# Ecuación lineal general de orden $n$

## Ecuación lineal general de orden $n$

Es una ecuación de la forma

$$y^{(n)}(x) + p_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + p_1(x)y'(x) + p_0(x)y(x) = r(x) \tag{1}$$

donde $p_i, r$, $i = 0, \ldots, n-1$ son funciones definidas en un intervalo $I$

Los resultados y técnicas que hemos desarollado para ecuaciones de orden 2 se aplican con cambios menores a ecuaciones de mayor orden. No vamos a repetir la demostración de estos resultados, dados que es prácticamente la misma. Los exponemos de manera sumaria.

# Existencia y unicidad de soluciones

## Teorema de existencia y unicidad de soluciones

Supongamos $p_i, r$, $i = 0, \ldots, n-1$ continuas sobre $I$. Sean $x_0 \in I$ e $y_0, y_1, \ldots y_{n-1} \in \mathbb{R}$ dados. Entonces existe una única solución del PVI

$$\left\{ \begin{array}{ll} y^{(n)}(x) + & p_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + p_0(x)y(x) = r(x), x \in I \\ y(x_0) & = y_0 \\ y'(x_0) & = y_1 \\ & \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) & = y_{n-1} \end{array} \right.$$

## Teorema estructura conjunto de soluciones ecuaciones homogéneas

Supongamos $y_1, y_2, \ldots, y_n$ soluciones linealmente independientes de

$$y^{(n)}(x) + p_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + p_0(x)y(x) = 0.$$

Entonces

$$y = c_1y_1 + \cdots + c_ny_n, \quad c_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n,$$

es solución general. Vale decir, el conjunto de soluciones es un espacio vectorial $n$-dimensional.

# Estructura del conjunto de soluciones

### Teorema estructura conjunto de soluciones ecuaciones no homogéneas

Una solución general de la ecuación no homogénea

$$y^{(n)}(x) + p_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + p_0(x)y(x) = r(x),$$

es la suma de una solución particular de esta ecuación más una solución general de la ecuación homogénea asociada.

# Wronskiano

## Fórmula Abel

Si $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son solución de la ecuación homogénea

$$y^{(n)}(x) + p_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + p_0(x)y(x) = 0, \qquad (2)$$

Entonces el Wronskiano satisface

$$W(y_1, \ldots, y_n)(x) = W(y_1, \ldots, y_n)(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} p_{n-1}(t)dt}. \qquad (3)$$

En particular $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ son linalmente independientes si y solo si $W(x) \neq 0$ para todo $x \in I$.

**Dem.** Las demostraciones de los resultados anteriores es tan similar a su análogo de orden 2 que no vale la pena invertir tiempo en ellas. La demostración de la fórmula de Abel, si nos parece lo suficientemente interesante para dejarla como **Ejercicio**.

# Ecuaciones homogéneas con coeficientes constantes

Las ecuaciones lineales de orden $n$, homogeneas con coeficientes constantes se resuelven por métodos análogos los considerados para eciaciones de segundo orden. Se propone $y(x) = e^{rx}$ como solución. Reemplazando esta función en (2) vemos que $y$ sería solución si y solo si $r$ es solución de la ecuación característica

$$r^n + p_{n-1}r^{n-1} + \cdots + p_1 r + p_0 = 0. \tag{4}$$

Ahora se presentan casos algo diferentes.

# Ecuaciones homogéneas con coeficientes constantes

**Raices reales distintas.** Si la ecuación característica (4) tiene $n$ raíces $r_1, \ldots, r_n$ reales y distintas entonces $y_1(x) = e^{r_1 x}, \ldots, y_n(x) = e^{r_n x}$ son soluciones linealmente independientes y por ende

$$\boxed{y(x) = c_1 e^{r_1 x} + \cdots + c_n e^{r_n x}}$$

es solución general.
Dejamos como ejercicio la demostración de la independencia lineal. En lugar de usar el Wronskiano, se puede utilizar la siguiente idea basada en métodos operacionales.
Por $D$ vamos a denotar el operador diferenciación, esto es $D$ es sencillamente la función definida sobre el conjunto de funciones difenciables sobre un intervalo abierto y que actúa derivando, esto es $Dy = y'(x)$.

# Ecuaciones homogéneas con coeficientes constantes

Dado un polinomio $p(X) = p_n X^n + p_{n-1} X^{n-1} + \cdots + p_1 X + p_0$, $p_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, \ldots, n$, denotamos por $p(D)$ el operador definido por

$$p(D)y = p_n y^{(n)} + p_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + p_1 y' + p_0 y.$$

Diremos que $p(D)$ es un operador diferencial polinomial.
**Ejercicio 1** Dado que dos polinomios se pueden sumar y multiplicar resultando estas operaciones en un nuevo polinomio, es posible hacer lo propio con operadores diferenciales polinomiales. Demostrar que el producto de dos de tales operadores $p(D)$ y $q(D)$ es conmutativo. Esto es consecuencia que el producto de polinomios es conmutativo. Analizar que ocurriría si permitiesemos que los coeficientes $p_i$ fuese funciones de $x$, $p_i = p_i(x)$.

# Ecuaciones homogéneas con coeficientes constantes

**Ejercicio 2** Supongamos ahora que $r_1, \ldots, r_n$ son números reales distintos y que

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + \cdots + c_n e^{r_n x}.$$

Considerar el operador diferencial

$$p(D) = (D - r_1) \cdots (D - r_{i-1})(D - r_{i+1}) \cdots (D - r_n).$$

Demostrar que

$$p(D)y = (r_i - r_1) \cdots (r_i - r_{i-1})(r_i - r_{i+1}) \cdots (r_i - r_n) e^{r_i x}.$$

Deducir de esto la independencia lineal de $\{y_1(x) = e^{r_1 x}, \ldots, y_n(x) = e^{r_n x}\}$.

# Ecuaciones homogéneas con coeficientes constantes

**Raices reales repetidas.** Supongamos que la ecuación característica (4) tiene raíces reales repetidas. Sean $r_1, \dots, r_k$ las raices distintas y $m_j$ la multiplicidad de la raíz $r_j$. Por cada raíz $r_j$ considerar las $m_j$ funciones

$$\mathcal{B}_j := \{y_j^0(x) = e^{r_j x}, y_j^1(x) = xe^{r_j x}, \dots y_j^{m_j-1}(x) = x^{m_j-1}e^{r_j x}\}.$$

**Ejericio 2** Demostrar que $\mathcal{B} := \mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_k$ forma un conjunto de $n$ soluciones linealmente independientes.

# Ecuaciones homogéneas con coeficientes constantes

**Raices complejas.** Supongamos que la ecuación característica (4) tiene raíces complejas. Como la ecuación característica tiene coeficientes reales las raices aparecen de a pares conjugados $\mu \pm \nu i$.
Si las raices son simples, como en el caso de ecuaciones de orden 2, por cada uno de estos pares hay que considerar las soluciones $e^{\mu x} \cos x$ y $e^{\mu x} \operatorname{sen} x$ . Si son múltiples con multiplicidad $k$ hay que considerar las $2k$ soluciones
$e^{\mu x} \cos x, xe^{\mu x} \cos x, \dots, x^{k-1} e^{\mu x} \cos x$ y
$e^{\mu x} \operatorname{sen} x, xe^{\mu x} \operatorname{sen} x \dots x^{k-1} e^{\mu x} \operatorname{sen} x$. Dejamos los detalles que es necesario completar como trabajo práctico.

# Ecuaciones no homogéneas

**Raices complejas.**