

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Fernando Mazzone

Índice general

| | |
|---|-----------|
| 1. Modelos con ecuaciones, métodos elementales de solución | 5 |
| 2. Métodos numéricos | 7 |
| 3. Teoría fundamental | 9 |
| 4. Sistemas lineales | 11 |
| 5. Sistemas autónomos | 13 |
| 5.1. Ecuaciones autónomas | 13 |
| 5.2. Ecuaciones unidimensionales | 14 |
| 5.3. Sistemas autónomos planos | 17 |
| 5.3.1. Técnicas elementales | 17 |
| 5.3.2. Linearización | 23 |
| 5.4. El flujo de una ecuación diferencial | 27 |
| 5.5. Conjuntos invariantes | 28 |
| 5.6. Linearización: continuación | 29 |
| 5.7. Aplicación a un modelo biológico | 40 |
| 5.8. Teoría global | 45 |
| 5.8.1. Puntos regulares | 45 |
| 5.8.2. ω -límites | 45 |
| 5.8.3. Teorema de Poincare-Bendixson | 45 |
| 5.9. Estabilidad en el sentido de Lyapunov | 45 |

Unidad 1

Modelos con ecuaciones, métodos elementales de solución

Unidad 2

Métodos numéricos

Unidad 3

Teoría fundamental

Unidad 4

Sistemas lineales

Unidad 5

Sistemas autónomos

En esta unidad abordaremos el estudio de sistemas no lineales y autónomos, en particular sistemas autónomos planos.

5.1. Ecuaciones autónomas

Una ecuación

$$x'(t) = f(x(t)), \quad (5.1)$$

donde Ω es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, se denomina *ecuación autónoma*. De ahora en más asumiremos que f es de clase C^1 en Ω , de modo que para cada $(t_0, x^0) \in \mathbb{R} \times \Omega$ existe una solución $\varphi(t)$ que pasa por (t_0, x^0) . Cuando invoquemos esta solución supondremos que es una solución máxima y denotaremos su intervalo de definición por $I_\varphi = (a_\varphi, b_\varphi)$. Las soluciones a ecuaciones autónomas tienen la siguiente propiedad.

Teorema 5.1.1 *Si φ es solución de (5.1) entonces $\psi(t) = \varphi(t + c)$ es también solución e $I_\psi = I_\varphi - c$.*

Dem. Por la regla de la cadena y (5.1)

$$\psi'(t) = \varphi'(t + c) = f(\varphi(t + c)) = f(\psi(t)).$$

□

Vemos así que toda trasladada, sobre el eje t , de una solución es también solución.

Si $x^0 \in \Omega$ satisface que $f(x^0) = 0$ entonces $\varphi(t) \equiv x^0$ es una solución. Dado que esta solución no experimenta cambios con el tiempo, x^0 se denomina *punto de equilibrio* del sistema (5.1). El teorema anterior tiene la siguiente consecuencia.

Teorema 5.1.2 Si φ y ψ son soluciones de (5.1) y $\varphi(t_0) = \psi(t_1)$ entonces existe un $c \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi(t) = \psi(t + c)$.

Dem. Por el Teorema 5.1.1, la función $\psi_1(t) := \psi(t + t_1 - t_0)$ es solución y, por hipótesis, $\psi_1(t_0) = \varphi(t_0)$, así, por unicidad, $\varphi(t) = \psi_1(t)$ para todo t . \square

Corolario 5.1.3 Si φ es solución de (5.1) y $\varphi(t_0) = \varphi(t_1)$ para ciertos $t_0 \neq t_1$ entonces φ es periódica.

Dem. Por el teorema anterior aplicado a $\psi = \varphi$ obtenemos $\varphi(t) = \varphi(t + c)$, luego φ es periódica. \square

5.2. Ecuaciones unidimensionales

Ejemplo 5.2.1 Considerar la ecuación

$$x' = x, \quad x \in \mathbb{R},$$

que tiene por solución general $\varphi(t) = Ce^t$. Notar que el conjunto Ω , en este caso $\Omega = \mathbb{R}$, queda dividido en tres regiones $(-\infty, 0)$, $\{0\}$ y $(0, \infty)$. Cada una de estas tres regiones es imagen de soluciones, por ejemplo $(0, +\infty)$ es imagen de las soluciones positivas. Notar que hay una cantidad infinita de soluciones positivas, de hecho está la solución $\varphi_0(t) = e^t$ y todas sus trasladadas.

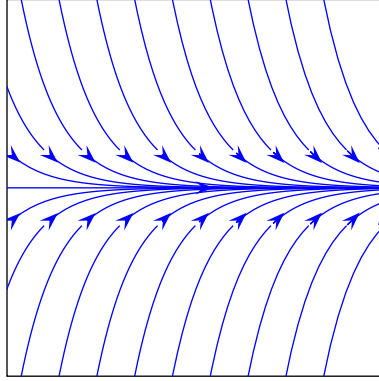
El conjunto $\{0\}$ es la imagen de la función nula, que, obviamente, coincide con sus trasladadas. Notar que 0 es un punto de equilibrio.

Ejemplo 5.2.2 Consideremos ahora

$$x' = \frac{1}{2}(x^2 - 1).$$

Para resolver esta ecuación escribamos

$$dt = \frac{2dx}{x^2 - 1}$$

Figura 5.1: Ecuación $x' = x$

e integremos

$$\begin{aligned} t + c &= \int \frac{2dx}{x^2 - 1} = \int \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + 1} dx \\ &= \ln \left| \frac{x - 1}{x + 1} \right|. \end{aligned}$$

Luego

$$x(t) = \frac{1 \pm ke^t}{1 \mp ke^t}, \quad k > 0$$

es la solución general. Notar que hay dos “ramas” de $x(t)$ que corresponden a los intervalos $(-\infty, -\ln k)$ y $(-\ln k, +\infty)$. En realidad hay que pensar estas ramas como dos soluciones máximas diferentes. La primera tiene su gráfica debajo de -1 y la segunda por encima de 1 . Las soluciones que empiezan en $(-1, 1)$ están definidas en todo \mathbb{R} y permanecen en $(-1, 1)$. Los puntos -1 y 1 son de equilibrio de la ecuación.

Como muestra la figura 5.2, ahora tenemos dividido $\Omega = \mathbb{R}$ en cinco regiones $(-\infty, -1)$, $\{-1\}$, $(-1, 1)$, $\{1\}$ y $(1, +\infty)$. Las propiedades cualitativas de cualquier solución en cualquiera de estas ramas son determinadas por las de cualquier solución fija en una de estas ramas, ya que una es una trasladada de la otra. Notar que si $x(t_0)$ no es un punto de equilibrio entonces $x'(t) = f(x(t)) \neq 0$ para todo t , luego $x(t)$ es una función monótona. Por ende, si x está definida en un intervalo $(a, +\infty)$ el siguiente límite $x^0 := \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t)$ debe existir. Si $x^0 \in \mathbb{R}$ entonces, por el ejercicio 5.1, debe ser un punto de equilibrio, de lo contrario

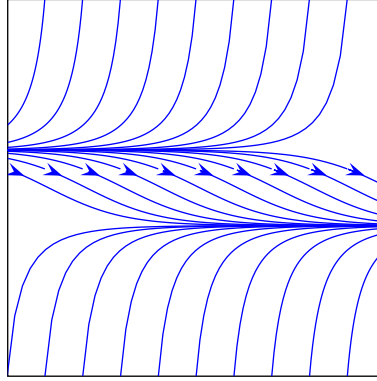


Figura 5.2: Ecuación $x' = \frac{1}{2}(x^2 - 1)$

$x^0 = \pm\infty$. Notar que, como toda solución máxima $\varphi(t)$ satisface que $(t, \varphi(t))$ se sale de cualquier compacto contenido en $\mathbb{R} \times \Omega$, se tiene que si $\varphi(t_0)$ está entre dos puntos de equilibrio, $\varphi(t)$ permanece entre ellos para todo tiempo e $I_\varphi = \mathbb{R}$. En el ejemplo, como $f(x) < 0$ en $(-1, 1)$ debemos tener que una solución φ tal que $\varphi(t_0) \in (-1, 1)$ está definida en \mathbb{R} y $1 = \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t)$ y $-1 = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t)$. Toda esta información cualitativa la podemos representar en el eje x como en la figura 5.3. Las flechas indican la dirección en que las soluciones recorren la región. Este tipo de representación la llamaremos *retrato de fases*



Figura 5.3: Retrato de fases de $x' = \frac{1}{2}(x^2 - 1)$.

Se observa que de haber una cantidad finita de puntos de equilibrio hay sólo una cantidad finita posible de retratos de fases. Por ejemplo si hay sólo un punto de equilibrio hay sólo los cuatro retratos de fases mostrados en la figura 5.4. Por ejemplo $x' = x$, $x' = x^3$ y $x' = x - a$, tienen el mismo retrato de fases d). En este caso diremos que las tres ecuaciones son *cualitativamente equivalentes*.

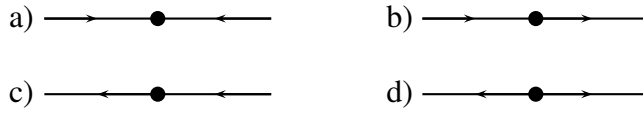


Figura 5.4: Retrato de fases un punto de equilibrio

5.3. Sistemas autónomos planos

Ahora consideraremos la ecuación

$$x' = f(x), \quad f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (5.2)$$

donde Ω es un abierto de \mathbb{R}^2 . En un sistema autónomo unidimensional el retrato de fases queda completamente determinado por la cantidad de puntos de equilibrio y el comportamiento de las soluciones cerca de sus puntos de equilibrio, esto, a la vez, determina las propiedades cualitativas de las soluciones. En otras palabras, estudiando propiedades locales, cerca de los puntos de equilibrio, de las soluciones inferimos su comportamiento cualitativo global. En dimensiones mayores las propiedades cualitativas de las soluciones de ecuaciones no lineales no se pueden analizar sólo a partir de propiedades locales. Es por ello que el análisis de sistemas autónomos planos implica desarrollar dos teorías: una local y otra global.

5.3.1. Técnicas elementales

Como en el caso de un sistema unidimensional, las soluciones de 5.2 determinarán regiones de Ω . Como consecuencia del Teorema 5.1.2 obtenemos que estas regiones son disjuntas. Cada una de ellas es la imagen de alguna solución φ , y por ende también de cualquier trasladada de φ . En símbolos estas regiones son los conjuntos $\varphi(I_\varphi)$, con φ solución. Es por ello que estas regiones son curvas de \mathbb{R}^2 y nos referiremos a ellas como *trayectorias* u *órbitas* de (5.2). Algunas veces es relativamente sencillo construir estas órbitas por técnicas elementales. Estas técnicas incluyen

1. Estudiar las simetrías de la ecuación.

2. Distinguir si el sistema está desacoplado.
3. Eliminar el tiempo de la ecuación.
4. Transformar el sistema por un cambio de variables.

En los siguientes ejemplos ilustramos estas técnicas.

Ejemplo 5.3.1 Ecuación del péndulo. Consideremos la ecuación del péndulo plano

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -\sin(x_1) \end{cases} \quad (5.3)$$

Para construir las trayectorias de (5.3) vamos usar una técnica que consiste en eliminar el tiempo de la ecuación y relacionar a x_2 con x_1 por medio de una ecuación, a saber:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-\sin(x_1)}{x_2}.$$

Resolviendo esta ecuación con variables separadas obtenemos

$$x_2 = \pm \sqrt{2 \cos(x_1) + c}.$$

Para que esta ecuación tenga solución debemos tener $c \geq -2$. Notar que los puntos de equilibrio del sistema son los puntos $(n\pi, 0)$, con $n \in \mathbb{Z}$. Si (x_1, x_2) resuelve (5.3) entonces $(-x_1, -x_2)$ también lo hace, de modo que es suficiente obtener las trayectorias para $x_2 \geq 0$ las trayectorias por debajo del eje x_1 se obtienen reflejando las de arriba respecto al origen (observar que esta reflexión puede invertir el recorrido de las trayectorias). Así supongamos que

$$x_2 = \sqrt{2 \cos(x_1) + c}.$$

Observar que $x_1' = x_2 > 0$ de modo que x_1 crece en el semiplano superior y, por ende, las trayectorias se recorren de izquierda a derecha en el semiplano superior. En el semiplano inferior el sentido es pues de derecha a izquierda. Si $c > 2$ entonces $x_2 > 0$ para todo t e x_2 es una función periódica de x_1 con mínimos en $2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, y máximos en $(2n+1)\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Si $c = 2$ la trayectoria va desde $(-\pi, 0)$ a $(\pi, 0)$ (lo mismo ocurre en cada intervalo que resulta de trasladar el intervalo $(-\pi, \pi)$ por un múltiplo de 2π), no obstante estas trayectorias no puede tocar a los puntos de la forma $((2n+1)\pi, 0)$ ya que las trayectorias son disjuntas. Vemos así que estas últimas trayectorias se realizan en un tiempo infinito. Si $-2 <$

$c < 2$ la parte de la trayectoria donde $x_2 \geq 0$ y $-\pi < x_1 < \pi$ va desde el punto $(-\xi, 0)$ a $(\xi, 0)$, con $\cos(\xi) = -\frac{c}{2}$. Esta trayectoria se “empalma” con su reflejada que irá en el sentido contrario de modo que estas trayectorias provienen de soluciones periódicas. Por otro lado es fácil verificar que

$$\|Df\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos(x_1) & 0 \end{pmatrix} \right\| = 1,$$

luego $f = (f_1, f_2)$ es lipchitziana sobre \mathbb{R}^2 y las soluciones están definidas para todo tiempo. El aspecto del retrato de fases es mostrado en la figura 5.5. Vemos

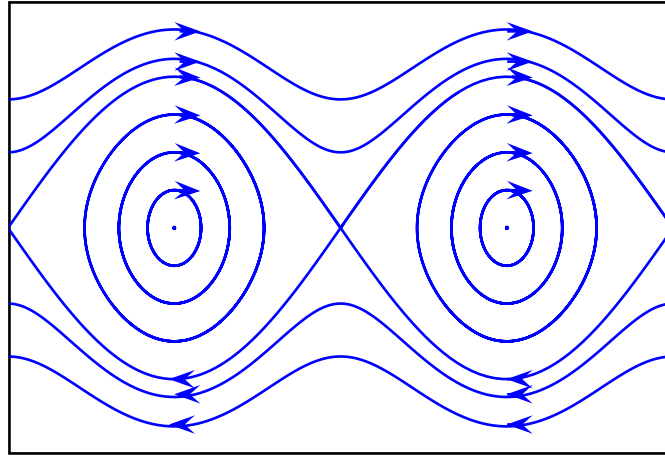


Figura 5.5: Retrato de fases de la ecuación del péndulo

que los puntos de equilibrio de la forma $(n\pi, 0)$ son similares, en los sistemas lineales, a *centros* cuando n es par y a *sillas* cuando n es impar.

No obstante en los sistemas no lineales pueden aparecer otros comportamientos en rededor de los puntos de equilibrio que aquellos ejemplificados en los sistemas lineales.

Ejemplo 5.3.2 Consideremos el sistema

$$\begin{cases} x_1' = x_1^2 \\ x_2' = x_2 \end{cases} \quad (5.4)$$

Este sistema es fácil de resolver pues está desacoplado. Resolviendo cada una de las ecuaciones independientemente obtenemos

$$\begin{aligned}x_1(t) &= \frac{1}{-t + a} \\x_2(t) &= be^t = e^{t-c} \quad (e^{-c} = b)\end{aligned}$$

Claramente las soluciones no están definidas para todo t , para cada a hay dos ramas que corresponden a soluciones diferentes. Notar que si (x_1, x_2) es solución $(x_1, -x_2)$ lo es lo que implica que el retrato de fases es simétrico respecto al eje x_1 . Eliminando el tiempo obtenemos que las trayectorias están sobre las curvas definidas por

$$x_2 = ce^{-\frac{1}{x_1}} \quad c > 0.$$

Es fácil ver que x_2 es una función creciente de x_1 cuando x_1 está en $(-\infty, 0)$ o en $(0, +\infty)$. Cuando $x_1 > 0$, x_2 está acotada por c y $\lim_{x \rightarrow +\infty} x_2 = c$. Cuando $x_1 \rightarrow 0$ por derecha, $x_2 \rightarrow 0$. En el cuadrante $x_1 < 0$ e $x_2 > 0$ notemos que $x_2 \rightarrow c$ cuando $x_1 \rightarrow -\infty$ e $x_2 \rightarrow +\infty$ cuando $x_1 \rightarrow 0$ por izquierda. Hay un sólo punto de equilibrio en $(0, 0)$. Por último el recorrido de las curvas es de izquierda a derecha pues x_2 es función creciente de t . Ver la figura 5.6

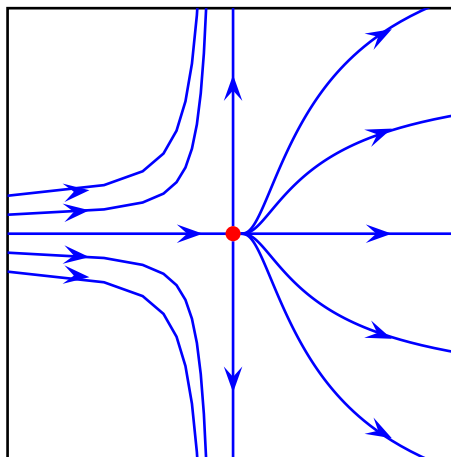


Figura 5.6: Retrato de fases ecuación $x'_1 = x_1^2, x'_2 = x_2$

En un sistema lineal hay un sólo punto de equilibrio o infinitos puntos de equilibrio que forman una recta de \mathbb{R}^2 . En un sistema no lineal autónomo podemos tener infinitos puntos de equilibrios aislados.

Ejemplo 5.3.3 Consideremos el sistema

$$\begin{cases} x'_1 = \sin(x_1) \\ x'_2 = -\sin(x_2) \end{cases} \quad (5.5)$$

El sistema tiene puntos de equilibrio en $(n\pi, m\pi)$, $n, m \in (\mathbb{Z})$. Observar que si (x_1, x_2) resuelve (5.5), entonces $(x_1 + 2n\pi, x_2 + 2m\pi)$, $n, m \in (\mathbb{Z})$, también lo resuelve, luego es suficiente hacer el retrato de fases en la caja $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ y trasladar este retrato por vectores de la forma $(2n\pi, 2m\pi)$. A la vez $(x_2 + \pi, x_1 + \pi)$, $(2\pi - x_1, x_2)$ y $(x_1, 2\pi - x_2)$ son soluciones. Estas simetrías dicen que es suficiente graficar la solución en la caja $[0, \pi] \times [0, \pi]$. El sistema está desacoplado, para x_1 tenemos la ecuación:

$$\frac{dx_1}{\sin x_1} = 1.$$

Integrando y haciendo la sustitución $s = \tan(\frac{x_1}{2})$ obtenemos

$$x_1(t) = 2 \arctan(ae^t), \quad a > 0$$

De manera similar para x_2

$$x_2(t) = 2 \arctan(be^{-t}), \quad b > 0$$

También tenemos las soluciones $x_1, x_2 = \pm\pi$. De la expresiones se deduce que si $(x_0, y_0) \in [0, \pi] \times [0, \pi]$ entonces $(x_1(t), x_2(t)) \in [0, \pi] \times [0, \pi]$ para todo t . Cuando $t \rightarrow -\infty$, $x_1 \rightarrow 0$ e $x_2(t) \rightarrow \pi$ y cuando $t \rightarrow +\infty$, $x_1 \rightarrow \pi$ e $x_2(t) \rightarrow 0$. Ver figura 5.7

Veamos un último ejemplo ilustrando un cambio de variables.

Ejemplo 5.3.4 Consideremos el sistema:

$$\begin{cases} x'_1 = -x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) \\ x'_2 = x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^2 - 1) \end{cases} \quad (5.6)$$

Aquí vamos a usar coordenadas polares $x_1 = r \cos \theta$ e $x_2 = r \sin \theta$. Se tiene

$$\begin{aligned} r' &= \frac{x_1 x'_1 + x_2 x'_2}{r} \\ \theta' &= \frac{x_1 x'_2 - x'_1 x_2}{r^2} \end{aligned}$$

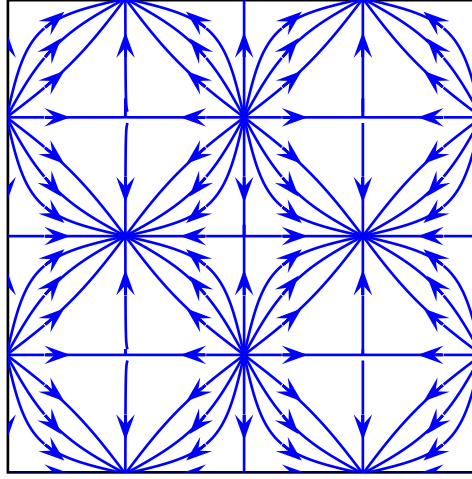


Figura 5.7: Retrato de fases ecuación $x'_1 = \sin x_1, x'_2 = -\sin x_2$

Sustituyendo en la ecuación (5.6) obtenemos

$$\begin{cases} r' = r(r^2 - 1) \\ \theta' = 1 \end{cases}, \quad (5.7)$$

que es un sistema desacoplado y fácil de resolver, obteniendo para θ la solución:

$$\theta(t) = t + a.$$

Para r tenemos, entre otras, las soluciones $r \equiv 1$ y $r \equiv 0$. La primera de ellas junto con $\theta = t + a$ determinan la circunferencia de radio uno y centro en el origen, la segunda la órbita del equilibrio $(x_1, x_2) \equiv (0, 0)$. Observar que, puesto que las órbitas no se cruzan, una órbita que empiece dentro de la bola unidad cerrada B_1 permanece allí por siempre y está definida para todo t . Si resolvemos r obtenemos

$$r(t) = \sqrt{\frac{1}{1 + ce^{2t}}},$$

cuando $c \geq 0$ estamos en B_1 y cuando $c < 0$ estamos fuera. Si $c < 0$ las soluciones están definidas (recordar que r debe ser no negativo) en el intervalo $(-\infty, -\ln \sqrt{|c|})$. De la ecuación $r' = r(r^2 - 1)$, o de su solución explícita, concluimos que r es decreciente cuando $0 < r < 1$ y es creciente cuando $1 < r$, además se ve fácilmente que $\lim_{t \rightarrow -\infty} r(t) = 1$ y $\lim_{t \rightarrow +\infty} r(t) = 0$, cuando

$c > 0$, y $\lim_{t \rightarrow -\infty} r(t) = 1$ y $\lim_{t \uparrow -\ln \sqrt{|c|}} r(t) = +\infty$, cuando $c < 0$. Como θ crece linealmente (una partícula que se mueva según la ecuación tiene velocidad angular respecto al origen constante) vemos que las soluciones (salvo $r \equiv 1$ y $r \equiv 0$) son espirales que convergen a 0 ($c > 0$) o infinito ($c < 0$). Ver la figura 5.8. Escribamos el campo f de este ejemplo como $f_1 + f_2$ donde

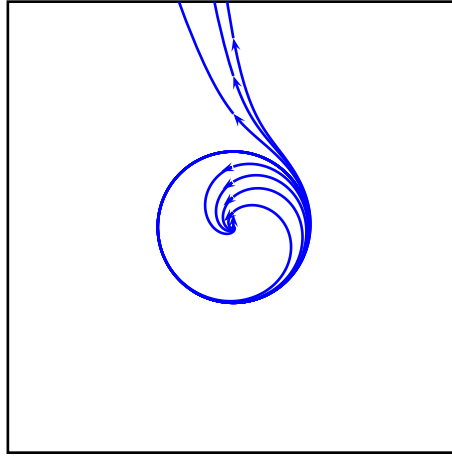


Figura 5.8: Retrato de fases de la ecuación $r' = r(r^2 - 1)$, $\theta' = 1$

$$f_1 = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad f_2 = \begin{pmatrix} x_1(r^2 - 1) \\ x_2(r^2 - 1) \end{pmatrix}.$$

La expresión $f_1 + f_2$ es la descomposición de f como suma de un vector en la dirección de (x_1, x_2) y el otro en una dirección perpendicular a él (notar que $f_1 \perp f_2$ y f_1 tiene la dirección de (x_1, x_2)). Luego si pensamos a f como el campo de fuerzas que actúa sobre una partícula, vemos que, si $r < 1$, f_2 actúa en la dirección opuesta a (x_1, x_2) , así esta fuerza tiende a acercar la partícula al origen cuando $r < 1$. Cuando $r > 1$ la fuerza f_2 rechaza la partícula. En tanto f_1 actúa en la dirección que hace rotar la partícula con velocidad angular constante.

5.3.2. Linearización

En la sección anterior construimos los retratos de fases de varios sistemas. La técnicas elementales empleadas fueron *ad hoc*, es decir pueden funcionar en alguno sistemas pero en otros no. El interés en lo que sigue estará puesto en elaborar

técnicas más generales de análisis de los retratos de fases. Una de estas técnicas es la linearización. Esta técnica es de índole local, nos dará información del comportamiento de las soluciones cerca de los puntos de equilibrio. Como ya dijimos, esto es insuficiente para analizar los retratos de fases de sistemas no lineales. Expliquemos brevemente esta técnica. Sea la ecuación

$$x' = f(x) \quad f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (5.8)$$

y $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ un punto de equilibrio. Aproximando el campo f por su polinomio de Taylor de grado 1 y recordando que $f(x^0) = 0$ tenemos

$$x' = Df(x^0)(x - x^0) + R(x - x^0), \quad (5.9)$$

donde el resto R en esta expresión satisface

$$\lim_{x \rightarrow x^0} \frac{\|R(x - x^0)\|}{\|x - x^0\|} = 0.$$

Si despreciamos R en la ecuación (5.9) (suponiendo que estamos cerca de (x_0, y_0)) y escribimos $u = (u_1, u_2) = x - x^0$ obtenemos

$$u' = Df(x^0)u := Au \quad (5.10)$$

que es un sistema lineal. La esperanza es que las propiedades cualitativas de los sistemas (5.8) y (5.10) sean las mismas. Para comprobar esto empíricamente volvamos a los ejemplos de la subsección anterior.

En la ecuación del péndulo los puntos de equilibrio del sistema (5.3) son $x^0 = (n\pi, 0)$, $n \in \mathbb{Z}$. Calculando Df en estos puntos, con $f = (x_2, -\sin x_1)$ obtenemos

$$A = Df(n\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (-1)^{n+1} & 0 \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

Como puede verse fácilmente con las técnicas desarrolladas para sistemas lineales, esta matriz corresponde a un centro cuando n es par y a una silla cuando n es impar. Así en este ejemplo la técnica se aplicaría. Pero esto no siempre es así, como lo muestra el ejercicio 5.2. Una situación similar, en cierto aspecto, al ejercicio lo representa el ejemplo 5.3.2 cuya linearización en el origen satisface

$$A = Df(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

El retrato de fases del sistema $u' = Au$ se muestra en la figura 5.9. Como se

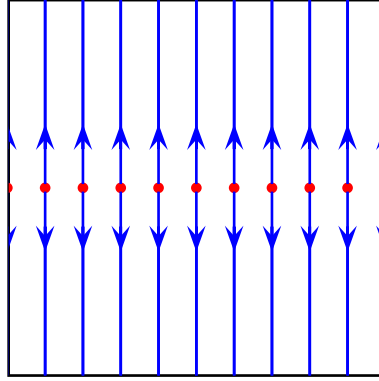


Figura 5.9: Retrato de fases de la ecuación $u'_1 = 0, u'_1 = u_2$

ve comparando las figuras 5.9 y 5.6 los retratos de fases son muy distintos. ¿Por qué no funciona la técnica de linealización en estos ejemplos? Ocurre que en los sistemas de estos ejemplos la matriz A tiene autovalores con parte real igual a 0. Como hemos visto un autovalor con parte real positiva determina soluciones cualitativamente muy diferentes que un autovalor con parte real negativa, un autovalor con parte real 0 está en el límite y cualquier pequeña perturbación del sistema proveniente del resto R puede cambiar radicalmente el retrato de fases de un sistema respecto a su linealización. Esta discusión nos muestra que la técnica de linealización no funcionará cuando A tenga autovalores con parte real nula. Pero examinemos más detenidamente la técnica en los casos en que sí funciona, por ejemplo en la ecuación del péndulo (5.3). Notar que la matriz A en (5.11) satisface que $\sigma(A) = \{\pm 1\}$, si n es impar, y $\sigma(A) = \{\pm i\}$, si n es par, por lo dicho anteriormente consideremos sólo el caso n impar, ya que el otro caso tiene autovalores con parte real 0. Tomemos $n = 1$, el comportamiento en otro equilibrio con n impar es similar por la periodicidad. Observar que

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

son autovectores correspondientes a los autovalores $\lambda = 1$ y $\lambda = -1$, respectivamente, de A . El origen es una silla de $u' = Au$ y sus subespacios estable e inestables son

$$E^s = \{(-x_1, x_1) : x_1 \in \mathbb{R}\} \quad \text{y} \quad E^u = \{(x_1, x_1) : x_1 \in \mathbb{R}\}.$$

Como se sabe E^u determinan las orbitas que “llegan” a $(0, 0)$, cuando “ $t = +\infty$ ”, y E^s que “salen” cuando “ $t = -\infty$ ”. En el sistema del péndulo (5.3) encontramos trayectorias que salían de $(\pi, 0)$ y llegaban. Estas trayectorias estaban sobre las gráficas de

$$x_2 = \sqrt{2 \cos(x_1) + 2} = 2 \cos\left(\frac{x_1}{2}\right)$$

y su reflejada

$$x_2 = -\sqrt{2 \cos(x_1) + 2} = -2 \cos\left(\frac{x_1}{2}\right).$$

La primera llegaba a $(\pi, 0)$ y la segunda sale. Estas curvas se llaman la *variedad estable* y la *variedad inestable*, respectivamente, de la ecuación en $(\pi, 0)$. Notar que las pendientes con que estas trayectorias llegan y salen del equilibrio son igual a

$$\lim_{x_1 \rightarrow \pi^-} \frac{dx_2}{dx_1} = \lim_{x_1 \rightarrow \pi^-} -\sin\left(\frac{x_1}{2}\right) = -1$$

y

$$\lim_{x_1 \rightarrow \pi^-} \frac{dx_2}{dx_1} = \lim_{x_1 \rightarrow \pi^-} \sin\left(\frac{x_1}{2}\right) = 1.$$

Vemos así que, aparte de tener un retrato de fases similar, los subespacios estables e inestables de la linearización son tangentes a las variedades estables e inestables, respectivamente, del sistema (ver figura 5.10). Esto es un hecho general que después demostraremos. Antes de continuar con el tema de linearización discuti-

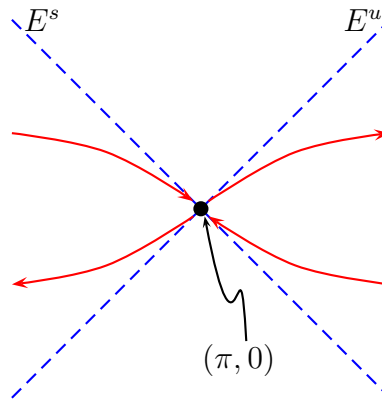


Figura 5.10: Linearización de la ecuación del péndulo

remos algunos conceptos.

5.4. El flujo de una ecuación diferencial

El concepto de *flujo* es una manera nueva de mirar las soluciones de la ecuación diferencial

$$x' = f(x) \quad f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n. \quad (5.12)$$

El flujo es una función $\Phi_t : \Omega \rightarrow \Omega$, es decir una transformación (movimiento) del espacio de fases \mathbb{R}^n . Supongamos que la ecuación (5.12) corresponda a las trayectoria seguida por una partícula que obedece cierta ley física. Entonces $\Phi_t(x)$ es la posición después de t segundos que ocupa la partícula que inicialmente está en x . Notar que al ser el sistema autónomo es irrelevante el valor exacto del tiempo inicial (es lo mismo ver como evoluciona la partícula de x a $\Phi_t(x)$ hoy o mañana). La definición del flujo es pues:

Definición 5.4.1 Definimos el flujo Φ de la ecuación (5.12) por $\Phi_t(x) = \varphi(t)$, donde φ es solución de (5.12) y $\varphi(0) = x$.

Notar que para tener definido $\Phi_t(x)$ debemos tener que $t \in I_\varphi$.

Teorema 5.4.2 El flujo tiene las siguientes propiedades.

1. $\Phi_t \circ \Phi_s = \Phi_{t+s}$,
2. Φ_0 es la transformación identidad,
3. Φ_t es un homeomorfismo con inversa Φ_{-t} .

Dem. Para demostrar la primera propiedad tomemos φ solución de (5.12) con $t \in I_\varphi$ y $\varphi(0) = x$ y ψ solución con $s \in I_\psi$ y $\psi(0) = \Phi_t(x)$. Luego $\varphi(t) = \Phi_t(x) = \psi(0)$ y por el Teorema 5.1.2 debemos tener $\varphi(t+s) = \psi(s)$ que es la igualdad 1. La propiedad 2 es inmediata de la definición. Para la propiedad en 3 notemos que por 1 y 2 Φ_t tiene por inversa Φ_{-t} . El hecho de que estas transformaciones son continuas se sigue de la continuidad de las soluciones respecto a las condiciones iniciales, esto no lo demostraremos en este curso. \square

Si todas las soluciones estuvieran definidas en \mathbb{R} entonces la aplicación $t \rightarrow \Phi_t$ es un homomorfismo entre el grupo \mathbb{R} y el grupo de todos los homeomorfismos con la operación de composición. Por este motivo se dice que el flujo Φ_t forma un *grupo uniparamétrico*.

5.5. Conjuntos invariantes

El siguiente concepto de *conjunto invariante* desempeña un rol importante.

Definición 5.5.1 Sea Φ_t el flujo asociado a la ecuación (5.12). Un conjunto $S \subset \Omega$ se dirá invariante por Φ si $\Phi_t(x) \in S$, para cada $x \in S$ y para cada t tal que tengamos definido $\Phi_t(x)$.

Vale decir un conjunto es invariante si una solución que en un momento está dentro de él lo está, y estuvo, siempre. Análogamente podemos definir *conjunto invariante hacia el futuro*

Definición 5.5.2 Diremos que $S \subset \Omega$ es invariante hacia el futuro si $\Phi_t(x) \in S$, para cada $x \in S$ y para cada $t > 0$ tal que $\Phi_t(x)$ este definida.

Una condición que utilizaremos para demostrar la invariancia hacia el futuro de un conjunto abierto $S \subset \Omega$ viene de una intuición geométrica clara. Supongamos que en cada punto $x \in \partial S$ el campo $f(x)$ apunta hacia dentro del conjunto S , en ese caso podemos intuir que el conjunto es invariante hacia el futuro. Esto se afirma porque para escaparse de S una trayectoria debería atravesar ∂S y, en el punto x en que la atraviesa, la dirección de $f(x)$ que debe ser tangente a la trayectoria debería apuntar en la dirección exterior de S . En lo que sigue trataremos de explicitar mejor estas afirmaciones.

Definición 5.5.3 Dado un vector v definimos el cono de amplitud $\theta > 0$, de longitud $h > 0$, con centro en x^0 y dirección de v por

$$S(x^0, v, \theta, h) = B_h(x^0) \cap \{x \in \mathbb{R}^n : (x - x^0) \cdot v > \theta \|x - x^0\| \|v\|\}.$$

Vale decir $S(x^0, v, \theta, h)$ corresponde a todos los puntos x tales que $x - x^0$ forma un ángulo menor a $\arccos \theta$ con v y que $x \in B(x^0, h)$.

Teorema 5.5.4 Sea $S \subset \Omega$ un conjunto abierto y supongamos que para cada $x^0 \in \partial S$ existen un $1 \geq \theta > 0$ y $h > 0$ tales que $S(x^0, f(x^0), \theta, h) \subset S$ (vale decir, no sólo $f(x^0)$ sino todo un cono apunta hacia el interior), entonces S es invariante hacia el futuro.

Dem. Supongamos que por el contrario existe $x \in S$ y $t > 0$ tales que $y := \Phi_t(x) \notin S$. Debe ocurrir que existe un $t_0 \in [0, t]$ tal que $x^0 = \Phi_{t_0}(x) \in \partial S$. De lo contrario la trayectoria entre $[0, t]$, que es un conjunto conexo, estaría contenida en

la unión del interior y exterior de S que daría una contradicción. Sea $t_1 = \sup\{s : \Phi_s(x) \in \partial S\}$, entonces por continuidad y como ∂S es cerrado $x^0 = \Phi_{t_1}(x) \in \partial S$. Además, de la definición $\Phi_s(x) \notin S$, cuando $s > t_1$. Sean θ y h los parámetros de las hipótesis del teorema. Pongamos $\varphi(t) = \Phi_{t+t_1}(x)$ y desarrollemos φ por su polinomio de Taylor de grado 1 alrededor de $t = 0$:

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= x^0 + t\varphi'(0) + R(t) \\ &= x^0 + tf(x^0) + R(t) \quad \text{con } \|R(t)\|/t \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow 0.\end{aligned}\tag{5.13}$$

Sea $\epsilon > 0$ tal que $2\epsilon < (1 - \theta)\|f(x^0)\|$ (notar que debe ser $f(x^0) \neq 0$) y sea $\delta > 0$ suficientemente pequeño para que

$$\|R(t)\| \leq \epsilon t,$$

para $0 < t < \delta$, entonces

$$\|\varphi(t) - x^0\| \leq t\|f(x^0)\| + \|R(t)\| \leq t\|f(x^0)\| + \epsilon t.$$

para $0 < t < \delta$. Así tendremos $\|\varphi(t) - x^0\| \leq h$ eligiendo δ suficientemente pequeño. Entonces

$$\begin{aligned}(\varphi(t) - x^0) \cdot f(x^0) &\geq t\|f(x^0)\|^2 - \|R(t)\|\|f(x^0)\| \\ &\geq t\|f(x^0)\|^2 - \epsilon t\|f(x^0)\| \\ &\geq \theta t\|f(x^0)\|^2 + (1 - \theta)t\|f(x^0)\|^2 - \frac{(1 - \theta)}{2}t\|f(x^0)\|^2 \\ &\geq \theta t\|f(x^0)\|^2 + \frac{(1 - \theta)}{2}t\|f(x^0)\|^2 \\ &\geq \theta t\|f(x^0)\|^2 + \epsilon t\|f(x^0)\| \\ &\geq \theta\|\varphi(t) - x^0\|\|f(x^0)\|\end{aligned}$$

De esta manera vemos que $\varphi(t) = \Phi_{t+t_1}(x) \in S(x^0, f(x^0), \theta, h) \subset S$ para $0 < t < \delta$ y esto contradice la elección de t_1 . \square

5.6. Linearización: continuación

En esta sección elaboraremos técnicas que nos permitirán demostrar que, en ciertos casos, el retrato de fases de un sistema se comporta de manera similar a su

linearización. Sólo demostraremos el caso de nodos estables, otros casos quedarán como ejercicio. Consideremos f una campo de clase C^1 definido sobre $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Supongamos que x^0 es un punto de equilibrio *aislado* de f , es decir $f(x^0) = 0$ y existe una bola $B(x^0, \delta)$ tal que dentro de esta bola el único equilibrio es x^0 . A lo largo de esta sección vamos a considerar la linearización del sistema

$$x' = f(x). \quad (5.14)$$

Notar que si x resuelve este sistema entonces $y = x - x^0$ resuelve $y' = g(y)$, donde $g(y) := f(y + x^0)$, y que g tiene un equilibrio en $x^0 = 0$. Por ello, de ahora en más supondremos $x^0 = 0$. Con esta convención, la linearización de (5.14) es el sistema

$$x' = Ax, \quad (5.15)$$

donde, a lo largo de la sección escribiremos A para la matriz jacobiana $Df(0)$.

Definición 5.6.1 Diremos que el punto de equilibrio $x^0 = 0$ es simple si la matriz A es no singular.

Para un vector no nulo v escribiremos $\arg v = v/\|v\|$, el valor $\arg v$ se puede identificar continuamente con un único ángulo θ cuando $\theta \in (-\pi, \pi)$.

Lema 5.6.2 Un punto de equilibrio simple es aislado. Además

$$\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \frac{\|f(x)\|}{\|Ax\|} = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{\|x\| \rightarrow 0} (\arg f(x) - \arg Ax) = 0$$

Dem. Como A es no singular $Ax \neq 0$ para todo x con $\|x\| = 1$. Luego

$$c := \inf_{\|x\|=1} \|Ax\| > 0.$$

La constante c satisface que

$$c\|x\| \leq \|Ax\|, \quad (5.16)$$

para todo $x \in \mathbb{R}^2$. Como f es diferenciable y $f(0) = 0$:

$$f(x) = Ax + R(x), \quad \text{con} \quad \lim_{\|x\| \rightarrow 0} \frac{\|R(x)\|}{\|x\|} = 0. \quad (5.17)$$

Luego

$$\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \left\| \frac{f(x)}{\|Ax\|} - \frac{Ax}{\|Ax\|} \right\| \leq c \lim_{\|x\| \rightarrow 0} \left\| \frac{f(x)}{\|x\|} - \frac{Ax}{\|x\|} \right\| = 0.$$

Esta última desigualdad implica que $f(x) \neq 0$ en un entorno de 0 y por otro lado

$$\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \left| \frac{\|f(x)\|}{\|Ax\|} - 1 \right| \leq \lim_{\|x\| \rightarrow 0} \left\| \frac{f(x)}{\|Ax\|} - \frac{Ax}{\|Ax\|} \right\| = 0$$

y

$$\begin{aligned} \lim_{\|x\| \rightarrow 0} (\arg f(x) - \arg Ax) &= \lim_{\|x\| \rightarrow 0} \left\| \frac{f(x)}{\|f(x)\|} - \frac{Ax}{\|Ax\|} \right\| \\ &= \lim_{\|x\| \rightarrow 0} \left\| \frac{f(x)}{\|f(x)\|} - \frac{f(x)}{\|Ax\|} + \frac{f(x)}{\|Ax\|} - \frac{Ax}{\|Ax\|} \right\| \\ &\leq \lim_{\|x\| \rightarrow 0} \left\| \frac{f(x)}{\|f(x)\|} - \frac{f(x)}{\|Ax\|} \right\| \\ &= \lim_{\|x\| \rightarrow 0} \left| \frac{\|f(x)\|}{\|Ax\|} - 1 \right| = 0. \end{aligned}$$

□

A menudo aplicaremos este lema de la siguiente forma: para todo $\epsilon > 0$ existe un $r > 0$ tal que para todo x en la bola abierta B_r con centro en 0 y radio r se tiene que

$$\left| \frac{\|f(x)\|}{\|Ax\|} - 1 \right| < \epsilon \quad \text{y} \quad \|\arg f(x) - \arg Ax\| < \epsilon. \quad (5.18)$$

Definición 5.6.3 Sea $x(t)$ una solución de (5.14) tal que $x(t)$ tiende al equilibrio 0 cuando $t \rightarrow \infty$. Diremos que $x(t)$ entra en el equilibrio 0 en la dirección de v si $\arg(x(t)) \rightarrow v$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Teorema 5.6.4 Sea $x(t)$ que entra a 0 cuando $t \rightarrow \infty$ en la dirección de v , entonces v es un autovector de $A = Df(0)$.

Dem. Por la ecuaciones (5.14), (5.17), dividiendo por $\|x(t)\|$ y tomando límite para $t \rightarrow \infty$ tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x'(t)}{\|x(t)\|} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(x(t))}{\|x(t)\|} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{Ax(t)}{\|x(t)\|} + \frac{R(x(t))}{\|x(t)\|} \\ &= Av. \end{aligned}$$

Por lo tanto $x'(t)/\|x(t)\|$ tiene límite cuando $t \rightarrow +\infty$. Utilizando la regla de l'Hospital en cada coordenada $i = 1, 2$ y teniendo en cuenta que

$$\frac{d}{dt}\|x(t)\| = \frac{x(t) \cdot x'(t)}{\|x(t)\|}$$

obtenemos que

$$\begin{aligned} v &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x(t)}{\|x(t)\|} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x'(t)}{\frac{x(t) \cdot x'(t)}{\|x(t)\|}} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x'(t)}{\|x(t)\|} \frac{1}{\frac{x(t) \cdot x'(t)}{\|x(t)\|^2}} \\ &= \frac{1}{v \cdot Av} Av. \end{aligned}$$

Lo que muestra que v es un autovector correspondiente al autovalor $\lambda := v \cdot Av$. \square

Sea $x(t)$ solución no nula de (5.14) que tiende a 0 cuando $t \rightarrow \infty$, sea P cualquier matriz no singular y pongamos

$$y = P^{-1}x, \quad (5.19)$$

entonces y resuelve

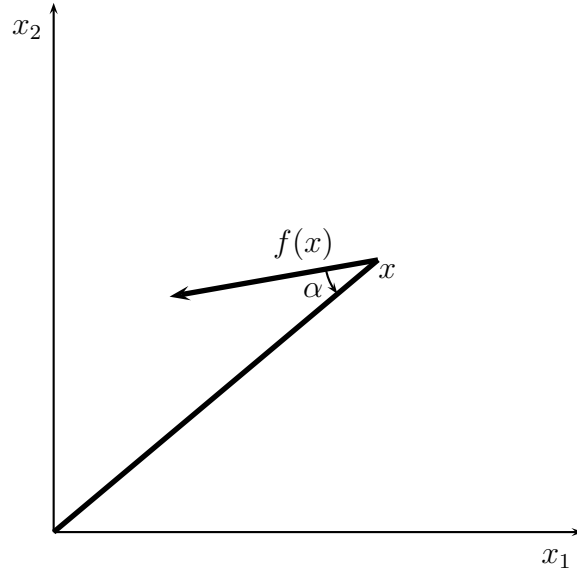
$$y' = P^{-1}x' = P^{-1}f(x) = P^{-1}f(Py) =: g(y).$$

Notar que

$$Dg(y) = P^{-1}DfP = P^{-1}AP =: B,$$

si elegimos P de modo que B sea la forma de Jordan de A , vemos que el retrato de fases del sistema (5.14) y su linealizado se obtienen por una transformación afín del retrato de fases de un sistema cuya linealización tiene una matriz en forma de Jordan; como este tipo de transformaciones preservan todas las características que deseamos estudiar, a menudo supondremos que $A = Df(0)$ esta dada en forma de Jordan.

En lo que sigue será importante considerar el ángulo $\alpha \in (-\pi, \pi]$ que forma el campo $f(x)$ con $-x$ ($x \neq 0$), ver la figura 5.11. Este ángulo satisface:

Figura 5.11: Ángulo α

$$\cos \alpha = -\frac{f(x) \cdot x}{\|f(x)\| \|x\|} = -\arg f(x) \cdot \arg x.$$

Análogamente definimos $\beta \in (-\pi, \pi]$, que satisface:

$$\cos \beta = -\frac{Ax \cdot x}{\|Ax\| \|x\|} = -\arg Ax \cdot \arg x.$$

Estas ecuaciones determinan $|\alpha|$ y $|\beta|$, pero no el signo de los ángulos. Los ángulos α y β pueden ser funciones discontinuas de x cuando asumen el valor π , no obstante $\cos \alpha$ y $\cos \beta$ son funciones continuas de $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Recordando el Lema 5.6.2 tenemos que para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|\cos \alpha - \cos \beta| < \epsilon, \quad \text{cuando} \quad \|x\| < \delta. \quad (5.20)$$

Notar además que $\beta(x) = \beta(\lambda x)$, para todo λ . Es a menudo conveniente representar la ecuación en coordenadas polares (r, θ) , teniendo en cuenta que $(x_1, x_2) \perp (-x_2, x_1)$

nos queda:

$$\begin{aligned}
 r' &= \frac{x \cdot x'}{r} = -\frac{x \cdot f(x)}{r} = -\|f(x)\| \cos \alpha \\
 \theta' &= \frac{x_1 x_2' - x_1' x_2}{r^2} \\
 &= \frac{(f_1, f_2) \cdot (-x_2, x_1)}{r^2} \\
 &= \frac{\|f(x)\| \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{r} \\
 &= \frac{\|f(x)\| \sin \alpha}{r}.
 \end{aligned} \tag{5.21}$$

Vamos a considerar por separado la linearización de sistemas (5.14) para tipos distintos (no todos) del sistema linearizado (5.15).

Teorema 5.6.5 (Nodos estables) *Supongamos que $f(0) = 0$ y que (5.15) tiene un nodo estable en 0, es decir A tiene autovalores reales distintos y negativos $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$. Entonces existe $\delta > 0$ tal que si $x \in B_\delta(0)$:*

1. $\Phi_t(x)$ está definida para todo $t \geq 0$ y $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi_t(x) = 0$.
2. $\Phi_t(x)$ entra en $(0, 0)$ y lo puede hacer sólo en las direcciones determinadas por los autovectores de A .
3. Hay al menos una trayectoria que llega en la dirección de cada autovector.

Dem. Por el cambio de variables (5.19) podemos suponer

$$A = Df(0, 0) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

y

$$f(x) = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2) + R(x),$$

donde

$$\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \frac{\|R(x)\|}{\|x\|} = 0.$$

Por las suposiciones sobre los autovalores se tiene $\cos \beta > 0$, cuando $x \neq 0$. Como $\cos \beta$ es una función continua, $\cos \beta(x) = \cos \beta(\lambda x)$ y $\partial B_1(0)$ es compacto se tiene que existe $x^0 \in \partial B_1(0)$ tal que

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}} \cos \beta = \min_{x \in \partial B_1(0)} \cos \beta = \cos(\beta(x^0)) =: c_0 > 0. \tag{5.22}$$

Esto muestra que siempre el ángulo β satisface que $|\beta| < \pi/2$ en \mathbb{R}^2 . Sea $\epsilon > 0$ y tomemos $\delta > 0$ que satisface (5.20). Tomando $\epsilon = c_0/2$ obtenemos a partir de (5.22) y (5.20) que

$$\cos \alpha \geq \frac{c_0}{2} =: c_1 > 0, \quad (5.23)$$

para todo $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Sea $x \in B_\delta \setminus \{0\}$, expresando la trayectoria $\Phi_t(x)$ usando las ecuaciones (5.21) tenemos

$$r'(t) \leq -\|f(\Phi_t(x))\|c_1 < 0 \quad \text{y} \quad \theta'(t) = \frac{\|f(\Phi_t(x))\| \sin \alpha}{r}. \quad (5.24)$$

Así vemos que r' es decreciente y, por ende, $\Phi_t(x) \in B_\delta$, para todo $t \geq 0$. Esto implica que $\Phi_t(x)$ está definida para todo $t \geq 0$. Supongamos que $\Phi_t(x)$ no tiende a 0, luego, ya que $r(t)$ es decreciente, existe r_0 tal que $\delta \geq r(t) \geq r_0$, para todo $t > 0$. Como 0 es un equilibrio aislado podemos elegir δ de modo que en $B_{2\delta}(0)$ sólo exista el equilibrio $x = 0$. Entonces $\|f(y)\|$ tiene una cota inferior $k > 0$ cuando $r_0 \leq \|y\| \leq \delta$. Esto y (5.24) implican que $r'(t) \leq -c_1 k$, e integrando entre 0 y t esta desigualdad obtenemos

$$r(t) \leq -c_1 kt + r(0) \leq -c_1 r_0 t + \delta. \quad (5.25)$$

Luego si t es suficientemente grande tendríamos $r(t) < r_0$ que contraría nuestra suposición. Luego $\Phi_t(x) \rightarrow 0$, cuando $t \rightarrow \infty$, para todo $x \in B_\delta$. Esto prube el inciso 1.

Ahora el Teorema 5.6.4 implica que de entrar en el origen $\Phi_t(x)$ lo debería hacer en las direcciones de los autovectores de A , que en este caso podrían ser los vectores $\pm e_1, \pm e_2$. Probaremos ahora que toda trayectoria que empieza en B_δ entra al origen, más precisamente probaremos que si $\Phi_t(x)$ no entra al origen con la dirección de $\pm e_1$ lo hace en la de $\pm e_2$.

Sea $\eta > 0$. Cubramos los ejes x_1 y x_2 del plano con sectores de ángulo η y nombremos las regiones resultantes como en la figura 5.12. Sea x un vector en el primer cuadrante con $\|x\| = 1$. Notemos que la desigualdad de Cauchy-Schwartz dice que la igualdad

$$|Ax \cdot x| = \|Ax\|\|x\| = \|Ax\|$$

se alcanza si, y sólo si, Ax y x están alineados, es decir si existe μ tal que $Ax = \mu x$ y, en otras palabras si μ es un autovalor y x un autovector. Esto nos dice que $\mu = \lambda_1$ y $x = e_1$ o $\mu = \lambda_2$ y $x = e_2$. Por ende si $x \in C_1$ tenemos que

$$-1 < \cos \beta = \frac{Ax \cdot x}{\|Ax\|\|x\|} < 1$$

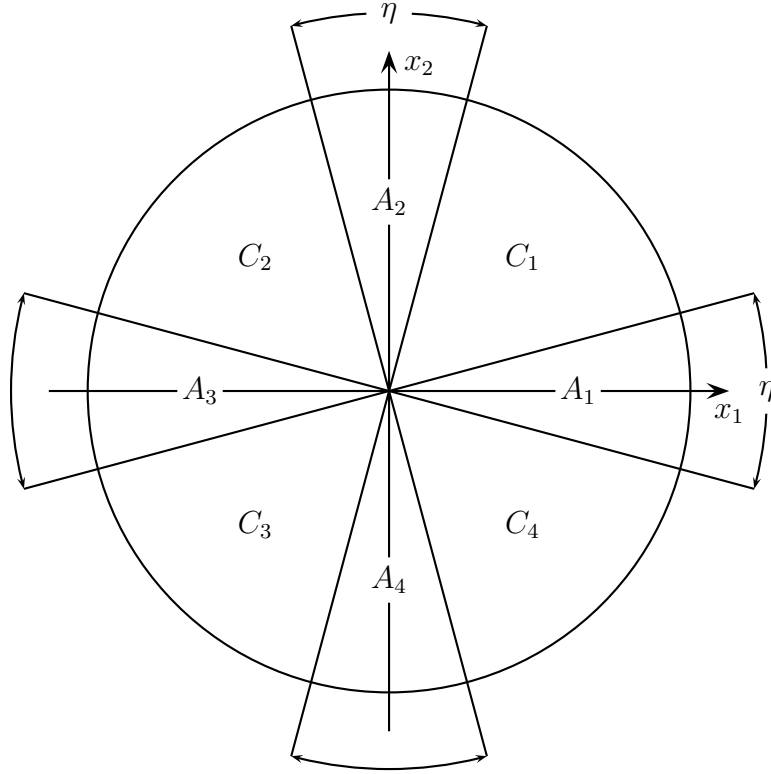


Figura 5.12: División del plano

Consideremos el compacto $K := C_1 \cap \partial B_1(0)$. La función (continua respecto a x) $\cos \beta = \cos \beta(x)$ alcanza un máximo c_0 y un mínimo c_1 en K . Luego, por la desigualdad anterior y dado que $e_1, e_2 \notin K$, si $x \in K$

$$-1 < c_1 \leq \cos \beta \leq c_0 < 1. \quad (5.26)$$

Ahora (5.26) y la identidad $H(\lambda x) = H(x)$ implican que (5.26) se mantiene para todo $x \in C_1 \setminus \{0\}$. Esto prueba que

$$-1 < c_1 \leq \cos \beta \leq c_0 < 1. \quad (5.27)$$

Tomando \arccos tenemos $0 < \beta_0 < |\beta| < \pi - \beta_0$, para cierto β_0 . Lo mismo ocurre en las otras regiones C . Nuevamente, de la continuidad de $\cos \beta(x)$ vemos que β debe asumir sólo un signo en cada región C . Se puede verificar que β es positivo en el primer y tercer cuadrante (en el interior de ellos para ser más específico) y

negativo en los restantes, entonces $0 < \beta_0 < \beta < \pi - \beta_0$ en C_1 . Entonces, si x^0 es un punto de la frontera común entre A_1 y C_1 se tiene

$$S(x^0, Ax^0, \cos \beta_0, h) \subset C_1, \quad \text{para algún } h > 0. \quad (5.28)$$

Pongamos $\theta_1 = \cos \beta_0$. De la acotación (5.16) existe $\lambda > 0$ tal que

$$\lambda \|x\| \leq \|Ax\|,$$

para todo x . Sean ϵ, θ_0 números positivos que especificaremos con más precisión luego. En virtud del Lema 5.18 y la diferenciabilidad de f , podemos elegir $\delta > 0$ de modo que

$$\|R(x)\| \leq \epsilon \|x\| \quad \text{y} \quad \|f(x)\| > (1 - \epsilon) \|Ax\|,$$

cuando $\|x\| < \delta$. Ahora si $x \in S(x^0, f(x^0), \theta_0, h)$ y $x^0 \in B_\delta$ tenemos que

$$\begin{aligned} \theta_0(1 - \epsilon) \|Ax^0\| \|x - x^0\| &\leq \theta_0 \|f(x^0)\| \|x - x^0\| \\ &\leq f(x^0) \cdot (x - x^0) \\ &\leq Ax^0 \cdot (x - x^0) + R(x^0) \cdot (x - x^0) \\ &\leq Ax^0 \cdot (x - x^0) + \|R(x^0)\| \|x - x^0\| \\ &\leq Ax^0 \cdot (x - x^0) + \epsilon \|x^0\| \|x - x^0\| \\ &\leq Ax^0 \cdot (x - x^0) + \epsilon \lambda^{-1} \|Ax^0\| \|x - x^0\| \end{aligned}$$

Ahora eligiendo θ_0 arbitrariamente en el intervalo $(\theta, 1)$ y $\epsilon > 0$ de modo que $(1 - \epsilon)\theta_0 > \frac{\theta_1 + \theta_0}{2}$ y $\epsilon \lambda^{-1} < \frac{\theta_0 - \theta_1}{2}$ (para lo cual habrá que achicar δ convenientemente), obtenemos que

$$\theta_1 \|Ax^0\| \|x - x^0\| \leq Ax^0 \cdot (x - x^0),$$

lo que prueba que

$$S(x^0, f(x^0), \theta_0, h) \subset S(x^0, Ax^0, \theta_1, h).$$

Recordando (5.28), vemos que si x^0 está en el borde común entre C_1 y A_1 entonces existe $h > 0$ y θ_0 tales que

$$S(x^0, f(x^0), \theta_0, h) \subset C_1. \quad (5.29)$$

Luego por el Teorema 5.5.4 si $x \in B_\delta \cap C_1$ entonces $\Phi_t(x)$ no puede cruzar $\partial C_1 \cap \partial A_1$. Recordando que δ se había elegido de modo que $r(t)$ era decreciente ($\Phi_t(x)$ no puede cruzar ∂B_δ) y haciendo un análisis análogo al anterior sobre cada lado de los sectores angulares A_i , $i = 1, \dots, 4$, se finaliza por demostrar las siguientes afirmaciones:

1. Si $i = 2, 4$, entonces $B_\delta \cap A_i$ es invariante hacia el futuro.
2. Si $x \in B_\delta$ pero x no está en A_i , $i = 1, 3$, entonces $\Phi_t(x)$ nunca entra a A_i , $i = 1, 3$.

Sea $x \in B_\delta \setminus \{0\}$. Observar que una condición necesaria y suficiente para que $\Phi_t(x)$ entre al origen en la dirección de $-e_1$ es que para todo $\delta' > 0$ y $\eta > 0$ exista $t_{\eta, \delta'}$ tal que para $t > t_{\eta, \delta'}$ tengamos $\Phi_t(x) \in A_1(\eta) \cap B_{\delta'}$. Una afirmación análoga se mantiene para las otras tres direcciones en que $\Phi_t(x)$ puede entrar a 0.

Supongamos que $x \in B_\delta$ y que $\Phi_t(x)$ no entra al origen en la dirección de $\pm e_1$. Por el comentario del párrafo anterior existen $\delta > \delta' > 0$, $\eta' > 0$ y t_0 tales que $\Phi_{t_0}(x) \notin (A_1(\eta') \cup A_3(\eta')) \cap B_{\delta'}$. Vamos a ver, observando que en las regiones C_i , $i = 1, \dots, 4$ la velocidad angular θ' es estrictamente positiva, que, para todo $\eta < \eta'$, la trayectoria $\Phi_t(x)$ entra a las regiones $A_i(\eta)$, i par, para algún $t > t_0$.

Si esto no fuera cierto $\Phi_t(x)$, $t > t_0$ permanecería en una región C_i , digamos C_1 , para algún η . Ahora en C_1 el ángulo α es positivo y por (5.24) tenemos

$$\theta'(t) = \frac{\|f(\Phi_t(x))\| \sin \alpha}{r} > 0.$$

Es decir que la función $\theta(t)$ es creciente, además θ está acotado en C_1 , más precisamente $\theta < \frac{\pi}{2} - \frac{\eta}{2}$. De esta manera el límite $\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) =: \theta_0$ existe, es menor a $\pi/2$ y positivo. Esto implica que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\Phi_t(x)}{r(t)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} (\cos \theta, \sin \theta) = (\cos \theta_0, \sin \theta_0) =: v_0,$$

donde v_0 es distinto de e_1 y e_2 , lo que contradice que las únicas formas de entrar eran en la dirección de los autovectores.

Hemos probado que para todo η , existe un t_1 tal que $\Phi_{t_1}(x)$ está en las regiones A_2 . Como A_2 es invariante hacia el futuro, tenemos que $\Phi_t(x) \in A_2$, para todo $t \geq t_1$. Luego $\Phi_t(x)$ entra al origen en la dirección de $-e_2$. Con esto probamos el inciso 2.

Observar que, de paso, probamos que toda trayectoria que empieza en la bola B_δ y en alguna de las regiones C entra al origen en la dirección de $\pm e_2$. Si empieza en C_i , con $i = 1, 2$, entra en la dirección de $-e_2$; si empieza en C_i , con $i = 3, 4$, entra en la dirección de e_2 . Entonces hay trayectorias que entran en la dirección de $\pm e_2$. Lo único que restaría probar es que hay al menos una trayectoria que entra al origen en la dirección de $\pm e_1$.

Esto se hará con un argumento puramente topológico. Supongamos que no hay trayectorias entrando al origen en la dirección de $-e_1$. Consideremos el sector

$A_1(\eta)$, para cualquier η . De modo que si $x \in A_1(\eta) \cap B_\delta$, $\Phi_t(x)$ debe entrar al origen en la dirección de $\pm e_2$. Para ello $\Phi_t(x)$ debe pasar primero por alguno de los interiores de las regiones C_1 o C_4 . Dividamos $A_1(\eta) \cap B_\delta$ en los dos conjuntos G_1 y G_2 acorde a aquellos puntos que llegan al interior de C_1 o al de C_4 . Se tiene que $A_1(\eta) \cap B_\delta = G_1 \cup G_2$, $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ y que G_1 y G_2 son abiertos relativos en $A_1(\eta) \cap B_\delta$ (esto sigue de la continuidad de Φ_t). Además los conjuntos G son no vacíos, para ver esto solo hay que notar que $A_1(\eta) \cap B_\delta$ contiene puntos de las regiones C_1 y C_4 correspondientes a $\eta/2$. Todo esto implica una contradicción pues $A_1(\eta) \cap B_\delta$ es conexo. De esta forma alguna trayectoria entra al origen en la dirección de e_1 . \square

Para puntos sillas tenemos el siguiente teorema.

Teorema 5.6.6 (Sillas) *Supongamos que $f(0) = 0$ y que (5.15) tiene un punto silla en 0, es decir A tiene autovalores reales de distinto signo $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$. Consideremos las regiones $A_2(\eta)$ y $A_4(\eta)$ como en la demostración del teorema anterior. Entonces existe $\delta > 0$ tal que:*

1. *Si $x \in A_i(\eta) \cap B_\delta$, $i = 2, 4$, $\Phi_t(x)$ se sale de $A_i(\eta) \cap B_\delta$ cruzando $A_i(\eta) \cap \partial B_\delta$. Vale decir la trayectoria sale de la región cruzando la parte curva de la región y no los lados del sector A_i .*
2. *Si $\Phi_t(x)$ no entra en $(0, 0)$ entonces $\Phi_t(x) \rightarrow 0$.*
3. *Hay al menos una trayectoria que llega en la dirección de $\pm e_1$.*

Por último mencionamos el siguiente teorema.

Teorema 5.6.7 (Focos) *Supongamos que $f(0) = 0$ y que (5.15) tiene un foco estable en 0, es decir A tiene autovalores complejos conjugados $\lambda = a \pm bi$ con $a < 0$ y $b > 0$. Entonces existe $\delta > 0$ tal que:*

1. *Si $x \in B_\delta$ entonces $\Phi_t(x)$ está definida para todo $t \geq 0$ y $\Phi_t(x) \rightarrow 0$, cuando $t \rightarrow \infty$.*
2. *Para ningún $x \in B_\delta$, $\Phi_t(x)$ entra en $(0, 0)$.*
3. *El ángulo $\theta(t)$ satisface que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \theta(t) = +\infty$.*

Notar entonces que las trayectorias tienen que formar espirales que se aproximan al origen.

5.7. Aplicación a un modelo biológico

Hemos modelizado la dinámica de una población por una ecuación del tipo $x' = kx$. Cuando k es constante obtenemos la ley de reproducción normal, que representa la ley que obedece la evolución de la población cuando no hay ningún agente externo que influya en la misma. En general podemos pensar en una ley del tipo $x' = k(x)x$, donde k es función de x , por ejemplo si $k(x) = a - x$ obtenemos la ecuación logística, esta ecuación toma cuenta de una provisión de alimentos limitada. Cuando pensamos en dos especies que interactúan y denotamos x_i , $i = 1, 2$, la cantidad de individuos en cada una de ellas podemos representar la dinámica de las mismas por un sistema del tipo

$$\begin{cases} x'_1 = k_1(x_1, x_2)x_1 \\ x'_2 = k_2(x_1, x_2)x_2 \end{cases} \quad (5.30)$$

Aquí k_i representa la naturaleza de la interacción. Pensemos en dos especies compitiendo por la misma fuente de alimentos, es lógico suponer entonces que en esta situación la función k_i disminuya a medida que aumenten las cantidades x_i . Por otro lado, si x_i son pequeños, los k_i deberían estar cerca de la constante en la ley de reproducción normal r_i . Un modelo simple que da cuenta de estos comportamientos es:

$$\begin{aligned} x'_1 &= (r_1 - a_1x_1 - b_1x_2)x_1 \\ x'_2 &= (r_2 - a_2x_2 - b_2x_1)x_2 \end{aligned} \quad (5.31)$$

Todos los coeficientes son positivos y para abolir casos especiales supondremos que $a_1a_2 - b_1b_2 \neq 0$. Hay cuatro equilibrios en este modelo:

$$\begin{aligned} E_1 &= (0, 0) & E_2 &= (0, r_2/a_2) \\ E_3 &= (r_1/a_1, 0) & E_4 &= (a_1a_2 - b_1b_2)(a_2r_1 - b_1r_2, a_1r_2 - b_2r_1) \end{aligned} \quad (5.32)$$

El equilibrio E_1 corresponde a que ambas especies se han extinguido. En los equilibrios E_2 y E_3 se ha extinguido una especie y la otra ha llegado al equilibrio con la provisión de alimentos. El equilibrio E_4 tiene sentido para nuestro problema si tiene ambas componentes positivas, es el más “sano” de todos los equilibrios pues representa un equilibrio donde ambas especies coexisten.

El análisis del modelo requiere dividir en casos acorde a la magnitud relativa de los coeficientes. De todos los casos posibles analizaremos el siguiente:

$$a_2r_1 < b_1r_2 \quad \text{y} \quad a_1r_2 < b_2r_1. \quad (5.33)$$

Multiplicando las dos ecuaciones y dividiendo por $r_1 r_2$ obtenemos

$$a_2 a_2 < b_1 b_2. \quad (5.34)$$

Con estas asignaciones E_4 está en el primer cuadrante. La desigualdad (5.34) se puede interpretar como que la competencia intraespecies es más débil que la interespecies.

Empecemos por considerar el sistema linearizado en $E_1 = (0, 0)$. No hay necesidad de derivar la ecuación ya que muy fácilmente se desarrolla f en series de potencias respecto a las variables x_1, x_2 y despreciando todos los monomios en (5.31) de grado mayor que 1, nos queda que

$$A = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix}.$$

El equilibrio es por ende un nodo inestable. Los vectores e_1 y e_2 son autovectores de A (únicos si $r_1 \neq r_2$), de modo que las trayectorias nacen en $-\infty$ tangentes a alguno de estos vectores (nuevamente si $r_1 \neq r_2$). El desarrollo en E_2 lo obtenemos reemplazando $x_1 = u_1 + r_1/a_1$ y $u_2 = x_2$ y eliminando los monomios cuadráticos, obtenemos

$$A = \begin{pmatrix} -r_1 & -r_1 b_1/a_1 \\ 0 & -(b_2 r_1 - a_1 r_2)/a_1 \end{pmatrix}.$$

Como A es triangular los autovalores están sobre la diagonal y son negativos acorde a (5.33). Así el equilibrio es un nodo estable. Un autovector correspondiente a $-r_1$ es e_1 y un autovector correspondiente a $-(b_2 r_1 - a_1 r_2)/a_1$ es $((a_1 r_2 - b_2 r_1 - r_1 a_1)/a_1, 1)$, notar que la primera coordenada es negativa.

La linearización en E_3 es simétrica respecto a E_2 . Para analizar el sistema linearizado en E_4 pongamos $E_4 = (A_1, A_2)$ sustituyamos $x_1 = u_1 + A_1$ y $x_2 = u_2 + A_2$ en el campo y eliminemos los monomios cuadráticos, obtenemos

$$A = \begin{pmatrix} -a_1 A_1 & -b_1 A_1 \\ -b_2 A_2 & -a_2 A_2 \end{pmatrix}.$$

Como $A_1, A_2 > 0$ tenemos que $\det A = (a_1 a_2 - b_1 b_2) A_1 A_2 < 0$ que implica que tenemos un punto silla. No vamos a buscar los autovectores en este caso.

Por supuesto que con sólo la información local en los puntos de equilibrio no podemos generalmente reconstruir el retrato de fases, es necesario pues utilizar alguna información global, en este ejemplo vamos a ilustrar el método de las

isoclinas. Las isoclinas son curvas donde el sentido y dirección del campo f es constante. En particular es útil considerar cuando $f(x)$ es horizontal o vertical que corresponde a $f_2(x_1, x_2) = 0$ o $f_1(x_1, x_2) = 0$ respectivamente. En nuestro caso tenemos $f_2(x_1, x_2) = 0$ en las rectas

$$L_1 : 0 = x_2$$

$$L_2 : 0 = r_2 - a_2x_2 - b_2x_1$$

y $f_1(x_1, x_2) = 0$ en las rectas

$$L_3 : 0 = x_1$$

$$L_4 : 0 = r_1 - a_1x_1 - b_1x_2$$

Recordar que $x_1, x_2 \geq 0$ de modo que miramos estas rectas sólo en el primer cuadrante. El corte de las rectas L_2 y L_4 es el equilibrio E_4 . Estas rectas dividen el primer cuadrante en cuatro regiones como muestra la figura 5.13.

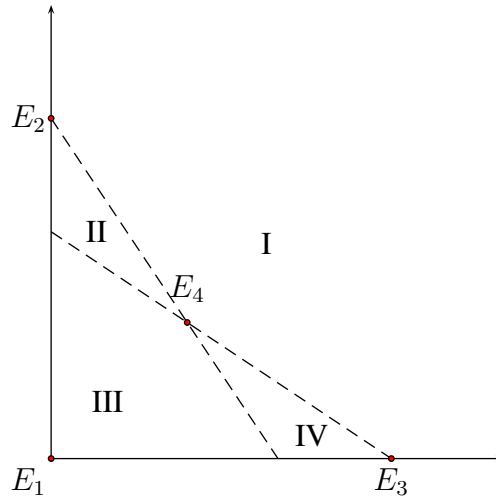


Figura 5.13:

Notar que si $x_2 = 0$ podemos fácilmente analizar la ecuación que queda para x_1 , esta es $x_1' = (r_1 - a_1x_1)x_1$ que resulta ser la ecuación logística. Vemos así que una solución que empieza sobre el eje x_2 permanece allí (es decir L_1 es invariante). Analizando esta ecuación vemos que tiene un equilibrios en $x_1 = 0$ y $x_1 = r_1/a_1$,

0 es un equilibrio inestable y r_1/a_1 estable (de hecho esto ocurría en \mathbb{R}^2). Lo mismo ocurre para $x_1 = 0$.

Sobre la recta L_2 tenemos que la dirección $f(x)$ es horizontal y sobre L_4 es vertical. Para determinar los sentidos de estos vectores notar que en los puntos por encima de la recta L_4 tenemos que $x'_1 = f_1(x_1, x_2) = (r_1 - a_1x_1 - b_1x_2)x_1 < 0$ y, para los puntos debajo de esta recta tenemos $x'_1 = f_1(x_1, x_2) > 0$. Haciendo el mismo análisis para la recta L_2 averiguamos el sentido de los vectores sobre las rectas L_2 y L_4 . Además notemos que de paso averiguamos que:

1. En la región I $x'_1 < 0$ y $x'_2 < 0$ y por ende x_1 y x_2 decrecen,
2. En la región II x_1 decrece y x_2 crece,
3. En la región III x_1 y x_2 crecen,
4. Por último, en la región IV x_1 crece y x_2 decrece.

Toda esta información la podemos consignar en un gráfico marcando un vector en cada una de las regiones I-IV indicando como se comportan x_1 y x_2 allí. Esto lo hicimos en la figura 5.14 Vemos así que las regiones II y IV son invariantes hacia

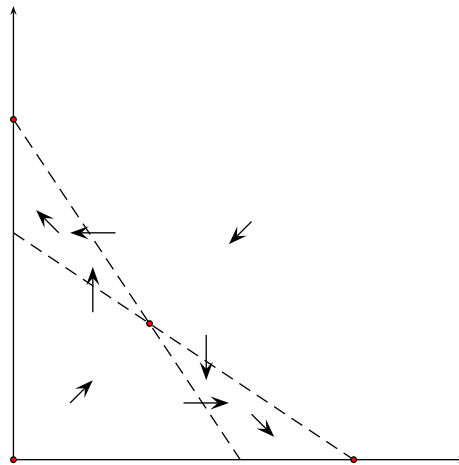


Figura 5.14:

el futuro pues sobre los bordes de ellas correspondientes a las rectas L_1 y L_2 el

campo apunta hacia el interior de la región, el borde restante está formado por una trayectoria de modo que otra trayectoria no la puede cruzar. Por el sentido en que apuntan los vectores y ya que E_2 y E_3 eran equilibrios estables inferimos que una solución que entra a la región II o a la IV tiende a E_2 o E_3 respectivamente. De manera similar si una trayectoria esta en la región III el equilibrio E_4 atrae a la trayectoria, no obstante en este caso la trayectoria puede pasar a las otras regiones pues la región III no es invariante. Lo mismo ocurre en la región I. Aunque no hayamos calculado los autovectores de $Df(E_4)$ de la información brindada podemos concluir que un autovector correspondiente al autovalor positivo tiene que apuntar (supuesto su origen en E_4) hacia las regiones II o IV, mientras que un autovector correspondiente al autovalor negativo lo tiene que hacer hacia las regiones I o III. Esto es así pues de lo contrario inferiríamos que habría trayectorias que no se comportan como vimos. En la figura 5.15 realizamos el retrato de fases con el paquete de \LaTeX `pstricks-add` para los valores $a_1 = a_2 = 1$, $b_1 = b_2 = 1,5$ y $r_1 = r_2 = 3$. Con estos valores (en particular de que $r_1 = r_2$) puede ocurrir que las trayectorias entren a los nodos estables en cualquier dirección.

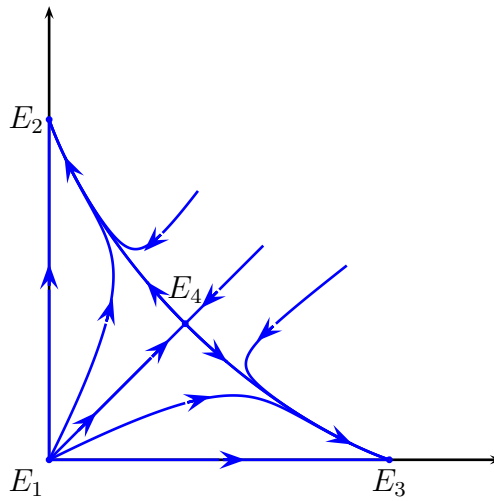


Figura 5.15: Retrato de fases modelo biológico

La conclusión del análisis es negativa desde el punto de vista de la diversidad biológica, pues salvo el equilibrio E_4 y las dos trayectorias que tienden a él, cualquier otra trayectoria termina con la extinción de alguna de las dos especies. No obstante recordemos que nuestras suposiciones (5.33) implicaban la desigualdad

(5.34) que nos decía que la competencia interespecies era más fuerte que la intraespecies. Cuando las desigualdades (5.33) son invertidas de modo que la competencia intraespecies es más fuerte que la interespecies el retrato de fases adquiere la forma de la figura 5.16, como se observa el equilibrio E_4 ahora es estable.

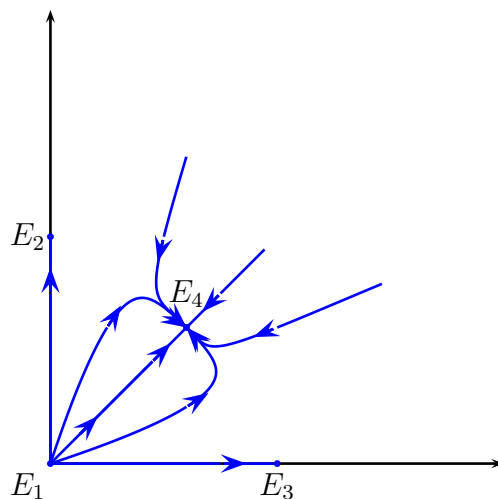


Figura 5.16: $a_1 a_2 > b_1 b_2$

5.8. Teoría global

5.8.1. Puntos regulares

5.8.2. ω -límites

5.8.3. Teorema de Poincare-Bendixson

5.9. Estabilidad en el sentido de Lyapunov

Ejercicios

Ejercicio 5.1 Sea φ una solución de $x' = f(x)$ con $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Demostrar que si el $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t)$ existe y es un punto x^0 en Ω entonces x^0 es un punto

de equilibrio.

Ejercicio 5.2 Demostrar que los siguientes sistemas

$$\begin{cases} x'_1 = -x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ x'_2 = x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{cases} \quad \begin{cases} x'_1 = -x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) \\ x'_2 = x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2 - 1) \end{cases},$$

tienen la misma linearización en su equilibrio común $(0, 0)$ pero se comportan de manera cualitativamente diferente allí.

Ejercicio 5.3 Analizar todas las posibles formas en que una solución a un sistema lineal $x' = Ax$, con $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ no singular, puede entrar a 0

Ejercicio 5.4 Hacer el retrato de fases de los siguientes sistemas:

1. $\begin{cases} x' = -y + x(1 - x^2 - y^2) \\ y' = x + y(1 - x^2 - y^2) \end{cases}$
2. $\begin{cases} x' = -y + x(x^2 + y^2)\text{sen}\left(\frac{\pi}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \\ y' = x + y(x^2 + y^2)\text{sen}\left(\frac{\pi}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \end{cases}$
3. $\begin{cases} x' = y[y^2 + (x^2 - 1)^2] + x(1 - x^2 - y^2) \\ y' = -x[y^2 + (x^2 - 1)^2] + y(1 - x^2 - y^2) \end{cases}$

Ejercicio 5.5 En el modelo de dos especies (5.31) suponer que las desigualdades (5.33) son invertidas. Demostrar que el retrato de fases es como se muestra en la figura 5.16.

Ejercicio 5.6 Demostrar los teoremas 5.6.6 y 5.6.7.

Ejercicio 5.7 Sea f una función continua definida en un abierto D de \mathbb{R}^n . Supongamos que existe una función $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f = \nabla\varphi$. Demostrar que $x' = f(x)$ no posee órbitas periódicas. Si f tiene sólo puntos de equilibrio aislados, demostrar que para toda órbita x , $\Omega[x]$ es vacío o es un punto de equilibrio. *Sugerencia:* Notar que

$$\frac{d\varphi(x(t))}{dt} > 0$$

para toda trayectoria, esto es $\varphi(x(t))$ es creciente.

Ejercicio 5.8 Sea $\Phi_t(x)$ el flujo generado por un campo f continuo. Un subconjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ se llama *minimal* de f si es invariante, compacto y no contiene subconjuntos propios de esas características. Demostrar que en \mathbb{R}^2 los únicos subconjuntos minimales son los puntos singulares y las órbitas periódicas de f . ¿Si $n > 2$ es cierto esto?

Ejercicio 5.9 Determinar los conjuntos $\Omega[x]$ para el sistema

$$\begin{cases} x' &= -y + x(1 - x^2 - y^2) \\ y' &= x + y(1 - x^2 - y^2) \end{cases}$$

Ejercicio 5.10 Encontrar $\Omega[x]$ para el siguiente campo $f = (f_1, f_2)$ definido sobre \mathbb{R}^2 :

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &:= -y + x(x^2 + y^2) \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \\ f_2(x, y) &:= x + y(x^2 + y^2) \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \end{aligned}$$

Ejercicio 5.11 Idem ejercicios anteriores para el sistema

$$\begin{cases} x' &= y[y^2 + (x^2 - 1)^2] + x(1 - x^2 - y^2) \\ y' &= -x[y^2 + (x^2 - 1)^2] + y(1 - x^2 - y^2) \end{cases}$$

Ejercicio 5.12 *Criterio de Bendixson* Si $f = (f_1, f_2)$ es un campo de clase C^1 en $D \subset \mathbb{R}^2$, con D abierto y simplemente conexo, y

$$\operatorname{div} f \neq 0$$

entonces f no tiene órbitas periódicas. *Sugerencia:* Aplicar el teorema de Green.

Ejercicio 5.13 Determinar los puntos de equilibrio del sistema correspondiente al péndulo con fricción:

$$\begin{cases} x' &= y \\ y' &= -b \operatorname{sen} x - ay, \end{cases}$$

Ejercicio 5.14 *Sistemas conservativos unidimensionales* Considerar la ecuación

$$x'' = F(x),$$

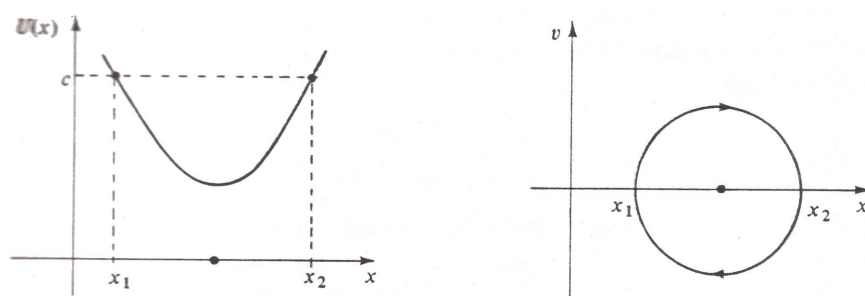
donde $F : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Esta ecuación equivale al sistema:

$$\begin{cases} x' &= v \\ v' &= F(x) \end{cases} \quad (5.35)$$

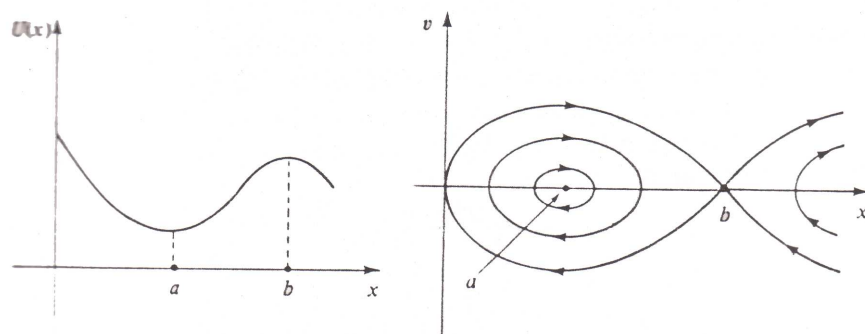
1. Demostrar que las soluciones preservan la energía total del sistema $E := T + U$ donde $T(v) := \frac{v^2}{2}$ es la energía cinética y $U(x) := -\int_{x_0}^x f(\xi)d\xi$ es la energía potencial.
2. Demostrar que los puntos de equilibrio del sistema (5.35) están en el eje x . Demostrar que toda órbita periódica de (5.35) interseca al eje de las x y son simétricas respecto a ese eje.
3. Demostrar que si $U(x_1) = U(x_2) = c$ y $U(x) < c$ para $x_1 < x < x_2$ entonces (5.35) tiene una solución periódica que pasa por los puntos $(x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$. *Sugerencia:* La órbita que pasa por $(x_0, 0)$ satisface $\frac{v^2}{2} + U(x) = E$ donde E es su energía. Usar el hecho que:

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{F(x)}{v}$$

para concluir que esta órbita se vuelve a cortar con el eje x en $(x_2, 0)$. Usar entonces el ítem 2.



4. Supongamos $F(x) \neq 0$ para $0 < |x - x_0| < a$. Demostrar que (5.35) tiene un centro o una silla en $(x_0, 0)$ acorde a $U(x_0)$ sea un mínimo o un máximo relativo.



Ejercicio 5.15 Utilizando el ejercicio anterior determinar el espacio de fases de las siguientes ecuaciones:

1. $x'' = -x$ (resorte).
2. $x'' = -\operatorname{sen} x$ (péndulo).
3. $x'' = -\frac{1}{x^2}$ (gravitación).

Ejercicio 5.16 Sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial continuo. Una función $E : D \rightarrow \mathbb{R}$ se llama integral primera de f en D si:

1. E es constante sobre cada órbita de f .
2. E no es constante en ningún subconjunto abierto de D .

Resolver los siguientes problemas:

1. Sea $E : D \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que

$$DE(x) \cdot f(x) = 0 \quad \text{y} \quad DE(x) \neq 0,$$

para todo x , donde DE denota el diferencial de E . Entonces E es una integral primera.

2. Encontrar una integral primera para el centro dado por:

$$\begin{cases} x_1' = -\beta x_2 \\ x_2' = \beta x_1 \end{cases}$$

y de la silla

$$\begin{cases} x_1' = \lambda_1 x_1 \\ x_2' = \lambda_2 x_2 \end{cases}$$

donde $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$.

3. Demostrar que no existe una integral primera para los sumideros o fuentes lineales en \mathbb{R}^2 .
4. Generalizar los dos incisos anteriores a sistemas lineales en \mathbb{R}^n .

5. Sea $H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^1 . Supongamos que los puntos donde $DH(x) = 0$ son aislados. Encontrar una integral primera para el campo:

$$f(x_1, \dots, x_{2n}) = \left(\frac{\partial H}{\partial x_{n+1}}, \dots, \frac{\partial H}{\partial x_{2n}}, -\frac{\partial H}{\partial x_1}, \dots, -\frac{\partial H}{\partial x_n} \right).$$

Tal campo se lo conoce como Hamiltoniano.

6. Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ y $E : D \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que DE no se anula en ningún abierto de D . Encontrar un campo f que tenga a E por integral primera.
7. Demostrar que si E es una integral primera de f entonces $M_c = f^{-1}(c)$ es invariante para el flujo generado por f . En particular podemos considerar las órbitas contenidas en M_c como un “subsistema” de una dimensión menor en una unidad al original.

Ejercicio 5.17 Consideremos las ecuaciones de Lotka-Volterra:

$$\begin{cases} x' = \alpha x - \beta xy \\ y' = -\gamma x + \delta xy \end{cases}$$

donde α, β, γ y δ son positivos. Demostrar que el sistema tiene una integral primera E que posee en $(\gamma/\delta, \alpha/\beta)$ un punto de mínimo no degenerado (esto es D^2E es definida positiva en ese punto). Concluir que todas las soluciones en el cuadrante positivo son periódicas. *Sugerencia:* Transformar el sistema en una ecuación en variables separadas y deducir que

$$E = -y^\alpha x^\gamma e^{-\beta y} e^{-\delta x}$$

Ejercicio 5.18 Demostrar que el origen es un punto de equilibrio asintóticamente estable de:

$$\begin{cases} x' = -x - \frac{x^3}{3} - 2\sin y \\ y' = -y - \frac{y^3}{3} \end{cases}$$

Ejercicio 5.19 Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continua y supongamos que $f(0) = 0$ y $\langle x, f(x) \rangle < 0 \forall x \neq 0$. Demostrar que $x \mapsto |x|^2$ es una función de Liapunov estricta para el sistema $x' = f(x)$.

Ejercicio 5.20 Sea x_0 un punto de equilibrio de $x' = f(x)$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua, $D \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Sea $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ una función de Liapunov en x_0 . Supongamos que no existe una trayectoria del sistema completamente contenida en $Z := \{x \in U : \dot{V} = 0\}$, excepto $x(t) \equiv x_0$. Entonces x_0 es asintóticamente estable.

Ejercicio 5.21 Sea x_0 un punto de equilibrio de $x' = f(x)$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua, $D \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Sea V una función de clase C^1 definida en un entorno de x_0 tal que $\dot{V} > 0 \forall x \neq x_0$ y $V(x_0) = 0$. Si en todo entorno de x_0 existe un x tal que $V(x) > 0$, entonces x_0 es inestable.

Ejercicio 5.22 Sea x_0 un punto de equilibrio de $x' = f(x)$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua, $D \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Sea $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ una función de Liapunov estricta de x_0 . Entonces, para cada $c > 0$ tal que $V^{-1}([0, c])$ es compacto se tiene que $V^{-1}([0, c]) \subset E(x_0)$ la variedad estable de x_0 .

Ejercicio 5.23 Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^1 . Consideremos el sistema

$$x' = -\nabla V(x).$$

Demostrar que

1. $\dot{V}(x) \leq 0 \forall x \in D$ y $\dot{V}(x) = 0$ si, y sólo si, x es un punto de equilibrio de $-\nabla V$.
2. Si x_0 es un mínimo aislado de V , entonces x_0 es un punto de equilibrio asintóticamente estable de $-\nabla V$.
3. $-\nabla V$ no posee órbitas periódicas no constantes.

Ejercicio 5.24 Sea $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función C^1 , con $D \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Sea y un punto ω -límite de una trayectoria del campo $-\nabla V$. Entonces y es un punto de equilibrio de este campo. *Sugerencia:* Demostrar que V es constante en $\Omega[x] \forall x$.

Ejercicio 5.25 Considerar una partícula moviéndose bajo la influencia de una función potencial $P : D \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 , $D \subset \mathbb{R}^3$ abierto. El sistema dinámico correspondiente es:

$$\begin{cases} x' = v, \\ v' = -\nabla P(x) \end{cases}$$

Demostrar el Teorema de Lagrange, según el cual un punto de equilibrio $(x_0, 0)$ del sistema es estable si x_0 es un mínimo local estricto de P .

Ejercicio 5.26 Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $f(0) = 0$. La solución 0 de $x' = f(x)$ se dice globalmente estable cuando es estable y $x(t) \rightarrow 0$ para $t \rightarrow \infty$ para toda otra solución $x(t)$. Sea $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función de Liapunov estricta de $x' = f(x)$ en 0. Supongamos que para cada $c > 0$ existe un $R > 0$ tal que $|x| > R$, implica $V(x) > c$. Entonces 0 es una solución globalmente estable de $x' = f(x)$. Observar que no es necesaria la condición $V(x) = 0$ sii $x = 0$. Es suficiente suponer que no existe una solución $x(t)$, distinta de la nula, tal que $V(x(t)) = 0 \forall t$.

Índice alfabético

aislado, 30

centros, 19

conjunto invariante, 28

conjunto invariante hacia el futuro, 28

cono, 28

cualitativamente equivalentes, 16

ecuación autónoma, 13

entra, 31

flujo, 27

grupo uniparamétrico, 27

isoclinas, 42

órbitas, 17

punto de equilibrio, 13

retrato de fases, 16

sillas, 19

simple, 30

trayectorias, 17

variedad estable, 26

variedad inestable, 26