1. Series de potencias

1.1. Definición

Definición 1. Una serie de potencias es una serie de la forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

donde a_n, $n = 0, 1, \ldots$, z_0 y z son elementos de $\mathbb{R}$.

Estamos interesados en determinar los valores de z para los cuales una serie converge.

Ejemplo 1. La serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n,$$

es una serie de potencias. Aquí $a_n = 1$, $n = 0, 1, \ldots$ y $z_0 = 0$. Esta serie converge para $|z| < 1$ a

$$\frac{1}{1 - z}$$

y no converge para cualquier otro valor de $z \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 2. Supongamos $f : I \to \mathbb{R}$, donde I es un intervalo abierto $I = (a, b)$ y que f tiene derivadas de todo orden en $z_0 \in I$. Entonces es posible construir la serie de Taylor de f en z_0 que es una serie de potencias. Recordemos que esta serie es

$$S(f, z_0, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n.$$

1.2. Límites superior e inferior

Definición 2. Dada una sucesión de números reales x_n, consideramos una nueva sucesión:

$$A_n = \sup\{x_n, x_{n+1}, \dots\}$$

La nueva sucesión de reales A_n es siempre nocreciente ($A_n \geq A_{n+1}$), luego tiene un límite (puede ser $\pm\infty$). A este límite lo llamamos el límite superior de x_n. Lo denotamos por $\limsup$. Es decir:

$$\limsup x_n = \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \sup\{x_n, x_{n+1}, \dots\}.$$

Tomando ínfimo en lugar de supremo conseguimos el límite inferior ($\liminf$).

Ejemplo 3. Si $x_n = (-1)^n$, entonces

$$\{x_n, x_{n+1}, \dots\} = \{\pm 1, \mp 1, \pm 1, \dots\}.$$

El supremode este conjunto es para todo n igual a 1 y el ínfimo igual a -1. Luego $\liminf x_n = -1$ y $\limsup = 1$.

Ejemplo 4. Si $x_n = 1/n$, si n es par y $x_n = 1$ si n es impar, entonces el conjunto

$$\{x_n, x_{n+1}, \dots\}$$

tiene por supremo 1 y el ínfimo igual a 0 . Luego $\liminf x_n = 0$ y $\limsup = 1$.

Teorema 1. Propiedades Sea x_n e y_n dos sucesiones de números reales, entonces:

1. El $\limsup$ y el $\liminf$ existen siempre si se permite que $\pm\infty$ sean sus posibles valores.
2. $\liminf x_n \leq \limsup x_n$.
3. $\liminf x_n = \limsup x_n$ si y solo si el $\lim x_n$ existe. En este caso todos los límites coinciden.
4. $\liminf(x_n + y_n) \geq \liminf x_n + \liminf y_n$.
5. $\limsup(x_n + y_n) \leq \limsup x_n + \limsup y_n$

1.3. Radio de convergencia

Definición 3. Dada la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

definimos el radio de convergencia R de la siguiente forma:

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}.$$

Ejemplo 5. La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n,$$

tiene radio de convergencia:

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} 1^{1/n} = \lim_{n\to\infty} 1^{1/n} = 1$$

Luego $R = 1$.

Ejemplo 6. La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{M}\right)^n z^n,$$

tiene radio de convergencia:

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \left(\left(\frac{1}{M}\right)^n\right)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \left(\left(\frac{1}{M}\right)^n\right)^{1/n} = \frac{1}{M}$$

Luego $R = M$.

Ejemplo 7. Fijemos $M > 0$ y n un natural tal que $[n/2] > M$ (aquí $[x]$ es la parte entera de x). Entonces, como $n - [n/2] \geq [n/2] > M$

$$\begin{aligned} n! = n(n-1)\cdots 1 &> n(n-1)\cdots(n-[n/2]) \\ &> \underbrace{M \cdots M}_{[n/2]-\text{veces}} \\ &\geq M^{[n/2]} \\ &> M^{n/3} \end{aligned}$$

Luego

$$\frac{1}{R} := \limsup_{n\to\infty} (1/n!)^{1/n} \leq \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{M^{n/3}}\right)^{1/n} = \frac{1}{\sqrt[3]{M}}$$

Como M es arbitrario, haciendo $M \to \infty$ vemos que el radio de convergencia de la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ es $R = \infty$.

Teorema 2. Consideremos la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

Entonces:

1. Si $|z - z_0| < R$, la serie converge absolutamente en z.
2. Si $|z - z_0| > R$, la serie diverge.
3. Si $|z - z_0| = R$, no se afirma nada.

Dem. Se puede suponer sin perdida de generalidad $z_0 = 0$. Supongamos $0 < R < \infty$. Sea $L = 1/R$ y tomemos $\varepsilon > 0$ pequeño. Como

$$\lim_{n \to \infty} \sup\{|a_n|^{1/n}, |a_{n+1}|^{1/n+1}, \ldots\} = L$$

para n_0 suficientemente grande

$$\sup\{|a_n|^{1/n}, |a_{n+1}|^{1/n+1}, \ldots\} < L + \varepsilon.$$

Así

$$|a_n|^{1/n} < L + \varepsilon \quad \text{para } n \geq n_0.$$

Elijamos $0 < r < 1/(L + \varepsilon) < 1/L = R$. Si $|z| < r$ entonces

$$|a_n||z|^n < (L + \varepsilon)^n r^n \quad \text{para } n \geq n_0.$$

Pero $r(L + \varepsilon) < 1$. La desigualdad de arriba y el teorema de comparación (notar que el miembro de la derecha forma una serie geométrica) implican que la serie converge absolutamente para este z. Como $epsilon$ es arbitrario, dado cualquier z, con $|z| < 1$, tenemos un ε lo suficientemente chico para que $|z| < 1/(L + \varepsilon)$. □

Ejercicio 1. Demostrar los casos $R = 0$, $R = \infty$ y el segundo inciso.

Teorema 3. La función

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

es diferenciable dentro en $\{z : |z - z_0| < R\}$. Además

$$f'(z) = g(z) := \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1},$$

teniendo esta serie el mismo radio de convergencia que el de f.

Dem. Nuevamente supondremos $z_0 = 0$. La afirmación sobre el radio de convergencia es consecuencia de que $\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$. Como el radio R' de convergencia de g es:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{R'} &= \limsup_{n\to\infty} |a_{n+1}(n+1)|^{1/(n+1)} \\
&\underbrace{=}_{\text{Ejercicio}} \limsup_{n\to\infty} |a_{n+1}|^{1/(n+1)} \lim_{n\to\infty} |(n+1)|^{1/(n+1)} \\
&= \limsup_{n\to\infty} |a_{n+1}|^{1/(n+1)} = \frac{1}{R}
\end{aligned}$$

Ahora veamos que f es holomorfa y $f' = g$. Sea $0 < r < R$, $|z_0| < r$ y $N \in \mathbb{N}$. Pongamos:

$$f(z) = S_N(z) + E_N(z),$$

$$S_N(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n \quad \text{y} \quad E_N(z) = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n z^n$$

Tomemos $|h| < r - |z_0|$, así $|z_0 + h| < r$. Tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} - g(z_0) &= \frac{S_N(z_0+h) - S_N(z_0)}{h} - S_N'(z_0) \\
&+ S_N'(z_0) - g(z_0) \\
&+ \frac{E_N(z_0+h) - E_N(z_0)}{h}
\end{aligned}$$

Ahora si $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{E_N(z_0+h) - E_N(z_0)}{h}\right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \left|\frac{(z_0+h)^n - z_0^n}{h}\right| \\
&= \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| (|z_0|^{n-1} + |z_0|^{n-2} h + \cdots + h^{n-1}) \\
&\leq 2 \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| n r^{n-1} < \varepsilon
\end{aligned}$$

Para N suficientemente grande. Además como $S_N'(z) \to g(z)$ cuando $N \to \infty$ podemos elegir, a su vez, N suficientemente grande para que

$$|S_N'(z_0) - g(z_0)| < \varepsilon$$

Fijemos un N que satisfaga las condiciones anteriores. Ahora podemos encontrar $\delta > 0$ para que $|h| < \delta$ cumpla que

$$\left|\frac{S_N(z_0+h) - S_N(z_0)}{h} - S_N'(z_0)\right| < \varepsilon.$$

Esto muestra que $f'(z_0) = g(z_0)$ y por consiguiente f es derivavble. $\square$

Corolario 4. Una serie de potencias es infinitamente diferenciable. Las sucesivas derivadas se obtienen derivando término a término la serie. El radio de convergencia se conserva.

Ejemplo 8. Hemos visto que la serie:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

tiene radio de convergencia infinito y por ende converge en $\mathbb{R}$. Ahora vemos que

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

Luego f resuelve la simple ecuación diferencial $f'(z) = f(z)$. La misma ecuación es resuelta por $g(z) = e^z$. Además $f(0) = g(0) = 1$. Por el Teorema de existencia y unicidad $f(z) = g(z)$ para todo z. Hemos probado la importante fórmula.

$$\boxed{e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n} \tag{1}$$

1.4. Funciones analíticas

Definición 4. Una función $f : \Omega \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dirá analítica si para cada $z_0 \in \Omega$, existe un R y $a_n \in \mathbb{R}$, tal que vale la igualdad:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad \text{para } |z - z_0| < R$$

Ejercicio 2. Si f es analítica tenemos la siguiente fórmula

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

para los coeficientes a_n.

2. Solución de EDO mediante series de potencias. Puntos Ordinarios

2.1. Método coeficientes indeterminados

Dada una EDO

$$(1) \quad F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \tag{2}$$

queremos encontrar el desarrollo en series de potencias de la solución general a esta ecuación. El método que estudiaremos se denomina metodo de los coeficientes indeterminados. Consiste en proponer el desarrollo en serie de la solución

$$y(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots$$

remplazar $y(x)$ por este desarrollo en en la ecuación (1) y tratar de resolver la ecuación resultante para los coeficientes (indeterminados) a_n. El método suele funcionar en algunas ecuaciones. Desarrollemos un ejemplo.

Ejemplo 9. Hallar el desarrollo en serie de la solución del siguiente pvi

$$\begin{cases} y' & = y \\ y(0) & = 1 \end{cases}$$

La solución es bien sabido que es $y(x) = e^x$, pero pretendemos reencontrarla por el método expuesto. Escribimos

$$\begin{aligned} y &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \\ y' &= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + (n+1)a_{n+1} x^n + \cdots \end{aligned}$$

La igualdad $y' = y$ implica que

$$\begin{aligned} a_1 &= a_0 \\ a_2 &= \frac{a_1}{2} \\ a_3 &= \frac{a_2}{3} \\ &\vdots \\ a_{n+1} &= \frac{a_n}{n+1} \end{aligned}$$

Si iteramos la fórmula $a_{n+1} = a_n/(n+1)$, obtenemos

$$a_n = \frac{1}{n} a_{n-1} = \frac{1}{n(n-1)} a_{n-2} = \cdots = \frac{1}{n(n-1)\cdots 1} a_0 = \frac{a_0}{n!}.$$

Pero $a_0 = y(0) = 1$. Luego

$$\boxed{a_n = \frac{1}{n!}} \tag{3}$$

La expresión $a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1}$ es un ejemplo de relación de recurrencia.

Definición 5. Una relación de recurrencia para una sucesión b_n de números reales es una sucesión de funciones $f_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que relaciona b_{n+1} con los términos anteriores de la sucesión por medio de la expresión

$$b_{n+1} = f_n(b_1, \ldots, b_n) \tag{4}$$

Resolver una relación de recurrencia es encontrar una fórmula explícita de b_n como función de n.