Problemas del cálculo de variaciones

Fernando Mazzone

Dpto de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas Físico-Químicas y Naturales
Universidad Nacional de Río Cuarto Dpto de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad Nacional de La Pampa
CONICET

8 de julio de 2015

ÍNDICE

Índice

Ecuaciones de Newton

Sistema mecánico: n-puntos masa en un espacio euclideano tridimensional. Supuesto un sistema de coordenadas cartesiano, sean $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_n \in \mathbb{R}^3$ las coordenadas de los puntos masa, $\boldsymbol{x}_i = (x_{i,1}, x_{i,2}, x_{i,3})$, $i = 1, \dots, n$. Vamos a poner $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_n) \in \mathbb{R}^{3n}$.

Fuerzas: Supongamos que actúan fuerzas $\boldsymbol{f}_i = \boldsymbol{f}_i(t, \boldsymbol{x}(t), \dot{\boldsymbol{x}}(t))$ sobre cada masa m_i.

Leyes de movimiento de Newton

Suponiendo que el sistema satisface la segunda ley de Newton.

$$m_i \ddot{\boldsymbol{x}}_i = \boldsymbol{f}_i, \quad i = 1, \dots, n. \tag{1}$$

Sistemas conservativos

Definición

El sistema se llama conservativo si existe una función $U = U(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, con $U : \mathbb{R}^{3n} \times \mathbb{R}^{3n} \to \mathbb{R}$ tal que

$$\boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}) = - \left.\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{x}_i}\right|_{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}})}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

El signo menos en el segundo miembro es sólo una convención.

Las derivadas del miembro de la derecha en (2) hay que entenderlas como que presuponen las tres identidades escalares

$$f_{i,j}(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}) = \left.\frac{\partial U}{\partial x_{i,j}}\right|_{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}})}, \quad i = 1, \ldots, n; j = 1, 2, 3.$$

ECUACIONES DE EULER-LAGRANGE

En un sistema conservativo se define la energía cinética $T : \mathbb{R}^{3n} \to \mathbb{R}$ por

$$T(\boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{|\boldsymbol{y}_i|}{2}, \quad \boldsymbol{y} = (\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_n) \in \mathbb{R}^{3n}$$

y la energía potencial por U.
Vamos a definir la función de Lagrange o Lagrangiano por

$$\boxed{L(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{|\boldsymbol{y}_i|}{2} + U(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})} \tag{3}$$

Ecuaciones de Euler-Lagrange