# 1. Ecuación de la membrana, separación de variables

El movimiento de una membrana elástica sujeta a un aro circular viene gobernada por la ecuación de ondas bidimensional

$$u_{tt} = \Delta u := u_{xx} + u_{yy}$$

Esta ecuación es un ejemplo de ecuación en derivadas parciales. Aquí la funció incognita $u$ depende de tres variables independientes $x, y, t$. No hemos tratado hasta aquí este tipo de ecuaciones, en esta breve unidad vamos a ver como los resultados que desarrollamos antes nos sirven para encontrar algunas soluciones de esta ecuación.

En la deducción de esta ecuación, que no haremos, se supone que no actúa otra fuerza más que la tensión de la membrana, que el material de esta membrana es uniforme, que la dirección de desplazamientos de un punto sobre la membrana es perpendiculares al plano que contiene al aro de sujeción.

El significado de las variables es el siguiente: $t$ es el tiempo, las variables $x, y, u$ son las coordenadas de un punto sobre la membrana en un sistema de coordenadas ortogonal. Las coordenadas $x, y$ se toman en el plano que contiene al aro de sujeción y por ende son independientes de $t$. Se supone que $u$ es función de $x, y$ y de $t$. Suponemos que la ecuación se satisface en la bola de radio 1 y centro $(0, 0)$ de $\mathbb{R}^2$. Se impone además una condición de contorno $u = 0$ en $\partial B$ y una condición inicial $u_t(x, y, 0) = 0$.

Buscaremos soluciones de la ecuación de ondas en variables separadas, esto es supondremos que $u$ se escribe $u(x, y, t) = v(x, y)T(t)$. Estas soluciones tienen el significado físico de ser tonos normales, esto es regímenes de vibración donde todos los puntos de la membrana vibran a la misma frecuencia. Asumamos además que $u$ parte del reposo, esto es $u_t(x, y, 0) = 0$.

Reemplazando $u(x, y, t) = v(x, y)T(t)$ en la ecuación obtenemos

$$v(x, y)T''(t) = T(t)\left(v_{xx}(x, y) + v_{yy}(x, y)\right).$$

Vale decir que

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{v_{xx}(x, y) + v_{yy}(x, y)}{v(x, y)}.$$

Las variables $t, x, y$ son independientes entre si. En el miembro de la izquierda sólo aparece $t$ y en el de la derecha sólo $x, y$. Por consiguiente podríamos cambiar $t$ en el miembro de la izquierda dejando $x, y$ fijos. La conclusión es entonces que el miembro de la izquierda no cambia por cambiar $t$, vale decir $T''/T$ es una función constante y por lo tanto $\Delta v/v$ es constante. Debe exixtir $\lambda > 0$ tal que

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{v_{xx}(x, y) + v_{yy}(x, y)}{v(x, y)} = -\lambda.$$

Tenemos así las dos ecuaciones

$$\begin{cases} T''(t) + \lambda T(t) = 0, \\ v_{xx}(x, y) + v_{yy}(x, y) + \lambda v(x, y) = 0 \end{cases}$$

Además se deben satisfacer la condiciones de contorno y condiciones iniciales. La condición de contorno $u(x, y, t) = 0$ para $(x, y) \in \partial B$ implica que $v(x, y) = 0$ para $(x, y) \in \partial B$[1]. La condición inicial $u_t(x, y, 0) = 0$ implica $T'(0) = 0$.

[1]La suposición $T = 0$ nos llevaría a la solución trivial