

# Ecuaciones Diferenciales

Fernando Mazzone

20 de junio de 2016



# Índice general

<b>1. Breve introducción a Python y SymPy</b>	<b>7</b>
1.1. Descripción . . . . .	7
1.2. Local y online . . . . .	7
1.3. Instalación local . . . . .	8
1.3.1. Windows . . . . .	8
1.3.2. linux . . . . .	8
1.3.3. Android . . . . .	8
1.3.4. Otros recursos de utilidad: . . . . .	8
1.4. Forma de trabajo: por medio de scripts e interactiva . . . . .	8
1.5. Características del Lenguaje . . . . .	9
1.6. Elementos del Lenguaje . . . . .	9
1.6.1. Comentarios . . . . .	9
1.6.2. Variables . . . . .	10
1.6.3. Tipo de datos . . . . .	10
1.6.4. Listas y tuples . . . . .	10
1.6.5. Diccionarios . . . . .	11
1.6.6. Listas por comprensión . . . . .	12
1.6.7. Funciones . . . . .	12
1.6.8. Condicionales . . . . .	13
1.6.9. Bucles . . . . .	14
<b>2. Generalidades</b>	<b>15</b>
2.1. Sobre esta materia . . . . .	15
2.2. ¿Que son las ecuaciones diferenciales? . . . . .	15
2.3. Algunos conceptos relacionados con ecuaciones diferenciales . . . . .	16
2.4. Definición formal . . . . .	20
2.5. Familias paramétricas de funciones . . . . .	22
2.6. Separación de variables . . . . .	26
2.7. Galería de Ejemplos . . . . .	27
2.7.1. Ley de reproducción normal . . . . .	27
2.7.2. Soluciones . . . . .	28
2.7.3. Dinámica del punto . . . . .	29

<b>3. Ecuaciones de primer orden</b>	<b>37</b>
3.1. Ecuaciones homogéneas . . . . .	39
3.2. Exactas . . . . .	40
3.3. Factores integrantes . . . . .	43
3.4. Otras Técnicas relacionadas con exactitud . . . . .	45
3.5. Ecuaciones Lineales . . . . .	46
3.6. Reducción de orden . . . . .	48
3.7. SymPy . . . . .	48
3.8. Ejemplos . . . . .	50
3.8.1. Velocidad de escape . . . . .	50
3.8.2. Curvas de persecución . . . . .	52
3.9. Oscilador armónico . . . . .	55
3.10. EDP, método características . . . . .	57
<b>4. Teoría de Lie y ecuaciones diferenciales</b>	<b>59</b>
4.1. Introducción histórica . . . . .	59
4.2. Formas Diferenciales, una introducción ingenua . . . . .	59
4.3. Cambios de Variables . . . . .	62
4.3.1. Cómputos de cambios de variables . . . . .	62
4.4. Grupos . . . . .	67
4.4.1. Definición y ejemplos . . . . .	67
4.4.2. Teoría de grupos computacional: SAGE y GAP . . . . .	67
4.5. Grupos continuos de simetrías . . . . .	68
4.5.1. Grupos y cambios de variables . . . . .	68
4.5.2. Grupos de Lie uniparamétricos . . . . .	68
4.5.3. Grupos de simetrías de EDO . . . . .	70
4.6. Órbitas, tangentes y curvas invariantes . . . . .	74
4.7. Simetrías a partir de Infinitesimales . . . . .	77
4.8. Coordenadas canónicas . . . . .	78
4.8.1. Definición y ejemplos . . . . .	78
4.8.2. Generador Infinitesimal . . . . .	79
4.9. Encontrando coordenadas canónicas . . . . .	80
4.9.1. Integrales primeras . . . . .	80
4.9.2. Infinitesimales→Simetrías (Revisitado) . . . . .	83
4.10. Resolviendo EDO con grupos de Lie de simetrías . . . . .	83
4.10.1. Método de solución . . . . .	83
4.10.2. Ecuaciones homogéneas . . . . .	85
4.10.3. Método de Lie y SymPy . . . . .	86
<b>5. Ecuaciones Lineales de Segundo Orden</b>	<b>87</b>
5.1. Introducción . . . . .	87
5.2. Estructura del conjunto de soluciones . . . . .	88
5.3. Reducción de orden . . . . .	92
5.4. Ecuaciones homogéneas con coeficientes constantes . . . . .	93
5.5. Ecuación no homogénea . . . . .	95
5.5.1. Método coeficientes indeterminados . . . . .	95

5.5.2. Método de variación de los parámetros . . . . .	98
5.6. Conclusiones . . . . .	100
5.7. Aplicaciones . . . . .	101
5.7.1. Vibraciones mecánicas . . . . .	101
5.7.2. Un poco de mecánica celeste . . . . .	110
5.8. Ecuaciones lineales de orden superior . . . . .	115
5.8.1. Existencia y unicidad de soluciones . . . . .	116
5.8.2. Estructura del conjunto de soluciones . . . . .	116
5.8.3. Ecuaciones homogéneas con coeficientes constantes . . . . .	117
5.8.4. Aplicación: osciladores armónicos acoplados . . . . .	119
5.9. Métodos Operacionales . . . . .	122
5.9.1. Raíces simples . . . . .	123
5.9.2. Series . . . . .	124
<b>6. Ecuaciones lineales de segundo orden</b>	<b>127</b>
6.1. Teorema de separación de Sturm . . . . .	127
6.1.1. Motivación . . . . .	127
6.1.2. Teorema separación de Sturm . . . . .	128
6.1.3. Reducción a la ecuación normal . . . . .	129
6.1.4. Teorema de Comparación de Sturm . . . . .	131
<b>7. Series de Potencias y de Frobenius</b>	<b>137</b>
7.1. Series de potencias . . . . .	137
7.1.1. Definición . . . . .	137
7.1.2. Límites superior e inferior . . . . .	138
7.1.3. Radio de convergencia . . . . .	139
7.1.4. Funciones analíticas . . . . .	143
7.2. Solución de EDO mediante series de potencias. Método coeficientes indeterminados . . . . .	144
7.2.1. Método coeficientes indeterminados . . . . .	144
7.2.2. Relaciones de recurrencia . . . . .	145
7.2.3. Serie binomial . . . . .	147
7.2.4. Oscilador armónico . . . . .	148
7.2.5. Ecuación de Legendre. Primera aproximación . . . . .	149
7.3. Teorema fundamental sobre puntos ordinarios . . . . .	153
7.4. Puntos singulares, método de Frobenius . . . . .	157
7.4.1. Series de Frobenius . . . . .	157
7.4.2. Ecuación de Bessel, funciones de Bessel de primera especie .	163
7.4.3. Teorema fundamental sobre puntos singulares regulares . . .	168
7.4.4. Funciones de Bessel de segunda especie . . . . .	175
<b>8. Separacion de Variables</b>	<b>179</b>
8.1. Apéndice A: Laplaciano en coordenadas polares . . . . .	185
8.2. Apéndice B: Código SAGE para animación de tonos normales . . . . .	186



# Capítulo 1

## Breve introducción a Python y SymPy

### 1.1. Descripción

Python es un lenguaje de programación interpretado, abierto, fácil de aprender, potente y portátil. Es utilizado en proyectos de todo tipo, no sólo aplicaciones científicas.



SciPy, Python científico, es un conjunto de módulos de Python para distintos tipos de cálculos. Está integrado por los módulos, SymPy (para cálculos simbólicos), numpy (cálculos numéricos), matplotlib (gráficos) entre otros. En este curso sólo usaremos SymPy.



SymPy es una biblioteca de Python para matemática simbólica. Su objetivo es convertirse en un sistema de álgebra computacional (SAC) completo, manteniendo el código lo más simple posible para que sea comprensible y fácilmente extensible. SymPy está escrito enteramente en Python y no requiere de ninguna biblioteca externa.



SageMath es un sistema de software de matemáticas, libre, de código abierto bajo la licencia GPL. Es construido sobre muchos paquetes de código abierto existentes: NumPy, SciPy, matplotlib, SymPy, Maxima, GAP, FLINT, R y muchos más. Se acceda a su poder combinado a través de un lenguaje común, basado en Python.



### 1.2. Local y online

Se pueden usar todos los recursos anteriores de dos formas

1. Instalando el software necesario en una computadora. Nos referiremos a este modo como de acceso local.
2. A través de transacciones en línea que permiten usar una computadora remota que ejecuta las instrucciones y programas que se tipan en una página web con la

que se interactúa usualmente por medio de un navegador. Hay varios sitios que ofrecen este servicio. Sugerimos la SageMathCloud. El usuario debe registrarse.

### 1.3. Instalación local

Hay mucho software dedicado a gestionar el uso de python, recomendamos las siguientes por la sencillez de la instalación.

#### 1.3.1. Windows

La distribución python(x,y) instala el interprete de python y todos los módulos de scipy. Además el entorno de desarrollo integrado (IDE) spyder.

Lamentablemente no es posible instalar SageMath en windows, sólo se instala bajo linux.

#### 1.3.2. linux

Aquí todo es más sencillo, el interprete de python suele venir con la distribución del SO y se puede instalar los módulos, SymPy, NumPy, etc, recurriendo al administrador de paquetes o tipeando la sentencia adecuada en la línea de comandos. Para instalar SAGE se lo descarga de la página oficial y se descomprime.

#### 1.3.3. Android

Qpython es una aplicación que permite ejecutar código python y una versión básica de sympy desde tablets y smartphones. Se descarga desde la plataforma google play.

#### 1.3.4. Otros recursos de utilidad:

Tanto para linux o windows ipython, Anaconda, emacs.

### 1.4. Forma de trabajo: por medio de scripts e interactiva

Se puede trabajar de dos formas

1. Interactivamente, ingresando sentencias, de a una por vez, en la línea de comandos y obteniendo respuestas.
2. Haciendo un script (programa) donde se guardan todas las sentencias que se desea ejecutar. Posteriormente este script se puede ejecutar, ya sea desde la línea de comandos o en desde un IDE (spyder) oprimiendo un botón de ejecución.

## 1.5. Características del Lenguaje

Seguiremos en esta exposición a [?] de manera cercana. Las principales características del lenguaje son:

- Interpretado. Es necesario un conjunto de programas, el interprete, que entienda el código python y ejecute las acciones contenidas en él.
- implementa tipos dinámicos
- Multiparadigma, ya que soporta orientación a objetos, programación imperativa y, en menor medida, programación funcional.
- Multiplataforma.
- Es comprendido con facilidad. Usa palabras donde otros lenguajes utilizarían símbolos. Por ejemplo, los operadores lógicos !, || y \&\& en Python se escriben not, or y and, respectivamente.
- El contenido de los bloques de código (bucles, funciones, clases, etc.) es delimitado mediante espacios o tabuladores.
- Empieza a contar desde cero (elementos en listas, vectores, etc).

## 1.6. Elementos del Lenguaje

### 1.6.1. Comentarios

Hay dos formas de producir comentarios, texto que el interprete no ejecuta y que sirve para entender un programa.

La primera, para comentarios largos es utilizando la notación ''' comentario '''.

La segunda notación utiliza el símbolo #, no necesita símbolo de finalización pues se extienden hasta el final de la línea.

```

1  '''
2  Comentario largo en un script de Python
3  '''
4  print "Hola mundo" # Comentario corto

```

El intérprete no tiene en cuenta los comentarios, lo cual es útil si deseamos poner información adicional en nuestro código como, por ejemplo, una explicación sobre el comportamiento de una sección del programa.

```

2 x = 1
3 x = "texto" # Esto es posible porque los tipos son asignados \
dinamicamente

```

### 1.6.2. Variables

Las variables se definen de forma dinámica, lo que significa que no se tiene que especificar cuál es su tipo de antemano y que una variable puede tomar distintos valores en distintos momentos de un programa, incluso puede tomar un tipo diferente al que tenía previamente. Se usa el símbolo `=` para asignar valores a variables. Es importante distinguir este `=` (de asignación) con el igual que es utilizado para definir igualdades en sympy, para ecuaciones por ejemplo.

### 1.6.3. Tipo de datos

Tipo	Clase	Notas	Ejemplo
<code>str</code>	Cadena	Inmutable	<code>'Cadena'</code>
<code>list</code>	Secuencia	Mutable, puede contener objetos de diversos tipos	<code>[4.0, 'Cadena', True]</code>
<code>tuple</code>	Secuencia	Inmutable, puede contener objetos de diversos tipos	<code>(4.0, 'Cadena', True)</code>
<code>dict</code>	Mapping	Grupo de pares clave:valor	<code>{'key1': 1.0, 'key2': False}</code>
<code>int</code>	Número entero	Precisión fija, convertido en <code>long</code> en caso de overflow.	<code>42</code>
<code>long</code>	Número entero	Precisión arbitraria	<code>42L ó 456966786151987643L</code>
<code>float</code>	Número decimal	Coma flotante de doble precisión	<code>3.1415927</code>
<code>complex</code>	Número complejo	Parte real y parte imaginaria $j$ .	<code>(4.5 + 3j)</code>
<code>bool</code>	Booleano	Valor booleano verdadero o falso	<code>True o False</code>

Se clasifican en:

**Mutable** si su contenido puede cambiarse.

**Inmutable** si su contenido no puede cambiarse.

Se usa el comando `\type` para averiguar que tipo de dato contiene una variable

```

1 >>> x=1
2 >>> type(x)
3 <type 'int'>
4 >>> x='Ecuaciones'
5 >>> type(x)
<type 'str'>
```

### 1.6.4. Listas y tuples

- Es una estructura de dato, que contiene, como su nombre lo indica, listas de otros datos en cierto orden. Listas y tuplas son muy similares.
- Para declarar una lista se usan los corchetes `[]`, en cambio, para declarar una tupla se usan los paréntesis `()`. En ambos casos los elementos se separan por comas, y en el caso de las tuplas es necesario que tengan como mínimo una coma.
- Tanto las listas como las tuplas pueden contener elementos de diferentes tipos. No obstante las listas suelen usarse para elementos del mismo tipo en cantidad variable mientras que las tuplas se reservan para elementos distintos en cantidad fija.

- Para acceder a los elementos de una lista o tupla se utiliza un índice entero (empezando por "0", no por "1"). Se pueden utilizar índices negativos para acceder elementos a partir del final.
- Las listas se caracterizan por ser mutables, mientras que las tuplas son inmutables.

```

1>>> lista = ["abc", 42, 3.1415]
2>>> lista[0] # Acceder a un elemento por su indice
'abc'
4>>> lista[-1] # Acceder a un elemento usando un indice negativo
3.1415
6>>> lista.append(True) # Agregar un elemento al final de la lista
7>>> lista
8['abc', 42, 3.1415, True]
9>>> del lista[3] # Borra un elemento de la lista usando un indice
10>>> lista[0] = "xyz" # Re-asignar el valor del primer elemento
11>>> lista[0:2] # elementos del indice "0" al "2" (sin incluir ultimo)
12['xyz', 42]
13>>> lista_anidada = [lista, [True, 42L]] # Es posible anidar listas
14>>> lista_anidada
15[[ 'xyz', 42, 3.1415], [True, 42L]]
16>>> lista_anidada[1][0] # Acceder a un elemento de una lista dentro de
17    otra lista
18
19True

```

```

1>>> tupla = ("abc", 42, 3.1415)
2>>> tupla[0] # Acceder a un elemento por su indice
'abc'
3>>> del tupla[0] # No es posible borrar ni agregar
4( Excepcion )
5>>> tupla[0] = "xyz" # Tampoco es posible re-asignar
6( Excepcion )
7>>> tupla[0:2] # elementos del indice "0" al "2" sin incluir
8('abc', 42)
9>>> tupla_anidada = (tupla, (True, 3.1415)) # es posible anidar
10>>> 1, 2, 3, "abc" # Esto tambien es una tupla
11(1, 2, 3, 'abc')
12>>> (1) # no es una tupla, ya que no posee al menos una coma
131
14>>> (1,) # si es una tupla
15(1,)
16>>> (1, 2) # Con mas de un elemento no es necesaria la coma final
17(1, 2)
18>>> (1, 2,) # Aunque agregarla no modifica el resultado
19(1, 2)

```

### 1.6.5. Diccionarios

- Para declarar un diccionario se usan las llaves \{\}\}. Contienen elementos separados por comas, donde cada elemento está formado por un par clave:valor (el

símbolo : separa la clave de su valor correspondiente).

- Los diccionarios son mutables, es decir, se puede cambiar el contenido de un valor en tiempo de ejecución.
- En cambio, las claves de un diccionario deben ser inmutables. Esto quiere decir, por ejemplo, que no podremos usar ni listas ni diccionarios como claves.
- El valor asociado a una clave puede ser de cualquier tipo de dato, incluso un diccionario.

```

1  >>> dicci = {"cadena": "abc", "numero": 42, "lista": [True, 42L]}
2  >>> dicci["cadena"] # Usando una clave, se accede a su valor
3      'abc'
4  >>> dicci["lista"][0]
5      True
6  >>> dicci["cadena"] = "xyz" # Re-asignar el valor de una clave
7  >>> dicci["cadena"]
8      'xyz'
9  >>> dicci["decimal"] = 3.1415927 # nuevo elemento clave:valor
10 >>> dicci["decimal"]
11     3.1415927
12 >>> dicci_mixto = {"tupla": (True, 3.1415), "diccionario": dicci}
13 >>> dicci_mixto["diccionario"]["lista"][1]
14 42L
15 >>> dicci = {("abc",): 42} # tupla puede ser clave pues es inmutable
16 >>> dicci = {[("abc")]: 42} # No es posible que una clave sea una lista
   ( Excepcion )

```

### 1.6.6. Listas por comprensión

Una lista por comprensión es una expresión compacta para definir listas. Al igual que el operador lambda, aparece en lenguajes funcionales. Ejemplos:

```

1 >>> range(5) # "range" devuelve una lista, empezando en 0 \
2     y terminando con el numero indicado menos uno
3     [0, 1, 2, 3, 4]
4 >>> [i*i for i in range(5)]
5     [0, 1, 4, 9, 16]
6 >>> lista = [(i, i + 2) for i in range(5)]
7 >>> lista
8     [(0, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 6)]

```

### 1.6.7. Funciones

- Las funciones se definen con la palabra clave `def`, seguida del nombre de la función y sus parámetros. Otra forma de escribir funciones, aunque menos utilizada, es con la palabra clave `lambda` (que aparece en lenguajes funcionales)

como Lisp). Generalmente esta forma es apropiada para funciones que es posible definir en una sola línea.

- El valor devuelto en las funciones con `def` será el dado con la instrucción `return`.

```

1>>> def suma(x, y = 2): # el argumento y tiene un valor por defecto
2...     return x + y # Retornar la suma
...
4>>> suma(4) # La variable "y" no se modifica, siendo su valor: 2
6
6>>> suma(4, 10) # La variable "y" si se modifica
14

```

```

1>>> suma = lambda x, y = 2: x + y
2>>> suma(4) # La variable "y" no se modifica
36
3>>> suma(4, 10) # La variable "y" si se modifica
514

```

### 1.6.8. Condicionales

Una sentencia condicional (`if condicion`) ejecuta su bloque de código interno sólo si `condicion` tiene el valor booleano `True`. Condiciones adicionales, si las hay, se introducen usando `elif` seguida de la condición y su bloque de código. Todas las condiciones se evalúan secuencialmente hasta encontrar la primera que sea verdadera, y su bloque de código asociado es el único que se ejecuta. Opcionalmente, puede haber un bloque final (la palabra clave `else` seguida de un bloque de código) que se ejecuta sólo cuando todas las condiciones fueron falsas.

```

1>>> verdadero = True
2>>> if verdadero: # No es necesario poner "verdadero == True"
3...     print "Verdadero"
4... else:
5...     print "Falso"
...
7Verdadero
8>>> lenguaje = "Python"
9>>> if lenguaje == "C":
10...    print "Lenguaje de programacion: C"
11... elif lenguaje == "Python": # Se pueden agregar "elif" como se
12...    quiera
13...    print "Lenguaje de programacion: Python"
14... else:
15...    print "Lenguaje de programacion: indefinido"
...
17Lenguaje de programacion: Python
18>>> if verdadero and lenguaje == "Python":
19...     print "Verdadero y Lenguaje de programacion: Python"

```

19 | ...  
Verdadero y Lenguaje de programacion: Python

### 1.6.9. Bucles

El bucle `for` es similar a otros lenguajes. Recorre un objeto iterable, esto es una lista o una tupla, y por cada elemento del iterable ejecuta el bloque de código interno. Se define con la palabra clave `for` seguida de un nombre de variable, seguido de `in`, seguido del iterable, y finalmente el bloque de código interno. En cada iteración, el elemento siguiente del iterable se asigna al nombre de variable especificado:

```
>>> lista = ["a", "b", "c"]
2 >>> for i in lista: # Iteramos sobre una lista, que es iterable
...     print i
4 ...
5 a
6 b
7 c
8 >>> cadena = "abcdef"
9 >>> for i in cadena: # Iteramos sobre una cadena, que es iterable
10 ...     print i, # una coma al final evita un salto de linea
11 ...
12 a b c d e f
```

```
>>> numero = 0
2 >>> while numero < 10:
...     print numero
4 ...     numero += 1, #un buen programador modificara las variables de
...     control al finalizar el ciclo while
5 ...
6 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
```

# Capítulo 2

## Generalidades

### 2.1. Sobre esta materia

- Programa analítico.
- Página web de la materia
- Vamos a hacer uso intensivo de paquetes de matemática basados en Python, por ejemplo SciPy, SymPy y SAGE.
- Requeriremos muchos contenidos de la asignatura Física.

- Bibliografía principal



### 2.2. ¿Qué son las ecuaciones diferenciales?

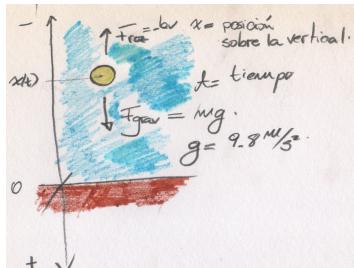
**Definición 1** (Ecuación diferencial, definición informal).

Es una o varias relaciones entre una o varias variables dependientes y sus tasas de cambio respecto a ciertas variables independientes.

El problema básico asociado a las ecuaciones diferenciales es hallar las variables dependientes que las resuelven.

Las ecuaciones diferenciales son usadas muy a menudo en matemática aplicada, puesto que muchas leyes (de la física por ejemplo) se expresan a través de este tipo de ecuaciones.

**Ejemplo 1.** [Caída libre] Modelizar matemáticamente el movimiento de un cuerpo de masa  $m$  en las proximidades de la superficie terrestre, asumiendo que su movimiento es sobre la vertical y que las fuerzas que sobre él actúan son la gravedad y el rozamiento con el aire.



$x(t)$  = posición a lo largo de la vertical, relativo a un eje de coordenadas  
 $v(t) = \frac{dx}{dt}$  = velocidad

$F_{grav}$  = fuerza debida a la gravedad =  $mg$  donde  $g = 9,8 m/s^2$ .  $F_{roz}$  = fuerza de rozamiento, proporcional a la velocidad y de sentido contrario =  $-cv$ ,  $c > 0$ .

Usamos la Segunda Ley de Newton, esto es la suma de las fuerzas totales que actúan sobre un cuerpo de masa  $m$  es igual al producto de la masa  $m$  y la aceleración  $a(t)$ . Recordemos que la aceleración es la tasa de cambio de la velocidad, es decir la derivada segunda de la posición.

Usando todas las relaciones mencionadas

$$ma(t) = mv'(t) = F_{total} = F_{grav} + F_{roz} = mg - cv$$

vale decir

$$x''(t) + \frac{c}{m}x'(t) = g. \quad (2.1)$$

$$v'(t) + \frac{c}{m}v = g. \quad (2.2)$$

### 2.3. Algunos conceptos relacionados con ecuaciones diferenciales

**Definición 1 (Orden).**

El índice de la mayor derivada interviniente en la ecuación.

Por ejemplo la ecuación (2.1) es de orden 2 y la ecuación (2.2), si bien está estrechamente relacionada con la anterior, es de orden 1. Como regla casi general, cuanto menor es el orden, más fáciles de estudiar y/o resolver las ecuaciones son.

**Definición 2 (Solución).**

Una función que satisface la relación que indica la ecuación.

## 2.3. ALGUNOS CONCEPTOS RELACIONADOS CON ECUACIONES DIFERENCIALES 17

Por ejemplo

$$v(t) = \frac{m}{c}g + ke^{-\frac{c}{m}t}, \quad (2.3)$$

resuelve (2.2), para todo  $C \in \mathbb{R}$ . No deberíamos perder tiempo en chequear una cuestión tan sencilla, pero aprovechemos la ocasión para usar SymPy.

```
>>>from sympy import *
2 >>>m,g,c,k,t=symbols('m,g,c,k,t')
>>>v=m/c*g+k*exp(-c/m*t)
4 >>>simplify(v.diff(t)+c/m*v)
g
```

Notar que las líneas que comienzan con el signo del prompt `>>>` indican entradas por línea de comandos y las que comienzan sin este signo son las respuestas del interprete.

Rara vez utilizaremos las siguientes funcionalidades de sympy, pero es oportuno decir que SymPy puede encontrar la solución a una ecuación diferencial

```
1 >>>v=symbols('v',cls=Function)
>>>EqCaida=Eq(v(t).diff(t)+c/m*v(t),g)
3 >>>Vel=dsolve(EqCaida,v(t))
>>> Vel
5 v(t) == (g*m + exp(c*(C1 - t/m)))/c
```

La solución obtenida es la ya conocida. Es instructivo averiguar que tipo de dato tiene la variable `Vel`

```
1 >>> type(Vel)
<class 'sympy.core.relation.Equality'>
```

A este tipo de cuestiones hay que prestar atención cuando se trabaja con sympy, pues existe la tendencia a confundir los conceptos matemáticos con los propios del lenguaje. Por ejemplo, matemáticamente una solución es una función. Sin embargo, en este caso, cuando le solicitamos una solución a sympy nos entrega un objeto de tipo “relación de igualdad”.

**Definición 3** (Ecuación diferencial ordinaria (EDO)).

Es una ecuación donde las variables dependientes sólo dependen de una única variable independiente.

Las ecuaciones (2.1) y (2.2) son ejemplo de ello, la variable independiente es el tiempo.

**Definición 4** (Ecuación en derivadas parciales (EDP)).

Es una ecuación donde las variables dependientes dependen de más de una variable independiente.

Ejemplo de este tipo de ecuación es la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Puede ocurrir también que dispongamos de varias ecuaciones diferenciales que se deben satisfacer simultáneamente. En estos casos, el conjuntos de ecuaciones se suele escribir como una única ecuación vectorial. Por este motivo, muchas veces, cuando dispongamos de una única ecuación diremos que tenemos una *ecuación escalar*.

**Definición 5** (Sistema de ecuaciones).

Es un conjunto de ecuaciones diferenciales que se deben satisfacer simultáneamente.

En ese caso es de esperar que tengamos varias incógnitas en nuestro problema. En general una ecuación escalar determina sólo una incógnita. De hecho aquí ocurre, a semejanza con ecuaciones algebraicas, que es frecuente necesitar tantas ecuaciones como incógnitas.

**Ejemplo 2.** [Ecuación del péndulo] El sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -\operatorname{sen}(x) \end{cases}$$

es muy conocido pues modeliza el movimiento de un péndulo.

Muy a menudo hablaremos de resolver una ecuación, pero es oportuno discutir qué queremos significar con esto.

**Definición 6** (Resolver una ecuación).

Es expresar la solución como combinaciones algebraicas y composiciones de funciones que consideramos elementales.

Esta definición contiene una vaga apelación a ciertas “funciones elementales”. El universo de funciones que se considera elemental es una cuestión política, no matemática. En principio, consideraremos elementales a las potencias, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas y trigonométricas inversas. No obstante esta lista se puede

expandir con muchas funciones especiales. Las operaciones permitidas para combinar estas funciones también están sujetas a convenciones. Por ejemplo, admitiremos como válida una expresión que contenga una integral, al menos en el caso que no sea claro como resolver esta integral.

Casi todo este curso trata con la discusión de métodos para resolver ecuaciones. Sin embargo resolver ecuaciones no es quizás el problema principal relacionado con las ecuaciones diferenciales. No importa tanto lograr una expresión formal de la solución, como, por ejemplo, conocer las propiedades que poseen las soluciones. Al fin y al cabo, uno conoce una función a través de sus propiedades.

**Definición 7** (Solución general).

Usualmente una ecuación presenta infinitas soluciones. Una solución general es una expresión que representa todas estas soluciones. Es habitual que una solución general contenga parámetros. Cada elección de estos parámetros determina una solución distinta.

Por ejemplo (2.3) es la solución general de (2.2). La afirmación anterior requiere una demostración puesto que sólo hemos mostrado que (2.3) es solución, pero no que toda solución se expresa con (2.3). Para demostrar la afirmación, hay que multiplicar ambos miembros de (2.2) por  $e^{\frac{c}{m}t}$  y luego integrar respecto a  $t$

$$\frac{mg}{c}e^{\frac{c}{m}t} = \int ge^{\frac{c}{m}t}dt = \int v'(t)e^{\frac{c}{m}t} + \frac{c}{m}e^{\frac{c}{m}t}vdt = e^{\frac{c}{m}t}v + C.$$

Despejando  $v$  del primer y último miembro obtenemos (2.3) con  $k = -C$ .

**Ejemplo 3.** En algunas ocasiones sólo podemos dejar una relación implícita entre las variables dependientes e independientes. Por ejemplo

$$x = e^y + y + C \quad \text{para } C \in \mathbb{R} \tag{2.4}$$

es solución general de

$$y'(e^y + 1) = 1.$$

Vamos a chequear sólo que (2.4) es solución, dejando la justificación que toda solución tiene esa forma para más adelante. Derivando (2.4)

$$1 = e^y y' + y'$$

Luego  $y' = 1/(1 + e^y)$ . Reemplazando esta relación en la ecuación diferencial corroboramos que es solución.

## 2.4. Definición formal

**Definición 1** (Ecuación diferencial).

Una ecuación diferencial ordinaria de orden  $n$  es una relación de la forma

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0.$$

donde  $F : (a, b) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Omega$  es abierto de  $\mathbb{R}^{n+1}$  y  $(a, b)$  un intervalo de  $\mathbb{R}$ .

**Ejemplo 4.** El problema de hallar una primitiva de una función es una ecuación diferencial que, como ya has visto en cursos iniciales de análisis, se relaciona con el concepto de integral. Supongamos  $f : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua. Consideremos la ecuación diferencial

$$y'(x) = f(x).$$

Sea  $x_0 \in (a, b)$ , integrando respecto a  $x$  entre  $x_0$  y  $x$

$$y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^x f(t)dt$$

Que es una solución general. Quedaría determinada una única solución si, por ejemplo, conociersemos  $y(x_0)$ .

**Ejemplo 5.** Supongamos  $f : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  como antes. Consideremos la ecuación diferencial

$$y''(x) = f(x).$$

Tomemos una integral indefinida respecto a  $x$

$$y'(x) = C_1 + \int f(t)dt$$

Ahora deberemos tomar una integral indefinida más

$$y(x) = C_2 + C_1 t + \int \left( \int f(x)dx \right) dx.$$

Ahora quedan dos constantes  $C_1$  y  $C_2$ .

**Definición 2** (Principio de Hadamard).

Un problema se dice bien planteado segun Hadamard si satisface que

1. El problema admite solución
2. La solución es única
3. La solución depende de manera continua de los datos numéricos del problema.

Como hemos visto, una ecuación diferencial no determina una única solución, por consiguiente no sería un problema bien planteado. Debemos agregar relaciones a nuestro problema para que sea bien planteado. Es así que aparecen condiciones iniciales, problemas de contorno, etc.

**Definición 3** (Problemas de valores iniciales).

Sea  $x_0 \in (a, b)$ ,  $F : (a, b) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  e  $y_0, y_0^1, \dots, y_0^{n-1} \in \mathbb{R}$ . Las siguientes relaciones se denominan problema de valores iniciales

$$\begin{cases} F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 & x \in (a, b) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0^1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1} \end{cases}$$

**Definición 4** (Ecuaciones de primer orden).

La ecuación general de primer orden tiene la forma

$$F(x, y(x), y'(x)) = 0,$$

donde  $F : (a, b) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  y  $\Omega$  abierto de  $\mathbb{R}^2$ . Con frecuencia asumiremos que  $y'$  se despeja de la relación anterior, es decir que existe  $f : \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Omega'$  abierto de  $\mathbb{R}^2$ , tal que

$$y' = f(x, y).$$

Bajo esta suposición, si  $(x_0, y_0) \in \Omega'$  el problema de valores iniciales se escribe

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

## 2.5. Familias paramétricas de funciones

En las secciones siguientes vamos a describir problemas, matemáticos y físicos que se reducen a un problema de ecuaciones diferenciales.

### Problema 1.

Dada una familia paramétrica de funciones

$$y = y(x, c), \quad (2.5)$$

dependiente del parámetro  $c \in \mathbb{R}$ , ¿Será posible hallar una ecuación para la cual la familia sea la solución general?

**Familias paramétricas de funciones** En líneas generales la respuesta es si. Nos conviene expresar (2.5) como una ecuación implícita

$$f(x, y, c) = 0. \quad (2.6)$$

Derivando esta ecuación respecto a  $x$

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y'(x, c) = 0. \quad (2.7)$$

Ahora es posible eliminar  $c$  de (2.6) y (2.7) al costo de quedarnos con una sola ecuación.

**Ejemplo 6.** Encontrar la ecuación que satisface la familia paramétrica

$$x^2 + y^2 = c^2.$$

Derivamos

$$2x + 2yy' = 0.$$

Ya está!!!

**Ejemplo 7.** Idem  $x^2 + y^2 = 2cx$ . Derivando

$$2x + 2yy' = 2c.$$

Eliminamos  $c$  de las dos relaciones

$$\frac{x^2 + y^2}{x} = 2x + 2yy' \Rightarrow \boxed{y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy}}.$$

**Problema 2.**

Dada una familia paramétrica

$$f(x, y, c) = 0,$$

encontrar otra

$$g(x, y, d) = 0$$

tal que los ángulos que forman los gráficos entre las funciones de una y de otra familia sean rectos en cada punto de corte entre ellos.

Para resolver este problema se completan estos pasos

- Se encuentra la ecuación diferencial que satisface la familia dada, digamos

$$y' = h(x, y).$$

- Se resuelve

$$y' = -\frac{1}{h(x, y)}.$$

**Ejemplo 8.** Encontrar la familia de curvas ortogonales a la familia de circunferencias

$$x^2 + y^2 = c^2$$

Hallamos antes que la ecuación que satisfacen estas curvas es

$$y' = -\frac{x}{y}.$$

Luego deberíamos resolver

$$y' = \frac{y}{x}.$$

Que no sabemos pero SymPy si!!!

**Función SymPy (dsolve).**

**Sintaxis** (documentación SymPy)

`dsolve(eq, f(x), hint)`

`eq:` Ecuación (posicional)

`f(x) :` función incognita (posicional)

`hint:` Método a emplear. Argumento con nombre `hint='cadena'`.

**Ejemplo 9.**

```

1 x=symbols('x')
2 y=Function('y')(x)
MiEcua=Eq(y.diff(x),y/x)
4 f=dsolve(MiEcua,y)

```

**Resultado:** Flía rectas por el origen.

La instrucción

```
f=dsolve(MiEcua,y,hint='separable')
```

produce el mismo resultado.

### Función SymPy (plot).

**Sintaxis** (documentación SymPy)

Para un gráfico simple

```
plot(expr, rango, opcionales(claves))
```

expr: Expresión a graficar

rango: Conjunto donde varia la variable independiente

opcionales Argumentos que modifican la apariencia del gráfico. Generalmente de la forma de clave=valor

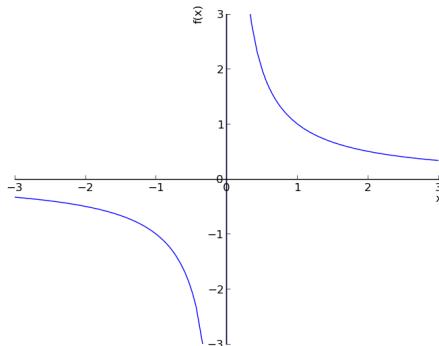
### Ejemplo 10.

```

1 x=symbols('x')
2 f=plot(1/x,(x,-3,3),ylim=(-3,3))

```

**Resultado:**



**Ejemplo 11.** Grafiquemos un familias paramétrica de funciones.

```

1 from sympy import *
2 x,y=symbols('x,y')
3 Rango=range(21)
4 L=[tan(pi*k/21.0) for k in Rango]
5 p=plot(L[0]*x,(x,-2,2),show=False,xlim=(-2,2),\
6 ylim=(-2,2),aspect_ratio=(1,1))
7 for pend in L[1:]:
8     p1=plot(pend*x,(x,-2,2),show=False,\n
9     xlim=(-2,2),ylim=(-2,2),aspect_ratio=(1,1))
10    p.append(p1[0])
11 for r in range(1,10):
12     p1=plot_implicit(Eq(x**2 + y**2, 0.2*r),\n
13     show=False, aspect_ratio=(1,1),xlim=(-2,2),ylim=(-2,2))
14     p.append(p1[0])

```

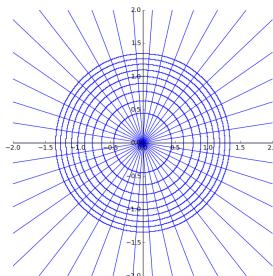
**Resultado:**

Figura 2.1: Familia curvas ortogonales

**Problema 3** (Familias paramétricas de funciones en coordenadas polares).

En ocasiones la ecuación de la familia de curvas esta dada en otras coordenadas. Por ejemplo supongamos que tenemos la flia de curvas dadas por una EDO en coordenadas polares

$$\frac{dr}{d\theta} = f(r, \theta),$$

y queremos hallar su flia ortogonal.

**Solución:** Calculemos  $dy/dx$  para las curvas en la familia dada.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{r_\theta \sin \theta + r \cos \theta}{r_\theta \cos \theta - r \sin \theta} = \frac{f \sin \theta + r \cos \theta}{f \cos \theta - r \sin \theta},$$

donde  $r_\theta = dr/d\theta$ . La flia ortogonal tiene que satisfacer

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f \cos \theta - r \sin \theta}{f \sin \theta + r \cos \theta}$$

Luego

$$\frac{r_\theta \sin \theta + r \cos \theta}{r_\theta \cos \theta - r \sin \theta} = -\frac{f \cos \theta - r \sin \theta}{f \sin \theta + r \cos \theta}.$$

Si despejamos  $r_\theta$  llegamos a la ecuación de la flia de curvas ortogonales en coordenadas polares

$$\frac{dr}{d\theta} = -\frac{r^2}{f}. \quad (2.8)$$

## 2.6. Separación de variables

**Definición 1** (Ecuaciones en variables separadas).

Se dice que en una ecuación de primer orden

$$y' = f(x, y)$$

separan las variables, si es posible la factorización  $f(x, y) = g(x)h(y)$ .

Una ecuación en la que se separan variables se puede resolver siguiendo los siguientes pasos. Como, asumiendo  $h(y) \neq 0$ ,

$$\frac{y'}{h(y)} = g(x),$$

Si  $H$  y  $G$  son primitivas de  $1/h$  y  $g$  respectivamente por la regla de la cadena tenemos

$$\frac{d}{dx} H(y) = \frac{d}{dx} G(x)$$

Luego

$$H(y) = G(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Por último, si podemos encontrar la inversa de  $H$

$$y(x) = H^{-1}(G(x) + C). \quad (2.9)$$

será candidata a solución general. No podemos estar seguros de esta afirmación, sobre todo porque la deducción de esta fórmula estuvo sujeta a suposiciones, como  $h(y) \neq 0$ .

**Ejemplo 12.** Resolver

$$y' = \frac{y}{x}.$$

Es común emplear el método de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} &\implies \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \implies \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \\ &\implies \ln|y| = \ln|x| + C \implies |y| = k|x|, \text{ con } k > 0 \\ &\implies y = kx, \text{ con } k \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

**Función SymPy (classify\_ode: clasificación de ecuaciones).**

**Sintaxis**

```
classify_ode(eq, f(x))
```

**Ejemplo 13.**

```
x=symbols('x')
2 y=Function('y')(x)
MiEcua=Eq(y.diff(x),y/x)
4 tipo=classify_ode(MiEcua,y)
```

**Resultado:**

```
('separable', '1st_exact', '1st_linear',
'almost_linear', 'lie_group', etc)
```

## 2.7. Galería de Ejemplos

Vamos a describir algunos ejemplos. algunos de ellos llevan a problemas matemáticos muy simples. No obstante es oportuno discutirlos por dos motivos, habituarnos a la utilización de la matemática para resolver problemas de otras ciencias y sentar las bases para discutir problemas más relevantes desde una óptica matemática.

### 2.7.1. Ley de reproducción normal

En muchos ejemplos de biología, química-física, etc, hay magnitudes que crecen(decrecen) siguiendo una ley que denominaremos Ley de reproducción normal. Según esta ley la cantidad de individuos, sustancia, materia, energía, etc, que se agrega o elimina de una población, cuerpo, etc por unidad de tiempo es proporcional a la cantidad de individuos, sustancia, etc que hay presente. Una población de seres vivos

puede reproducirse de esta manera bajo algunas circunstancias especiales, por ejemplo si cuenta con fuente ilimitada de alimentos.

Si  $P(t)$  es la cantidad de individuos en el momento  $t$ , la ley de reproducción normal establece en este caso la siguiente ecuación diferencial de primer orden

$$P'(t) = kP(t), \quad \text{con } k > 0.$$

La solución es hallada con suma facilidad, siendo ella

$$P(t) = Ce^{kt}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

La constante  $C$  se puede determinar si tenemos un problema a valores iniciales (pvi), por ejemplo  $P(0) = P_0$ , siendo  $P_0 \in \mathbb{R}$  dado. En ese caso  $A = P_0$ .

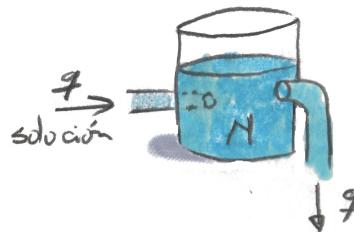
Otro ejemplo de comportamiento similar es la desintegración radiactiva. Algunos átomos de ciertas sustancias, pueden “desarmarse” en átomos de otras sustancias. En el proceso suelen emitir radiaciones. La velocidad de desintegración sigue una ley de reproducción normal pero hay que tener en cuenta que la materia radiactiva, es decir la “población” en este caso, se pierde. Si  $x(t)$  es la masa de materia radiactiva en el momento  $t$ , evolucionará acorde a la ley

$$x'(t) = -kx(t), \quad \text{con } k > 0.$$

### 2.7.2. Soluciones

#### Problema 1.

Un tanque contiene inicialmente  $N$  m<sup>3</sup> de H<sub>2</sub>O entre los cuales hay disueltos  $C$  kg de sal común NaCl. A través de una boca de entrada y una de salida empieza circular la solución, entrando y saliendo al mismo caudal  $q \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$ . Se supone que la solución entrante tiene una concentración conocida  $r$ . Encontrar la cantidad de sal en el momento  $t$ .



Sea  $x(t)$  la cantidad de NaCl en el tanque en el momento  $t$ . entonces

$$\begin{aligned} x'(t) &= \text{cantidad que entra} - \text{cantidad que sale} \\ &= qr - q \frac{x(t)}{N} \end{aligned}$$

### 2.7.3. Dinámica del punto

#### Discusión Teórica

Vamos a recordar algunas temáticas de la asignatura física. En particular el movimiento de un cuerpo de masa  $m$  al que podemos suponer puntual. Lo llamaremos punto masa. Denotamos por  $x(t)$  su posición, digamos en  $\mathbb{R}^3$ . Suponemos que sobre él actúa una fuerza  $f$ . Recordemos que  $x'(t)$  es la velocidad  $v(t)$  y que  $x''(t)$  es la aceleración  $a(t)$ . La segunda ley de Newton implica que

$$mx''(t) = f \quad (2.10)$$

Supongamos que el movimiento del punto masa se realiza entre los momentos  $t_0$  y  $t_1$ . Como has visto en Cálculo III la longitud de la curva recorrida  $s(t)$  se puede calcular por

$$s = \int_{t_0}^{t_1} |x'(t)| dt = \int_{t_0}^{t_1} |v(t)| dt. \quad (2.11)$$

A  $s$  se lo suele denominar elemento de arco. Es común querer utilizar a  $s$  como variable independiente en lugar de  $t$ , puesto que algunas fórmulas se simplifican de esta forma. Por ejemplo

$$f \cdot v(t) dt = f \cdot \frac{v(t)}{|v(t)|} |v(t)| dt = f_t ds, \quad (2.12)$$

donde  $f_t$  denota la proyección de la fuerza  $f$  sobre la dirección tangente a la trayectoria.

Si integramos (2.12) entre  $t_0$  y  $t_1$  y usamos (2.10) obtenemos

$$\begin{aligned} W &:= \int_{s_0}^{s_1} f_t(x(s)) ds = \int_{t_0}^{t_1} f(x(t)) \cdot v(t) dt \\ &= m \int_{t_0}^{t_1} v'(t) \cdot v(t) dt \\ &= \frac{m}{2} \int_{t_0}^{t_1} \frac{d|v|^2}{dt} dt \\ &= \frac{m}{2} |v(t_1)|^2 - \frac{m}{2} |v(t_0)|^2. \end{aligned}$$

A la cantidad  $\frac{m}{2}|v|^2$  se la denomina *energía cinética*  $E_c$  y a  $W$  se lo denomina *trabajo*. Las relaciones obtenidas dicen que la variación de la energía cinética es igual al trabajo realizado  $W = \Delta E_c$  por la fuerza  $f$ . El trabajo realizado depende de la proyección tangencial de la fuerza  $f_t$ . Llamaremos a esta relación Principio de Conservación de la Energía Mecánica.

Vamos a referirnos por *rapidez* al módulo de la velocidad. Si uno quiere incrementar o reducir la rapidez final  $|v(t_1)|$  entonces deberá tener fuerzas con una componente tangencial no nula. Dicho de otra forma, si la fuerza es perpendicular al movimiento, no hay cambio de rapidez.

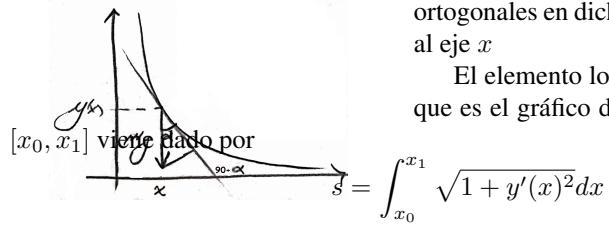
Hay fuerzas que siempre actúan en la dirección del movimiento. El ejemplo más conocido son las fuerzas de fricción, resistencia del aire, resistencia a la rodadura, etc. Estás fuerzas, actúan sólo en la dirección del movimiento y se oponen a él.

Por el contrario hay otras que actúan perpendiculares al movimiento  $f_t = 0$ . Ejemplo de ello son las fuerzas que mantienen a un cuerpo moviéndose a lo largo de una guía. Por ejemplo un niño cayendo por un tobogán. Que el niño no se despegue de la guía (tobogán) se explica por la aparición de una fuerza que se denomina reacción de vínculo que actúa en la dirección perpendicular al movimiento esto es decir a la guía. Esta fuerza debe compensar a toda otra fuerza que trata de apartar al cuerpo de la guía. En el caso del tobogán la gravedad trata de apartar al niño de aquél.

### Cuerpos cayendo por guías

Analicemos más en detalle el movimiento de un cuerpo cayendo a lo largo de una guía estando además influido por la acción de la gravedad. Supondremos el movimiento en las proximidades de la superficie de la Tierra y por ello, supondremos que la fuerza de la gravedad es la constante  $mg$ .

Supongamos que la guía está confinada a un plano. Introducimos un sistema de coordenadas ortogonales en dicho plano, con el suelo paralelo al eje  $x$



El elemento longitud de arco  $s$  de una curva que es el gráfico de una función  $y(x)$  para  $x$  en

La fuerza de vínculo de la guía tiene componente tangencial nula, la gravedad tiene una componente tangencial no nula. Su magnitud es  $mg \cos \alpha$  (ver dibujo). Vamos a tratar de expresar  $\cos \alpha$  en términos de  $y'(x)$ . Vamos a suponer  $\cos \alpha > 0$  e  $y'(x) < 0$ . Los demás casos quedan como **ejercicio**.

$$\tan^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1$$

y

$$y'(x) = \tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\frac{1}{\tan \alpha}$$

Podemos usar las relaciones anteriores para escribir  $\cos \alpha$  en función de  $y'(x)$

$$\cos \alpha = -\frac{y'(x)}{\sqrt{1 + y'(x)^2}} \quad (2.13)$$

Entonces

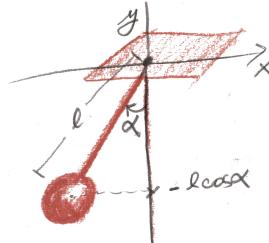
$$\begin{aligned} \frac{m}{2}|v(t_1)|^2 - \frac{m}{2}|v(t_0)|^2 &= \int_{s_0}^{s_1} f_t ds = \int_{x_0}^{x_1} f_t \frac{ds}{dx} dx \\ &= -mg \int_{x_0}^{x_1} \frac{y'(x)}{\sqrt{1 + y'(x)^2}} \sqrt{1 + y'(x)^2} dx \\ &= -mg (y_1 - y_0) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Esto nos permite escribir la rapidez en función de la altura respecto al piso.

**Ejemplo 14.** [Péndulo]

Se trata de una masa puntual  $m$  suspendida de un punto por medio de una barra de longitud  $l$  a la que suponemos sin masa. Equivale al movimiento sobre una guía circular. Usaremos el ángulo  $\alpha$  marcado en la figura, como variable dependiente.

Supondremos que el origen del sistema de coordenadas está sobre el punto de amarre de la barra. Entonces de (2.14) con  $t_1 = t$  deducimos



$$\begin{aligned} \frac{m|v(t)|^2}{2} - \frac{m|v(t_0)|^2}{2} &= -mg(y(t) - y(t_0)) \\ &= mg \cos \alpha(t) - mg \cos \alpha(t_0). \end{aligned}$$

Ahora la posición de la masa es  $x(t) = l(\sin \alpha, -\cos \alpha)$  luego

$$v(t) = l\alpha'(t)(\cos \alpha, \sin \alpha) \implies |v(t)|^2 = l^2 \alpha'(t)^2.$$

Entonces

$$\frac{ml^2 \alpha'(t)^2}{2} = mgl \cos \alpha(t) - mgl \cos \alpha(t_0) + \frac{mv(t_0)^2}{2}.$$

Derivando esta relación

$$ml^2 \alpha'(t) \alpha''(t) = -mgl \alpha'(t) \operatorname{sen} \alpha(t).$$

De esto deducimos la ecuación del péndulo

$$\boxed{\alpha''(t) = -\frac{g}{l} \operatorname{sen} \alpha(t)}.$$

**Ejemplo 15.** [La braquistócrona]

**Problema 2.**

Dados dos puntos  $A$  y  $B$  en las proximidades de la superficie terrestre, uno mas abajo respecto al suelo que el otro, queremos diseñar el tobogán óptimo entre los dos, esto es el tobogán que nos lleve de  $A$  hasta  $B$  en el menor tiempo. La curva solución a este problema se llama curva braquistócrona (braquistos - el más corto, cronos - tiempo).

Este problema fue resuelto por primera vez por Johann Bernoulli y es unos de los problemas precursores de la rama de las matemáticas que se denomina cálculo de variaciones. Vamos a dar la solución de Bernoulli que es muy elegante y está basada en un resultado de óptica llamado el Principio de Mínimo Tiempo de Fermat.

### Principio de Mínimo Tiempo de Fermat

La luz sigue para ir de un punto a otro el recorrido que minimiza el tiempo.

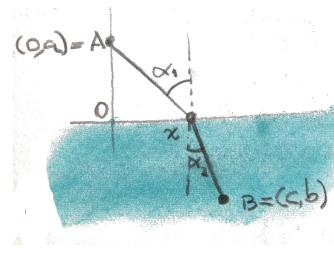
La primera impresión es que ese recorrido debería ser la línea recta. Si embargo esto no es así debido a que la velocidad de la luz cambia de acuerdo al medio que atraviesa. La velocidad de la luz en el vacío es 299.792,458km/h y en el diamante 124.034,943 km/h. La velocidad de la luz cambia no sólo con la sustancia sino con sus cualidades, como la densidad.

Si la luz se mueve dentro de un medio homogéneo, el camino que sigue es la línea recta. Esto ya no es más así cuando la luz cambia de medio de propagación. Por ejemplo cuando pasa del aire al vidrio.

Supongamos que la luz une los puntos  $A$  y  $B$  del plano y en el camino atraviesa de un medio a otro, siendo la velocidad de la luz en cada uno de ellos  $v_1$  y  $v_2$ . Supongamos que  $A = (a, 0)$  y  $B = (c, b)$  y el eje  $x$  es la frontera entre los medios.

Como sabemos que mientras se mueva en un medio homogéneo la luz sigue en línea recta, el tiempo que emplea la luz para ir  $A$  a  $B$  es

$$t = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(c - x)^2 + b^2}}{v_2}$$



Para determinar la trayectoria es suficiente encontrar  $x$ , el punto donde la luz choca con la interfaz entre los medios. El principio de Fermat afirma que el tiempo es mínimo de

modo que hallaremos un punto crítico de  $t$  respecto a  $x$ .

$$\frac{dt}{dx} = -\frac{c-x}{\sqrt{(c-x)^2 + b^2 v_2}} + \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2 v_1}} = \frac{\sin \alpha_1}{v_1} - \frac{\sin \alpha_2}{v_2}$$

Deducimos que en un punto crítico

$$\frac{\sin \alpha_1}{v_1} = \frac{\sin \alpha_2}{v_2} \quad (2.15)$$

que se denomina Ley de Snell. El punto crítico es mínimo pues  $\frac{dt}{dx}|_{x=0} = -\frac{c}{bv_2} < 0$  y  $\frac{dt}{dx}|_{x=c} = \frac{c}{\sqrt{c^2 + a^2 v_1}} > 0$ .

A la razón entre la velocidad de la luz dentro de un determinado medio y la velocidad de la luz en el vacío se lo denomina índice de refracción y se lo denota con la letra  $n$ . La Ley de Snell se la suele escribir

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2.$$

Que pasa si la luz atraviesa un medio que va cambiando de manera continua de índice de refracción. Por ejemplo, el índice de refracción en la atmósfera va cambiando de manera continua con la altitud respecto a la superficie terrestre, ya que la densidad del aire va cambiando con la altitud. La Ley de Snell en este caso es

$$\frac{\sin \alpha}{v} = \text{cte}$$

Aquí el ángulo  $\alpha$  y la velocidad  $v$  cambian respecto a alguna variable/s real/es, por ejemplo la altitud.

¿Qué tienen en común el recorrido de la luz y la braquistócrona? Bernoulli se dió cuenta que la situación en los dos casos es la misma, ya que en los dos casos se trata de minimizar el tiempo del recorrido. De modo que la braquistócrona también tiene que satisfacer la Ley de Snell. Ahora supongamos un sistema de coordenadas con origen en el punto  $A$ , inicial del recorrido. Además supongamos que el móvil parte del reposo. Con estas suposiciones  $x(t_0) = 0$  y  $v(t_0) = 0$ . Por la conservación de la energía

$$\frac{m}{2} |v(t)|^2 = -mgy(t) = mg|y(t)|.$$

Así por la ley de Snell

$$\frac{\sin \alpha}{|v(t)|} = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{2g|y|}} = c = \text{cte}.$$

En (2.13) habíamos expresado el  $\cos \alpha$  (en realidad del ángulo opuesto por el vértice, pero es igual) mediante la derivada. Luego

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{1}{\sqrt{1 + y'(x)^2}}.$$

Entonces tenemos

$$\sqrt{2g|y|} \sqrt{1 + y'(x)^2} = c = \text{cte}$$

Despejando llegamos a la ecuación diferencial

$$\sqrt{\frac{y}{c-y}}y' = 1.$$

Es una ecuación con variables separables. La constante  $c$  no tiene el mismo valor que en la ecuación anterior.

La solución se obtiene resolviendo la integral

$$x = \int dx = \int \sqrt{\frac{y}{c-y}} dy.$$

lo que no es tan sencillo. Hacemos el cambio de variables

$$\sqrt{\frac{y}{c-y}} = \tan \phi \implies y = c \sin^2 \phi \implies dy = 2c \sin \phi \cos \phi d\phi.$$

Luego

$$x = 2c \int \sin^2 \phi d\phi = \frac{c}{2} (2\phi - \sin 2\phi) + C_1.$$

Como tiene que pasar por  $x = 0$  e  $y = 0$  debe ser  $C_1 = 0$ . Tenemos que

$$\begin{cases} y &= c \sin^2 \phi \\ x &= \frac{c}{2}(2\phi - \sin 2\phi) \end{cases} = \frac{c}{2}(1 - \cos 2\phi)$$

Conviene llamar  $2\phi = \theta$  y  $a = c/2$

$$\begin{cases} y &= a(1 - \cos \theta) \\ x &= a(\theta - \sin \theta) \end{cases}$$

Que son la ecuaciones paramétricas de una curva conocida con el nombre de cicloide.

Podemos usar SymPy para graficar esta curva

```
theta=symbols('theta')
from sympy.plotting import *
plot_parametric(theta-sin(theta),1-cos(theta),(theta,0,10*pi))
```

Figura 2.2: Cicloide

Si intentamos resolver las ecuaciones con SymPy el resultado no es muy alentador.

```

1 x,c=symbols('x,c')
y=Function('y')(x)
3 MiEcua=Eq(y.diff(x),sqrt((c-y)/y))
f=dsolve(MiEcua,y,hint='separable')

```

**Resultado:**

$$\begin{cases} -i\sqrt{c}\sqrt{-1 + \frac{1}{c}y(x)}\sqrt{y(x)} - ic \operatorname{acosh}\left(\frac{1}{\sqrt{c}}\sqrt{y(x)}\right) & \text{for } \left|\frac{1}{c}y(x)\right| > 1 \\ \frac{\sqrt{c}\sqrt{y(x)}}{\sqrt{1-\frac{1}{c}y(x)}} + c \operatorname{asin}\left(\frac{1}{\sqrt{c}}\sqrt{y(x)}\right) + \frac{y^{\frac{3}{2}}(x)}{\sqrt{c}\sqrt{1-\frac{1}{c}y(x)}} & \text{otherwise} \end{cases} = C_1 + x$$

**Ejemplo 16.** [La tautócrona]

Vamos a ver otra propiedad notable de la ciclode. Supongamos que dejamos caer el cuerpo del reposo desde un punto intermedio, digamos en  $(x_0, y_0)$ . Sea  $\theta_0$  el valor del parámetro  $\theta$  correspondiente a este punto. ¿Cuánto tardara en llegar el cuerpo al punto mínimo de la curva que ocurre cuando  $\theta = \pi$ ?

Tenemos

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\theta} = a(1 - \cos \theta) \\ \frac{dy}{d\theta} = a \sin \theta \end{cases}$$

Como el cuerpo ahora no parte de  $(0, 0)$  tendremos

$$|v| = \sqrt{2g(y_0 - y)}.$$

La tautócrona Por (2.11)  $ds/dt = |v|$ . Si llamamos  $T$  al tiempo que demanda en llegar a  $\theta = \pi$ , y llamamos  $s_0$  y  $s_1$  a los arcos correspondientes al punto inicial y final. Tenemos

$$T = \int_0^\pi dt = \int_{s_0}^{s_1} \frac{dt}{ds} ds = \int_{s_0}^{s_1} \frac{1}{\sqrt{2g(y_0 - y)}} ds.$$

Cambiando la variable de integración a  $\theta$ . Como

$$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} = \sqrt{2a\sqrt{1 - \cos \theta}}.$$

Tenemos

$$T = \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{\theta_0}^{\pi} \frac{\sqrt{1 - \cos \theta}}{\cos \theta_0 - \cos \theta} d\theta = \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{\theta_0}^{\pi} \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\cos^2 \frac{\theta_0}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2}} d\theta.$$

Ahora hacemos la sustitución

$$u = \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta_0}{2}} \implies du = -\frac{\sin \frac{\theta}{2}}{2 \cos \frac{\theta_0}{2}} d\theta.$$

Vemos que

$$T = 2\sqrt{\frac{a}{g}} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} du.$$

Que es una expresión independiente de  $\theta_0$ . En consecuencia el tiempo  $T$  que demanda el cuerpo para llegar  $\theta = \pi$  es siempre el mismo no importa desde donde se deje caer.

Figura 2.3: Tautócrona

## Capítulo 3

# Ecuaciones de primer orden

### 3.1. Ecuaciones homogéneas

**Definición 1** (Funciones homogéneas).

Una función  $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  se dice homogénea de grado  $\alpha$  si

$$f(rx, ry) = r^\alpha f(x, y).$$

**Ejemplo 17.**

- $f(x, y) = \frac{y}{x}$  es homogénea de grado 0.
- Más generalmente, cualquier función  $f(x, y)$  que dependa sólo de  $x/y$ , esto es que se escriba de la forma  $f(x, y) = g(y/x)$  es homogénea de grado 0. Así  $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$  es homogénea de grado 0 pues  $\frac{x-y}{x+y} = \frac{1-x/y}{1+x/y}$
- $f(x, y) = \sum_{k=0}^n a_k x^k y^{n-k}$  es homogénea de grado  $n$ .

**Definición 2** (Ecuaciones homogéneas).

Una ecuación

$$y' = f(x, y) \tag{3.1}$$

tal que  $f$  es homogénea de grado 0 se llamará ecuación homogénea.

Si una ecuación del tipo (3.1) es homogénea entonces se transforma en una ecuación separable mediante el cambio de variable dependiente  $[z = y/x]$ . En efecto, para  $x \neq 0$

$$f(x, y) = x^0 f\left(1, \frac{y}{x}\right) = f(1, z)$$

y

$$y' = z'x + z$$

Como  $y' = f(x, y)$  tenemos

$$z'x + z = f(1, z) \implies \frac{dz}{f(1, z) - z} = \frac{dx}{x}. \quad (3.2)$$

**Ejemplo 18.** Resolver  $y' = \frac{x+y}{x-y}$ .

La ecuación (3.2) queda

$$\begin{aligned} \frac{dx}{x} &= \frac{dz}{\frac{1+z}{1-z} - z} = \frac{(1-z)dz}{1+z^2} \\ &\downarrow \\ \ln|x| + C &= \arctan(z) - \frac{1}{2} \ln|1+z^2| \end{aligned}$$

### 3.2. Ecuaciones exactas

**Definición 1 (Diferencial).**

Dada una función  $f$  de  $n$  variables independientes  $x_1, \dots, x_n$  definimos su diferencial por

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n. \quad (3.3)$$

Esta definición obviamente carece de rigor pues el miembro de la derecha en (3.3) contiene las expresiones indefinidas  $dx_j$ . La diferencial puede ser definida con toda corrección, es un ejemplo de forma diferencial, en particular es una 1-forma. En la unidad que sigue hablaremos un poco más del concepto de forma diferencial. El uso que haremos de las formas diferenciales es muy elemental, podríamos evitar por completo su uso al costo de usar una notación ligeramente menos compacta y simétrica.

Es costumbre escribir una ecuación diferencial como la 1-forma diferencial

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (3.4)$$

Que corresponde a la ecuación, escrita de la manera tradicional,  $y' = -M(x, y)/N(x, y)$ .

Dada  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , satisfaciendo las condiciones del Teorema de la Función Implícita, la expresión

$$f(x, y) = c \quad (3.5)$$

define una familia paramétrica de curvas, con parámetro  $c$ . Derivanda la expresión podemos representar esta familia como soluciones de la EDO

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = 0 \iff \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0 \iff df = 0.$$

Esto nos sugiere la idea de que, dada una ecuación diferencial cualquiera, indaguemos si se puede escribir, o puede ser transformada de alguna manera en, una ecuación de la forma  $df = 0$ . Para que la ecuación (3.4), se pueda expresar como  $df = 0$  se debe cumplir que  $M = \partial f / \partial x$  y  $N = \partial f / \partial y$ . Vale decir el campo vectorial  $(x, y) \mapsto (M(x, y), N(x, y))$  es un campo gradiente o conservativo, con potencial  $f$ .

No todo campo es un campo gradiente, recordemos el siguiente teorema de Cálculo III

**Teorema 1** (Caracterización de campos conservativos).

Sea  $\mathcal{O}$  un conjunto abierto y simplemente conexo de  $\mathbb{R}^n$ . Son equivalentes

1. El campo  $F : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un gradiente.
2. Si  $C$  es cualquier camino cerrado entonces

$$\oint_C F \cdot dx = 0.$$

3.

$$\frac{\partial F^i}{\partial x_j} = \frac{\partial F^j}{\partial x_i}, \quad \text{para } i, j = 1, \dots, n$$

Pensando al campo  $F$  como un campo de fuerzas sobre el espacio euclídeo tridimensional, el ítem 2 expresa que el trabajo realizado por la fuerza a lo largo de un camino cerrado es cero. El ítem 3 afirma que  $\nabla \times F = 0$ , la fuerza es irrotacional.

El ítem 3 es simple de chequear. Una vez establecido que un campo es conservativo tendremos el problema de hallar el potencial  $f$ . Ilustremos esto con el campo  $(x, y) \mapsto (M(x, y), N(x, y))$ . Supongamos que  $\mathcal{O}$  es abierto de  $\mathbb{R}^2$  y

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}, \quad \text{para } (x, y) \in \mathcal{O}.$$

En primer lugar debemos tener un campo escalar  $f$  tal que

$$M = \frac{\partial f}{\partial x} \Rightarrow f = \int M dx + C(y).$$

Ahora como  $f_y = N$

$$N = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int M dx + C'(y) \Rightarrow C'(y) = N - \frac{\partial}{\partial y} \int M dx.$$

Para que esta ecuación tenga solución  $N - \frac{\partial}{\partial y} \int M dx$  debe ser sólo función de  $y$ . Pero la condición necesaria y suficiente para ello es

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial x} \left( N - \frac{\partial}{\partial y} \int M dx \right) \\ &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \int M dx \\ &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \int M dx \\ &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}. \end{aligned}$$

Pero estamos bajo ese supuesto, entonces

$$f = \int M dx + \int \left( N - \frac{\partial}{\partial y} \int M dx \right) dy. \quad (3.6)$$

**Ejemplo 19.** Resolver  $e^y dx + (xe^y + 2y)dy = 0$ .

**Solución:** Aquí

$$M = e^y \quad y \quad N = xe^y + 2y.$$

Así

$$\frac{\partial M}{\partial y} = e^y = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

La ecuación es exacta. El potencial  $f$  debe cumplir

$$f = \int e^y dx = xe^y + C(y).$$

Luego

$$C(y) = \int \left( xe^y + 2y - \frac{\partial}{\partial y} xe^y \right) dy = y^2$$

Tener en cuenta que la función potencial  $f$  no es única, queda determinada hasta una constante aditiva de integración que podemos elegir a gusto ya que debemos encontrar sólo un potencial. Entonces podemos tomar

$$f = xe^y + y^2.$$

La solución general de la ecuación estará dada por

$$xe^y + y^2 = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Como no sabemos despejar  $\boxed{y}$  de aquí dejamos indicada de esta manera la solución.

### 3.3. Factores integrantes

Factores integrantes Las ecuaciones exactas son raras, no obstante tenemos un recurso para llevar algunas ecuaciones no exactas a una equivalente y exacta.

Supongamos que la ecuación (3.4) no es exacta. La idea es encontrar una función  $\mu(x, y)$  llamada factor integrante que haga exacta la ecuación

$$\mu(Mdx + Ndy) = 0.$$

Para ello se debe cumplir que

$$\frac{\partial \mu M}{\partial y} = \frac{\partial \mu N}{\partial x} \iff \left[ \mu \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial \mu}{\partial y} M = \frac{\partial N}{\partial x} \mu + N \frac{\partial \mu}{\partial x} \right]. \quad (3.7)$$

**Proposición 1** (Existencia de factores integrantes).

Toda ecuación de primer orden (3.4), con  $N \neq 0$ , que tiene una solución general que se escribe como en (3.5), con  $\partial f / \partial y \neq 0$  tiene un factor integrante.

*Comentario:* La suposición  $N \neq 0 \neq \frac{\partial f}{\partial y}$ , es razonable pues  $N = 0$  implicaría que no podemos despejar  $y'$  de (3.4) y  $\partial f / \partial y$  contradice las hipótesis del Teorema de la Función Implícita, herramienta necesaria para suponer que  $y$  es función de  $x$

*Dem.* Si derivamos (3.5) conseguimos

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0.$$

De esta ecuación y (3.4) vemos que

$$-\frac{M}{N} = y' = -\frac{\partial f / \partial x}{\partial f / \partial y} \implies \frac{\partial f / \partial x}{M} = \frac{\partial f / \partial y}{N} =: \mu(x, y)$$

De la igualdad de arriba se deduce que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \mu M \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \mu N.$$

Es decir  $\mu$  es factor integrante.  $\square$

La proposición anterior nos dice que, mientras la ecuación sea resoluble, siempre existe un factor integrante. Pero no ayuda a hallarlo dado que parte de la solución que es lo que queremos hallar. Otra alternativa es resolver la ecuación (3.7) que es una ecuación en derivadas parciales para  $\mu$ , que normalmente es más difícil que resolver la original. Así, mientras que el método es siempre aplicable, en la práctica es útil en situaciones específicas.

Hay que señalar que sólo necesitamos una solución de (3.7) y no su solución general. En la práctica se suele hacer alguna suposición sobre  $\mu$  que simplifique la expresión. Es decir proponer alguna forma específica para  $\mu$  que haga la ecuación (3.7) más sencilla de resolver. Por supuesto, a priori el factor integrante, si bien existe, no tiene ninguna forma predeterminada. Lo que hacemos es lo que en lenguaje culto se conoce como ansatz, y en lenguaje coloquial, que aquí es más significativo, estamos haciendo un lance o tratando de adivinar  $\mu$ , sin mucho más criterio que buscarlo entre esas funciones con una forma (simple) predeterminada. Por ejemplo, es común suponer que  $\mu$  es sólo función de una de las variables. Si por ejemplo asumimos que  $\mu = \mu(x)$  la ecuación (3.7) se escribe

$$\mu \frac{\partial M}{\partial y} = \mu \frac{\partial N}{\partial x} + N \mu'(x) \implies \boxed{\frac{\mu'}{\mu} = \frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N}}$$

Este ansatz no siempre funcionará, para que lo haga, la función en el segundo miembro  $(\partial M/\partial y - \partial N/\partial x)/N$  debe depender sólo de  $x$ . Si eso ocurre

$$\mu(x) = e^{\int \frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N} dx}. \quad (3.8)$$

es un factor integrante. Recordar que sólo necesitamos hallar uno, por ese motivo omitivos constantes de integración.

De manera similar, si la función

$$\frac{\partial N/\partial x - \partial M/\partial y}{M}$$

depende sólo de  $y$  tenemos que

$$\mu(y) = e^{\int \frac{\partial N/\partial x - \partial M/\partial y}{M} dy}$$

es un factor integrante que, en este caso, sólo depende de  $y$ .

**Ejemplo 20.**  $ydx + (x^2y - x)dy = 0$ .

Primero chequeemos la posible exactitud.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 \text{ y } \frac{\partial N}{\partial x} = 2xy - 1 \implies \text{no exacta.}$$

Ahora

$$\frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N} = \frac{2 - 2xy}{x(xy - 1)} = -\frac{2}{x}.$$

El factor integrante es

$$\mu(x) = e^{-2 \ln|x|} = \frac{1}{x^2}.$$

### 3.4. Otras Técnicas relacionadas con exactitud

Veamos otra forma de trabajar para transformar ecuaciones no exactas en exactas. Esta forma no es metódica, sino que depende de la habilidad de quien la lleva adelante en encontrar la similitud de la ecuación diferencial con alguna expresión exacta conocida. Ilustremos esto con el ejemplo anterior  $ydx + (x^2y - x)dy = 0$ . Escrita de este modo no se advina ninguna similitud. Pero si la escribimos

$$x^2ydy - (xdy - ydx) = 0.$$

Recordando que

$$d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{xdy - ydx}{x^2}.$$

Lo que sugiere dividir por  $x^2$  la ecuación.

$$0 = ydy - \frac{xdy - ydx}{x^2} = d\left(\frac{y^2}{2}\right) - d\left(\frac{y}{x}\right) = d\left(\frac{y^2}{2} - \frac{y}{x}\right).$$

La solución general es pues

$$\frac{y^2}{2} - \frac{y}{x} = c.$$

Se obtienen otras formas diferenciales exactas derivando expresiones sencillas

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2} \quad \text{nada nuevo} \quad (3.9)$$

$$d(xy) = ydx + xdy \quad (3.10)$$

$$d(x^2 + y^2) = 2(xdx + ydy) \quad (3.11)$$

$$d\left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right) = \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} \quad \text{falla caracterización pag (1)!!! Qué ocurre?}$$

$$d\left(\ln\left(\frac{y}{x}\right)\right) = \frac{ydx - xdy}{xy} \quad (3.12)$$

**Ejemplo 21.** *Espejos, antenas parabólicos.* Hallar la forma del espejo curvo tal que el reflejo de todo haz de luz que viaja paralelo al eje  $x$  con dirección negativa respecto a este eje pasa por el  $(0, 0)$ .

**Ejercicio.** Dejamos como ejercicio demostrar que un haz de luz que se refleja sobre un espejo lo hace de tal manera que los ángulos que se forman con los rayos de incidencia y refracción y la tangente al espejo en el punto de incidencia son iguales ( $\beta = \alpha$  en el dibujo). Para resolver esto hay que usar el principio de mínimo tiempo de Fermat

**Solución.** Sea  $(x, y)$  el punto de incidencia.

Apelando a la geometría elemental,  $\phi = \beta$  y  $\theta = \alpha + \phi = 2\beta$ . Como  $\tan \theta = \frac{y}{x}$  y como

$$\tan \theta = \tan 2\beta = \frac{2 \tan \beta}{1 - \tan^2 \beta},$$

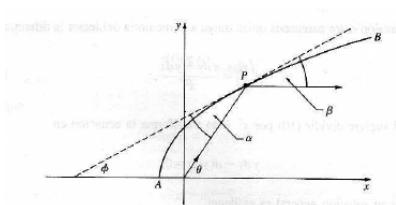


Figura 3.1: Reflejo en un espejo curvo

deducimos que

$$\frac{y}{x} = \frac{2dy/dx}{1 - (dy/dx)^2}.$$

Despejando

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x \pm \sqrt{x^2 + y^2}}{y}.$$

Podemos escribir la ecuación de este otro modo

$$xdx + ydy = \pm \sqrt{x^2 + y^2} dx.$$

Tomando en cuenta (3.11)

$$\pm \frac{d(x^2 + y^2)}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = dx.$$

Si  $r = x^2 + y^2$

$$dx = \pm \frac{dr}{2\sqrt{r}} = \pm d\sqrt{r} = \pm d\sqrt{x^2 + y^2}$$



Figura 3.2: Antena parabólica

Las solución general es

$$\pm \sqrt{x^2 + y^2} = x + c.$$

Elevando al cuadrado ambos miembros

$$y^2 = 2xc + c^2 = 2c\left(x + \frac{c}{2}\right)$$

Que es la familia de todas las paráolas con eje de simetría  $x$ , positivamente orientadas y con foco en  $(0, 0)$ .

### 3.5. Ecuaciones Lineales

**Definición 1** (Ecuación lineal).

Se llama ecuación diferencial lineal a una ecuación que es lineal respecto a la/s variables dependientes. La siguiente es la ecuación diferencial lineal general de primer orden

$$y' + p(x)y = q(x) \quad (3.13)$$

y la de segundo orden

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x). \quad (3.14)$$

Aquí  $p, q$  y  $r$  son funciones de  $x$  usualmente definidas sobre un intervalo abierto de  $\mathbb{R}$ .

La ecuación puede ser no lineal respecto a la variable independiente.

Es costumbre introducir los operadores diferenciales  $L_1[y] = y' + py$  y  $L_2[y] = y'' + py' + qy$ . Para una ecuación lineal, los operadores  $L_1$  y  $L_2$  son lineales. Es decir,  $L_1[y_1 + y_2] = L_1[y_1] + L_1[y_2]$ .

Vamos a resolver la ecuación lineal de primer orden (3.13). Esto es sencillo pues la forma diferencial asociada

$$dy + (p(x)y - q(x))dx = 0 \quad (3.15)$$

tiene un factor integrante que depende sólo de  $x$ . En efecto como  $M = p(x)y - q(x)$  y  $N = 1$ ,

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N} = p(x).$$

Entonces  $\mu(x) = e^{\int pdx}$  es factor integrante. Luego si multiplicamos por  $\mu$  en (3.15), la expresión es exacta.

$$e^{\int pdx}dy + p(x)e^{\int pdx}ydx = q(x)e^{\int pdx}dx.$$

Podemos identificar rápidamente, sin necesidad de hacer cálculos, el correspondiente potencial.

$$d\left(e^{\int pdx}y\right) = d\left(\int q(x)e^{\int pdx}dx\right).$$

Integrando

$$e^{\int pdx}y = \int e^{\int pdx}q(x)dx + C.$$

Entonces

$$y = e^{-\int pdx} \left\{ \int e^{\int pdx}q(x)dx + C \right\} \quad (3.16)$$

**Ejemplo 22.** Resolver  $y' + y/x = 3x$ .

**Solución.** En la práctica, para evitar recordar fórmulas, se suele repetir el procedimiento que llevo a la fórmula (3.16), ahora, dado la cercanía de su derivación, vamos a usarla de manera directa. La solución general es

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-\int \frac{1}{x}dx} \left\{ \int e^{\int \frac{1}{x}dx} 3xdx + C \right\} \\ &= \frac{1}{|x|} \left\{ \int |x|3xdx + C \right\} \\ &= x^2 + \frac{C}{|x|} \\ &= x^2 + \frac{C}{x} \end{aligned}$$

### 3.6. Reducción de orden

Algunas ecuaciones de segundo orden

$$F(x, y, y', y'') = 0 \quad (3.17)$$

se pueden reducir a una de primer orden. Por ejemplo si  $F$  no depende de  $y$ . Es decir la ecuación es

$$F(x, y', y'') = 0 \quad (3.18)$$

Aquí introducimos la nueva variable dependiente  $p = y'$ , que resuelve

$$F(x, p, p') = 0.$$

Que es una ecuación de primer orden. Supuesto que la podemos resolver y encontrar una solución general para  $p$ , tendremos

$$y = \int pdx + C \quad (3.19)$$

Es la solución general de la ecuación de segundo orden.

Si la ecuación general de segundo orden (3.17) no depende de  $x$ , es decir tenemos

$$F(y, y', y'') = 0 \quad (3.20)$$

entonces nuevamente usaremos  $p = y'$  como nueva variable dependiente pero también  $y$  como nueva variable independiente. Como

$$y'' = p' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} p$$

La ecuación se reduce a la siguiente ecuación de primer orden

$$F\left(y, p, \frac{dp}{dy} p\right) = 0 \quad (3.21)$$

### 3.7. SymPy

**Función SymPy (Clasificación de EDO).**

**Sintaxis:** `classify_ode(Eq)`  
**Eq:** ecuación.

El output son los métodos que se le pueden aplicar

```

1 from sympy import *
2 x=symbols('x')
3 y=Function('y')(x)
4 classify_ode(y.diff() + y)
```

**Resultado:**

```

('separable', '1st_exact', '1st_linear',
'almost_linear', '1st_power_series', 'lie_group',
'nth_linear_constant_coeff_homogeneous',
'separable_Integral', '1st_exact_Integral',
'1st_linear_Integral', 'almost_linear_Integral')
```

```

1 Ecuacion=Eq((x**2*y-x)*sin((y.diff(x,1)))**3\
2 +y**5+x**3*sin(y),0)
3 classify_ode(Ecuacion)
```

El único método que puede aplicar SymPy a la ecuación

$$(x^2y - x) \sin^3(y') + y^5 + x^3 \sin(y) = 0,$$

```
es ('lie_group',)
```

```
1 dsolve(Ecuacion,y)
```

**Resultado:** Piensa, piensa pero no llega a nada.

```

1 >>>Ecuacion=Eq(y.diff() + (-x + sqrt(x**2 + y**2))/y,0)
2 >>>classify_ode(Ecuacion)
3 ('1st_homogeneous_coeff_best',
4 '1st_homogeneous_coeff_subs_indep_div_dep',
5 '1st_homogeneous_coeff_subs_dep_div_indep',
6 '1st_power_series', 'lie_group',
7 '1st_homogeneous_coeff_subs_indep_div_dep_Integral',
8 '1st_homogeneous_coeff_subs_dep_div_indep_Integral')
```

```
>>>dsolve(Ecuacion,y,hint='lie_group')
```

**Resultado:** Piensa rato largo y:

```

1 The given ODE (-x + sqrt(x**2 + y(x)**2))/y(x) + Derivative(y(x), x)
cannot be solved by the lie group method
```

```
>>>sol=dsolve(Ecuacion,y,hint='1st_homogeneous_coeff_best')
```

$$y(x) = C_1 e^{\int \frac{u_2}{\sqrt{u_2^2 - u_2 \sqrt{u_2^2 + 1} - 1}} du_2 + \int \frac{\sqrt{u_2^2 + 1}}{u_2^2 - u_2 \sqrt{u_2^2 + 1} - 1} du_2}$$

## 3.8. Ejemplos

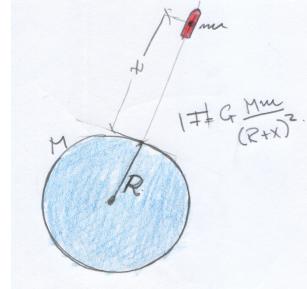
### 3.8.1. Velocidad de escape

**Problema 1** (Velocidad de escape).

Que velocidad hay que imprimirle a un proyectil que es lanzado verticalmente desde la superficie de la Tierra si nuestra pretensión es que el proyectil se escape al infinito. La velocidad más chica con esta cualidad se llama velocidad de escape.

**Solución.** Para resolver este problema hay que tomar en consideración la Ley de gravitación universal de Newton. En la parte que nos interesa, esta Ley afirma que el módulo de la fuerza de gravedad que se ejercen entre si dos cuerpos de masa  $m_1$  y  $m_2$  separados una distancia  $r$  es proporcional al producto de las masas e inversamente proporcional al cuadrado de las distancias que los separa. Vale decir

$$|F| = G \frac{m_1 m_2}{r^2},$$



donde  $G$  es la constante de proporcionalidad. Cuando los cuerpos no son puntos masa, sino cuerpos extendidos en el espacio, la distancia de separación hay que medirla entre los centros de masa de los cuerpos.

Hay que aclarar que usando el Principio conservación energía mecánica podemos resolver el problema de una manera más simple. Incluso podemos ver que la suposición de que el tiro es vertical no es necesaria, es decir la velocidad de escape es la misma aunque el tiro sea oblicuo. Discutiremos esa solución durante la clase. Lamentablemente, esta solución no usa ecuaciones diferenciales. Vamos a dar una solución, quizás un poco más complicada, pero que invoca las técnicas discutidas.

Supondremos a la Tierra una esfera de radio  $R$ , masa  $M$  y su centro de masa en el centro de la esfera. Al proyectil lo supondremos un punto masa con masa  $m$  y su posición en el momento  $t$ , denotada  $x = x(t)$ , la mediremos sobre un eje vertical con origen en la superficie de la Tierra. Todo como está indicado en la página 3.8.1. Luego

la distancia Tierra-proyectil será igual a  $R + x$  donde  $x$  es la posición del proyectil. Utilizando la Segunda ley de Newton,  $F = ma$ , obtenemos

$$mx''(t) = -\frac{GMm}{(R+x)^2}.$$

Es una ecuación de la forma

$$F(t, x, x', x'') = 0.$$

Con variable dependiente  $x$  e independiente  $t$ . Pero, en realidad no depende de  $t$  y por consiguiente, como vimos, se puede convertir en una ecuación de primer orden tomando como nuevas variables: 1) independiente  $x$  2) dependiente  $v = x'$ . En estas variables

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx}.$$

La ecuación se convierte en

$$v \frac{dv}{dx} = -\frac{GM}{(R+x)^2} \implies vdv + \frac{GM}{(R+x)^2} dx = 0.$$

Que es una ecuación en variables separables y también es exacta. Usaremos la técnica discutida para ecuaciones exactas<sup>1</sup>, los que nos indica que la solución general se expresa de la siguiente forma

$$\frac{v^2}{2} - \frac{GM}{(R+x)} = E = \text{cte.} \quad (3.22)$$

La igualdad anterior es precisamente consecuencia directa del Principio conservación energía mecánica, lo hemos vuelto a deducir como consecuencia de que la ecuación era exacta. Sea  $v_0$  la velocidad inicial para  $t = 0$ . Como  $E$  es constante y  $x = 0$  en  $t = 0$  debemos tener

$$E = \frac{v_0^2}{2} - GM/R \quad (3.23)$$

Como  $v^2 \geq 0$  y por (3.22) y (3.23).

$$-\frac{GM}{(R+x)} \leq \frac{v^2}{2} - \frac{GM}{(R+x)} = \frac{v_0^2}{2} - \frac{GM}{R}$$



Figura 3.3: Remera nerd

---

<sup>1</sup>Siempre las ecuaciones en variables separables son exactas pues se escriben de la forma

$$M(x)dx + N(y)dy = 0,$$

por consiguiente tienen potencial

$$f = \int M(x)dx + \int N(y)dy$$

Queremos encontrar  $v_0$  tal que  $x \rightarrow \infty$ . Luego tiene sentido tomar límite cuando  $x \rightarrow \infty$  en la expresión anterior y concluimos

$$0 \leq \frac{v_0^2}{2} - GM/R$$

De aquí deducimos que el valor mínimo de velocidad de escape es el impreso en la remera de la figura 3.3.

### 3.8.2. Curvas de persecución

**Problema 2** (Curvas de persecución).

Supongamos que un conejo se mueve sobre una línea recta con rapidez uniforme  $a$  y de un punto por fuera de la recta parte un perro que lo persigue con rapidez uniforme  $b$ . Encontrar la trayectoria del perro.

Figura 3.4: Persecución en un pentágono estrellado. Art of Pursuit, Ivars Peterson

Supongamos que el perro parte del punto  $(c, 0)$ , el conejo de  $(0, 0)$  y la recta sobre la cual se mueve el conejo en dirección positiva es el eje  $y$ . Vamos a suponer que la trayectoria del perro sigue la trayectoria donde la tangente a su movimiento, en un momento dado, intersecta a la posición del conejo correspondiente a ese momento.

Pasado un tiempo  $t$ , el conejo estará en el punto  $(0, at)$  y el perro en un punto de su trayectoria que forma un arco de longitud  $s = bt$  hasta el  $(c, 0)$ . Ese punto, donde está el perro, lo

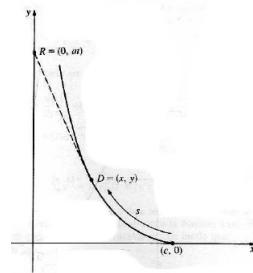


Figura 3.5: Curva persecución

denotaremos  $(x, y)$ . Como hemos supuesto que la tangente a la trayectoria del perro en  $(x, y)$  pasa por la posición del conejo  $(0, at)$  se debe cumplir que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - at}{x} \implies xy' - y = -at. \quad (3.24)$$

En esta ecuación hay tres variables,  $t$ ,  $x$  e  $y$ . No hemos definido cuales son independiente y cuales dependientes. Generalmente el tiempo  $t$  se considera variable independiente, pero en la expresión de arriba aparece la derivada de  $y$  respecto a  $x$ . Claramente deberíamos eliminar una de las variables. Conviene eliminar  $t$ , dado que al no aparecer en la derivación no tendremos que hacer un cambio de variables allí, donde siempre es un poco más engorroso. Por otra parte, la intuición del problema, nos dice que a cada  $t$  corresponde uno, y sólo un,  $x^2$ , lo que indica que  $t$  es función de  $x$  y por consiguiente es de esperar poder escribir la ecuación (3.24) en términos de  $x$  e  $y$ . Tener en cuenta que no es razonable en matemática, como en la política, pensar que lograremos tener un beneficio (menos variables) sin pagar algún precio, pues, como dice el dicho, “Cuando la limosna es grande hasta el santo desconfía”. En este caso, el costo que pagaremos es incrementar el orden de la ecuación. Como hemos dado algunas técnicas de resolver ecuaciones de orden dos quizás estemos en condiciones de pagar este precio.

Para eliminar  $t$  de la ecuación derivamos (3.24) respecto a  $x$ , obtenemos

$$xy'' = -a \frac{dt}{dx}.$$

Como  $ds/dt = b$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{dt}{ds} \frac{ds}{dx} = -\frac{\sqrt{1 + y'(x)^2}}{b}.$$

Hemos usado la relación  $s = \int_x^c \sqrt{1 + y'^2} dx$ . Entonces

$$xy'' = \frac{a \sqrt{1 + y'(x)^2}}{b}. \quad (3.25)$$

Que es una ecuación que no contiene  $y$ . De modo que usando  $p = y'$  como variable dependiente reducimos el orden de la ecuación. Nos queda

$$\frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = \frac{a}{b} \frac{dx}{x}.$$

Que es una ecuación en variable separables. Tomando la integral definida entre  $c$  y  $x$ , y considerando que si  $x = c$  entonces  $p = 0$ , tenemos

$$\ln \left( p + \sqrt{1 + p^2} \right) = \ln \left( \frac{x}{c} \right)^{\frac{a}{b}}.$$

---

<sup>2</sup>De lo contrario el perro no se hubiera movido en la dirección horizontal entre dos momentos, lo que es absurdo

Si despejamos  $p$  conseguimos

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{x}{c} \right)^{a/b} - \left( \frac{c}{x} \right)^{a/b} \right]. \quad (3.26)$$

Para hallar  $y$  hay que recordar que  $y' = p$  e  $y(1) = 0$ .

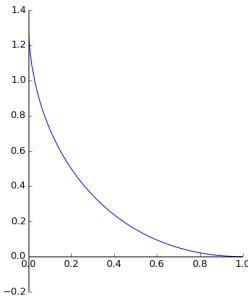
Usemos SymPy para completar este cálculo y hacer los gráficos. El siguiente código evalúa la integral, halla la constante de integración para que  $y(1) = 0$  y grafica.

```

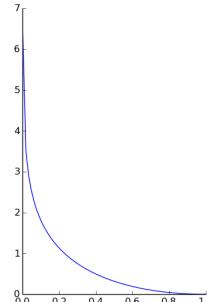
1 from sympy import *
2 x=symbols('x', real=True)
3 a=Rational(2)
4 b=Rational(1)
5 c=Rational(1)
6 y=integrate((x/c)**(a/b)-(c/x)**(a/b),x)
7 C=symbols('C')
8 C=solve(y.subs(x,1)+C,C)[0]
9 plot(y+C,(x,0.001,1))

```

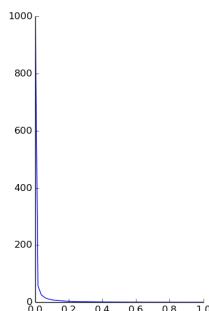
Los resultados son:



$$a < b$$



$$a = b$$



$$a > b$$

Lo anterior constituye un ejemplo de lo que se conoce como curva de persecución. Este es un tema muy interesante que tiene varias generalizaciones, por ejemplo el problema de los ratones donde se colocan en cada vértice de un polígono ratones cada uno de los cuales persigue al vecino en sentido antihorario (u horario, da lo mismo). Se consiguen patrones geométricos muy bellos

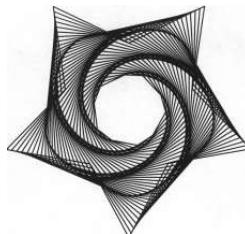


Figura 3.6: Persecución en un pentágono estrellado. Art of Pursuit, Ivars Peterson

### 3.9. Oscilador armónico

Un oscilador armónico es el más simple de los sistemas físicos vibratorios. Podemos definirlo como un sistema elástico que obedece a la Ley de elasticidad de Hooke, en honor a su descubridor Robert Hooke.

Suele citarse al resorte como un ejemplo familiar de oscilador armónico. Esto debido a que, cuando las oscilaciones de un resorte son pequeñas, se satisface aproximadamente la Ley de elasticidad de Hooke. Esta ley afirma que la fuerza que ejerce un resorte sobre una masa  $m$  conectada a él por uno de sus extremos es proporcional en magnitud al desplazamiento del resorte desde la posición de equilibrio. Además la fuerza de elasticidad actúa en sentido opuesto al desplazamiento.

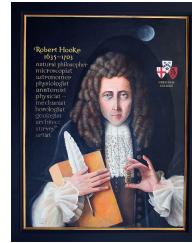


Figura 3.7: Robert Hooke

Figura 3.8: Resorte

Supongamos que tenemos un resorte, en unos de sus extremos fijado en una pared y unido a una masa  $m$  por el otro extremo. Supongamos que no actúa otra fuerza sobre la masa. Ver la animación de la figura 3.8. Pongamos un eje de coordenadas en la dirección del movimiento, con origen en la posición de equilibrio del resorte. Esta posición es el punto donde el resorte no ejerce fuerza. Supongamos que la dirección positiva es la dirección donde el resorte se expande. Denotemos por  $x(t)$  la posición de la masa en el momento  $t$ . Entonces según la Segunda Ley de Newton y la Ley de Elasticidad de Hooke, tenemos que

$$mx''(t) = -kx(t). \quad (3.27)$$

La constante de proporcionalidad  $k$  se llama constante elástica. La ecuación (3.27) se denomina la ecuación del oscilador armónico o ecuación del resorte.

La ecuación del oscilador armónico se escribe  $0 = f(t, x, x', x'')$ , donde  $f(t, x, y, z) = kx + mz$  es independiente de  $t$ . Podemos intentar usar  $x$  como variable independiente y  $z = x'$  como dependiente. Como vimos  $x''(t) = dz/dt = dz/dxz$ . Así la ecuación queda

$$\begin{aligned} m \frac{dz}{dx} z = -kx &\implies mzdz = -kxdx \implies m \frac{z^2}{2} = -k \frac{x^2}{2} + C_1 \\ &\implies z = \pm \sqrt{-\frac{k}{m}x^2 + C_1} \\ &\implies x'(t) = \pm \sqrt{-\frac{k}{m}x^2 + C_1}. \end{aligned}$$

Debe ser  $C_1 \geq 0$  de lo contrario el dominio de la función sería vacío. Nos queda una nueva ecuación para  $x'$ . Esta ecuación es en variables separables

$$\frac{dx}{\sqrt{-\frac{k}{m}x^2 + C_1}} = dt.$$

Integrando

$$\begin{aligned} t + C_2 &= \int \frac{dx}{\sqrt{-\frac{k}{m}x^2 + C_1}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{C_1}} \int \frac{dx}{\sqrt{-\frac{k}{C_1m}x^2 + 1}} \\ &= \sqrt{\frac{m}{k}} \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \quad \left( \text{haciendo } u = \sqrt{\frac{k}{C_1m}}x \right) \\ &= \sqrt{\frac{m}{k}} \arcsen u. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} x &= \frac{C_1m}{k}u = \frac{C_1m}{k} \sen \left( \sqrt{\frac{k}{m}}(t + C_2) \right) \\ &= \boxed{C_3 \sen \sqrt{\frac{k}{m}}t + C_4 \cos \sqrt{\frac{k}{m}}t}. \end{aligned}$$

Que es la solución general de la ecuación del oscilador armónico. Como vemos el movimiento es oscilatorio con frecuencia

$$f = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

En particular, no importan las condiciones iniciales, la frecuencia es siempre la misma.

### 3.10. EDP, método características

Saber resolver ecuaciones ordinarias de primer orden nos permite resolver algunas ecuaciones en derivadas parciales de primer orden. Vamos a exponer este punto a través del método de características.

Para tener un problema bien planteado con ecuaciones en derivadas parciales no es suficiente conocer el valor de la función en un punto (como en una EDO de primer orden). Una condición típica extra, para lograr este propósito, es consignar el valor de la función a lo largo de una curva, que por simplicidad asumiremos que es una recta .

**Ejemplo 23.**

$$\left. \begin{array}{l} a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = c(x, y, u) \\ u(x, 0) = f(x) \end{array} \right\} \quad (3.28)$$

Aquí  $x, y$  son variables independientes y  $u$  dependiente. La primera línea es la ecuación diferencial, que incluye derivadas parciales de la incognita y la segunda línea podemos denominarla condición inicial (pensando que la variable  $y$  representa tiempo).

El método de características consiste en encontrar  $u$  a lo largo de las soluciones de la EDO

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b(x, y)}{a(x, y)} \quad (3.29)$$

Una solución de esta ecuación es normalmente una curva en el plano  $x, y$ . La idea es que las soluciones de (3.29) forman un flia uniparamétrica de curvas que llena una gran parte  $\Omega$  del plano  $x, y$ . Así terminamos conociendo el valor de  $u$  sobre este conjunto  $\Omega$ . Para que (3.29) tenga sentido debemos tener  $a \neq 0$ . De todas formas si  $a = 0$  podemos invertir los roles de  $x$  e  $y$ .

Supongamos  $y(x)$  solución de (3.29), entonces pongamos por abuso de notación  $u(x) = u(x, y(x))$ . Se tiene que

$$\frac{du}{dx} = u_x + u_y y' = u_x + u_y \frac{b}{a} = \frac{c(x, y(x), u(x))}{a(x, y)} \quad (3.30)$$

Que es otra ecuación ordinaria. Podemos escribir (3.29) y (3.30) en una ecuación más simétrica

$$\frac{du}{c} = \frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} \quad (3.31)$$

Estas ecuaciones se llaman *ecuaciones características*. Las soluciones de estas ecuaciones son un familia de curvas que suele llenar un conjunto abierto de  $\mathbb{R}^3$ . La gráfica de la solución se obtiene eligiendo entre estas curvas las que pasan por los puntos de la gráfica de  $u$  especificados en la condición inicial, es decir  $(x, 0, f(x))$ . Esto, en los casos favorables, forma una superficie que es la gráfica de la solución. La proyección de estas curvas en el plano  $x, y$  se denominan *características*. Son la familia de soluciones de  $y' = b/a$ .

**Ejemplo 24.** Resolver

$$\left. \begin{array}{l} u_x + u_y = yu \\ u(x, 0) = f(x) \end{array} \right\} \quad (3.32)$$

En este caso

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} \Rightarrow y' = 1 \Rightarrow y(x) = x + \mu, \quad \mu = \text{cte.}$$

Entonces

$$\frac{du}{dx} = \frac{c}{a} \Rightarrow u' = yu = (x + \mu)u \Rightarrow \ln |u| = \frac{x^2}{2} + \mu x + C(\mu).$$

Notar que la nueva constante de integración  $C(\mu)$  debe depender de la primera  $\mu$ .

Entonces

$$u = \pm e^{\frac{x^2}{2}} e^{(y-x)x} e^{C(y-x)}.$$

Ahora

$$u(x, 0) = f(x) \Rightarrow f(x) = \pm e^{\frac{x^2}{2}} e^{-x^2} e^{C(-x)} \Rightarrow C(\mu) = \frac{\mu^2}{2} + \ln |f(-\mu)|.$$

Entonces

$$u(x, y) = \pm e^{\frac{x^2}{2}} e^{(y-x)x} e^{\frac{(y-x)^2}{2} + \ln |f(x-y)|} = e^{\frac{y^2}{2}} f(x-y).$$

## Capítulo 4

# Teoría de Lie y ecuaciones diferenciales

### 4.1. Introducción histórica

«Marius Sophus Lie fue un matemático noruego (17 de diciembre de 1842-18 de febrero de 1899) que creó en gran parte la teoría de la simetría continua, y la aplicó al estudio de la geometría y las ecuaciones diferenciales. La herramienta principal de Lie, y uno de sus logros más grandes fue el descubrimiento de que los grupos continuos de transformación (ahora llamados grupos de Lie), podían ser entendidos mejor "linealizándolos", y estudiando los correspondientes campos vectoriales generadores (los, así llamados, generadores infinitesimales). Los generadores obedecen una versión linearizada de la ley del grupo llamada el corchete o comutador, y tienen la estructura de lo que hoy, en honor suyo, llamamos un álgebra de Lie.» (Wikipedia)



### 4.2. Formas Diferenciales, una introducción ingenua

Como ya se mencionó, ecuación ecuación diferencial general de primer orden:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (4.1)$$

puede ser escrita como *forma diferencial*

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (4.2)$$

La primera expresión es más asimétrica, entre las variables  $x$  e  $y$  una de ellas es independiente ( $x$ ) y la otra independiente ( $y$ ). La segunda expresión es más simétrica, las dos variables tienen el mismo estatus.

Las expresiones del tipo (4.2) representan un ente matemático importante llamado forma diferencial. No disponemos del tiempo necesario para dotar con entidad matemática el concepto de forma diferencial. Tampoco resulta de vital importancia. Pero las reglas que rigen la combinación de las formas diferenciales son muy simples y nos gustaría describir este aspecto de las formas diferenciales brevemente; como motivación para un estudio posterior más profundo y para que el lector gane en confianza en su manipulación. Daremos así una pintura de las formas diferenciales incompleta, por cuanto sólo diremos como ellas se combinan pero no contestaremos la pregunta de que son. Sólo digamos, para advertir al lector sobre los requisitos teóricos que se requieren, que las formas diferenciales se encuentran asociados al concepto de variedad diferencial, concepto este que generaliza al de curva y superficie. Más concretamente, las formas diferenciales son funciones que toman valores en los duales de los espacios tangentes a las variedades diferenciales. En particular hay formas diferenciales asociadas a los espacios euclídeo, que podemos identificar con  $\mathbb{R}^n$ .

Aquí vamos a pensar a las formas diferenciales como objetos puramente formales sobre los que actúa un operador  $d$ , leyes de composición internas y externas. Se construyen formas diferenciales invocando un sistema de coordenadas  $x_1, \dots, x_n$ . Estas coordenadas, deben ser coordenadas de alguna variedad diferencial, pero, por simplicidad, supondremos que son coordenadas cartesianas ortogonales de un espacio euclídeo. Las formas diferenciales forman un espacio vectorial con una operación de suma  $+$  y producto por un escalar. Además tienen definido un producto  $\wedge$ , llamado producto exterior, que posee algunas particularidades. Como los polinomios, las formas diferenciales tienen grado. Por eso se dice que forman un álgebra graduada. A diferencia de los polinomios, este grado no supera la dimensión  $n$  del espacio ( $\mathbb{R}^n$  o más generalmente una variedad) a la que están asociadas. Para ser más exactas, la única forma de grado  $k > n$  es la trivial, esto es la nula. Denotamos  $\Lambda_k$  las formas de grado  $k$ , siendo  $\Lambda = \bigoplus_{k=0}^n \Lambda_k$  el espacio vectorial de todas ellas. Luego  $d : \Lambda \rightarrow \Lambda$  y  $\wedge : \Lambda \times \Lambda \rightarrow \Lambda$ . Ahora describimos unas simples reglas de las formas,  $d$  y  $\wedge$ .

1. Una 0-forma diferencial es una función  $g(x_1, \dots, x_n)$ .
2. Si  $\alpha \in \Lambda_k$  y  $\beta \in \Lambda_p$  entonces  $\alpha \wedge \beta \in \Lambda_{k+p}$ .
3. El producto  $\wedge$  es asociativo, distributivo y satisface una especie de anticomutatividad, específicamente si  $\alpha \in \Lambda_k$  y  $\beta \in \Lambda_p$  entonces  $\alpha \wedge \beta = (-1)^{kp} \beta \wedge \alpha$ . En particular  $\alpha \wedge \alpha = 0$  cuando  $\alpha$  es un  $k$ -forma con  $k$  impar.
4. El diferencial satisface
  - a) Si  $\omega$  es una  $k$ -forma diferencial  $d\omega$  es una  $k+1$  forma diferencial.
  - b)  $d^2\omega = d(d\omega) = 0$ , para toda  $\omega \in \Lambda$ .
  - c) Si  $\alpha \in \Lambda_k$  entonces  $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta$ .
  - d) En el caso de 0-forma (función)  $g(x_1, \dots, x_n)$  el diferencial se define

$$dg = \frac{\partial g}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial g}{\partial x_n} dx_n$$

5. Las expresiones  $dx_i, i = 1, \dots, n$  forman una especie de base del espacio de las formas  $\Lambda$ , en el sentido que cualquier  $k$  forma  $\alpha$  se expresa de la siguiente manera:

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} g_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_n},$$

para ciertas funciones  $g_{i_1 \dots i_k}$ . Observar que la suma se extiende sobre todos los subconjuntos ordenados de  $\{1, \dots, n\}$ .

Una  $k$ -forma diferencial  $\alpha$  se llama exacta cuando es el diferencial de una  $k - 1$ -forma y se dice cerrada cuando  $d\alpha = 0$ . Las propiedades de las formas implican que toda forma exacta es cerrada. Un famoso Lema de Poincaré trata con el recíproco de esta afirmación.

Las reglas anteriores permiten computar cualquiera de las operaciones. **Ejemplo 25.** Si  $\alpha = M(x, y)dx + N(x, y)dy$  es una 1-forma de  $\mathbb{R}^2$ , entonces

$$\begin{aligned} d\alpha &= dM \wedge dx - Md^2x + dN \wedge dy - Nd^2y \\ &= \left( \frac{\partial M}{\partial x} dx + \frac{\partial M}{\partial y} dy \right) \wedge dx + \left( \frac{\partial N}{\partial x} dx + \frac{\partial N}{\partial y} dy \right) \wedge dy \\ &= \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx \wedge dy \end{aligned}$$

Recordemos el famoso Teorema de Green, que afirmaba que si  $D \subset \mathbb{R}^2$  era una región cuyo borde  $C = \partial D$  era una curva cerrada simple, entonces

$$\oint_{\partial D} M dx + N dy = \iint_D \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy.$$

Utilizando formas diferenciales este resultado se escribe de la manera, mucho más compacta y sugerente

$$\oint_{\partial D} \alpha = \iint_D d\alpha,$$

donde  $\alpha = M(x, y)dx + N(x, y)dy$ . Esto es una relación clave de las formas diferenciales que se generaliza en un teorema fundamental de la matemática llamado Teorema de Stokes.

**Ejemplo 26.** Computemos  $d^2g$ , cuando  $g$  es una función (0-forma).

$$\begin{aligned}
d^2g &= d \left( \frac{\partial g}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial g}{\partial x_n} dx_n \right) \\
&= d \left( \frac{\partial g}{\partial x_1} \right) \wedge dx_1 + \cdots + d \left( \frac{\partial g}{\partial x_n} \right) \wedge dx_n - \frac{\partial g}{\partial x_1} \wedge d^2x_1 - \cdots - \frac{\partial g}{\partial x_n} \wedge d^2x_n \\
&= \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_1} dx_i \right) \wedge dx_1 + \cdots + \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_n} dx_i \right) \wedge dx_n \\
&= \sum_{i \neq 1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_1} dx_i \wedge dx_1 + \cdots + \sum_{i \neq n}^n \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_n} dx_i \wedge dx_n \\
&= \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left\{ \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 g}{\partial x_j \partial x_i} \right\} dx_i \wedge dx_j = 0.
\end{aligned}$$

Que es lo que tenía que ser.

### 4.3. Cambios de Variables

**Problema 1** (Cambio de variables).

Dada la ecuación (4.1) o (4.2) en las variables  $x, y$ . Queremos encontrar nuevas variables  $\hat{x} = \hat{x}(x, y)$  y  $\hat{y} = \hat{y}(x, y)$  tales que la ecuación se transforme en una que podamos resolver.

#### 4.3.1. Cómputos de cambios de variables

Vamos a estudiar en primer lugar como computar cambios de variables, item que suele ofrecer cierta resistencia al estudiante, a pesar de que es sencillo. Empezaremos por casos más sencillos hasta ir a la situación más general.

##### Cambio de la variable dependiente manteniendo la independiente

Supongamos que el conjunto de variables se relacionan por la identidad  $y = y(x, \hat{y})$ . Nos conviene en este caso partir de la relación inversa. Entonces por la regla de la cadena (que sería más apropiado llamarla regla de cambio de variables para la derivada)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial \hat{y}} \frac{d\hat{y}}{dx}.$$

La ecuación se convierte

$$\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \hat{y}} \frac{d\hat{y}}{dx} = f(x, y(x, \hat{y})).$$

Que es una expresión sólo en  $\hat{y}$  y  $x$ . Parece más complicada, pero en un ejemplo concreto puede ser más simple.

**Ejemplo 27.** Hacer el cambio de variable en la ecuación indicados

$$y = \frac{e^{\hat{y}}}{x} \quad \text{en} \quad y' = [\ln(xy)]^2 xy - \frac{y}{x}.$$

1) Expresemos  $dy/dx$  sólo con  $x$ ,  $\hat{y}$  y  $d\hat{y}/dx$ .

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{e^{\hat{y}}}{x^2} + \frac{e^{\hat{y}}}{x} \frac{d\hat{y}}{dx}.$$

2) Remplacemos  $y'$  e  $y$  en la ecuación

$$-\frac{e^{\hat{y}}}{x^2} + \frac{e^{\hat{y}}}{x} \frac{d\hat{y}}{dx} = \left[ \ln \left( x \frac{e^{\hat{y}}}{x} \right) \right]^2 x \frac{e^{\hat{y}}}{x} - \frac{e^{\hat{y}}}{x}.$$

3) Simplifiquemos

$$\frac{d\hat{y}}{dx} = \hat{y}^2 x. \quad (4.3)$$

Lo podemos hacer con SymPy, lo cual es muy útil por dos motivos. El primero porque nos permite hacer cambios de variables en expresiones muy grandes, resolviendo operaciones que a mano son sumamente tediosas. El segundo, y no menos importante para nosotros, es que es muy rico explorar un procedimiento enmarcándolo en un contexto muy distinto. En este caso, el procedimiento es relizar un cambio de variables y estamos explorando el mismo a través de un breve código que lo implementa en un lenguaje de programación.

```

1 from sympy import *
2 x=symbols('x') #unico simbolo primitivo
3 y_n=Function('y_n')(x) #declaro las variables nuevas, funciones de las
4     viejas
5 y=exp(y_n)/x #relacion entre y, y_n
6 eq=Eq(y.diff(x)-(ln(x*y))**2*x*y+y/x,0) #la ecuacion
7 simplify(eq) # simplifica expresiones

```

Obtenemos la ecuación

$$\frac{1}{x} \left( -x \log^2 \left( e^{y_n(x)} \right) + \frac{d}{dx} y_n(x) \right) e^{y_n(x)} = 0$$

que SymPy no simplifica a nuestro gusto

### Cambio de la variable independiente manteniendo la dependiente

Supongamos  $\hat{x} = \hat{x}(x)$ . Usamos la relación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\hat{x}} \frac{d\hat{x}}{dx}.$$

Suponiendo que la relación  $\hat{x} = \hat{x}(x)$  se invierte en  $x = x(\hat{x})$ , todo lo que resta es sustituir  $x$  por su igual en términos de  $\hat{x}$

$$\frac{dy}{d\hat{x}} = f(x(\hat{x}), y) \left[ \frac{d\hat{x}}{dx} \Big|_{x=x(\hat{x})} \right]^{-1}.$$

Que es una expresión sólo en  $\hat{x}$  e  $y$ . Describir el procedimiento en general puede hacer parecer que es más difícil de lo que en realidad es en un caso concreto.

**Ejemplo 28.** Hacer el cambio de variable en la ecuación indicados

$$x = \cos \hat{x} \quad \text{en} \quad -\frac{dy}{dx} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}y = 0.$$

1)  $\hat{x} = \arcsen x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\hat{x}} \frac{d\hat{x}}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{dy}{d\hat{x}}.$$

2) Remplazemos  $x$  e  $y'$  en la ecuación

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{dy}{d\hat{x}} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}y = 0$$

3) Reemplazando  $x$  por  $\cos(\hat{x})$  y simplificando

$$\frac{dy}{d\hat{x}} + \cos(\hat{x})y = 0.$$

Para hacer esto con SymPy (de ahora en más omitiremos la sentencia de importación del módulo, esta operación se hace sólo una vez por sesión).

```

1 from sympy import *
2 x, x_n=symbols('x, x_n')
3 x_n=acos(x)
4 y=Function('y')(x_n)
5 Ecuacion=-y.diff() + 1/(sqrt(1-x**2))*y
6 xn=symbols('xn')
7 Ecuacion.subs(x, cos(xn))

```

Obtenemos la ecuación

$$\frac{y(\cos(\cos(xn))) \cos(xn)}{\sqrt{-\cos^2(xn) + 1}} + \frac{1}{\sqrt{-\cos^2(xn) + 1}} \frac{d}{d\xi_1} y(\xi_1) \Big|_{\xi_1=\cos(\cos(xn))}$$

Nuevamente SymPy no simplifica a nuestro gusto, aún aquellas expresiones que parece muy evidente como se simplifican. El lector debe tener en cuenta que en ningún momento uno le dijo a SymPy que tipo de ente estaba manipulando en expresiones del tipo  $x_n=\cos(x)$ . Le pudo parecer natural que eran números reales, puesto es eso lo que matemáticamente son para nosotros, no obstante esta información nunca fue comunicada al interprete de SymPy. ¿Porqué el habría de entender que  $x$  es real? Si al fin y al cabo  $x_n=\cos(x)$  tiene sentido si  $x$  es complejo y aún si es una matriz. Muchas

veces las operaciones que se simplifican en un campo no lo pueden hacer en otro. El comando `symbols` tiene la opción de informar a SymPy que tipo de ente representa `x` de la siguiente forma `x=symbols('x', real=True)`. Usandolo de esta forma se consiguen mejores resultados en las simplificaciones.

**Cambio de variable general**  $\hat{x} = \hat{x}(x, y), \hat{y} = \hat{y}(x, y)$

1. Calculamos  $d\hat{y}/d\hat{x}$  en las variables  $x, y$

$$\frac{d\hat{y}}{d\hat{x}} = \frac{\frac{d\hat{y}}{dx}}{\frac{d\hat{x}}{dx}} = \frac{\frac{\partial \hat{y}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{y}}{\partial y} y'}{\frac{\partial \hat{x}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{x}}{\partial y} y'} = \frac{\frac{\partial \hat{y}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{y}}{\partial y} f(x, y)}{\frac{\partial \hat{x}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{x}}{\partial y} f(x, y)}. \quad (4.4)$$

2. En la expresión resultante sustituímos  $x, y$  por las transformaciones inversas  $x = x(\hat{x}, \hat{y})$  y  $y = y(\hat{x}, \hat{y})$

**Ejemplo 29.** Transformar a polares:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^3 + x^2y - x - y}{x^3 + xy^2 - x + y}.$$

**Ejemplo 30.** Transformar a polares

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^3 + x^2y - x - y}{x^3 + xy^2 - x + y}.$$

Dado que el cálculo es extenso lo haremos con SymPy, el procedimiento seguido ilustra como hacerlo a mano. Es ilustrativo hacer esto último para apreciar la utilidad de usar un sistema de álgebra computacional (SAC) como SymPy.

```

1 from sympy import *
2 x=symbols('x')
3 y=Function('y')(x)
4 r=sqrt(x**2+y**2)
5 theta=atan(y/x)
Expr2=r . diff(x) / theta . diff(x)

```

Obtenemos la siguiente expresión

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\frac{dr}{dx}}{\frac{d\theta}{dx}} = \frac{\left(1 + \frac{1}{x^2}y^2(x)\right)\left(x + y(x)\frac{dy}{dx}y(x)\right)}{\sqrt{x^2 + y^2(x)}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}y(x) - \frac{1}{x^2}y(x)\right)}.$$

Ahora sustituímos  $y'(x)$  usando la ecuación diferencial, redefinimos  $r, \theta$  fundamentalmente para limpiar el valor que tenían asignado en el código previo, que era una expresión de  $x, y$ , y finalmente sustituímos  $x e y$  por su expresión en polares.

```

2 Expr3=Expr2 . subs(y . diff(x),(y**3+x**2*y-x-y)/(x**3+x*y**2-x+y))
r , theta=symbols('r , theta' , positive=True)
3 Expr4=Expr3 . subs([(y , r*sin(theta)) ,(x , r*cos(theta))])
4 Expr5=simplify(Expr4)

```

Encontramos que en polares la ecuación es mucho más simple

$$\frac{dr}{d\theta} = -r^3 + r.$$

Quizás usar la notación como forma diferencial sea más efectivo. Como  $r$  y  $\theta$  son funciones de  $x$  e  $y$ , ellas son 0-formas. Usando las reglas de la diferencial, hay que reemplazar

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta; & dx &= \cos \theta dr - \sin \theta r d\theta \\ y &= r \sin \theta; & dy &= \sin \theta dr + \cos \theta r d\theta \end{aligned}$$

en la 1-forma:

$$(y^3 + x^2y - x - y)dx - (x^3 + xy^2 - x + y)dy$$

Encontramos a SAGE más cómodo para operar con formas diferenciales que SymPy

```

2 sage: r , theta=var('r , theta')
sage: U = CoordinatePatch((r , theta)) #declara coordenadas
sage: F = DifferentialForms(U) #Declara conjunto formas
4 sage: x= DifferentialForm(F, 0, r*cos(theta)) #define una 0-forma
sage: y= DifferentialForm(F, 0, r*sin(theta)) #define una 0-forma
6 sage: w=(x^3+x*y^2-x+y)*y . diff()-(y^3+x^2*y-x-y)*x . diff()#define una 1-
    forma
sage: w[0].simplify_full() #coeficiente de dr
8 sage: w[1].simplify_full() #coeficiente de d\theta

```

La forma obtenida es  $rdr + (r^4 - r^2)d\theta$ .

## 4.4. Grupos

### 4.4.1. Definición y ejemplos

**Definición 1** (Grupo).

Sean  $G$  un conjunto y  $\alpha$  una función tal que  $\alpha : G \times G \rightarrow G$ . En el contexto de grupos es más usual la notación  $\alpha(g_1, g_2) = g_1g_2$ . El par  $(G, \alpha)$  se llama un grupo si se satisface

1.  $(g_1g_2)g_3 = g_1(g_2g_3)$ , para todos  $g_1, g_2, g_3 \in G$ ,
2. Existe  $e \in G$  tal que  $eg = ge = g$ , para todo  $g \in G$ .
3. Para todo  $g \in G$  existe  $h \in G$  tal que  $gh = hg = e$ . Se acostumbra denotar  $h = g^{-1}$ .

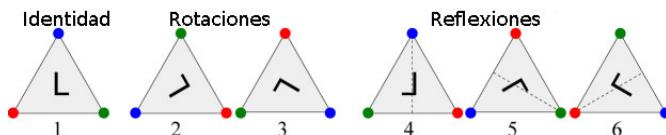
**Ejemplo 31.** Sea  $\Pi$  un plano euclídeo y  $G$  el conjunto de todas las transformaciones rígidas de  $\Pi$  en si mismo. Entonces  $G$  es un grupo con la operación de composición. Se llama el *grupo de transformaciones rígidas*.

**Ejemplo 32.** Sea  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  un conjunto de  $n$  elementos y  $S_n$  definido por

$$S_n = \{\sigma | \sigma : X \rightarrow X \text{ y } \sigma \text{ es biyectiva}\}$$

Entonces  $S_n$  es un grupo con la operación de composición. Se denomina *grupo simétrico*.

**Ejemplo 33.** Sea  $\Delta$  un polígono regular de  $n$  lados en un plano euclídeo  $\Pi$  y  $D_{2n}$  el conjunto de todas las transformaciones rígidas de  $\Pi$  en si mismo que llevan  $\Delta$  en si mismo.  $D_{2n}$  se llama el *grupo diedral* de orden  $2n$ . Para un triángulo equilátero:



### 4.4.2. Teoría de grupos computacional: SAGE y GAP

GAP - Groups, Algorithms, Programming Lenguaje de programación para álgebra discreta

SAGE: «Es un sistema de software de matemáticas libre de código abierto bajo la licencia GPL. Se basa en muchos paquetes de código abierto existentes: NumPy, SciPy, matplotlib, SymPy, Maxima, GAP, FLINT, R y muchos más. Acceda a su poder combinado a través de un lenguaje común, basado en Python. Misión: Creación de una alternativa libre de código abierto viable a Magma, Maple, Mathematica y Matlab.»

**Ejemplo 34.** Grupos con Sage.

```

2 sage: G=SymmetricGroup(5)
3 sage: sigma=G([(1,2,3),(4,5)])
4 sage: sigma^2
5 sage: sigma^3
6 sage: sigma^6
7 sage: G.order()
8 sage: H=G.subgroup([sigma])
9 sage: H.order()
10 sage: H.list()
11 sage: H.is_normal()
12 sage: G1=DihedralGroup(3)
13 sage: G1[-2]
14 sage: H1=G1.subgroup(G1[-2])
15 sage: H1.is_normal()
16 sage: G1.quotient(H1)

```

## 4.5. Grupos continuos de simetrías

### 4.5.1. Grupos y cambios de variables

Los cambios de variables de un conjunto de dos variables, digamos  $x$  e  $y$ , son funciones  $\Gamma$ , invertibles, de clase  $C^1$ , donde  $\Gamma : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ , con  $\Omega_1, \Omega_2$  abiertos de  $\mathbb{R}^2$ . Acostumbraremos escribir  $(\hat{x}, \hat{y}) = \Gamma(x, y)$  y diremos que  $(\hat{x}, \hat{y})$  son las variables nuevas e  $(x, y)$  las viejas.

Llamaremos  $\mathcal{T}$  al conjunto de todas los cambios de variables  $\Gamma$ . El conjunto  $\mathcal{T}$  tiene una estructura de grupo con la operación de composición.

El grupo de las transformaciones rígidas, los grupos diedrales  $D_{2n}$ , el grupo de todas las rotaciones alrededor del origen son subgrupos de  $\mathcal{T}$ .

**Ejemplo 35. Coordenadas polares.** Es más fácil describir la transformación que lleva coordenadas polares en cartesianas. En este caso  $(x, y) = \Gamma(r, \theta)$  y

$$\begin{aligned}\Gamma(r, \theta) &= (r \cos(\theta), r \sin(\theta)), \\ \Omega_1 &= (0, \infty) \times (-\pi, \pi), \\ \Omega_2 &= \mathbb{R}^2 - \{(x, y) | y = 0, x \leq 0\}\end{aligned}$$

### 4.5.2. Grupos de Lie uniparamétricos

**Definición 1** (Grupos de Lie uniparamétricos).

Sea  $\mathcal{T}$  el grupo de cambios de variables de  $\mathbb{R}^2$ . Supongamos dado un homomorfismo de grupos  $\Gamma : (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathcal{T}, \circ)$ . Para  $\varepsilon \in \mathbb{R}$  escribiremos  $\Gamma_\varepsilon = \Gamma(\varepsilon)$ . Si  $\Gamma_\varepsilon(x, y)$  es diferenciable, con inversa diferenciable, respecto a  $(x, y)$  y analítica respecto a  $\varepsilon$  diremos que  $\{\Gamma_\varepsilon | \varepsilon \in \mathbb{R}\}$  es un *grupo de Lie uniparamétrico de simetrías*.

Si  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  escribimos

$$(\hat{x}, \hat{y}) = \Gamma_\varepsilon(x, y). \quad (4.5)$$

Notar que  $\hat{x}, \hat{y}$  son funciones de  $x, y$  y  $\varepsilon$ .

Propiedades de grupos de Lie uniparamétricos

1.  $\Gamma_\varepsilon : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$  es un difeomorfismo, con  $\Omega_i, i = 1, 2$ , abiertos de  $\mathbb{R}^2$ .
2.  $\Gamma_{\varepsilon_1} \circ \Gamma_{\varepsilon_2} = \Gamma_{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}$ .
3.  $\Gamma_0 = I$ .
4.  $(\Gamma_\varepsilon)^{-1} = \Gamma_{-\varepsilon}$
5. Las funciones  $\hat{x}(x, y, \varepsilon)$  y  $\hat{y}(x, y, \varepsilon)$  se desarrollan en serie de potencias respecto a  $\varepsilon$ . Es decir para todo  $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}$  existen coeficientes  $a_j$  y  $b_j$ ,  $j = 0, 1, \dots$ , y  $r > 0$  tal que

$$\begin{aligned}\hat{x}(x, y, \varepsilon) &= a_0(x, y) + a_1(x, y)(\varepsilon - \varepsilon_0) + \dots \\ \hat{y}(x, y, \varepsilon) &= b_0(x, y) + b_1(x, y)(\varepsilon - \varepsilon_0) + \dots\end{aligned}$$

para  $|\varepsilon - \varepsilon_0| < r$ .

**Ejemplo 36.** Demostrar que las siguientes aplicaciones inducen grupos de Lie uniparamétricos

1.  $\Gamma_\varepsilon(x, y) = (x + \varepsilon, y)$  y  $\Gamma_\varepsilon(x, y) = (x, y + \varepsilon)$ .
2.  $\Gamma_\varepsilon(x, y) = (e^\varepsilon x, y)$
3.  $\Gamma_\varepsilon(x, y) = \left( \frac{x}{1 - \varepsilon x}, \frac{y}{1 - \varepsilon x} \right)$
4.  $\Gamma_\varepsilon(x, y) = \begin{pmatrix} \cos(\varepsilon) & -\sin(\varepsilon) \\ \sin(\varepsilon) & \cos(\varepsilon) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Podemos usar SymPy para la tarea con este breve código

```

1>>> from sympy import *
2>>> T=lambda x,y,epsilon: Matrix([x+epsilon,y])
3>>> x,y,epsilon1,epsilon2=symbols('x,y,epsilon1,epsilon2')
4>>> x_copete=T(x,y,epsilon1)[0]
5>>> y_copete=T(x,y,epsilon1)[1]
6>>> PropGrupo=T(x_copete,y_copete,epsilon2)-T(x,y,epsilon1+epsilon2)
7>>> PropGrupo
Matrix([
[0],
[0]])
```

El mismo ejemplo lo podemos desarrollar usando expresiones en lugar del operador lambda.

```

2 >>> from sympy import *
3 >>> x,y,epsilon,epsilon1,epsilon2=symbols('x,y,epsilon,epsilon1',
4 >>> epsilon2')
5 >>> T=Matrix([x+epsilon,y])
6 >>> x_copete=T.subs(epsilon,epsilon1)[0]
7 >>> y_copete=T.subs(epsilon,epsilon1)[1]
8 >>> PropGrupo=T.subs([(x,x_copete),(y,y_copete),(epsilon,epsilon1+epsilon2)])-T.
9 >>> subs(epsilon,epsilon1+epsilon2)
10 >>> PropGrupo
11 Matrix([
12 [0],
13 [0]])
14

```

**Definición 2** (Grupo de simetrías de una ecuación).

Consideremos una ecuación

$$y' = f(x, y). \quad (4.6)$$

Una transformación  $\Gamma \in \mathcal{T}$  se denomina una *simetría* de la ecuación si el cambio de variables dado por  $(\hat{x}, \hat{y}) = \Gamma(x, y)$  deja invariante la ecuación. El conjunto de todas las simetrías de una ecuación es un subgrupo de  $(\mathcal{T}, \circ)$ . Lo llamaremos *grupo de simetrías* de la ecuación.

### 4.5.3. Grupos de simetrías de EDO

De acuerdo con (4.4) para que  $(\hat{x}, \hat{y}) = \Gamma(x, y)$  sea una simetría de (4.6) se debe cumplir que

$$\frac{\frac{\partial \hat{y}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{y}}{\partial y} f(x, y)}{\frac{\partial \hat{x}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{x}}{\partial y} f(x, y)} = f(\hat{x}, \hat{y}) \quad (4.7)$$

Esta ecuación se llama *condición de simetría*. Es una ecuación en derivadas parciales, en principio más compleja que la ecuación original. Tiene varios grados de libertad, por lo que suele haber muchas simetrías. Es común que encontremos soluciones a través de un ansatz.

**Ejemplo 37.** Consideremos la ecuación

$$y' = 0. \quad (4.8)$$

La condición de simetría se reduce a

$$\frac{\frac{\partial \hat{y}}{\partial x}}{\frac{\partial \hat{x}}{\partial x}} = 0$$

Debemos tener que  $\frac{\partial \hat{y}}{\partial x} = 0$ . Vale decir  $\hat{y}$  es independiente de  $x$ . La forma general de una simetría es PUES

$$\hat{x} = \hat{x}(x, y) \quad \hat{y} = \hat{y}(y).$$

Hay muchas simetrías. Las traslaciones en cualquier dirección  $(x, y) \mapsto (x + \alpha, y + \beta)$  ( $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ). Cambios de escala en ambos ejes  $(x, y) \mapsto (e^\varepsilon x, y)$ ,  $(x, y) \mapsto (x, e^\varepsilon y)$ . Reflexiones respecto ambos ejes  $(x, y) \mapsto (-x, y)$ ,  $(x, y) \mapsto (x, -y)$ . Observar que el gráfico de las soluciones posee las mismas simetrías, pues en general *las simetrías de una ecuación llevan soluciones en soluciones*.

De todas las simetrías encontradas  $\Gamma_\varepsilon(x, y) = (e^\varepsilon x, y)$ ,  $\Gamma_\varepsilon(x, y) = (x + \varepsilon, y)$  y  $\Gamma_\varepsilon(x, y) = (x, e^\varepsilon y)$  se llaman *triviales* pues llevan una curva solución en sí misma. Cualquier cambio de la forma  $\hat{x} = \hat{x}(x, y)$   $\hat{y} = y$  es trivial.

*Estamos interesados en hallar grupos de Lie uniparamétricos de simetrías no triviales.*

Las reflexiones  $\Gamma(x, y) = (-x, y)$  no pertenecen a tal tipo de grupo. Para demostrar esto supongamos que  $\Gamma$  es alguna instancia de un tal grupo  $\Gamma_\varepsilon$ , supongamos por ejemplo que  $\Gamma = \Gamma_{\varepsilon_0}$ . Consideramos el jacobiano de la transformación:

$$J(\varepsilon) := \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} & \frac{\partial \hat{x}}{\partial y} \\ \frac{\partial \hat{y}}{\partial x} & \frac{\partial \hat{y}}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Tenemos que  $J(0) = 1$  y  $J(\varepsilon_0) = -1$ . Y  $J(\varepsilon)$  es continua respecto a  $\varepsilon$ . Por ende existiría  $\varepsilon'$  con  $J(\varepsilon') = 0$ . Esto implica que la matriz jacobiana  $D\Gamma$  es singular y esto contradice que  $\Gamma : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  es difeomorfismo ( $D\Gamma D\Gamma^{-1} = I$ ).

$\Gamma$  genera un grupo discreto, ya que  $\Gamma^2 = \Gamma \circ \Gamma = I$ . Luego  $\Gamma$  genera el grupo  $G = \{I, \Gamma\}$  que es isomorfo a  $\mathbb{Z}_2$ . En este caso diremos que  $\{I, \Gamma\}$  es un *grupo discreto* de simetrías.

**Ejemplo 38.** Hallar simetrías de

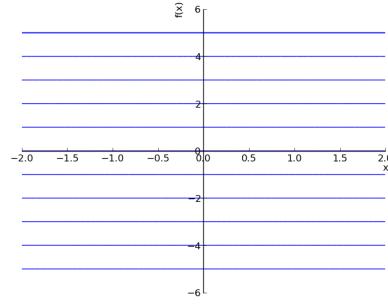
$$\frac{dy}{dx} = f(x).$$

De acuerdo con (4.4) se debe cumplir que

$$\frac{\frac{\partial \hat{y}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{y}}{\partial y} f(x)}{\frac{\partial \hat{x}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{x}}{\partial y} f(x)} = f(\hat{x})$$

La forma de la ecuación sugiere el ansatz

$$\boxed{\hat{x} = x}, \quad \frac{\partial \hat{y}}{\partial x} = \frac{\partial \hat{x}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \hat{y}}{\partial y} = \frac{\partial \hat{x}}{\partial x}.$$



Luego

$$\frac{\partial \hat{y}}{\partial y} = 1 \Rightarrow \boxed{\hat{y} = y + \varepsilon}$$

con  $\varepsilon$  constante arbitraria. Hallamos que

$$\Gamma_\varepsilon(x, y) = (x, y + \varepsilon)$$

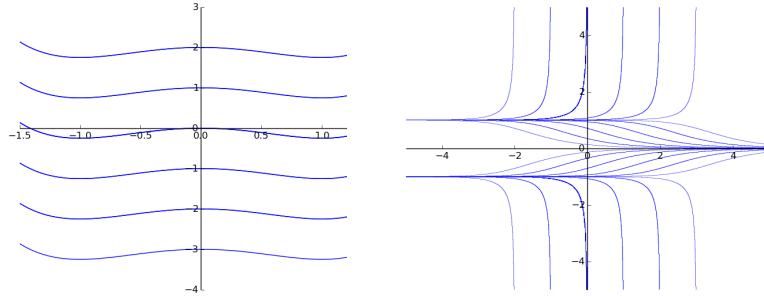
es un grupo de Lie uniparamétrico de simetrías. De manera similar

$$\Gamma_\varepsilon(x, y) = (x + \varepsilon, y)$$

es un grupo uniparamétrico de simetrías para

$$\frac{dy}{dx} = f(y).$$

Geométricamente en el primer caso todas las soluciones se obtienen trasladando una cualquiera verticalmente y en el segundo caso horizontalmente.



Soluciones de  $y' = x^3 - x$

Soluciones de  $y' = y^3 - y$

**Ejemplo 39.** Demostrar que las rotaciones alrededor del origen es un grupo de Lie uniparamétrico de simetrías de

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^3 + x^2y - x - y}{x^3 + xy^2 - x + y}.$$

Sea  $\Gamma_\varepsilon$  la transformación que rota un ángulo  $\varepsilon$  alrededor del origen. Es un ejercicio demostrar que  $\{\Gamma_\varepsilon | \varepsilon \in \mathbb{R}\}$  es un grupo uniparamétrico de simetrías. Se tiene la representación matricial

$$\Gamma_\varepsilon(x, y) = \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varepsilon) & -\sin(\varepsilon) \\ \sin(\varepsilon) & \cos(\varepsilon) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Gamma_\varepsilon^{-1}(\hat{x}, \hat{y}) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varepsilon) & \sin(\varepsilon) \\ -\sin(\varepsilon) & \cos(\varepsilon) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix}$$

Para el cálculo recurrimos a SymPy (usamos `x_n` en lugar de  $\hat{x}$ )

```

1 from sympy import *
2 x, theta=symbols('x, theta')
3 y=Function('y')(x)
4 x_n=cos(theta)*x-sin(theta)*y
5 y_n=sin(theta)*x+cos(theta)*y
6 Expr2=y_n.diff(x)/x_n.diff(x)
7 Expr3=Expr2.subs(y.diff(),\
8 (y**3+x**2*y-x-y)/(x**3+x*y**2-x+y))
9 x_n, y_n=symbols('x_n, y_n')
10 Expr4=Expr3.subs([(y, -sin(theta)*x_n+cos(theta)*y_n),\
11 (x, cos(theta)*x_n+sin(theta)*y_n)])
12 Expr5=simplify(Expr4)

```

La ecuación resultante es *la misma*

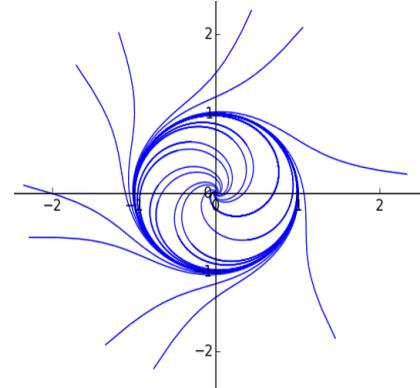
$$\frac{dy_n}{dx_n} = \frac{x_n^2 y_n - x_n + y_n^3 - y_n}{x_n^3 + x_n y_n^2 - x_n + y_n}.$$

A la misma conclusión arribábamos si recordabamos que en coordenadas polares la ecuación se escribe

$$\frac{dr}{d\theta} = r - r^3,$$

y que esta ecuación tiene las simetrías  $\Gamma_\varepsilon$  :  $(r, \theta) \mapsto (r, \theta + \varepsilon)$ . Si rotamos un ángulo fijo el gráfico de una solución obtenemos el gráfico de otra solución.

Simetrías resuelven ecuaciones **Ejemplo:** Supongamos que  $y' = f(x, y)$  tiene el grupo de Lie uniparamétrico de simetrías



$$(\hat{x}, \hat{y}) = \Gamma_\varepsilon(x, y) = (x, y + \varepsilon) \quad (4.9)$$

Usando la condición de simetrías (4.7) tenemos

$$f(x, y) = f(\hat{x}, \hat{y}) = f(x, y + \varepsilon).$$

Luego

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \varepsilon) - f(x, y)}{\varepsilon} = 0$$

Así  $f$  es independiente de  $y$ :  $f(x, y) = f(x)$  y la ecuación

$$y' = f(x),$$

se resuelve simplemente integrando.

## 4.6. Órbitas, tangentes y curvas invariantes

**Definición 1 (Órbitas).**

Dado un grupo uniparamétrico de simetrías  $G = \{\Gamma_\varepsilon | \varepsilon \in \mathbb{R}\}$ , y  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  llamamos órbita  $(x_0, y_0)$  bajo la acción de  $G$  (simplemente órbita si es claro quien es  $G$ ) a la curva

$$\{\Gamma_\varepsilon(x_0, y_0) | \varepsilon \in \mathbb{R}\}$$

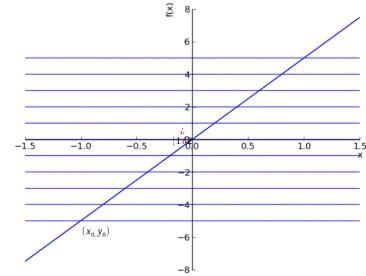
Si  $G$  es un grupo de simetrías no trivial, entonces es de esperar que la órbita de  $(x_0, y_0)$  cruce transversalmente las curvas solución. La órbita se usará como una nueva coordenada. La órbita atraves de  $(x, y)$  es el conjunto de puntos de coordenadas

$$(\hat{x}(x, y, \varepsilon), \hat{y}(x, y, \varepsilon)) = \Gamma_\varepsilon(x, y), \quad (4.10)$$

donde

$$(\hat{x}(x, y, 0), \hat{y}(x, y, 0)) = (x, y).$$

Las ecuaciones (4.10) son ecuaciones parámetricas (parámetro  $\varepsilon$ ) de una curva en el plano.



**Definición 2 (Puntos invariantes).**

Un punto  $(x, y)$  se llama invariante si su órbita se reduce a  $\{(x, y)\}$ , vale decir

$$(x, y) = \Gamma_\varepsilon(x, y), \quad \forall \varepsilon > 0$$

**Ejemplo 40.** La órbita de  $(x, y)$  bajo la acción del grupo de Lie uniparamétrico

$$\Gamma_\varepsilon(x, y) = \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varepsilon) & -\sin(\varepsilon) \\ \sin(\varepsilon) & \cos(\varepsilon) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Son circunferencias con centro en el origen. El punto  $(0, 0)$  es invariante.

**Definición 3** (Campo vectorial de tangentes).

Dado un grupo de Lie uniparamétrico  $(\hat{x}(x, y, \varepsilon), \hat{y}(x, y, \varepsilon)) = \Gamma_\varepsilon(x, y)$  definimos el campo vectorial

$$(\xi(\hat{x}, \hat{y}), \eta(\hat{x}, \hat{y})) = \left( \frac{d\hat{x}}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0}, \frac{d\hat{y}}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \right).$$

$\xi$  y  $\eta$  se llaman *símbolos infinitesimales*.

**Ejemplo 41.** Campo vectorial de infinitesimales para las rotaciones.

```

2 x,y,epsilon = var('x,y,epsilon')
3 x_n=cos(epsilon)*x-sin(epsilon)*y
4 y_n=sin(epsilon)*x+cos(epsilon)*y
5 xi=x_n.diff(epsilon)(epsilon=0)
6 eta=y_n.diff(epsilon)(epsilon=0)
7 p=plot([])
8 for x_abs in range(0,1,.2):
9     p+=parametric_plot([x_n(x=x_abs,y=0),
10 y_n(x=x_abs,y=0)], (epsilon,0,2*pi))
11 p+= plot_vector_field((xi, eta),(x,-1,1),
12 (y,-1,1))

```

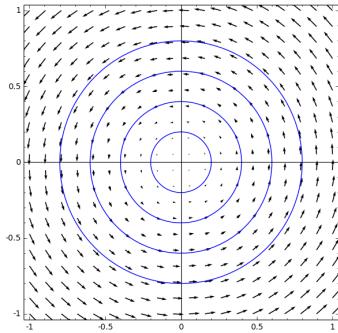


Figura 4.1: Campo vectorial de infinitesimales  $(\xi, \eta)$  por Sage

Como  $\hat{x}, \hat{y}$  eran analíticas respecto a  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned}\hat{x} &= x + \varepsilon\xi(x, y) + O(\varepsilon^2) \\ \hat{y} &= y + \varepsilon\eta(x, y) + O(\varepsilon^2)\end{aligned}$$

En un punto invariante  $\boxed{\xi(x, y) = \eta(x, y) = 0}$ .

**Definición 4** (Curvas invariantes).

Una curva plana  $C$  se dice invariante por un grupo uniparamétrico de simetrías de Lie si y sólo si la tangente a  $C$  en cada punto  $(x, y)$  es paralela a  $(\xi(x, y), \eta(x, y))$ . Si  $C$  es el gráfico de una función  $x \mapsto y(x)$ , como  $(1, y'(x))$  es un vector tangente a la gráfica, la condición que  $C$  es invariante se escribe

$$Q(x, y, y') = \eta(x, y) - y' \xi(x, y) \equiv 0 \quad (4.11)$$

Esta se llama *ecuación característica*.

Si  $\Gamma_\varepsilon$  es un grupo de Lie de simetrías de  $y' = f(x, y)$  entonces una solución  $y(x)$  es una curva invariante si y sólo si

$$\bar{Q}(x, y) = \eta(x, y) - f(x, y)\xi(x, y) \equiv 0 \quad (4.12)$$

Se llama *ecuación característica reducida*. Conviene tener soluciones no invariantes

**Ejemplo 42.** La EDO

$$y' = y \quad (4.13)$$

tiene simetrías de escala

$$(\hat{x}, \hat{y}) = \Gamma_\varepsilon(x, y) = (x, e^\varepsilon y).$$

Luego

$$(\xi, \eta) = \left( \frac{d\hat{x}}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0}, \frac{d\hat{y}}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \right) = (0, y)$$

Cualquier punto en el conjunto  $\{(x, 0) | x \in \mathbb{R}\}$  es invariante. La ecuación característica reducida es.

$$\bar{Q}(x, y) = 0 \Rightarrow y = 0$$

Esta formada enteramente por puntos invariantes.

**Ejemplo 43.** Demostrar que la siguiente expresión es un grupo de Lie uniparamétrico de simetrías

$$(\hat{x}, \hat{y}) = \Gamma_\varepsilon(x, y) = (e^\varepsilon x, e^{(e^\varepsilon - 1)x} y),$$

para la ecuación (4.13). Para este grupo tenemos

$$(\xi, \eta) = (x, xy)$$

Todo punto en  $x = 0$  es invariante. La ecuación característica reducida es

$$\bar{Q}(x, y) = 0 \Rightarrow xy - xy = 0$$

De modo que estas simetrías actúan trivialmente sobre las soluciones. Llevan una solución en sí misma. Chequeemos esta afirmación de manera directa.

Buscamos el cambio de variables inverso

$$\left. \begin{array}{l} \hat{x} = e^\varepsilon x \\ \hat{y} = e^{(\varepsilon-1)x} y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = e^{-\varepsilon}\hat{x} \\ y = e^{(e^{-\varepsilon}-1)\hat{x}}\hat{y} \end{array} \right\}$$

Las soluciones son  $y = ke^x$ , sustituímos en esta expresión, luego de unas operaciones, llegamos a  $\hat{y} = ke^{\hat{x}}$ .

**Ejemplo 44.** La ecuación de Riccati

$$y' = xy^2 - \frac{2y}{x} - \frac{1}{x^3}, \quad x \neq 0$$

Tiene el grupo de Lie de simetrías

$$(\hat{x}, \hat{y}) = \Gamma_\varepsilon(x, y) = (e^\varepsilon x, e^{-2\varepsilon} y).$$

Tenemos

$$(\xi, \eta) = (x, -2y).$$

La característica reducida

$$\overline{Q}(x, y) = \frac{1}{x^2} - x^2 y^2 = 0.$$

Tenemos dos soluciones invariantes

$$y = \pm \frac{1}{x^2}.$$

## 4.7. Simetrías a partir de Infinitesimales

La mayoría de los métodos de simetría usan  $(\xi, \eta)$  en lugar de las simetrías en si mismas. Por otra parte  $(\xi(\hat{x}, \hat{y}), \eta(\hat{x}, \hat{y}))$  determinan las simetrías a través de las ecuaciones

$$\left. \begin{array}{lcl} \frac{d\hat{x}}{d\varepsilon} & = & \xi(\hat{x}, \hat{y}) \\ \frac{d\hat{y}}{d\varepsilon} & = & \eta(\hat{x}, \hat{y}) \\ \hat{x}(x, y, 0) & = & x \\ \hat{y}(x, y, 0) & = & y \end{array} \right\} \quad (4.14)$$

**Justificación de las ecuaciones.** Si ponemos  $(\hat{x}, \hat{y}) = \Gamma_\varepsilon(x, y)$ , de la propiedad de grupo  $(\Gamma_{\Delta\varepsilon} \circ \Gamma_\varepsilon = \Gamma_{\varepsilon+\Delta\varepsilon})$ , deducimos

$$\hat{x}(\Gamma_\varepsilon(x, y), \Delta\varepsilon) = \hat{x}(x, y, \varepsilon + \Delta\varepsilon).$$

Luego

$$\begin{aligned}
\frac{d\hat{x}}{d\varepsilon} &= \lim_{\Delta\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\hat{x}(x, y, \varepsilon + \Delta\varepsilon) - \hat{x}(x, y, \varepsilon)}{\Delta\varepsilon} \\
&= \lim_{\Delta\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\hat{x}(\Gamma_\varepsilon(x, y), \Delta\varepsilon) - \hat{x}(x, y, \varepsilon)}{\Delta\varepsilon} \\
&= \lim_{\Delta\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\hat{x}(\hat{x}(x, y, \varepsilon), \hat{y}(x, y, \varepsilon), \Delta\varepsilon) - \hat{x}(\hat{x}(x, y, \varepsilon), \hat{y}(x, y, \varepsilon), 0)}{\Delta\varepsilon} \\
&= \left. \frac{d\hat{x}}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \xi(\hat{x}, \hat{y})
\end{aligned}$$

El sistema de ecuaciones (4.14) pueden ser difíciles de resolver. Pero en algunos casos sencillos puede ser fácil.

**Ejemplo 45.** Encontrar el grupo de simetrías para los infinitesimales  $\xi(x, y), \eta(x, y)) = (x^2, xy)$ .

$$\begin{aligned}
\frac{d\hat{x}}{d\varepsilon} &= \xi(\hat{x}, \hat{y}) = \hat{x}^2 \text{ y } \hat{x}(x, y, 0) = x \Rightarrow \hat{x} = \frac{x}{1 - \varepsilon x} \\
&\text{y} \\
\frac{d\hat{y}}{d\varepsilon} &= \eta(\hat{x}, \hat{y}) = \hat{x}\hat{y} \text{ y } \hat{y}(x, y, 0) = y \Rightarrow \hat{y} = \frac{y}{1 - \varepsilon x}
\end{aligned}$$

## 4.8. Coordenadas canónicas

### 4.8.1. Definición y ejemplos

**Definición 1** (Coordenadas canónicas).

Diremos que las coordenadas  $(r, s)$  son canónicas respecto a el grupo de Lie de simetrías  $\Gamma_\varepsilon$  si en las coordenadas  $(r, s)$  la acción de grupo es la traslación

$$(\hat{r}, \hat{s}) := (r(\hat{x}, \hat{y}), s(\hat{x}, \hat{y})) = (r(x, y), s(x, y) + \varepsilon). \quad (4.15)$$

**Ejemplo 46.** Las coordenadas polares son canónicas respecto al grupo de Lie de rotaciones. Las rotaciones en coordenadas cartesianas y polares se escriben

$$\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varepsilon) & -\sin(\varepsilon) \\ \sin(\varepsilon) & \cos(\varepsilon) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} \hat{r} \\ \hat{\theta} \end{matrix} = r \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$$

Derivando las ecuaciones (4.15) respecto a  $\varepsilon$  obtenemos

$$\begin{aligned}
\xi(x, y) \frac{\partial r}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial r}{\partial y} &= 0 \\
\xi(x, y) \frac{\partial s}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial s}{\partial y} &= 1
\end{aligned} \quad (4.16)$$

Los cambios de coordenadas deben ser invertibles, de modo que pediremos la condición de no degeneración

$$\frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial y} - \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial s}{\partial x} \neq 0 \quad (4.17)$$

**Definición 2** (Coordendas canónicas generalizadas).

Cualquier par de coordenadas que satisfacen (4.16) y (4.17) se llaman canónicas.

### Observaciones:

1. El vector tangente en cualquier punto no invariante es paralelo a la curva  $r = \text{cte}$  que pasa por ese punto. Luego esa curva es una órbita. Las órbitas son invariantes, así  $r$  se llama la *coordenada invariante*. Las curvas  $s = \text{cte}$  son transversales a las órbitas.
2. Las coordenadas canónicas no están definidas en un punto  $(x, y)$  invariante pues en esos puntos  $\xi(x, y) = \eta(x, y) = 0$ .
3. Las coordenadas canónicas están definidas en un entorno de cualquier punto no invariante.
4. Las coordenadas canónicas no son únicas. De hecho si  $(r, s)$  son canónicas  $(\tilde{r}, \tilde{s}) = (F(r), G(r) + s)$  lo son para cualquier  $F$  y  $G$  con  $F'(r) \neq 0$  (para la no degeneración).

### 4.8.2. Generador Infinitesimal

**Definición 3** (Generador Infinitesimal).

Al operador diferencial

$$X = \xi(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial}{\partial y} \quad (4.18)$$

se lo suele denominar *Generador Infinitesimal*. La acción del operador sobre una función  $f$  diferenciable es tomar la derivada direccional en la dirección del campo  $(\xi, \eta)$ .

Las ecuaciones (4.16) se escriben de manera compacta

$$\begin{aligned} Xr &= 0 \\ Xs &= 1 \end{aligned} \quad (4.19)$$

La primera expresa que  $r$  no cambia en la dirección del campo.

## 4.9. Encontrando coordenadas canónicas

### 4.9.1. Integrales primarias

**Definición 1** (Integrales primaria).

Una integral primera de la EDO  $y' = f(x, y)$  es una función  $\phi(x, y)$  que es constante a lo largo de una curva solución de la EDO. Se la denomina también magnitud conservada.

**Teorema 1** (Propiedad de conservación de coordenadas canónicas).

Si  $(r, s)$  son coordenadas canónicas de un grupo de Lie de simetrías entonces  $r$  es una integral primera de la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\eta(x, y)}{\xi(x, y)}. \quad (4.20)$$

**Dem.** Supongamos  $y(x)$  solución de la EDO, es suficiente demostrar que  $\frac{d}{dx}r(x, y(x)) = 0$ . En efecto

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}r(x, y(x)) &= \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial s}{\partial y}y' && \text{(regla cadena)} \\ &= \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial s}{\partial y}\frac{\eta(x, y)}{\xi(x, y)} && \text{(Ec. (4.20))} \\ &= 0 && \text{(Ec. (4.16))} \end{aligned}$$

□

**Ejemplo 47.** Ya conocemos las coordenadas canónicas de las rotaciones,

$$\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varepsilon) & -\sin(\varepsilon) \\ \sin(\varepsilon) & \cos(\varepsilon) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

hallemosla por el método propuesto. Hay que resolver

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \Rightarrow ydy = -xdx \Rightarrow y^2 + x^2 = C$$

Luego  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  es una integral primera.

La coordenada  $r$  es constante sobre los puntos en la gráfica de una solución de (4.20). Sobre esos puntos  $(x, y(x))$ , la coordenada  $s$  satisface:

$$\begin{aligned}\frac{ds}{dx} &= \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial s}{\partial y} y'(x) && \text{(Regla cadena)} \\ &= \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial s}{\partial y} \frac{\eta}{\xi} && (4.20) \\ &= \frac{1}{\xi} && (4.16).\end{aligned}\quad (4.21)$$

Ahora podemos aprovechar que ya conocemos  $r$  y expresar  $y$  como función de  $r, x$ . Luego

**Teorema 2** (Expresión para  $s$ ).

$$s = \int \frac{ds}{dx} dx = \int \frac{dx}{\xi(x, y(r, x))}. \quad (4.22)$$

En la igualdad resultante puede ser necesario reemplazar  $r$  por su expresión en las variables  $x, y$ .

Si ocurriese que  $\xi = 0$  y  $\eta \neq 0$ . Entonces por (4.20)  $r_y = 0$ , de modo que  $r$  es sólo función de  $x$ . Se puede asumir  $r = x$ . Además  $\eta s_y = 1$ , entonces

$$s = \int \frac{dy}{\eta(r, y)}. \quad (4.23)$$

**Ejemplo 48.** Retornando al ejemplo de las rotaciones, donde hallamos que  $r = \sqrt{(x^2 + y^2)}$ , vemos que

$$s = \int \frac{dx}{-y} = - \int \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \arccos\left(\frac{x}{r}\right).$$

Por consiguiente  $s$  es el ángulo polar.

**Ejemplo 49.** Encontrar coordenadas canónicas para el grupo de Lie de simetrías

$$(\hat{x}, \hat{y}) = (e^\varepsilon x, e^{k\varepsilon} y) \quad k > 0.$$

El vector tangente es

$$(\xi, \eta) = \left( \frac{d\hat{x}}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0}, \frac{d\hat{y}}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \right) = (x, ky).$$

Resolvamos la ecuación (4.20)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ky}{x} \Rightarrow y = Cx^k.$$

Luego  $\Phi = y/x^k$  es integral primera. Entonces podemos tomar  $r = y/x^k$ . Para  $s$

$$s = \int \frac{dx}{\xi} = \frac{dx}{x} = \ln |x|.$$

Entonces  $(r, s) = (yx^{-k}, \ln |x|)$  son coordenadas canónicas. No estan definidas en  $x = 0$ . Podemos encontrar coordenadas canónicas definidas en  $x = 0$  del siguiente modo. Recordamos que para todas  $F$  y  $G$

$$(\tilde{r}, \tilde{s}) = (F(r), G(r) + s) = (F(x^{-k}y), G(x^{-k}y) + \ln |x|).$$

Son canónicas también. Si tomamos  $F(r) = 1/r$  y  $G(r) = \frac{1}{k} \ln |r|$ , evitamos la singularidad. Luego

$$(\tilde{r}, \tilde{s}) = (x^k y^{-1}, \frac{1}{k} \ln |y|).$$

Son canónicas, están definidas en  $x = 0$  pero no en  $y = 0$ .

**Ejemplo 50.** Encontrar coordenadas canónicas para

$$(\hat{x}, \hat{y}) = \left( \frac{x}{1 - \varepsilon x}, \frac{y}{1 - \varepsilon x} \right).$$

$$(\xi, \eta) = \left( \frac{d\hat{x}}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0}, \frac{d\hat{y}}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \right) = (x^2, xy).$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\eta}{\xi} = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{y}{x} = \text{cte.}$$

Podemos tomar  $r = y/x$ . Para  $s$

$$s = \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}.$$

Luego  $(r, s) = (\frac{y}{x}, -\frac{1}{x})$  son canónicas.

En este caso los puntos sobre  $x = 0$  son invariantes, no podemos definir coordenadas canónicas allí.

Lo podemos desarrollar con SymPy.

```

1 >>> from sympy import *
2 >>> x, y, epsilon=symbols('x,y,epsilon')
3 >>> T=Matrix([x/(1-epsilon*x),y/(1-epsilon*x)])
4 >>> xi=T[0].diff(epsilon).subs(epsilon,0)
5 >>> xi
6 x**2
7 >>> eta=T[1].diff(epsilon).subs(epsilon,0)
8 >>> eta/xi
9 y/x
10 >>> y=Function('y')(x)
11 >>> dsolve(y.diff(x)-y/x,y)
12 y(x) == C1*x
13 >>> Integral(1/xi,x).doit()
14 -1/x

```

### 4.9.2. Infinitesimales → Simetrías (Revisitado)

Las coordenadas canónicas nos dan otra manera de encontrar simetrías a partir de los infinitesimales siguiendo el procedimiento:

1. Determinar las coordenadas canónicas (sólo necesitamos conocer los infinitesimales).
2. Expresamos las relaciones  $\hat{r} = r$  y  $\hat{s} = s + \varepsilon$  en las coordenadas  $x, y$ .

**Ejemplo 51.** Hallar el grupo de simetrías asociado al generador infinitesimal

$$X = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + xy \frac{\partial}{\partial y}.$$

1. En la sección 4.9.1 hallamos las coordenadas canónicas  $(r, s) = (\frac{y}{x}, -\frac{1}{x})$  asociadas a los infinitesimales dados.
2. Entonces

$$\begin{aligned} (\hat{r}, \hat{s}) = (r, s + \varepsilon) &\Rightarrow \frac{\hat{y}}{\hat{x}} = \frac{y}{x}, \quad -\frac{1}{\hat{x}} = -\frac{1}{x} + \varepsilon \\ &\Rightarrow \hat{x} = \frac{x}{1 - \varepsilon x}, \quad \hat{y} = \frac{y}{1 - \varepsilon x}. \end{aligned}$$

## 4.10. Resolviendo EDO con grupos de Lie de simetrías

### 4.10.1. Método de solución

Finalmente, toda la teoría expuesta no permiten elaborar un método que puede resolver una ecuación dada supuesto que conocemos un grupo de Lie de simetrías de ella. Supongamos dado un grupo de Lie de simetrías  $(\hat{x}, \hat{y})$  de la ecuación

$$y' = f(x, y) \tag{4.24}$$

Supongamos que las simetrías son no triviales. Según (4.12) debemos tener

$$\eta(x, y) \not\equiv f(x, y)\xi(x, y)$$

La razón de esta condición es que si fuese falsa entonces la ecuación (4.20) es la misma que la ecuación (4.24) y el método es inútil.

Supongamos  $(r, s)$  coordenadas canónicas. La ecuación en las coordenadas  $(r, s)$ , según (4.4), se escribirá

$$\frac{ds}{dr} = \hat{f}(r, s) := \frac{s_x + f(x, y)s_y}{r_x + f(x, y)r_y}. \tag{4.25}$$

Las coordenadas canónicas se definen por (4.15) de modo que el grupo de simetrías actúe por traslación  $(\hat{r}, \hat{s}) = (r, s + \varepsilon)$ . Por los resultados de la página 4.5.3,  $\hat{f}$  es independiente de  $s$ . Y la ecuación se reduce a

$$\frac{ds}{dr} = \hat{f}(r) \quad (4.26)$$

que se resuelve integrando.

**Ejemplo 52.** Resolver

$$y' = xy^2 - \frac{2y}{x} - \frac{1}{x^3}, \quad x \neq 0,$$

sabiendo que la ecuación es invariante para el grupo de simetrías

$$(\hat{x}, \hat{y}) = (e^\varepsilon x, e^{-2\varepsilon} y).$$

Por los resultados de la sección 4.9.1:

$$(r, s) = (x^2 y, \ln |x|)$$

son canónicas. Según (4.25) la ecuación en  $(r, s)$  es:

$$\frac{dr}{ds} = \frac{\frac{1}{x}}{2xy + x^2 \left( xy^2 - \frac{2y}{x} - \frac{1}{x^3} \right)} = \frac{1}{x^4 y^2 - 1} = \frac{1}{r^2 - 1}$$

Como sabíamos que debía suceder el resultado del segundo miembro no depende sólo de  $r$ .  
Integrandos

$$s = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{r-1}{r+1} \right) + C.$$

Sustituyendo

$$\ln |x| = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{x^2 y - 1}{x^2 y + 1} \right) + C.$$

Despejando

$$y = -\frac{x^2 + C}{x^2(x^2 - C)} \quad (4.27)$$

La ecuación característica reducida (4.12) es para la ecuación de este ejemplo:

$$0 = \bar{Q} = -2y - \left( xy^2 - \frac{2y}{x} - \frac{1}{x^3} \right) x = -x^2 y^2 + \frac{1}{x^2}$$

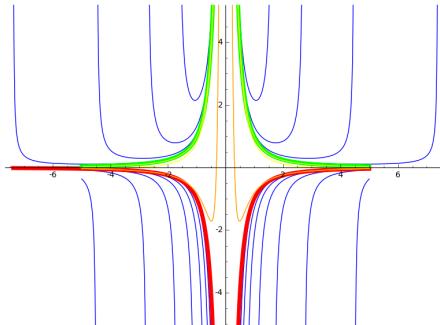


Figura 4.2: Soluciones de  $y' = xy^2 - \frac{2y}{x} - \frac{1}{x^3}$

Cuyas soluciones son

$$y = \pm \frac{1}{x^2}.$$

Que además son solución de la ecuación diferencial. La curva  $y = -1/x^2$  se obtiene de (4.27) con  $C = 0$ . La curva  $y = -1/x^2$ . En la figura 4.2 graficamos las distintas soluciones. Las curvas azules y naranjas se corresponden con las gráficas de (4.27) con  $c > 0$  y  $c < 0$  respectivamente. La verde es la de  $y = 1/x^2$  y la roja de  $y = -1/x^2$ .

**Ejemplo 53.** Resolver

$$y' = \frac{y+1}{x} + \frac{y^2}{x^3}, \quad x \neq 0,$$

sabiendo que la ecuación es invariante para el grupo de simetrías

$$(\hat{x}, \hat{y}) = \left( \frac{x}{1-\varepsilon x}, \frac{y}{1-\varepsilon x} \right).$$

Ya hemos computado las coordenadas canónicas en la subsección 4.9.1:

$$(r, s) = \left( \frac{y}{x}, \frac{1}{x} \right).$$

Por (4.25) la ecuación se escribe

$$\frac{dr}{ds} = \frac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{y}{x^2} + \frac{1}{x} \left( \frac{y+1}{x} + \frac{y^2}{x^3} \right)} = \frac{1}{1+r^2},$$

cuya solución es

$$s = \arctan(r) + C \Rightarrow y = -x \tan\left(\frac{1}{x} + C\right).$$

#### 4.10.2. Ecuaciones homogéneas

**Ejemplo 54.** En este ejemplo deduciremos nuevamente el método de solución de ecuaciones homogéneas apelando a las simetrías. Es decir, queremos resolver la ecuación

$$y' = F\left(\frac{y}{x}\right). \quad (4.28)$$

Aquí tenemos el Grupo de Lie de simetrías de cambio de escalas

$$(\hat{x}, \hat{y}) = (e^\varepsilon x, e^\varepsilon y).$$

Por los resultados de la subsección 4.9.1,  $(r, s) = (y/x, \ln|x|)$  son canónicas y la ecuación se escribe

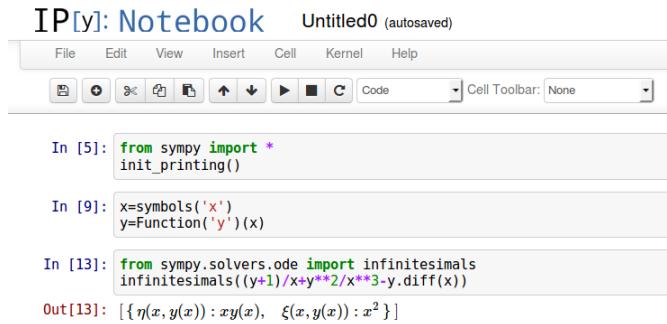
$$\frac{ds}{dr} = \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{y}{x^2} + \frac{F(\frac{y}{x})}{x}} = \frac{1}{F(r) - r}.$$

La solución general es

$$\ln|x| = \int^{y/x} \frac{dr}{F(r) - r} + c.$$

### 4.10.3. Método de Lie y SymPy

SymPy Incorpora distintas estrategias para resolver ecuaciones por el método de Lie. Hay mucho por indagar al respecto, pero sólo vamos a mencionar una función para calcular los infinitesimales ( $\xi, \eta$ ). Aprovechamos para mostrar como luce una consola de ipython, otra manera de usar Python y SymPy.



The screenshot shows an IPython Notebook window titled "Untitled0 (autosaved)". The menu bar includes File, Edit, View, Insert, Cell, Kernel, and Help. Below the menu is a toolbar with various icons. The notebook contains three cells:

- In [5]: 

```
from sympy import *
init_printing()
```
- In [9]: 

```
x=symbols('x')
y=Function('y')(x)
```
- In [13]: 

```
from sympy.solvers.ode import infinitesimals
infinitesimals((y**1)/x+y**2/x**3-y.diff(x))
```

Out[13]: 

```
[{η(x, y(x)): xy(x), ξ(x, y(x)): x²}]
```

## Capítulo 5

# Ecuaciones Lineales de Segundo Orden

### 5.1. Introducción

Me convertí en ateo porque como estudiante de post-grado en física cuántica, la vida parecía ser reducible a ecuaciones diferenciales de segundo orden. Matemáticas, química y física tenían todo y yo no veo ninguna necesidad de ir más allá de eso.

Francis Collins

**Definición 1** (Ecuación lineal general de segundo orden).

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = r(x), \quad (5.1)$$

donde  $p, q, r$  son funciones definidas en un intervalo  $I = (a, b)$  de  $\mathbb{R}$  con valores en  $\mathbb{R}$ . Si  $r \equiv 0$  se llama homogénea

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = 0, \quad (5.2)$$

**Teorema 1** (Teorema de existencia y unicidad de soluciones).

Supongamos  $p, q, r$  continuas sobre  $I$ . Sean  $x_0 \in I$  e  $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$  dados. Entonces existe una única solución del PVI

$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = r(x), & x \in I \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases}$$

*Demostración.* Más adelante. □

## 5.2. Estructura del conjunto de soluciones

**Teorema 1.**

Si  $y_1$  e  $y_2$  son soluciones de (5.2) y  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  entonces  $c_1y_1 + c_2y_2$  es solución. Vale decir, el conjunto de soluciones es un espacio vectorial. En particular  $y \equiv 0$  es una solución, a la que llameremos *trivial*.

*Demostración.* El operador

$$L[y] := y'' + py' + qy$$

es lineal, por consiguiente  $L[c_1y_1 + c_2y_2] = c_1L[y_1] + c_2L[y_2] = 0$ . □

**Teorema 2.**

Supongamos que  $y_p$  es una solución particular de (5.1) y que  $y_g = y_g(x, c_1, c_2)$  es una solución general de (5.2). Entonces  $y = y_p + y_g$  es solución general de (5.1).

*Demostración.* El operador

$$L[y] := y'' + py' + qy$$

es lineal, por consiguiente  $L[y_g + y_p] = L[y_g] + L[y_p] = 0 + r = r$ . Recíprocamente supongamos  $y$  solución de  $L[y] = r$ , entonces  $L[y - y_p] = L[y] - L[y_p] = r - r = 0$ . Luego debe haber  $c_1$  y  $c_2$  con  $y(x) - y_p(x) = y_g(x, c_1, c_2)$ . □

Volviendo a las ecuaciones homogéneas, supongamos que tenemos dos soluciones de (5.2)  $y_1$  e  $y_2$ . Entonces la expresión

$$c_1y_1 + c_2y_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \quad (5.3)$$

es solución también. Notar que en la expresión aparecen dos constantes y habíamos dicho que era de esperar que la solución general de una ecuación de orden 2 contuviese precisamente dos constantes de integración. De modo que podemos conjeturar que (5.3) es solución general de (5.2). Hay una situación especial, si, por ejemplo,  $y_1 = ky_2$ ,  $k \in \mathbb{R}$ , entonces  $c_1y_1 + c_2y_2 = (c_1k + c_2)y_2 = cy_2$ . Vale decir la combinación lineal (5.3) termina siendo sólo combinación lineal de la función  $y_2$  y por ende siendo esencialmente una expresión uniparamétrica.

**Definición 1** (Independencia lineal).

Un conjunto finito de funciones  $\{y_1, \dots, y_n\}$  se dirá linealmente independiente sobre un conjunto  $I$ , si la única solución de  $c_1y_1(t) + \dots + c_ny_n(t) = 0$ , para  $t \in I$ , es  $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ .

**Definición 2** (Definición wronskiano).

Dadas  $n$  funciones  $\{y_1, \dots, y_n\}$  con dominio  $I$  el wronskiano  $W(x) = W(y_1, y_2, \dots, y_n)(x)$  de estas funciones en un punto  $x \in I$  se define por

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) & \cdots & y'_n(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

**Lema 1** (Propiedades Wronskiano I).

Sea  $\{y_1, \dots, y_n\}$  un conjunto de  $n$  funciones. Si existe un  $x_0 \in I$  con  $W(x_0) \neq 0$  entonces  $\{y_1, \dots, y_n\}$  son linealmente independientes

*Demostración.* Supongamos que  $c_1y_1 + \dots + c_ny_n \equiv 0$ . Derivando  $n - 1$  veces esta

igualdad y evaluando el resultado en  $x_0$  obtenemos

$$\begin{aligned} c_1y_1(x_0) + \cdots + c_ny_n(x_0) &= 0 \\ c_1y'_1(x_0) + \cdots + c_ny'_n(x_0) &= 0 \\ &\vdots \quad \vdots \\ c_1y_1^{(n-1)}(x_0) + \cdots + c_ny_n^{(n-1)}(x_0) &= 0 \end{aligned}$$

Las igualdades anteriores dicen que el vector  $(c_1, \dots, c_n)^t$  pertenece al nucleo de la matriz

$$\begin{pmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \cdots & y_n(x_0) \\ y'_1(x_0) & y'_2(x_0) & \cdots & y'_n(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix}$$

Como por hipótesis la matriz es no singular, debe ocurrir que  $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ .  $\square$

**Teorema 3** (Teorema. Propiedades wronskiano II, Fórmula de Abel).

Supongamos que  $y_1$  e  $y_2$  son solución de

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = 0, \quad x \in I = (a, b) \quad (5.5)$$

Entonces existe  $c \in \mathbb{R}$  que satisface

$$W(y_1, y_2)(x) = ce^{-\int p dx}. \quad (5.6)$$

Esta expresión se denomina fórmula de Abel. En particular vale que

$$\exists x_0 \in I : W(x_0) \neq 0 \iff \forall x \in I : W(x) \neq 0.$$

*Demostración.* Tenemos que

$$W(x) = y_1(x)y'_2(x) - y'_1(x)y_2(x).$$

Derivando y usando (5.5)

$$\begin{aligned} W'(x) &= y_1y''_2 - y_1y''_2 \\ &= y_1(-py'_2 - qy_2) - y_2(-py'_1 - qy_1) \\ &= -pW. \end{aligned}$$

Vale decir  $W$  resuelve la ecuación  $W' = -pW$  la cual es fácilmente resoluble, mostrando su resolución que se satisface (5.6).  $\square$

**Teorema 4** (Propiedades wronskiano III).

Sean  $y_1$  e  $y_2$  soluciones de (5.5). Entonces son equivalentes

1.  $y_1$  e  $y_2$  son linealmente independientes en  $I$ .
2.  $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$  para todo  $x \in I$ .

*Demostración.* Que 2 implica 1 es consecuencia de la propiedad del wronskiano I. Veamos que 1 implica 2. Supongamos que existe un  $x_0$  con  $W(x_0) = 0$ . Esto quiere decir que una de las columnas de la matriz wronskiana en  $x_0$  es múltiplo de la otra. Supongamos que  $y_2(x_0) = ky_1(x_0)$  e  $y'_2(x_0) = ky'_1(x_0)$ . Esto quiere decir que  $y_2$  y  $ky_1$  resuelven el mismo pvi. Por lo tanto  $y_2(x) = ky_1(x)$  para todo  $x$ . Lo que nos dice lo contrario de 1  $\square$

**Teorema 5** (Estructura del conjunto de soluciones, ecuación homogénea).

Si  $y_1$  e  $y_2$  son soluciones linealmente independientes de

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = 0, \quad x \in I = (a, b)$$

entonces

$$y(x, c_1, c_2) = c_1y_1 + c_2y_2 \quad (5.7)$$

es solución general.

*Demostración.* Que la expresión (5.7) es solución ya lo hemos dicho. Restaría ver que cualquier solución se escribe como en (5.7). Sea  $y$  cualquier solución y  $x_0 \in I$ . La matriz wronskiana

$$\begin{pmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y'_1(x_0) & y'_2(x_0) \end{pmatrix}$$

Es no singular dado que el determinante es no nulo. Por este motivo el sistema

$$\begin{aligned} c_1y_1(x_0) + c_2y_2(x_0) &= y(x_0) \\ c_1y'_1(x_0) + c_2y'_2(x_0) &= y'(x_0) \end{aligned}$$

tiene solución para  $c_1$  y  $c_2$ . De este modo vemos que la función  $c_1y_1 + c_2y_2$  resuelve el PVI

$$\begin{cases} \frac{d^2z}{dx^2} + p(x)\frac{dz}{dx} + q(x)z = 0, & x \in I \\ z(x_0) = y(x_0) \\ z'(x_0) = y'(x_0) \end{cases}.$$

Evidentemente  $y$  es solución también, por el Teorema de Existencia y Unicidad vemos que  $y = c_1y_1 + c_2y_2$   $\square$

### 5.3. Reducción de orden

Como conclusión de los anterior, vemos que si queremos resolver (5.5) debemos conseguir dos soluciones linealmente independientes. Suponiendo que ya contamos con una solución no trivial vamos a describir un método que posibilita encontrar otra solución  $y_2$  linealmente independiente de  $y_1$ . El método consiste en proponer que  $y_2$  se escribe

$$y_2(x) = v(x)y_1(x).$$

Sustituyendo este ansatz en la ecuación

$$\begin{aligned} 0 &= y_2'' + py_2' + qy_2 \\ &= y_1v'' + 2v'y_1' + vy_1'' + pv'y_1 + pvy_1' + qvy_1 \\ &= y_1v'' + (2y_1' + py_1)v' + v(y_1'' + py_1' + qy_1) \\ &= y_1v'' + (2y_1' + py_1)v' \end{aligned}$$

La fórmula anterior es nuevamente una ecuación de segundo orden para  $v$ , pero en este caso afortunadamente contamos con herramientas para resolverla puesto que se trata de una ecuación donde la variable dependiente  $v$  no aparece explícitamente, sino que aparecen sus derivadas  $v'$  y  $v''$ . Hay que intentar la sustitución  $w = v'$ . Luego

$$y_1w'' + (2y_1' + py_1)w = 0$$

Recordar que  $y_1$  la asumimos conocida y que  $p$  es obviamente conocida, así  $2y_1' + py_1$  es una función conocida. La ecuación es una ecuación lineal homogénea de primer orden. Usando la fórmula para resolver este tipo de ecuación, obtenemos

$$w(x) = Ce^{-\int \frac{y_1'}{y_1} + pdx} = Ce^{-2 \ln |y_1|} e^{-\int pdx} = C \frac{1}{y_1^2} e^{-\int pdx}$$

Es suficiente encontrar sólo una función  $v$ , de allí podemos tomar  $C = 1$ .

$$w(x) = \frac{1}{y_1^2} e^{-\int pdx} \implies v(x) = \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int pdx} dx \quad (5.8)$$

Otra manera de testear la independencia lineal de dos funciones  $y_1$  e  $y_2$  es notar que si fueran linealmente dependientes e  $y_1 \neq 0$  en un conjunto  $J \subset I$  entonces  $y_2/y_1$  sería constante. Luego uno chequearía independencia si comprobase que  $y_2/y_1$  no es constante en algún subdominio  $J \subset I$ . En el caso anterior  $y_2/y_1 = v$ , luego deberíamos tener  $v$  no constante sobre algún subconjunto  $J$ . Pero  $v$  constante implicaría  $y_1^{-2} e^{-\int pdx} = 0$  y esto claramente no ocurre. De modo que por el método anterior encontramos dos soluciones independientes.

## 5.4. Ecuaciones homogéneas con coeficientes constantes

Consideramos la ecuación

$$y'' + py' + qy = 0, \quad p, q \in \mathbb{R} \quad (5.9)$$

Propongamos una solución de la forma

$$y(x) = e^{\lambda x}, \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

Reemplazando en la ecuación

$$(\lambda^2 + \lambda p + q)e^{\lambda x} = 0.$$

Se debe satisfacer la llamada *ecuación característica*

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0 \quad (5.10)$$

Tenemos tres casos acorde al valor de  $\Delta := p^2 - 4q$

1.  $\Delta = p^2 - 4q > 0$ , raíces reales distintas  $\lambda_1, \lambda_2$ . Este es el caso más sencillo de todos, obtenemos las soluciones

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x} \quad \text{y} \quad y_2(x) = e^{\lambda_2 x}.$$

Para chequear la independencia

$$\frac{y_2}{y_1} = e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x} \neq \text{cte.}$$

Luego

$$y(x, c_1, c_2) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}. \quad (5.11)$$

es solución general

2.  $\Delta = p^2 - 4q < 0$ , raíces complejas conjugadas  $\lambda_1 = \mu + i\nu, \lambda_2 = \mu - i\nu$ ,  $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ . Proponemos una solución de la forma

$$y(x) = e^{\mu x} v(x)$$

Hagamos los cálculos con SymPy

```

1>>> x, p, q=symbols('x, p, q')
2>>> v=Function('v')(x)
3>>> y=exp(-p/2*x)*v
4>>> ecua=y.diff(x,2)+p*y.diff(x)+q*y
5>>> simplify(ecua/exp(-p/2*x))

```

$$-\frac{p^2}{4}v(x) + qv(x) + \frac{d^2}{dx^2}v(x) = 0$$

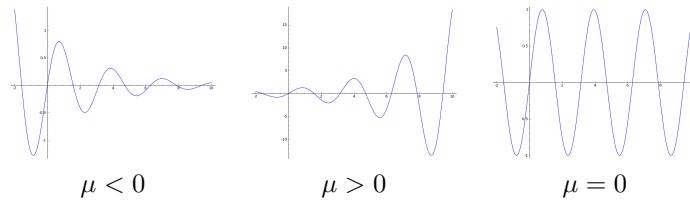
Como  $\nu^2 := -\frac{1}{4}(p^2 - 4q) > 0$ ,  $v$  resuelve la ecuación del oscilador armónico con frecuencia  $\nu$ . Recordar que la solución general para  $v$  es

$$v(x) = C_1 \cos \nu x + C_2 \operatorname{sen} \nu x,$$

y de allí

$$y(x) = e^{\mu x} \{C_1 \cos \nu x + C_2 \operatorname{sen} \nu x\} \quad (5.12)$$

Seguidamente presentamos las gráficas de las soluciones para distintos valores de  $\mu$ .



3.  **$\Delta = p^2 - 4c = 0$ , raíces iguales**. Conocemos una solución  $y_1 = e^{-\frac{p}{2}x}$ .

Podemos hallar otra por el método de reducción de orden. Esto consiste en proponer otra solución de la forma  $y_2(x) = y_1(x)v(x)$ . Dejemos que lo haga SymPy

```
>>> x, p=symbols('x, p')
2>>> y=Function('y')(x)
3>>> v=Function('v')(x)
4>>> y=v*exp(-p/2*x)
5>>> ecua=y. diff(x,2)+p*y. diff(x)+p**2/4*y
6>>> ecuav=simplify(ecua/exp(-p/2*x))
>>> ecuav
```

Se obtiene

$$\frac{d^2}{dx^2}v(x) = 0.$$

La solución general para  $v$  es  $v = c_1 + c_2x$ . Así el método mencionado proporciona la solución extra

$$y_2(x) = xe^{-\frac{p}{2}x}.$$

## 5.5. Ecuación no homogénea

### 5.5.1. Método coeficientes indeterminados

Intentamos resolver

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = r(x), \quad (5.13)$$

donde  $p, q, r \in \mathbb{R}$ ,  $r \in C(I)$   $r \neq 0$ . El método consiste en buscar soluciones en la misma clase de funciones a la que pertenece  $r(x)$ . Funciona de manera metódica sólo para algunos tipos de funciones  $r(x)$ . Concretamente para  $r(x)$  combinación lineal de funciones polinómicas, exponenciales  $e^{\alpha x}$  o trigonométricas  $\cos \alpha x$  y  $\sin \alpha x$ . Lo vamos a ilustrar con ejemplos para cada caso.

1. **Caso  $r(x) = e^{ax}$  y  $a^2 + pa + q \neq 0$ .** En esta situación se propone como solución una función de la forma  $y(x) = Ae^{ax}$ . Usamos SymPy para el cálculo

```

1 >>> x,p,q,a,A=symbols('x,p,q,a,A')
2 >>> y=A*exp(a*x)
3 >>> ecua=y.diff(x,2)+p*y.diff(x)+q*y-exp(a*x)
4 >>> ecua=simplify(ecua/exp(a*x))
5 >>> ecua
6 A*a**2 + A*a*p + A*q - 1
7 >>> solve(ecua,A)
8 [1/(a**2 + a*p + q)]

```

Si  $a^2 + pa + q \neq 0$ , encontramos la solución particular  $y(x) = \frac{1}{(a^2 + pa + q)} e^{ax}$ .

2. **Caso  $r(x) = e^{ax}$  y  $a^2 + pa + q = 0$ .** En esta situación diremos que la ecuación está en *resonancia*. Más generalmente, diremos que se presenta resonancia cuando  $r(x)$  es solución del problema homogéneo. Propongamos como solución  $y(x) = Axe^{ax}$ . Hagamos los cálculos con SymPy.

```

1 >>> x,p,q,a,A=symbols('x,p,q,a,A')
2 >>> y=A*x*exp(a*x)
3 >>> ecua=y.diff(x,2)+p*y.diff(x)+q*y-exp(a*x)
4 >>> ecua=simplify(ecua/exp(a*x))
5 >>> ecua
6 A*a*(a*x + 2) + A*p*(a*x + 1) + A*q*x - 1
7 >>> ecua.subs(q,-a**2 - a*p).simplify()
8 2*A*a + A*p - 1

```

Luego, si  $2a + p \neq 0$ ,  $y(x) = \frac{1}{2a + p} xe^{ax}$  resuelve el problema.

3. **Caso  $r(x) = e^{ax}$ ,  $a^2 + pa + q = 0$  y  $2a + p = 0$ .** Si  $2a + p = 0$ , como también  $a^2 + pa + q = 0$ , tenemos que  $a$  es una raíz doble de la ecuación  $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ . En este caso, proponemos como solución  $y(x) = Ax^2e^{ax}$ .

```

1 >>> x,p,q,a,A=symbols('x,p,q,a,A')
2 >>> y=A*x**2*exp(a*x)
3 >>> ecua=y.diff(x,2)+p*y.diff(x)+q*y-exp(a*x)
4 >>> ecua=simplify(ecua/exp(a*x))
5 >>> ecua
6 A*p*x*(a*x + 2) + A*q*x**2 + A*(a**2*x**2 + 4*a*x + 2) - 1
7 >>> ecua.subs([(q,-a**2 - a*p), (p,-2*a)]).simplify()
2*A - 1

```

Hay que tomar 
$$y(x) = \frac{1}{2}x^2e^{ax}$$

4. **Caso  $r(x) = \sin bx$ .** Proponemos

$$y(x) = A \cos x + B \sin x,$$

como candidato a solución.

```

>>> x,p,q,a,b,A,B=symbols('x,p,q,a,b,A,B')
2 >>> y=A*cos(b*x)+B*sin(b*x)
3 >>> ecua=y.diff(x,2)+p*y.diff(x)+q*y-sin(b*x)
4 >>> ecua.simplify()
5 -b**2*(A*cos(b*x) + B*sin(b*x)) - b*p*(A*sin(b*x) -
6 B*cos(b*x)) + q*(A*cos(b*x) + B*sin(b*x)) - sin(b*x)

```

La expresión en el miembro de la izquierda es una combinación lineal de las funciones  $\cos bx$  y  $\sin bx$ . Como estas funciones son linealmente independientes debemos tener que los coeficientes en la combinación lineal deben ser cero

```

>>> ecua.expand().coeff(sin(b*x))
2 -A*b*p - B*b**2 + B*q - 1
>>> ecua.expand().coeff(cos(b*x))
4 -A*b**2 + A*q + B*b*p

```

Obtenemos un sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} -Abp - (b^2 - q)B = 1 \\ Bbp - (b^2 - q)A = 0 \end{cases} \quad (5.14)$$

Para que el sistema tenga solución la matriz de coeficientes debe ser no singular

$$0 \neq \det \begin{pmatrix} -bp & -(b^2 - q) \\ -(b^2 - q) & bp \end{pmatrix} = -(b^2 p^2 + (b^2 - q)^2)$$

Podemos suponer  $b \neq 0$ , de lo contrario la ecuación hubiese sido homogénea. entonces la condición de arriba ocurre si y sólo si  $p \neq 0$  o  $b^2 \neq q$ . En esa situación encontraremos una solución de la forma

$$y(x) = A \cos bx + B \sen bx,$$

donde  $A$  y  $B$  resuelven (5.14).

Cuando  $p = 0$  y  $b^2 = q$  el sistema (5.14) puede no tener solución. Notar que en este caso la ecuación queda

$$y'' + b^2 y = \sen bx$$

Es una ecuación de un oscilador armónico no homogénea. Habíamos visto que justamente  $r(x) = \sen bx$  es una solución del problema homogéno. Nuevamente estamos en una situación de resonancia. Como en casos anteriores hay que proponer como solución

$$y(x) = x(A \cos x + B \sen x),$$

### 5. Caso $r(x) = \sen bx$ con resonancia

```

>>> x,b,A,B=symbols('x,b,A,B')
2>>> y=x*(A*cos(b*x)+B*sin(b*x))
>>> ecua=y.diff(x,2)+b**2*y-sin(b*x)
4>>> eq1=ecua.expand().coeff(sin(b*x))
>>> eq2=ecua.expand().coeff(cos(b*x))
6>>> H=solve([eq1,eq2],[A,B])
>>> H
8{B: 0, A: -1/(2*b)}
>>> y.subs(H)
10-x*cos(b*x)/(2*b)
```

Encontramos la solución general

$$y(x) = -\frac{x}{2b} \cos bx.$$

El caso donde  $r(x) = \cos bx$  se trata de manera completamente similar.

### 6. Caso $r(x)$ polinomio

Hay que proponer como solución un polinomio, en primera instancia, del mismo grado.

Supongamos

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p \frac{dy}{dx} + q(x)y = c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n \quad (5.15)$$

Se propone  $y = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ . Luego

$$\begin{aligned} & 2a_2 + 3 \cdot 2x + \cdots + n(n-1)x^{n-2} + \\ & pa_1 + p2a_2x + \cdots + pna_nx^{n-1} + \\ & qa_0 + qa_1x + \cdots + qa_nx^n = c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n \end{aligned}.$$

Como las funciones  $1, x, \dots, x^n$  son linealmente independientes, los coeficientes en ambos lados de la igualdad deben ser iguales.

$$\begin{aligned} 2a_2 + pa_1 + qa_0 &= c_0 \\ 3 \cdot 2 + 2pa_2 + qa_1 &= c_1 \\ &\vdots \\ n(n-1) + p(n-1)a_{n-1} + qa_{n-2} &= c_{n-2} \\ pna_n + qa_{n-1} &= c_{n-1} \\ qa_n &= c_n \end{aligned}$$

Es útil escribir estas igualdades matricialmente.

$$\begin{pmatrix} q & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & q & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ & & & q & pn & \\ \vdots & & & & & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{pmatrix}$$

Es un sistema triángular superior que se resuelve por sustitución ascendente. Esto siempre que  $q \neq 0$ . En caso contrario la matriz es singular y es posible que el sistema no tenga solución.

El caso  $q = 0$  es una forma de resonancia. Puede ser tratado como las anteriores resonancias, pero notando que la ecuación se reduce a  $y'' + py' = r$  conviene tomar  $v = y'$  como nueva variable dependiente y reducir la ecuación a una de primer orden.

Por último señalemos que si deseamos resolver un problema de la forma

$$L[y] \equiv y'' + py' + qy = r_1(x) + \cdots + r_n(x),$$

donde las funciones  $r_i$  son de alguna de las formas descriptas en los casos previos, entonces la linealidad de  $L$  implica que, si  $y_i$  resuelve  $L[y_i] = r_i$ ,  $y = y_1 + \cdots + y_n$  resuelve la ecuación deseada.

### 5.5.2. Método de variación de los parámetros

Queremos resolver la ecuación

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = r(x). \quad (5.16)$$

Supongamos que contamos con un par de soluciones  $y_1, y_2$  linealmente independientes de la ecuación homogénea asociada

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0. \quad (5.17)$$

El método de variación de los parámetros consiste en proponer una solución de la forma

$$y(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x). \quad (5.18)$$

Hay dos funciones incógnitas  $c_1$  y  $c_2$ , pero sólo una ecuación. Tendremos por esto libertad de introducir otra condición que consideremos conveniente. Tenemos

$$y' = c'_1y_1 + c_1y'_1 + c'_2y_2 + c_2y'_2.$$

Pidamos que

$$c'_1y_1 + c'_2y_2 = 0. \quad (5.19)$$

Supuesta esta igualdad

$$y' = c_1y'_1 + c_2y'_2.$$

Derivando

$$y'' = c'_1y'_1 + c'_2y'_2 + c_1y''_1 + c_2y''_2.$$

Entonces

$$\begin{aligned} r(x) &= y'' + py' + qy \\ &= c'_1y'_1 + c'_2y'_2 + c_1y''_1 + c_2y''_2 + p(c_1y'_1 + c_2y'_2) + q(c_1y_1 + c_2y_2) \\ &= c_1(y''_1 + py'_1 + qy_1) + c_2(y''_2 + py'_2 + qy_2) + c'_1y'_1 + c'_2y'_2 \\ &= c'_1y'_1 + c'_2y'_2 \end{aligned}$$

Esta ecuación junto a (5.19) nos dan el sistema

$$\begin{cases} c'_1y_1 + c'_2y_2 = 0 \\ c'_1y'_1 + c'_2y'_2 = r \end{cases} \quad (5.20)$$

Las incógnitas son  $c'_1$  y  $c'_2$ . El determinante de la matriz de coeficientes es precisamente el Wronskiano  $W$  de las soluciones  $y_1$  e  $y_2$ , por la suposición de independencia  $W \neq 0$  y por lo tanto el sistema tiene solución única. Se tiene

$$c'_1 = -\frac{\det \begin{pmatrix} 0 & y_2 \\ r & y'_2 \end{pmatrix}}{W} = -\frac{ry_2}{W}$$

y

$$c'_2 = -\frac{\det \begin{pmatrix} y_1 & 0 \\ y'_1 & r \end{pmatrix}}{W} = \frac{ry_1}{W}$$

En consecuencia

$$c_1 = - \int \frac{ry_2}{W} dx \quad (5.21)$$

y

$$c_2 = \int \frac{ry_1}{W} \quad (5.22)$$

Usando estas fórmulas y (5.18) obtenemos una solución particular del sistema. La solución general es la suma de la particular más una solución general del homogéneo. Esta última solución general se escribe como una combinación lineal genérica entre  $y_1$  e  $y_2$ .

**Ejemplo 55.** Resolver el siguiente pvi  $y'' + y = \csc x$ ,  $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$  y  $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ . La ecuación homogénea asociada tiene el par  $y_1(x) = \cos(x)$  e  $y_2(x) = \sin(x)$  de soluciones linealmente independientes. El wronskiano es  $W \equiv 1$  y entonces una solución particular es

$$\begin{aligned} y(x) &= - \int \frac{ry_2}{W} dx y_1 + \int \frac{ry_1}{W} dx y_2 \\ &= - \int dx \cos(x) + \int \frac{1}{\tan(x)} dx \sin(x) \\ &= -x \cos(x) + \ln(\sin(x)) \sin(x). \end{aligned}$$

La solución general es

$$y(x) = -x \cos(x) + \ln(\sin(x)) \sin(x) + c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x).$$

Las condiciones  $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$  y  $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$  nos conducen a  $c_2 = 0$  y  $c_1 = \frac{\pi}{2}$ .

## 5.6. Conclusiones

1. Si podemos encontrar dos soluciones linealmente independientes de una ecuación lineal homogénea de segundo orden, tenemos la solución general a través de combinaciones lineales.
2. Si tenemos una solución no trivial de una ecuación lineal homogénea de segundo orden podemos hallar otra por el método de reducción de orden.
3. Podemos resolver completamente una ecuación lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes.
4. Podemos resolver algunos problemas no homogéneos por el método de coeficientes indeterminados.
5. Si conocemos las soluciones del problema homogéneo podemos resolver, en teoría, el no homogéneo para cualquier  $r(x)$  por el método de variación de los parámetros

## 5.7. Aplicaciones

### 5.7.1. Vibraciones mecánicas

**Problema 1.**

Estudiar el movimiento de un resorte (como el de la unidad anterior) pero suponer que además de actuar sobre la masa la fuerza elástica del resorte, tenemos una fuerza de fricción debida a la resistencia del medio. Por la acción de esta fuerza, se dice que es un sistema resorte-masa amortiguado. Además suponemos que hay otra fuerza  $F$  externa y que sólo depende de  $t$ . Por ejemplo si el resorte se colocase verticalmente y se dejase suspendida la masa,  $F$  sería la fuerza de gravedad. Si la masa estuviese hecha de metal,  $F$  podría ser una fuerza provista por un imán. Por la acción de esta fuerza el sistema se dice forzado. Por consiguiente el sistema completo, con la acción de las tres fuerzas, se denomina un sistema resorte-masa, amortiguado y forzado.

La fuerza elástica del resorte se modeliza con la Ley de Hooke. Para la amortiguación, supongamos que el módulo de la fuerza es proporcional a la velocidad de la masa. La constante de proporcionalidad  $c$  se llama coeficiente de viscosidad. La dirección y sentido de la fuerza amortiguadora es siempre contraria al movimiento. Por el principio de conservación de la energía, vemos que la fuerza de amortiguación siempre realiza un trabajo  $W$  negativo, por consiguiente hace perder energía cinética. De la fuerza externa  $F$  no sabemos nada en principio. Por todo lo expuesto, si ponemos un sistema de coordenadas con origen en la posición de equilibrio del sistema masa-resorte y si  $x(t)$  es la posición de la masa en el momento  $t$ , la ecuación que gobierna el sistema masa-resorte con amortiguación y forzamiento es

$$mx''(t) = \underbrace{-kx(t)}_{\text{2da Ley Newton}} + \underbrace{-cx'(t)}_{\text{Amortiguación}} + \underbrace{F(t)}_{\text{Fuerza externa}} \quad (5.23)$$

#### Vibraciones amortiguadas no forzadas ( $c > 0, F = 0$ )

Escribamos la ecuación (5.23) de la siguiente forma

$$x''(t) + 2\mu x'(t) + \omega^2 x = 0 \quad \mu := \frac{c}{2m}, \omega := \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (5.24)$$

Las raíces de la ecuación característica son

$$\lambda_{1,2} = -\mu \pm \sqrt{\Delta}, \quad \Delta := \mu^2 - \omega^2$$

**Caso  $\Delta > 0$ .** Aquí la viscosidad es “grande” relativa ala rigidez  $k$ . Se dice que el sistema está sobreamortiguado. En este caso tenemos dos soluciones linealmente independientes del problema homogéneo y la solución general de este es de la forma

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

Notar que  $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ . Supongamos que el sistema masa-resorte parte del resreso  $x'(0) = 0$  y de una posición indeterminada  $x_0$ . Resolvamos este pvi

```

1>>> from sympy import *
2>>> init_printing()
3>>> lambda1,lambda2,t,x0,c1,c2=symbols('lambda1,lambda2,t,x0,c1,c2')
4>>> x=c1*exp(lambda1*t)+c2*exp(lambda2*t)
5>>> C=solve([x.subs(t,0)-x0,x.diff(t).subs(t,0)], [c1,c2])
6>>> C

```

$$\left\{ c_1 : -\frac{\lambda_2 x_0}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad c_2 : \frac{\lambda_1 x_0}{\lambda_1 - \lambda_2} \right\}$$

```
>>> x=x . subs (C[0])
```

$$x(t) = x_0 \left\{ \frac{\lambda_1 e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2} - \frac{\lambda_2 e^{\lambda_1 t}}{\lambda_1 - \lambda_2} \right\} \quad (5.25)$$

```

1>>> x=x . subs ({lambda1:-1,lambda2:-2,x0:1})
2>>> plot(x,(t,0,10))

```

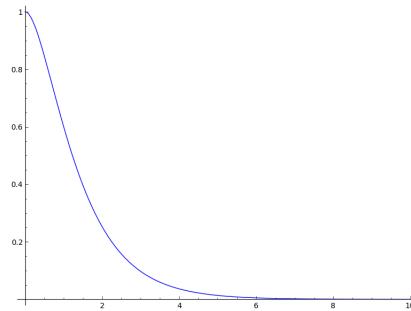


Figura 5.1: Vibraciones amortiguadas no forzadas ( $c > 0, F = 0$ )

Figura 5.2: Masa-resorte sobreamortiguado

Como se observa en la gráfica 5.1 y la animación 5.2 la masa ejecuta una oscilación, lo cual le demanda un tiempo infinito. Podría haber pasado por la posición de equilibrio sólo en el pasado, puesto que  $x(t) = 0$  cuando

$$t = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_2} < 0$$

**Caso  $\Delta = 0$ .** En esta situación se dice que hay amortiguación crítica. Las raíces son iguales  $\lambda_1 = \lambda_2 = -\mu$ . Sabemos que

$$x_1(t) = c_1 e^{-\mu t} + c_2 t e^{-\mu t} = e^{-\mu t} \{c_1 + c_2 t\} \quad (5.26)$$

Nuevamente la solución puede pasar a lo sumo una vez por la posición de equilibrio, siempre y cuando  $C_2 \neq 0$ . El comportamiento cualitativo de la solución es muy parecido al caso anterior.

**Caso  $\Delta < 0$ , caso subamortiguado.**  $\lambda_{1,2} = -\mu \pm \nu i$  con  $\nu = \sqrt{|\Delta|} = \sqrt{|\omega^2 - \mu^2|}$ . La solución general viene dada por

$$x(t) = e^{-\mu t} \{c_1 \cos \nu t + c_2 \sin \nu t\} \quad (5.27)$$

Esta función tiene por gráfica una onda sinusoidal modulada por una función exponencial decreciente.

```

>>> c1, c2, mu, nu, x0, t=symbols('c1, c2, mu, nu, x0, t')
2>>> x=exp(-mu*t)*(c1*cos(nu*t)+c2*sin(nu*t))
>>> C=solve([x.subs(t,0)-x0, x.diff(t).subs(t,0)], [c1, c2])
4>>> x=x.subs(C).subs({mu:1, nu:4, x0:1})
>>> plot(x,(t,0,100))

```

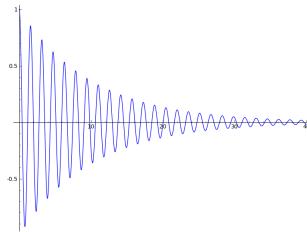
Vibraciones amortiguadas no forzadas ( $c > 0, F = 0$ )

Figura 5.3: Masa-resorte subamortiguado

Se suele escribir la ecuación (5.27) de otra forma. Expresemos el vector  $(c_1, c_2)$  en coordenadas polares.

$$c_1 = \rho \cos \alpha, \quad c_2 = \rho \sin \alpha.$$

Entonces usando las fórmulas de adición de las funciones trigonométricas

$$x(t) = e^{-\mu t} \{c_1 \cos \nu t + c_2 \sin \nu t\} = \boxed{\rho e^{-\mu t} \cos(\nu t - \alpha)}.$$

Llamaremos este régimen *movimiento quasi-oscilatorio*. Se ejecutan vibraciones, que se disipan con el tiempo, de frecuencia

$$f = \frac{1}{\text{período}} = \frac{\nu}{2\pi}, \quad \nu = \sqrt{\omega^2 - \mu^2} = \sqrt{\left(\frac{k}{m}\right)^2 - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}.$$

En lugar de la frecuencia se suele considerar la frecuencia angular que se define como  $2\pi f$ . La ventaja de esta definición es que la frecuencia angular de la función de arriba es  $\nu$ .

**Ejercicio:** Demostrar que en cualquiera de las situaciones descriptas,  $x(t) \rightarrow 0$  y  $x'(t) \rightarrow 0$ , cuando  $t \rightarrow \infty$ . Es decir, el movimiento se va deteniendo.

### Vibraciones no amortiguadas y forzadas ( $c = 0, F \neq 0$ )

Vamos a considerar una fuerza externa oscilatoria de frecuencia angular  $\omega_0$  y amplitud  $F_0$ . Tenemos que resolver

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = F_0 \cos(\omega_0 t). \quad (5.28)$$

Usaremos el método de coeficientes indeterminados. Recordar que si  $\omega = \omega_0$  estamos en resonancia. Tendremos que considerar ese caso por separado. Supongamos pues  $\omega \neq \omega_0$ . Tenemos que reemplazar en la ecuación

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t),$$

y hallar  $A$  y  $B$  que logren que  $x(t)$  sea solución. Usamos SymPy

```

1>>> from sympy import *
2>>> init_printing()
3>>> t, omega, omega0, F0, A, B=symbols('t, omega, omega0, F0, A, B')
4>>> x=A*cos(omega0*t)+B*sin(omega0*t)
5>>> eq=x.diff(t,2)+omega**2*x-F0*cos(omega0*t)
6>>> eqL1=eq.factor().coeff(sin(omega0*t))
7>>> eqL2=eq.factor().coeff(cos(omega0*t))
8>>> Incog=[A,B]
9>>> Ecuas=[eqL1, eqL2]
>>> Matrix([[ecu.coeff(inco) for inco in Incog] for ecu in Ecuas])

```

La matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones para  $A$  y  $B$  es

$$\begin{bmatrix} 0 & \omega^2 - \omega_0^2 \\ \omega^2 - \omega_0^2 & 0 \end{bmatrix}$$

claramente es una matriz no singular, cuando  $\omega \neq \omega_0$ , y por consiguiente en no resonancia tiene una solución

```

1>>> SolAB=solve([eqL1, eqL2], [A, B])
2>>> x=x.subs(SolAB)
3>>> x

```

$$x(t) = \frac{F_0 \cos(\omega_0 t)}{\omega^2 - \omega_0^2}.$$

La solución general del problema es la solución particular que acabamos de obtener más una solución general del homogéneo que sabemos es una combinación lineal genérica entre  $\cos \omega t$  y  $\sin \omega t$ .

$$x(t) = \frac{F_0 \cos(\omega_0 t)}{\omega^2 - \omega_0^2} + c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t). \quad (5.29)$$

Como ya hemos visto, considerando las coordenadas polares  $\rho$  y  $\alpha$  de  $c_1, c_2$  podemos reescribir la solución

$$x(t) = \frac{F_0 \cos(\omega_0 t)}{\omega^2 - \omega_0^2} + \rho \cos(\omega t - \alpha)$$

Vemos que el movimiento es la superposición de dos movimientos oscilatorios de frecuencias  $\omega$ , que se denomina la *frecuencia natural* del resorte, y  $\omega_0$  que se denomina *frecuencia impresa*.

Resolvamos el pvi

$$\begin{cases} x''(t) + \omega^2 x(t) = F_0 \cos(\omega_0 t), \\ x'(0) = x(0) = 0 \end{cases}$$

```

1>>> from sympy import *
2>>> init_printing()
3>>> var('t,c1,c2,omega,omega0,F0')
4>>> x=F0/(omega**2-omega0**2)*cos(omega0*t)+c1*cos(omega*t)+c2*sin(
5>>> omega*t)
6>>> C=solve([x.subs(t,0),x.diff(t).subs(t,0)],[c1,c2])
7>>> x=x.subs(C)
8>>> x

```

$$x(t) = -\frac{F_0 \cos(\omega t)}{\omega^2 - \omega_0^2} + \frac{F_0 \cos(\omega_0 t)}{\omega^2 - \omega_0^2}$$

Ahora usemos la identidad  $\cos(a - b) - \cos(a + b) = 2 \sin a \sin b$ , con  $a = \frac{1}{2}(\omega + \omega_0)$  y  $b = \frac{1}{2}(\omega - \omega_0)$ . Deducimos

$$x(t) = \frac{2F_0}{\omega^2 - \omega_0^2} \sin\left(\frac{\omega - \omega_0}{2}t\right) \sin\left(\frac{\omega + \omega_0}{2}t\right). \quad (5.30)$$

Esta expresión la podemos ver como una onda de frecuencia grande  $\omega + \omega_0$  modulada por una de frecuencia chica  $\omega - \omega_0$ .

```

1>>> x=x.subs({F0:1,omega:1,omega0:.9})
2>>> plot(x,(t,0,200))

```

Calculemos el límite  $\lim_{\omega_0 \rightarrow \omega} x(t)$ ,

```
>>> limit(x0,omega0,omega)
```

$$x(t) = \frac{F_0 t \sin(\omega t)}{2\omega}$$

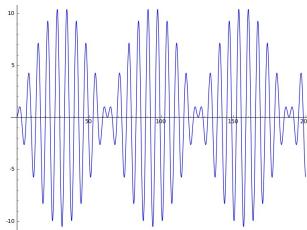


Figura 5.4: Fenómeno de batido

El caso  $\omega = \omega_0$  es el caso con resonancia, que debemos resolver, como fue indicado, proponiendo como solución  $y(x) = x(A \cos x + B \operatorname{sen} x)$ . El siguiente código SymPy muestra que la solución es la misma función que la obtenida por el proceso de límite de los casos sin resonancia.

```

1 >>> var('t ,omega ,F0,A,B')
2 >>> x=t*(A*cos(omega*t)+B*sin(omega*t))
3 >>> eq=x . diff(t ,2)+omega**2*x-F0*cos(omega*t)
4 >>> eqL1=eq . factor() . coeff(sin(omega*t))
5 >>> eqL2=eq . factor() . coeff(cos(omega*t))
6 >>> SolAB=solve([eqL1 ,eqL2 ],[A,B])
7 >>> x=x . subs(SolAB)

```

Se producen “vibraciones” no acotadas.

```

1 >>> plot(x . subs({ omega:1 ,F0:1 }),(t ,0 ,100))

```

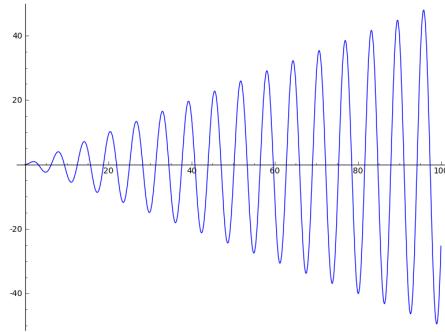


Figura 5.5: Resonancia

En la wiki Hearing a trigonometric identity se puede escuchar ondas sonoras con los fenómenos de resonancia y batido.

### Vibraciones amortiguadas y forzadas ( $c > 0, F \neq 0$ )

Vamos a considerar una fuerza externa oscilatoria de frecuencia  $\omega_0$  y amplitud  $F_0$ . Tenemos que resolver

$$x''(t) + 2\mu x'(t) + \omega^2 x(t) = F_0 \cos(\omega_0 t). \quad (5.31)$$

Proponemos por solución  $x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$ .

```

1>>> var('t,mu,omega,omega0,F0,A,B')
2>>> x=A*cos(omega0*t)+B*sin(omega0*t)
3>>> eq=x.diff(t,2)+2*mu*x.diff(t)+omega**2*x-F0*cos(omega0*t)
4>>> eqL1=eq.factor().coeff(sin(omega0*t))
5>>> eqL2=eq.factor().coeff(cos(omega0*t))
6>>> Incog=[A,B]
7>>> Ecuas=[eqL1,eqL2]
8>>> M=Matrix([[ecu.coeff(inco) for inco in Incog] for ecu in Ecuas])
9>>> M.det()

```

La matriz  $M$  del sistema lineal que satisfacen las incógnitas  $A$  y  $B$  tiene determinante

$$\det(M) = -4\mu^2\omega_0^2 - \omega^4 + 2\omega^2\omega_0^2 - \omega_0^4.$$

No queda claro si, eventualmente, puede ser singular. Calculando las posibles soluciones para  $\omega$  de  $\det(M) = 0$

```

1>>> solve(M.det(),omega)

```

$$\left[ -\sqrt{-2i\mu\omega_0 + \omega_0^2}, \sqrt{-2i\mu\omega_0 + \omega_0^2}, -\sqrt{2i\mu\omega_0 + \omega_0^2}, \sqrt{2i\mu\omega_0 + \omega_0^2} \right]$$

son todas complejas no reales, por consiguiente la matriz es siempre no singular.

```

1>>> SolAB=solve([eqL1,eqL2],[A,B])
2>>> x.subs(SolAB)

```

$$x(t) = \frac{2F_0\mu\omega_0 \sin(\omega_0 t)}{4\mu^2\omega_0^2 + (\omega^2 - \omega_0^2)^2} + \frac{F_0(\omega^2 - \omega_0^2) \cos(\omega_0 t)}{4\mu^2\omega_0^2 + (\omega^2 - \omega_0^2)^2} \quad (5.32)$$

Es un movimiento oscilatorio de frecuencia angular  $\omega_0$ . Podemos escribir  $x(t) = \rho \cos(\omega_0 t - \alpha)$ , donde  $(\rho, \alpha)$  son las coordenadas polares de  $(A, B)$ . En particular la amplitud de la oscilación viene dada por  $\rho = \sqrt{A^2 + B^2}$ . Recurrimos nuevamente a SymPy para calcular  $\rho$ .

```
>>> rho=sqrt(A**2+B**2).subs(SolAB).simplify()
2>>> rho
```

$$\rho(\omega_0) = \frac{F_0}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\mu^2\omega_0^2}}$$

Grafiquemos la función  $\rho(\omega_0)$  para  $\omega = 5$  y  $\mu = 0,1$ .

```
>>> plot(rho.subs({F0:1, mu:.1, omega:5}),(omega0,0,10))
```

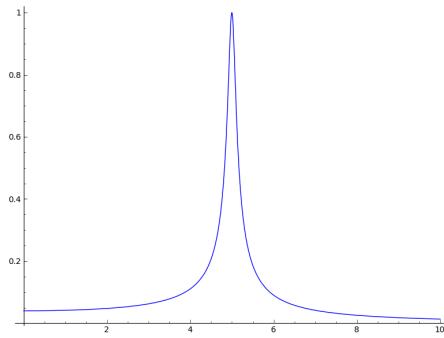


Figura 5.6: Gráfico amplitud vs. frecuencia, resorte amortiguado y forzado

La función tiene un notorio máximo cerca de  $\omega_0 = 5$ . Seguramente es debido a la aparición de resonancias. Hallemos el punto de máximo exacto, primero encontraremos puntos críticos.

```
>>> sol=solve(rho.diff(omega0),omega0)
1>>> sol
```

$$\left[ 0, -\sqrt{-2\mu^2 + \omega^2}, \sqrt{-2\mu^2 + \omega^2}, -\sqrt{\tilde{\omega}\sqrt{F_0^2 - 2\mu^2 + \omega^2}}, \sqrt{\tilde{\omega}\sqrt{F_0^2 - 2\mu^2 + \omega^2}} \right]$$

El único lícito, si  $2\mu^2 < \omega$ , es  $\hat{\omega}_0 = \sqrt{-2\mu^2 + \omega^2}$ . Podemos constatar el carácter, si es máximo/mínimo o ninguna de estas opciones. Calculando la derivada segunda

```
>>> rho.diff(omega0,2).subs(omega0,sol[2])
```

$$\frac{2\sqrt{\frac{F_0^2}{4\mu^4+4\mu^2(-2\mu^2+\omega^2)}}(4\mu^2-2\omega^2)}{4\mu^4+4\mu^2(-2\mu^2+\omega^2)}$$

vemos que es claramente negativa. Luego tenemos un máximo local en  $\hat{\omega}_0$ . Comparando el valor de  $\rho(\hat{\omega}_0)$  con los de  $\rho(0)$  y  $\rho(+\infty)$  determinamos si es máximo global. Un cálculo, que podemos hacer con SymPy, nos muestra que

$$\lim_{\omega_0 \rightarrow \infty} \rho(\omega_0) = 0 < \frac{F_0}{\omega^2} = \rho(0) < \frac{1}{2} \frac{F_0}{\mu \sqrt{\omega^2 - \mu^2}} = \rho(\hat{\omega}_0).$$

En consecuencia  $\hat{\omega}_0$  es máximo absoluto.

En el ejemplo que graficamos el máximo ocurre en

```
>>> sol[2].subs({mu:1, omega:5})
4.99799959983992
```

Vale decir, un oscilador armónico en reposo es más sensible a excitaciones en ciertas frecuencias, aproximadamente igual a la frecuencia natural del resorte cuando el coeficiente de viscosidad  $c = 2m\mu$  es chico. Esto es utilizado para diseñar dispositivos que captan ondas sísmicas.

Hasta aquí hemos encontrado una solución particular del sistema no homogéneo. Para encontrar una solución general deberíamos adicionar a la particular que disponemos una solución general  $x_g(t)$  de la ecuación homogénea. La forma de esta solución general es de alguno de los tipos 5.27, 5.26 o 5.25. Sin embargo no nos importa ahora la fórmula explícita de estas soluciones, sino que nos interesa resaltar que trátese del tipo que se trate, se satisface que  $\lim_{t \rightarrow \infty} x_g(t) = 0$ . Por este motivo, vamos a decir que esta parte de la solución es *transitoria*. En cambio la solución que prevalece en el tiempo dada por (5.32) la denominaremos solución *estacionaria*.

### 5.7.2. Un poco de mecánica celeste

Vamos a considerar ahora el problema del movimiento de un planeta, digamos la Tierra, de masa  $m_\oplus$  alrededor del sol, de masa  $m_\odot$ . Como  $m_\odot \gg m_\oplus$  vamos a ignorar la fuerza que actúa sobre el Sol debido a la atracción gravitatoria de la Tierra. Esta suposición, aunque falsa, la hacemos por simplicidad. No obstante, con sólo un poco de trabajo, el caso más general se reduce al tratado aquí. Ver el trabajo final de la Lic. Matemática de Leopoldo Buri, para una deducción más cuidadosa. Vamos a suponer además que el movimiento del planeta se restringe a un plano. Esta afirmación es cierta y aunque su demostración es sencilla no la desarrollaremos aquí. Supongamos un sistema de coordenadas cartesianas sobre el plano en que se realiza el movimiento orbital del planeta. Asumimos el Sol en el origen de coordenadas y en reposo. Como no actúa fuerza sobre él, permanecerá en esa situación. Vamos a suponer que la posición de la Tierra es  $\vec{r}$ .

Los dos ingredientes básicos para derivar la leyes de movimiento del planeta son la Segunda Ley de Newton y la Ley Gravitación Universal. Ya hemos considerado ambas con anterioridad. Según la Ley de Gravitación Universal, la magnitud de la fuerza de gravedad es proporcional a  $\frac{m_\oplus m_\odot}{d^2}$ , donde  $d$  es la distancia tierra-sol. A la constante de proporcionalidad la llamaremos, como es costumbre,  $G$ . La dirección de la fuerza gravitatoria es la de la recta que une los dos astros y el sentido es tal que la fuerza es

atractiva entre los cuerpos. Vale decir, la dirección y sentido de la fuerza de gravedad vienen dados por el versor  $-\vec{r}/r$ , donde  $r = |\vec{r}|$ . Luego se debe satisfacer que

$$Gm_{\odot} \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\frac{Gm_{\odot} m_{\oplus}}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} = -Gm_{\odot} m_{\oplus} \frac{\vec{r}}{r^3}.$$

Es decir

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3} \quad \text{donde } \mu := Gm_{\oplus}$$
(5.33)

Esta ecuación se conoce como la ecuación de los dos cuerpos. Dado que esta ecuación entraña, a su vez, tres ecuaciones escalares, una por cada componente de  $\vec{r}$ , se nos presenta aquí un *Sistema de Ecuaciones Diferenciales*. No sabemos resolver sistemas de ecuaciones. No obstante vamos a ver como podemos reducir la ecuación anterior, mediante ingeniosos cambios de variables, a ecuaciones diferenciales que sabemos resolver.

Vamos a usar coordenadas polares  $(r, \theta)$  y los versores  $\vec{u}_r := (\cos \theta, \sin \theta)$  y  $\vec{u}_{\theta} := (-\sin \theta, \cos \theta)$ . Notar que  $\vec{u}_r \perp \vec{u}_{\theta}$  y por consiguiente  $\mathcal{B} := \{\vec{u}_r, \vec{u}_{\theta}\}$  forma una base del espacio euclídeo 2-dimensional. Usaremos este hecho para representar distintos vectores como combinación lineal de vectores de la base. Los cálculos, como es ya habitual, se los dejaremos a SymPy.

Primero declaramos las variables y asignamos los vectores  $\vec{u}_r$ ,  $\vec{u}_{\theta}$  y el vector  $\vec{r}$  al que llamamos pos.

```

1>>> from sympy import *
2>>> init_printing()
3>>> var('t,mu')
4>>> x,y,r,theta=symbols('x,y,r,theta',cls=Function)
5>>> u_r=Matrix([cos(theta(t)),sin(theta(t))])
6>>> u_theta=Matrix([-sin(theta(t)),cos(theta(t))])
7>>> pos=r(t)*u_r

```

Como vamos a necesitar representar vectores en la base  $\mathcal{B} = \{\vec{u}_r, \vec{u}_{\theta}\}$ , construimos una matriz con los vectores de la base en las columnas.

```

1>>> M=u_r.row_join(u_theta)

```

Concretamente queremos representar el vector aceleración  $\vec{a} := \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$  en la base  $\mathcal{B}$ , para ello debemos resolver  $MX = \vec{a}$ , donde  $X$  y  $\vec{a}$  los asumimos vectores columna. Con SymPy lo hacemos en un periquete

**Función SymPy (linsolve).**

Resuelve un sistema  $Ax = b$

**Sintaxis** (documentación SymPy)

`linsolve((A, b), símbolos)`

( $A, b$ ) : tuple con la matriz y el término independiente del sistema.

símbolos: Muchas veces la solución no es única, en ese caso trata de representar la solución paramétricamente con los símbolos introducidos por símbolos.

Retorna: Un conjunto finito (tipo de datos de SymPy).

```

1 >>> alpha=symbols('alpha')
2 >>> a=linsolve ((M, pos.diff(t,2)),alpha )
3 >>> a=list(a) #convertimos de finite set a list
4 >>> a=a[0] #es una lista de tuples , sacamos el tuple
5 >>> a

```

$$\left\{ \left( -r(t) \frac{d}{dt} \theta(t)^2 + \frac{d^2}{dt^2} r(t), \quad r(t) \frac{d^2}{dt^2} \theta(t) + 2 \frac{d}{dt} r(t) \frac{d}{dt} \theta(t) \right) \right\}$$

Obtenemos así las dos componentes de  $\vec{a}$ .

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2\dot{\theta}) \end{pmatrix}$$

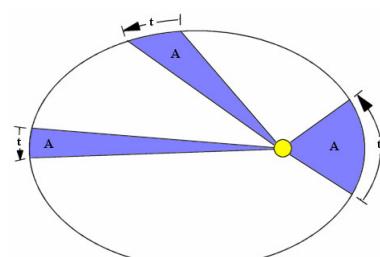
El vector aceleración debe ser igual a la fuerza por unidad de masa  $-\mu \vec{r}/r^3$ . Notemos que esta fuerza es central, es decir tiene componente nula respecto al vector  $\vec{u}_\theta$ . Por consiguiente se debe satisfacer que

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2\dot{\theta}) = 0 \iff \exists h \in \mathbb{R} : [r^2\dot{\theta} = h].$$

Hemos derivado la Segunda Ley de Kepler:  
El radio vector barre áreas iguales en tiempos iguales.

En la dirección radial  $\vec{u}_r$ , la componente de la fuerza es  $-\mu/r^2$ . Es decir se satisface la ecuación

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{\mu}{r^2}$$



Notar que esta ecuación entraña dos incógnitas  $r$  y  $\dot{\theta}$ , pero  $\dot{\theta}$  puede ser remplazado por  $h/r^2$  por la Segunda Ley de Kepler. Declaramos la variable  $h$  que juega un rol importante y reemplazaremos  $\dot{\theta}$  en la ecuación

```

1 >>> var('h')
>>> ed=(a[0]).subs((theta(t)).diff(t),h/r(t)**2)
3 >>> ed+=mu/r(t)**2

```

Resulta

$$-\frac{h^2}{r^3(t)} + \frac{\mu}{r^2(t)} + \frac{d^2}{dt^2}r(t) = 0.$$

Conseguimos una ecuación no lineal de segundo orden para  $r$ . De los métodos que hemos visto, ninguno se aplica a esta ecuación. El truco mágico consiste en considerar la nueva variable dependiente  $z = 1/r$  y la nueva variable independiente  $\theta$ .

```

1 >>> z=Function('z')(theta(t))
>>> r=1/z
3 >>> ed2=r.diff(t,2)+mu/r**2-h**2/r**3
>>> ed2

```

Se obtiene

$$0 = -h^2 z^3(\theta(t)) + \mu z^2(\theta(t)) + \frac{1}{z^2(\theta(t))} \left( -\frac{d}{dt} \theta(t)^2 \frac{d^2}{d\theta(t)^2} z(\theta(t)) \right. \\ \left. - \frac{d^2}{dt^2} \theta(t) \frac{d}{d\xi_1} z(\xi_1) \Big|_{\xi_1=\theta(t)} + \frac{2 \frac{d}{dt} \theta(t)^2}{z(\theta(t))} \frac{d}{d\xi_1} z(\xi_1) \Big|_{\xi_1=\theta(t)} \right)$$

En la complicada ecuación resultante nuevamente aparece  $\theta'$  y además ahora aparece  $\theta''$ . Tenemos que reemplazar  $\theta'$  por  $hz^2$  y  $\theta''$  por  $\frac{d}{dt}hz^2$ .

```

2 >>> theta2diff=(h*z**2).diff(t).subs(theta(t).diff(t),h*z**2)
>>> ed3=ed2.subs({theta(t).diff(t):h*z**2,theta(t).diff(t,2):theta2diff})
3 >>> ed4=(ed3/z**2/h**2).expand()
4 >>> ed4

```

Resulta

$$-z(\theta(t)) - \frac{d^2}{d\theta(t)^2} z(\theta(t)) + \frac{\mu}{h^2} = 0.$$

La ecuación del oscilador armónico. Sabemos resolver esta ecuación y S también!!

```

2 >>> var('theta')
>>> z=Function('z')(theta)
3 >>> ed5=ed4.subs(theta(t),theta)
4 >>> dsolve(ed5,z).simplify()

```

Obtenemos

$$z(\theta) = C_1 \sin(\theta) + C_2 \cos(\theta) + \frac{\mu}{h^2}.$$

Ahora si escribimos  $C_1 = \rho \cos \omega$  y  $C_2 = -\rho \sin \omega$  y recordamos que  $z = 1/r$ , deducimos

$$r = \frac{1}{\frac{\mu}{h^2} + \rho \sin(\theta - \omega)}$$

Llamando  $p = \frac{h^2}{\mu}$  y  $e = \frac{\rho h^2}{\mu}$

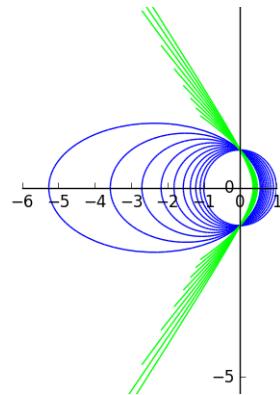
$$r = \frac{p}{1 + e \sin(\theta - \omega)} \quad (5.34)$$

**Ejercicio:** La ecuación (5.34) es la ecuación de una cónica con foco en el origen y excentricidad  $e$ . Recordemos que la variable  $\theta$  es el ángulo polar. Hagamos algunos gráficos para distintas excentricidades.

```

1 from sympy.plotting import plot_parametric
2 """ Gráfico de excentricidades menores a uno """
3 cant=20
4 e_s=[.04*j for j in range(cant)]
e=e_s[0]
5 p=plot_parametric(1/(1+e*cos(theta))*cos(theta),\
                     1/(1+e*cos(theta))*sin(theta),\
                     (theta ,0 ,6.28 ),show=False)
6
7
8
9
10 for e in e_s[1:]:
11     p1=plot_parametric(1/(1+e*cos(theta))*cos(theta),\
12                         1/(1+e*cos(theta))*sin(theta),\
13                         (theta ,0 ,6.28 ),show=False)
14     p.append(p1[0])
15
16 """ Gráfico de excentricidades mayores a uno """
17 e_s=[.04*j+1 for j in range(1,cant)]
18 for e in e_s:
19     p1=plot_parametric(1/(1+e*cos(theta))*cos(theta),\
20                         1/(1+e*cos(theta))*sin(theta),\
21                         (theta ,- pi*2/3 ,pi*2/3 ),show=False ,line_color
22                         =(0,1,0))
23     p.append(p1[0])
24
25 p.show()

```



Hemos logrado encontrar  $r$  como función de  $\theta$ . No obstante no hemos logrado resolver aún el problema de los dos cuerpos (5.33), para ello deberíamos encontrar  $\vec{r}(t)$ , es decir poner a  $\vec{r}$  como función de  $t$ . Esto nos serviría para decir que punto de la órbita ocupa el planeta en un dado momento. Este problema no lo desarrollaremos aquí dado que su solución se aparta del tema de las ecuaciones diferenciales.

## 5.8. Ecuaciones lineales de orden superior

**Definición 1** (Ecuación lineal general de orden  $n$ ).

Es una ecuación de la forma

$$y^{(n)}(x) + p_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + p_0(x)y(x) = r(x) \quad (5.35)$$

donde  $p_i, r, i = 0, \dots, n - 1$  son funciones definidas en un intervalo  $I$

Los resultados y técnicas que hemos desarrollado para ecuaciones de orden 2 se aplican con cambios previsibles a ecuaciones de mayor orden. Exponemos de manera sumaria estos resultados.

### 5.8.1. Existencia y unicidad de soluciones

**Teorema 1** (Teorema de existencia y unicidad de soluciones).

Supongamos  $p_i, r, i = 0, \dots, n-1$  continuas sobre  $I$ . Sean  $x_0 \in I$  e  $y_0, y_1, \dots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$  dados. Entonces existe una única solución del PVI

$$\begin{cases} y^{(n)}(x) + p_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + p_0(x)y(x) = r(x), & x \in I \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

### 5.8.2. Estructura del conjunto de soluciones

**Teorema 2** (Estructura conjunto de soluciones ecuaciones homogéneas).

Supongamos  $y_1, y_2, \dots, y_n$  soluciones linealmente independientes de

$$y^{(n)}(x) + p_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + p_0(x)y(x) = 0.$$

Entonces

$$y = c_1y_1 + \dots + c_ny_n, \quad c_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n,$$

es solución general. Vale decir, el conjunto de soluciones es un espacio vectorial  $n$ -dimensional.

**Teorema 3** (Estructura conjunto de soluciones ecuaciones no homogéneas).

Una solución general de la ecuación no homogénea

$$y^{(n)}(x) + p_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + p_0(x)y(x) = r(x),$$

es la suma de una solución particular de esta ecuación más una solución general de la ecuación homogénea asociada.

**Teorema 4** (Fórmula Abel).

Si  $y_1, y_2, \dots, y_n$  son soluciones de la ecuación homogénea

$$y^{(n)}(x) + p_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + p_0(x)y(x) = 0, \quad (5.36)$$

Entonces el Wronskiano satisface

$$W(y_1, \dots, y_n)(x) = W(y_1, \dots, y_n)(x_0)e^{-\int_{x_0}^x p_{n-1}(t)dt}. \quad (5.37)$$

En particular  $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  son linalmente independientes si y solo si  $W(x) \neq 0$  para todo  $x \in I$ .

**Dem.** Las demostraciones de los resultados anteriores es tan similar a su análogo de orden 2 que no vale la pena invertir tiempo en ellas. La demostración de la fórmula de Abel, si nos parece lo suficientemente interesante para dejarla como **ejercicio**.

### 5.8.3. Ecuaciones homogéneas con coeficientes constantes

Las ecuaciones lineales de orden  $n$ , homogeneas con coeficientes constantes se resuelven por métodos análogos a los considerados para ecuaciones de segundo orden. Se propone  $y(x) = e^{rx}$  como solución. Reemplazando esta función en (5.36) vemos que  $y$  sería solución si y solo si  $r$  es solución de la ecuación característica

$$r^n + p_{n-1}r^{n-1} + \dots + p_1r + p_0 = 0. \quad (5.38)$$

Ahora se presentan diversos casos.

#### Raíces reales distintas.

Si la ecuación característica (5.38) tiene  $n$  raíces  $r_1, \dots, r_n$  reales y distintas entonces  $y_1(x) = e^{r_1 x}, \dots, y_n(x) = e^{r_n x}$  son soluciones linealmente independientes y por ende

$$y(x) = c_1e^{r_1 x} + \dots + c_n e^{r_n x}$$

es solución general.

Dejamos como ejercicio la demostración de la independencia lineal. En lugar de usar el Wronskiano, se puede utilizar la siguiente idea basada en métodos operacionales. Denotemos por  $D$  el operador diferenciación, esto es  $D$  es sencillamente la función definida sobre el conjunto de funciones diferenciables sobre un intervalo abierto y que actúa derivando, esto es  $Dy = y'(x)$ . Dado un polinomio  $p(X) = p_n X^n + p_{n-1} X^{n-1} + \dots + p_1 X + p_0$ ,  $p_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 0, \dots, n$ , denotamos por  $p(D)$  el operador definido por

$$p(D)y = p_n y^{(n)} + p_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + p_1 y' + p_0 y.$$

Diremos que  $p(D)$  es un *operador diferencial polinomial*.

**Ejercicio 1** Dado que dos polinomios se pueden sumar y multiplicar, resultando estas operaciones en un nuevo polinomio, es posible hacer lo propio con operadores diferenciales polinomiales. Demostrar que el producto de dos de tales operadores  $p(D)$  y  $q(D)$  es commutativo. Esta propiedad es lo mismo que afirmar que el producto de polinomios es commutativo. Analizar que ocurriría si permitiésemos que los coeficientes  $p_i$  fuesen funciones de  $x$ ,  $p_i = p_i(x)$ .

**Ejercicio 2** Supongamos ahora que  $r_1, \dots, r_n$  son números reales distintos y que

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + \dots + c_n e^{r_n x}.$$

Considerar el operador diferencial

$$p(D) = (D - r_1) \cdots (D - r_{i-1})(D - r_{i+1}) \cdots (D - r_n).$$

Demostrar que

$$p(D)y = (r_i - r_1) \cdots (r_i - r_{i-1})(r_i - r_{i+1}) \cdots (r_i - r_n) e^{r_i x}.$$

Deducir de esto la independencia lineal de  $\{e^{r_1 x}, \dots, e^{r_n x}\}$ .

### Raíces reales repetidas.

Supongamos que la ecuación característica (5.38) tiene raíces reales repetidas. Sean  $r_1, \dots, r_k$  las raíces distintas y  $m_j$  la multiplicidad de la raíz  $r_j$ . Por cada raíz  $r_j$  considerar las  $m_j$  funciones

$$\mathcal{B}_j := \{y_j^0(x) = e^{r_j x}, y_j^1(x) = x e^{r_j x}, \dots, y_j^{m_j-1}(x) = x^{m_j-1} e^{r_j x}\}.$$

**Ejercicio 3** Demostrar que  $\mathcal{B} := \mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_k$  forma un conjunto de  $n$  soluciones linealmente independientes.

### Raíces complejas.

Supongamos que la ecuación característica (5.38) tiene raíces complejas. Como la ecuación característica tiene coeficientes reales, las raíces aparecen de a pares conjugados  $\mu \pm \nu i$ . Si las raíces son simples por cada uno de estos pares hay que considerar las soluciones

$$e^{\mu x} \cos x \quad y \quad e^{\mu x} \sin x.$$

Si son múltiples con multiplicidad  $k$  hay que considerar las  $2k$  soluciones

$$x^0 e^{\mu x} \cos x, \dots, x^{k-1} e^{\mu x} \cos x \quad y \quad x^0 e^{\mu x} \sin x, \dots, x^{k-1} e^{\mu x} \sin x.$$

Dejamos los detalles que es necesario completar como trabajo práctico.

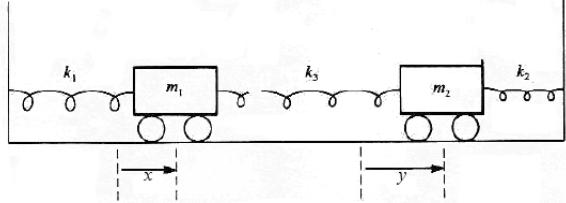
### 5.8.4. Aplicación: osciladores armónicos acoplados

Supongamos dos masas  $m_1$  y  $m_2$  sujetas a dos puntos fijos por sendos resortes y, a su vez, unidas entre si por un tercer resorte.

Vamos a medir la posición de las masas desde orígenes distintos situados en los respectivos puntos de equilibrio. Por consiguiente las posiciones  $x$  e  $y$  de las masas representan también su desplazamiento desde el equilibrio. Utilizando la segunda ley de Newton, la Ley de Elasticidad de Hooke y tomando en consideración que el resorte central está desplazado desde su estado de equilibrio en una cantidad igual a  $y - x$ , vemos que se debe satisfacer que

$$\begin{cases} m_1x''(t) = -k_1x + k_3(y - x) \\ m_2y''(t) = -k_3(y - x) - k_2y \end{cases} \quad (5.39a)$$

$$(5.39b)$$



Se nos presentó un sistema de ecuaciones de segundo orden. Vamos a poder convertirlo en una ecuación pagando el precio de incrementar el orden. El procedimiento es derivar (5.39a) (obviamente es lo mismo empezar por (5.39b)) dos veces respecto a  $t$ . En el resultado sustituímos  $y''$  por su igual según (5.39b). El resultado es una ecuación que todavía tiene la variable  $y$ , pero podemos usar (5.39a) para sustituir  $y$  por una expresión que sólo tiene  $x$  y sus derivadas. Todo esto lo haremos con SymPy.

```

1>>> from sympy import *
2>>> init_printing()
3>>> var('x,y,t,m1,m2,k1,k2,k3')
4>>> x,y=symbols('x,y',cls=Function)
5>>> eq1=m1*x(t).diff(t,2)+k1*x(t)-k3*(y(t)-x(t))
6>>> eq2=m2*y(t).diff(t,2)+k2*y(t)+k3*(y(t)-x(t))
7>>> sust1_=solve(eq2,y(t).diff(t,2))
8>>> sust2_=solve(eq1,y(t))
9>>> eq3=eq1.diff(t,2).subs({y(t).diff(t,2):sust1_, y(t):sust2_})

```

```
>>> eq3.expand().collect(x(t))
```

Obtenemos la ecuación de cuarto orden

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^4}{dt^4}x(t) + & \left( \frac{k_1 k_2}{m_2} + \frac{k_1 k_3}{m_2} + \frac{k_2 k_3}{m_2} \right) x(t) \\ & + \left( k_1 + \frac{k_2 m_1}{m_2} + \frac{k_3 m_1}{m_2} + k_3 \right) \frac{d^2}{dt^2}x(t) = 0. \end{aligned}$$

Vamos a suponer todos los parámetros igual a 1. Encontremos y resolvamos la ecuación característica

```
>>> eq4=eq3.subs({m1:1,m2:1,k1:1,k2:1,k3:1})  
2>>> eq4
```

$$3x(t) + 4\frac{d^2}{dt^2}x(t) + \frac{d^4}{dt^4}x(t) = 0.$$

```
>>> r=var('r')  
2>>> z=exp(r*t)  
3>>> eq5=eq4.subs({x(t):z,x(t).diff(t,4):z.diff(t,4),x(t).diff(t,2):z.  
4>>> diff(t,2)})/z  
>>> eq5.expand()
```

Las soluciones de la ecuación característica son *sol*.

```
>>> sol=solve(eq5,r)
```

Según lo que hemos dicho antes, la solución general será

$$x(t) = A \cos(t) + B \sin(t) + C \cos(\sqrt{3}t) + D \sin(\sqrt{3}t) \quad (5.40)$$

La solución es una superposición de ondas con frecuencias incommensurables. Decimos que dos magnitudes no nulas son incommensurables cuando su cociente es irracional.

¿Tendrá el sistema de osciladores acoplados soluciones periódicas? Notar que una superposición de funciones periódicas no necesariamente es periódica. La pregunta nos lleva a una pregunta más general. Si  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones periódicas de período  $T_1$  y  $T_2$ , será  $f + g$  periódica. La respuesta es el teorema de abajo.

### Teorema 5.

Si  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones no constantes, periódicas y continuas de período  $T_1$  y  $T_2$ , la función  $f + g$  será periódica si y sólo si  $T_1$  y  $T_2$  son commensurables.

*Demostración.* La demostración descansa sobre varios hechos, que poco tienen que ver con las ecuaciones diferenciales. Pero, el teorema nos parece tan interesante, que vamos a dar algunos detalles y otros los dejaremos como ejercicio.  $\square$

**Ejercicio** Sea  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función periódica y sea  $\mathfrak{P}$  el conjunto de todos los períodos. Entonces

1.  $\mathfrak{P}$  es un subgrupo aditivo de  $\mathbb{R}$ . Si  $F$  es continua  $\mathfrak{P}$  es cerrado.
2. Si  $\mathfrak{P}$  es cualquier subgrupo aditivo propio y cerrado de  $\mathbb{R}$  entonces  $\mathfrak{P}$  es un grupo cíclico, es decir existe  $a > 0$  con  $\mathfrak{P} = a\mathbb{Z}$ . Como corolario, si  $\mathfrak{P}$  es cualquier subgrupo aditivo cerrado propio y  $T_1, T_2 \in \mathfrak{P}$  entonces  $T_1$  y  $T_2$  son commensurables. *Ayuda:* Considerar

$$a := \inf\{x \in \mathfrak{P} : x > 0\}$$

Entonces si  $a > 0$ ,  $\mathfrak{P} = a\mathbb{Z}$  y si  $a = 0$ ,  $\mathfrak{P} = \mathbb{R}$ .

¿Qué ocurrirá si no suponemos  $\mathfrak{P}$  cerrado?

3. Demostrar el Teorema. *Ayuda:* Supongamos que  $f + g$  tiene período  $T > 0$ . Entonces:

$$F(x) := f(x + T) - f(x) = g(x) - g(x + T).$$

La función  $F$  tendrá períodos  $T_1$  y  $T_2$ .

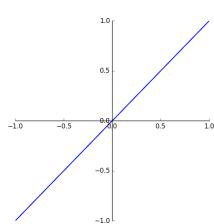
Retornando al oscilador armónico y a su solución general (5.40), el ejercicio anterior nos dice que la solución no será periódica, a menos que  $A = B = 0$  o  $C = D = 0$ . Estos casos especiales de soluciones se denominan modos normales. Usemos SymPy para encontrar y graficar algunos modos normales. Gráficaremos las soluciones sobre el espacio de configuraciones. Esto es decir que graficaremos las curvas  $t \mapsto (x(t), y(t))$  en  $\mathbb{R}^2$ .

#### Primer modo normal

```

1>>> var('A,B,C,D')
2>>> x=A*cos(t)+B*sin(t)+C*cos(sqrt(3)*t)+D*sin(sqrt(3)*t)
3>>> x1=x.subs({A:1,B:0,C:0,D:0})
4>>> y1=x1.diff(t,2)+2*x1
5>>> from sympy.plotting import *
6>>> plot_parametric(x1,y1,(t,0,10*pi))

```



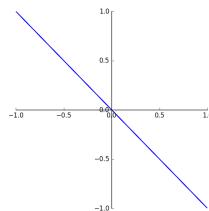
Los desplazamientos de las dos masas están sobre la recta  $y = x$ , vale decir las masas se mueven perfectamente en fase.

#### Segundo modo normal

```

1 >>> x1=x . subs ({A:0 ,B:0 ,C:1 ,D:0 })
2 >>> y1=x1 . diff (t ,2)+2*x1
3 >>> plot_parametric (x1 ,y1 ,(t ,0 ,10 *pi ))

```



Los desplazamientos de las dos masas están sobre la recta  $y = -x$ , vale decir las masas se mueven perfectamente fuera de fase. Cuando una alcanza el desplazamiento negativo menor la otra alcanza el mayor positivo.

#### Fuera de un modo normal

```

1 >>> x1=x . subs ({A:1 ,B:0 ,C:1 ,D:0 })
2 >>> y1=x1 . diff (t ,2)+2*x1
3 >>> plot_parametric (x1 ,y1 ,(t ,0 ,10 *pi ))

```

Se obtienen gráficas bonitas llamadas Curvas de Lissajous, que fuera de los modos normales llenan densamente un cuadrado del plano.

## 5.9. Métodos Operacionales

El denominado Método Operacional es una técnica iniciada por el ingeniero eléctrico Oliver Heaviside (1850-1925).

Hemos mencionado que una ecuación lineal de orden  $n$  con coeficientes constantes y no homogénea se puede pensar como

$$p(D)y = r(x), \quad (5.41)$$

donde  $p(D) = D^n + p_{n-1}D^{n-1} + \cdots + p_1D + p_0$  es un operador diferencial polinomial.

La idea central del método es proceder desde una manera puramente formal, para afirmar que si  $y$  resuelve (5.41) entonces

$$y = \frac{1}{p(D)}r(x), \quad (5.42)$$

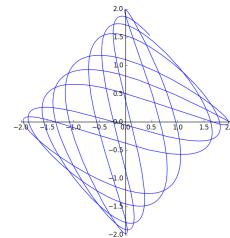


Figura 5.7: Curva de Lissajous

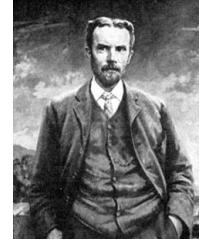


Figura 5.8: Oliver Heaviside

Esto no parece más que un juego de símbolos del que no se puede desprender nada interesante. Vamos a ver que no es ese el caso.

El símbolo  $1/p(D)$  debería ser interpretado como el operador inverso de  $p(D)$ . Por ejemplo, supongamos que  $p(D) = D$ . entonces  $p(D)y = y'$ . En este caso  $1/p(D)$  puede ser definido como

$$\frac{1}{p(D)}r = \int r(x)dx \quad (5.43)$$

Si tuviésemos  $p(D) = D - q$ ,  $q \in \mathbb{R}$ , entonces  $p(D)y = y' - qy$ . En este caso, teniendo en mente que  $y(x) = (1/p(D))r(x)$  debería resolver la ecuación lineal de primer orden  $y' - qy = r(x)$ , y por la fórmula explícita que obtuvimos para esta solución, es natural definir

$$\frac{1}{p(D)}r = e^{qx} \int e^{-qx}r(x)dx \quad (5.44)$$

### 5.9.1. Raíces simples

Supongamos ahora que  $p$  es un polinomio que se factoriza en monomios de primer orden

$$p(D) = (D - p_0) \cdots (D - p_k).$$

Siguiendo la línea de razonamiento anterior definimos

$$\frac{1}{p(D)}r = \frac{1}{D - p_0} \left( \frac{1}{D - p_1} \left( \cdots \frac{1}{D - p_k} (r) \cdots \right) \right) \quad (5.45)$$

**Problema.** Resolver  $y'' - 3y' + 2y = xe^x$ . Las cuentas las haremos con SymPy. Primero veamos si el polinomio se factoriza

```

1 >>> var('D')
>>> p=D**2-3*D+2
3 >>> p . factor()
```

Vemos que  $p(D) = (D - 2)(D - 1)$ . Ahora programemos la fórmula (5.44) y usemosla para resolver la ecuación.

```

1 >>> x=var('x')
>>> LinInv=lambda r,a: exp(a*x)* integrate(exp(-a*x)*r ,x)
3 >>> LinInv(LinInv(x*exp(x),1),2)
```

Dedujimos  $y = \frac{e^x}{2} (-x^2 - 2x - 2)$  es solución.

### Fracciones simples

Otra idea es descomponer  $1/p(D)$  en fracciones simples. Suponiendo  $p(D) = (D - p_0) \cdots (D - p_k)$ , con  $p_j$  raíces simples

$$\frac{1}{(D - p_0) \cdots (D - p_k)} = \left\{ \frac{A_0}{(D - p_0)} + \cdots + \frac{A_k}{(D - p_k)} \right\}.$$

Como cada término del miembro de la derecha lo tenemos definido, sólo tenemos que sumar cada uno de ellos. Reprocesemos con esta idea el ejemplo de antes. La función `apart` de `sympy` hace descomposiciones en fracciones simples. En el caso del operador  $p(D) = (D - 2)(D - 1)$  obtenemos descomposición en fracciones simples

```
>>> apart(1/p)
```

$$\frac{1}{p(D)} = -\frac{1}{D-1} + \frac{1}{D-2}.$$

Entonces la siguiente expresión debería darnos una solución

```
>>> LinInv(x*exp(x),2)-LinInv(x*exp(x),1)
```

Obviamente obtenemos la misma solución que obtuvimos antes.

### 5.9.2. Series

En algunas ocasiones es conveniente desarrollar en serie  $1/p(D)$ :

$$\frac{1}{p(D)} r(x) = (a_0 + a_1 D + a_2 D^2 + \cdots) r(x). \quad (5.46)$$

Por ejemplo cuando  $r$  es un polinomio, puesto que salvo una cantidad finita, todas las derivadas de orden  $k$  de  $r$  son cero.

**Ejemplo.** Resolver  $y''' + 2y'' + y = x^4 + 2x + 5$ . Como  $r$  es un polinomio de grado 4, desarrollemos en serie  $1/p(D)$  hasta ese orden

```
>>> L=1/(1+2*D**2+D**3)
>>> L.series(D,0,5)
```

Obtenemos

$$\frac{1}{p(D)} = \frac{1}{1 + 2D^2 + D^3} = 1 - 2D^2 - D^3 + 4D^4 + \mathcal{O}(D^5).$$

Ahora el siguiente código define el operador diferencial asociado a la expresión anterior

```
>>> coeficientes=[Q.diff(D,j).subs(D,0)/factorial(j) for j in range(5)]
2   def Q_op(f):
    return sum([coeficientes[j]*f.diff(x,j) for j in range(5)])
```

Evaluamos el segundo miembro de (5.46) en  $r(x) = x^4 + 2x + 5$ .

```
>>> Q_op(x**4+2*x+5)
```

Llegamos a la solución

$$y = x^4 - 24x^2 - 22x + 101$$



## Capítulo 6

# Ecuaciones lineales de segundo orden

### 6.1. Teorema de separación de Sturm

#### 6.1.1. Motivación

El objetivo de esta unidad es mostrar como se pueden estudiar propiedades de las soluciones de ecuaciones lineales de segundo orden sin resolver la ecuación diferencial. En particular estudiaremos propiedades de los ceros de las soluciones. Recordemos que denominamos cero de una función  $y$  a un punto  $x$  tal que  $y(x) = 0$ .

Veamos como se comportan los ceros de la ecuación  $y'' + ay = 0$ . Para ser más concretos consideremos el siguiente pvi asociado a esta ecuación.

$$\begin{cases} y'' + ay = 0, \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

Las soluciones acordes al valor de  $a$  son

$$y(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{|a|}} e^{\sqrt{|a|}x} - \frac{1}{2\sqrt{|a|}} e^{-\sqrt{|a|}x} & \text{cuando } a < 0 \\ x & \text{cuando } a = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{|a|}} \operatorname{sen}(\sqrt{a}x) & \text{cuando } a > 0 \end{cases} .$$

En la siguiente animación representamos los gráficos de las soluciones a medida que  $a$  varía desde  $-2$  hasta  $6$  de a saltos de  $0,1$ .

La separación entre ceros sucesivos de la solución disminuye a medida que  $a$  crece, la solución pasa de tener un único cero para  $a < 0$  a tener, cuando  $a > 0$ , infinitos separados una distancia de  $\pi/\sqrt{a}$ . Cuando  $a > 0$ , el número  $\sqrt{a}$  es la frecuencia circular de la solución sinusoidal  $y(x) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \operatorname{sen}(\sqrt{a}x)$ , por analogía la seguiremos denominando frecuencia para otros valores de  $a$ .

Vamos a desarrollar dos resultados principales, el Teorema de Separación de Sturm y el Teorema de Comparación de Sturm. Luego generalizaremos este último teorema al Teorema de Comparación de Sturm-Picone.

### 6.1.2. Teorema separación de Sturm

Nuestra investigación sobre los ceros de soluciones comienza con el siguiente teorema que muestra que los ceros de soluciones linealmente independientes alternan entre sí.

**Teorema 1** (Separación de Sturm).

Sean  $y_1$  e  $y_2$  soluciones linealmente independientes de

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0. \quad (6.1)$$

Entonces entre dos ceros consecutivos de  $y_2$  hay exactamente un cero de  $y_1$ .

*Dem.* Sean  $x_1$  y  $x_2$  ceros sucesivos de  $y_2$ . Podemos suponer  $y_2 > 0$  en  $(x_1, x_2)$ . Vamos a considerar el Wronskiano de las soluciones

$$W = y_1(x)y'_2(x) - y_2(x)y'_1(x),$$

que es no nulo por la independencia lineal y por lo tanto tiene siempre el mismo signo. En los puntos  $x_1$  y  $x_2$  tenemos  $W = y_1(x)y'_2(x)$ . Notar que

$$y'_2(x_1) = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{y_2(x_1 + h)}{h} \geq 0.$$

De manera similar deducimos  $y'_2(x_2) \leq 0$ . Por la invariancia del signo de  $W = y_1y'_2$  debe ocurrir que  $y_1(x_1)$  e  $y_1(x_2)$  tienen signos diferentes. Y por lo tanto  $y_1$  se debe anular en  $(x_1, x_2)$ .  $\square$

**Ejemplo 56.** Las funciones  $y_1(x) = c_1 \cos x + c_2 \sen x$  e  $y_2(x) = c_3 \cos x + c_4 \sen x$  son soluciones de la ecuación del oscilador armónico  $y'' + y = 0$ . Para que sean linealmente independientes se tiene que satisfacer que el Wronskiano  $W$  sea no nulo en todo punto. Evaluamos  $W$  en 0

$$W = \det \begin{pmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y'_1(0) & y'_2(0) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} c_1 & c_3 \\ c_2 & c_4 \end{pmatrix} = c_1c_4 - c_2c_3 \neq 0$$

Bajo este supuesto los ceros de  $y_1$  e  $y_2$  alternan. Veamos esta afirmación de manera directa, sin invocar el Teorema de Separación de Sturm. Como es costumbre escribamos

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \rho_1 \cos(x - \alpha_1), \quad \text{donde } c_1 = \rho_1 \cos \alpha_1 \text{ y } c_2 = \rho_1 \sen \alpha_1 \\ y_2(x) &= \rho_2 \cos(x - \alpha_2), \quad \text{donde } c_3 = \rho_2 \cos \alpha_2 \text{ y } c_4 = \rho_2 \sen \alpha_2. \end{aligned}$$

La condición  $c_1c_4 - c_2c_3 \neq 0$  equivale a la independencia lineal de los vectores  $(c_1, c_2)$  y  $(c_3, c_4)$  y esto último a que  $\alpha_1 - \alpha_2 \notin \mathbb{Z}$ . Por consiguiente los ceros de  $y_1$  e  $y_2$  alternaran como predice el Teorema.

### 6.1.3. Reducción a la ecuación normal

La ecuación general lineal de segundo orden (6.1) no es muy apropiada para el estudio que nos proponemos. Vamos a mostrar que podemos reducir aquella ecuación a una más simple que denominaremos *normal*.

#### Teorema 2.

Existe una función  $v$  tal que el cambio de variables  $y(x) = v(x)u(x)$  transforma la ecuación (6.1) en la ecuación

$$u'' + q(x)u = 0. \tag{6.2}$$

*Dem.*

```

1 >>> from sympy import *
>>> init_printing()
3 >>> x=var('x')
>>> u,v,P,Q=symbols('u v P Q',cls=Function)
5 >>> y=u(x)*v(x)
>>> eq=y.diff(x,2)+P(x)*y.diff(x)+Q(x)*y
7 >>> eq.expand().coeff(u(x).diff(x))
P(x)*v(x) + 2*Derivative(v(x), x)

```

Para que la ecuación lineal de segundo orden resultante no tenga el término con  $u'$  se debe cumplir que

$$P(x)v(x) + 2 \frac{d}{dx}v(x) = 0,$$

que es una ecuación lineal de primer orden para  $v$ , cuya solución general es  $v(x) = e^{-\int \frac{P}{2} dx}$ .  $\square$

Hallemos  $q$ .

```

2 >>> y=u(x)*exp(-Integral(P(x)/2,x))
>>> eq=y.diff(x,2)+P(x)*y.diff(x)+Q(x)*y
3 >>> eq=eq/exp(-Integral(P(x)/2,x))
4 >>> eq.simplify()

```

Obtenemos

$$\left[ -\frac{1}{4}P^2(x)u(x) + Q(x)u(x) - \frac{1}{2}u(x)\frac{d}{dx}P(x) + \frac{d^2}{dx^2}u(x) = 0 \right].$$

y por lo tanto

$$q = -\frac{1}{4}P^2(x) + Q(x) - \frac{1}{2}\frac{d}{dx}P(x).$$

**Ejemplo 57.** Un caso particular de importancia lo constituye la ecuación de Bessel

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - a^2)y = 0 \quad (6.3)$$

. La ecuación equivale a

$$u'' + \left( 1 + \frac{1 - 4a^2}{4x^2} \right) u = 0. \quad (6.4)$$

Notar que si  $v(x) \neq 0$ , entonces los ceros de la función  $u(x)$  e  $y(x) = v(x)u(x)$  son los mismos. De allí que, si nuestro objetivo es estudiar ceros de soluciones de ecuaciones lineales de segundo orden, podemos suponer que la ecuación viene dada en la forma normal (6.2).

Por analogía entre las ecuación a coeficientes constantes  $y'' + ay = 0$  y la ecuación con coeficientes variables (6.2), llamaremos a la función  $q(x)$  frecuencia. El objetivo que tenemos es ver si se observa un comportamiento similar entre las soluciones de la ecuación (6.2) y las de su contraparte a coeficientes constantes.

#### 6.1.4. Teorema de Comparación de Sturm

**Teorema 3.**

Sean  $q_i, i = 1, 2$ , continuas e  $y_i, i = 1, 2$ , soluciones de

$$y_i''(x) + q_i(x)y_i(x) = 0, \quad i = 1, 2.$$

Sean  $x_0$  y  $x_1$  ceros sucesivos de  $y_2$  y supongamos que  $q_2(x) \leq q_1(x)$  y  $q_2 \not\equiv q_1$  en  $[x_0, x_1]$ . entonces  $y_1$  tiene al menos un cero en  $(x_0, x_1)$ .

*Dem.* Por la linealidad de las ecuaciones y como  $x_0$  y  $x_1$  son ceros consecutivos, podemos suponer  $y_2 > 0$  en  $(x_0, x_1)$ . Supongamos que  $y_1$  no tiene ceros en  $(x_0, x_1)$ , entonces en virtud del Teorema de Bolzano,  $y_1$  no cambia de signo en  $(x_0, x_1)$  y por consiguiente podemos suponer también que  $y_1 > 0$  en  $(x_0, x_1)$ . Derivando el Wronskiano y usando las ecuaciones diferenciales que satisfacen  $y_1$  e  $y_2$

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dx} &= \frac{d}{dx}(y_1y_2' - y_1'y_2) \\ &= y_1y_2'' - y_1''y_2 \\ &= -q_2y_1y_2 + q_1y_1y_2 \\ &= (q_1 - q_2)y_1y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Integrando esta desigualdad, tomando en cuenta que  $q_1 \not\equiv q_2$  y que  $x_0$  y  $x_1$  son ceros de  $y_2$

$$0 < \int_{x_0}^{x_1} \frac{dW}{dx} dx = W(x_1) - W(x_0) = y_1(x_1)y_2'(x_1) - y_1(x_0)y_2'(x_0). \quad (6.5)$$

Por un razonamiento análogo al de la demostración del Teorema 1 debemos tener que  $y_2'(x_0) \geq 0$  e  $y_2'(x_1) \leq 0$ . Luego  $y_1(x_0)y_2'(x_0) \geq 0 \geq y_1(x_1)y_2'(x_1)$  que es una contradicción con (6.5).  $\square$

**Corolario 1.**

Si  $q \leq 0$  y  $q \not\equiv 0$  en el intervalo, acotado o no,  $I$  e  $y(x)$  es solución de  $y'' + q(x)y = 0$ , entonces  $y$  tiene a los sumo un cero en  $I$ .

*Dem.* Si  $y(x)$  tuviese dos ceros entonces podemos usar el Teorema de Comparación de Sturm con  $q_2 = q$ ,  $y_2 = y$ ,  $q_1 = 0$  e  $y_1 \equiv 1$  (notar que  $y_1$  resuelve  $z'' + q_1(x)z = 0$ ) y llegaríamos a que  $y_1$  debería anularse en algún punto. Esta contradicción demuestra el corolario.  $\square$

**Corolario 2.**

Si existe  $q_0 \in \mathbb{R}$  tal que  $q(x) \geq q_0 > 0$  en  $I = (a, +\infty)$  y si  $y(x)$  es solución de  $y'' + q(x)y = 0$ , entonces  $y$  tiene infinitos ceros en el intervalo no acotado  $(a, +\infty)$ . De hecho  $y$  tiene un cero en cualquier intervalo de longitud  $\pi/\sqrt{q_0}$ .

*Dem.* Evidentemente hay que usar el Teorema de Comparación de Sturm con la ecuación  $z'' + q_0 z = 0$ . La función  $z(x) = \cos(\sqrt{q_0}x - \alpha)$  es solución esta ecuación. La función  $z$  tiene ceros en  $k\frac{\pi}{\sqrt{q_0}} + \alpha$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Si  $[a, b]$  es cualquier intervalo de longitud  $\frac{\pi}{\sqrt{q_0}}$ , podemos elegir  $\alpha = a$  y entonces  $b$  será  $\frac{\pi}{\sqrt{q_0}} + \alpha$ . Por consiguiente  $y$  tiene un cero en  $[a, b]$ .  $\square$

**Corolario 3.**

Supongamos que  $q(x) \geq (1 + \varepsilon)/4x^2$ , para  $x > 0$ . Entonces toda solución de  $y'' + q(x)y = 0$  tiene infinitos ceros en  $(0, +\infty)$ . Más aún, hay una sucesión de ceros tendiendo a infinito y otra tendiendo a cero.

*Dem.* En la ecuación

$$\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{1 + \varepsilon}{4x^2}z = 0, \quad (6.6)$$

hagamos el cambio de variable dependiente  $z = y\sqrt{x}$ . Primero computemos las derivadas

$$\frac{dz}{dx} = \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{2}y + x^{\frac{1}{2}}\frac{dy}{dx}$$

y

$$\frac{d^2z}{dx^2} = -\frac{x^{-\frac{3}{2}}}{4}y + x^{-\frac{1}{2}}\frac{dy}{dx} + x^{\frac{1}{2}}\frac{d^2y}{dx^2} \quad (6.7)$$

Sustituyendo (6.7) y  $z = y\sqrt{x}$  en (6.6) obtenemos

$$0 = \frac{d^2z}{dx^2} + \frac{1 + \varepsilon}{4x^2}z = -\frac{x^{-\frac{3}{2}}}{4}y + x^{-\frac{1}{2}}\frac{dy}{dx} + x^{\frac{1}{2}}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1 + \varepsilon}{4x^2}x^{\frac{1}{2}}y = \boxed{\frac{\varepsilon}{4}x^{-\frac{3}{2}}y + x^{-\frac{1}{2}}\frac{dy}{dx} + x^{\frac{1}{2}}\frac{d^2y}{dx^2}}. \quad (6.8)$$

Ahora cambiemos la variable independiente por  $t = \ln x$ . Entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \frac{dy}{dt} = \boxed{e^{-t} \frac{dy}{dt}}. \quad (6.9)$$

y

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left( \frac{d}{dx} e^{-t} \right) \frac{dy}{dt} + e^{-t} \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dt} \right) = e^{-t} \left( -\frac{1}{x} \right) \frac{dy}{dt} + e^{-t} \frac{d^2y}{dt^2} \frac{1}{x} = -e^{-2t} \frac{dy}{dt} + e^{-2t} \frac{d^2y}{dt^2} = \boxed{e^{-2t} \left( -\frac{dy}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2} \right)}. \quad (6.10)$$

Sustituyendo (6.9) y (6.10) y  $x = e^t$  en (6.8)

$$0 = \frac{\varepsilon}{4} e^{-\frac{3}{2}t} y + e^{-\frac{3}{2}t} \frac{dy}{dt} + e^{-\frac{3}{2}t} \left( -\frac{dy}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2} \right) = \frac{\varepsilon}{4} e^{-\frac{3}{2}t} y + e^{-\frac{3}{2}t} \frac{d^2y}{dt^2}$$

Dividiendo por  $e^{-\frac{3}{2}t}$  vemos que  $y$  resuelve la ecuación del oscilador armónico

$$\boxed{\frac{\varepsilon}{4} y + \frac{d^2y}{dt^2} = 0}. \quad (6.11)$$

Confirmemos los cálculos con SymPy

```

1>>> from sympy import *
2>>> t=symbols('t')
3>>> y=Function('y')(t)
4>>> x=symbols('x')
5>>> z=y.subs(t,ln(x))*sqrt(x)
6>>> epsilon=symbols('epsilon')
7>>> eq=z.diff(x,2)+(1+epsilon)/4*x**2*z

```

Obtenemos

$$\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \left( \frac{\varepsilon}{4} + \frac{1}{4} \right) y(\log(x)) + \frac{1}{4x^{\frac{3}{2}}} \left( -y(\log(x)) + 4 \frac{d^2y}{d\xi_1^2} y(\xi_1) \Big|_{\xi_1=\log(x)} \right)$$

```

1>>> eq1=(eq*x**(-3.0/2)).subs(ln(x),t).simplify()
2>>> eq1

```

$$\boxed{\frac{\varepsilon}{4} y(t) + \frac{d^2y}{d\xi_1^2} y(\xi_1) \Big|_{\xi_1=t}}$$

Continuando con la demostración, observemos que como las soluciones de la ecuación del oscilador armónico (6.11) tienen infinitos ceros de la forma  $k\pi + \alpha$ , para  $k \in \mathbb{Z}$  y para algún  $\alpha \in \mathbb{R}$ , entonces  $z(x) = \sqrt{x}y(\ln(x))$  va a tener infinitos de la forma  $e^{k\pi+\alpha}$ .

Sea ahora  $y$  solución de  $y'' + q(x)y = 0$ . Si aplicamos el Teorema de Comparación de Sturm con  $q_2(x) = \frac{1+\varepsilon}{4x^2}$  y  $q_1 = q$ . Deducimos que entre los números  $e^\alpha(e^\pi)^k$  y  $e^\alpha(e^\pi)^{k+1}$ , para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$  y  $k \in \mathbb{Z}$ , hay siempre un cero de  $y$ , digamos  $e^\alpha(e^\pi)^k < x_{k,\alpha} < e^\alpha(e^\pi)^{k+1}$ . Ahora tomando  $\alpha = 0$  y  $k \rightarrow \infty$  obtenemos una sucesión  $x_{k,0}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , de ceros tendiendo a infinito. Tomando  $\alpha = 0$  y  $k \rightarrow -\infty$  obtenemos la sucesión  $x_{k,0}$ ,  $k = -1, -2, \dots$ , de ceros tendiendo a cero.  $\square$

**Corolario 4.**

Toda solución a la ecuación de Bessel (6.3) tiene infinitos ceros en  $(0, +\infty)$  que forman una sucesión  $x_n$  tal que  $x_{n+1} - x_n \rightarrow \pi$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .

*Dem.* Vamos a utilizar la ecuación (6.4) cuyas soluciones  $u$  tienen los mismos ceros que las respectivas de (6.3). Fijemos una de estas soluciones  $u(x)$ . Vamos a distinguir tres casos.

**Caso  $a = \frac{1}{2}$**  En este caso la ecuación se reduce a la ecuación del oscilador armónico  $u'' + u = 0$  y la afirmación es ya conocida. **Caso  $a < \frac{1}{2}$**  En esta situación  $1 + \frac{1-4a^2}{4x^2} > 1$  en  $(0, +\infty)$ . Luego por el Teorema de Comparación de Sturm, entre dos ceros de la solución  $z(x) = \operatorname{sen}(x - \alpha)$  de la ecuación  $z'' + z = 0$  tenemos un cero de  $u$ . Como  $\alpha$  es arbitrario, esto implica que  $u$  tiene infinitos ceros que distan entre sí menos de  $\pi$ . Ahora como  $(1 - 4a^2)/4x^2 \rightarrow 0$ , cuando  $x \rightarrow \infty$ , para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $x_0 > 0$  tal que  $(1 - 4a^2)/4x < \varepsilon$ , para  $x \geq x_0$ . Entonces en  $[x_0, +\infty)$  podemos usar el Teorema de comparación de Sturm, con  $q_2(x) = 1 + (1 - 4a^2)/4x^2$  y  $q_1(x) = 1 + \varepsilon$ ,  $y_2(x) = u(x)$  e  $y_1(x) = \operatorname{sen}(\sqrt{1+\varepsilon}x - \alpha)$ , que es solución de  $y'' + (1 + \varepsilon)y = 0$ . Concluimos que entre dos ceros de  $u$  hay siempre uno de  $y_1$ . Debe ocurrir entonces que dos ceros sucesivos de  $u$  en  $[x_0, +\infty)$  distan en más de  $\pi/\sqrt{1+\varepsilon}$ . De lo contrario, si  $a$  y  $b$  son ceros de  $u$  y  $b - a < \pi/\sqrt{1+\varepsilon}$ , entonces para  $\alpha = \sqrt{1+\varepsilon}a$ , la función  $y_1(x) = \operatorname{sen}(\sqrt{1+\varepsilon}x - \alpha)$  satisface  $y_1(a) = \operatorname{sen}0 = 0$ . Además el cero de  $y_1$  inmediato posterior al cero  $a$  es  $a + \pi/\sqrt{1+\varepsilon}$  que es mayor que  $b$ . Por consiguiente entre  $(a, a + \pi/\sqrt{1+\varepsilon})$  (y de allí en  $(a, b)$ )  $y_1$  no se anula, contradiciendo esto el Teorema de Comparación de Sturm.

**Caso  $a > \frac{1}{2}$**  Es esencialmente muy similar y queda como **ejercicio**.  $\square$

Ahora vamos a extender el Teorema de Comparación de Sturm a ecuaciones que, sin ser la ecuación general lineal de segundo orden, son más generales que (6.2). Concretamente, supongamos que  $p(x)$  es una función diferenciable y  $q(x)$  es continua en un intervalo  $I$ , entonces consideraremos ecuaciones del tipo

$$(p(x)y'(x))' + q(x)y(x) = 0. \quad (6.12)$$

**Lema 1** (Identidad de Picone).

Supongamos  $y, z$  dos veces diferenciables en  $I$  con  $z(x) \neq 0$  en  $I$ , y  $p_0, p_1$  diferenciables en  $I$ . Entonces

$$\left[ \frac{y}{z} (zp_0y' - yp_1z') \right]' = y(p_0y')' - \frac{y^2}{z}(p_1z')' + (p_0 - p_1)y'^2 + p_1 \left( y' - \frac{y}{z}z' \right)^2 \quad (6.13)$$

*Dem.*

```

2 x=var('x')
3 y,z,p0,p1=symbols('y,z,p0,p1',cls=Function)
4 eq1=(y(x)/z(x)*(z(x)*p0(x)*y(x).diff(x)-y(x)*p1(x)*z(x).diff(x))).diff()
5 eq2=y(x)*(p0(x)*y(x).diff(x)).diff(x)-y(x)**2/z(x)*(p1(x)*z(x).diff(x))
6 (p0(x)-p1(x))*(y(x).diff(x))**2+p1(x)*(y(x).diff(x)-y(x)/z(x)*z(x).diff(x))**2
7 eq1=eq1.expand()
8 eq2=eq2.expand()
9 eq1==eq2
True

```

□

**Teorema 4** (Teorema de comparación de Sturm-Picone).

Sean  $p_i, i = 1, 2$ , diferenciables y  $q_i, i = 1, 2$ , continuas sobre  $I$ , con  $0 < p_1(x) \leq p_0(x), q_0(x) \leq q_1(x)$  en  $I$ . Supongamos  $y_i, i = 1, 2$ , soluciones no triviales de las ecuaciones

$$(p_i(x)y'_i(x))' + q_i(x)y_i = 0, \quad i = 1, 2 \quad (6.14)$$

respectivamente. Entonces entre ceros consecutivos de  $y_0$  hay uno de  $y_1$ , a menos que  $p_0 \equiv p_1, q_0 \equiv q_1$  y que las funciones  $y_0$  e  $y_1$  sean linealmente dependientes.

*Dem.* Supongamos  $a$  y  $b$  ceros consecutivos de  $y_0$  y que  $y_1 \neq 0$  en  $(a, b)$ . Aplicando la identidad de Picone, con  $y = y_0, z = y_1$ , y las ecuaciones (6.14), que permiten

reemplazar  $(p_i y'_i)'$  por  $-q_i y_i$  en (6.13). Obtenemos

$$\left[ \frac{y_0}{y_1} (y_1 p_0 y'_0 - y_0 p_1 y'_1) \right]' = (q_1 - q_0) y_0^2 + (p_0 - p_1) y_0'^2 + p_1 \left( y'_0 - \frac{y_0}{y_1} y'_1 \right)^2$$

Ahora integramos esta desigualdad entre  $a$  y  $b$ , al ser estos puntos ceros de  $y_0$  obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b \left[ \frac{y_0}{y_1} (y_1 p_0 y'_0 - y_0 p_1 y'_1) \right]' dx \\ &= \int_a^b \left[ (q_1 - q_0) y_0^2 + (p_0 - p_1) y_0'^2 + p_1 \left( y'_0 - \frac{y_0}{y_1} y'_1 \right)^2 \right] dx \end{aligned}$$

Como por hipótesis el integrando es una función no negativa, entonces debe ser la función idénticamente nula y de allí cada término que lo compone es la función nula. Como  $y_i$ ,  $i = 1, 2$ , son no triviales, debemos tener que  $p_0 \equiv p_1$ ,  $q_0 \equiv q_1$  y que  $W(y_0, y_1) = -(y_1 y'_0 - y_0 y'_1) = 0$ , es decir  $y_0$  e  $y_1$  son linealmente independientes.  $\square$

## Capítulo 7

# Métodos de desarrollo en serie de potencias y en serie de Frobenius

### 7.1. Series de potencias

En esta sección recordamos algunos conceptos y teoremas sobre series de potencias. Dado que este tema es motivo de un estudio más profundo en otras materias de la licenciatura en matemática omitimos algunas demostraciones.

#### 7.1.1. Definición

**Definición 1.**

Una serie de potencias es una serie de la forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

donde  $a_n$ ,  $n = 0, 1, \dots$ ,  $z_0$  y  $z$  son elementos de  $\mathbb{C}$ .

Estamos interesados en determinar los valores de  $z$  para los cuales una serie converge.

**Ejemplo 58.** La serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n,$$

es una serie de potencias. Aquí  $a_n = 1$ ,  $n = 0, 1, \dots$  y  $z_0 = 0$ . Esta serie converge para  $|z| < 1$  a

$$\frac{1}{1-z}$$

y no converge para cualquier otro valor de  $z \in \mathbb{C}$ .

**Ejemplo 59.** Supongamos  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $I$  es un intervalo abierto  $I = (a, b)$  y que  $f$  tiene derivadas de todo orden en  $z_0 \in I$ . Entonces es posible construir la serie de Taylor de  $f$  en  $z_0$  que es una serie de potencias. Recordemos que esta serie es

$$S(f, z_0, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n.$$

### 7.1.2. Límites superior e inferior

#### Definición 2.

Dada una sucesión de números reales  $x_n$ , consideramos una nueva sucesión:

$$A_n = \sup\{x_n, x_{n+1}, \dots\}$$

La nueva sucesión de reales  $A_n$  es no creciente ( $A_n \geq A_{n+1}$ ), luego tiene un límite (puede ser  $\pm\infty$ ). A este límite lo llamamos *el límite superior de  $x_n$* . Lo denotamos por  $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$ . Es decir:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup\{x_n, x_{n+1}, \dots\}.$$

Tomando ínfimo en lugar de supremo conseguimos *el límite inferior* ( $\liminf$ ).

**Ejemplo 60.** Si  $x_n = (-1)^n$ , entonces

$$\{x_n, x_{n+1}, \dots\} = \{\pm 1, \mp 1, \pm 1, \dots\}.$$

El supremo de este conjunto es para todo  $n$  igual a 1 y el ínfimo igual a -1. Luego  $\liminf x_n = -1$  y  $\limsup x_n = 1$ .

**Ejemplo 61.** Si  $x_n = 1/n$ , si  $n$  es par y  $x_n = 1$  si  $n$  es impar, entonces el conjunto

$$\{x_n, x_{n+1}, \dots\}$$

tiene por supremo 1 y el ínfimo igual a 0. Luego  $\liminf x_n = 0$  y  $\limsup x_n = 1$ .

**Teorema 1.**

**Propiedades** Sea  $x_n$  e  $y_n$  dos sucesiones de números reales, entonces:

1. El  $\limsup x_n$  y el  $\liminf x_n$  existen si se permite que  $\pm\infty$  sean sus posibles valores.
2.  $\liminf x_n \leq \limsup x_n$ .
3.  $\liminf x_n = \limsup x_n$  si y solo si el  $\lim x_n$  existe. En este caso todos los límites coinciden.
4.  $\liminf(x_n + y_n) \geq \liminf x_n + \liminf y_n$ .
5.  $\limsup(x_n + y_n) \leq \limsup x_n + \limsup y_n$

**7.1.3. Radio de convergencia****Definición 3.**

Dada la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n,$$

definimos el *radio de convergencia*  $R$  de la siguiente forma:

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}.$$

**Ejemplo 62.** La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n,$$

tiene radio de convergencia:

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} 1^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1^{1/n} = 1$$

Luego  $R = 1$ .

**Ejemplo 63.** La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{M}\right)^n z^n,$$

tiene radio de convergencia:

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left( \left( \frac{1}{M} \right)^n \right)^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \left( \frac{1}{M} \right)^n \right)^{1/n} = \frac{1}{M}$$

Luego  $R = M$ .

**Ejemplo 64.** Fijemos  $M > 0$  y  $n$  un natural tal que  $[n/2] > M$  (aquí  $[x]$  es la parte entera de  $x$ ). Entonces, como  $n - [n/2] \geq [n/2] > M$

$$\begin{aligned} n! &= n(n-1) \cdots 1 > n(n-1) \cdots (n-[n/2]) \\ &> \underbrace{M \cdots M}_{[n/2]-\text{veces}} \\ &\geq M^{[n/2]} \\ &> M^{n/3} \end{aligned}$$

Luego

$$\frac{1}{R} := \limsup_{n \rightarrow \infty} (1/n!)^{1/n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{M^{n/3}} \right)^{1/n} = \frac{1}{\sqrt[3]{M}}$$

Como  $M$  es arbitrario, haciendo  $M \rightarrow \infty$  vemos que el radio de convergencia de la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$  es  $R = \infty$ .

### Teorema 2.

Supongamos que la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

tiene radio de convergencia  $R > 0$ . Entonces:

1. Si  $|z - z_0| < R$ , la serie converge absolutamente en  $z$ .
2. Si  $|z - z_0| > R$ , la serie diverge.
3. Si  $|z - z_0| = R$ , no se afirma nada.

*Dem.* Se puede suponer sin perdida de generalidad  $z_0 = 0$ . Supongamos  $0 < R < \infty$ . Sea  $L = 1/R$  y tomemos  $\varepsilon > 0$  pequeño. Como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \{|a_n|^{1/n}, |a_{n+1}|^{1/(n+1)}, \dots\} = L$$

para  $n_0$  suficientemente grande

$$\sup \{|a_n|^{1/n}, |a_{n+1}|^{1/(n+1)}, \dots\} < L + \varepsilon.$$

para  $n \geq n_0$ . Así

$$|a_n|^{1/n} < L + \varepsilon \quad \text{para } n \geq n_0.$$

Elijamos  $0 < r < 1/(L + \varepsilon) < 1/L = R$ . Si  $|z| < r$  entonces

$$|a_n||z|^n < (L + \varepsilon)^n r^n \quad \text{para } n \geq n_0.$$

Pero  $r(L + \varepsilon) < 1$ . La desigualdad de arriba y el teorema de comparación para series (notar que el miembro de la derecha forma una serie geométrica) implican que la serie converge absolutamente para este  $z$ . Esto implica la convergencia para cualquier  $|z| < R$ , ya que si  $|z| < R = 1/L$  existe  $\varepsilon > 0$  lo suficientemente chico para que  $|z| < 1/(L + \varepsilon)$ . Por el resultado ya demostrado la serie converge absolutamente para este  $z$ .  $\square$

**Ejercicio.**

Demostrar los casos  $R = 0$ ,  $R = \infty$  y el segundo inciso.

**Teorema 3.**

La función

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n,$$

es diferenciable dentro en  $\{z : |z - z_0| < R\}$ . Además

$$f'(z) = g(z) := \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1},$$

teniendo esta serie el mismo radio de convergencia que el de  $f$ .

*Dem.* Nuevamente supondremos  $z_0 = 0$ . La afirmación sobre el radio de convergencia es consecuencia de que  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/n} = 1$ . Como el radio  $R'$  de convergencia de  $g$  es:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R'} &= \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}(n+1)|^{1/(n+1)} \\ &\stackrel{\text{Ejercicio}}{=} \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}|^{1/(n+1)} \lim_{n \rightarrow \infty} |(n+1)|^{1/(n+1)} \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}|^{1/(n+1)} = \frac{1}{R} \end{aligned}$$

Ahora veamos que  $f' = g$ . Sea  $0 < r < R$ ,  $|z_0| < r$  y  $N \in \mathbb{N}$ . Pongamos:

$$f(z) = S_N(z) + E_N(z),$$

$$S_N(z) = \sum_{n=0}^N a_n z^n \quad \text{y} \quad E_N(z) = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n z^n$$

Tomemos  $|h| < r - |z_0|$ , así  $|z_0 + h| < r$ . Tenemos

$$\begin{aligned} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} - g(z_0) &= \frac{S_N(z_0 + h) - S_N(z_0)}{h} - S'_N(z_0) \\ &\quad + S'_N(z_0) - g(z_0) \\ &\quad + \frac{E_N(z_0 + h) - E_N(z_0)}{h} \end{aligned}$$

Ahora si  $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \left| \frac{E_N(z_0 + h) - E_N(z_0)}{h} \right| &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \left| \frac{(z_0 + h)^n - z_0^n}{h} \right| \\ &= \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| (|z_0|^{n-1} + |z_0|^{n-2}h + \dots + h^{n-1}) \\ &\leq 2 \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| n r^{n-1} < \varepsilon \end{aligned}$$

Para  $N$  suficientemente grande. Además como  $S'_N(z) \rightarrow g(z)$  cuando  $N \rightarrow \infty$  podemos elegir, a su vez,  $N$  suficientemente grande para que

$$|S'_N(z_0) - g(z_0)| < \varepsilon$$

Fijemos un  $N$  que satisfaga las condiciones anteriores. Ahora podemos encontrar  $\delta > 0$  para que  $|h| < \delta$  cumpla que

$$\left| \frac{S_N(z_0 + h) - S_N(z_0)}{h} - S'_N(z_0) \right| < \varepsilon.$$

Esto muestra que  $f'(z_0) = g(z_0)$  y por consiguiente  $f$  es derivable.  $\square$

### Corolario 1.

Una serie de potencias es infinitamente diferenciable. Las sucesivas derivadas se obtienen derivando término a término la serie. El radio de convergencia se conserva.

**Ejemplo 65.** Hemos visto que la serie:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

tiene radio de convergencia infinito y por ende converge en  $\mathbb{C}$ . Ahora vemos que

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

Lo que nos dice que  $f$  resuelve la simple ecuación diferencial  $f'(z) = f(z)$ . La misma ecuación es resuelta por  $g(z) = e^z$ . Además  $f(0) = g(0) = 1$ . Por el Teorema de existencia y unicidad  $f(z) = g(z)$  para todo  $z$ . Hemos probado la importante fórmula.

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n \quad (7.1)$$

#### 7.1.4. Funciones analíticas

**Definición 4.**

Una función  $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  se dirá analítica si para cada  $z_0 \in \Omega$ , existe  $R > 0$  y  $a_n \in \mathbb{C}$ , tal que:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad \text{para } |z - z_0| < R$$

**Ejercicio.**

Si  $f$  es analítica tenemos la siguiente fórmula

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

para los coeficientes  $a_n$ .

**Teorema 4.**

**Operaciones entre series de potencias** Supongamos que  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  y  $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_0)^n$  son series de potencias con radio de convergencia mayor o igual a  $R > 0$ . Entonces  $f + g$  y  $fg$  son funciones analíticas que tienen por desarrollo en serie

$$(f + g)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)(z - z_0)^n$$

$$(fg)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) (z - z_0)^n,$$

y los radios de convergencia de las series anteriores es, al menos,  $R$ . Si  $g(z) \neq 0$  para  $|z - z_0| < R$  entonces  $f(z)/g(z)$  es analítica y se desarrolla por una serie de radio de convergencia al menos  $R$ . Es posible expresar los coeficientes del cociente en términos de los coeficientes del dividendo y divisor, pero no nos detendremos en ello.

## 7.2. Solución de EDO mediante series de potencias. Método coeficientes indeterminados

### 7.2.1. Método coeficientes indeterminados

Dada una EDO

$$(1) \quad F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (7.2)$$

queremos desarrollar en series de potencias la solución general a esta ecuación. El método que estudiaremos se denomina *método de los coeficientes indeterminados*. Consiste en proponer el desarrollo en serie de la solución

$$y(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots$$

reemplazar  $y(x)$  por este desarrollo en la ecuación (1) y tratar de resolver la ecuación resultante para los coeficientes (indeterminados)  $a_n$ . El método suele funcionar en algunas ecuaciones. Desarrollemos un ejemplo.

**Ejemplo 66.** Hallar el desarrollo en serie de la solución del siguiente pvi

$$\begin{cases} y' \\ y(0) \end{cases} = y \quad = 1$$

La solución, es bien sabido, es  $y(x) = e^x$ , pero pretendemos reencontrarla por el

método expuesto. Escribimos

$$\begin{aligned}y &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots \\y' &= a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + (n+1)a_{n+1}x^n + \cdots\end{aligned}$$

La igualdad  $y' = y$  implica que

$$\begin{aligned}a_1 &= a_0 \\a_2 &= \frac{a_1}{2} \\a_3 &= \frac{a_2}{3} \\&\vdots \\a_{n+1} &= \frac{a_n}{n+1}\end{aligned}$$

Si iteramos la fórmula  $a_{n+1} = a_n/(n+1)$ , obtenemos

$$a_n = \frac{1}{n}a_{n-1} = \frac{1}{n(n-1)}a_{n-2} = \cdots = \frac{1}{n(n-1)\cdots 1}a_0 = \frac{a_0}{n!}.$$

Pero  $a_0 = y(0) = 1$ . Luego

$$a_n = \frac{1}{n!} \quad (7.3)$$

```

1 a=symbols('a0:6')
2 x=symbols('x')
3 y=sum([a[i]*x**i for i in range(6)])
4 Ecua=y.diff(x)-y
5 Ecuaciones=[Ecua.diff(x,i).subs(x,0)/factorial(i) for i in range(6)]
6 Ecuaciones=Ecuaciones[:-1]+[a[0]-1]
7 a_sol=solve(Ecuaciones,a)
8 y.subs(a_sol)

```

Vemos que la solución es

$$y(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720} + \cdots \quad (7.4)$$

### 7.2.2. Relaciones de recurrencia

La expresión  $a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1}$  es un ejemplo de relación de recurrencia.

**Definición 1.**

Una relación de recurrencia para una sucesión  $b_n$  de números reales es una sucesión de funciones  $f_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  que relaciona  $b_{n+1}$  con los términos anteriores de la sucesión por medio de la expresión

$$b_{n+1} = f_n(b_1, \dots, b_n). \quad (7.5)$$

Resolver una relación de recurrencia es encontrar una fórmula explícita de  $b_n$  como función de  $n$ .

Hay técnicas y métodos para resolver relaciones de recurrencia que guardan analogías con técnicas y métodos de resolver ecuaciones diferenciales. No vamos a desarrollar este importante tema en este curso, sugerimos la correspondiente wiki en la wikipedia. Sólo agregamos que SymPy resuelve relaciones recurrentes a través del comando `rsolve`.

**Ejemplo 67.** Resolvamos con SymPy la sucesión de Fibonacci  $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ .

```
1 from sympy import *
2 n=symbols('n', integer=True)
3 y = Function('y')
4 f=Equality(y(n),y(n-1)+y(n-2))
5 rsolve(f,y(n))
```

El resultado es

$$a_n = C_0 \left( \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \right)^n + C_1 \left( \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \right)^n \quad (7.6)$$

Las constantes arbitrarias  $C_0$  y  $C_1$  aparecen porque una relación de recurrencia no tiene una única solución. Se dice que una relación de recurrencia tiene orden  $k$  o es de  $k$ -términos si el coeficiente  $a_n$  se expresa en función de los  $k$  anteriores. En general la solución general de una relación de recurrencia de  $k$ -términos tiene  $k$  constantes arbitrarias. Por consiguiente, si queremos una única solución debemos tener  $k$  relaciones extras. Usualmente esto se consigue dando los valores de los  $k$ -primeros términos  $a_0, \dots, a_k$ . Por ejemplo, en la sucesión de Fibonacci si pedimos  $a_0 = a_1 = 1$ .

```
1 C0,C1=symbols('C0,C1')
2 A=C0*(1/2+sqrt(5)/2)**n+C1*(1/2-sqrt(5)/2)**n
3 Cval=solve([A.subs(n,0)-1,A.subs(n,1)-1],[C0,C1])
4 Fib=A.subs(Cval)
5 [Fib.subs(n,i).expand() for i in range(10)]
```

Los primeros números de Fibonacci que

[1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55]

### 7.2.3. Serie binomial

Se puede utilizar el método de coeficientes indeterminados para encontrar desarrollos en serie de una función  $f$ . La técnica consiste en encontrar un pvi que satisfaga  $f$  y le aplicamos el método de coeficientes indeterminados a ese pvi.

**Ejemplo 68.** Encontrar el desarrollo en serie de la función

$$y(x) = (1 + x)^p \quad p \in \mathbb{R}$$

La función  $y(x)$  resuelve el pvi  $(1 + x)y'(x) = py$ ,  $y(0) = 1$ . apliquemos el método de coeficientes indeterminados a este pvi. Como

$$\begin{aligned} y &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots \\ y' &= a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + (n+1)a_{n+1}x^n + \cdots \end{aligned}$$

Tenemos

$$\begin{aligned} py &= pa_0 + pa_1x + pa_2x^2 + \cdots + pa_nx^n + \cdots \\ (1+x)y' &= a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + (n+1)a_{n+1}x^n + \cdots \\ &\quad + a_1x + 2a_2x^2 + 3a_3x^3 + \cdots + na_nx^n + \cdots \\ \hline 0 &= (1+x)y' - py = (a_1 - pa_0) + (a_1 + 2a_2 - pa_1)x + \cdots + ((n+1)a_{n+1} + na_n - pa_n)x^n + \cdots \end{aligned}$$

Tenemos la relación

$$a_{n+1} = \frac{(p-n)}{n+1}a_n.$$

Que es una relación de recurrencia de un sólo término. Estas relaciones se resuelven iterando la relación de manera sucesiva de modo de relacionar  $a_n$  con  $a_0$

$$a_n = \frac{(p-n+1)}{n}a_{n-1} = \frac{(p-n+1)(p-n+2)}{n(n-1)}a_{n-2} = \cdots = \frac{(p-n+1)(p-n+2)\cdots p}{n!}a_0.$$

Como  $a_0 = y(0) = 1$  vemos que

$$a_n = \frac{(p-n+1)(p-n+2)\cdots p}{n!}. \quad (7.7)$$

Si  $p \in \mathbb{N}$  entonces  $a_n = 0$  para  $n > p$ . Esto es claro, por otro lado, ya que en este caso  $(1+x)^p$  es un polinomio. Por la fórmula del binomio de Newton los coeficientes para  $p \in \mathbb{N}$  no son más que los coeficientes binomiales

$$a_n = \binom{p}{n}$$

Cuando  $p \in \mathbb{R}$  aún vamos a seguir denominado a  $a_n$ , dado por la fórmula (7.7), coeficiente binomial. La serie resultante se llama la serie binomial. Cuando  $p \in \mathbb{R} - \mathbb{N}$  es una serie infinita y no un polinomio. Notar que para  $p$  no entero positivo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|p-n|}{|n+1|} = 1$$

Luego la serie tiene radio de convergencia 1. Hemos demostrado así que vale la siguiente fórmula, que es una generalización de la fórmula binomial de Newton

$$(1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2!}x^2 + \cdots = 1 + \binom{p}{1}x + \binom{p}{2}x^2 + \cdots \quad (7.8)$$

Esta importante serie se denomina serie binomial.

```

1 a=symbols('a0:6')
2 x,p=symbols('x,p')
3 y=sum([a[i]*x**i for i in range(6)])
4 Ecu=(1+x)*y.diff(x)-p*y
5 Ecuaciones=[Ecu.diff(x,i).subs(x,0)/factorial(i) for i in range(6)]
6 Ecuaciones=Ecuaciones[:-1]+[a[0]-1]
7 a_sol=solve(Ecuaciones,a)
8 y.subs(a_sol)

```

$$y(x) = \frac{1}{6}(p-1)(p-2)px^3 + \frac{1}{2}(p-1)px^2 + px + 1 \quad (7.9)$$

#### 7.2.4. Oscilador armónico

**Ejemplo 69.** Consideremos la ecuación

$$y'' + \omega^2 y = 0.$$

Esta es una ecuación de segundo orden. Veamos si el método de coeficientes indeterminados nos lleva a la solución. Se tiene

$$\begin{aligned} \omega^2 y &= \omega^2 a_0 + \omega^2 a_1 x + \omega^2 a_2 x^2 + \cdots + \omega^2 a_n x^n + \cdots \\ y'' &= 2a_2 + 2 \cdot 3a_3 x + \cdots + (n+1)(n+2)a_{n+2}x^n + \cdots \\ 0 = y'' + \omega^2 y &= (\omega^2 a_0 + 2a_2) + (\omega^2 a_1 + 2 \cdot 3a_3)x + \cdots + (\omega^2 a_n + (n+1)(n+2)a_{n+2})x^n + \cdots \end{aligned}$$

Encontramos la relación de recurrencia de dos términos

$$a_{n+2} = -\frac{\omega^2 a_n}{(n+1)(n+2)}. \quad (7.10)$$

Notar que en este caso  $a_1$  y, obviamente,  $a_0$  no se relacionan con ningún coeficiente anterior. Por este motivo es de esperar que podamos elegir de manera arbitraria  $a_0$  y  $a_1$ . Esto está de acuerdo con el hecho que remarcamos antes de que en una relación de recurrencia de dos términos aparecen dos constantes arbitrarias y también está de

acuerdo con que la solución general de una ecuación de segundo orden tiene dos constantes arbitrarias. En este caso resolvemos la relación de recurrencia relacionando  $a_n$  con  $a_0$  cuando  $n$  es impar y con  $a_1$  cuando es par. Concretamente si  $n = 2k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$a_{2k} = -\frac{\omega^2}{2k(2k-2)}a_{2k-2} = \dots = (-1)^k \frac{\omega^{2k}}{(2k)!}a_0.$$

En cambio si  $n = 2k+1$  es impar

$$a_{2k+1} = -\frac{\omega^2}{(2k+1)2k}a_{2k-1} = \dots = (-1)^k \frac{\omega^{2k}}{(2k+1)!}a_1.$$

Agrupando los términos pares y los impares de la serie de potencias resultante queda

$$\begin{aligned} y(x) &= a_0 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k)!} (\omega x)^{2k} + \frac{a_1}{\omega} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} (\omega x)^{2k+1} \\ &= a_0 \cos \omega x + \frac{a_1}{\omega} \sin \omega x \end{aligned}$$

(7.11)

La última igualdad es conocida de las asignaturas de análisis. Es fácil verificar, lo dejamos de ejercicio, que las series involucradas tienen radio de convergencia infinito.

Podemos hacer los cálculos anteriores con SAGE

```

1 a=symbols('a0:10')
2 orden=10
3 x,omega=symbols('x,omega')
4 y=sum([a[i]*x**i for i in range(orden)])
5 Ecua=y.diff(x,2)+omega**2*y
6 Ecuaciones=[Ecua.diff(x,i).subs(x,0)/factorial(i) for i in range(orden)]
7 Ecuaciones=Ecuaciones[:-2]
8 a_sol=solve(Ecuaciones,a[2:])
y.subs(a_sol)

```

### 7.2.5. Ecuación de Legendre. Primera aproximación

**Ejemplo 70.** Consideremos la ecuación de Legendre.

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + p(p+1)y = 0, \quad (7.12)$$

donde  $p > 0$ . Esta ecuación aparece en muchas aplicaciones, por ejemplo en muchos problemas que involucran funciones definidas en esferas, como es el caso de los modos normales de vibración de una esfera y en problemas de potenciales esféricos

$$\begin{aligned}
 p(p+1)y &= p(p+1)a_0 + p(p+1)a_1x + p(p+1)a_2x^2 + \cdots + p(p+1)a_nx^n + \cdots \\
 -2xy' &= -2a_1x - 4a_2x^2 - 6a_3x^3 + \cdots - 2na_nx^n + \cdots \\
 (1-x^2)y'' &= 2a_2 + 2 \cdot 3a_3x + \cdots + (n+1)(n+2)a_{n+2}x^n + \cdots \\
 &\quad - 2a_2x^2 - 2 \cdot 3a_3x^3 - \cdots - (n-1)na_nx^n - \cdots \\
 \hline
 0 &= (1-x^2)y'' - 2xy + p(p+1)y = (p(p+1)a_0 + 2a_2) + (p(p+1)a_1 - 2a_12 \cdot 3a_3)x + \cdots \\
 &\quad + ((p(p+1) - n(n+1))a_n + n(n+1)a_{n+2})x^n + \cdots
 \end{aligned}$$

Obtenemos la relación de recurrencia

$$a_{n+2} = -\frac{(p-n)(p+n+1)}{(n+1)(n+2)}a_n \quad (7.13)$$

Ahora vamos a dividir la serie en los términos pares e impares

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} x^{2k+1}$$

A cada una de estas series le podemos aplicar el criterio de la razón usando la fórmula de recurrencia de arriba. Por ejemplo para los términos pares

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_{2k+2}x^{2k+2}|}{|a_{2k}x^{2k}|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|p_0 - 2k||p_0 + 2k + 1|}{(2k+1)(2k+2)} |x|^2 = |x|^2$$

De modo que la serie tiene radio de convergencia 1. La misma situación ocurre con la serie de términos impares. Esto muestra que la serie en su conjunto también tiene radio de convergencia igual a 1. Era previsible que el radio de convergencia no fuese mayor a 1, pues la forma explícita de la ecuación de la ecuación de Legendre es

$$y'' - \frac{2x}{(1-x^2)}y' + \frac{p(p+1)}{(1-x^2)}y = 0.$$

Se observa que 1 y -1 son puntos singulares de la ecuación.

Podemos relacionar cualquier coeficiente de índice par  $a_{2k}$  con el  $a_0$  y cualquiera con índice impar  $a_{2k+1}$  con el  $a_1$ . Esto lo resolveremos con SymPy

```

1 a=symbols('a0:10')
2 orden=10
3 x,p=symbols('x,p')
4 y=sum([a[i]*x**i for i in range(orden)])
5 Ecua=(1-x**2)*y.diff(x,2)-2*x*y.diff(x)+p*(p+1)*y
6 Ecuaciones=[Ecua.diff(x,i).subs(x,0)/factorial(i) for i in range(orden)
7 ]
8 Ecuaciones=Ecuaciones[:-2]
9 a_sol=solve(Ecuaciones,a[2:])
10 {ind:a_sol[ind].factor() for ind in a[2:]}
```

$$\begin{aligned}
a_2 &= -\frac{a_0 p}{2} (p+1), \\
a_3 &= -\frac{a_1}{6} (p-1)(p+2), \\
a_4 &= \frac{a_0 p}{24} (p-2)(p+1)(p+3), \\
a_5 &= \frac{a_1}{120} (p-3)(p-1)(p+2)(p+4), \\
a_6 &= -\frac{a_0 p}{720} (p-4)(p-2)(p+1)(p+3)(p+5), \\
a_7 &= -\frac{a_1}{5040} (p-5)(p-3)(p-1)(p+2)(p+4)(p+6), \\
a_8 &= \frac{a_0 p}{40320} (p-6)(p-4)(p-2)(p+1)(p+3)(p+5)(p+7), \\
a_9 &= \frac{a_1}{362880} (p-7)(p-5)(p-3)(p-1)(p+2)(p+4)(p+6)(p+8).
\end{aligned}$$

En general

$$a_{2n} = \frac{(p+1)(p_0+3) \cdots (p+2n-1) \times p(p-2) \cdots (p-2n+2)}{(2n)!} a_0$$

y

$$a_{2n+1} = \frac{(p+2)(p+4) \cdots (p+2n) \times (p-1)(p-3) \cdots (p-2n+1)}{(2n+1)!} a_1$$

Podemos elegir  $a_0$  y  $a_1$  de manera arbitraria (esto está de acuerdo con que en una ecuación de orden 2 aparece 2 constantes de integración) y por las relaciones anteriores deducir el valor de los restantes  $a_n$ .

Un caso especial se plantea cuando  $p \in \mathbb{N}$ . En esa situación vemos que infinitos de los  $a_n$  resultan iguales a cero. De hecho una de las series, la de términos impares o la de términos pares acorde a que  $p$  sea par o impar respectivamente, se trunca. Supongamos que esto ocurre con la serie de términos impares, es decir  $p$  es entero positivo impar. Si ahora tomamos  $a_0 = 0$  toda la serie de términos pares se hará cero. Para  $a_1$  elijo algún valor no nulo y esto me garantiza que los términos impares son no nulos hasta el término  $a_n$ , pero a partir de allí también se hacen cero. Es usual elegir  $a_1$  para que  $y(1) = 1$ . Nos queda definida así una función polinómica que se denomina polinomio de Legendre y se denota por  $P_p$ . Cuando  $p$  es par hacemos una construcción análoga, quedando un polinomio  $P_p$ , con todas potencias pares, tal que  $P_p(1) = 1$ .

Todos estos cálculos los programamos en la siguiente función de SymPy. Esta función tiene un argumento  $n$  que debe ser un número natural y devuelve el correspondiente polinomio de Legendre.

```

2  def Legendre(n):
3      orden=n+2
4      a=symbols('a0:%s' %orden)
5      x=symbols('x')
6      y=sum([a[i]*x**i for i in range(orden)])

```

```

6   Ecua=(1-x**2)*y . diff(x , 2)-2*x*y . diff(x )+n*(n+1)*y
7   Ecuaciones=[Ecua . diff(x , i) . subs(x , 0)/factorial(i) for i in range(
8     orden -2)]
9   s=symbols('s')
10  if n%2==0:
11    Ecuaciones+=[a[0]-s , a[1]]
12  else:
13    Ecuaciones+=[a[0] , a[1]-s]
14  Sol_a_n=solve(Ecuaciones , a)
15  y=y . subs(Sol_a_n)
16  sol=solve(y . subs(x , 1)-1,s)
return y . subs(s , sol[0])

```

Esto es una función de Python. Se pueden copiar las líneas de arriba en una consola de Python, pero lo más usual es preparar un archivo aparte que luego se carga en una sesión de SymPy. Las sentencias para cargar el archivo son las dadas aquí debajo, donde hemos supuesto que el archivo se llama `Legendre.py` y está en el directorio `/home/fdmazzone/Git/Ecuaciones_Diferenciales/scripts`

```

import os
os.chdir('/home/fdmazzone/Git/Ecuaciones_Diferenciales/scripts')
from Legendre import Legendre

```

Con la ayuda de esta función podemos generar rápidamente una tabla de polinomios de Legendre

```

1 for n in range(1,6):
2   ...     Legendre(n)
3 ...
4 x
5 3*x**2/2 - 1/2
6 5*x**3/2 - 3*x/2
7 35*x**4/8 - 15*x**2/4 + 3/8
8 63*x**5/8 - 35*x**3/4 + 15*x/8

```

y graficarlos

```

2 for n in range(2,8):
3   ...     p1=plot(Legendre(n),(x,-1,1),show=False)
4   ...     p.append(p1[0])
5 ...
6 p.show()

```

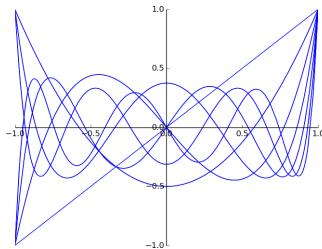


Figura 7.1: Polinomios de Legendre hasta el orden 8

### 7.3. Teorema fundamental sobre puntos ordinarios

**Definición 1.**

Dada la ecuación diferencial

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$$

donde  $p, q$  son funciones definidas en algún intervalo abierto  $I$ , diremos que  $x_0 \in I$  es un *punto ordinario* de la ecuación si  $p$  y  $q$  son analíticas en  $x_0$ . Un punto no ordinario se llama *singular*.

**Ejemplo 71.** En la ecuación del oscilador armónico

$$y'' + \omega^2 y = 0$$

todo punto es ordinario.

**Ejemplo 72.** En la ecuación de Legendre

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + p(p+1)y = 0$$

1 y -1 son puntos singulares, otros valores de  $x$  son puntos ordinarios.

Antes de ir al Teorema más importante de esta sección vamos a enunciar un lema que nos resultará útil.

**Lema 1.**

**Comparación.** Supongamos que tenemos una relación de recurrencia

$$a_n = f_n(a_0, \dots, a_{n-1}) \quad n \geq 2 \quad (7.14)$$

donde las funciones  $f_n$  son crecientes respecto a sus todas las variables. Si la sucesión  $\{a_n\}$  resuelve (7.14), la sucesión  $\{b_n\}$  resuelve la desigualdad

$$b_n \leq f_n(b_0, \dots, b_{n-1}) \quad n \geq 2$$

y además vale que  $b_0 \leq a_0$  y  $b_1 \leq a_1$ , entonces  $b_n \leq a_n$  para todo  $n = 2, 3, \dots$ . En particular la afirmación se satisface cuando  $f_n$  es lineal con coeficientes positivos, es decir  $f_n(a_0, \dots, a_{n-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k^n a_k$ , con  $\alpha_k^n \geq 0$  para  $k = 0, \dots, n - 1$ .

*Dem.* Es muy sencilla y la dejamos de ejercicio (evidentemente hay que utilizar el principio de inducción).  $\square$

**Teorema 1.**

**Teorema Fundamental Sobre Puntos Ordinarios.** Sea  $x_0$  un punto ordinario de la ecuación

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$$

y sean  $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ . Existe una solución de la ecuación que es analítica en un entorno de  $x_0$  y que satisface  $y(x_0) = a_0$  e  $y'(x_0) = a_1$ . El radio de convergencia del desarrollo en serie de  $y$  es al menos tan grande como el mínimo de los radios de convergencia de los desarrollos en serie de  $p$  y  $q$ .

*Dem.* Supongamos, sin perder generalidad, que  $x_0 = 0$ . Consideremos que los desarrollos en serie de potencias de  $p$  y  $q$ .

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \quad y \quad q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n. \quad (7.15)$$

Supongamos que ambas series convergen en  $|x| < R$ , para cierto  $R > 0$ . Vamos a aplicar el método de coeficientes indeterminados. Tenemos

$$\begin{aligned} y &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots \\ y' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1} x^n = a_1 + 2a_2 x + \cdots + (n+1)a_{n+1} x^n + \cdots \\ y'' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)a_{n+2} x^n = 2a_2 + 2 \cdot 3a_3 x + \cdots + (n+1)(n+2)a_{n+2} x^n + \cdots. \end{aligned}$$

Por el Teorema 4

$$\begin{aligned} q(x)y &= \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n a_k q_{n-k} \right) x^n, \\ p(x)y' &= \left( \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1} x^n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n (k+1)a_{k+1} p_{n-k} \right) x^n. \end{aligned}$$

Sustituyendo estos, y los anteriores, desarrollos en la ecuación, obtenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ (n+1)(n+2)a_{n+2} + \sum_{k=0}^n a_k q_{n-k} + \sum_{k=0}^n (k+1)a_{k+1} p_{n-k} \right\} x^n.$$

De esta forma deducimos la ecuación de recurrencia que se satisface en una ecuación lineal general de segundo orden en un punto ordinario.

$$a_{n+2} = -\frac{\sum_{k=0}^n \{a_k q_{n-k} + (k+1)a_{k+1} p_{n-k}\}}{n(n+1)} \quad (7.16)$$

Dados los coeficientes  $a_0$  y  $a_1$  la relación de recurrencia determina los  $a_n$ ,  $n \geq 2$ . Queda ver que la serie así definida tiene radio de convergencia al menos  $R$ .

Tomemos  $r$  tal que  $0 < r < R$ . Como las series (7.15) tienen radio de convergencia al menos  $R$ , convergen absolutamente para  $x = r$ . El criterio de convergencia de series conocido como criterio del resto implica que  $p_n r^n$ ,  $q_n r^n$  son sucesiones que tienden a 0. En particular están acotadas, y por ello existe  $M > 0$  tal que

$$|p_n|r^n, |q_n|r^n \leq M.$$

Tomando módulo en (7.16) y usando las desigualdades de arriba concluimos

$$\begin{aligned} |a_{n+2}| &\leq \frac{M}{(n+1)(n+2)r^n} \sum_{k=0}^n (|a_k| + (k+1)|a_{k+1}|) r^k \\ &\leq \frac{M}{(n+1)(n+2)r^n} \sum_{k=0}^n (|a_k| + (k+1)|a_{k+1}|) r^k + \frac{M|a_{n+1}|r}{(n+1)(n+2)}. \end{aligned}$$

En la última desigualdad se agregó un término en apariencia por capricho, pero este término nos servirá para complementar una expresión en el futuro. Definamos la sucesión  $b_n$  como la solución de la siguiente relación de recurrencia

$$b_{n+2} = \frac{M}{(n+1)(n+2)r^n} \sum_{k=0}^n (b_k + (k+1)b_{k+1}) r^k + \frac{Mb_{n+1}r}{(n+1)(n+2)}, \quad (7.17)$$

con las condiciones iniciales  $b_0 = |a_0|$  y  $b_1 = |a_1|$ . Por el Lema 1 tenemos que  $|a_n| \leq b_n$  para todo  $n$ . Aplicando (7.17) a  $n-1$  en lugar de  $n$

$$b_{n+1} = \frac{M}{n(n+1)r^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} (b_k + (k+1)b_{k+1}) r^k + \frac{Mb_nr}{n(n+1)}, \quad (7.18)$$

Multiplicando (7.17) por  $r$  y usando 7.18

$$\begin{aligned} rb_{n+2} &= \frac{M}{(n+1)(n+2)r^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} (b_k + (k+1)b_{k+1}) r^k \\ &\quad + \frac{Mr(b_n + (n+1)b_{n+1})}{(n+1)(n+2)} + \frac{Mb_{n+1}r^2}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n(n+1)b_{n+1} - Mb_nr}{(n+1)(n+2)} + \frac{Mr(b_n + (n+1)b_{n+1})}{(n+1)(n+2)} \\ &\quad + \frac{Mb_{n+1}r^2}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{(n(n+1) + Mr(n+1) + Mr^2)}{(n+1)(n+2)} b_{n+1}, \end{aligned}$$

Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|b_{n+2}x^{n+2}|}{|b_{n+1}x^{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n(n+1) + Mr(n+1) + Mr^2)|x|}{(n+1)(n+2)} \frac{|x|}{r} = \frac{|x|}{r}.$$

Luego la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$  converge para  $|x| < r$ . Como  $|a_n| \leq b_n$  la misma afirmación es cierta para  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ . Como  $r < R$  fue elegido arbitrariamente, tenemos que  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  converge en  $|x| < R$ .  $\square$

## 7.4. Puntos singulares, método de Frobenius

### 7.4.1. Series de Frobenius

**Definición 1.**

**Singularidades, Polos.** Sea  $f$  definida en un intervalo abierto  $I$  con valores en  $\mathbb{R}$ . Diremos que  $f$  posee un *polo de orden  $k$*  en  $x_0 \in \mathbb{R}$ , si la función  $(x - x_0)^k f(x)$  es analítica en un entorno de  $x_0$ . Vale decir que  $(x - x_0)^k f(x)$  se desarrolla en serie de potencias.

$$(x - x_0)^k f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n.$$

En consecuencia

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^{n-k} = \frac{a_0}{(x - x_0)^k} + \cdots + \frac{a_{k-1}}{(x - x_0)} + a_k + a_{k+1}(x - x_0) + \cdots.$$

Este tipo de desarrollo en serie es un caso particular de serie de Laurent.  
Cuando el orden de un polo es 1 se lo denomina *polo simple*.

**Definición 2.**

Un punto singular  $x_0$  de la ecuación

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$$

se llama singular regular si  $p(x)$  tiene un polo a lo sumo simple en  $x_0$  y  $q(x)$  tiene un polo a lo sumo de orden 2 en  $x_0$ . Es decir

$$(x - x_0)p(x) \quad \text{y} \quad (x - x_0)^2 q(x)$$

son analíticas en  $x_0$ .

Algunas de las ecuaciones más importantes de la Física-Matemática tienen puntos singulares regulares.

**Ejemplo 73.** 1 y -1 son puntos singulares regulares de la ecuación de Legendre de orden  $p$

$$y'' - \frac{2x}{1-x^2}y' + \frac{p(p+1)}{1-x^2}y = 0$$

**Ejemplo 74.** 0 es un punto singular regular de la ecuación de Bessel de orden  $p$

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{p^2}{x^2}\right)y = 0$$

El método de coeficientes indeterminados puede fallar en los puntos donde  $p$  y  $q$  tienen polos. En su lugar vamos a proponer otro tipo de desarrollo en serie. Lo vamos a motivar con un ejemplo.

**Ejemplo 75.** Consideremos la ecuación de Euler, para  $p, q \in \mathbb{R}$

$$y'' + \frac{p}{x}y' + \frac{q}{x^2}y = 0$$

o equivalentemente

$$x^2y'' + pxy' + qy = 0$$

Aquí es fácil verificar que las funciones

$$P(x) := \frac{p}{x} \quad \text{y} \quad Q(x) := \frac{q}{x^2}$$

satisfacen que

$$\frac{Q' + 2PQ}{Q^{\frac{3}{2}}} \quad \text{es constante.}$$

Cuando se daba esta condición, el ejercicio 6 de la página 102 del libro de Simmons nos enseña que podemos reducir la ecuación a una ecuación con coeficientes constantes por medio del cambio de la variable independiente

$$z = \int \sqrt{Q} dx$$

En este caso, obviando las constantes, el cambio de variables que debemos hacer es

$$z = \ln(x)$$

Aquí asumimos  $x > 0$ . Seguramente, a esta altura del curso, el alumno ya hizo los cálculos que muestran que la ecuación de Euler se transforma, por medio del cambio de variables propuesto, en la ecuación a coeficientes constantes

$$y'' + (p-1)y' + qy = 0.$$

Cuya ecuación característica es

$$\lambda^2 + (p-1)\lambda + q = 0$$

Resolviendo esta ecuación con SymPy

```

1 s,p,q=symbols('s,p,q')
2 Raices=solve(s**2+(p-1)*s+q,s)
3 Raices[0]
4 -p/2 - sqrt(p**2 - 2*p - 4*q + 1)/2 + 1/2
5 Raices[1]
6 -p/2 + sqrt(p**2 - 2*p - 4*q + 1)/2 + 1/2

```

Obtenemos las raíces

$$s_1 = -\frac{p-1}{2} - \frac{\sqrt{p^2 - 2p - 4q + 1}}{2} \quad y \quad s_2 = -\frac{p-1}{2} + \frac{\sqrt{p^2 - 2p - 4q + 1}}{2}.$$

Si  $s_1 \neq s_2$  dos soluciones linealmente independientes son:

$$y_1(z) = e^{s_1 z} \quad y \quad y_2(z) = e^{s_2 z}$$

Si  $s_1 = s_2$

$$y_1(z) = e^{s_1 z} \quad y \quad y_2(z) = ze^{s_1 z}$$

son soluciones linealmente independientes. Asumamos que las raíces  $s_1$  y  $s_2$  son reales, entonces como  $z = \ln(x)$ , las soluciones en términos de la variable  $x$  son

$$y_1(x) = x^{s_1} \quad y \quad y_2(x) = x^{s_2} \quad \text{para } s_1 \neq s_2$$

y

$$y_1(x) = x^{s_1} \quad y \quad y_2(x) = \ln(x)x^{s_1} \quad \text{para } s_1 = s_2$$

Estas funciones, a menos que  $s_1$  y  $s_2$  sean enteros positivos, ya no son analíticas en cero, pues una función analítica es derivable infinitas veces y claramente hay derivadas (o las mismas funciones si las raíces son negativas) de  $y_1$  e  $y_2$  que son discontinuas.

De modo que, como era de suponer, no podremos encontrar en general en un punto singular una solución analítica. Vamos a intentar flexibilizar nuestro método para incluir otro tipo de desarrollo en serie, que está inspirado en los resultados obtenidos para la ecuación de Euler.

### Definición 3.

A una expresión de la forma

$$y(x) = (x - x_0)^m (a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots),$$

donde  $m \in \mathbb{R}$  y  $a_0 \neq 0$ , lo llamaremos *Serie de Frobenius*.

Las series de Frobenius no son series de potencias ni de Laurent ya que en ellas aparecen potencias no enteras.

El método de Frobenius consiste en proponer como solución de una ecuación diferencial una serie de Frobenius. Este método tiene éxito, por ejemplo, en los puntos singulares regulares de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden.

**Ejemplo 76.** En este ejemplo ilustramos el método de Frobenius. Consideraremos la ecuación

$$y'' + \left(\frac{1}{2x} + 1\right)y' - \left(\frac{1}{2x^2}\right)y = 0. \quad (7.19)$$

Notar que  $x = 0$  es regular singular. Desarrollaremos el método de Frobenius, primero “a mano” y por último con SymPy.

Proponemos como solución

$$y(x) = x^m \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+m}$$

y calculamos

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2x^2}y &= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2} x^{m+n-2} = -\frac{a_0}{2} x^{m-2} - \frac{a_1}{2} x^{m-1} - \dots - \frac{a_{n+2}}{2} x^{m+n} - \dots \\ y' &= \sum_{n=0}^{\infty} (m+n)a_n x^{m+n-1} = ma_0 x^{m-1} + (m+1)a_1 x^m + \dots + (m+n+1)a_{n+1} x^{m+n} + \dots \\ \frac{1}{2x}y' &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(m+n)a_n}{2} x^{m+n-2} = \frac{ma_0}{2} x^{m-2} + \frac{(m+1)a_1}{2} x^{m-1} + \dots + \frac{(m+n+2)a_{n+2}}{2} x^{m+n} + \dots \\ y'' &= \sum_{n=0}^{\infty} (m+n)(m+n-1)a_n x^{m+n-2} \\ &= m(m-1)a_0 x^{m-2} + (m+1)ma_1 x^{m-1} + \dots + (m+n+2)(m+n+1)a_{n+2} x^{m+n} + \dots. \end{aligned}$$

Sumando las cuatro igualdades miembro a miembro y sustiyendo en (7.19)

$$\begin{aligned} 0 &= \left( -\frac{1}{2} + \frac{m}{2} + m(m-1) \right) a_0 x^{m-2} + \left( -\frac{a_1}{2} + ma_0 + \frac{(m+1)a_1}{2} + (m+1)ma_1 \right) x^{m-1} + \dots \\ &\quad + \left( -\frac{a_{n+2}}{2} + (m+n+1)a_{n+1} + \frac{(m+n+2)a_{n+2}}{2} + (m+n+2)(m+n+1)a_{n+2} \right) x^{m+n} + \dots \\ &= \frac{1}{2} (2m+1) (m-1) a_0 x^{m-2} + \frac{1}{2} (2a_0 + (1+2(m+1))a_1) mx^{m-1} + \dots \\ &\quad + \frac{1}{2} (2a_{n+1} + (2(m+n+2)+1)a_{n+2}) (m+n+1) x^{m+n} + \dots. \end{aligned}$$

Igualando a cero los coeficientes de cada exponente obtenemos las ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (2m+1) (m-1) a_0 &= 0 \\ \frac{1}{2} (2a_0 + (1+2(m+1))a_1) m &= 0 \\ &\vdots \\ (2a_{n+1} + (2(m+n+2)+1)a_{n+2}) (m+n+1) &= 0 \end{aligned} \tag{7.20}$$

Despejando de la última ecuación nos queda la relación de recurrencia de un término

$$a_{n+2} = -\frac{2a_{n+1}}{2(m+n+2)+1}. \tag{7.21}$$

Para llegar a esta igualdad debimos suponer  $2(m + n + 2) + 1 \neq 0$ . La primera de las ecuaciones en (7.20) es importante puesto que determina el valor de  $m$ . Se llama ecuación indicial. Vemos que si tomamos  $m = 1$  o  $m = -1/2$  se resuelve la primera ecuación. Supongamos  $m = 1$ . Entonces (7.21) se transforma en

$$a_{n+2} = -\frac{2a_{n+1}}{2n+7}, \quad n = -1, 0, \dots$$

Con ayuda de la relación de recurrencia podemos determinar el radio de convergencia de la serie sin necesidad de conocer el valor de los  $a_n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2|x|}{2n+7} = 0.$$

Por consiguiente el radio de convergencia es infinito. Iterando la relación de recurrencia llegamos

$$a_n = -\frac{2}{2n+3}a_{n-1} = \frac{2}{(2n+3)(2n+1)}a_{n-2} = \dots = \frac{(-1)^n 2^n}{(2n+3)(2n+1)\dots 5}a_0.$$

El valor de  $a_0$  determina al resto de los  $a_n$  y se puede elegir arbitrariamente. Supongamos que  $a_0 = 1$ . Hemos hallado la siguiente solución

$$y_1(x) = x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{(2n+3)(2n+1)\dots 5} x^n. \quad (7.22)$$

Cuando  $m = -\frac{1}{2}$ , la relación de recurrencia es

$$a_{n+1} = -\frac{a_n}{n+1}.$$

Por ende

$$a_n = -\frac{a_{n-1}}{n} = \frac{1}{n(n-1)}a_{n-2} = \dots = \frac{(-1)^n}{n!}a_0 = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Conseguimos la solución

$$y_2(x) = x^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n = \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \quad (7.23)$$

Estas dos soluciones son linealmente independientes. Para justificar esta afirmación basta ver que  $y_1(0) = 0$  y  $\lim_{x \rightarrow 0^+} y_2(x) = +\infty$ . Estas igualdades hacen imposible la relación  $c_1 y_1 + c_2 y_2 = 0$  a menos que  $c_1 = c_2 = 0$ .

Resolvamos el ejemplo con SymPy.

```
2 orden=5
a=symbols('a0:%s' % orden)
x,m=symbols('x,m')
```

```

4 y=x**m*sum([a[i]*x**i for i in range(orden)])
5 Ecua=y.diff(x,2)+(1/(2*x)+1)*y.diff(x,1)-(1/(2*x**2))*y
6 #Dividimos por m-2 asi todos los exponentes son enteros positivos
7 Ecua=Ecua/x**(m-2)
8 Ecua=Ecua.expand()
9 Ecuaciones=[Ecua.diff(x,i).subs(x,0)/factorial(i) for i in range(orden)]
10 for ec in Ecuaciones:
11     ...
12     ec
13 ...
14 a0*m**2 - a0*m/2 - a0/2
15 a0*m + a1*m**2 + 3*a1*m/2
16 a1*m + a1 + a2*m**2 + 7*a2*m/2 + 5*a2/2
17 a2*m + 2*a2 + a3*m**2 + 11*a3*m/2 + 7*a3
18 a3*m + 3*a3 + a4*m**2 + 15*a4*m/2 + 27*a4/2

```

Con esta parte del script hemos generado la lista de las 5 primeras ecuaciones. Resolvamos la ecuación indicial

```

1 Sol_Ecua_Ind=solve(Ecuaciones[0],m)
2 Sol_Ecua_Ind
[-1/2, 1]

```

Sustituyamos los valores de  $m$  en la lista de ecuaciones, agreguemos la ecuación  $a_0 = 1$ , resolvamos para los  $a_i$  y sustituymos la solución en  $y$ . Obtenemos la primer solución (truncada)

```

1 Ecuaciones1=[ec.subs(m,Sol_Ecua_Ind[1]) for ec in Ecuaciones]
2 Ecuaciones1
3 [0, a0 + 5*a1/2, 2*a1 + 7*a2, 3*a2 + 27*a3/2, 4*a3 + 22*a4]
4 Ecuaciones1[0]=a[0]-1
5 Ecuaciones1
6 [a0 - 1, a0 + 5*a1/2, 2*a1 + 7*a2, 3*a2 + 27*a3/2, 4*a3 + 22*a4]
7 sol=solve(Ecuaciones1,a)
8 y1=y.subs(sol).subs(m,Sol_Ecua_Ind[1])
9 y1
x*(16*x**4/3465 - 8*x**3/315 + 4*x**2/35 - 2*x/5 + 1)

```

La segunda solución se obtiene

```

1 Ecuaciones2=[ec.subs(m,Sol_Ecua_Ind[0]) for ec in Ecuaciones]
2 Ecuaciones2
3 [0, -a0/2 - a1/2, a1/2 + a2, 3*a2/2 + 9*a3/2, 5*a3/2 + 10*a4]
4 Ecuaciones2[0]=a[0]-1
5 sol=solve(Ecuaciones2,a)
6 y2=y.subs(sol).subs(m,Sol_Ecua_Ind[0])
(x**4/24 - x**3/6 + x**2/2 - x + 1)/sqrt(x)

```

### 7.4.2. Ecuación de Bessel, funciones de Bessel de primera especie

#### Relaciones de recurrencia y solución por el método de Frobenius

**Definición 4.**

Recordemos a la ecuación de Bessel de orden  $p$  ( $p > 0$ )

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{p^2}{x^2}\right) y = 0$$

En  $x = 0$  la ecuación de Bessel tiene un punto singular regular. Vamos a aplicarle el método de Frobenius. Trabajaremos exclusivamente con SymPy.

```

1 """ Para evitar el problema que 1/2 queda cero se puede usar
2 from __future__ import division
3 El problema que todos los nros quedan flotantes
4 """
5 orden=8
6 Lista=[%a for i in range(orden)]
7 a=symbols(Lista)
8 x,m,p=symbols('x,m,p')
9 y=x**m*sum([a[i]*x**i for i in range(orden)])
10 Ecua=y.diff(x,2)+1/x*y.diff(x,1)+(1-p**2/x**2)*y
11 Ecua=Ecua/x**(m-2)
12 Ecua=Ecua.expand()
13 Ecuaciones=[Ecua.diff(x,i).subs(x,0)/factorial(i) for i in range(orden)
14 ]
15 Sol_Ecua_Ind=solve(Ecuaciones[0],m)
16 Sol_Ecua_Ind
17 [-p, p]
```

Las raíces de la ecuación indicial son

$$m = p \quad y \quad m = -p \quad (7.24)$$

Vamos a trabajar con la raíz  $m = p$ .

```

Ecuaciones1=[ec . subs(m,Sol_Ecua_Ind[1]) for ec in Ecuaciones]
2 for ec in Ecuaciones1:
...     pprint(ec)
...
0
1 a1*(2*p + 1)
2 a0 + 4*a2*p + 4*a2
3 a1 + 6*a3*p + 9*a3
4 a2 + 8*a4*p + 16*a4
5 a3 + 10*a5*p + 25*a5
6 a4 + 12*a6*p + 36*a6
7 a5 + 14*a7*p + 49*a7
```

Se puede observar que estas ecuaciones relacionan  $a_n$  con  $a_{n-2}$ , i.e. que son relaciones de dos términos. Podemos hacer explícita la relación

```

2   for i in range(1, orden):
...     iter=solve(Ecuaciones1[i], a[i])[0].factor()
...     print repr(a[i])+'='+repr(iter)
...
4   a1=0
5   a2=-a0/(4*(p + 1))
6   a3=-a1/(3*(2*p + 3))
7   a4=-a2/(8*(p + 2))
8   a5=-a3/(5*(2*p + 5))
9   a6=-a4/(12*(p + 3))
10  a7=-a5/(7*(2*p + 7))

```

La ecuación  $a_1(2p + 1) = 0$  no fue correctamente resuelta por SymPy. SymPy consigna la solución  $a_1 = 0$ , pero si  $p = -1/2$  cualquier  $a_1$  es solución. Este caso lo estudiaremos separadamente después, por ahora supondremos  $p \neq -1/2$ . Luego la primera ecuación implica que  $a_1 = 0$  y por consiguiente, puesto que todo  $a_n$ , con  $n$  impar, se relaciona con  $a_1$  vamos a tener que  $a_n = 0$  cuando  $n$  es impar. Más abajo veremos que SymPy confirma esta aseveración. Ahora resolvamos las ecuaciones, en el sentido de expresar todos los coeficientes en función de  $a_0$ . No pedimos que nos resuelva la ecuación para  $a_0$ , pues, como dijimos,  $a_0$  es arbitrario.

```

1 sol=solve(Ecuaciones1,a[1,:])
2 for i in sol:
...   print repr(i)+"='"+repr(sol[i].factor())
...
3 a1=0
4 a5=0
5 a7=0
6 a2=-a0/(4*(p + 1))
7 a6=-a0/(384*(p + 1)*(p + 2)*(p + 3))
8 a3=0
9 a4=a0/(32*(p + 1)*(p + 2))

```

No queda muy claro cual es la ley que siguen los números 4, 32, 384, etc. que aparecen en el denominador. De modo que nos asistiremos “manualmente” a partir de la relación de recurrencia que es

$$a_{2n} = -\frac{1}{4n(p+n)}a_{2n-2} \quad (7.25)$$

Iterando esta relación

$$\begin{aligned} a_{2n} &= -\frac{1}{4n(p+n)}a_{2n-2} \\ &= \frac{1}{4n(p+n-1)} \cdot \frac{1}{4(n-1)(p+n-1)}a_{2n-4} = \dots \\ &= (-1)^n \frac{1}{4^n n! (p+n)(p+n-1)\dots(p+1)}a_0. \end{aligned}$$

Obtenemos la solución

$$y(x) = x^p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a_0}{4^n n! (p+n)(p+n-1)\cdots(p+1)} x^{2n} \quad (7.26)$$

Más adelante veremos que cierta elección especial de  $a_0$  no lleva a lo que denominaremos funciones de Bessel.

```
y1=y . subs( sol )
pprint(y1)
```

y el output confirma (7.26).

### Función Gamma y la función de Bessel de primera especie

Nuestro objetivo es encontrar dos soluciones linealmente independientes de la ecuación de Bessel. Hemos encontrado una que corresponde a la solución de la ecuación de índices  $m = p$ , la otra surgirá de la solución  $m = -p$ . Pero aún nos restaría elegir el valor de  $a_0$ . El criterio que utilizaremos para elegirlo será que nos simplifique lo más posible la expresión (7.26). Si  $p$  fuese un entero positivo, eligiendo  $a_0$  como  $1/2^p p!$  la expresión quedaría

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(p+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}$$

No obstante, nos previene utilizar este  $a_0$  el hecho de que  $p$  podría no ser entero, y en ese caso no es claro que significa  $p!$ . El propósito de esta subsección es introducir una extensión de la función factorial a una función de variable real.

#### Definición 5.

Para  $p > 0$  definimos la *función Gamma* por

$$\Gamma(p) := \int_0^{\infty} t^{p-1} e^{-t} dt \quad (7.27)$$

En la clase demostraremos que la integral impropia en la definición converge. Además demostraremos las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} \Gamma(1) &= 1 \\ \Gamma(p+1) &= p\Gamma(p) \end{aligned} \quad (7.28)$$

Estas igualdades implican, cuando  $p = n$  es entero positivo, que  $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = \dots = n!\Gamma(1) = n!$ . Luego podemos ver a la función gamma como una extensión de la función factorial a los reales no negativos. Notar que

$$\lim_{p \rightarrow 0^+} \Gamma(p) = \lim_{p \rightarrow 0^+} \frac{\Gamma(p+1)}{p} = +\infty.$$

La función Gamma tiende a infinito cuando nos acercamos a cero por derecha.

La Definición 7.27 es válida para  $p > 0$ . Utilizando la relación (7.28) podemos extender la función a  $p < 0$ . Concretamente, supongamos que  $-1 < p < 0$ , en este caso definimos

$$\Gamma(p) := \frac{\Gamma(p+1)}{p}. \quad (7.29)$$

Observar que el segundo miembro esta bien definido pues  $p+1 > 0$ . Como consecuencia de esta definición tendremos

$$\lim_{p \rightarrow 0^-} \Gamma(p) = \lim_{p \rightarrow 0^-} \frac{\Gamma(p+1)}{p} = -\infty.$$

y

$$\lim_{p \rightarrow -1^+} \Gamma(p) = \lim_{p \rightarrow -1^+} \frac{\Gamma(p+1)}{p} = -\infty.$$

Ahora podemos extender  $\Gamma$  a  $p \in (-2, 1)$ . Pues podemos usar la fórmula (7.29) y el hecho de que ya tenemos definida la función Gamma en  $(-1, 0)$ . Continuando de esta forma, definimos  $\Gamma$  para cualquier valor de  $p < 0$  y  $p \notin \mathbb{Z}$ . Si  $n$  es un entero negativo ocurre que

$$\lim_{p \rightarrow n^+} \Gamma(p) = (-1)^n \infty \quad \text{y} \quad \lim_{p \rightarrow n^-} \Gamma(p) = (-1)^{n-1} \infty.$$

Lamentablemente, SymPy (al menos la versión 7.4.1) produce un error si intentamos graficar la función  $\Gamma$ . Aparentemente la presencia de polos es el problema. Sage parece no tener este problema.

Figura 7.2: La función gamma  $\Gamma$

Ahora estamos en condiciones de definir la función de Bessel de primera especie que resulta de tomar  $a_0$  como  $1/2^p\Gamma(p+1)$ .

**Definición 6.**

Definimos la función de Bessel de primera especie como

$$J_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(p+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}$$

Una aproximación a esta función se programa en SymPy de manera muy sencilla. Una vez definida esta función podemos aprovecharla para graficar varias funciones de Bessel de distintos órdenes.

```

1 p,x=symbols('p,x')
2 J= sum([(-1)**n/factorial(n)/gamma(p+n+1)*(x/2)**(2*n+p) for n in range
3         (30)])
4 p1=plot(J.subs(p,1),(x,0,20),line_color=(1,0,0))
5 p2=plot(J.subs(p,2),(x,0,20),line_color=(0,1,0))[0]
6 p1.append(p2)
7 p2=plot(J.subs(p,3),(x,0,20),line_color=(0,0,1))[0]
8 p1.append(p2)
9 p1.show()

```

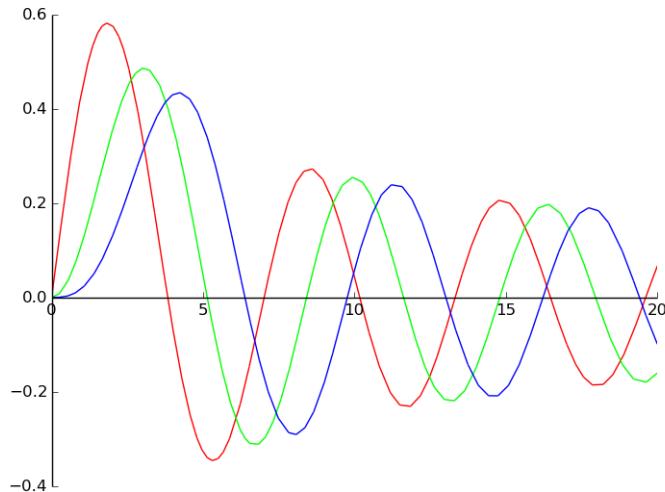


Figura 7.3: Funciones de Bessel  $J_p$ ,  $p = 1, 2, 3$

Ahora consideremos la solución  $m = -p$  de la ecuación indicial.

```

Ecuaciones2=[ec . subs(m,Sol_Ecua_Ind[0]) for ec in Ecuaciones]
2 for i in range(1,orden):
...     iter=solve(Ecuaciones2[i],a[i])[0].factor()
...     print repr(a[i])+'=' +repr(iter)
...
6 a1=0
7 a2=a0/(4*(p - 1))
8 a3=a1/(3*(2*p - 3))
9 a4=a2/(8*(p - 2))
10 a5=a3/(5*(2*p - 5))

```

```

12 a6=a4/(12*(p - 3))
    a7=a5/(7*(2*p - 7))

```

Estas relaciones siguen el mismo patrón que la relación de recurrencia (7.25) con  $-p$  en lugar de  $p$ . No obstante, la situación para la raíz  $-p$  no es exactamente igual a la de la raíz  $p$ . La diferencia radica en que cuando  $p \in \frac{1}{2}\mathbb{N} = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$  la expresión en el denominador en la relación

$$a_n = \frac{a_{n-2}}{n(2p-n)} \quad (7.30)$$

se puede anular y esto impediría que pasasemos de miembro esta expresión como hicimos. Notar que este problema ocurre cuando la diferencia de las dos raíces  $p - (-p) = 2p$  es un entero positivo. Esto último lo remarcamos porque veremos más adelante que en general es un problema que la diferencia de las raíces de la ecuación indicial sean negativas. También  $p = 0$  es una situación problemática, dado que en este caso  $p = -p$  y por consiguiente no estamos en condiciones de encontrar una solución linealmente independiente de  $J_0$ . En síntesis  $p = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$  son valores problemáticos para  $p$ .

Cuando  $p$  no es uno de los valores problemáticos, estamos en condiciones de definir

### Definición 7.

Definimos la función de Bessel de primera especie  $J_{-p}$  ( $p \notin \frac{1}{2}\mathbb{N}$ ) como

$$J_{-p}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(-p+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-p}$$

Grafiquemos algunas de estas funciones de Bessel, la función de Bessel  $J$  que habíamos introducido en SymPy arriba, sigue siendo útil.

```

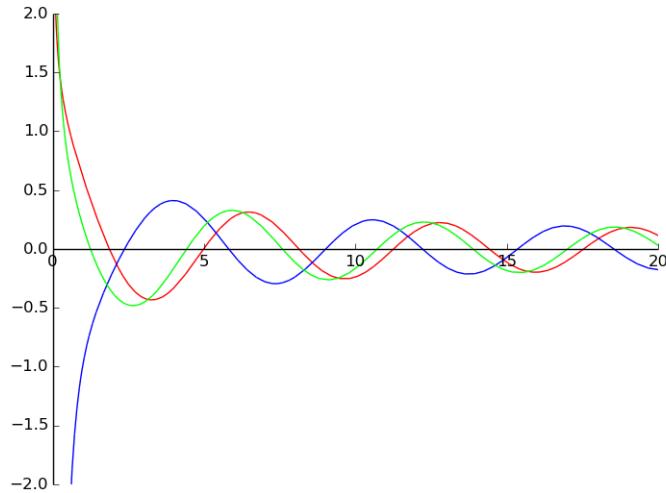
1 p1=plot(J.subs(p,-1.0/3),(x,0,20),line_color=(1,0,0),ylim=(-2,2))
2 p2=plot(J.subs(p,-2.0/3),(x,0,20),line_color=(0,1,0),ylim=(-2,2))
3 p3=plot(J.subs(p,-5.0/3),(x,0,20),line_color=(0,0,1),ylim=(-2,2))
4 p1.append(p3[0])
5 p1.append(p3[0])

```

Más adelante vamos a seguir estudiando con más profundidad la ecuación de Bessel.

#### 7.4.3. Teorema fundamental sobre puntos singulares regulares

Habiendo visto algunos ejemplos, ahora pasaremos a discutir la situación general del método de Frobenius.

Figura 7.4: Funciones de Bessel  $J_{-1/3}$ ,  $J_{-2/3}$  y  $J_{-5/3}$ .

Supongamos  $x = 0$  un punto regular singular de la ecuación

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \quad (7.31)$$

Supongamos que  $xp(x)$  y  $x^2q(x)$  poseen los siguientes desarrollos en serie

$$xp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \quad \text{y} \quad x^2q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$$

Proponemos como solución

$$y = x^m \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{m+n}.$$

Empecemos por hallar las relaciones de recurrencia para los coeficientes  $a_n$ ,  $n = 0, 1, \dots$ . Tenemos

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (m+n)a_n x^{m+n-1} \quad (7.32a)$$

$$\begin{aligned} y'' &= \sum_{n=0}^{\infty} (m+n)(m+n-1)a_n x^{m+n-2} \\ &= x^{m-2} \sum_{n=0}^{\infty} (m+n)(m+n-1)a_n x^n. \end{aligned} \quad (7.32b)$$

Luego

$$\begin{aligned}
 p(x)y'(x) &= \frac{1}{x} \left( \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} (m+n)a_n x^{m+n-1} \right) \\
 &= x^{m-2} \left( \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} (m+n)a_n x^n \right) \\
 &= x^{m-2} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n p_{n-k}(m+k)a_k \right) x^n \\
 &= x^{m-2} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^{n-1} p_{n-k}(m+k)a_k + p_0(m+n)a_n \right) x^n
 \end{aligned} \tag{7.33}$$

Ahora desarrollemos  $q(x)y(x)$ ,

$$\begin{aligned}
 q(x)y(x) &= \frac{1}{x^2} \left( \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{m+n} \right) \\
 &= x^{m-2} \left( \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \\
 &= x^{m-2} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n q_{n-k}a_k \right) x^n \\
 &= x^{m-2} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^{n-1} q_{n-k}a_k + q_0a_n \right) x^n
 \end{aligned} \tag{7.34}$$

A partir de (7.43), (7.34), (7.33) y (7.32b) obtenemos

$$\begin{aligned}
 0 = &x^{m-2} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ [(m+n)(m+n-1) + p_0(m+n) + q_0] a_n \right. \\
 &\left. + \sum_{k=0}^{n-1} a_k [p_{n-k}(m+k) + q_{n-k}] \right\} x^n.
 \end{aligned} \tag{7.35}$$

Entonces se debe satisfacer

$$[(m+n)(m+n-1) + p_0(m+n) + q_0] a_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k [p_{n-k}(m+k) + q_{n-k}] = 0,$$

(7.36)

para  $n = 0, 1, \dots$ . Definamos

$$f(m) = m(m-1) + p_0m + q_0. \tag{7.37}$$

Entonces las ecuaciones (7.36) se escriben

$$f(m+n)a_n = -\sum_{k=0}^{n-1} a_k [p_{n-k}(m+k) + q_{n-k}], \quad n = 0, 1, \dots \quad (7.38)$$

La primera de estas ecuaciones es

**Definición 8.**

Definimos la ecuación indicial por

$$f(m) = m(m-1) + p_0m + q_0 = 0. \quad (7.39)$$

Si  $m$  resuelve la ecuación indicial entonces  $m$  resuelve la ecuación (7.38) para  $n = 0$  y el valor de  $a_0$  se puede elegir arbitrariamente.

Supongamos que la ecuación indicial tiene las soluciones  $m_2 \leq m_1$ . Podría ocurrir que las soluciones fueran complejos conjugados, pero no trataremos este caso aquí. Ahora discutamos Veamos cuando es posible resolver las relaciones de recurrencia (7.38). El único problema que podría ocurrir es que  $f(m+n) = 0$  para algún valor de  $n = 1, 2, \dots$ , dado que en ese caso (7.38) se reduce a

$$0 = -\sum_{k=0}^{n-1} a_k [p_{n-k}(m+k) + q_{n-k}]. \quad (7.40)$$

Esta ecuación no nos dice nada sobre  $a_n$  y no podemos esperar que se satisfaga. Sin embargo, cuando  $m = m_1$  esta desafortunada situación no se da, de lo contrario  $m_1 + n$  sería una raíz de la ecuación indicial distinta que  $m_2$  y  $m_1$ . En consecuencia, si  $m = m_1$  y  $a_0 \neq 0$  es elegido arbitrariamente las ecuaciones (7.38) determinan los coeficientes  $a_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$

Cuando  $m = m_2$  si puede ocurrir que  $f(m_2 + n) = 0$ , esto es así cuando  $m_2 + n = m_1$  para algún  $n = 1, 2, \dots$ , vale decir cuando  $m_1 - m_2 \in \mathbb{Z}$ . Luego estamos en condiciones de afirmar que si  $m = m_2$ ,  $m_1 - m_2 \notin \mathbb{Z}$  y  $a_0 \neq 0$  es elegido arbitrariamente las ecuaciones (7.38) determinan los coeficientes  $a_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . En esta situación, se demuestra con facilidad que las dos soluciones obtenidas por el método de Frobenius son linealmente independientes. Por ejemplo, si estas soluciones son

$$y_1 = x^{m_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{y} \quad y_2 = x^{m_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n,$$

con  $a_0 \neq 0 \neq b_0$  y si suponemos que ellas son linealmente dependientes entonces su cociente  $y_1/y_2$  sería una constante  $c$  no nula. Pero tomando límite en la expresión  $y_1/y_2$  cuando  $x \rightarrow 0$  vemos que

$$c = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y_1}{y_2} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{m_1 - m_2} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n} = 0 \cdot \frac{a_0}{b_0} = 0.$$

Si  $m_1 - m_2 := n_0 \in \mathbb{Z}$ , entonces la situación es diferente. Si, en particular, *tuviésemos*  $n_0 = 0$  ( $m_1 = m_2$ ) *entonces claramente podremos encontrar esencialmente sólo una solución en serie de Frobenius.*

Supongamos  $n_0 > 0$ . Cuando  $n = n_0$  la ecuación de recurrencia (7.38) se convierte, como ya se dijo, en (7.40) con  $m_2$  en lugar de  $m$ . Una aparente solución sería tomar  $0 = a_0 = \dots = a_{n_0-1}$  que resolvería la ecuación conflictiva. Podríamos elegir  $a_{n_0} \neq 0$  arbitrariamente y continuar la iteración

$$\begin{aligned} f(m_1 + 1)a_{n_0+1} &= -\sum_{k=0}^{n_0} a_k [p_{n_0+1-k}(m_2 + k) + q_{n_0+1-k}] = -a_{n_0}[p_1 m_1 + q_1] \\ f(m_1 + 2)a_{n_0+2} &= -\sum_{k=0}^{n_0+1} a_k [p_{n_0+2-k}(m_2 + k) + q_{n_0+2-k}] \\ &= -a_{n_0}[p_2 m_1 + q_2] - a_{n_0+1}[p_1(m_1 + 1) + q_0] \\ &\vdots \\ & \end{aligned} \tag{7.41}$$

Como se ve, la iteración termina siendo la misma que la correspondiente iteración para la raíz  $m_1$ . Además tendríamos que el desarrollo en serie

$$y(x) = x^{m_2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = x^{m_2} \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n x^n = x^{m_2+n_0} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+n_0} x^n = x^{m_1} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n,$$

donde  $b_n := a_{n+n_0}$  resuelve el esquema de iteración (7.41) que, como dijimos, es el esquema de iteración correspondiente a  $m = m_1$ . Vale decir que elegir  $0 = a_0 = \dots = a_{n_0-1}$  nos lleva a una solución linealmente dependiente con la solución que ya encontramos para  $m = m_1$ . Podríamos tener la suerte que eligiendo  $a_0 \neq 0$  se satisfaga la ecuación (7.40) con  $m = m_2$  y  $n = n_0$ . Si esto ocurre podemos elegir  $a_{n_0}$  arbitrariamente, por ejemplo  $a_{n_0} = 0$ , y continuar la iteración. Obtenemos una solución que es linealmente independiente de la correspondiente a  $m_1$ . En síntesis, *si*  $n_0 := m_1 - m_2 \in \mathbb{Z}$ , *si*  $a_0 \neq 0$  *es elegido arbitrariamente, si*  $a_1, \dots, a_{n_0-1}$  *son hallados mediante* (7.36) *y si se satisface* (7.40) *tenemos una segunda solución en serie de Frobenius para*  $m = m_2$

Si falla esta última condición ya no hay otra solución en serie de Frobenius. Se puede encontrar un desarrollo, que ya no constituye una serie de Frobenius, para otra solución de la siguiente forma empleando el método de reducción de orden a partir de la solución conocida  $y_1 = x^{m_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ . Este método no decía que la otra solución venía dada a partir de las relaciones

$$y_2(x) = v(x)y_1(x), \quad \text{donde } v'(x) = \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)dx}.$$

Teniendo en cuenta que

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^{n-1} = \frac{p_0}{x} + p_1 + p_2 x + \dots$$

Vemos que

$$\begin{aligned} v'(x) &= \frac{1}{x^{2m_1} (\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)^2} e^{-\int (\frac{p_0}{x} + p_1 + p_2 x + \dots) dx} \\ &= \frac{1}{x^{2m_1} (\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)^2} e^{-p_0 \ln x - p_1 x - \dots} \\ &= \frac{1}{x^{2m_1 + p_0} (\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)^2} e^{-p_1 x - \dots} \end{aligned}$$

Ahora la función

$$g(x) = \frac{e^{-p_1 x - \dots}}{(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)^2},$$

es analítica en 0 puesto que el denominador no se anula en cero. Por consiguiente tenemos un desarrollo en serie

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \quad b_0 \neq 0.$$

En la práctica encontrar este desarrollo en serie de manera explícita puede ser muy difícil. Llamemos  $k := 2m_1 + p_0$ . Por la conocida fórmula para la suma de las raíces de una ecuación de segundo grado, se tiene que  $m_1 + m_2 = 1 - p_0$ . Luego  $2m_1 + p_0 = 2m_1 + 1 - m_1 - m_2 = m_1 - m_2 + 1 \in \mathbb{N}$ .

Tenemos que

$$v'(x) = \frac{b_0}{x^k} + \frac{b_1}{x^{k-1}} + \dots + \frac{b_{k-1}}{x} + b_k + \dots$$

Entonces

$$v(x) = \frac{b_0}{(-k+1)x^{k-1}} + \frac{b_1}{(-k+2)x^{k-2}} + \dots + b_{k-1} \ln x + b_k x + \dots$$

Reemplazando esta identidad en la expresión para  $y_2$ ,

$$\begin{aligned} y_2 &= vy_1 \\ &= y_1 \left( \frac{b_0}{(-k+1)x^{k-1}} + \frac{b_1}{(-k+2)x^{k-2}} + \dots + b_{k-1} \ln x + b_k x + \dots \right) \\ &= b_{k-1} \ln xy_1 + x^{m_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \left( \frac{b_0}{(-k+1)x^{k-1}} + \frac{b_1}{(-k+2)x^{k-2}} \dots \right) \\ &= b_{k-1} \ln xy_1 + x^{m_1-k+1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \left( \frac{b_0}{(-k+1)} + \frac{b_1}{(-k+2)} x + \dots \right) \end{aligned}$$

Ahora  $m_1 - k + 1 = m_1 - 2m_1 - p_0 + 1 = -p_0 - m_1 + 1$ . Es sabido que la suma de las raíces  $m_1 + m_2$  es igual a  $-p_0 + 1$ , es decir  $m_1 = -p_0 + 1 - m_2$ . Entonces  $m_1 - k + 1 = m_2$ . Obtenemos una solución de la forma

$$y_2(x) = b_{k-1} y_1 \ln x + x^{m_2} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n. \quad (7.42)$$

La segunda solución  $y_2$  es la suma de una serie de Frobenius, con  $m = m_2$ , y un múltiplo de la función  $y_1 \ln x$ . Esta última función no se puede desarrollar en serie de potencias alrededor de 0.

Hemos discutido con cierto detalle las posibles soluciones de las ecuaciones de recurrencia. No resta considerar la cuestión de la convergencia de las series. Esto lo tratamos en el siguiente teorema.

**Teorema 1.**

Supongamos  $x = 0$  un punto regular singular de la ecuación

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \quad (7.43)$$

Supongamos que  $xp(x)$  y  $x^2q(x)$  poseen los siguientes desarrollos en serie

$$xp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \quad \text{y} \quad x^2q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$$

y que estas series convergen para  $|x| < R$  ( $R > 0$ ). Supongamos que la ecuación indicial tiene las raíces reales  $m_1, m_2$  con  $m_2 \leq m_1$ . Entonces la ecuación (7.43) tiene una solución en serie de Frobenius dada por

$$y_1 = x^{m_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad a_0 \neq 0.$$

La serie  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  converge en  $|x| < R$ . Si  $m_1 - m_2$  no es un entero no negativo entonces tenemos una segunda solución en serie de Frobenius con  $m_2$  en lugar de  $m_1$  y satisfaciendo las mismas condiciones que la primera serie.

*Dem.* Dado que  $m_1$  y  $m_2$  son raíces de la ecuación indicial vale la factorización

$$f(m) = (m - m_1)(m - m_2) = m^2 - (m_1 + m_2)m + m_1 m_2.$$

Entonces

$$f(m_1 + n) = n(n + m_1 - m_2) \quad \text{y} \quad f(m_2 + n) = n(n + m_2 - m_1).$$

Luego

$$|f(m_1 + n)| \geq n(n - |m_1 - m_2|) \quad \text{y} \quad f(m_2 + n) \geq n(n - |m_1 - m_2|). \quad (7.44)$$

Tomemos  $r$  tal que  $0 < r < R$ . Por las mismas razones expresadas en el Teorema (1), existe  $M > 0$  tal que

$$|p_n|r^n, |q_n|r^n \leq M.$$

Usando (7.38), con  $m = m_1$ , (7.44) y las desigualdades de arriba concluimos

$$n(n - |m_1 - m_2|)|a_n| \leq M \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|a_k|}{r^{n-k}} (|m_1| + k + 1).$$

Ahora definimos la sucesión  $b_n$  por  $b_n = |a_n|$ , para  $0 \leq n \leq |m_1 - m_2|$  y para  $n > |m_1 - m_2|$

$$n(n - |m_1 - m_2|)b_n = M \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{r^{n-k}} (|m_1| + k + 1). \quad (7.45)$$

Por una variación simple del Lema 1 tenemos que  $|a_n| \leq b_n$ , para todo  $n = 0, 1, \dots$ . Ahora veremos que la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$  converge para  $|x| < r$ . Por (7.45) tenemos que

$$\begin{aligned} r(n+1)(n+1 - |m_1 - m_2|)b_{n+1} &= M \sum_{k=0}^n \frac{|b_k|}{r^{n-k}} (|m_1| + k + 1) \\ &= M \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{r^{n-k}} (|m_1| + k + 1) + Mb_n(|m_1| + n + 1) \\ &= n(n - |m_1 - m_2|)b_n + Mb_n(|m_1| + n + 1). \end{aligned}$$

Luego

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{n(n - |m_1 - m_2|) + M(|m_1| + n + 1)}{r(n+1)(n+1 - |m_1 - m_2|)}$$

Y así

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1}|x|^{n+1}}{b_n|x|^n} = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n - |m_1 - m_2|) + M(|m_1| + n + 1)}{r(n+1)(n+1 - |m_1 - m_2|)} = \frac{|x|}{r}$$

Luego la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$  converge para  $|x| < r$ . Como  $|a_n| \leq b_n$  tendremos que  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  converge absolutamente para  $|x| < r$ . Finalmente como  $0 < r < R$  fue elegido arbitrariamente tendremos que la convergencia se da para  $|x| < R$ .

Restaría considerar el caso  $m = m_2$  cuando  $m_1 - m_2$  no es entero. Pero la demostración del mismo sigue el mismo camino que para  $m = m_1$ .

□

#### 7.4.4. Funciones de Bessel de segunda especie

En la subsección 7.4.2 discutimos sobre soluciones de la ecuación de Bessel de orden  $p \geq 0$ . Obtuvimos la solución en serie de Frobenius asociada a la solución de la ecuación indicial  $m = p$  (7.24), dada en la Definición 6. Esta solución es llamada función de Bessel de primera especie y es denotada por  $J_p$ . Es bueno decir que esta función es continua en 0 y  $J_p(0) = 0$ . Para la segunda solución de la ecuación indicial  $m = -p$ , hemos dicho también que para  $p \neq 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$  hay otra solución linealmente independiente de  $J_p$ . Esta solución se denomina también función de Bessel de

primera especie, se denota  $J_{-p}$  y es una función no acotada en 0. Según lo que hemos expresado en la Subsección 7.4.3, aún en el caso  $p = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$  tenemos esperanzas de encontrar una solución en serie de Frobenius o al menos una solución de la forma (7.42). Este tipo de soluciones es lo que discutiremos en esta subsección.

Empecemos suponiendo  $p$  entero positivo. A partir de (??) sabemos que la fórmula de recurrencia para  $m = -p$  es

$$n(2p - n)a_n = a_{n-2}, \quad n \geq 2 \quad (7.46)$$

También recordemos de (??) la ecuación

$$-a_1(2p - 1) = 0,$$

que implica  $a_1 = 0$ , puesto que  $p$  es entero y por ende  $p \neq \frac{1}{2}$ . Como consecuencia de la relación de recurrencia (7.46) tenemos  $a_n = 0$  para todo  $n$  impar. Para afirmar esto último tomamos en cuenta que al ser  $p$  entero  $2p - n \neq 0$  cuando  $n$  es impar. Cuando  $n$  es par y más en concreto  $n = 2p$  la relación de recurrencia (7.46) toma la forma  $a_{n-2} = 0$ . Ahora si  $a_{n-2} = 0$  entonces (7.46) implica que  $a_{n-4} = a_{n-6} = \dots = a_0 = 0$ . Eligiendo  $a_n$  arbitrariamente y al resto de los  $a_k$  con  $k$  par mayor a  $n$  de modo que se satisfaga la relación de recurrencia se llega a una solución en serie de Frobenius. Lamentablemente esta segunda solución es esencialmente la misma que  $J_p$ . Esto ya lo hemos discutido en sección 7.4.3 en la página 172. De modo que cuando  $p$  es entero positivo no tenemos una segunda solución en serie de Frobenius.

Más adelante volveremos al caso  $p$  entero. Ahora consideremos  $p = \frac{2k+1}{2}$  con  $k$  entero  $k \geq 0$ . Reemplazando  $p$  en (7.46) por este valor y reemplazando  $n$  por  $2k + 1$ , concluimos  $a_{2k-1} = 0$ . Ahora iterando la relación de recurrencia  $a_{2k-3} = \dots = a_1 = 0$ . La situación es parecida al caso anterior, podemos elegir  $a_{2k+1}$  libremente, vamos a elegirlo igual a 0. Esto anula todos los coeficientes  $a_n$  con  $n$  impar. Pero la diferencia con el caso anterior es que podemos elegir libremente  $a_0$ . Llegamos así a la misma solución de la Definición 7. En síntesis *para todo  $p$  que no es un entero no negativo, tenemos el par de soluciones linealmente independientes  $J_p$  y  $J_{-p}$  tales que*

$$y = c_1 J_p + c_2 J_{-p} \quad (7.47)$$

*es la solución general de la ecuación de Bessel*

Ahora volvamos al caso  $p \in \mathbb{Z}$  para encontrar una segunda solución linealmente independiente de  $J_p$ . Podríamos buscar esta solución apelando a la expresión (7.42), pero es costumbre buscar de otra manera esta segunda solución y vamos a discutir brevemente, sin justificar todos los detalles, esta otra forma. La idea es expresar la segunda solución para  $p = n \in \mathbb{Z}$  como límite de soluciones de la forma (7.47) cuando  $p \rightarrow n$ . Más concretamente.

**Definición 9.**

Para  $p \notin \mathbb{Z}$  definimos la función de Bessel  $Y_p$  de segunda especie por

$$Y_p = \frac{\cos p\pi J_p - J_{-p}}{\sin p\pi}. \quad (7.48)$$

La función  $Y_p$  es una solución puesto que es una expresión del tipo (7.47). Además es no acotada cerca de 0 dado que  $J_p$  es acotada y  $J_{-p}$  no. La razón de esta llamativa definición es el siguiente resultado.

**Lema 1.**

Para  $n$  entero no negativo, el límite  $\lim_{p \rightarrow n} Y_p$  existe. Por consiguiente, podemos definir

$$Y_n(x) := \lim_{p \rightarrow n} Y_p(x). \quad (7.49)$$

Esta función es solución de la ecuación de Bessel de orden  $n$  y se denomina, también, función de Bessel de segunda especie. También resulta ser una función no acotada cerca de 0 y por consiguiente, linealmente independiente de  $J_n$ .



## Capítulo 8

# Ecuación de la membrana, separación de variables

El movimiento de una membrana elástica sujetada a un aro circular viene gobernada por la ecuación de *ondas bidimensional*

$$u_{tt} = \Delta u := u_{xx} + u_{yy}$$

Esta ecuación es un ejemplo de *ecuación en derivadas parciales*. Aquí la función incógnita  $u$  depende de tres variables independientes  $x, y, t$ . No hemos tratado hasta aquí este tipo de ecuaciones, en esta breve unidad vamos a ver como los resultados que desarrollamos antes nos sirven para encontrar algunas soluciones de esta ecuación.

En la deducción de esta ecuación, que no haremos, se supone que no actúa otra fuerza más que la tensión de la membrana, que el material de esta membrana es uniforme, que la dirección de desplazamientos de un punto sobre la membrana es perpendiculares al plano que contiene al aro de sujeción.

El significado de las variables es el siguiente:  $t$  es el tiempo, las variables  $x, y, u$  son las coordenadas de un punto sobre la membrana en un sistema de coordenadas cartesiano ortogonal. Las coordenadas  $x, y$  se toman en el plano que contiene al aro de sujeción y por ende, como el desplazamiento es solo en la dirección vertical, son independientes de  $t$ . El aro de sujeción se supone de radio 1 y centro en  $(0, 0)$ . La función  $u$  depende de  $x, y$  y  $t$ . La ecuación se satisface en la bola de radio 1 y centro  $(0, 0)$  de  $\mathbb{R}^2$ . Se impone además una *condición de contorno* que da cuenta del hecho que la membrana está fija al aro, esta condición es  $u = 0$  en  $\partial B$ . Por último necesitamos una *condición inicial* que nos dice cual es el estado de la membrana en  $t = 0$ , vamos a suponer que en ese momento la membrana está en reposo, esto es  $u_t(x, y, 0) = 0$ .

Buscaremos soluciones de la ecuación de ondas en variables separadas, esto es supondremos que  $u$  se escribe  $u(x, y, t) = v(x, y)T(t)$ . Estas soluciones tienen el significado físico de ser *tonos normales*, esto es regímenes de vibración donde todos los puntos de la membrana vibran a la misma frecuencia. Asumamos además que  $u$  parte del reposo, esto es  $u_t(x, y, 0) = 0$ .

Reemplazando  $u(x, y, t) = v(x, y)T(t)$  en la ecuación obtenemos

$$v(x, y)T''(t) = T(t)(v_{xx}(x, y) + v_{yy}(x, y)). \quad (8.1)$$

Vale decir que

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{v_{xx}(x, y) + v_{yy}(x, y)}{v(x, y)}.$$

Las variables  $t, x, y$  son independientes entre si. En el miembro de la izquierda sólo aparece  $t$  y en el de la derecha sólo  $x, y$ . Por consiguiente podríamos cambiar  $t$  en el miembro de la izquierda dejando  $x, y$  fijos. La conclusión es entonces que el miembro de la izquierda no cambia por cambiar  $t$ , vale decir  $T''/T$  es una función constante y por lo tanto  $\Delta v/v$  es constante. Debe existir  $\lambda > 0$  tal que

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{v_{xx}(x, y) + v_{yy}(x, y)}{v(x, y)} = -\lambda.$$

Tenemos así las dos ecuaciones

$$T''(t) + \lambda T(t) = 0, \quad (8.2)$$

$$v_{xx}(x, y) + v_{yy}(x, y) + \lambda v(x, y) = 0 \quad (8.3)$$

Además se deben satisfacer la condiciones de contorno  $u(x, y, t) = 0$  para  $(x, y) \in \partial B$ . Esta condición implica que<sup>1</sup>

$$v = 0 \text{ en } \partial B. \quad (8.4)$$

No olvidemos la condición inicial  $u_t(x, y, 0) = 0$ . Atendiendo a la separación de variables debe ocurrir que  $T'(0)v(x, y) = 0$  y esto implica que  $T'(0) = 0$  o  $v(x, y) \equiv 0$ . La segunda opción nos llevaría a la solución trivial de la ecuación, lo que no es de nuestro interés. De modo que aceptaremos

$$T'(0) = 0. \quad (8.5)$$

La ecuación (8.2) es una ecuación de segundo orden, lineal con coeficientes constantes, que hemos considerado en múltiples oportunidades. Si  $\lambda \leq 0$  obtendríamos soluciones que tienden a infinito cuando  $t \rightarrow \infty$  lo que no es compatible con el comportamiento esperado para una membrana. Hay que tener en cuenta que la validez física del modelo matemático alcanza solo a pequeñas oscilaciones, esto es valores chicos de  $u$ . De modo que podemos suponer  $\lambda = \omega^2$ . La ecuación resulta la ecuación del oscilador armónico, cuya solución general es

$$T(t) = k_1 \cos(\omega t) + k_2 \sin(\omega t)$$

---

<sup>1</sup>Otra posible solución de la condición de contorno sería tomar  $T = 0$ , pero esto nos llevaría a la solución trivial

Se debe cumplir (8.5)

$$0 = T'(0) = k_2 \omega \Rightarrow k_2 = 0.$$

*La membrana vibra en con frecuencia  $\omega$*  dado que el factor  $T$  de  $u$  vibra en esa frecuencia y el otro factor que compone  $u$ , esto es  $v$ , no depende de  $t$  es decir es estático. La ecuación (8.3), que ahora escribimos

$$v_{xx}(x, y) + v_{yy}(x, y) + \omega^2 v(x, y) = 0, \quad (8.6)$$

se conoce como la ecuación de autovalores del Laplaciano o ecuación de Helmholtz. Los valores de  $\omega$  para los que esta ecuación tiene solución (no todo  $\omega$  lo es) son justamente los autovalores del operador de Laplace. Es decir los autovalores de Laplaciano resultan ser los cuadrados de las frecuencias de los tonos normales. Para encontrar estos autovalores vamos a escribir  $v$  en coordenadas polares  $v = v(r, \theta)$ . Acorde a la fórmula (8.24) del Apéndice 8.1 tenemos que (8.6) equivale a

$$v_{rr} + \frac{1}{r} v_r + \frac{1}{r^2} v_{\theta\theta} + \omega^2 v = 0 \quad (8.7)$$

Nuevamente vamos a considerar la técnica de separación de variables. Proponemos que

$$v(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$$

Reemplazando en (8.7)

$$R''\Theta + \frac{1}{r} R'\Theta + \frac{1}{r^2} R\Theta'' + \omega^2 R\Theta = 0.$$

Multiplicando por  $r^2/R\Theta$  y depejando los términos conteniendo  $\Theta$

$$\frac{r^2 R''}{R} + \frac{r R'}{R} + \omega^2 r^2 = -\frac{\Theta''}{\Theta}. \quad (8.8)$$

Ahora se razona como lo hemos hecho con la ecuación (8.1). Cada miembro depende de variables independientes entre si, esto es de  $r$  el primer miembro y de  $\theta$  el segundo. Para que la igualdad sea posible las funciones deben ser constantes. Luego debe existir  $\lambda$  tal que

$$r^2 R'' + r R' + (\omega^2 r^2 - \lambda)R = 0 \quad (8.9)$$

$$\Theta'' + \lambda\Theta = 0. \quad (8.10)$$

Además teníamos la condición de contorno (8.11) que se convierte en

$$R(1) = 0. \quad (8.11)$$

La función  $\Theta$  al depender de  $\theta$  debería ser periódica de periodo  $2\pi$ . Para que esto sea así  $\lambda$  debe ser positivo, puesto que las soluciones de 8.9 son periódicas solo para estos valores de  $\lambda$ . Por consiguiente

$$\Theta(\theta) = c_1 \cos \sqrt{\lambda}\theta + c_2 \sin \sqrt{\lambda}\theta. \quad (8.12)$$

Como la solución, además de periódica, debe tener más específicamente período  $2\pi$ , el valor de  $\lambda$  debe ser un entero cuadrado, es decir que existe un entero positivo  $n$  tal que  $\lambda = n^2$ . Así (8.12) se convierte en

$$\Theta(\theta) = c_1 \cos n\theta + c_2 \sin n\theta.$$

Nuestras suposiciones no determinan el valor de las constantes  $c_1$  y  $c_2$ . Obtendremos dos soluciones linealmente independientes eligiendo  $k_1 = 0$  y  $k_2 = 1$  o permutando estos valores. Vamos a seguir ilustrando el método con la segunda elección, es decir

$$\Theta(\theta) = \cos n\theta \quad (8.13)$$

Reemplazando  $\lambda$  por  $n^2$  en (8.9)

$$r^2 R'' + rR' + (\omega^2 r^2 - n^2)R = 0,$$

que se parece mucho a la ecuación de Bessel. De hecho si  $\omega$  fuese 1 sería exactamente la ecuación de Bessel. La podemos convertir fácilmente en la ecuación de Bessel por el cambio de variable independiente  $s = \omega r$ . Tenemos

$$\frac{dR}{dr} = \frac{dR}{ds} \frac{ds}{dr} = \frac{dR}{ds}\omega$$

y

$$\frac{d^2R}{dr^2} = \frac{d^2R}{ds^2}\omega^2$$

Reemplazando las igualdades anteriores y  $r$  por  $s/\omega$  en (8) llegamos a

$$s^2 R''(s) + sR' + (s^2 - n^2)R = 0$$

Que es la ecuación de Bessel de orden  $n$ . Como el orden es precisamente un entero hemos visto que la ecuación tiene como par de soluciones linealmente independientes la función de Bessel de primera especie  $J_n$  que es analítica en 0 y la función de Bessel de segunda especie  $Y_n$  que es no acotada en 0. Debería ocurrir entonces que  $R = c_1 J_p + c_2 Y_p$ . Pero de ser  $c_2 \neq 0$  tendríamos que  $R$  sería no acotada y esto implicaría que la membrana sería la gráfica de una función no acotada, cosa que no se condice con nuestra idea de lo que es una membrana. De modo que estas soluciones, que matemáticamente son correctas, las descartamos por carecer de significado físico. Sin perder generalidad, supongamos  $c_1 = 1$ . Así tenemos que  $R$  como función de  $s$  es  $J_n(s)$ . Retornando a la variable  $r$

$$R(r) = J_n(\omega r) \quad (8.14)$$

Ahora la condición de contorno (8.11) implica que

$$J(\omega) = 0 \quad (8.15)$$

Así llegamos a la sorprendente conclusión que cuando una membrana vibra en un tono normal su frecuencia es un cero de una función de Bessel de orden  $n$  para algún entero  $n$  positivo. Sabemos que los ceros de la ecuación de Bessel forman una sucesión  $\omega_0 < \omega_1 < \dots$  que tiende a infinito y que la distancia entre ceros sucesivos  $\omega_{k+1} - \omega_k$  tiende a  $\pi$  cuando  $k \rightarrow \infty$ . Hemos encontrado muchas soluciones del problema propuesto, tenemos una solución distinta por cada  $n$  entero positivo y por cada  $\omega_k$  en la lista de ceros de  $J_n$ . Al tono normal que obtenemos para un  $n$  y  $k$  dados lo llamamos el tono  $(n, k)$  y resulta estar dado en coordenadas polares por

$$u(r, \theta, t) = \cos(\omega_k t) \cos(n\theta) J_n(\omega_k r) \quad (8.16)$$

Siendo  $u$  una función de tres variables independientes no es posible graficarla en nuestro mundo 3d. Tampoco nos interesa la grafica, pues la interpretación de  $u$  es que para un tiempo  $t$  fijo la gráfica en  $\mathbb{R}^3$  de  $u(r, \theta, t)$  es la posición de la membrana. Con SAGE (ver el Apéndice 8.2) generamos un conjunto de gráficos para distintos valores de  $t$  y luego los animamos con el paquete `animate` de L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X. Los tonos normales representados son el  $(0, 1)$ ,  $(0, 2)$  y  $(1, 2)$ .

Figura 8.1: Modo  $(0, 1)$

Figura 8.2: Modo (0, 2)

Figura 8.3: Modo (1, 2)

## 8.1. Apéndice A: Laplaciano en coordenadas polares

Escribamos el operador de Laplace en coordenadas polares. Las coordenadas cartesianas  $x, y$  se escriben en función de las coordenadas polares  $r, \theta$  de la siguiente forma

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta.$$

Tenemos que expresar las derivas tomadas respecto a las coordenadas cartesianas en términos de derivas tomadas respecto a coordenadas polares.

$$\begin{aligned} u_x &= u_r r_x + u_\theta \theta_x \\ u_{xx} &= (u_r)_x r_x + u_r r_{xx} + (u_\theta)_x \theta_x + u_\theta \theta_{xx} \\ &= u_{rr} r_x^2 + u_{\theta\theta} \theta_x^2 + 2u_{r\theta} r_x \theta_x + u_r r_{xx} + u_\theta \theta_{xx} \end{aligned} \quad (8.17)$$

Usemos SAGE para calcular  $r_x, \theta_x, r_{xx}, \theta_{xx}$

```

1 >>> from sympy import *
2 >>> x,y=symbols('x,y')
3 >>> r=sqrt(x**2+y**2)
4 >>> theta=atan2(y,x)
5 >>> rho=symbols('rho', positive=True)
6 >>> phi=symbols('phi')
7 >>> r . diff(x) . subs({x:rho*cos(phi),y:rho*sin(phi)}) . simplify()
cos(phi)

```

Es decir

$$r_x = \cos(\theta). \quad (8.18)$$

En el cálculo anterior `rho` y `phi` son introducidas en reemplazo de `r` y `theta` aunque son exactamente iguales. La razón de hacer esto es que SymPy reemplaza `r` y `theta` por sus expresiones en términos de `x` e `y`. Esto es así por que en las líneas 12 y 13 del código anterior hemos declarado `r` y `theta` como expresiones. Cada vez que uno invoca estas variables, SymPy nos devuelve las expresiones que representan. Oviamente SymPy “no se da cuenta” que nosotros queremos expresar todo en función de `r` y `theta` considerando estas variables como independientes. Las restantes derivadas son

```

>>> r . diff(x,2) . subs({x:rho*cos(phi),y:rho*sin(phi)}) . simplify()
2 sin(phi)**2/rho

```

$$r_{xx} = \frac{\sin^2(\theta)}{r}. \quad (8.19)$$

```

>>> theta . diff(x) . subs({x:rho*cos(phi),y:rho*sin(phi)}) . simplify()
2 -sin(phi)/rho

```

$$\theta_x = -\frac{\sin(\theta)}{r}. \quad (8.20)$$

```
>>> theta.diff(x,2).subs({x:rho*cos(phi),y:rho*sin(phi)}).simplify()
2| sin(2*phi)/rho**2
```

$$\theta_{xx} = \frac{2\sin(\theta)\cos(\theta)}{r^2}. \quad (8.21)$$

Sustituyendo en (8.18), (8.19), (8.20) y (8.21) en (8.17)

$$u_{xx} = u_{rr}\cos^2\theta + u_{\theta\theta}\frac{\sin^2\theta}{r^2} - 2u_{r\theta}\frac{\cos\theta\sin\theta}{r} + u_r\frac{\sin^2(\theta)}{r} + u_\theta\frac{2\sin(\theta)\cos(\theta)}{r^2}. \quad (8.22)$$

Para las derivadas respecto a  $y$  tenemos

$$u_{yy} = u_{rr}r_y^2 + u_{\theta\theta}\theta_y^2 + 2u_{r\theta}r_y\theta_y + u_r r_{yy} + u_\theta \theta_{yy}$$

Y las derivadas

```
>>> theta.diff(y).subs({x:rho*cos(phi),y:rho*sin(phi)}).simplify()
2| cos(phi)/rho
>>> r.diff(y).subs({x:rho*cos(phi),y:rho*sin(phi)}).simplify()
4| sin(phi)
>>> theta.diff(y,2).subs({x:rho*cos(phi),y:rho*sin(phi)}).simplify()
6| -sin(2*phi)/rho**2
>>> r.diff(y,2).subs({x:rho*cos(phi),y:rho*sin(phi)}).simplify()
8| cos(phi)**2/rho
```

Luego

$$u_{yy} = u_{rr}\sin^2\theta + u_{\theta\theta}\frac{\cos^2\theta}{r^2} + 2u_{r\theta}\frac{\cos\theta\sin\theta}{r} + u_r\frac{\cos^2(\theta)}{r} - u_\theta\frac{2\sin(\theta)\cos(\theta)}{r^2}. \quad (8.23)$$

De (8.22) y (8.23) obtenemos

$$u_{xx} + u_{yy} = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} \quad (8.24)$$

## 8.2. Apéndice B: Código SAGE para animación de tornos normales

## 8.2. APENDICE B: CÓDIGO SAGE PARA ANIMACIÓN DE TONOS NORMALES185

```
1 P.<x>=RR[ x ]
2 n=2
3 l=0
4 J= sum([( -1)^k / factorial(k) / gamma(k+1)*(x/2)^(2*k+n) for k in range(20)
5     ])
6 Ceros=J.roots()
7 Ceros=[ i[0] for i in Ceros if i[0]>0]
8 t,theta,r=var('t',theta,r')
9 u=cos(Ceros[1]*t)*cos(n*theta)*J(Ceros[1]*r)
10 gra=[]
11 Trans = Cylindrical('height', ['radius', 'azimuth'])
12 z=var('z')
13 Trans.transform(radius=r, azimuth=theta, height=z)
14 aux=parametric_plot3d([-1,-1,t],(t,-1,1),opacity=0)
15 for j in range(50):
16     gra=plot3d(u(t=2*pi/Ceros[1]*j/50),(r,0,1),(theta,0,2*pi),\
17     transformation=Trans,viewer='tachyon')+aux
18     str2='mem'+str(j)
19     #La sentencia siguiente guarda la gr fica
20     #\texttt{gra} en el directorio MiDirectorio
21     #Hay que descomentarlala para que funcione.
22     #gra.save('/MiDirectorio/'+str2+'.png')
```