# Cambios de variables, Teoría de Lie y EDO

Fernando Mazzone

Depto de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas Físico-Químicas y Naturales
Universidad Nacional de Río Cuarto

17 de diciembre de 2014

# DISTINTAS FORMAS PARA UNA ECUACIÓN

Consideremos la ecuación diferencial general de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1}$$

O su equivalente como forma diferencial

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{2}$$

La expresión $\frac{dy}{dx}$ implica una asimetría entre las variables $x$ e $y$, una de ellas es independiente ($x$) y la otra ($y$) independiente. La expresión $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ es más simétrica, las dos variables tienen el mismo estatus en la expresión. Además las expresiones del tipo (2) representan un ente matemático importante llamado forma diferencial

# Formas diferenciales, idea somera

1. Como los polinomios, las formas diferenciales tienen grado.
2. Dadas dos (pueden ser mas) variables $x, y$ una 0-forma diferencial es una función $g(x, y)$ de $x, y$.
3. La expresión (2) es una 1-forma diferencial.
4. Hay un operador llamado diferencial y denotado por $d$. Si $\omega$ es una $k$-forma diferencial $d\omega$ es una $k + 1$ forma diferencial.
5. En el caso de 0-forma (función) $g(x, y)$ el diferencial se define

   $$dg = \frac{\partial M}{\partial x} dx + \frac{\partial N}{\partial y} dy.$$

   Una $k$-forma diferencial se llama exacta cuando es el diferencial de una $k - 1$-forma.

# Cambios de variables

## Idea básica

Supongamos la ecuación (1) o (2) en las variables $x, y$. La idea es encontrar nuevas variables $\xi = \xi(x, y)$ y $\eta = \eta(x, y)$ tales que la ecuación se transforme en una más sencilla de resolver.

# CÓMPUTOS DE CAMBIAMOS VARIABLES

**Cambio de la variable dependiente $y = h(x, z)$ manteniendo la independiente**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial z}\frac{dz}{dx}.$$

La ecuación se convierte

$$\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial z}\frac{dz}{dx} = f(x, h(x, z)).$$

Que es una expresión sólo en $z$ y $x$. Parece más complicada, pero en un ejemplo concreto puede ser más simple.

# CÓMPUTOS DE CAMBIOS DE VARIABLES, EJEMPLO

**Ejemplo 1** Hacer el cambio de variable en la ecuación

$$y = \frac{e^z}{x} \quad \text{en} \quad y' = [\ln(xy)]^2\, xy - \frac{y}{x}.$$

1) Expresemos $dy/dx$ sólo con $x$ y $z$ y $dz/dx$.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{e^z}{x^2} + \frac{e^z}{x}\frac{dz}{dx}.$$

2) Remplacemos $y'$ e $y$ en la ecuación

$$-\frac{e^z}{x^2} + \frac{e^z}{x}\frac{dz}{dx} = \left[\ln\left(x\frac{e^z}{x}\right)\right]^2 x\frac{e^z}{x} - \frac{\frac{e^z}{x}}{x}.$$

3) Simplifiquemos

$$\frac{dz}{dx} = z^2 x.$$

Que es una ecuación muy facil de resolver.

# CÓMPUTOS DE CAMBIOS DE VARIABLES, EJEMPLO

Lo podemos hacer con `SymPy`

```
from sympy import *
x,y,z=symbols('x,y,z')
y=Function('y')(x)
z=Function('z')(x)
y=exp(z)/x
eq=Eq(y.diff(x)-(ln(x*y))**2*x*y+y/x,0)
simplify(eq)
```

Obtenemos la ecuación

$$\frac{1}{x}\left(-x\log^2\left(e^{z(x)}\right)+\frac{d}{dx}z(x)\right)e^{z(x)}=0$$

que `SymPy` no simplifica a nuestro gusto

## Cómputos de cambios de variables

**Cambio de la variable independiente $t = h(x)$ manteniendo la dependiente**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dh}{dx} = \frac{dy}{dt}h'(x).$$

Suponiendo $h$ biyectiva, la ecuación se convierte

$$\frac{dy}{dt}h'(h^{-1}(t)) = f(h^{-1}(t), y).$$

Que es una expresión sólo en $t$ e $y$.

**Ejemplo 2** Hacer el cambio de variable en la ecuación

$$x = \cos t \quad \text{en} \quad -\frac{dy}{dx} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} y = 0.$$

1) $h(x) = \operatorname{arc\,sen} x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} h'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{dy}{dt}.$$

2) Remplacemos $x$ e $y'$ en la ecuación

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{dy}{dt} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} y = 0$$

3) Simplificando

$$\frac{dy}{dt} + y = 0$$

Que es una ecuación lineal a coeficientes constantes.

# Cómputos de cambios de variables, ejemplo

Lo podemos hacer con `SymPy`

```
from sympy import *
x,t=symbols('x,t')
t=acos(x)
y=Function('y')(t)
Ecuacion=-y.diff()+1/(sqrt(1-x**2))*y
```

Obtenemos la ecuación

$$\frac{1}{\sqrt{-x^2+1}}\left(y(\operatorname{acos}(x)) + \left.\frac{d}{d\xi_1}y(\xi_1)\right|_{\xi_1=\operatorname{acos}(x)}\right) = 0$$

Nuevamente `SymPy` no simplifica a nuestro gusto

**Cambio de variable general** $\xi = \xi(x, y)$**,** $\eta = \eta(x, y)$
1) Calculamos $d\eta/d\xi$ en las variables $x, y$

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\frac{d\eta}{dx}}{\frac{d\xi}{dx}} = \frac{\frac{\partial\eta}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y}y'}{\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\xi}{\partial y}y'} = \frac{\frac{d\eta}{dx}}{\frac{d\xi}{dx}} = \frac{\frac{\partial\eta}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y}f(x, y)}{\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\xi}{\partial y}f(x, y)}. \tag{3}$$

2) En la expresión resultante sustituir $x, y$ por las tansformaciones inversas $x = x(\xi, \eta)$ y $y = y(\xi, \eta)$

**Ejemplo 3. Transformar a polares:** $\frac{dy}{dx} = \frac{y^3+x^2y-x-y}{x^3+xy^2-x+y}$.
Dado que el cálculo es extenso lo haremos sólo con `SymPy`

```
from sympy import *
x=symbols('x')
y=Function('y')(x)
r=sqrt(x**2+y**2)
theta=atan(y/x)
Expr2=r.diff(x)/theta.diff(x)
Expr3=Expr2.subs(y.diff(x),\
(y**3+x**2*y-x-y)/(x**3+x*y**2-x+y))
r,theta=symbols('r,theta',positive=True)
Expr4=Expr3.subs([(y,r*sin(theta)),\
(x,r*cos(theta))])
Expr5=simplify(Expr4)
```

# Cambios de variables

Encontramos que en polares la ecuación es mucho más simple

$$\frac{dr}{d\theta} = -r^3 + r.$$

# Cambios de variables con SAGE y formas diferenciales

SAGE puede operar con formas diferenciales

```
sage: r,theta=var('r,theta')
sage: U = CoordinatePatch((r,theta))
sage: F = DifferentialForms(U)
sage: x= DifferentialForm(F, 0, r*cos(theta))
sage: y= DifferentialForm(F, 0, r*sin(theta))
sage: w=(x^3+x*y^2-x+y)*y.diff()-(y^3+x^2*y-x-y)*x.diff()
sage: w[0].simplify_full()
r
sage: w[1].simplify_full()
r^4 - r^2
```

La forma obtenida es $rdr + (r^4 - r^2)d\theta$.

# Grupos, Repaso

## Grupos

Sean $G$ un conjunto y $\alpha$ una función tal que $\alpha : G \times G \to G$. En el contexto de grupos es más usual la notación $\alpha(g_1, g_2) = g_1 g_2$. El par $(G, \alpha)$ se llama un grupo si se satisface

1. $(g_1 g_2) g_3 = g_1 (g_2 g_3)$, para todos $g_1, g_2, g_3 \in G$,
2. Existe $e \in G$ tal que $eg = ge = g$, para todo $g \in G$.
3. Para todo $g \in G$ existe $h \in G$ tal que $gh = hg = e$. Se acostumbra denotar $h = g^{-1}$.

# Ejemplos de grupos

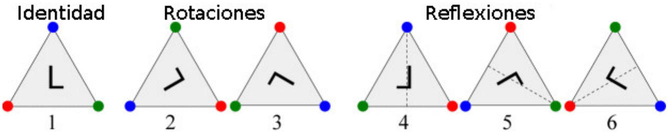
**Ejemplo 1** Sea $\Pi$ un plano euclideano y $G$ el conjunto de todas las transformaciones rígidas de $\Pi$ en si mismo. Entonces $G$ es un grupo con la operación de composición. Se llama el grupo de transformaciones rígidas

**Ejemplo 2** Sea $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ un conjunto de $n$ elementos y $S_n$ definido por

$$S_n = \{\sigma | \sigma : X \to X \text{ y } \sigma \text{ es biyectiva } \}$$

Entonces $S_n$ es un grupo con la operación de composición. Se denomina grupo simétrico

**Ejemplo 3** Sea $\Delta$ un polígono regular de $n$ lados en un plano euclideano $\Pi$ y $D_{2n}$ el conjunto de todas las transformaciones rígidas de $\Pi$ en si mismo que llevan $\Delta$ en si mismo. $D_{2n}$ se llama el grupo diedral de orden $2n$. Para un triángulo equilatero grupo diedral



# Teoría de grupos computacional: SAGE y GAP

GAP - Groups, Algorithms, Programming Lenguaje de programación para algebra discreta
SAGE: es un sistema de software de matemáticas libre de código abierto bajo la licencia GPL. Se basa en muchos paquetes de código abierto existentes: NumPy, SciPy, matplotlib, SymPy, Maxima, GAP, FLINT, R y muchos más. Acceda a su poder combinado a través de un lenguaje común, basado en Python Misión: Creación de una alternativa libre de código abierto viable a Magma, Maple, Mathematica y Matlab.

# Teoría de grupos computacional: SAGE y GAP

```
sage: G=SymmetricGroup(5)
sage: sigma=G([(1,2,3),(4,5)])
sage: sigma^2
(1,3,2)
sage: sigma^3
(4,5)
sage: sigma^6
()
sage: G.order()
120
sage: H=G.subgroup([sigma])
sage: H.order()
6
```

# Teoría de grupos computacional: SAGE y GAP

```
sage: H.list()
[(), (4,5), (1,2,3), (1,2,3)(4,5), (1,3,2),
    (1,3,2)(4,5)]
sage: H.is_normal()
False
sage: G1=DihedralGroup(3)
sage: G1[-2]
(1,3,2)
sage: H1=G1.subgroup(G1[-2])
sage: H1.is_normal()
True
sage: G1.quotient(H1)
Permutation Group with generators [(1,2)]
```

# Grupos de simetrías

## Grupos de simetrías

Los cambios de variables de un conjunto de dos variables, digamos $x$ e $y$, son funciones $\varphi$, invertibles, de clase $C^\infty$, donde $\varphi : \Omega_1 \to \Omega_2$, con $\Omega_1, \Omega_2$ abiertos de $\mathbb{R}^2$.
Acostumbraremos escribir $(\xi, \eta) = \varphi(x, y)$ y diremos que $(\xi, \eta)$ son la variables nuevas e $(x, y)$ las viejas.
Llamaremos $\mathscr{T}$ al conjunto de todas los cambios de variables $\varphi$. El conjunto $\mathscr{T}$ tiene una estructura de grupo con la operación de composición.

**Ejemplo, polares:** Es más facil describir la transformación que lleva coordenadas polares en cartesinas. En este caso $(x, y) = \varphi(r, \theta)$ y

$$\begin{aligned}
\varphi(r, \theta) &= (r\cos(\theta), r\,\mathrm{sen}(\theta)), \\
\Omega_1 &= (0, \infty) \times (-\pi, \pi), \\
\Omega_2 &= \mathbb{R}^2 - \{(x, y) | y = 0, x \leq 0\}
\end{aligned}$$

# Grupos de Lie uniparamétricos

## Grupos uniparamétricos de simetrías

Sea $\mathscr{T}$ el grupo de cambios de variables. Supongamos dado un homomorfismo de grupos $P : (\mathbb{R}, +) \to (\mathscr{T}, \circ)$.

**Notación:**

1. Para $\lambda \in \mathbb{R}$ escribiremos $P_\lambda = P(\lambda)$
2. Si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ escribimos $(\xi, \eta) = f(x, y, \lambda) := P_\lambda(x, y)$.

Si $f(x, y, \lambda)$ es diferenciable respecto a $(x, y)$ y analítica respecto a $\lambda$ diremos que $\{P_\lambda | \lambda \in \mathbb{R}\}$ es un grupo de Lie uniparamétrico de simetrías.

### PROPIEDADES DE $P_\lambda$

1. $P_\lambda$ es biyectiva y diferenciable sobre su domio de definición en su imagen.
2. $P_{\lambda_1} \circ P_{\lambda_2} = P_{\lambda_1+\lambda_2}$, equivalentemente $f(f(x,y,\lambda_1),\lambda_2) = f(x,y,\lambda_1+\lambda_2)$.
3. $P_0 = I$, o $f(x,y,0) = (x,y)$.
4. $(P_\lambda)^{-1} = P_{-\lambda}$
5. Si $P_\lambda(x,y) = (\xi,\eta)$, entonces $\xi(x,y,\lambda)$ y $\eta(x,y,\lambda)$ son diferenciables respecto $(x,y)$ y se desarrollan en serie de potencias respecto a $\lambda$. Es decir para todo $\lambda_0 \in \mathbb{R}$

$$
\begin{aligned}
\xi(x,y,\lambda) &= a_0(x,y) + a_1(x,y)(\lambda-\lambda_0) + \cdots \\
\eta(x,y,\lambda) &= b_0(x,y) + b_1(x,y)(\lambda-\lambda_0) + \cdots
\end{aligned}
$$

**Ejercicio:** Demostrar que las siguientes aplicaciones inducen grupos de Lie uniparamétricos

1. $P_\lambda(x,y) = (x+\lambda, y)$ y $P_\lambda(x,y) = (x, y+\lambda)$.
2. $P_\lambda(x,y) = (e^\lambda x, y)$
3. $P_\lambda(x,y) = \left(\frac{x}{1-\lambda x}, \frac{y}{1-\lambda x}\right)$
4. $P_\lambda(x,y) = \begin{pmatrix} \cos(\lambda) & -\operatorname{sen}(\lambda) \\ \operatorname{sen}(\lambda) & \cos(\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

# Grupo de simetrías de una ecuación

**Definición**

Consideremos una ecuación

$$y' = f(x, y).$$

Una transformación $P \in \mathscr{T}$ se denomina una simetría de la ecuación si el cambio de variables dado por $(\xi, \eta) = P(x, y)$ deja invariante la ecuación.

**Ejercicio:** el conjunto de todas las simetría de una ecuación es un subgrupo de $(\mathscr{T}, \circ)$. Lo llamaremos grupo de simetrías de la ecuación.

**Ejemplo: hallar simetrías de**

$$\frac{dy}{dx} = f(x).$$

De acuerdo con (3) se debe cumplir que

$$\frac{\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} f(x)}{\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y} f(x)} = f(\xi)$$

Parece que debemos hacer las elecciones

$$\boxed{\xi = x}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial \xi}{\partial x}.$$

Luego

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = 1 \Rightarrow \boxed{\eta = y + \lambda}$$

con $\lambda$ constante arbitraria.

# ENCONTRAR SIMETRÍAS

Hallamos que el

$$P_\lambda(x, y) = (x, y + \lambda)$$

es un grupo uniparamétrico de simetrías. De manera similar

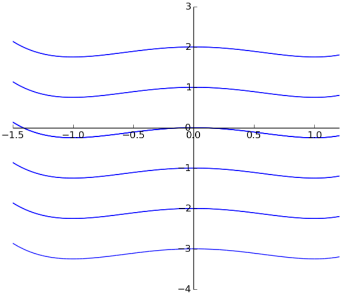
$$P_\lambda(x, y) = (x + \lambda, y)$$

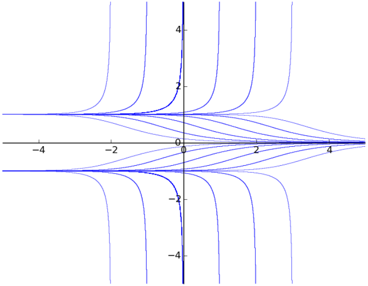
es un grupo uniparamétrico de simetrías para

$$\frac{dy}{dx} = f(y).$$

Geométricamente en el primer caso todas las soluciones seobtienen trasladando una cualquiera verticalmente y en el segundo caso horizontalmente.

# ENCONTRAR SIMETRÍAS




Soluciones de $y' = x^3 - x$ Soluciones de $y' = y^3 - y$

**Demostrar que las rotaciones alrededor del origen es un grupo uniparamétrico de simetrías de**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^3 + x^2y - x - y}{x^3 + xy^2 - x + y}.$$

Sea $P_\lambda$ la transformación que rota un ángulo $\lambda$ alrededor del origen. Era un ejercicio demostrar que $\{P_\lambda | \lambda \in \mathbb{R}\}$ es un grupo uniparamétrico de simetrías. Se tiene la representación matricial

$$P_\lambda(x, y) = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\lambda) & -\operatorname{sen}(\lambda) \\ \operatorname{sen}(\lambda) & \cos(\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$P_\lambda^{-1}(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\lambda) & \operatorname{sen}(\lambda) \\ -sen(\lambda) & \cos(\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

# Encontrar simetrías

Para el cálculo recurrimos a `SymPy`

```
from sympy import *
x,theta=symbols('x,theta')
y=Function('y')(x)
xi=cos(theta)*x-sin(theta)*y
eta=sin(theta)*x+cos(theta)*y
Expr2=eta.diff(x)/xi.diff(x)
Expr3=Expr2.subs(y.diff(),\
(y**3+x**2*y-x-y)/(x**3+x*y**2-x+y))
xi,eta=symbols('xi,eta')
Expr4=Expr3.subs([(y, -sin(theta)*xi+cos(theta)*
(x,cos(theta)*xi+sin(theta)*eta)])
Expr5=simplify(Expr4)
```

# ENCONTRAR SIMETRÍAS

Tiene problemas para simplificar, lo tenemos que ayudar

```
Expr6=Expr5.subs(sin(2*theta + pi/4),\
sin(2*theta)*sqrt(2)+cos(2*theta)*sqrt(2))
Expr7=Expr6.subs(cos(2*theta),\
1+(cos(theta))**2    )
Expr8=Expr7.subs(cos(2*theta),\
1+(cos(theta))**2)
Expr9=Expr8.subs(sin(2*theta),\
1-(cos(theta))**2)
```

La ecuación resultante es la misma

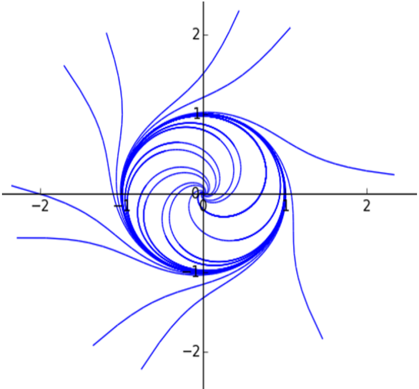
$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\eta^3 + \eta\xi^2 - \eta - \xi}{\eta^2\xi + \eta + \xi^3 - \xi}. \tag{4}$$

# ENCONTRAR SIMETRÍAS

A la misma cocnclusión arribábamos si observamos que en en coordenadas polares la ecuación se escribe

$$\frac{dr}{d\theta} = r - r^3,$$

y que esta ecuación tiene las simetrías $P_\lambda : (r, \theta) \mapsto (r, \theta + \lambda)$.



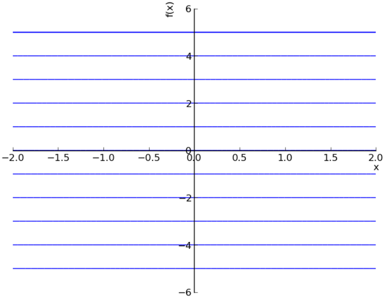

Si rotamos un ángulo fijo el gráfico de una solución obtenemos el gráfico de otra solución.

## Simetrías triviales

Consideremos la ecuación

$$\boxed{y' = 0} \tag{5}$$

Tiene muchas simetrías. Las traslaciones en cualquier dirección $(x, y) \mapsto (x + \alpha\lambda, y + \beta\lambda)$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$. Cambios de escala en ambos ejes $(x, y) \mapsto (e^{\lambda}x, y)$, $(x, y) \mapsto (x, e^{\lambda}y)$. Reflexiones respecto ambos ejes $(x, y) \mapsto (-x, y)$, $(x, y) \mapsto (x, -y)$.



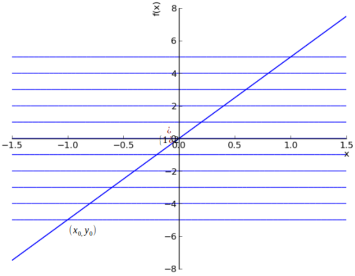
De todas las simetrías encontradas $P_\lambda(x, y) = (e^\lambda x, y)$, $P_\lambda(x, y) = (x + \lambda, y)$ y $P_\lambda(x, y) = (x + \lambda, y)$ se llaman triviales pues llevan una curva solución en si misma.
Estamos interesados en grupo uniparamétricos de simetrías, es decir simetrías que dependan de un parámetro continuo $\lambda$.
Las reflexiones $P(x, y) = (-x, y)$ no forman tal grupo, sino que generan un grupo discreto, ya que $P^2 = P \circ P = I$. Luego $P$ genera el grupo $G = \{I, P\}$ que es isomorfo a $\mathbb{Z}_2$. En este caso diremos que $\{I, P\}$ es un grupo discreto de simetrías.

# Órbitas

## Definición

Dado un grupo uniparamétrico de simetrías $G = \{P_\lambda | \lambda \in \mathbb{R}\}$, y $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ llamamos **órbita $(x_0, y_0)$ bajo la acción de $G$** (simplemente órbita si es claro quien es $G$) a la curva

$$\{P_\lambda(x_0, y_0) | \lambda \in \mathbb{R}\}$$




Si $G$ es un grupo de simetrías no trivial, entonces es de esperar que la órbita de $(x_0, y_0)$ atraviesa las curvas solución