



FACULTAD DE CS. EXACTAS, FÍSICO-QUÍMICAS Y NATURALES
DEPTO DE MATEMÁTICA.
SEGUNDO CUATRIMESTRE DE 2015
CÁLCULO VARIACIONES
PRÁCTICA 5: TEOREMAS DE EXISTENCIA

Ejercicio 1 Sea $F : [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que $F(\cdot, z)$ es medible para todo $z \in \mathbb{R}^n$ y que $F(x, \cdot)$ es continuamente diferenciable para casi todo $x \in [a, b]$. Además supongamos que existe $a : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ continua y $0 \leq b \in L^1([a, b], \mathbb{R})$ tal que

$$|F(x, z)| + |D_z F(x, z)| \leq a(|z|)b(x).$$

Demostrar que para $1 < p < \infty$ la integral de acción

$$I(u) = \int_a^b \frac{|u'(x)|^p}{p} + F(x, u(x)) dx$$

satisface:

- I es d.s.s.c.i. *Ayuda:* la integral es suma de una funcional convexa y continua en la norma, y en el otro sumando se puede usar que $u_n \rightharpoonup u$ en $W^{1,p}((a, b), \mathbb{R}^n)$ implica $u_n \rightarrow u$ uniformemente cuando $1 < p$.
- Demostrar que I es diferenciable Gâteaux y expresar la diferencial de I .
- Supongamos que I tiene un punto crítico u sobre

$$\{u \in W^{1,p}((a, b), \mathbb{R}^n) | u(a) = \alpha, u(b) = \beta\},$$

con $1 < p$. Demostrar que u satisface las ecuaciones de Euler-Lagrange, que en este caso son

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}(|u(x)|^{p-2}u(x)) = D_z F(x, u(x)) & \text{a.e. } x \in (a, b) \\ u(a) = \alpha \text{ y } u(b) = \beta \end{cases} \quad (1)$$

Ejercicio 2 Supongamos que $L : (a, b) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ satisface

- $L(x, u, p)$, $L_p(x, u, p)$ son continuas.
- $L(x, u, p)$ convexa respecto a p .
-

$$L(x, u, p) \geq \theta(p) + a(x),$$

donde $a \in L^1([a, b], \mathbb{R})$ y θ es superlineal.

Demostrar que existe un mínimo de la integral de acción sobre el conjunto $\{u \in W^{1,1}((a, b), \mathbb{R}^n) | u(a) = \alpha, u(b) = \beta\}$

Ejercicio 3 Encontrar condiciones suficientes sobre $V : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ para que

$$I(u) = \int_a^b \frac{|p|^2}{2} + V(x)dx$$

satisfaga el Teorema de existencia de Tonelli de modo que el problema

$$\min \left\{ I(u) \mid u \in W^{1,1}((a, b), \mathbb{R}), u(a) = \alpha, u(b) = \beta \right\}$$

tenga solución. Encontrar condiciones sobre V que garanticen que I es diferenciable Gâteaux y hallar las ecuaciones de Euler-Lagrange que satisface un mínimo.

Ejercicio 4 Demostrar la siguiente afirmación. $L : (a, b) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es cuasi-convexa si y solo si para $(x_0, u_0) \in [a, b] \times \mathbb{R}^n$ fijos la funcional

$$\int_a^b L(t_0, u_0, \phi'(x))dx,$$

alcanza un mínimo en u sobre el conjunto

$$\{ \phi \in W^{1,\infty}((a, b), \mathbb{R}^n) \mid \phi(a) = \alpha, \phi(b) = \beta \},$$

si y solo si u es la recta que une α con β . Una de las implicaciones fue demostrada durante las clases teóricas.

Ejercicio 5 Generalizar, una vez más el teorema de existencia de Tonelli, de la siguiente forma. Supongamos que $L : (a, b) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ satisface las hipótesis del ejercicio 2, excepto el ítem c) que es modificado como sigue

c')

$$L(x, u, p) \geq \theta(p) + b|u| + a(x),$$

donde $a \in L^1([a, b], \mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}$ y θ es superlineal.

Demostrar que bajo las suposiciones anteriores, aún existe un mínimo de la integral de acción sobre el conjunto $\{u \in W^{1,1}((a, b), \mathbb{R}^n) \mid u(a) = \alpha, u(b) = \beta\}$