdad*

$$(a, b) = \{a, \{a, b\}\}.$$

La propiedad más relevante de pares ordenados es que si $(a, b) = (c, d)$ entonces $a = c$ y $b = d$. Ahora consideramos el conjunto formado por todos los pares ordenados de elementos pertenecientes a conjuntos dados.

Definición 1.3 *Sean A y B conjuntos. El producto cartesiano de A con B, denotado por $A \times B$, es el siguiente conjunto:*

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}.$$

La siguiente definición es bien conocida.

Definición 1.4 *Una función f de A en B (abreviaremos esta frase porel siguiente símbolo: $f : A \longrightarrow B$), es un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$ con la propiedad que: para todo $a \in A$ existe un único $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$.*

Suponemos que ya todos conocemos estos conceptos, asi como los conceptos relacionados de: imagen, la notación $f(a)$, función inyectiva, suryectiva y biyectiva. Admitimos todo esto por sabido. Ahora introducimos una nueva notación.

Definición 1.5 *Por B^A denotamos al conjunto de todas las funciones $f : A \longrightarrow B$.*

Mas adelante daremos algunas explicaciones del porque de esta notación.

Seguidamente damos las definiciones, que pueden no haberse usado antes, de los conjuntos imagen y preimagen, de un conjunto dado, por una función, también, dada.

Definición 1.6 *Dada una función $f : A \longrightarrow B$ y subconjuntos $C \subset A$ y $D \subset B$ definimos:*

$$f(C) = \{f(a) : a \in C\}$$

y

$$f^{-1}(D) = \{a \in A : f(a) \in C\}.$$

Las figuras 1.1 y 1.2 aclaran el significado de estos conjuntos.

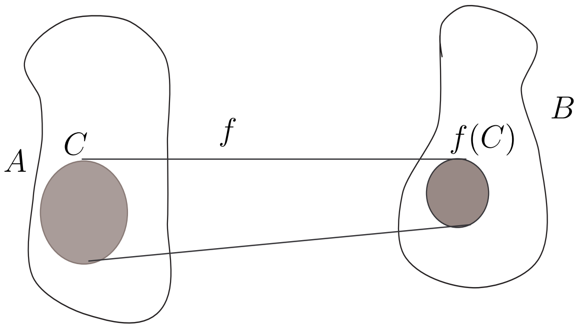


Figura 1.1: Conjunto $f(C)$

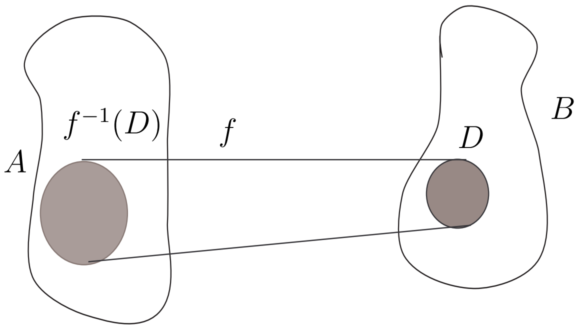


Figura 1.2: Conjunto $f^{-1}(D)$

Muy a menudo utilizaremos las propiedades que a continuación se enuncian. Las demostraciones, de las mismas, quedaran a cargo del alumno; ver Ejercicio 1.2 en la página 33.

Proposición 1.7 *Sea $f : A \longrightarrow B$ una función. Entonces*

1. $f(C_1 \cup C_2) = f(C_1) \cup fe(C_2)$.
2. $f^{-1}(D_1 \cup D_2) = f^{-1}(D_1) \cup f^{-1}(D_2)$.

3. $f(C_1 \cap C_2) \subset f(C_1) \cap f(C_2)$.

4. $f^{-1}(D_1 \cap D_2) = f^{-1}(D_1) \cap f^{-1}(D_2)$.

También vamos a considerar el conjunto de partes de un conjunto dado, esto es el conjunto de todos sus subconjuntos. Explícitamente:

$$\mathcal{P}(A) = \{C : C \subset A\}.$$

Se pueden efectuar uniones e intersecciones de una cantidad arbitraria de conjuntos. Para poder enunciarlas debemos definir antes lo que entendemos por una *familia subindicada de conjuntos* (o brevemente *familia de conjuntos*).

Definición 1.8 *Supongamos dado un conjunto I, al que nos referiremos como conjunto de índices, y una función $F : I \longrightarrow \mathcal{P}(A)$. Así tenemos que, para cada $i \in I$, existe un único subconjunto de A, que llamaremos*[1] *A_i tal que $f(i) = A_i$. Diremos entonces que $\{A_i\}_{i \in I}$ es una familia subindicada de conjuntos por el conjunto de índices I.*

Ahora podemos definir la unión y la intersección de una familia de esta índole de la siguiente manera

Definición 1.9 *Definimos la unión e intersección de una familia $\{A_i\}_{i \in I}$ por:*

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{a : \exists i \in I : a \in A_i\}$$

y

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{a : \forall i \in I : a \in A_i\}$$

respectivamente.

En el Ejercicio 1.1 en la página 33 podemos encontrar una seria de propiedades de uniones e intersecciones de familias de conjutos. Estas propiedades las usaremos con frecuencia. Por último, en esta revisión de conjuntos, expondremos el axioma de elección. Este es un axioma de la teoría de conjuntos. Hay que aclarar que es posible axiomatizar la teoría de conjuntos, de esta axiomatización el mencionado axioma puede formar parte. Decimos "puede" por que este axioma ha despertado multitud de controversias en torno a su inserción o no en el restante conjunto de axiomas. No vamos a discutir aquí esta controversia ni tampoco la teoría axiomática de conjuntos pues esto nos desviaría de nuetros objetivos. Solo enunciaremos el axioma de elección, que usaremos frecuentemente.

[1] Observar que esto es posible puesto que tenemos una dependencia funcional de los subconjuntos de A con los elementos de I

Axioma 1.10 *Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de conjuntos no vacios. Entonces existe una función*

$$f : I \longrightarrow \bigcup_{i\in I} A_i.$$

con la propiedad que: $\forall i \in I$

$$f(i) \in A_i.$$

1.2. Definición de conjuntos coordinables

En esta sección definimos el concepto clave de esta unidad, a saber el concepto de que dos conjuntos sean coordinables. Damos una breve discución para motivar nuestra definición.

Cuando alguién cuenta algún conjunto de cosas, establece una correspondencia entre los objetos que cuenta y un subconjunto de números naturales... veamos como. En el proceso de conteo, algún objeto fue el primero en contarse, y se habrá dicho: "uno" para ese objeto. El proceso continua asignando, sucesivamente, el número dos, tres, etc, a los restantes objetos a contar, hasta que no queden más por contarse. Así, si en este proceso llegamos hasta el 20, por ejemplo, decimos que hay 20 objetos. Aunque no haya que percatarse de eso a los fines prácticos, lo que también hicimos fue: Establecer una correspondencia o función entre los objetos y el conjunto $\{1, \ldots, 20\}$. Más aún, esta correspondencia fue biyectiva pues: A cada número le correspondió solo uno de los objetos (es decir: La función es inyectiva) y a cada objeto le correspondió algún número (es decir: La función es suryectiva). En otras palabras contar un conjunto significa: determinar el *intervalo inicial del conjunto* de los números naturales[2] para el cual exista una correspondencia biyectiva con el conjunto que queremos contar. Conocer esto obviamente es inútil a los efectos de contar cosas de la "vida cotidiana"; no obstante, es una observación fundamental a los efectos de extender lo que llamamos "contar" a conjuntos infinitos. Lo que antecede sugiere la siguiente definición.

Definición 1.11 *Dados dos conjuntos: A y B, se dirá que ellos son coordinables, escribiremos $A \sim B$, si existe una función biyectiva $f : A \longrightarrow B$.*

Esta es nuestra definición de que dos conjuntos, "finitos" o no, tengan "la misma cantidad de elementos". Como veremos, no todos los conjuntos "infititos" son coordinables entre si.

Es bueno notar que no es difícil demostrar que $\sim$ es una relación de equivalencia (ver Ejercicio 1.3 en la página 33).

[2]Por esto se entiende un conjunto de la forma: $\{j \in \mathbb{N} : 1 \leq j \leq n\}$, para cierto $n \in \mathbb{N}$. De ahora en más, llamaremos a este conjunto: $\mathbb{N}_n$

Ahora veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 1.12 Consideremos la función $f : \mathbb{N} \longrightarrow \{x \in \mathbb{N} : x \text{ es par}\}$, definida por $f(x) = 2x$. Facilmente se ve que f es una biyección entre los conjuntos indicados. De ahí que: $\mathbb{N} \sim \{x \in \mathbb{N} : x \text{ es par}\}$.

En este ejemplo observamos que, desde nuestro punto de vista, el conjunto de los naturales tiene “la misma cantidad de elementos” que el conjunto de los naturales pares. Es decir, en este caso, el todo no es mayor que una de sus partes.

Ejemplo 1.13 Veamos que $\mathbb{R} \sim (0, 1)$. En este caso se puede considerar la función

$$f(x) := \tan\left(\frac{2\pi x - \pi}{2}\right).$$

Dejamos como ejercicio corroborar que la función dada establece una biyección entre los conjuntos involucrados.

Los dos ejemplos anteriores muestran una característica importante de los conjuntos “infinitos”; un subconjunto de ellos puede ser coordinable con el conjunto total. Mientras que, los conjuntos “finitos” parecen carecer de esta característica. Ver Ejercicio 1.11 en la página 34

1.3. Conjuntos numerables

Hasta el momento empleamos comillas para encerrar los términos: finito e infinito. Esto se debe a que estamos en condiciones, a partir de la noción de coordinalidad, de definir de forma precisa el significado de estos términos.

Definición 1.14 *Diremos que un conjunto A es:*

1. ***finito*** *si existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $A \sim \mathbb{N}_n$.*
2. ***infinito*** *si no es finito.*
3. ***numerable*** *si $A \sim \mathbb{N}$.*
4. ***a lo sumo numerable*** *si es finito o numerable.*

En virtud de que $\sim$ es una realción de equivalencia, y especialmente por el carácter transitivo de esta, si $A \sim B$ y B tiene alguna de las cuatro propiedades de la definición anterior entonces A tendrá esa misma propiedad.

Recordemos que, por definición, una sucesión $\{a_i\}$ de elementos de un conjunto A es una función $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$, donde $a_i = f(i)$. Vemos así que el concepto de numerabilidad está relacionado con el de sucesión. En efecto, si el conjunto A es numerable entonces sus elementos se pueden disponer en una sucesión, donde ningún término se repita.

Es oportuno que observemos que un conjunto no puede ser numerable y finito a la vez; dicho de otra forma, los conjuntos numerables son infinitos. Esto, como hemos definido los conceptos numerable y finito de manera precisa, tiene que ser demostrado.

Teorema 1.15 *Un conjunto numerable es infinito.*

Dem. Supongamos que, por lo contrario, existe un conjunto A numerable y, a la vez, finito. Así tendríamos que: $A \sim \mathbb{N}$ y $A \sim \mathbb{N}_n$, para algún $n \in \mathbb{N}$. Como $\sim$ es una relación de equivalencia , deducimos que $\mathbb{N} \sim \mathbb{N}_n$. Sea, pues, f una biyección: $f : \mathbb{N}_n \longrightarrow \mathbb{N}$. Ahora consideremos el natural[3]: $k := f(1)+\cdots+f(n)+1$. Como f es una biyección, existe algún m, con $1 \leq m \leq n$ tal que $f(m) = k$. Es decir

$$f(m) = f(1) + \cdots + f(n) + 1.$$

Seguramente, en el miembro derecho, uno de los términos es $f(m)$. Este se puede cancelar con el miembro de la izquierda, quedando

$$0 = f(1) + \cdots + f(m-1) + f(m+1) + \cdots + f(n) + 1.$$

Esta igualdad es absurda pues el miembro de la derecha es mayor que 1. 1□

Vamos a ver algunos otros conjuntos que también son numerables. Empezamos por el siguiente.

Proposición 1.16 *Un subconjunto de un conjunto a lo sumo numerable es a lo sumo numerable.*

Dem. Sea $A \subset B$, con B a lo sumo numerable. Se puede suponer que $B \subset \mathbb{N}$. ¿Por qué? Y, también podemos suponer que A es infinito, puesto que si fuera finito no habría nada que probar. Definimos una función $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$ por induccion. Puesto que los números naturales son bien ordenados, tenemos que A tiene un primer elemento, digamos, a_1. Definamos

$$f(1) = a_1.$$

[3]El símbolo := se lee *igual por definición*. Esto es, el miembro de la izquierda es definido por el de la derecha

Ahora definimos $f(j)$ por:

$$f(j) = \text{el primer elemento del conjunto: } A - \{f(i) : 1 \leq i \leq j-1\}. \qquad (1.1)$$

Esta definición es posible pues $A - \{f(i) : 1 \leq i \leq j-1\} \neq \emptyset$, de lo contrario A sería finito. Queda así definida la función f. Resta ver que es biyectiva.

Veamos, en primer lugar, que es inyectiva. Sea $i > j$. En virtud de (1.1), tenemos que $f(i) \notin \{f(k) : 1 \leq k \leq i-1\}$ de lo cual, y como $j < i$, deducimos que $f(i) \neq f(j)$.

Ahora veamos la suryectividad. Supongamos que existe un elemento $n \in A$ tal que $n \notin f(\mathbb{N})$. Recordemos la Definición (1.1). Ella nos dice, en virtud de que $n \notin f(\mathbb{N})$, que $f(i) < n$, para todo i. Esto es debido a que $f(i)$ es el mínimo del conjunto $A - \{f(k) : 1 \leq k \leq i-1\}$ y a que n pertenece a ese conjunto. Tenemos, entonces, que $f(\mathbb{N}) \subset \mathbb{N}_n$. Como consecuencia del Ejercicio 1.6 en la página 34 concluímos que $f(\mathbb{N})$ es finito. Pero como f es inyectiva $\mathbb{N} \sim f(\mathbb{N})$. Lo que es una contradicción pues $\mathbb{N}$ es infinito. 1□

Proposición 1.17 *El conjuntos $\mathbb{Z}$, de los enteros, es numerable.*

Dem. Construímos una función que establece una biyección entre: Los enteros positivos y los naturales pares y entre los enteros negativos y los naturales impares. La función es la siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+2, & \text{si } x \geq 0; \\ -2x-1, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Dejamos como ejercicio demostrar que, efectivamente, la función f es una biyección entre $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$. 1□

Proposición 1.18 *El conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es numerable.*

Dem. La demostración de este enunciado ya no es tan sencilla. La idea se la debemos a G. Cantor. Daremos una idea de la construcción de la biyección entre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ y $\mathbb{N}$. En rigor de verdad, a los efectos lógicos de la demostración, todo lo que sigue se podría obviar; pudiéndose dar la fórmula (1.5) sin dar ninguna justificación de como se nos ocurrió. Elegimos el camino contrario, explicar como obtener la fórmula.

Dispongamos del conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ en un arreglo del tipo de una "matríz infinita", como sigue:

$$
\begin{tikzcd}
(1,1) \arrow[r] & (1,2) \arrow[dl] & (1,3) \arrow[dl] & (1,4) \arrow[dl] & \ldots \\
(2,1) \arrow[urr] & (2,2) \arrow[dl] & (2,3) \arrow[dl] & & \\
(3,1) \arrow[uurrr] & (3,2) \arrow[dl] & \ddots & & \\
(4,1) & \ddots & & & \\
\vdots & & & &
\end{tikzcd}
$$

Notar que, además de colocar los pares ordenados, hemos colocado algunas flechas. Estas flechas indican un "camino"; este es el camino que seguiremos para enumerar los pares ordenados. Así, construiremos una función f que hará las siguientes asignaciones:

$$
\begin{aligned}
f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\
(1,1) &\longmapsto 1 \\
(1,2) &\longmapsto 2 \\
(2,1) &\longmapsto 3 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Observar que, en nuestro "camino", vamos siguiendo diagonales de la matriz, de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo. Cuando, siguiendo el camino, llegamos al margen izquierdo de la matriz "saltamos" al borde superior, para luego "descender" por la siguiente diagonal. Estas diagonales tienen $1, 2, 3, \ldots$ elementos. Agrupemos los números naturales de esa forma, es decir un primer grupo de uno, un segundo de dos y así indefinidamente:

$$\underbrace{1}_{1}\underbrace{2 \quad 3}_{2} \quad \underbrace{4 \quad 5 \quad 6}_{3} \quad \underbrace{7 \quad 8 \quad 9 \quad 10}_{4}\ldots$$

Obsérvese que

$$\frac{j(j+1)}{2} = \text{número final del agrupamiento } j\text{-ésimo.} \tag{1.2}$$

Por ejemplo: el grupo cuarto tiene por su último elemento el 10, que es igual a 4.5/2. Tambien tenemos que todos los pares ordenados sobre la misma diagonal, tienen la característica de que sus componentes suman lo mismo. Numeremos las diagonales, de izquierda a derecha, empezando por 1. Así tenemos que la diagonal 1 posee el elemento (1,1), la diagonal dos tiene los elementos $(1,2)$ y $(2,1)$, etc. Por lo observado, tenemos la siguiente fórmula, para cualquier par (j,k)

$$j+k-1 = \text{el número de la diagonal a la que pertenece } (j,k). \tag{1.3}$$

El objetivo es poner en correspondencia la diagonal j-ésima con el grupo j-ésimo de naturales. Notar que, en virtud de (1.2), tenemos que

$$\frac{(j+k-1)(j+k)}{2} = \begin{array}{l}\text{es el último número} \\ \quad \text{del agrupamiento } j+k-1\text{-ésimo.}\end{array} \tag{1.4}$$

Así, si al primer miembro de (1.4) le restamos $(j-1)$, obtenemos el número que ocupa el lugar j (contando de atras para adelante) del agrupamiento $j+k-1$ de naturales. Con esto probamos que la función que queriamos construir es:

$$f(j,k) := \frac{(j+k-1)(j+k)}{2} - j + 1. \tag{1.5}$$

Dejamos como ejercicio demostrar que (1.5) es biyectiva (ver Ejercicio 1.7 en la página 34). 1$\square$

Como consecuencia del Ejercicio 1.4 en la página 34 y de la Proposición anterior, podemos afirmar que si A y B son numerables, entonces $A\times B$ es numerable.

La siguiente propiedad también es útil para determinar si un conjunto es numerable.

Proposición 1.19 *Sean A y B conjuntos, con B a lo sumo numerable.*

1. *Supongamos que existe una función inyectiva $f : A \longrightarrow B$. Entonces A es a lo sumo numerable.*

2. *Supongamos que existe una aplicación suryectiva $f : B \longrightarrow A$. Entonces A es a lo sumo numerable.*

Dem. Veamos primero 1. La función f es una biyección entre A y su imagen $f(A)$. Como B es a lo sumo numerable, y como consecuencia de la Proposición 1.16 en la página 13, tenemos que $f(A)$ es a lo sumo numerable. Ahora, como $A \sim f(A)$ tenemos que A es a lo sumo numerable.

Ahora probemos 2. Como f es suryectiva, tenemos que $\forall a \in A$: $f^{-1}(\{a\}) \neq \emptyset$. Ahora, por el axioma de elección sabemos que existe al menos una función $g : A \longrightarrow B$ tal que $\forall a \in A : g(a) \in f^{-1}(\{a\})$. Si pudiéramos probar que la función g fuera inyectiva, entonces obtendríamos la tesis a partir del inciso 1, que ya fue demostrado. Veamos, pues, que g es inyectiva. Supongamos que $a_1, a_2 \in A$ y que $a_1 \neq a_2$. Afirmamos que $f^{-1}(\{a_1\}) \cap f^{-1}(\{a_2\}) = \emptyset$. En efecto, si $b \in f^{-1}(\{a_1\}) \cap f^{-1}(\{a_2\})$ entonces por un lado $f(b) = a_1$ y por otro $f(b) = a_2$, lo que es una contradicción pues $a_1 \neq a_2$. 1□

Es interesante hacer notar que, utilizando el teorema anterior, podemos dar otra demostración, más concisa, de la Proposición 1.18 en la página 14.

En esta demostración hacemos uso del Teorema Fundamental de la Aritmética. Recordemos lo que este teorema nos dice:
Todo entero positivo n se representa, de manera única, de la forma $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_j^{\alpha_j}$, donde p_1, p_2,...,p_j son números primos y α_1, α_2,...,α_j son enteros positivos.

Definimos la siguiente función

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ (n, m) &\longrightarrow 2^n 3^m. \end{aligned}$$

Por el Teorema Fundamental de la Aritmética, y mas precisamente por la unicidad de la representación, tenemos, como 2 y 3 son primos, que si $2^n 3^m = 2^{n'} 3^{m'}$ entonces $n = n'$ y $m = m'$. Por consiguiente la función f es inyectiva. Ahora, invocando la Proposición 1.19 en la página anterior concluímos que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es a lo sumo numerable. Lo que resta es, solo, ver que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ no es finito. Esto se puede probar observando que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ contiene el subconjunto $A = \{(1, n) : n \in \mathbb{N}\}$ que es coordinable con $\mathbb{N}$, ¿Cuál es la biyección?, y por consiguiente infinito. Así, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ no puede ser finito, si lo fuera, A también lo sería, por ser un subconjunto de él. Lo que concluye la demostración.

Ahora podemos demostrar uno de los resultados más interesantes de esta teoría.

Teorema 1.20 *El conjunto $\mathbb{Q}$, es decir los números racionales positivos, es numerable.*

Dem. Sabemos que $\mathbb{Z}$ es numerable y también que $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ es numerable. Podemos definir la siguiente función:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Q} \\ (n, m) &\longmapsto \frac{n}{m}. \end{aligned}$$

Esta aplicación es suryectiva. Por consiguiente, usando la parte 2. de la Proposición 1.19 en la página 16, obtenemos que $\mathbb{Q}$ es a lo sumo numerable. Esto es: $\mathbb{Q}$ es finito o numerable. Pero como $\mathbb{Q}$ es infinito, pues $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$, tenemos que $\mathbb{Q}$ es numerable. 1□

Traduciendo nuestra interpretación de que dos conjuntos coordinables tienen la misma cantidad de elementos, vemos que hay tantos racionales como naturales. Esta afirmación es un tanto desconcertante, en un comienzo. Sabemos que los racionales son densos dentro de los reales. Esto quiere decir que dentro de cada intervalo abierto, por chico que este fuere, siempre hay números racionales dentro. Sin embargo, uno puede poner en correspondencia $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Q}$. Es decir, podemos asignar un racional al uno, otro al dos y así sucesivamente. En una cantidad infinita de pasos, podemos poner en correspondencia cada natural con un único racional y viceverza. A esta altura, pareciera que todos los conjuntos resultan ser numerables, pero ya veremos, en la sección siguiente, que no es así.

Lema 1.21 *Todo conjunto infinito tiene un subconjunto numerable.*

Dem. Sea A un conjunto infinito. Usaremos un argumento similar a la demostración de la Proposición 1.16 en la página 13. Definimos inductivamente una función $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$ de la siguiente manera. Puesto que A es infinito, en particular, es no vacio, así podemos encontrar un elemento $a_1 \in A$. Ponemos entonces

$$f(1) = a_1.$$

Ahora, supongamos que tenemos definida la función f, de tal manera que sea inyectiva, para $j = 1, \dots n$. Llamemos $f(j) = a_j$, para $j = 1, \dots, n$. Como A es infinito no puede ocurrir que $A - \{f(1), \dots, f(n)\} = \emptyset$, de lo contrario f además de ser inyectiva, de $\mathbb{N}_n$ en A, sería suryectiva; y de este modo $A \sim \mathbb{N}_n$ lo que implica que A es finito, contrariando nuestra hipótesis. Por consiguiente, podemos encontrar $a_{n+1} \in A - \{f(1), \dots, f(n)\}$. Definimos $f(n+1) = a_{n+1}$.

Ahora veamos que f, así definida, es inyectiva. Sea $i \neq j$, podemos suponer que $i < j$. Sabemos que:

$$f(j) \notin \{f(1), \ldots, f(j-1)\}.$$

Seguramente $f(i)$ es un elemento del conjunto de la derecha, en la relación anterior, de modo que $f(j) \neq f(i)$, lo que demuestra la inyectividad. Ahora, f es biyectiva de $\mathbb{N}$ en $f(\mathbb{N})$. Por consiguiente $f(\mathbb{N})$ es un subconjunto de A numerable. 1□

La siguiente proposición es útil para probar que algunos conjuntos son numerables. Antes de enunciarla, haremos una observación útil a la demostración. Afirmamos que si A es un conjunto a lo sumo numerable, entonces existe una función suryectiva de $\mathbb{N}$ en A. En efecto, si A es numerable, esto es claro puesto que existe una biyección de $\mathbb{N}$ en A. Si, por el contrario, A es finito, entonces existe una biyección de $\mathbb{N}_n$, para algún $n \in \mathbb{N}$, en A; en este caso extendemos la biyección a todo $\mathbb{N}$ de cualquier forma[4], la función resultante es suryectiva, aunque ya no inyectiva.

Proposición 1.22 *Sea I un conjunto de índices a lo sumo numerable. Supongamos que para cada $i \in I$ tenemos un conjunto A_i que, también, es a lo sumo numerable. Entonces*

$$\bigcup_{i \in I} A_i$$

es a lo sumo numerable. Brevemente: "Una unión a lo sumo numerable de conjuntos a lo sumo numerables es a lo sumo numerable".

Dem. Como vimos, para cada $i \in I$ existe una función suryectiva $f_i : \mathbb{N} \longrightarrow A_i$. Definimos:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} \times I &\longrightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \\ (n, i) &\longmapsto f_i(n). \end{aligned}$$

Esta función es suryectiva, pues si

$$a \in \bigcup_{i \in I} A_i,$$

[4] Por ejemplo: ponemos $f(j) = 1$ para $j > n$

entonces $a \in A_{i_0}$, para algún i_0; ahora, utilizando la suryectividad de f_{i_0}, obtenemos un $n \in \mathbb{N}$ tal que $f_{i_0}(n) = a$. Es decir $f(n, i_0) = a$. Esto prueba que f es suryectiva. Ahora, como $\mathbb{N} \times I$ es a lo sumo numerable, en rigor es numerable, y por la Proposición 1.19 en la página 16, obtenemos la tesis. 1□

1.4. Un conjunto no numerable

Vimos que $\mathbb{N}$ es numerable, por definición, y que $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ son también numerables. Ahora mostraremos un conjunto que no es a lo sumo numerable. No será otro que el conjunto de los numeros reales.

Teorema 1.23 *El conjunto $\mathbb{R}$ no es a lo sumo numerable.*

Dem. Supongamos, por el contrario, que $\mathbb{R}$ es a lo sumo numerable. En virtud de la Proposición 1.16 en la página 13, tendríamos que el intervalo $[0, 1)$ sería también a lo sumo numerable. Como él es infinito entonces $[0, 1)$ sería numerable. Sea, entonces, una función biyectiva $f : \mathbb{N} \longrightarrow [0, 1)$. Definamos $a_j := f(j)$.

Como es sabido, cada número real r admite un desarrollo en expresión decimal infinita del tipo

$$r = 0.r_1r_2r_3 \ldots .$$

Un pequeño inconveniente lo presenta el hecho de que esta expresión decimal no es única, puesto que, por ejemplo: $2{,}000 \cdots = 1{,}999 \ldots$. Para avolir este problema convenimos que en nuestros desarrollos decimales no usaremos expresiones que tienen todos 9 a partir de cierto momento. Con esta convención, el desarrollo decimal es único.

A los fines de clarificar nuestra demostración, es útil poner a la sucesión a_j de la siguiente manera :

$$\begin{aligned}
a_1 &= 0.a_{1,1}a_{1,2}a_{1,3}\ldots \\
a_2 &= 0.a_{2,1}a_{2,2}a_{2,3}\ldots \\
&\vdots \\
a_n &= 0.a_{n,1}a_{n,2}a_{n,3}\ldots \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Ahora definimos un número $r = 0.r_1r_2 \cdots \in [0, 1)$, tomando en cuenta los valores de $a_{i,j}$ sobre la digonal principal, que por fuerza no será ninguno de los a_j. La definición es la siguiente:

$$r_n := \begin{cases} 2, & \text{si } a_{n,n} < 2; \\ 1, & \text{si } a_{n,n} \geq 2. \end{cases}$$

Tenemos que $r \neq a_j$ para todo j, pues, estos números seguramente son distintos en el lugar j de su desarrollo. Observar que si a_j tiene un número menor que 2 en ese lugar, entonces $r_j = 2$, en cambio si un número mayor o igual que 2 ocupa el lugar j de a_j, entonces $r_j = 1$. Por ende, como dijimos r no es ningún a_j. Esto demuestra que la función f no es suryectiva. 1□

Utilizando el Ejemplo 1.13 en la página 12 y el Ejercicio 1.8 en la página 34, vemos que $\mathbb{R} \sim (0,1) \sim [0,1]$. Para cualquier intérvalo no trivial[5] I, ya sea abierto o cerrado, existe una biyección, de hecho una función lineal, de I en el intérvalo $(0,1)$ o $[0,1]$, dependiendo de si I es cerrado o abierto. Vemos así que todos los intérvalos no triviales son coordinables entre si y, a su vez, con $\mathbb{R}$.

1.5. Una aplicación

En esta sección daremos una aplicación de los conceptos desarrollados en las secciones previas. Veremos como estos se pueden usar para demostrar la existencia de números trascendentes. Antes empezaremos con algunas definiciones.

Un polinomio es una función de la forma:

$$P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n,$$

donde $n \in \mathbb{N}$ se llama *grado* del polinomio y los a_j *coeficientes* del polinomio. Escribiremos que $P \in \mathbb{Z}[X]$, $P \in \mathbb{Q}[X]$ o $P \in \mathbb{C}[X]$ si los coeficientes son enteros, racionales o complejos respectivamente. Una raíz del polinomio P es un número $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que

$$P(\alpha) = 0.$$

Observar que un número racional $q = n/m$ es solución (o raíz del polinomio) de la siguiente ecuación:

$$P(X) := mX - n = 0.$$

Notar que este polinomio P es de primer grado y además $P \in \mathbb{Z}[X]$. Recíprocamente, si q es solución de una ecuación polinomial $P(X) = 0$, donde P es de primer grado y con coeficientes en $\mathbb{Z}$, entonces q es racional.

[5]Por un intérvalo trivial entendemos un intérvalo que se reduce a un punto

Hemos aprendido que hay dos clases de reales, *racionales e irracionales*. En esta sección expondremos otros tipos de números reales, a saber los *trascendentes*. Como dijimos, un número es racional si y solo si es solución de una ecuación de primer grado a coeficientes enteros. Tomemos el número $\sqrt{2}$, que, como sabemos, es irracional. A pesar de ello, $\sqrt{2}$ es solución de una ecuación a coeficientes enteros; no de primer grado, claro está, sino de segundo; es la siguiente:

$$X^2 - 2 = 0.$$

Vemos que $\sqrt{2}$ tiene, si se nos permite por el momento esta expresión, un "grado de irracionalidad" no muy grande, puesto que es solución de una ecuación de segundo grado a coeficientes enteros.

Nos preguntamos ahora si existiran números con el mayor "grado de irracionalidad" posible. Esto es, que no sean solución de ninguna ecuación polinomial a coeficientes enteros, no importa el grado que fuere. Llamaremos a estos números, cuya existencia es hipotética por el momento, *trascendentes*. A los restantes números los llamaremos *algebraicos*. Denotaremos por $\mathbb{A}$ al conjunto de números algebraicos y por $\mathbb{T}$ al conjunto de números trascendentes. Cualquier número que sea obtenido por medio de raices, del grado que fuere, de números enteros son algebraicos. Esto indica que resolver el problema planteado puede no ser fácil.

El problema de la existencia de números trascendentes fue resuelto por Liouville en 1844. Él demostró que el número

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}}$$

es trascendente. Posteriormente C. Hermite demostró, en 1873, que $e = 2{,}7172...$ es trascendente y Lindemann, en 1882, que π también lo es.

En esta sección mostraremos el argumento usado por G. Cantor, en 1874, para demostrar la existencia de números trascendentes. La situación es la siguiente: Cantor demostró que el conjunto de los números algebraicos es numerable. Luego, si el conjunto de los trascendentes lo fuera, también lo sería el conjunto $\mathbb{R}$ (unión de dos numerables es numerable), lo cual no es cierto. Asi es que, no solo los números trascendentes existen, sino que existen tantos como números reales hay. Dicho de otro modo, los números trascendentes son los más comunes entre los números reales. Los racionales, por el contrario, son una excepción, habiendo de ellos solo una cantidad numerable.

Es bueno comentar que hubo matemáticos que se opusieron a G.Cantor y a su Teoría de Conjuntos. Quizas "la gota que rebalso el vaso" fue la anterior demostración de la existencia de números trascendentes. Pues si la teoría estuviera circunscripta a si misma, parecería solo un planteo esotérico e inofensivo. Pero, podemos usarla para demostrar cuestiones de otros contextos teóricos, como aquella sobre los números trascendentes.

La clave de la demostración es el siguiente lema.

Lema 1.24 *El conjunto $\mathbb{Z}[X]$ es numerable.*

Dem. Como es sabido, un polinomio en $\mathbb{Z}[X]$ y de grado n se puede identificar con la $n+1$-upla de enteros formada por sus coeficientes. Teniendo en cuenta esto, definimos la siguiente función:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z}[X] &\longrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}^n \\ a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n &\longmapsto (a_0, a_1, \ldots, a_n) \end{aligned},$$

donde

$$\mathbb{Z}^n := \underbrace{\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}}_{n \text{ veces}}.$$

Por lo dicho con anterioridad, esta función es biyectiva.

Ahora bien, el conjunto $\mathbb{Z}^n$ es numerable. Podemos probar esto usando inducción y el hecho de que el producto cartesiano de conjuntos numerables es numerable. Así, como consecuencia de la Proposición 1.22 en la página 19 obtenemos que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}^n$$

es numerable. Como f es una biyección, $\mathbb{Z}[X]$ es numerable. 1□

Como corolario obtenemos que el conjunto de números algebraicos es numerable.

Corolario 1.25 *El conjunto de números algebraicos es numerable.*

Dem. Se tiene que

$$\mathbb{A} = \bigcup_{P \in \mathbb{Z}[X]} \{\alpha : P(\alpha) = 0\}.$$

Como es sabido de los cursos de álgebra, dado un polinomio P, de grado n, el conjunto $\{\alpha : P(\alpha) = 0\}$ es finito, es mas, tiene a lo sumo n elementos. Ahora, en virtud de esto y la Proposición 1.22 en la página 19, obtenemos que $\mathbb{A}$ es a lo sumo numerable. Ciertamente, este conjunto es infinito, pues $\mathbb{N}$ está contenido en él, de modo que no tiene mas chance que la de ser numerable. 1□

Como corolario de este, a su vez, corolario obtenemos que $\mathbb{T} \neq \emptyset$. Pues de lo contrario, como $\mathbb{R} = \mathbb{A} \cup \mathbb{T}$ y como la unión de a lo sumo numerables es a lo sumo numerable, tendríamos que $\mathbb{R}$ sería a lo sumo numerable, que es una contradicción. Pero en realidad podemos demostrar algo más que $\mathbb{T} \neq \emptyset$; podemos probar que $\mathbb{T} \sim \mathbb{R}$. Esto es consecuencia del siguiente teorema, que afirma que al sacarle un conjunto numerable a un conjunto coordinable con $\mathbb{R}$ no alteramos la "cantidad de elementos" del conjunto.

Lema 1.26 *Sean $A \sim \mathbb{R}$ y $B \sim \mathbb{N}$ tales que $B \subset A$. Entonces $A - B \sim \mathbb{R}$.*

Dem. Tenemos que $A-B$ es infinito, de lo contrario, por la Proposición 1.22 en la página 19, $A = (A-B) \cup B$ sería a lo sumo numerable, contradiciendo nuestras hipótesis. Como $A - B$ es infinito, por el Lema 1.21 en la página 18, obtenemos un conjunto numerable $C \subset A - B$. Como $B \cup C$ y C son numerables, existe una biyección $f : B \cup C \longrightarrow C$. Ahora definimos la siguiente función:

$$\begin{aligned} \hat{f} : A &\longrightarrow A - B \\ x \notin B \cup C &\longmapsto x \\ x \in B \cup C &\longmapsto f(x) \end{aligned} \quad .$$

No es dificil demostar que $\hat{f}$ es una biyección, de donde $A - B \sim A \sim \mathbb{R}$. 1□

Corolario 1.27 $\mathbb{T} \sim \mathbb{R}$.

Dem. Aplicando el lema anterior, con $A = \mathbb{R}$ y $B = \mathbb{A}$, obtenemos la tesis. 1□

1.6. Comparación de cardinales

En esta sección introduciremos una relación de orden entre conjuntos, esta, intuitivamente, corresponderá a la noción de: "...tiene más elementos que..." que, al menos, para conjuntos finitos todos conocemos. También se suele decir que un conjuto tiene un cardinal mayor que el otro, para expresar esta idea de mayor cantidad de elementos. Informalmente ya hemos usado esta noción al decir que había más números reales que naturales. No obstante, en aquel momento, esa afirmación solo constituyó una interpretación de cierto resultado, otra manera de decirlo que fuera común a nuestra experiencia. En todo caso, no fue ni una definición, ni un teorema, ni nada que fuera plausible de ser demostrado. En esta sección, formalizaremos el concepto de "...hay más...". Posteriormente, analizaremos algunas consecuencias de este concepto.

Intuitivamente, decíamos que había más reales que naturales por que $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ y por que[6] $\mathbb{N} \nsim \mathbb{R}$. Si queremos comparar dos conjuntos cualesquiera, puede ocurrir que ninguno de ellos sea un subconjunto del otro, o más aún que estos conjuntos sean disjuntos. ¿Cómo procedemos en ese caso?. Veamos un ejemplo. Consideremos el conjunto $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \times \{0\} = \{(n, 0) : n \in \mathbb{N}\}$. ¿Cómo podríamos comparar este conjunto con $\mathbb{R}$?. Tenemos que $\mathbb{N}_0 \cap \mathbb{R} = \emptyset$, sin embargo, dentro de $\mathbb{R}$ tenemos un subconjunto, precisamente $\mathbb{N}$, que es coordinable con $\mathbb{N}_0$, a travez de la biyección definida por $f(n, 0) = n$. Podríamos decir entonces que, como $\mathbb{N}$ tiene "menos" elementos que $\mathbb{R}$ y $\mathbb{N}_0$ tiene la misma cantidad que $\mathbb{N}$, entonces $\mathbb{N}_0$ tiene menos que $\mathbb{R}$. Notemos que la función f, que es biyectiva de $\mathbb{N}_0$ en $\mathbb{N}$, es una aplicación inyectiva de $\mathbb{N}_0$ en $\mathbb{R}$. Esperemos que a travez de la discución de este ejemplo, la siguiente definición parezca natural.

Definición 1.28 *Dados dos conjuntos A y B, diremos que $A \precsim B$ si existe una aplicación inyectiva $f : A \longrightarrow B$. Si, además, $A \nsim B$ diremos entonces que $A \prec B$.*

Ejemplo 1.29 Si A es un conjunto infinito, entonces $\mathbb{N} \precsim A$. Esto es consecuencia del Lema 1.21 en la página 18

Ejemplo 1.30 Si A es un conjunto finito entonces $A \prec \mathbb{N}$. Esto es consecuencia de la definición y del Teorema 1.15 en la página 13.

Ejemplo 1.31 Tenemos las siguientes relaciones, que invitamos al lector justificar:

$$\mathbb{N} \sim \mathbb{Z} \sim \mathbb{Q} \sim \mathbb{A} \prec \mathbb{T} \sim \mathbb{R}.$$

Ejemplo 1.32 Si $A \prec B$, $A \sim C$ y $B \sim D$, entonces $C \prec D$. Veamos esto. A causa de las hipótesis, existen: una función inyectiva $f : A \longrightarrow B$ y funciones biyectivas: $g : C \longrightarrow A$ y $h : B \longrightarrow D$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] & B \arrow[d, "h"] \\
C \arrow[u, "g"] \arrow[r, "h \circ f \circ g"] & D
\end{tikzcd}$$

[6]Por $\nsim$ entendemos no coordinable

La función $h \circ f \circ g$ es inyectiva, lo que demuestra que $C \precsim D$. Deberíamos ver que $C \nsim D$. Supongamos que, por el contrario, $C \sim D$. Sea $\phi : C \longrightarrow D$ una biyección entonces tendríamos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h^{-1} \circ \phi \circ g^{-1}"] \arrow[d, "g^{-1}"'] & B \\ C \arrow[r, "\phi"] & D \arrow[u, "h^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

y, puesto que las funciones intervinientes son todas biyecciones, tendríamos que $A \sim B$, contradiciendo, esto, nuestras hipótesis.

En el siguiente teorema podemos ver que para cualquier conjunto A hay otro conjunto que es mas grande, en el sentido de la Definición 1.28 en la página anterior. Este conjunto será el conjunto de partes $\mathcal{P}(A)$.

Teorema 1.33 (Cantor) *Para todo conjunto A,* $A \prec \mathcal{P}(A)$.

Dem. Tenemos que probar que: $A \precsim \mathcal{P}(A)$ y $A \nsim \mathcal{P}(A)$. La siguiente función:

$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow \mathcal{P}(A) \\ a &\longmapsto \{a\} \end{aligned}$$

es inyectiva, de modo que $A \precsim \mathcal{P}(A)$.

Supongamos que existe una biyección $g : A \longrightarrow \mathcal{P}(A)$. Definimos el subconjunto B de A de la siguiente manera

$$B := \{a \in A : a \notin g(a)\}.$$

Como g es suryectiva, existe un $b \in A$ tal que $g(b) = B$. ¿Será o no cierto que $b \in B$? Si es cierto, por definición de B, tendríamos que $b \notin g(b) = B$, lo que es una contradicción. Si fuera falso, es decir $b \notin B$, nuevamente por la definición de B, deducimos que $b \in g(b) = B$, otra contradicción. De modo que, no importando cual, todos los casos nos conducen a una contradicción, fruto de suponer que $A \sim \mathcal{P}(A)$. 1□

Una propiedad importante de $\precsim$ es su atisimetría, esta propiedad no es facil de probar.

Teorema 1.34 (Schröder-Bernstein) *Si $A \precsim B$ y $B \precsim A$ entonces $A \sim B$.*

Idea de la demostración Como dijimos, la demostración de este teorema no es tan sencilla. En primer lugar, trataremos de explicar la idea que subyace en ella, y posteriormente la expondremos acabadamente.

Por las hipótesis, existen funciones inyectivas $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow A$. Si alguna de estas funciones fuera suryectiva, entonces el teorema ya estaría probado. De modo que podemos suponer que no son suryectivas. Notar que $g : B \longrightarrow g(B)$ es una función biyectiva (restringimos el codominio), existe por lo tanto una función inversa, que es biyectiva, $g^{-1} : g(B) \longrightarrow B$. Construiremos una biyección de $\tilde{f} : A \longrightarrow B$, con el auxilio de f y g^{-1}, de la siguiente manera: Buscamos un subconjunto $\tilde{A} \subset A$ de forma tal que la función:

$$\tilde{f}(a) := \begin{cases} f(a), & \text{si } a \in \tilde{A}; \\ g^{-1}(a), & \text{si } a \notin \tilde{A}. \end{cases} \tag{1.6}$$

sea biyectiva. Un primer requerimiento para esta función es que $\tilde{A}^c \subset g(B)$. Esto a causa de que si $a \in \tilde{A}^c$ entonces le aplicaremos g^{-1} a ese a, por consiguiente a debería estar en el dominio de g^{-1}, que es $g(B)$. Dicho de otro modo, se debe cumplir que $g(B)^c \subset \tilde{A}$. Por simplicidad pongamos $A_1 := g(B)^c$ y $B_1 := f(A_1)$. Ver la Figura 1.3 en la página siguiente

Una primera aproximación sería intentar la construcción con $\tilde{A} = g(B)^c$. Seguramente así la función $\tilde{f}$, ver (1.6), está bien definida. La función $\tilde{f}$ será suryectiva, pues g^{-1} es suryectiva de $g(B)$ en B. No obstante, con esa elección de $\tilde{A}$, la función $\tilde{f}$ no es inyectiva, pues cada elemento de B_1 es imágen, por esta $\tilde{f}$, de dos elementos, uno en A_1 y otro en $g(B)$. De modo que esta elección de $\tilde{A}$ todavía no nos sirve. Lo que vamos a hacer ahora es agregarle a $\tilde{A}$ el conjunto de todos los elementos de $g(B)$ tales que g^{-1} los "lleva" a B_1. Este conjunto es $A_2 := g(B_1)$. Definamos además $B_2 := f(A_2)$. Ahora $\tilde{f}$ llevará $A_1 \cup A_2$ en $B_1 \cup B_2$. Nos preguntamos, ahora, si la elección $\tilde{A} := A_1 \cup A_2$ nos servirá. Lamentablemente, la respuesta es no[7]. Al haber "agrandado" $\tilde{A}$ también se nos agrandó el conjunto de puntos en B que son imagen de dos puntos, antes era el B_1, ahora "apareció" el B_2. De modo que continuamos el proceso, es decir, definimos $A_3 := g(B_2)$, $B_3 := f(A_3)$ y así sucesivamente, ver Figura 1.4 en la página 29 . Nunca llegaremos, en una cantidad finita de pasos, al conjunto $\tilde{A}$ con la propiedad deseada, puesto que al cabo de n pasos se nos genera el conjunto B_n donde las imagenes continuan superponiendosé. ¿Qué haremos entonces?. Lo que se hará es seguir este proceso indefinidamente, generando una sucesión de conjuntos A_n y B_n, y luego definir:

[7]Podría ser que si, si la función f hubiera sido biyectiva desde un principio, cosa que descartamos

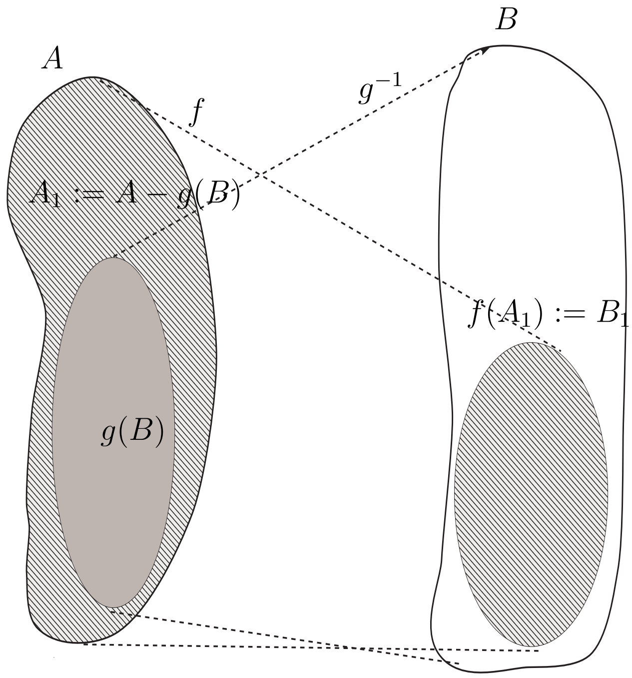


Figura 1.3: Las funciones f y g^{-1}

$$\tilde{A} := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n. \tag{1.7}$$

Intuitivamente, este conjunto debería funcionar, es decir no hay más superposición de f con g^{-1}. Esto es pues si $a \in \tilde{A}$ entonces $a \in A_n$, para algún n, y $f(a) \in B_n$; eventualmente $f(a)$ podría ser igual a algún $g^{-1}(a')$, pero a' tendría que estar en A_{n+1} y por consiguiente está en $\tilde{A}$. Y así $\tilde{f}(a') = f(a')$, y no $\tilde{f}(a') = g^{-1}(a')$, evitando la superposición de imagenes.

Dem.Teorema 1.34 Estamos en condiciones de hacer la demostración propiamente dicha del teorema. Hasta ahora solo tratamos de explicar la demostración. Definimos inductivamente conjuntos A_n y B_n de la siguiente manera:

$$\begin{cases} A_1 = g(B)^c, & B_1 = f(A_1) \\ A_{n+1} = g(B_n), & B_{n+1} = f(A_{n+1}) \end{cases}.$$

Definamos $\tilde{A}$ como en (1.7) y $\tilde{f}$ como en (1.6). Veamos que $\tilde{f} : A \longrightarrow B$ es biyectiva, empezando por la inyectividad.

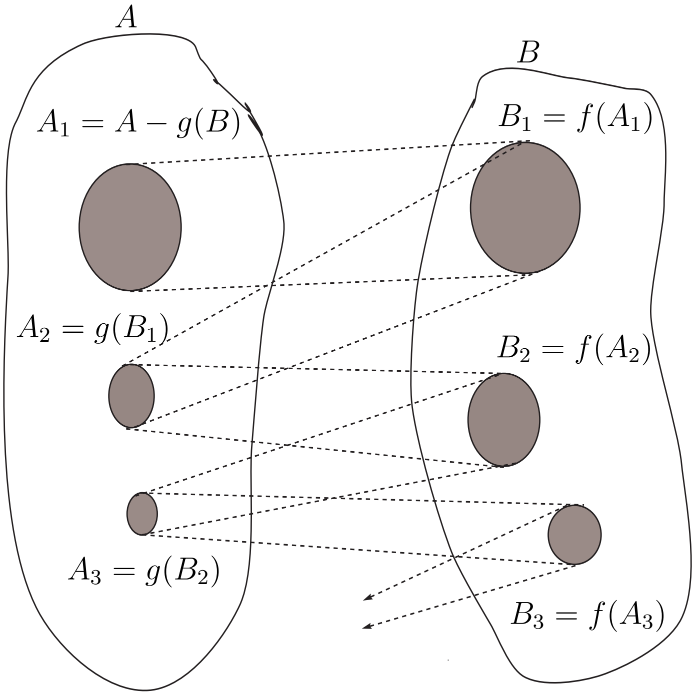


Figura 1.4: Demostración del teorema de Schröder-Berstein

Sean $a, a' \in A$ dos puntos cualesquiera tales que $\tilde{f}(a) = \tilde{f}(a')$. Si a y a' están simultaneamente en $\tilde{A}$, o en $\tilde{A}^c$, tenemos que $a = a'$ como consecuencia de que f, o g^{-1}, es inyectiva. Consideremos, entonces, el caso $a \in \tilde{A}$ y $a' \notin \tilde{A}$. Debemos llegar a una contradicción pues estamos suponiendo indirectamente que $a \neq a'$, por estar en conjuntos disjuntos, y $\tilde{f}(a) = \tilde{f}(a')$. Tenemos que, para algún $n \in \mathbb{N}$, $a \in A_n$; además, por la definición de $\tilde{f}$, tenemos que $f(a) = g^{-1}(a')$. Por consiguiente $g(f(a)) = a'$. Como $a \in A_n$, $f(a) \in B_n$ y $a' = g(f(a)) \in A_{n+1}$. Esto contradice que $a' \notin \tilde{A}$.

Veamos ahora la suryectividad. Sea $b \in B$ cualquier punto. Si $b \in B_n$, para algún n, como $B_n = f(A_n)$, ciertamente existe un elemento $a \in A_n$ tal que $f(a) = b$. Ahora, por la definición de $\tilde{f}$, $\tilde{f}(a) = f(a) = b$. Supongamos, pues, que b no está en ningún B_n. Como una afirmación intermedia, probaremos que $g(b)$ no está en ningún A_n. Supongamos, por el contrario, que existe un n tal que $g(b) \in A_n$. Tiene que ser $n > 1$, pues $A_1 = g(B)^c$ y $g(b) \in g(B)$. Así, por su definición y como $n > 1$, el conjunto A_n es igual a $g(B_{n-1})$. De modo que $g(b) \in g(B_{n-1})$. Esto implica que existe un $b' \in B_{n-1}$ tal que $g(b) = g(b')$. Pero, como g es inyectiva $b = b'$ y, por ende, $b \in B_{n-1}$. Contradiciendo esto que b no estaba en ningún B_n. Probamos, así, que $g(b)$ no está en ningún A_n. Por lo tanto $\tilde{f}(g(b)) = g^{-1}(g(b)) = b$. Vale decir $b = \tilde{f}(a)$ con $a = g(b)$. Que era lo que queríamos probar. 1□

1.7. Aplicaciones del Teorema de Schröder-Berstein

El teorema de Schröder-Berstein es una herramienta potente para probar coordinabilidad de conjuntos. En particular lo usaremos en las cuestiones que a continuación exponemos. Habíamos visto que $\mathbb{R} \nsim \mathbb{N}$. ¿ Qué ocurre con $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$,...? ¿Serán estos conjuntos más "numerosos" que $\mathbb{R}$? Esto es: ¿Serán no coordinables con $\mathbb{R}$?. La respuesta a estas preguntas es negativa, es decir $\mathbb{R}^n \sim \mathbb{R}$. Para ver esto basta demostrar que $(0,1)^2 \sim (0,1)$. El caso general es consecuencia del caso $n = 2$, usando inducción, el Ejemplo 1.13 en la página 12 y el Ejercicio 1.4 en la página 34.

Teorema 1.35 $(0,1)^2 \sim (0,1)$.

Dem. Observar que $(0,1) \precsim (0,1)^2$; podemos, para demostrarlo, considerar la función inyectiva $f(x) = (x, 1/2)$.

Veamos, ahora, que $(0,1)^2 \precsim (0,1)$. Debemos construir una función inyectiva $f : (0,1)^2 \longrightarrow (0,1)$. Sea $(x,y) \in (0,1)^2$. Consideremos las expresiones decimales $x = 0.x_1x_2...$ e $y = 0.y_1y_2...$, donde x_i e y_i son enteros entre 0 y 9, y no son todos 9 a partir de un momento en adelante. Entonces escribimos:

$$f(x,y) := 0.x_1y_1x_2y_2....$$

Es decir, f intercala las expresiones decimales de x e y. Esta función es inyectiva, puesto que dos expresiones decimales iguales tienen todos sus dígitos correspondientes iguales. Esto concluye la demostración. 1□

Es bueno notar que la función f, definida en la demostración anterior, no es suryectiva. Un número que no es imagen de ningún par es $0{,}909090....$ ¿Por qué será esto?

Por el Teorema 1.33 en la página 26 tenemos que $\mathbb{N} \prec \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Desmostramos, además, que $\mathbb{N} \prec \mathbb{R}$. Nos preguntamos, ahora, que relación unirá $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ con $\mathbb{R}$. Con el siguiente teorema probaremos que aquellos conjuntos son coordinables.

Teorema 1.36 $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \sim \mathbb{R}$.

Dem. Probaremos que $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \precsim \mathbb{R}$ y después que $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \succsim \mathbb{R}$.

Como $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \sim \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ (Ejercicio 1.9 en la página 34), y por el Ejercicio 1.4 en la página 34 inciso 4, probaremos que $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \precsim \mathbb{R}$ si podemos probar que $\mathbf{2}^{\mathbb{N}} \precsim \mathbb{R}$. Para este fin, consideremos la siguiente función:

$$\begin{aligned} T : \mathbf{2}^{\mathbb{N}} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto 0.f(1)f(2)f(3)... \end{aligned}.$$

Esto es la función f se aplica en un número cuya expansión decimal tiene solo ceros y unos. Esta función es inyectiva, pues si

$$0.f(1)f(2)f(3)... = 0.g(1)g(2)g(3)...$$

Entonces, por la unicidad de la expansión decimal[8], tenemos que $f(1) = g(1)$, $f(2) = g(2)$,.... Por consiguiente las funciones son iguales. Lo que prueba la inyectividad. De este modo demostramos que $\mathbf{2}^{\mathbb{N}} \precsim \mathbb{R}$ y esto, por lo que explicamos anteriormente, implica que $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \precsim \mathbb{R}$

Ahora debemos ver que $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \succsim \mathbb{R}$. Utilizando los incisos 1. y 4. del Ejercicios 1.4 en la página 34, vemos que es suficiente probar que $\mathbb{R} \precsim \mathcal{P}(\mathbb{Q})$. Para hacer esto definimos la siguiente aplicación:

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{Q}) \\ r &\longmapsto \{q \in \mathbb{Q} : q < r\} \end{aligned}.$$

Veamos que la aplicación es inyectiva. Sean $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ números reales distintos, supongamos $r_1 < r_2$. Por la densidad de $\mathbb{Q}$, existe un $q_0 \in \mathbb{Q}$ tal que $q_0 \in (r_1, r_2)$. Así $q_0 \in \{q \in \mathbb{Q} : q < r_2\}$ y $q_0 \notin \{q \in \mathbb{Q} : q < r_1\}$. De modo que

$$\{q \in \mathbb{Q} : q < r_1\} \neq \{q \in \mathbb{Q} : q < r_2\}.$$

Es decir T es inyectiva. 1□

Para finalizar demostraremos que $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \sim \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$. Mas que el resultado en sí, vamos a

resaltar su demostración, pues contiene una idea interesante.

Proposición 1.37 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \sim \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$.

[8]Recordemos que puede haber expresiones decimales distintas que representan el mismo número, estas son las expresiones que tienen todos nueves a partir de un momento en adelante, como por ejemplo 1=0.999....No obstante este problema no se nos presenta aquí pues la expresiones decimales que consideramos tienen solo 0 y 1

Dem. Dado un conjunto X cualquiera, podemos interpretar una función $f \in X^{\mathbb{N}}$ como una sucesión de elementos de X, a la que podemos disponer de la siguiente manera:

$$f = (f(1), f(2), f(3), ...). \tag{1.8}$$

Si $X = \mathbb{N}$ entonces la sucesión será de números naturales y si $X = \mathbf{2}$ entonces la sucesión será de ceros y unos.

Interpretemos el segundo miembro de (1.8) como una palabra infinita. Si $X = \mathbb{N}$, esta palabras se compone de "letras" que pueden ser cualquier número natural. Si $X = \mathbf{2}$, esta "palabra" se escribe con solo dos "letras" el 0 y el 1. La pregunta es: ¿Cómo podemos "traducir" una palabra escrita con un alfabeto de infitas letras, a uno con solo dos?. La solución a esto es ingeniosa. Sea $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, usaremos el signo 1 para denotar las comas en la sucesión f y pondrémos tantos ceros como indiquen las cantidades $f(j)$.

$$\begin{array}{rcccc} T & : & \mathbb{N}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbf{2}^{\mathbb{N}} \\ f = (f(1), f(2), f(3), ...) & & & \longmapsto & (\underbrace{0, ..., 0}_{f(1) \text{ ceros}}, 1, \underbrace{0, ..., 0}_{f(2) \text{ ceros}}, 1, ...) \end{array}$$

Veamos que esta función es inyectiva. Sean $f, g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, con $f \neq g$. Sea

$$j = \min\{i : f(i) \neq g(i)\}.$$

Tenemos que $f(i) = g(i)$ para $i < j$. Escribamos las dos sucesiones

$$(\underbrace{0, ..., 0}_{f(1) \text{ ceros}}, 1, ..., 1, \underbrace{0, ..., 0}_{f(j-1) \text{ ceros}}, 1, \underbrace{0, ..., 0}_{f(j) \text{ ceros}}, 1, ...)$$

y

$$(\underbrace{0, ..., 0}_{g(1) \text{ ceros}}, 1, ..., 1, \underbrace{0, ..., 0}_{g(j-1) \text{ ceros}}, 1, \underbrace{0, ..., 0}_{g(j) \text{ ceros}}, 1, ...)$$

Notar que los primeros $j - 1$ grupos de ceros son iguales, pues $f(i) = g(i)$ para $i < j$, por consiguiente los primeros $j - 1$ unos estan en la misma posición en las dos sucesiones. Pero $f(j) \neq g(j)$ y, por consiguiente, el grupo j-ésimo de ceros debe diferir en las dos sucesiones. Esto fuerza que si, por ejemplo, $f(j) < g(j)$, entonces la sucesión f tendrá un uno donde la g tiene un cero.

Así $T(f) \neq T(g)$ y la función es inyectiva. Esto prueba que $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \precsim \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$. La otra desigualdad es más fácil de obtener pues

$$\begin{array}{rl} \mathbf{2} \precsim \mathbb{N} & \text{pues unos es finito y el otro no} \\ \mathbf{2}^{\mathbb{N}} \precsim \mathbb{N}^{\mathbb{N}} & \text{por el Ejercicio 1.5} \end{array}$$

1□

Existe una demostración más sucinta de que $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \precsim \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$. No la preferimos debido a que no muestra una biyección, es una demostración indirecta. Ahora la exponemos.

$\mathbb{N} \precsim \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$	Teorema de Cantor
$\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \precsim (\mathbf{2}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$	Ejercicio 1.5
$\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \precsim \mathbf{2}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$	Ejercicio 1.5
$\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \precsim \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$	Proposición 1.18
$\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \precsim \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$	Ejercicio 1.4 inciso 3.

1.8. Ejercicios

Ejercicio 1.1 Sea $f : A \longrightarrow B$ una función cualquiera. Supongamos que $\{A_i\}_{i\in I}$ y $\{B_i\}_{i\in I}$ son familias subindicadas de conjuntos, donde los A_i y B_i son subconjuntos de A y B respectivamente. Demostrar las siguientes propiedades:

1. $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i\in I} A_i^c$.
2. $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i\in I} A_i^c$.
3. $f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$.
4. ¿Qué ocurre con $f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)$?
5. $f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$.
6. $f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$.

Ejercicio 1.2 Demostrar las propiedades de la Proposición 1.7 en la página 9

Ejercicio 1.3 Probar que $\sim$ es una relación de equivalencia.

Ejercicio 1.4 Supongamos que $A \sim B$ y $C \sim D$.

1. Demostrar que $\mathcal{P}(A) \sim \mathcal{P}(B)$.
2. Demostrar que $A \times C \sim B \times D$.
3. Demostrar que $A^C \sim B^D$.
4. Si $A \precsim C$ entonces $B \precsim D$.

Ejercicio 1.5 Sean A, B y C conjuntos no vacios. Demostrar que

1. $\left(A^B\right)^C \sim A^{B\times C}$.
2. Si $A \precsim B$ entonces $A^C \precsim B^C$.

Ejercicio 1.6 Demostrar que un subconjunto de un conjunto finito es finito.

Ejercicio 1.7 Demostrar que la función $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ definida por:

$$f(j,k) := \frac{(j+k-1)(j+k)}{2} - j + 1,$$

es una biyección.

Ejercicio 1.8 Demostrar, exhibiendo una biyección, que $(0,1) \sim [0,1]$

Ejercicio 1.9 Demostrar que el conjunto $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ es coordinable con el conjunto $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$, donde $\mathbf{n} = \{0, 1, ..., n-1\}$. Recordar que, si A y B son conjuntos, $B^A := \{f : f : A \longrightarrow B\}$. De este modo $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ es el conjunto de funciones $f : \mathbb{N} \longrightarrow \{0,1\}$.

Ejercicio 1.10 Demostrar que, para cualquier conjunto A, $\mathcal{P}(A) \sim \mathbf{2}^A$.

Ejercicio 1.11 Demostrar que son equivalentes:

1. A es infinito.
2. A es coordinable con un subconjunto propio, es decir: Existe $B \subset A$, con $B \neq A$, tal que $A \sim B$.

Ejercicio 1.12 Demostrar que el conjunto formado por todos los subconjuntos de $\mathbb{N}$ que son finitos, es numerable. ¿Qué ocurrira con el conjunto de todos los subconjuntos infinitos?

Ejercicio 1.13 Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de intervalos de $\mathbb{R}$. Suponer que los conjuntos en la familia son mutuamente disjuntos, es decir: $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$. Demostrar que el conjunto $\{A_i : i \in I\}$ es a lo sumo numerable.

Ejercicio 1.14 Recordemos que una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice nodecreciente, si para todos $x, y \in \mathbb{R}$, tales que $x < y$, se tiene que $f(x) \leq f(y)$. Dada una función nodecreciente, demostrar que el conjunto de todos los puntos de discontinuidad es a lo sumo numerable. *Ayuda*: Demostrar en primera instancia que los límites laterales:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) \quad \text{y} \quad \lim_{x \to a^-} f(x)$$

existen para todo $a \in \mathbb{R}$. Luego aplicar el ejercicio anterior.

Ejercicio 1.15 Demostrar que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{R}$.

Ejercicio 1.16 Como aprendimos $\mathbb{N} \sim \mathbb{Q}$, esto significa que existe una aplicación biyectiva $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$, que nos permite enumerar $\mathbb{Q}$ como una suceción $r_j := f(j)$. Definimos la aplicación:

$$\begin{aligned} T : C(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ f &\longmapsto T_f \end{aligned}$$

donde

$$T_f(j) := f(r_j).$$

1. Demostrar que T es inyectiva. Por consiguiente $C(\mathbb{R}) \precsim \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

2. Usando el inciso anterior, demostrar que $C(\mathbb{R}) \sim \mathbb{R}$, donde $C(\mathbb{R})$ es el conjunto de las funciones continuas de $\mathbb{R}$ en si mismo.

Capítulo 2

Espacios Métricos

En esta unidad introducimos el concepto de Espacio Métrico. Con él trataremos de abstraer cierta estructura que subyace en los espacios con los que estabamos habituados a trabajar, nos referimos a los espacios euclideos: $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$. En este contexto abstracto, podremos definir varios conceptos, ya conocidos en los espacios euclideos, y podremos demostrar algunos teoremas de una forma más concisa.

2.1. Definición y ejemplos de espacios métricos

Pasamos así a definir la noción más importante de esta unidad.

Definición 2.1 *Sea X un conjunto y $d : X \times X \to \mathbb{R}$ una función. Diremos que d es una* métrica sobre X *si satisface las siguientes propiedades:*

i) $\forall x \forall y : d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

ii) $\forall x \forall y : d(x, y) = d(y, x)$.

iii) $\forall x \forall y \forall z : d(x, z) \leq d(x, y) + d(x, z)$.

Si d es una métrica sobre X diremos, entonces, que el par (X, d) es un espacio métrico.

La desigualdad iii) en la definición anterior se denomina *desigualdad triágular*, esto debido a que se la puede pensar como la relación entre un lado de un triágulo y la suma de los otros dos, ver figura 2.1 en la página siguiente.

Veamos ahora algunos ejemplos de espacios métricos.

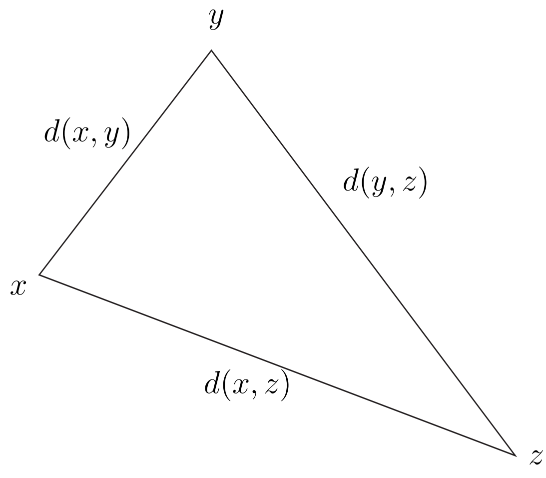


Figura 2.1: Desigualdad triangular

Ejemplo 2.2 La función módulo $|.| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ induce una métrica sobre $\mathbb{R}$, a saber: para $x, y \in \mathbb{R}$ definimos

$$d(x,y) = |x-y|. \tag{2.1}$$

Ejemplo 2.3 Sobre $\mathbb{R}^n$ consideremos la función distancia d definida por

$$d(\mathbf{x},\mathbf{y}) := \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}, \tag{2.2}$$

donde $\mathbf{x} = (x_1,\ldots,x_n)$ e $\mathbf{y} = (y_1,\ldots,y_n)$. Dejamos al alumno la demostración de que d es una métrica, ver Ejercicio 2.1 en la página 51. Esta métrica es conocida como *métrica euclidea* y es la métrica usual que estamos habituados a considerar.

Ejemplo 2.4 Sobre $\mathbb{R}^n$ tenemos que la función definida por:

$$d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i| \tag{2.3}$$

es una métrica.

Ejemplo 2.5 También sobre $\mathbb{R}^n$, la siguiente función es una métrica

$$d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \max_{1\le i\le n}|x_i-y_i|. \tag{2.4}$$

Ejemplo 2.6 Dado cualquier conjunto no vacío X, la función definida por:

$$d(x,y) := \begin{cases} 1, & \text{si } x \neq y; \\ 0, & \text{si } x = y. \end{cases}$$

es una métrica. Esta métrica se denomina *métrica discreta*.

Ejemplo 2.7 Dado un conjunto X, definamos $\mathcal{A}(X)$ como el conjunto de todas las funciones acotadas $f : X \to \mathbb{R}$. Entonces $(\mathcal{A}(X), d)$ es una métrica, donde:

$$d(f,g) := \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|. \tag{2.5}$$

Ejemplo 2.8 Sea $\mathcal{C}([0,1])$ el conjunto de funciones continuas $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Entonces $(\mathcal{C}([0,1]), d)$ es un espacio métrico, donde:

$$d(f,g) := \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx. \tag{2.6}$$

2.2. Bolas, esferas y diámetro

Definido lo que es una métrica y un espacio métrico, pasamos a definir algunas entidades de carácter geométrico, esta son el concepto de bola, esfera y diámetro.

Definición 2.9 *Sea (X,d) un espacio métrico, $x \in X$ y $r > 0$.*

a) Definimos la bola abierta $B(x,r)$, con centro en x y radio r, por:

$$B(x,r) := \{y \in X : d(x,y) < r\}.$$

b) Definimos la esfera $E(x,r)$, con centro en x y radio r, por:

$$E(x,r) := \{y \in X : d(x,y) = r\}.$$

Todos tenemos una concepción de lo que entendemos por una bola, quizas se nos venga a la mente, y de hecho es un ejemplo, un círculo en $\mathbb{R}^2$. No obstante, debemos proceder con cuidado. Estamos considerando métricas generales, ocurrirá que en algunos espacios métricos las “bolas” no se parecen a lo que comunmente entendemos por este concepto. Esto es debido a que en nuestra vida cotidiana estamos habituados a considerar la métrica euclidea, pero en este curso trabajaremos con métricas muy generales.

En $\mathbb{R}$, con la métrica dada por el módulo, la bola centrada en $x \in \mathbb{R}$ y radio r, no es mas que el intervalo $(x-r, x+r)$. En la figura 2.2 mostramos varios ejemplos

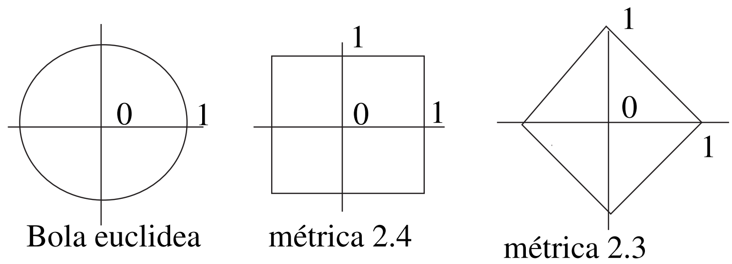


Figura 2.2: Varios ejemplos de bolas en $\mathbb{R}^2$

de bolas en diferentes métricas sobre $\mathbb{R}^2$, las demostraciones las desarrollaremos en la clase.

Todavía mas curiosas son las bolas respecto a la métrica discreta. Sea (X, d) un espacio métrico discreto y $x \in X$, entonces:

$$B(x, r) = \begin{cases} \{x\}, & \text{si } r < 1; \\ X, & \text{si } r \geq 1. \end{cases}$$

La esfera la podemos pensar como el borde de la bola, que no está incluida en la bola abierta. También tenemos en este caso situaciones que, en un primer momento, nos pueden parecer extrañas. Como casi siempre, el mayor "grado de extrañamiento" se consigue con la métrica discreta. En este caso, si (X, d) es un espacio métrico discreto, tenemos:

$$E(x, r) = \begin{cases} \{x\}, & \text{si } r = 0; \\ X - \{x\}, & \text{si } r = 1; \\ \emptyset, & \text{si } r \neq 0 \text{ y } r \neq 1. \end{cases}$$

Pasamos a definir, ahora, el concepto de diámetro de un conjunto.

Definición 2.10 *Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$. Definimos el diámetro del conjunto A por:*

$$\delta(A) := \sup_{x,y \in A} d(x, y).$$

Eventualmente, podría ocurrir que $\delta(A) = +\infty$.

La figura 2.3 en la página siguiente explica, por si sola, el significado del concepto de diámetro.

Definición 2.11 *Un conjunto no vacío A se dirá acotado si $\delta(A) < \infty$.*

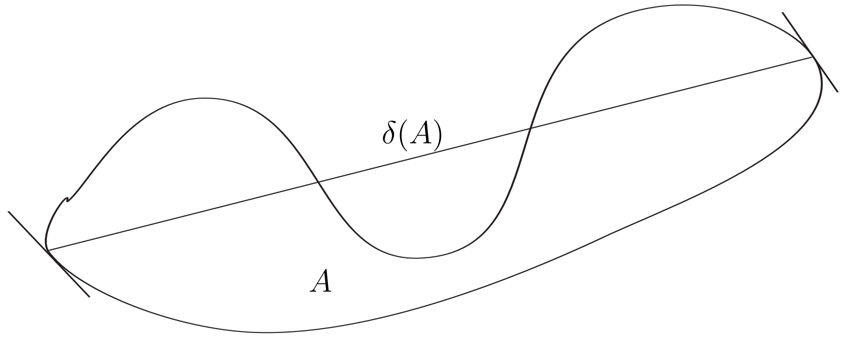


Figura 2.3: Diámetro de un conjunto

Es oportuno aclarar que el concepto de acotación depende del conjunto en si mismo y de la métrica. Así puede ocurrir que un mismo conjunto sea acotado con una métrica y con otra no.

Ejemplo 2.12 En el espacio $\mathbb{R}$, con la métrica del módulo, el conjunto $(0, +\infty)$ es no acotado. En cambio, con la métrica discreta todo conjunto, y en particular el dado, lo es.

También definiremos la distancia de un punto a un conjunto dado.

Definición 2.13 *En un espacio métrico (X, d) se define la distancia de $x \in X$ a $A \subset X$ como*

$$d(x, A) := \inf_{y \in A} d(x, y).$$

Demostremos que

$$\delta(B(x, r)) \leq 2r.$$

Efectivamente, dados z e y en la bola $B(x, r)$, tenemos, por la desigualdad triangular

$$d(y, z) \leq d(y, x) + d(x, z) \leq 2r.$$

Tomando supremo sobre z e y obtenemos la afirmación. Notar que ya no es cierto que $\delta(B(x, r)) = 2r$. En efecto, por ejemplo si (X, d) es un espacio métrico discreto, entonces $\delta(B(x, 1/2)) = 0$.

Ahora probaremos que la unión de conjuntos acostados es, a la vez, un conjunto acotado.

Proposición 2.14 *Sean (X, d) un espacio métrico, A y B subconjuntos acotados de X. Entonces $A \cup B$ es acotado.*

Dem. Tenemos que probar que:

$$\delta(A \cup B) < \infty.$$

Para esto, es suficiente demostrar que $\forall x, y \in A \cup B$ existe una constante M, independiente de x e y, tal que:

$$d(x, y) \leq M.$$

Sean $z \in A$ y $w \in B$ dos cualesquiera puntos en los conjuntos indicados. A travez de esta demostración estos puntos estaran fijos, no importandonos que puntos sean, cualquiera conduce al mismo argumento. Tomemos, ahora, $x, y \in A \cup B$ cualesquiera, pero ya no estaran fijos. Si ocurriera que x e y estuvieran simultaneamente en uno mismo de los conjuntos, supongamos A, entonces tenemos que:

$$d(x, y) \leq \delta(A),$$

de modo que, en este caso, existe una constante M con la propiedad deseada. Debemos considerar el caso en que x e y esten en “conjuntos diferentes”, digamos $x \in A$ e $y \in B$. Entonces tenemos:

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, w) + d(w, y) \leq \delta(A) + d(z, w) + \delta(B).$$

El miembro derecho, de la desigualdad anterior, es independiente de x e y, de modo que quedó demostrada la proposición. 1□

2.3. Conjuntos abiertos

Uno de los conceptos más importantes, sino el más, de la Topología es el de conjunto abierto.

Definición 2.15 *Sea (X, d) un e.m*[1]*. Diremos que $A \subset X$ es un conjunto abierto si $\forall x \in A \exists r > 0$ tal que:*

$$B(x, r) \subset X.$$

En la figura 2.4 en la página siguiente podemos ver un ejemplo de conjunto abierto, en $\mathbb{R}^2$ con la métrica euclidea, y otro que no lo es. La diferencia es que en el conjunto b) el borde (en la parte recta del conjunto) forma parte del mismo conjunto, entonces si x está en este borde, toda bola centrada en x contiene puntos fuera del conjunto.

Un ejemplo, esperable, de conjunto abierto lo constituyen las bolas abiertas.

[1] Abreviación para espacio métrico

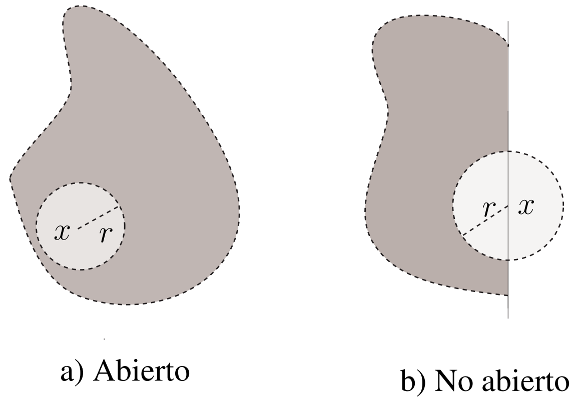


Figura 2.4: Conjuntos abiertos y no abiertos

Proposición 2.16 *Toda bola abierta es un conjunto abierto.*

Dem. Sea $x \in X$ y $r > 0$. Consideremos la bola abierta $B(x, r)$. Para demostrar que la bola es abierta, hay que encontrar, para todo $y \in B(x, r)$, un $r' > 0$ tal que

$$B(y, r') \subset B(x, r). \tag{2.7}$$

Sea, pues, $y \in B(x, r)$. Tomemos:

$$r' := r - d(x, y).$$

Ver la figura 2.5 en la página siguiente para un gráfico de la situación. Este r' es mayor que cero. En efecto, como y está en la bola, tenemos que $d(x, y) < r$.

Ahora, veamos la inclusión 2.7. Sea $z \in B(y, r')$, entonces tenemos, por la desigualdad triangular, que:

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < d(x, y) + r' < r.$$

Así $z \in B(x, r)$, que es lo que queríamos demostrar. 1□

Ahora damos dos propiedades de conjuntos abiertos que tendrán mucha trascendencia más adelante.

Teorema 2.17 *Sea I un conjunto de índices y $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia de conjuntos abiertos. Entonces:*

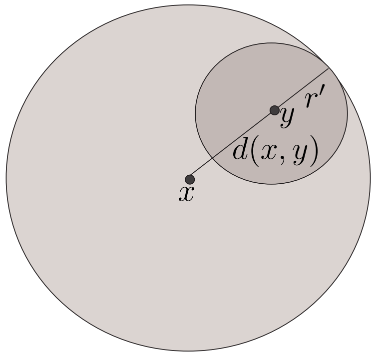


Figura 2.5: Construcción de r'

a) La unión $\bigcup_{i\in I} A_i$ es un conjunto abierto.

b) Si I es finito, la intersección $\bigcap_{i\in I} A_i$ es un conjunto abierto.

Dem. Empecemos por la propiedad a). Sea x un punto en la unión, es decir existe algún índice i_0 tal que $x \in A_{i_0}$. Como este A_{i_0} es un conjunto abierto, deberá existir $r > 0$ tal que $B(x,r) \subset A_{i_0}$. Claramente la bola $B(x,r)$, al ser un subconjunto de A_{i_0} es un subconjunto de la unión de todos los A_i, que es lo que teníamos que probar.

Ahora veamos b). Podemos suponer que, para algún $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $I = \{1,\ldots,n\}$. Sea x un punto en la intersección. En este caso, $x \in A_i$, para todo i. Como cada A_i es abierto, existen radios r_i tales que $B(x,r_i) \subset A_i$. Definamos:

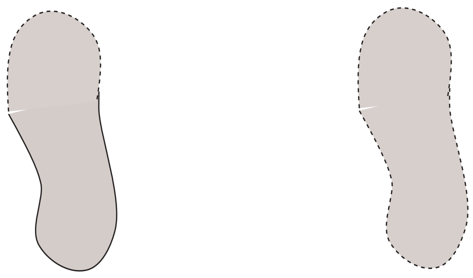
$$r := \text{mín}\{r_1,\ldots,r_n\}.$$

El mínimo existe, y es mayor que cero, pues hay una cantidad finita de radios. Ahora tenemos que, como $r \le r_i$, $B(x,r) \subset B(x,r_i) \subset A_i$, para todo $i \in I$. Por consiguiente $B(x,r)$ es un subconjunto de la intersección de todos los A_i. 1□

Es interesante notar que, en un e.m. discreto (X,d), todo subconjunto $A \subset X$ es abierto. Efectivamente, en un e.m. discreto $B(x,1/2) = \{x\}$ para todo $x \in X$. En particular, si $x \in A$ entonces $B(x,1/2) \subset A$.

2.4. Interior de un conjunto y entornos

Como es costumbre, empezamos con una definición.



Conjunto A Conjunto A^0

Figura 2.6: Interior de un conjunto

Definición 2.18 *Sea (X, d) un e.m. y $A \subset X$. Definimos el interior de A, denotaremos este conjunto A^0, como el conjunto de todos los puntos $x \in A$ tales que existe un $r > 0$ que satisface $B(x, r) \subset A$.*

Hay una gran similitud de esta definición con la de conjunto abierto. De hecho se tiene que un conjunto A es abierto si y solo si $A = A^0$.

En $\mathbb{R}^2$ con la métrica euclidea podemos visualizar el interior de un conjunto como la parte del conjunto que no está sobre el borde de él, ver figura 2.6.

Tenemos una caracterización alternativa del interior de un conjunto.

Teorema 2.19 *El interior de un conjunto A, es el mayor abierto contenido en A.*

Dem. El hecho de que A^0 es abierto y está contenido en A, es consecuencia inmediata de la definición y lo dejamos como ejercicio. Vamos a demostrar que es el mayor de los abiertos contenido en A. Vale decir, hay que demostrar que si B es un abierto contenido en A, entonces $B \subset A^0$. Sea pues B abierto y $B \subset A$. Tomemos $x \in B$. Como B es abierto existe un $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset B \subset A$. Así, necesariamente $x \in A^0$. Lo que demuestra que $B \subset A^0$. 1□

Daremos algunas propiedades de la operación de tomar el interior de un conjunto.

Teorema 2.20 *Sea (X, d) un e.m., A y B subconjuntos de X.*

a) $(A^0)^0 = A^0$

b) *Si $A \subset B$ entonces $A^0 \subset B^0$.*

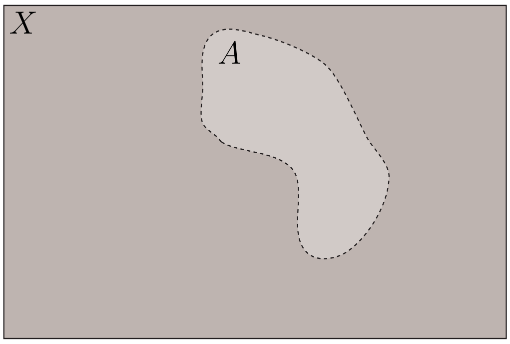


Figura 2.7: Exterior de un conjunto

c) $(A \cap B)^0 = A^0 \cap B^0$.

Dem. a) Como dijimos, A^0 es abierto, por ende $(A^0)^0 = A^0$.

b)A^0 es un abierto y además está contenido en B, por consiguiente $A^0 \subset B^0$.

c) Como $A \cap B \subset A$ tenemos que, a acausa de b), $(A \cap B)^0 \subset A^0$. De la misma manera $(A \cap B)^0 \subset B^0$. Por consiguiente $(A \cap B)^0 \subset A^0 \cap B^0$. Para la otra inclusión, tener en cuenta que $A^0 \cap B^0$ es un abierto contenido en $A \cap B$, por lo tanto $A^0 \cap B^0 \subset (A \cap B)^0$. 1□

Introducimos otro concepto.

Definición 2.21 *En un e.m. el exterior de un conjunto A es el interior de su complemento. En símbolos ponemos Ext$(A) = (A^c)^0$.*

Siempre considerando como modelo de e.m. la métrica euclidea en el plano, podemos "visualizar" el exterior de un conjunto como el complemento de él pero sin los "bordes", ver figura 2.7.

Definición 2.22 *Sea (X, d) un e.m. y $x \in X$. Diremos que V es un entorno de x si $x \in V^0$. También denotaremos por $E(x)$ al conjunto de todos los entornos de x.*

El anterior es otro de los conceptos claves de la topología. Observemos que un conjunto abierto es entorno de cada uno de sus puntos. La recíproca es también cierta, es decir si un conjunto es entorno de cada uno de sus puntos entonces es abierto.

Proposición 2.23 *La intersección de una cantidad finita de entornos de un punto x en un e.m. (X, d) es, a su vez, un entorno de x.*

Dem. Sean V_i, $i = 1, ..., n$, entornos de $x \in X$. Por definición $x \in V_i^0$ para todo $i = 1, ..., n$. Entonces $x \in V_1^0 \cap \cdots \cap V_n^0 = (V_1 \cap \cdots \cap V_n)^0$. De modo que $V_1 \cap \cdots \cap V_n$ es un entorno de x. Así queda establecida la propiedad que expresa la proposición. 1□

2.5. Conjuntos cerrados y clausura de conjuntos

Ahora introduciremos el concepto de conjunto cerrado.

Definición 2.24 *Un conjunto es cerrado si su complemento es abierto.*

Esta sencilla definición hace las nociones de conjunto cerrado y abierto duales[2], así veremos que cada propiedad de conjuntos abiertos induce una correspondiente propiedad sobre conjuntos cerrados. Tener en cuenta esto en la siguiente teorema.

Teorema 2.25 *Sea I un conjunto de índices y $\{F_i\}_{i\in I}$ una familia de conjuntos cerrados. Entonces:*

a) La intersección $\bigcap_{i\in I} F_i$ es un conjunto cerrado.

b) Si I es finito, la unión $\bigcup_{i\in I} F_i$ es un conjunto cerrado.

Dem. La afirmaciones a) y b) de este teorema son duales de las a) y b) del Teorema 2.17 en la página 43. Por ejemplo, para demostrar a), observemos que, por definición, la siguiente es una familia de conjuntos abiertos: $\{F_i^c\}_{i\in I}$. De modo que por a) del Teorema 2.17 en la página 43 tenemos que:

$$\bigcup_{i\in I} F_i^c$$

es un conjunto abierto. De allí que el complemento de este conjunto es cerrado. Pero el complemento de este conjunto es, en virtud de las leyes de de Morgan, la

[2]Dos tipos de conceptos son duales cuando cualquier afirmación sobre uno de ellos se convierte en una afirmación sobre el otro. En este proceso de "transformación de enunciados" hay que traducir cada concepto por su dual. Por ejemplo, en el caso que nos ocupa, un conjunto cerrado muta en abierto y las intersecciones mutan en uniones y viceverza. Uniones e intersecciones son duales como consecuencia de las leyes de de Morgan

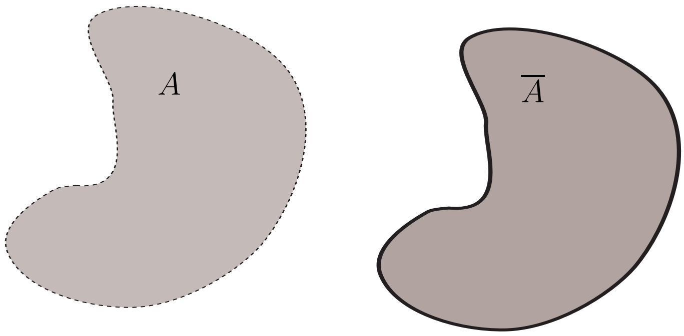


Figura 2.8: Clausura de un conjunto

intersección de todos los F_i. La propiedad b) se obtiene de la misma manera. 1□

Ejemplos de conjuntos cerrados son los intervalos cerrados de $\mathbb{R}$, con la métrica del módulo; las bolas cerradas en cualquier e.m., es decir los conjuntos de la forma:

$$B'(x, r) := \{y \in X : d(x, y) \leq r\}.$$

Las esferas también resultan ser conjuntos cerrados. Por otra parte, como en un e.m. discreto todo conjunto es abierto, todo conjunto, también, es cerrado. La demostración de que los anteriores son conjuntos cerrados las dejamos como ejercicios. A lo largo de esta materia veremos varios ejemplos mas de conjuntos cerrados, encomendamos al estudiante prestar atención a ellos, puesto que tan importante como aprender las definiciones y propiedades de determinado concepto, es conocer, y poder construir ejemplos de ese concepto.

El concepto de interior de un conjunto tiene su dual correspondiente.

Definición 2.26 *Sea (X, d) un e.m.. La clausura de un conjunto $A \subset X$ se define y denota como se ve a continuación:*

$$\overline{A} := (\mathit{Ext}(A))^c = \left[(A^c)^0\right]^c.$$

En $\mathbb{R}^2$ con la métrica euclidea podemos visualizar la clausura de un conjunto como el conjunto más su "borde", ver la figura 2.8.

Tenemos la siguiente caracterización alternativa de clausura de un conjunto.

Proposición 2.27 *Sea (X, d) un e.m. y $A \subset X$. Son equivalentes:*

a) $x \in \overline{A}$.

b) $\forall r > 0 : B(x,r) \cap A \neq \emptyset$.

*Dem.*Veamos primero que a)$\Rightarrow$b). Sea $x \in \overline{A}$. Por definición $x \notin (A^c)^0$. Así, por definición de conjunto interior, tenemos que para todo $r > 0$, $B(x,r) \not\subseteq A^c$. Es decir que para todo $r > 0$ existe $y = y_r \in B(x,r) \cap A$. Esto prueba b).

Veamos ahora que b)$\Rightarrow$a). Sea, pues, x un punto satisfaciendo la propiedad b). Toda bola de radio x y centro $r > 0$ corta al conjunto A. De modo que no existe una de tales bolas con la propiedad que este completamente contenida en el conjunto A^c. Esto nos dice, por definicion de conjunto interior, que x no está en el interior de A^c. Dicho de otro modo $x \in \left[(A^c)^0\right]^c$. 1□

Las propiedades del interior tienen propiedades duales correspondientes para la clausura.

Teorema 2.28 *Sean (X,d) un e.m., A y B subconjuntos de X. Entonces tenemos que:*

a) $A \subset \overline{A}$.

b) El conjunto $\overline{A}$ es el menor conjunto cerrado que contiene a A.

c) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

d) Si $A \subset B$ entonces $\overline{A} \subset \overline{B}$.

e) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

f) $x \in \overline{A} \Leftrightarrow d(x,A) = 0$

Dem. Veamos a) cuya propiedad dual es que $C^0 \subset C$. En efecto, tenemos que:

$$(A^c)^0 \subset A^c.$$

Ahora, tomando complementos a ambos miembros[3], obtenemos que:

$$\overline{A} = \left[(A^c)^0\right]^c \supset (A^c)^c = A.$$

Esto prueba a).

Veamos b). El conjunto $\overline{A}$ es cerrado pues es el complemento del abierto $(A^c)^0$. Sea F un conjunto cerrado que contiene a A, hay que demostrar que $F \supset \overline{A}$.

[3]La operación de complemento invierte las inclusiones

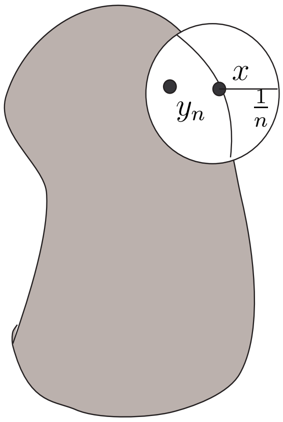


Figura 2.9: Demostración inciso f)

Entonces, tomando complemento, tenemos que F^c es un abierto contenido en A^c. Como $(A^c)^0$ es el mayor abierto contenido en A^c, tenemos que $F^c \subset (A^c)^0$. Ahora tomemos complemento a esta última inclusión y obtenemos

$$F \supset \left[(A^c)^0\right]^c = \overline{A},$$

que es lo que queríamos demostrar.

Como corolario de b), obtenemos que A es cerrado si, y solo si, $\overline{A} = A$. A su vez, como corolario de esto, obtemos c) y d).

Veamos e). Tenemos que:

$$\begin{aligned}
\overline{A \cup B} &= \left[((A \cup B)^c)^0\right]^c && \text{Definición clausura} \\
&= \left[(A^c \cap B^c)^0\right]^c && \text{Leyes de de Morgan} \\
&= \left[(A^c)^0 \cap (B^c)^0)\right]^c && \text{Propiedad dual del interior} \\
&= \left[(A^c)^0\right]^c \cup \left[(B^c)^0)\right]^c && \text{Leyes de de Morgan} \\
&= \overline{A} \cup \overline{B} && \text{Definición de clausura}
\end{aligned}$$

Que es lo que queríamos demostrar.

Por último demostremos f). Si $x \in \overline{A}$ entonces, como consecuancia de la proposición 2.27 en la página 48, tenemos que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe un $y_n \in A$ tal que $d(x, y_n) < 1/n$, ver figura 2.9.

Tenemos asi que

$$d(x,A) = \inf_{y \in A} d(x,y) \leq d(x,y_n) \leq \frac{1}{n}.$$

Y como la desigualdad es válida para todo $n \in \mathbb{N}$, obtenemos que $d(x,A) = 0$.

Recíprocamente, si $d(x,A) = 0$ entonces, por definición del ínfimo, para todo $r > 0$ existe un $y = y_r \in A$ tal que $d(x,y) < r$. Así tenemos que $B(x,r) \cap A \neq \emptyset$, para todo $r > 0$. Esto, como sabemos, es equivalente a afirmar que $x \in \overline{A}$. 1□

Por último estamos interesados en definir aquellos puntos que estan en lo que hemos denominado, sin ninguna precisión, borde de un conjunto.

Definición 2.29 *Diremos que x pertenece a la* frontera *de un conjunto A cuando x está en la clausura de A y en la clausura de A^c. Llamamos al conjunto de todos los puntos frontera de A la* frontera *de A y denotaremnos este conjunto por ∂A.*

La costumbre de denotar la frontera de un conjunto con el signo de una derivada proviene, suponemos, del calculo sobre variedades donde se observa que cierta integral de una "derivada" sobre un conjunto es igual a la integral de la función sobre la frontera del conjunto. Este resultado se conoce como Teorema de Stokes. El Teorema fundamenteal del Cálculo es un caso particular de este teorema. Es en este contexto donde se consigue una conexión entre derivadas y fronteras.

2.6. Ejercicios

Ejercicio 2.1 Demostrar que los siguientes son espacios métricos.

a) $(\mathbb{R}, d)$ donde d está definida en 2.1 en la página 38.

b) $(\mathbb{R}^n, d)$ donde d está definida en 2.2 en la página 38. *Ayuda:* Usar la desigueladad de Cauchy-Schwartz $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2}$$

c) $(\mathbb{R}^n, d)$, donde d es la función definida en 2.3 en la página 38.

d) $(\mathbb{R}^n, d)$, donde d es la función definida en 2.4 en la página 38.

e) Probar que la métrica discreta es, valga la redundancia, una métrica.

f) Demostrar que las ecuaciones 2.5 en la página 39 y 2.6 en la página 39 definen métricas.

Ejercicio 2.2 Sea (X, d) un espacio métrico. Demostrar que para todos x , y y z en X tenemos que:

$$|d(x, y) - d(x, z)| \leq d(y, z).$$

Ejercicio 2.3 Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$. Demostrar que:

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y).$$

Ejercicio 2.4 Sea (X, d) un e.m., probar que las siguientes funciones son métricas sobre X:

a) $d_1(x, y) := \text{mín}\{1, d(x, y)\}$.

b) $d_2(x, y) := \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$.

Ejercicio 2.5 Sea (X, d) un e.m.. Demostrar que $\forall x, y \in X$, existe entornos $U \in E(x)$ y $V \in E(y)$ tales que $U \cap V = \emptyset$.

Ejercicio 2.6 Sea (X, d) u e.m.. Demostrar las siguientes propiedades:

a) Si $A \subset X$ es finito, entonces $X - A$ es abierto.

b) Si $A \subset X$ es abierto, entonces para todo conjunto B se tiene que $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$.

c) Si A es abierto entonces $A \subset (\overline{A})^0$.

d) Si A es cerrado entonces $(\overline{A})^0 \subset A$.

e) $(\overline{A})^0 = \overline{\left(\overline{((\overline{A})^0)}\right)}$.

f) $\overline{(A^0)} = \overline{\left(\overline{((A^0))}^0\right)}$.

g) $A^0 = \left(\overline{A^c}\right)^c$.

h) $\partial A = \overline{A} - A^0$.

i) $\text{Ext}(A) = (\overline{A})^c$.

j) $\partial A^0 \subset \partial A$ y $\partial \overline{A} \subset \partial A$.

k) $\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B$, Si $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$ entonces vale la igualdad en la anterior inclusión.

l) $d(A, B) = d(\overline{A}, \overline{B})$, donde por definición:

$$d(A, B) := \inf_{x \in A, y \in B} d(x, y).$$

Ejercicio 2.7 Dar ejemplos de:

a) A y B abiertos de $\mathbb{R}$ tales que los siguientes conjuntos sean todos diferentes: $\overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A \cap B}$, $\overline{A} \cap B$, $A \cap \overline{B}$.

b) A y B intervalos de $\mathbb{R}$ tales que $A \cap \overline{B} \not\subset \overline{A \cap B}$.

c) $A \subset \mathbb{R}^2$ tal que $\partial A = A$.

d) A y B subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ tales que entre los siguientes conjuntos no valga ninguna inclusión: $\partial A \cup \partial B - \partial(A \cap B)$ y $\partial(A \cup B)$.

Ejercicio 2.8 Demostrar que los siguientes conjuntos de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, son abiertos con la métrica euclidea:

a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : m < d\big((x, y), (0, 0)\big) < n\}$, donde $n, m \in \mathbb{N}$ y $m < n$.

b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1,\ 0 < y < 1,\ x \neq \frac{1}{n}\ \forall n \in \mathbb{N}\}$.

c) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x, y, z \in \mathbb{Z}\}^c$.

Ejercicio 2.9 Hallar la frontera y el diámetro del conjunto $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$.

Ejercicio 2.10 Demostrar que el diámetro de la dola unitaria en $\mathbb{R}^2$ con la métrica euclidea es 2.

Ejercicio 2.11 Un e.m. (X, d) se dice ultramétrico si d verifica la desigualdad ultramétrica, es decir:

$$d(x, y) \leq \max\{d(x, z), d(z, y)\}.$$

Sea X un e.m. ultramétrico. Demostrar que:

a) Si $d(x, y) \neq d(y, z)$ entonces $d(x, z) = \max\{d(x, y), d(y, z)\}$.

b) Si $y \in B(x, r)$ entonces $B(x, r) = B(y, r)$. Como consecuencia las bolas abiertas son también conjuntos cerrados.

c) Si $y \in \overline{B(x,r)}$ entonces $\overline{B(y,r)} = \overline{B(x,r)}$. Las bolas cerradas son, también, conjuntos abiertos.

d) Si dos bolas tienen intersección no vacía entonces una está contenidad en la otra.

e) La distancia de dos bolas abiertas distintas de radio r, contenidas en una bola cerrada de radio r, es igual a r.

Capítulo 3

Espacios separables, funciones continuas y subespacios

La propiedad de los números racionales, de ser densos dentro de los números reales, es de suma importancia. Esta situación es planteada dentro de un e.m. con el concepto de separabilidad. Asimismo veremos que sobre un e.m. tenemos la noción de función continua, definiremos este concepto y demostraremos algunas propiedades básicas. También veremos que una métrica, sobre determinado conjunto, induce una métrica sobre un subconjunto de él.

3.1. Subespacios de un espacio métrico

Sea (X, d) un e.m. e $Y \subset X$. La métrica d es una función definida sobre $X \times X$, luego podemos considerar su restricción a $Y \times Y$. Esta restricción también cumplirá, es inmediato verlo, los axiomas de una métrica. Por este motivo, el par (Y, d) es un e.m., por una abuso de notación denotaremos la restricción de d al conjunto $Y \times Y$ por el mismo símbolo d. Diremos que Y es un subespacio de X. Observar que la forma de las bolas en un subespacio puede ser diferente que en el espacio total, como puede verse en la figura 3.1 en la página siguiente. En este gráfico X es el espacio "total", Y el subespacio y x es un punto sobre la frontera de Y, entonces la bola en Y de centro x y radio r es la parte que quedo cuadriculada en el dibujo. Pongamos $B_Y(x, r)$ para la bola en Y de centro x y radio r, entonces tenemos la relación:

$$B_Y(x, r) := \{y \in Y : d(x, y) < r\} = B(x, r) \cap Y, \tag{3.1}$$

donde $B(x, r)$ es la bola en el espacio total.

El siguiente teorema nos dá una relación de los abiertos y cerrados en Y con los abiertos y cerrados en X.

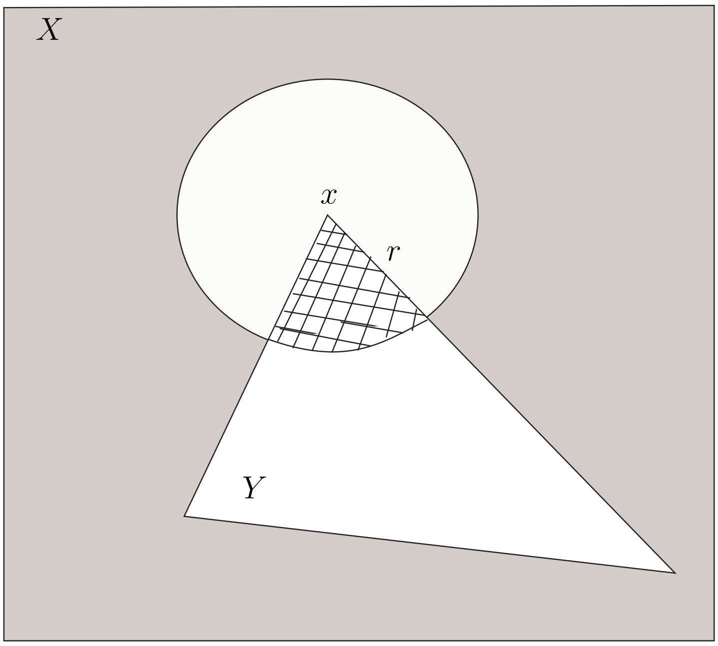


Figura 3.1: Una bola en un subepsacio

Teorema 3.1 *Sea (X, d) un e.m. e $Y \subset X$. Entonces:*

a) El conjunto A es abierto en Y si y solo si existe un G abierto en X tal que $A = G \cap Y$.

b) El conjunto C es cerrado en Y si y solo si existe un cerrado F en X tal que $C = Y \cap F$.

Dem. Veamos, primero, la propiedad a). Sea A un abierto en Y. Para cada $x \in A$ existe, de acuerdo a la Ecuación 3.1 en la página anterior, un radio $r_x > 0$ tal que:

$$B(x, r_x) \cap Y \subset A. \tag{3.2}$$

Definamos:

$$G := \bigcup_{x \in A} B(x, r_x).$$

El conjunto G es abierto, pues la unión de conjuntos abiertos resulta abierto. Además

$$G \cap Y = \bigcup_{x \in A} B(x, r_x) \cap Y = A.$$

La última igualdad es cierta por la ecuación 3.2 en la página anterior y por que cada $x \in A$ está en el conjunto $B(x, r_x) \cap Y$. De modo que, encontramos el conjunto que cumple la propiedad a).

Ahora la demostración de b) es sencilla de obtener. Sea C cerrado en Y, en particular $C \subset Y$, entonces $Y - C$ es abierto en Y. Por a) existe un abierto G tal que:

$$Y - C = G \cap Y.$$

Entonces

$$C = Y \cap G^c.$$

Como el conjunto G^c es cerrado, obtenemos la tesis con $F = G^c$. 1□

Proposición 3.2 *Sea (X, d) un e.m. e $Y \subset X$ un subespacio. El conjunto $U \subset Y$ es un entorno de $x \in Y$ en el espacio (Y, d) si y solo si existe un entorno V de x en el e.m. (X, d) tal que $U = V \cap Y$.*

Dem. Si U es un entorno de x en Y, entonces x está en el interior de U relativo a Y (pongamos U_Y^0 para este conjunto). Como U_Y^0 es un abierto en Y, por el teorema anterior, existe un abierto W tal que $U_Y^0 = Y \cap W$. Tomemos $V = W \cup U$. El conjunto V es un entorno de x en (X, d), pues contiene al conjunto W que lo es. Además $V \cap Y = U$, lo que demuestra la aserción. 1□

Proposición 3.3 *Sea (X, d) un e.m. e $Y \subset X$ un subespacio. Supongamos que $A \subset Y$. Entonces la clausura de A en el subespacio Y (denotemos esto por $\overline{A}^Y$) es igual a $\overline{A}^Y = \overline{A} \cap Y$.*

Dem. El conjunto $\overline{A} \cap Y$ es un cerrado en Y que contiene al conjunto A, de modo que $\overline{A}^Y \subset \overline{A} \cap Y$. Veamos la otra inclusión. Sea $x \in \overline{A} \cap Y$. Como $x \in \overline{A}$ entonces para todo entorno U de x, tenemos que $U \cap A \neq \emptyset$. Como $A \subset Y$ tenemos que $(U \cap Y) \cap A = U \cap A \neq \emptyset$. Así, como $U \cap Y$ es un entorno arbitrario de X en el subespacio Y, tenemos que $x \in \overline{A}^Y$. 1□

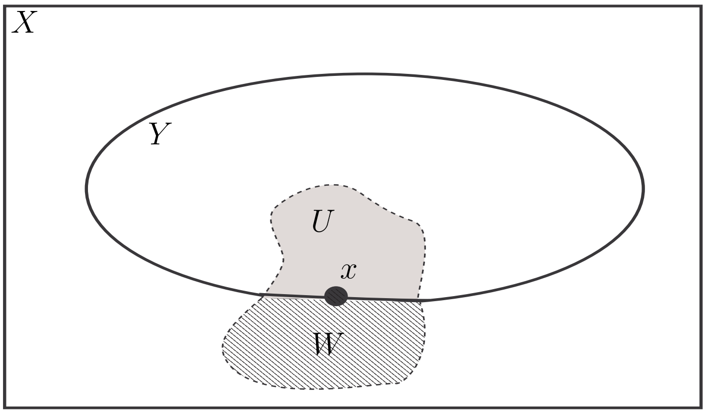


Figura 3.2: Demostración de la Proposición 3.2

3.2. Espacios separables

Definición 3.4 *Sea (X, d) un e.m.. Un conjunto $A \subset X$ se dirá* denso en $B \subset X$ *si $\overline{A} \supset B$. Si el conjunto A es denso en X se dirá, brevemente, que A* es denso.

Ejemplo 3.5 $\mathbb{R} - \{0\}$, $\mathbb{Q}$ son densos en $\mathbb{R}$.

Ejemplo 3.6 Sea (X, d) un e.m discreto. Entonces A es denso si y solo si $A = X$. En efecto, tenemos que $\overline{A} = X$, de modo que si $x \in X$ todo entorno de x interseca al conjunto A. De modo que $B(x, 1/2) \cap A \neq \emptyset$. Pero, como se sabe, $B(x, 1/2) = \{x\}$, de modo que $x \in A$. Esto demuestra que $X = A$.

Definición 3.7 *Un e.m. (X, d) se dirá separable si tiene un subconjunto denso y a lo sumo numerable.*

Ejemplo 3.8 Como se dijo $\mathbb{Q}$ es un conjunto denso, además es numerable, por consiguiente $\mathbb{R}$ es separable.

Ejemplo 3.9 $\mathbb{R}^n$ con la métrica euclidea es separable. Afirmamos que $\mathbb{Q}^n$ es un conjunto denso y numerable. Para verlo, tomemos $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ y veamos que está en $\overline{\mathbb{Q}^n}$. Para ello es suficiente probar que $B(x, r) \cap \mathbb{Q}^n \neq \emptyset$, para todo $r > 0$. Sea $r > 0$ un radio, no es muy dificil demostrar, ver la figura 3.3 en la página siguiente, la siguiente inclusión de un "cubo" en la bola:

$$(x_1 - \frac{r}{\sqrt{n}}, x_1 + \frac{r}{\sqrt{n}}) \times \cdots \times (x_n - \frac{r}{\sqrt{n}}, x_n + \frac{r}{\sqrt{n}}) \subset B(x, r).$$

Como $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$ existen racionales $q_i \in (x_i - \frac{r}{\sqrt{n}}, x_i + \frac{r}{\sqrt{n}})$, $i = 1, ..., n$. En virtud de esto $(q_1, ..., q_n) \in \mathbb{Q}^n \cap B(x, r)$. Y así queda establecida la afirmación.

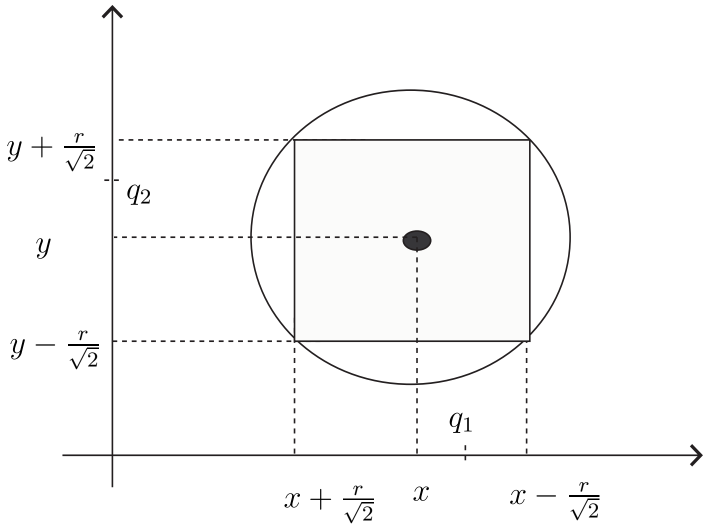


Figura 3.3: Construcción del Ejemplo 3.9

Ejemplo 3.10 Un e.m. discreto (X, d) es separable si y solo si X es a lo sumo numerable. Como vimos en un ejemplo anterior el único conjunto denso que hay en un e.m. discreto es el total, de modo que si el espacio es separable X debe ser a lo sumo numerable.

Definición 3.11 *En un e.m. (X, d), una familia de conjuntos abiertos $\{G_i\}_{i \in I}$ se dirá* base *si todo abierto se puede obtener como unión de miembros de la familia. Más precisamente, si G es un abierto cualquiera existe un subconjunto de subíndices $J \subset I$ tal que:*

$$G = \bigcup_{i \in J} G_i.$$

Ejemplo 3.12 En cualquier e.m. (X, d) la familia de todas las bolas es una base. También es una base la familia de todas las bolas con radio igual a $1/n$ con $n \in \mathbb{N}$. En efecto, si G es un abierto cualquiera, para todo $x \in G$ existe un $r_x > 0$ tal que $B(x, r_x) \subset G$. Así podemos ver que

$$G = \bigcup_{x \in G} B(x, r_x),$$

lo que demuestra que G lo podemos escribir como unión de bolas. Para el otro caso elegimos un natural n_x suficientemente grande para que $1/n_x < r_x$.

Proposición 3.13 *Una familia de abiertos $\{G_i\}_{i\in I}$ es una base si y solo si para todo $x \in X$ y para todo entorno $U \in E(x)$, existe un $i \in I$ tal que:*

$$x \in G_i \subset U.$$

Dem. $\Rightarrow$). Sea $x \in X$ y $U \in E(x)$. Como la familia es base, tenemos que U^0 es unión de miembros de la familia. Además, por definición, tenemos que $x \in U^0$, estos dos hechos implican la tesis.

$\Leftarrow$) Sea G un abierto. Por hipótesis, para cada $x \in G$ encontramos un $i_x \in I$ tal que $x \in G_{i_x} \subset G$. Así tenemos que:

$$G = \bigcup_{x\in G} G_{i_x}.$$

1$\square$

Teorema 3.14 *Un e.m. es separable si y solo si existe una base a lo sumo numerable.*

Dem.$\Leftarrow$). Sea $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base numerable de abiertos (si hubiera una base finita el razonamiento es idéntico). Elijamos $a_n \in G_n$. El conjunto $D := \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ es, entonces, a lo sumo numerable (¿ Por qué?). Además, veamos que es denso. Efectivamente, sea $x \in X$ un punto arbitrario y $U \in E(x)$. Como consecuencia de la Proposición 3.13 existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in G_n \subset U$. Ahora tenemos el punto $a_n \in G_n$, y por ello $U \cap D \neq \emptyset$. Probamos así que todo entorno de x interseca a D, en consecuencia $x \in \overline{D}$. Como el x es arbitrario, aquello prueba que D es un conjunto denso.

$\Rightarrow$). Sea D un conjunto denso y a lo sumo numerable. Definamos la siguiente familia de bolas abiertas:

$$\mathcal{A} := \{B(x, \frac{1}{n}) : x \in D \wedge n \in \mathbb{N}\}.$$

Esta es una familia a lo sumo numerable, pues la siguiente función

$$\begin{aligned} T : \mathbb{N} \times D &\longrightarrow \mathcal{A} \\ (n, x) &\longmapsto B(x, \tfrac{1}{n}) \end{aligned} \tag{3.3}$$

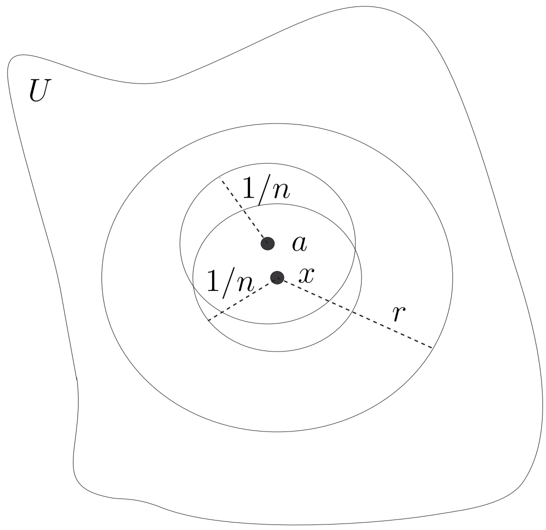


Figura 3.4: Demostración del Teorema 3.14

es suryectiva.

Veamos que la familia propuesta es una base de abiertos usando la Proposición 3.13 en la página anterior. Sea $x \in X$ y $U \in E(x)$. Como $x \in U^0$, podemos elejir $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset U$. Sea, ahora, $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, de modo que $2/n < r$. Como D es denso debe existir un $a \in D$ tal que $a \in B(x, \frac{1}{n})$. Observesé que tenemos que $x \in B(a, 1/n)$, ver Figura 3.4. Además, tenemos que $B(a, 1/n) \subset B(x, r) \subset U$. Para demostrarlo, tomemos $y \in B(a, 1/n)$. Entonces

$$d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, y) < \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n} < r.$$

Tenemos así que $x \in B(a, 1/n) \subset U$, como $B(a, 1/n)$ es un elemento de la familia propuesta, tenemos probada la propiedad de la Proposicion 3.13 en la página anterior y, de este modo, la familia propuesta resulta una base. 1□

Corolario 3.15 *Un subespacio de un espacio separable es separable.*

Dem. Sea (X, d) un e.m. e $Y \subset X$. Sea $\{G_n\}_{n\in I}$ una base a lo sumo numerable de abiertos. Es fácil demostrar que la familia $\{G_n \cap Y\}_{n\in I}$ es una base de los

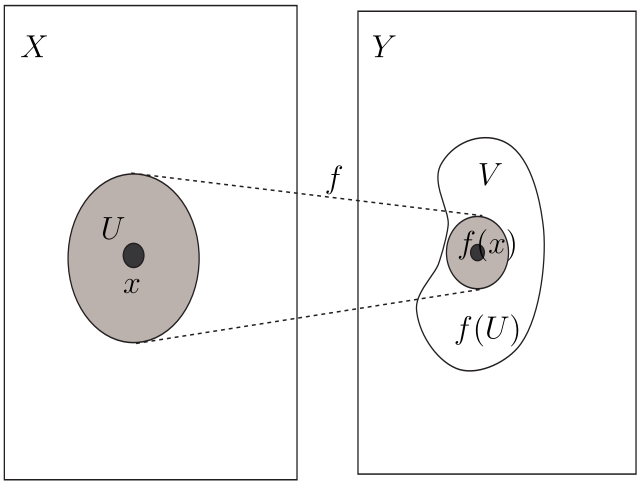


Figura 3.5: Denfinición de función continua

abiertos de Y. 1□

3.3. Funciones Continuas

Vamos a ver que, en el contexto de los espacios métricos, podemos definir el concepto de que una función sea continua.

Definición 3.16 *Sean (X, d), (Y, d') dos e.m, $f : X \to Y$ una función y $x \in X$. Diremos que f* es continua en *x si para todo entorno $V \in E(f(x))$, existe un entorno de $U \in E(x)$ tal que $f(U) \subset V$ (ver Figura 3.5). Diremos que $f : X \to Y$ es* continua *si es continua en cada punto de X.*

Algunas veces es más práctico emplear las siguientes equivalencias de la definición de función continua en un punto.

Proposición 3.17 *Sean (X, d), (Y, d') dos e.m, $f : X \to Y$ una función y $x \in X$. Entonces son equivalentes:*

i) f es continua en x.

ii) Para todo entorno V de $f(x)$, $f^{-1}(V)$ es un entorno de x.

iii) Para todo $\epsilon > 0$ *existe un* $\delta > 0$ *tal que si* $d(x, y) < \delta$ *entonces* $d'(f(x), f(y)) < \epsilon$.

Dem. i)⇒ii). Sea V un entorno de $f(x)$. En virtud de la definición, existe un entorno U de x tal que $f(U) \subset V$. Así tenemos que $U \subset f^{-1}(V)$ y como U es un entorno de x, $f^{-1}(V)$ también lo és.

ii)⇒iii). Sea $\epsilon > 0$. La bola $B(f(x), \epsilon)$ es un entorno de $f(x)$, así, por ii), el conjunto $U := f^{-1}(B(f(x), \epsilon))$ es un entorno de x. Entonces $x \in U^0$, lo que implica que existe un $\delta > 0$ tal que $B(x, \delta) \subset f^{-1}(B(f(x), \epsilon))$. Esta inclusión es otra forma de afirmar iii).

iii)⇒i). Sea V un entorno de $f(x)$. Entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $B(f(x), \epsilon) \subset V$. Por iii), existe un $\delta > 0$ tal que si $d(x, y) < \delta$ entonces $d(f(x), f(y)) < \epsilon$. Esto afirma que $f(B(x, \delta)) \subset B(f(x), \epsilon)$. Como $B(f(x), \epsilon) \subset V$, tenemos que $f(B(x, \delta)) \subset V$. Pero $B(x, \delta)$ es un entorno de x, de modo que hemos establecido que f es continua en x. 1□

Ejemplo 3.18 Sea $f : X \to Y$ una función entre e.m.. Si (X, d) es discreto entonces f es continua. Vale decir si el dominio de una función es un e.m. discreto la función es continua, no importa que función sea ni, que sea el codominio. En efecto, sea $x \in X$ y V un entorno de $f(x)$. Como todo conjunto en un e.m. es abierto, $f^{-1}(V)$ es un abierto, además contiene a x, de este modo es un entorno de x, lo que demuestra la condición ii) de la Proposición 3.17 en la página anterior.

Ejemplo 3.19 Sea (X, d) un e.m. e Y un subespacio de X. La *inyección natural* $j : Y \to X$, definida por $j(x) = x$ es una función continua, como se puede corroborar facilmente, quedando esta demostración como ejercicio.

Ejemplo 3.20 Las funciones constantes son continuas, es decir: sea (X, d) y (Z, d') dos e.m. y $f : X \to Z$ definida por $f(x) = a$, donde a es un punto de Z, entonces f es continua. La demostración queda como ejercicio.

Proposición 3.21 *Sea* $f : X \to Y$ *continua en* x. *Supongamos que* $x \in \overline{A}$ *entonces* $f(x) \in \overline{f(A)}$.

Dem. Sea V un entorno de $f(x)$, hay que demostrar que $V \cap f(A) \neq \emptyset$. Pero, como f es continua en x, $f^{-1}(V)$ es un entorno de x. Ahora, ya que $x \in \overline{A}$, tenemos que $f^{-1}(V) \cap A \neq \emptyset$. Sea, pues, $y \in f^{-1}(V) \cap A$. Así, tenemos que $f(y) \in V \cap f(A)$. Luego $V \cap f(A) \neq \emptyset$. 1□

Ahora vamos a dar una serie de equivalencias a que una función sea globalmente continua.

Teorema 3.22 *Sean (X, d) e (Y, d') e.m. y $f : X \to Y$ una función. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

a) f es continua.

b) Si $A \subset Y$ es un abierto de Y, entonces $f^{-1}(A)$ es abierto de X.

c) Si $A \subset Y$ es un cerrado de Y, entonces $f^{-1}(A)$ es un cerrado de X.

d) Para todo subconjunto $A \subset X$ se tiene que $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

Dem. La Proposición 3.21 en la página anterior establece a)⇒d). Veamos que d)⇒c). Sea A cerrado en Y y $A' = f^{-1}(A)$. Entonces

$$\begin{aligned} f(\overline{A'}) &\subset \overline{f(A')} && \text{Hipótesis} \\ &\subset \overline{A} && \text{definición de } A' \\ &= A && A \text{ es cerrado} \end{aligned} \tag{3.4}$$

Luego

$$\begin{aligned} \overline{A'} &\subset f^{-1}(f(\overline{A'})) && \text{Propiedad de la función imagen} \\ &\subset f^{-1}(A) && \text{Inclusión 3.4} \\ &= A' && \text{Definición de } A' \end{aligned}$$

Por otro lado, como es sabido, $A' \subset \overline{A'}$, luego $\overline{A'} = A'$, lo que implica que A' es cerrado.

Ahora veamos que c)⇒b). Sea A abierto en Y. Entonces A^c es cerrado en Y. Entonces, por c), $f^{-1}(A^c)$ es cerrado en X. Pero, $f^{-1}(A^c) = \big(f^{-1}(A)\big)^c$.

Por último veamos que b)⇒a). Sea $x \in X$ y V un entorno de $f(x)$, entonces $f(x) \in V^0$. Por hipótesis $f^{-1}(V^0)$ es un abierto que contiene a x. De este modo $f^{-1}(V^0)$ es un entorno de x. Como $f^{-1}(V^0) \subset f^{-1}(V)$ tenemos que $f^{-1}(V)$ es un entorno de x también. Lo que prueba que f es continua en x. 1□

La propiedad d) tiene una interpretación gráfica. Expresa el hecho que si un punto a está "pegado" a un conjunto A (en el sentido que $a \in \overline{A}$) entonces $f(a)$ está "pegado" a $f(A)$, ver Figura 3.6. Esto es así pues las funciones continuas

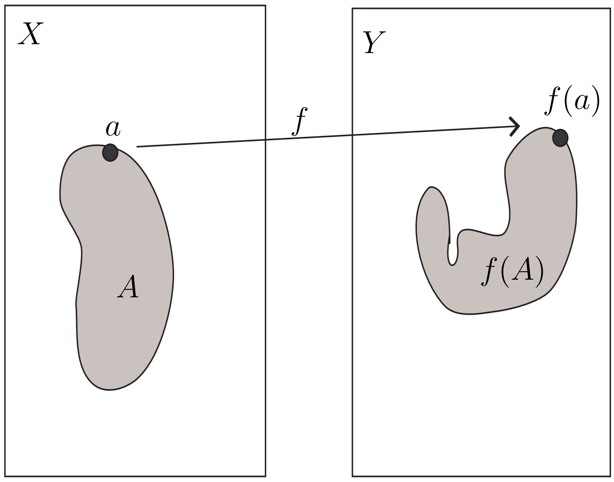


Figura 3.6: Interpretación del inciso d) del Teorema 3.22

aplican "puntos próximos" en "puntos próximos", y, al decir que $a \in \overline{A}$ estamos diciendo que a "está próximo" al conjunto A.

Ahora veamos que la composición de funciones continuas es continua.

Proposición 3.23 *Sean* (X, d), (Y, d'), (Z, d'') *tres e.m.,* $f : X \to Y$ *y* $g : Y \to Z$ *funciones tales que* f *es continua en* $a \in X$ *y* g *es continua en* $f(a) \in Y$*. Entonces* $g \circ f : X \to Z$ *es continua en* a*.*

Dem. Sea W un entorno de $g(f(a))$. Como g es continua en $f(a)$ entonces $V := g^{-1}(W)$ es un entorno de $f(a)$. Luego, como f es continua en a, $f^{-1}(V) = f^{-1}(g^{-1}(W))$ es un entorno de a. Esto implica la tesis, pues $f^{-1}(g^{-1}(W)) = (g \circ f)^{-1}(W)$. 1□

Corolario 3.24 *Sea* $f : X \to Y$ *una función continua en* a*. Supongamos que* $Z \subset X$ *es un subespacio con* $a \in Z$*. Entonces la restricción de* f *al subespacio* Z*, con la métrica de subespacio, es continua en* a*.*

Dem. La susodicha restricción es la composición de f con la inyección natural $j : Z \to X$. Por lo tanto el resultado sigue del hecho que la composición de funciones continuas es continua. 1□

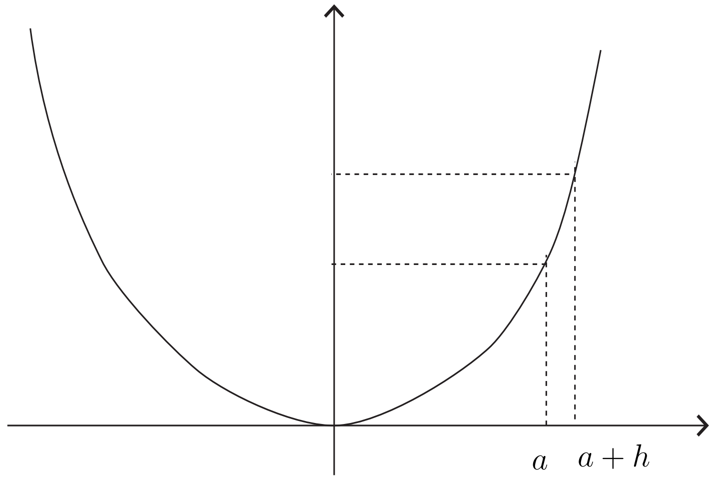


Figura 3.7: Función no uniformemente continua

Otro concepto importante es el de función uniformemente continua.

Definición 3.25 *Sea f una función entre dos e.m. (X, d) e (Y, d'). Diremos que f es* uniformemente continua *si para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $d'(f(x), f(y)) < \epsilon$, si $d(x, y) < \delta$.*

No es facil entender la diferencia de esta definición con la que expresa que f es continua en cada punto de X. La diferencia es que el δ de esta definición es el mismo para todos los puntos de X. Mientras que decir que f es continua en cada punto de X implicaría, en principio, la existencia de un delta que puede depender del punto. Los siguientes ejemplos aclararan más esta definición.

Ejemplo 3.26 Las funciones constantes son uniformemente continuas. Dado un $\epsilon > 0$ podemos tomar cualquier valor de δ que seguramente cumplirá la definición.

Ejemplo 3.27 Una función puede ser continua en todo punto y, sin embargo, no ser uniformemente continua,, como muestra el siguiente ejemplo: Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$. Esta f es continua en todo punto y no uniformemente continua. En efecto, la diferencia $(a + h)^2 - a^2 = 2ah + h^2$ tiende a $+\infty$ si a tiende a $+\infty$. De modo que asegurar que $h < \delta$ no implica que las imagenes de $a + h$ y a esten cerca, no importando, para ello, cuan chico sea δ. Ver Figura 3.7.

Si una función es uniformemente continua es continua en cada punto. La demostración de este hecho es bastante directa y simple.

Ejemplo 3.28 Sea (X, d) un e.m. y $A \subset X$. La función:

$$\begin{aligned} f : & X \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longmapsto d(x, A). \end{aligned}$$

es uniformemente continua. Esto es consecuencia de la desigualdad probada en el Ejercicio 2.3 en la página 52, a saber:

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y).$$

3.4. Homeomorfismos e isometrías

Definición 3.29 *Sean (X, d), (Y, d') dos e.m. y $f : X \to Y$ una función* biyectiva*. Diremos que f es un* homeomorfismo *si f y f^{-1} son ambas continuas. Dos e.m. tales que exista un homeomorfismo entre ellos se denominaran homeomorfos.*

Ejemplo 3.30 Dos intervalos abiertos cualesquiera de $\mathbb{R}$ son homeomorfos, uno puede construir una función lineal, que son homeomorfismos, que aplique uno en el otro. Mientras que un intervalos abierto cualquiera (a, b) es homeomorfo a $\mathbb{R}$. Un homeomorfismo entre ambos es la función:

$$\begin{aligned} f : & (a, b) \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longmapsto \tan\left(\pi \frac{2x - (a + b)}{2(b - a)}\right) \end{aligned}$$

Ejemplo 3.31 Un intervalo cerrado ya no es homeomorfo a $\mathbb{R}$, esto lo demostraremos más adelante. No obstante podemos definir la *recta real extendida* que será homeomorfa a los intervalos cerrados. Más precisamente, sea $f : \mathbb{R} \to (-1, 1)$ la función $f(x) = x/(1 + |x|)$. No es difícil demostrar que f es biyectiva, de hecho analizando esta función con las herramientas aprendidas en Cálculo I vemos que tiene la forma de la Figura 3.8 en la página siguiente. Definamos el conjunto $\overline{\mathbb{R}}$, al que llamaremos *recta extendida*, como la unión de $\mathbb{R}$ con dos nuevos elementos, a los que llamaremos $-\infty$ y $+\infty$. Ahora extendemos f de $\overline{\mathbb{R}}$ al $[-1, 1]$ por $f(+\infty) = 1$ y $f(-\infty) = -1$. Definimos la función $d : \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ por:

$$d(x, y) = |f(x) - f(y)|. \tag{3.5}$$

La función d es una métrica en $\overline{\mathbb{R}}$ (la sencilla demostración la desarrollaremos en clase). Con esta métrica el conjunto $\mathbb{R}$ es acotado, de hecho $\delta(\mathbb{R}) = 2$. Además la función f resulta un homeomorfismo de $\overline{\mathbb{R}}$ en $[-1, 1]$ (este último con la métrica del módulo). En efecto, en virtud de la ecuación 3.5, dado $\epsilon > 0$ basta elegir $\delta = \epsilon$

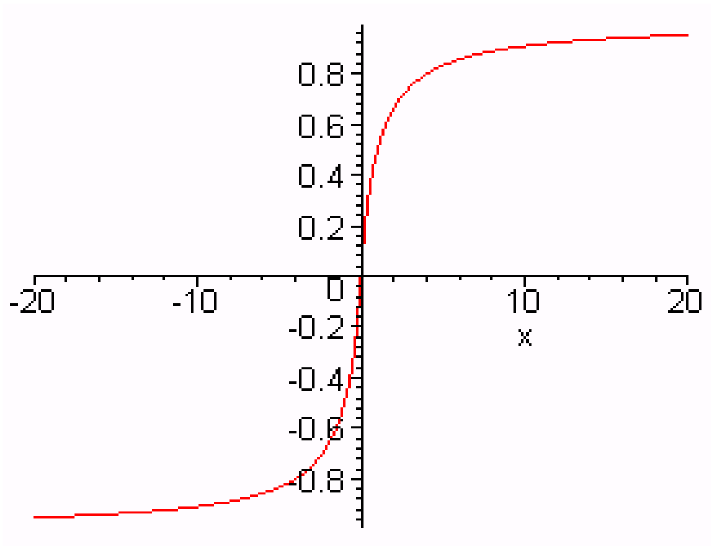


Figura 3.8: Grafico de la función $f(x) = x/(1+|x|)$ según el programa Maple

para verificar que f es uniformemente continua. Si llamamos g a la inversa de f y reemplazamos x e y en 3.5 en la página anterior por $g(t)$ y $g(s)$ respectivamente, comprobamos que

$$d(g(t), g(s)) = |t - s|. \tag{3.6}$$

Lo cual implica que g es uniformemente continua, por razones similares a las que invocamos para f. En particular f y su inversa son continuas, de modo que f es un homeomorfismo.

En el ejemplo anterior las funciones f y g tienen una propiedad más fuerte que la de ser homeomorfismos, esta propiedad la definimos a continuación.

Definición 3.32 *Sean* (X, d), (Y, d') *dos e.m. y* $f : X \to Y$ *una función biyectiva. Se dirá que* f *es una* isometría *si para todos* x *e* y *en* X *se tiene que:*

$$d'(f(x), f(y)) = d(x, y).$$

Si, entre dos e.m. existe una isometría diremos que los espacios son isométricos.

Una isometría es un homeomorfismo, la idea central de la demostración de esta afirmación está en el ejemplo anterior. Igual que en aquel ejemplo, hay que demostrar que la inversa de una isometría es, a la vez, una isometría.

Proposición 3.33 *Sean (X, d), (Y, d') dos e.m. y $f : X \to Y$ una función biyectiva con inversa g. Entonces son equivalentes:*

i) f es un homeomorfismo.

ii) $A \subset X$ es abierto si, y solo si, $f(A)$ es abierto.

Dem. i)$\Rightarrow$ii). Sea $A \subset X$. Supongamos, en primer lugar, que A es abierto. Como $g : Y \to X$ es continua, $g^{-1}(A) = f(A)$ es abierto. Supongamos, ahora, que $f(A)$ es abierto. Como f es continua, $f^{-1}(f(A)) = g(f(A)) = A$ es abierto. Esto concluye la demostración de la primera implicación.

ii)$\Rightarrow$i). Tenemos que demostrar que f y g son continuas. Veamos, primero, que f es continua. Sea B un abierto de Y, hay que demostrar que $f^{-1}(B) = g(B)$ es un abierto de X. Pero $B = f(g(B))$ y B es abierto, entonces, por ii), $g(B)$ es abierto. Veamos, ahora, que g es continua. Sea A abierto en X. Luego, por ii), $g^{-1}(A) = f(A)$ es abierto en Y, por lo cual, g es continua. 1□

Este teorema nos dice que si dos espacios son homeomorfos, entonces existe una correspondencia de los abiertos de uno con los del otro espacio.

El conjunto formado por todos los conjuntos abiertos, se denomina *topología*. Brevemente, digamos que un *espacio topológico* es un par (X, τ), donde $\tau \subset \mathcal{P}(X)$[1], que satisface los siguientes axiomas:

1) $\emptyset, X \in \tau$

2) Si $G_i \in \tau$, para $i \in I$, entonces $\bigcup_{i\in I} G_i \in \tau$.

3) Si $G_i \in \tau$, para $i \in I$, e I es finito, entonces $\bigcap_{i\in I} G_i \in \tau$.

En un espacio topológico uno puede construir la nociones, que hemos construido para e.m., por ejemplo conjunto cerrado, interior, clausura, entorno, función continua y espacio separable. Por tanto, estas propiedades se denominan topológicas. Las propiedades topológicas son invariantes por homeomorfismos, por ejemplo si un espacio es separable, cualquier homeomorfo a él también lo es. Algunas propiedades no son topológicas, por ejemplo que una función sea uniformemente continua, puesto que para definir este concepto necesitamos de una métrica.

Un mismo conjunto X, puede tener dos métricas distintas, por ejemplo en $\mathbb{R}$ tenemos la métrica euclidea y la discreta. Podemos plantearnos que estas métricas den origen a una misma topología, si esto sucede diremos que las dos *métricas son equivalentes*.

[1]$\mathcal{P}(X)$ es el conjunto de partes de X, es decir τ es un conjunto cuyos elementos son subconjuntos de X

3.5. Ejercicios

Ejercicio 3.1 Sea (X, d) un e.m. y $A \subset X$. Demostrar que $A \cup \text{Ext}(A)$ es denso en A. ¿Será cierto que $A^0 \cup \text{Ext}(A)$ es, siempre, denso?

Ejercicio 3.2 Demostrar que $\mathbb{I} := \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ es separable. Exhibir un conjunto denso numerable.

Ejercicio 3.3 Sea $A \subset \mathbb{R}$. Definamos $B := \{x \in A | \exists y > x : (x, y) \cap A = \emptyset\}$. Demostrar que B es a lo sumo numerable.

Ejercicio 3.4 Sea (X, d) un e.m. y $A \subset X$. Diremos que $a \in A$ es un *punto aislado* de A si existe un entorno U de a tal que $U \cap A = \{a\}$. En la Figura 3.9 el conjunto A consiste de la parte sombreada y el punto a, este último es un punto aislado, pues el entorno U satisface la definición.

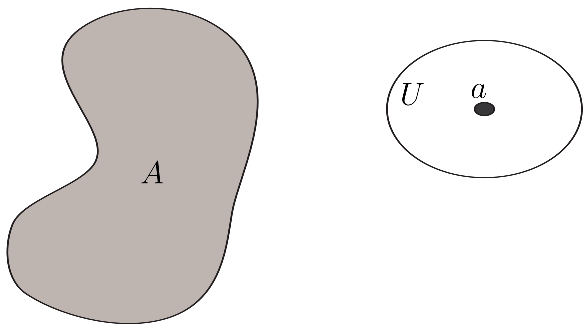


Figura 3.9: Punto aislado

Por otra parte, un punto $a \in X$ es un *punto de acumulación* de A si, para todo entorno U de a se tiene que $(U - \{a\}) \cap A \neq \emptyset$.

Sea A un conjunto, B el conjunto de puntos de acumulación de A y C el conjunto de puntos aislados de A. Demostrar los siguientes items:

a) B es cerrado, y $\overline{A} = B \cup C$.

b) Si X es separable entonces C es numerable.

Ejercicio 3.5 Demostrar que (X, d) es separable si y solo si todo cubrimiento de X por abiertos[2] tiene un subcubrimiento a lo sumo numerable[3]. *Ayuda:* Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ un cubrimiento de X y $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base numerable. Para cada $n \in \mathbb{N}$ elegir un i_n tal que $G_n \subset U_{i_n}$. Luego la familia $\{U_{i_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ será un cubrimiento.

Ejercicio 3.6 Sea (X, d) un e.m., $A \subset X$ y $B \subset A$. Demostrar que $B^0 \subset B^0_A$. Dar un ejemplo donde $B^0 \neq B^0_A$.

Ejercicio 3.7 Sea (X, d) un e.m., B y C subconjuntos de X y $A \subset C \cap B$. Demostrar que A es abierto (cerrado) en $B \cup C$ si, y solo si, es abierto (respectivamente cerrado) en B y C.

Ejercicio 3.8 Sea $\{G_i\}_{i\in I}$ un cubrimiento por abiertos de un e.m. X. Demostrar que $F \subset X$ es cerrado si, y solo si, $F \cap G_i$ es cerrado para todo $i \in I$.

Ejercicio 3.9 Dar un ejemplo de un subespacio A de $\mathbb{R}^2$ tal que exista una bola abierta que es un conjunto cerrado, pero no una bola cerrada, y una bola cerrada que es un conjunto abierto, pero no una bola abierta. Ayuda: Considerar A formado por los puntos $(0, 1)$, $(0, -1)$ y por un subconjunto apropiado del eje x.

Ejercicio 3.10 Sean (X, d), (Y, d') e.m., A y B subconjuntos de X tales que $A \cup B = X$.

i) Sea $f : X \to Y$ una función tal que $f_{|A}$[4] y $f_{|B}$ son ambas continuas en $x \in A \cap B$, probar que f es continua en x.

ii) Dar un ejemplo de función tal que $f_{|A}$, $f_{|B}$ y $f_{|A\cap B}$sean continuas pero f no lo sea.

Ejercicio 3.11 Sean (X, d), (Y, d') e.m. y $f : X \to Y$ una función. Demostrar que son equivalentes:

i) f es continua.

ii) Para todo $B \subset Y$: $f^{-1}(B^0) \subset \left[f^{-1}(B)\right]^0$.

iii) Para todo $B \subset Y$: $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$.

Dar un ejemplo de función continua donde $\overline{f^{-1}(B)} \neq f^{-1}(\overline{B})$.

[2] Un cubrimiento por abiertos de X es una familia de conjuntos abiertos $\{G_i\}_{i\in I}$ tal que $X = \bigcup_{i\in I} G_i$.

[3] Es decir existe una subfamilia a lo sumo numerable de la familia $\{G_i\}$ que también es un cubrimiento.

[4] $f_{|A}$denota la restricción de f al conjunto A

Ejercicio 3.12 Sean (X, d), (Y, d') e.m. y $f, g : X \to Y$ funciones continuas. Demostrar que:

i) El conjunto $\{x \in X | f(x) = g(x)\}$ es cerrado.

ii) Si f y g coinciden en un conjunto denso entonces son iguales.

Ejercicio 3.13 Sean (X, d), (Y, d') e.m.. Demostrar que son equivalentes

i) Toda función $f : X \to Y$ es continua.

ii) Todo punto de X es aislado[5].

Ejercicio 3.14 Sean (X, d), (Y, d') e.m. y $f : X \to Y$ una función biyectiva. Demostrar que f es un homeomorfismo si, y solo si, para todo $A \subset X$ tenemos que $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$.

Ejercicio 3.15 Demostrar:

i) que las métricas sobre $\mathbb{R}^n$ definidas en los Ejemplos 2.3 en la página 38, 2.4 en la página 38 y 2.5 en la página 38 son todas equivalentes.

ii) que las distancias d , d_1 y d_2 del Ejercicio 2.4 en la página 52 son equivalentes.

iii) Dados dos topologías τ_1 y τ_2 sobre el mismo espacio X decimos que τ_1 es más fina que τ_2 si $\tau_2 \subset \tau_1$. Demostrar que, sobre $C([0, 1])$, la topología que genera la métrica del Ejemplo 2.7 en la página 39 es más fina que la topología que genera la métrica del Ejemplo 2.7 en la página 39 es más fina que la del Ejemplo 2.8 en la página 39.

[5] Por abuso de lenguaje los e.m. con esta propiedad se denominan discretos

Capítulo 4

Completitud

Una propiedad importante de los espacios métricos es la completitud. En esta unidad introducimos esta propiedad e indagamos algunas de sus consecuencias.

4.1. Sucesiones

Definición 4.1 *Una en un e.m.* (X, d) *es una función* $f : \mathbb{N} \to X$.

Esta el la definición formal de sucesión, no obstante cuando se trabaja con sucesiones no se hace alusión explícita a la función f de la definición. Normalmente una sucesión se introduce con el símbolo $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ o, brevemente, $\{a_n\}$, asumiendo que los índices n son naturales. Claro está que, ímplicitamente, estos símbolos conllevan la función f. Esta es la función tal que $f(n) = a_n$.

Definición 4.2 *Sea* $\{a_n\}$ *una sucesión en el e.m.* (X, d)*. Diremos que esta sucesión* converge *al punto* $a \in X$ *(denotaremos esto por* $a_n \to a$*) si, y solo si, para todo entorno* U *de* a *existe un* $n_0 = n_0(U)$ *tal que cuando* $n \geq n_0$ *se tiene que* $a_n \in U$*. Sinteticamente, dado cualquier entorno, salvo posiblemente una cantidad finita de términos de la sucesión todos los términos restantes están incluídos en el entorno, ver la Figura 4.1 en la página siguiente*

La convergencia es una propiedad topológica. Confiamos en que el alumno tiene muchos ejemplos de sucesiones convergentes en $\mathbb{R}$, esto fué visto en Cálculo I. Vamos a ver que sucede en otros espacios métricos.

Ejemplo 4.3 En un e.m. discreto (X, d) si una sucesión $\{a_n\}$ converge al punto a, entonces a partir de un n_0 en adelante se tiene que $a_n = a_{n_0}$. En efecto, esto es consecuencia de considerar el siguiente entorno: $U = B(a, 1/2) = \{a\}$.

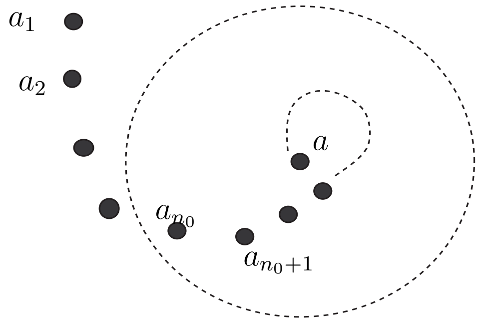


Figura 4.1: Definición 4.2 en la página anterior

Ejemplo 4.4 Consideremos el e.m. $(C([0,1]), d)$, donde $C([0,1])$ representa al conjunto de funciones continuas $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ y d es la métrica definida en el Ejemplo 2.8 en la página 39. Consideremos las funciones definidas por:

$$f(x) = \begin{cases} nx, & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n}; \\ 2 - nx, & \text{si } \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n}. \\ 0, & \text{si } \frac{2}{n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

En la Figura 4.2 en la página siguiente, se pueden observar los gráficos de estas funciones. Es un ejercicio de Cálculo I demostrar que $f_n \to 0$ con la métrica propuesta. Sin embargo, sobre $C([0,1])$ tenemos definida otra métrica, a saber: la del Ejemplo 2.7 en la página 39. Con esta métrica la sucesión f_n no converge a ninguna función.

Es posible caracterizar algunos de los conceptos, que ya hemos visto, en términos de sucesiones. Por ejemplo, el concepto de clausura y continuidad.

Proposición 4.5 *Sea (X, d) un e.m. y $A \subset X$. Entonces $a \in \overline{A}$ si, y solo si, existe una sucesion $a_n \in A$ tal que $a_n \to a$.*

Dem. Supongamos que $a \in \overline{A}$, entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $B(a, 1/n) \cap A \neq \emptyset$. Sea, pues, $a_n \in B(a, 1/n) \cap A$. Se puede ver, sin dificultad, que $a_n \to a$. Recíprocamente, supongamos que existe la sucesión $\{a_n\}$. Si U es un entorno arbitrario de a, entonces, puesto que $a \in \overline{A}$, tenemos que, para ciertos n, $a_n \in U$, luego, estos a_n, estan en la intersección de U con A, lo que implica que esta es no vacía. Eso prueba que $a \in \overline{A}$. 1□

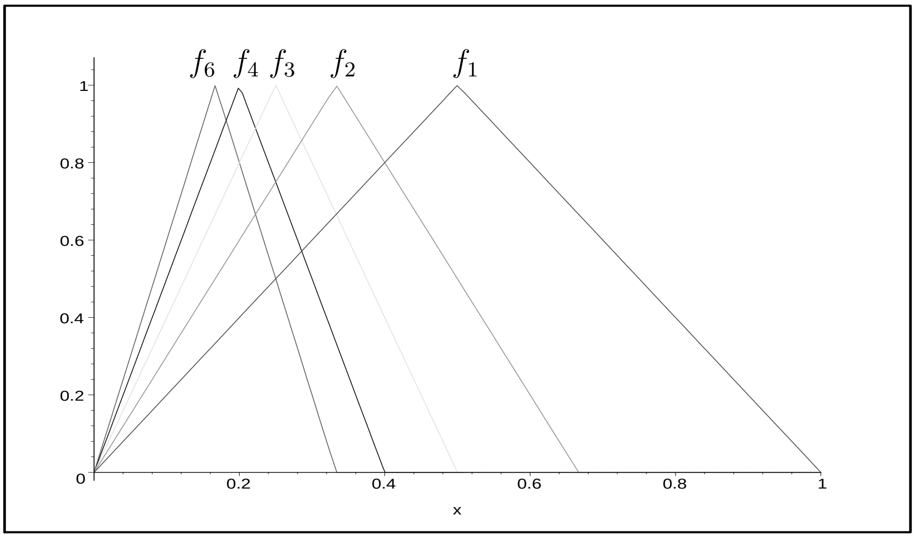


Figura 4.2: Funciones del Ejemplo 4.4

4.2. Sucesiones de Cauchy, espacios métricos completos

Definición 4.6 *i) Dada una sucesión* $\{a_n\}$ *en un e.m.* (X, d)*, diremos que* $\{a_n\}$ *es una* sucesión de Cauchy *si: para todo* $\epsilon > 0$ *existe un* $n_0 = n_0(\epsilon)$[1] *tal que para* $n, m \geq n_0$ *tenemos que* $d(a_n, a_m) < \epsilon$*. En otras palabras, para valores grandes de* n *los términos* a_n *están cerca entre si.*

ii) Un e.m. se dirá completo *si, y solo si, todo sucesión de Cauchy en él es convergente.*

Como acabamos de decir, en un e.m. completo toda sucesión de Cauchy converge. La reciproca de esta afirmación es siempre cierta, es decir en cualquier e.m. toda sucesión convergente es de Cauchy. En efecto, sea $\{a_n\}$ una sucesión convergente en (X, d) al punto a y sea $\epsilon > 0$. Existe un $N = N(\epsilon)$ tal que para $n > N$ se tiene que

$$d(a_n, a) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Luego, para $n, m > N$ y por la desigualdad triágular, tenemos que

$$d(a_n, a_m) \leq d(a_n, a) + d(a, a_m) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

[1] Con $n_0 = n_0(\epsilon)$ queremos decir que el número n_0 depende de ϵ pero que normalmente no usaremos la notación $n_0(\epsilon)$ sino, simplemente, n_0

Esto prueba que la sucesión es de Cauchy, como queríamos.

Un ejemplo importante de e.m. completo es $\mathbb{R}$. Esta propiedad de $\mathbb{R}$ es enunciada, prácticamente, como un axióma. Hablaremos, mas no sea brevemente, de los "fundamentos" de los números reales en el apéndice al final de esta unidad, ver Sección 4.3 en la página 78. Sabiendo que $\mathbb{R}$ con la métrica del módulo es completo podemos demostrar la completitud de otros e.m., como veremos más abajo. Antes de ver esto demostremos que toda sucesión convergente es de Cauchy

Ejemplo 4.7 $\mathbb{R}^n$ con la métrica euclidea es un e.m. completo.[2] Vamos a demostrar esta afirmación. Denotemos por letras en negritas $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$, etc n-uplas en $\mathbb{R}^n$, es decir $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ con $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$. Consideremos una sucesión de Cauchy $\{\mathbf{x}_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}^n$. Esto nos determina n sucesiones en $\mathbb{R}$, puesto que $\mathbf{x}_j = (x_1^j, \ldots, x_n^j)$. Veamos que, para cada i, $\{x_i^j\}_{j\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$. Se tiene que:

$$|x_i^j - x_i^k| \leq \sqrt{\sum_{s=1}^{n} (x_s^j - x_s^k)^2} \leq d(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_k).$$

Como el último miembro se puede hacer tan chico como queramos, puesto que $\{\mathbf{x}_j\}$ es de Cauchy, podemos conseguir lo mismo para el primer miembro, esto es $\{x_i^j\}$ es de Cauchy. Así, como $\mathbb{R}$ es completo, existe un x_i, para $i = 1, \ldots, n$ tal que $x_i^j \to x_i$, para $j \to \infty$. Definamos, pues, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ y veamos que $\mathbf{x}_j \to \mathbf{x}$. Sea $\epsilon > 0$, para cada $i = 1, \ldots, n$ podemos hallar un $j(\epsilon, i)$, es decir j depende de ϵ y de i, tal que para $j \geq j(\epsilon, i)$ tenemos que:

$$|x_i^j - x_i| < \frac{\epsilon}{\sqrt{n}}.$$

Así, si:

$$j \geq \max_{1\leq i\leq n} j(\epsilon, i)$$

entonces

$$d(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i^j - x_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{\epsilon^2}{n}} = \epsilon,$$

lo que demuestra que $\mathbf{x}_j \to \mathbf{x}$, como queríamos.

Ejemplo 4.8 El e.m. $(C([0,1]), d)$, con d como en el Ejemplo 4.4 en la página 74, no es completo. Consideremos las siguientes funciones, para $n/geq2$:

[2] Observar que, en virtud del Ejercicio 4.10 en la página 81 $\mathbb{R}^n$ con cualquier métrica equivalente a la euclidea también resultará completo

$$f_n(x) := \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}; \\ -nx + \frac{n+2}{2n}, & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{n}; \\ 0, & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

en la Figura 4.3 graficamos estas funciones.

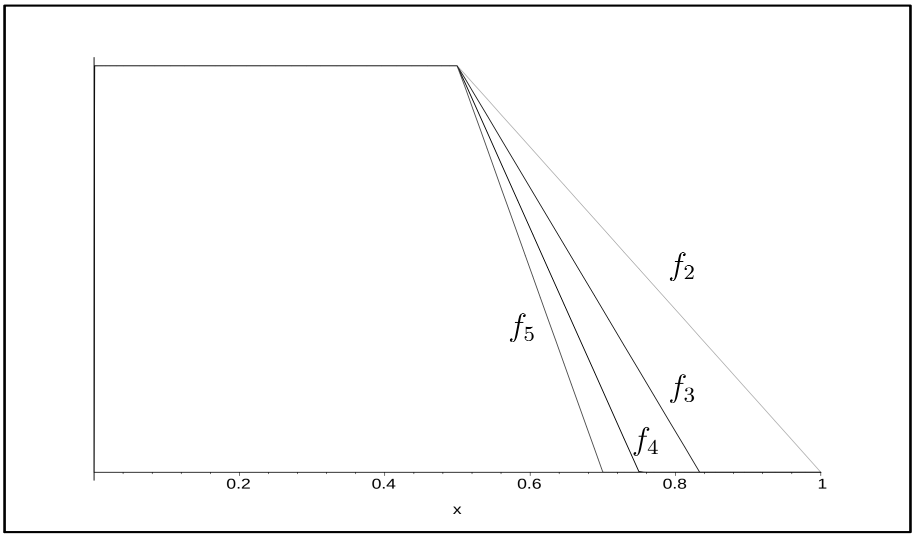


Figura 4.3: Funciones del Ejemplo 4.8

No es dificil convencerse que esta es una sucesi/ón de Cauchy, puesto que, para $j, k/geqn$ tenemos que:

$$d(f_j, f_k) = \frac{1}{2}|\frac{1}{j} - \frac{1}{k}| \leq \frac{1}{n} \to 0 \quad \text{cuando} \quad n \to \infty.$$

Sin embargo estas funciones no convergen a ninguna función en $C([0,1])$. Para ver esto, supongamos que, por el contrario, existe $f \in C([0,1])$ tal que $f_n \to f$. Vamos a demostrar que, necesariamente, f debe valer 1 en el intervalo $[0, 1/2)$ y debe valer 0 en el intervalo $(1/2, 1)$, por tal motivo no podría ser continua contradiciendo las hipótesis. Vamos a demostrar solo que f es 0 en $(1/2, 1)$, la otra parte es similar y aun más facil. Supongamos que exista $1/2 < a < 1$ tal que $f(a) \neq 0$, podemos suponer que $f(a) > 0$. Elijamos $\delta_1 > 0$ suficientemente pequeño de modo que $1/2 < a - \delta_1$ y elijamos $\delta_2 > 0$ suficientemente pequeño de modo tal que $f(x) > f(a)/2$ para $x \in (a - \delta_2, a + \delta + 2)$ (esto es posible pues f es continua en a). Ahora, el número $\delta := \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$ satisface las dos propiedades anteriores simultaneamente. Podemos encontrar un n_0 suficientemente grande para que $1/2 + 1/n < a - \delta$, cuando $n > n_0$, esto implica que f_n es idénticamente cero en el intervalo $(a - \delta, a + \delta)$, ver la Figura 4.4 en la página siguiente. Juntando todas

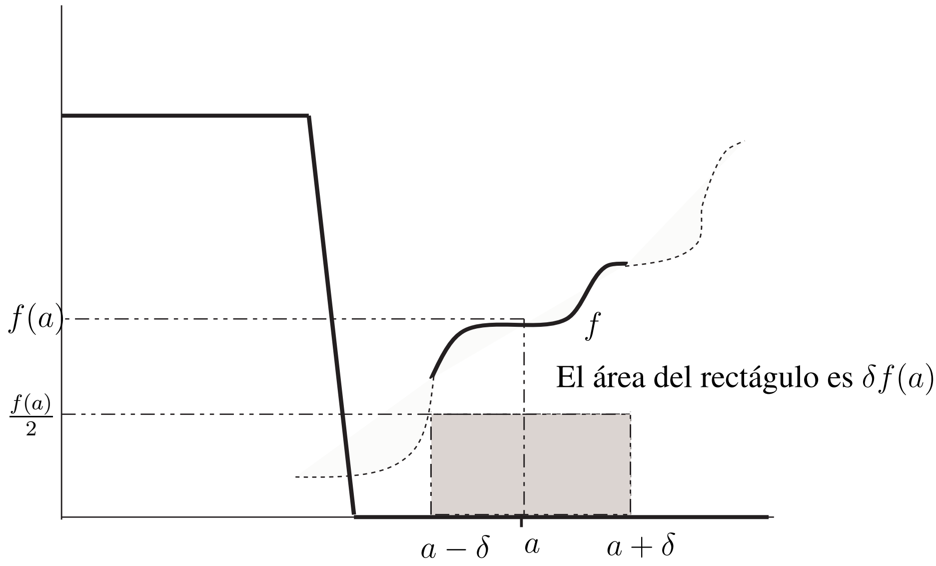


Figura 4.4: Construcción de la demostración en el Ejemplo 4.8

las propiedades vistas en el párrafo anterior, deducimos que, para $n > n_0$,

$$d(f_n, f) = \int_0^1 |f_n - f|dx \geq \int_{a-\delta}^{a+\delta} |f_n - f|dx \geq \delta f(a) > 0.$$

De modo que f_n no converge a f, contradiciendo nuestras suposiciones.

Ahora veremos que subespacios, de un e.m. completo, son, a su vez, completos.

Proposición 4.9 *Sea (X, d) un e.m. completo e $Y \subset X$. Son equivalentes:*

i) (Y, d) *es un subespacio completo.*

ii) Y *es cerrado en* X.

4.3. Apéndice

Hay dos ópticas para introducir los numeros reales, las denominaremos axiomática y constructiva. Describimos a continuación, y someramente, cada una de ellas.

Se pueden introducir los números reales a travez de un sistema axiomático. Como es conocido, un sistema axiomático consta de *términos primitivos*, que son, por decirlo así, los objetos iniciales, a travez de los cuales se construyen todos los demás objetos de la teoría. Pueden ser términos primitivos: conjuntos, operaciones, relaciones, etc. Es importante aclarar que los términos primitivos son objetos puramente hipotéticos, es decir no se afirma la existencia de estos objetos. Los términos primitivos para los números reales son: un conjunto, comunmente denotado por $\mathbb{R}$, dos funciones de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, usualmente denotadas por $+$ y .[3] y una relación $\leq$. Para completar el sistema axiomático, debemos dar los axiomas, estos son propiedades que se postulan para los términos primitivos. Los axiomas para los números reales los podemos dividir en cuatro grupos:

1) $\mathbb{R}$ es un cuerpo, es decir:

   1.1) $x + (y + z) = (x + y) + z$;

   1.2) $x + y = y + x$;

   1.3) Existe un elemento $0 \in \mathbb{R}$ tal que $x + 0 = x$;

   1.4) Para cada $x \in \mathbb{R}$ existe un $y \in \mathbb{R}$ tal que $x + y = 0$;

   1.5) $x(yz) = (xy)z$;

   1.6) $xy = yx$;

   1.7) Existe un elemento $1 \in \mathbb{R}$ tal que $1.x = x$;

   1.8) Para cada elemento $0 \neq x \in \mathbb{R}$ existe un elemento $y \in \mathbb{R}$ tal que $xy = 1$;

   1.9) $x(y + z) = xy + xz$;

2) $\mathbb{R}$ es un cuerpo ordenado.

   2.1) Si $x \leq y$ e $y \leq z$ entonces $x \leq z$;

   2.2) Si $x \leq y$ e $y \leq x$ entonces $x = y$;

   2.3) Si x e y pertenecen a $\mathbb{R}$ entonces $x \leq y$ o $y \leq x$;

   2.4) Si $x \leq y$ entonces $x + z \leq y + z$;

   2.5) Si $0 \leq x$ e $0 \leq y$ entonces $0 \leq xy$;

   Dentro de $\mathbb{R}$ se puede construir un conjunto, denotado por $\mathbb{Z}$. que corresponde a los enteros.

[3] Estas operaciones se denominan suma y multiplicación, usualmente se omite el signo de multiplicación

3) $\mathbb{R}$ es un cuerpo ordenado y arquimedeano. Esto es: para todo $y \geq 0$ y todo $x > 0$ existe un entero n tal que $nx \geq y$.

   Por último tenemos el axioma de completitud. Hay varias formulaciones equivalentes para este axioma, ver el Ejercicio 4.12 en la página 82 nosotros elegimos la siguiente:

4) Todo subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ acotado superiormente, tiene supremo, es decir existe un $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que: 1) α es una cota superior de A, esto es $\alpha \geq x$ para todo $x \in A$ y 2) α es la más chica de las cotas superiores, esto es si β es cota superior entonces $\alpha \leq \beta$. Observar que no es necesario que $\alpha \in A$.

Hay tres propiedades que serían deseables que un sistema axiomático tuviera: 1) *coherencia*, es decir que los axiomas no se "contradigan" 2)*independencia*, entendiendo por esto que los axiomas no sean redundantes, es decir que ninguno de ellos se obtenga a partir de los demás y 3) *completitud*[4], esto es que toda afirmación de la teoría o su negación se pueda deducir.

Destacamos, nuevamente, que los objetos postulados como términos primitivos en el sistema axiomatico y que satisfagan los axiomas podrían no existir. En particular esto ocurre si el sistema axiomático es contradictorio. Obviamente, en ese caso, nuestro sístema axiomático no serviría de mucho. Esto no sucede para el sístema de axiomas para los números reales. Este sístema tiene un modelo, es decir podemos encontrar un conjunto $\mathbb{R}$ y las funciones y relación postuladas de modo tal que se satisfagan todos los axiomas. Esto nos lleva a la otra óptica de introducción de los números reales, la que denominamos constructiva. Varios modelos fueron propuestos por diversos matemáticos, en particular Dedekind y Cantor. Estos modelos son construidos a partir de los números racionales.[5] A Dedekind le debemos el método de cortaduras y a Cantor el método de sucesiones fundamentales de Cauchy.

4.4. Ejercicios

Ejercicio 4.1 Consideremos el conjunto $C([0,1])$ donde tenemos definidas las dos métricas d_1 y d_2 de los Ejemplos 2.5 en la página 39 y 2.6 en la página 39 respectivamente. Determinar si las siguientes sucesiones son convergentes con estas métricas y si son de Cauchy.

i) $f_n(x) := \frac{1}{n}\text{sen}(nx)$.

[4] No confundir este concepto con el de completitud de un e.m.

[5] Es bueno decir que también es posible construir los números racionales a partir de los naturales y estos a partir de la Teoría de Conjuntos; no obstante esto se aparta considerablemente de los objetivos de esta materia

ii) $f_n(x) := x^n$.

iii) $f_n(x) := nx^n$.

Ejercicio 4.2 Con la misma notación del ejercicio anterior demostrar que si $f_n \to f$ con la métrica d_1 entonces lo mismo ocurre con la métrica d_2.

Ejercicio 4.3 Sean (X, d) e (Y, d') dos e.m. y $f : X \to Y$ un homeomorfismo. Demostrar que la sucesión $\{a_n\}$ es convergente en X si, y solo si, $f(a_n)$ es convergente en Y.

Ejercicio 4.4 Sea (X, d) un e.m., $a \in A$ y $A \subset X$. Demostrar que existe un sucesión $\{a_n\}$, con $a_n \in A$, para todo n, y:

$$\lim_{n\to\infty} d(a, a_n) = d(a, A).$$

Ejercicio 4.5 Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto acotado superiormente. Demostrar que existe una sucesión $\{a_n\}$, con $a_n \in A$, para todo n, y además:

$$\sup A = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Ejercicio 4.6 Demostrar que $(C([0, 1]), d_1)$, con d_1 como en el Ejercicio 4.1, es un e.m. completo.

Ejercicio 4.7 Demostrar que un e.m. con una cantidad finita de elementos es completo.

Ejercicio 4.8 Demostrar que una sucesión de Cauchy es acotada.

Ejercicio 4.9 Sea $\{a_n\}$ una sucesión en un e.m. (X, d), demostrar que cualquierqa de las dos condiciones implica que $\{a_n\}$ es de Cauchy.

i) $d(a_n, a_{n+1}) \leq \alpha^n$, con $0 < \alpha < 1$.

ii) La siguiente serie es convergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} d(a_n, a_{n+1}).$$

Ejercicio 4.10 Sean d y d' dos métricas uniformemente equivalentes sobre el mismo espacio X. Demostrar que (X, d) es completo si, y solo si, (X, d') es completo.

Ejercicio 4.11 Sea $f : X \to Y$ una función uniformemente continua entre dos e.m.. Demostrar que si $\{a_n\}$ es de Cauchy en X entonces $\{f(a_n)\}$ es de Cauchy en Y. Dar un contraejemplo a la afirmación anterior suponiendo, solo, que f es continua. *Ayuda:* Considerar la recta extendida.

Ejercicio 4.12 Demostrar que el axioma de completitud de $\mathbb{R}$ dado, se puede sustituír por cualquiera de los siguientes:

i) Toda sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$ converge.

ii) *Principio de Encajes de Intervalos*. Sea $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de intervalos cerrados tales que $I_{n+1} \subset I_n$, para todo n, entonces $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \neq \emptyset$.

Capítulo 5

Compacidad

En esta unidad desarrollaremos el concepto de conjunto compacto y otros relacionados. Los conjuntos compactos tienen la propiedad de poder ser “aproximados” por conjuntos finitos, y por ello heredan algunas propiedades de estos.

5.1. Definición de conjuntos compactos y precompactos

Empezaremos por introducir lo que denominaremos conjuntos .

Definición 5.1 *Diremos que un conjunto A de un e.m. (X, d) es precompacto si para cada $\epsilon > 0$ existe una cantidad finita de conjuntos de diámetro menor que ϵ cuya unión contiene a A. En otras palabras existen conjuntos A_i, $i = 1, ..., n$, con $\delta(A_i) < \epsilon$ que satisfacen:*

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i.$$

Veamos algunos ejemplos de conjuntos precompactos y de conjuntos que no lo son.

Ejemplo 5.2 Cualquier intervalo acotado de $\mathbb{R}$ es precompacto. Para justificar esta aseveración, tomemos $\epsilon > 0$ y un intervalo cualquiera de extremos a y b. Elijamos n suficientemente grande para que $1/n < \epsilon$. Entonces los conjuntos

$$I_k := [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$$

satisfacen la definición.

Ejemplo 5.3 Cualquier conjunto acotado en el espacio euclideo $\mathbb{R}^n$ es precompacto. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto acotado. Por ser A acotado, está contenido en un cubo de la forma $C := [-m, m] \times \cdots \times [-m, m] = [-m, m]^n$. En virtud del Ejercicio 5.18 en la página 89 es suficiente demostrar que C es precompacto. Sea $\epsilon > 0$. Tomemos k suficientemente grande para que

$$\frac{2m}{\epsilon} < \sqrt{k} \tag{5.1}$$

Ahora, partimos cada intervalo $[-m, m]$ en k subintervalos de la misma longitud $1/k$.

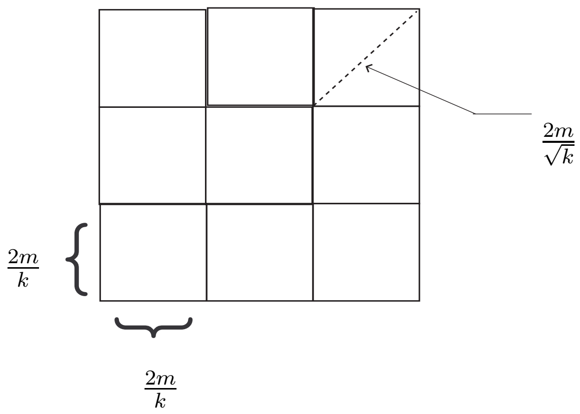


Figura 5.1: Construcción del Ejemplo 5.10

Como puede observarse en la Figura 5.3, nos quedan determinados k^n cubos que cubren el cubo C. Cada uno de estos cubos más chicos tiene diámetro $2m/\sqrt{k}$, por consiguiente, por la desigualdad 5.2, el diámetro de ellos es menor que ϵ.

No es cierto, en general, que todo conjunto acotado en un e.m. sea precompacto. Los siguientes ejemplos muestran esto.

Ejemplo 5.4 Sea (X, d) un e.m. discreto con X infinito. El conjunto X es acotado, de hecho $\delta(X) = 1$; sin embargo no podemos cubrir X con conjuntos de diámetro menor que 1/2 (cualquier número menor que 1 serviría). Esto ocurre debido a que si un conjunto en un e.m. discreto tiene más de un elemento entonces su diámetro es 1. Así, si cubrimos X con una cantidad finita de conjuntos, alguno de los conjuntos del cubrimiento necesariamente tiene más de un elemento, de lo contrario X sería finito, por consiguiente el diámetro de este conjunto es 1, por lo cual no puede ser menor que $1/2$.

Ejemplo 5.5 En $C([0,1])$, con la métrica del Ejemplo 2.7 en la página 39, la bola $\overline{B(0,1)}$ (0 denota la función que es constantemente igual a 0) no es un conjunto precompacto. Para ver esto definimos la siguiente función:

$$f(x) := \begin{cases} 4(x-\frac{1}{2}), & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{4}; \\ -4(x-1), & \text{si } \frac{3}{4} \leq x \leq 1; \\ 0, & \text{para los restantes } x; \end{cases}$$

y la siguiente sucesión de funciones $f_n(x) := f(2^n x)$. En la Figura 5.4 puede verse las gráficas de algunas de las funciones de la sucesión.

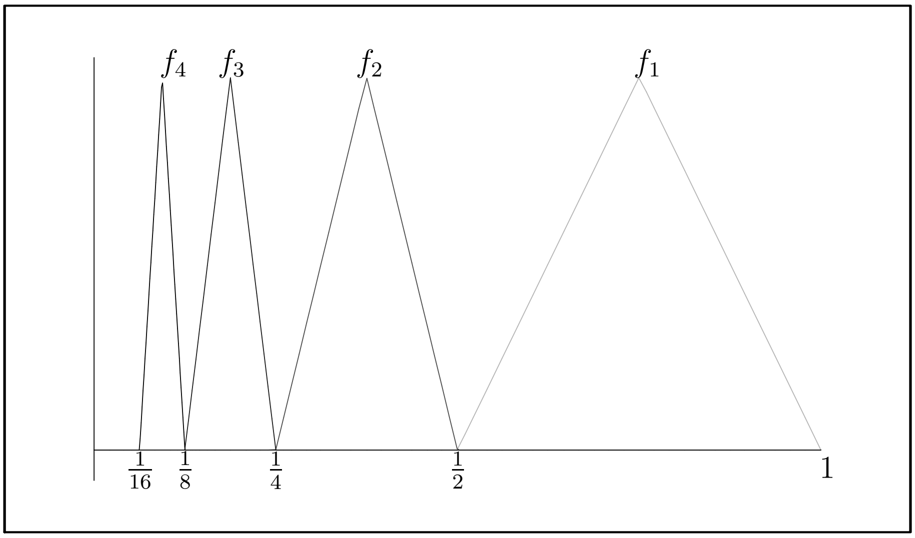


Figura 5.2: Funciones del Ejemplo 5.12

Puede demostrarse que la distancia de cualquiera de las funciones de la sucesión a otra es igual a 1. De modo que $f_n \in \overline{B(0,1)}$. Sea $C := \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$, observemos que como subespacio C resulta ser un e.m. discreto, así, por el Ejemplo anterior y el Ejercicio 5.18 en la página 89, $\overline{B(0,1)}$ no puede ser precompacta.

Recordemos que, en un e.m. (X,d), una familia de conjuntos abiertos $\{U_i\}_{i\in I}$ es un de $A \subset X$ si

$$A \subset \bigcup_{i\in I} U_i.$$

Definición 5.6 *Un subconjunto A de un e.m. (X,d) se dirá si, y solo si, todo cubrimieto por abiertos de A tiene un subcubrimiento finito. Es decir, si $\{U_i\}_{i\in I}$ es un cubrimiento de A, existe un conjunto finito $F \subset I$ tal que $\{U_i\}_{i\in F}$ es un cubrimiento.*

Daremos unos pocos ejemplos de conjuntos compactos, más adelante, cuando desarrollemos otros criterios de compacidad, daremos más ejemplos.

Proposición 5.7 *En un e.m. discreto un conjunto es compacto si, y solo si, es finito.*

Dem. Sea A un conjunto en un e.m. discreto. Para cada $a \in A$ consideremos la bola $B(a, \frac{1}{2})$ que, como sabemos, no es otra cosa que el conjunto $\{a\}$. Por consiguiente $\{a\}_{a\in A}$ es un cubrimiento por abiertos de A. Si A fuera compacto, existiría una cantidad finita de puntos a, llamemos a estos a_i, $i = 1, ..., n$; tales que $A \subset \bigcup_i \{a_i\}$. En ese caso tendremos que $A = \{a_1, ..., a_n\}$ y, por consiguiente, A es finito. 1□

5.2. Ejercicios

Ejercicio 5.1 Demostrar que un subconjunto de un conjunto precompacto es precompacto.

Ejercicio 5.2 Sea (X, d) un e.m., A y B subconjuntos compactos de X. Demostrar que

i) Existen puntos x e y en A tales que $d(x, y) = \delta(A)$.

ii) Existe un $x \in A$ e $y \in B$ tales que $d(x, y) = d(A, B)$.

iii) Si $A \cap B = \emptyset$, entonces $d(A, B) > 0$.

Ejercicio 5.3 Sea $\{a_n\}$ una sucesión en un e.m. (X, d) tal que $a_n \to a$. Demostrar que el conjunto $\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{a\}$ es compacto.

Ejercicio 5.4 Sean (X, d) e (Y, d') dos e.m. y $f : X \to Y$ una función. Demostrar que f es continua si, y solo si, $f_{|K} : K \to Y$ es continua para cada compacto K.

Ejercicio 5.5 Como se desprende de la teoría, el intervalo $(0, 1)$ no es cerrado en $\mathbb{R}$. Encontrar un cubrimiento de $(0, 1)$ que no tenga un subcubrimiento finito.

Ejercicio 5.6 Sea (X, d) un e.m. compacto y $f : X \to X$ una función continua. Supongamos que, para todo $x \in X$, se tiene que $f(x) \neq x$. Demostrar que existe $\epsilon > 0$ tal que $d(f(x), x) > \epsilon$.

Ejercicio 5.7 Sea $A \subset \mathbb{R}$ no compacto, demostrar que existe una función continua $f : A \to \mathbb{R}$ que no es acotada. *Sugerencia* Como A es no compacto y $A \subset \mathbb{R}$ entonces o A es no acotado o A es no cerrado, considerar estos dos casos.

Ejercicio 5.8 Sea $\{K_n\}$ una sucesión de conjuntos compactos no vacios, tales que $K_n \supset K_{n+1}$. Demostrar que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n \neq \emptyset$.

Ejercicio 5.9 Sea (X, d) un e.m. compacto y $\{U_i\}_{i \in I}$ un cubrimiento por abiertos de X. Demostrar que existe un $\epsilon > 0$ tal que toda bola de radio ϵ está contenida en, al menos, un U_i. *Sugerencia* Para cada $x \in X$ elegir r_x tal que $B(x, r_x)$ esta contenida en algún U_i. Tomar un subcubrimiento finito de estas bolas y luego considerar ϵ como el mínimo de las mitades de los radios de las bolas del subcubrimiento.

Ejercicio 5.10 Demostra que los siguientes conjuntos son disconexos:

i) $(0, 3) \cup [4, 6)$.

ii) $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

iii) $\{1/n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$.

Ejercicio 5.11 ¿ Cuáles de los siguientes conjuntos son conexos? Justificar la respuesta.

i) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{(x, \frac{1}{n}x) : x \in \mathbb{R}\}$.

ii) $\mathbb{R} \times \mathbb{R} - \mathbb{I} \times \mathbb{I}$, donde $\mathbb{I}$ son los números irracionales.

iii) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 1\}$.

iv) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 1\} \cup \{(1, 0)\}$.

Ejercicio 5.12 Supongamos que A y B son conjuntos conexos de un e.m.. Demostrar, dando contraejemplos, que no necesariamente deben ser conexos los siguientes conjuntos $A \cap B$, $A \cup B$, ∂A y A^0.

Ejercicio 5.13 Sea (X, d) un e.m. conexo e (Y, d) un e.m. discreto. Demostrar que una función $f : X \to Y$ continua es constante.

Ejercicio 5.14 Sean A y B subconjuntos conexos de un e.m. Demostra que si $\overline{A} \cap B \neq \emptyset$ entonces $A \cup B$ es conexo.

Ejercicio 5.15 Probar que todo espacio ultramétrico es totalmente disconexo.

Ejercicio 5.16 Sea $\{K_n\}$ una sucesión de conjuntos compactos y conexos de un e.m., supongamos que la sucesión es decreciente, es decir $K_n \supset K_{n+1}$. Demostrar que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$ es conexo. Dar un ejemplo de una sucesión como la anterior, cambiando compacto por cerrado, tal que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$ no sea conexo.

Ejercicio 5.17 Dado un conjunto A de un e.m. (X, d) definimos la función característica del conjunto A por:

$$1_A(x) := \begin{cases} 1, & \text{si } x \in A; \\ 0, & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

Demostrar que X es conexo si, y solo si, no existe una función característica 1_A, con $A \neq \emptyset$ y $A \neq X$, continua.

ATENCIÓN: HAY QUE RESOLVER PROBEMAS DE COMPATIBILIDAD DEL TEXTO QUE SIGUE

5.3. Compacidad

Es quizas con la noción de conjunto compacto donde encontraremos las diferencias más grandes entre la topología de $\mathbb{R}^n$ y la de un espacio métrico arbitrario. En particular, ya no será válida la carectización de compacto como cerrado y acotado. Para obtener una caracterización necesitaremos un concepto más fuerte que la acotación, este será el de conjunto **totalmente acotado** y, a la vez, un concepto más fuerte que el de conjunto cerrado y en este caso usaremos la de conjunto completo.

Es interesante hacer notar que, en topología, interesan aquellas propiedades que se preservan por homeomorfismos. En este sentido vemos que la noción de conjunto cerrado acotado no se preserva por este tipo de aplicaciones (claro está, los espacios métricos involucrados deberían ser distintos que $\mathbb{R}^n$ con la métrica euclidea). Por ejemplo, como ya hemos visto, la identidad es un homeomorfismo de $(\mathbb{R}^n, d)$, con d la métrica euclidea, en $(\mathbb{R}^n, d_1)$, con

$$d_1(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}.$$

Ahora bien, como $0 \leq d_1 < 1$ cualquier conjunto de $\mathbb{R}^n$ tiene diámetro, respecto a d_1 menor o igual a 1 y, por ende, cualquier conjunto es acotado. Sin embargo, no todo conjunto es acotado respecto a la métrica euclidea. Por otra parte $\mathbb{R}^n$ es cerrado en ambas métricas, pues es el conjunto total. Vemos así que el concepto de conjunto cerrado y acotado no necesariamente se preserva por homeomorfismos lo que relativiza su importancia.

Definición 5.8 *Diremos que un conjunto A de un e.m. (X, d) es totalmente acotado si para cada $\epsilon > 0$ existe una cantidad finita de conjuntos de diámetro menor que ϵ cuya unión contiene a A. En otras palabras existen conjuntos A_i, $i = 1, ..., n$, con $\delta(A_i) < \epsilon$ que satisfacen:*

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i.$$

Ejercicio 5.18 Demostrar que un subconjunto de un conjunto totalmente acotado es totalmente acotado.

Veamos algunos ejemplos de conjuntos totalmente acotados y de conjuntos que no lo son.

Ejemplo 5.9 Cualquier intervalo acotado de $\mathbb{R}$ es totalmente acotado. Para justificar esta aseveración, tomemos $\epsilon > 0$ y un intervalo cualquiera de extremos a y b. Elijamos n suficientemente grande para que $1/n < \epsilon$. Entonces los conjuntos

$$I_k := \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right] \quad , k = 0, \ldots, n-1,$$

satisfacen la definición.

Ejemplo 5.10 Cualquier conjunto acotado en el espacio euclideo $\mathbb{R}^n$ es totalmente acotado. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto acotado, entonces A está contenido en un cubo de la forma $C := [-m, m] \times \cdots \times [-m, m] = [-m, m]^n$. En virtud del Ejercicio 5.18 en la página anterior es suficiente demostrar que C es totalmente acotado. Sea $\epsilon > 0$. Tomemos k suficientemente grande para que

$$\frac{2\sqrt{n}m}{\epsilon} < k \tag{5.2}$$

Ahora, partimos cada intervalo $[-m, m]$ en k subintervalos de la misma longitud $1/k$.

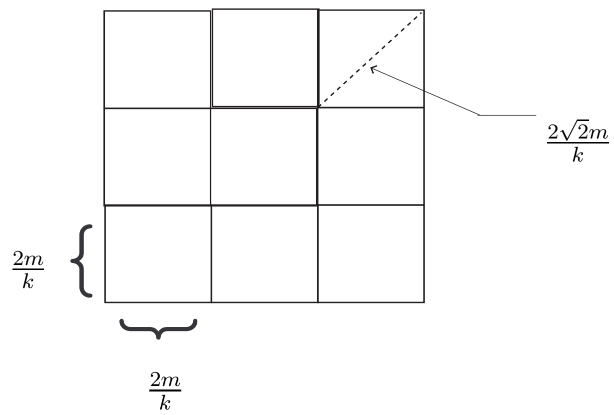


Figura 5.3: Construcción del Ejemplo 5.10

Como puede observarse en la Figura 5.3, nos quedan determinados k^n cubos que cubren el cubo C. Cada uno de estos cubos más chicos tiene diámetro $2\sqrt{n}m/k$, por consiguiente, por la desigualdad 5.2, el diámetro de ellos es menor que ϵ.

No es cierto, en general, que todo conjunto acotado en un e.m. sea totalmente acotado. Los siguientes ejemplos muestran esto.

Ejemplo 5.11 Sea (X, d) un e.m. discreto con X infinito. El conjunto X es acotado, de hecho $\delta(X) = 1$; sin embargo no podemos cubrir X con conjuntos de diámetro menor que 1/2 (cualquier número menor que 1 serviría). Esto ocurre debido a que si un conjunto en un e.m. discreto tiene más de un elemento entonces su diámetro es 1. Así, si cubrimos X con una cantidad finita de conjuntos, alguno de los conjuntos del cubrimiento necesariamente tiene más de un elemento, de lo contrario X sería finito, por consiguiente el diámetro de este conjunto es 1 y no puede ser menor que $1/2$.

Ejemplo 5.12 En $C([0, 1])$, con la métrica del Ejemplo 2.7 en la página 39, la bola cerrada $K(0, 1)$ (0 denota la función que es constantemente igual a 0) no es un conjunto totalmente acotado. Para ver esto definimos la siguiente función:

$$f(x) := \begin{cases} 4(x - \frac{1}{2}), & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{4}; \\ -4(x - 1), & \text{si } \frac{3}{4} \leq x \leq 1; \\ 0, & \text{para los restantes } x; \end{cases}$$

y la siguiente sucesión de funciones $f_n(x) := f(2^n x)$. En la Figura 5.4 puede verse las gráficas de algunas de las funciones de la sucesión.

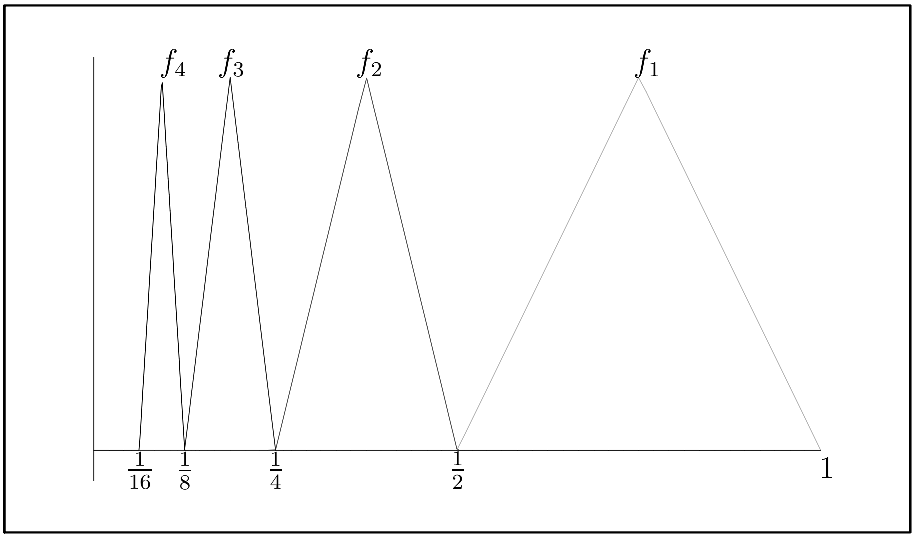


Figura 5.4: Funciones del Ejemplo 5.12

Puede demostrarse que la distancia de cualquiera de las funciones de la sucesión a otra es igual a 1 y que $f_n \in K(0, 1)$. Sea $C := \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$, observemos que como subespacio C resulta ser un e.m. discreto, así, por el Ejemplo anterior y el Ejercicio 5.18 en la página 89, $\overline{B(0, 1)}$ no puede ser totalmente acotado.

Ejemplo 5.13 Hay una interesante conexión de la total acotación con la dimensión. Para introducirla, veamos cuantas bolas abiertas de radio $1/2$, en $\mathbb{R}^n$ con la métrica euclidea, se necesitan, al menos, para cubrir la bola cerrada $K(0,1)$. Denotemos por e_j los vectores canónicos

$$e_j := (0, \dots, 1, \dots, 0),$$

donde el 1 está en el lugar j. Notesé que $e_j \in K(0,1)$ y que:

$$d(e_j, e_i) = \sqrt{2} \quad i \neq j.$$

De modo que, si $i \neq j$ entonces e_i y e_j no pueden estar en una misma bola de radio $1/2$. De lo contrario, si $e_i, e_j \in B(x, 1/2)$, entonces

$$d(e_i, e_j) \leq d(e_i, x) + d(x, e_j) < 1 < \sqrt{2},$$

que es una contradicción. De esta manera si cubrimos la bola cerrada $K(0,1)$ por bolas abiertas de radio $1/2$ necesitaremos, al menos, n de estas bolas. Es decir, la cantidad de estas bolas crece cuando aumenta la dimensión n. Esta observación nos lleva a conjeturar que si buscamos un espacio vectorial de dimensión infinita[1] tenemos chances de construir conjuntos acotados, en particular la bola $K(0,1)$, que no son totalmente acotados.

Ejercicio 5.19 Demostrar que en l_2 la bola cerrada $K(0,1)$ no es totalmente acotada.

Recordemos que, en un e.m. (X,d), una familia de conjuntos abiertos $\{U_i\}_{i \in I}$ es un cubrimiento por abiertos de $A \subset X$ si

$$A \subset \bigcup_{i \in I} U_i.$$

Definición 5.14 *Un subconjunto A de un e.m. (X,d) se dirá* ***compacto*** *si, y solo si, todo cubrimiento por abiertos de A tiene un subcubrimiento finito. Es decir, si $\{U_i\}_{i \in I}$ es un cubrimiento de A, existe un conjunto finito $F \subset I$ tal que $\{U_i\}_{i \in F}$ es un cubrimiento de A.*

Ejercicio 5.20 Demostrar que un espacio métrico discreto es compacto si, y solo si, es finito.

Ejercicio 5.21 Demostrar que un conjunto totalmente acotado es acotado.

[1] Esto significa que no tiene una base finita

Ejercicio 5.22 Demostrar que X es totalmente acotado si, y solo si, para cada $\epsilon > 0$ podemos cubrir X por una cantidad finita de bolas de radio ϵ.

Ejercicio 5.23 Demostrar que un conjunto compacto es cerrado y acotado.

Ejercicio 5.24 Demostrar que si $f : (X, d) \to (Y, d')$ es continua y X compacto entonces $f(X)$ es compacto. Como corolario, demostrar que si $f : X \to \mathbb{R}$ y X es compacto entonces f alcanza un máximo y un mínimo.

Teorema 5.15 (Caracterización de compacidad en espacios métricos) *Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces son equivalentes:*

1. *X es compacto;*

2. *X es totalmente acotado y completo.*

3. *Toda sucesión en X tiene una subsucesión convergente.*

Dem. Veamos que 1⇒3. Por el absurdo supongamos que existe una sucesión $\{a_n\}$ en X que no tiene ninguna subsucesión convergente. Definamos Γ como la colección de todos los conjuntos abiertos G de X tales que G tiene una cantidad finita de elementos de la sucesión, es decir:

$$G \in \Gamma \Leftrightarrow \#\{n : a_n \in G\} < \infty.$$

Vamos a probar que Γ es un cubrimiento de X. Supongamos que $x \in X$ y $x \notin G$ para todo $G \in \Gamma$. De modo que, por definición, cada abierto que contiene a x contiene infinitos términos de la sucesión $\{a_n\}$. En particular, podemos encontrar n_1 tal que $a_{n_1} \in B(x, 1)$. Ahora podemos encontrar $n_2 > n_1$ tal que $a_{n_2} \in B(x, \frac{1}{2})$. Y así continuamos, construímos una subsucesión a_{n_k} tal que $a_{n_k} \in B(x, \frac{1}{k})$. Lo que implica que a_{n_k} converge a x, contradiciendo nuestra suposición. De esta manera, Γ es un cubrimiento de X. Sea G_i, $i = 1, \ldots, n$, un subcubrimiento finito de X. Es decir

$$X = G_1 \cup \cdots \cup G_n.$$

Como cada G_i, $i = 1, \ldots, n$, tiene una cantidad finita de términos de la sucesión, concluímos que X contiene una cantidad finita de términos de la sucesión, lo que, claro está, no puede ocurrir. Esto finaliza la demostración de 1⇒3.

Demostremos ahora que 3⇒ 2 empezando por ver que X es totalmente acotado. Nuevamente procedemos por el absurdo, suponiendo que X no es totalmente acotado. Esto implica que existe un $\epsilon > 0$ tal que X no se puede cubrir con una cantidad finita de conjuntos de diámetro ϵ. Sea a_1 cualquier punto de X. Como

$B(a_1,\epsilon)$ no cubre X, existe $a_2 \in X - B(a_1,\epsilon)$. Como $B(a_i,\epsilon)$, $i = 1, 2$, no cubren X, existe un $a_3 \in X - \big(B(a_1,\epsilon) \cup B(a_2,\epsilon)\big)$. Continuando de esta forma, contruímos una sucesión a_n tal que

$$a_n \in X - \big(B(a_1,\epsilon) \cup \cdots \cup B(a_{n-1},\epsilon)\big).$$

De esta forma tendremos que:

$$d(a_i, a_j) \geq \epsilon \quad \text{para } i \neq j.$$

Por hipótesis la sucesión a_n tiene una subsucesión convergente, en particular esta subsucesión será de Cauchy. No obstante la desigualdad anterior implica que ninguna subsucesión de $\{a_n\}$ puede ser de Cauchy, contradicción que prueba que X es totalmente acotado.

Veamos ahora que X es completo. Sea $\{a_n\}$ una sucesión de Cauchy en X. Podemos extraer una subsucesión $\{a_{n_k}\}$ convergente a un $a \in X$. Sea $\epsilon > 0$. Puesto que $\{a_n\}$ es de Cauchy, pondemos encontrar $N > 0$ tal que si $n, m > N$ entonces:

$$d(a_n, a_m) < \frac{\epsilon}{2}. \tag{5.3}$$

Como a_{n_k} converge a a, podemos encontrar un n_k lo suficientemente grande para que $n_k > N$ y:

$$d(a_{n_k}, a) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Así, usando (5.3), tenemos que para $n > N$:

$$d(a_n, a) \leq d(a_n, a_{n_k}) + d(a_{n_k}, a) < \epsilon.$$

Por último veamos que 2 $\Rightarrow$1. Para este fin elijamos un cubrimiento $\{G_\lambda\}_{\lambda\in L}$ arbitrario de X. Supongamos que este cubrimiento no tiene un subcubrimiento finito. Como X es totalmente acotado, acorde al Ejercicio 5.22, podemos cubrir a X por una cantidad finita de bolas de radio 1. Alguna de estas bolas no se podrá cubrir por una cantidad finita de G_λ, de lo contrario, si todas se cubren por una cantidad finita, como hay una cantidad finita de estas bolas, podríamos cubrir X por una cantidad finita de G_λ. Llamemos $B(x_1, 1)$ a la bola que no se cubre por finitos G_λ. Como $B(x_1, 1)$ es totalmente acotado, podemos aplicar la construcción anterior a $B(x_1, 1)$ en lugar de X y con bolas de radio $1/2$, en lugar de 1, obteniendo de esta forma una bola $B(x_2, 1/2)$ que no se cubre por una cantidad finita de G_λ. Además podemos suponer que $B(x_2, 1/2) \cap B(x_1, 1) \neq \emptyset$, de lo contrario no hubiera tenido sentido usar la bola $B(x_2, 1/2)$ para cubrir $B(x_1, 1)$. Continuamos de esta forma y producimos una sucesión $B(x_n, 1/2^n)$ (aquí no basta que los radios tiendan a cero, sino que es necesario que la serie de radios converja) de bolas tales que ninguna de ellas se puede cubrir por una cantidad finita de G_λ. Veamos que la sucesión x_n es de Cauchy. Para esto tomemos

$$z_n \in B\Big(x_n, \frac{1}{2^n}\Big) \cap B\Big(x_{n+1}, \frac{1}{2^{n+1}}\Big).$$

Entonces

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq d(x_n, z_n) + d(z_n, x_{n+1}) < \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} < \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Lo que permite utilizar el criterio de comparación para la convergencia de series para demostrar que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} d(x_n, x_{n+1}) < \infty.$$

Acorde a un ejercicio de la práctica, esto implica que $\{x_n\}$ es de Cauchy, por ende converge a algún $x_0 \in X$. Como G_λ es un cubrimiento, existe λ_0 tal que $x_0 \in G_{\lambda_0}$. Como G_{λ_0} es abierto, existe un $r > 0$ tal que

$$B(x_0, r) \subset G_{\lambda_0}. \tag{5.4}$$

Puesto que x_n converge a x_0 y $1/2^{n-1}$ converge a 0, podemos hallar n lo suficientemente grande para que:

$$d(x_n, x_0) < \frac{r}{2} \quad \text{y} \quad \frac{1}{2^{n-1}} < \frac{r}{2}. \tag{5.5}$$

Veamos que esto, (5.5) y (5.4) implica que:

$$B\Big(x_n, \frac{1}{2^n}\Big) \subset B(x_0, r) \subset G_{\lambda_0}. \tag{5.6}$$

En efecto, si:

$$y \in B\Big(x_n, \frac{1}{2^n}\Big),$$

entonces

$$d(y, x_0) \leq d(y, x_n) + d(x_n, x_0) < \frac{1}{2^n} + \frac{r}{2} < r,$$

lo que prueba (5.6), siendo, además, esta inclusión una contradicción puesto que estamos cubriendo la bola $B(x_n, 1/2^n)$ por un sólo G_λ, recordemos que estas bolas no se cubrían por finitos G_λ. (ya terminamos, ¡por fin!) 1□

Ejercicio 5.25 Utilizar la siguiente "idea" para dar una demostración alternativa de que compacto implica completo. Tomar una suseción de Cauchy $\{a_n\}$ en X. De la desigualdad

$$|d(x, a_n) - d(x, a_m)| \leq d(a_n, a_m) \quad n, m \in \mathbb{N} \ x \in X$$

concluír que $d(x, a_n)$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$ y de esto que la siguiente función esta bien definida:

$$f(x) := \lim_{n \to \infty} d(x, a_n).$$

Notar que $f : X \to \mathbb{R}$ y por ende f alcanza un mínimo en algún $a \in X$. Por último demostrar que a es el límite de a_n.

5.4. Conexión

La definición de conjunto **conexo**, **arco conexo** es idéntica a la que ya hemos estudiado. Los conjuntos conexos, así definidos, satisfacen las mismas propiedades que ya observamos para la métrica euclidea, con una excepción. El hecho que valga las mismas propiedades nos permite definir el concepto de **componente conexa** de la misma forma que lo hicimos para $\mathbb{R}^n$.

La propiedad que no continua valiendo, en espacios métricos en general, es aquella que afirmaba que las componentes conexas de conjuntos abiertos eran abiertas. Esto es así pues en la demostración de tal propiedad utilizamos que una bola era un conjunto conexo y por el siguiente ejercicio:

Ejercicio 5.26 Encontrar un ejemplo de espacio métrico que tenga bolas disconexas.

Para conservar tal propiedad podríamos "pedir" la hipótesis que las bolas sean conexas. No obstante observaremos que en tal demostración podríamos haber utilizado cualquier entorno conexo que fuera bola o no. Esto nos lleva a la siguiente definición:

Definición 5.16 *Un espacio métrico (X, d) se llama **localmente conexo** si para todo $x \in X$ y $r > 0$ existe un entorno conexo V de x tal que $V \subset B(x, r) \subset X$.*

$\mathbb{R}^n$ es localmente conexo, podemos utilizar como V la misma bola que aparece en la definición anterior. Lo curioso del caso es que hay espacios métricos (X, d) tales que X es conexo y, sin embargo, X no es localmente conexo.

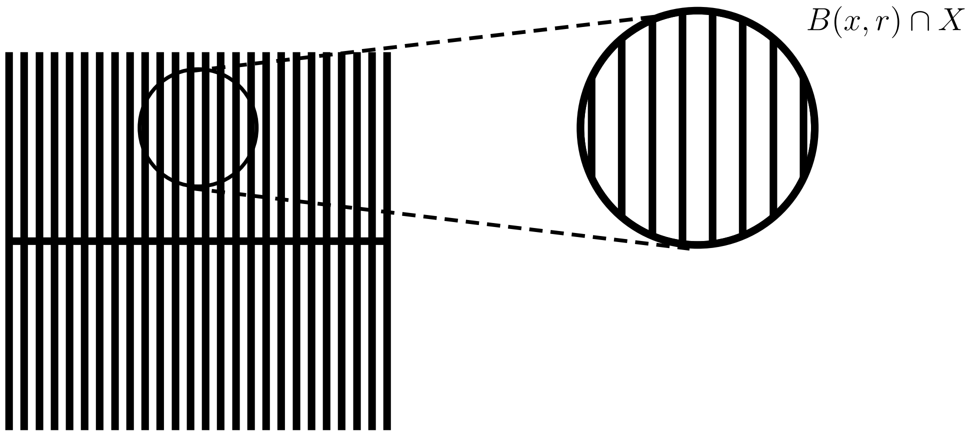


Figura 5.5: El subespacio X

Ejemplo 5.17 Sea $X = \mathbb{Q}\times\mathbb{R}\cup\{(x,0) : x\in\mathbb{R}\}$ y consideremos este X como subespacio de $\mathbb{R}^2$. En la figura 5.5 hemos hecho un bosquejo, está claro que es imposible lograr exactitud, del gráfico X.

Notesé que si tomamos un punto en X pero no sobre el eje horizontal y consideramos una bola de centro x y un radio suficientemete chico de modo que la bola no interseque el mencionado eje, entonces $B(x,r)\cap X$ está compuesto de un conjunto de segmentos verticales disconexos entre si. Si ahora buscamos un conjunto conexo V tal que $V\subset B(x,r)$ notaremos que V debería ser un subconjunto de alguno de los segmentos verticales, precisamente de aquel segmento que tenga el x dentro de si, pero tal V no será un entorno. Lo que prueba que el espacio $(X.d)$ no es localmente conexo.

Ejercicio 5.27 Demostrar que el espacio métrico (X,d) es localmente conexo si, y sólo si, las componentes conexas de conjuntos abiertos son abiertas.

Ejercicio 5.28 Sea (X,d) un espacio métrico localmente conexo y compacto. Demostrar que X tiene, a lo sumo, una cantidad finita de componentes.

Ejercicio 5.29 Sea X,d un espacio métrico homeomorfo a $\mathbb{Z}$ demostrar que las componentes conexas de X son conjuntos unitarios. Este tipo de espacios se llaman totalmente disconexos.

Índice alfabético