

Índice general

1 Generalidades y ecuaciones de primer orden

1.1 ¿Qué son las ecuaciones diferenciales?

Definición 1.1.1 (Ecuación diferencial, definición informal) Es una o varias relaciones entre una o varias variables dependientes y sus tasas de cambio respecto a ciertas variables independientes.

El problema básico asociado a las ecuaciones diferenciales es hallar las variables dependientes que las resuelven.

Las ecuaciones diferenciales son usadas muy a menudo en matemática aplicada, puesto que muchas leyes (de la física por ejemplo) se expresan a través de este tipo de ecuaciones.

Ejemplo 1.1.1 Modelizar matemáticamente el movimiento de un cuerpo de masa m en las proximidades de la superficie terrestre, asumiendo que su movimiento es sobre la vertical y que las fuerzas que sobre él actúan son la gravedad y el rozamiento con el aire.

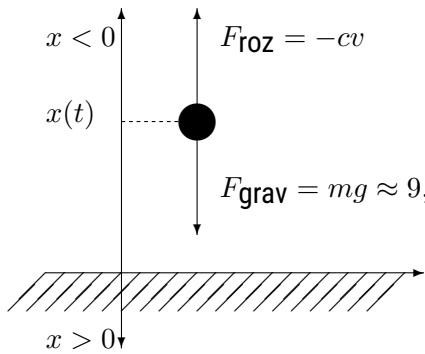


Figura 1.1: Caída libre

$x(t)$ = posición a lo largo de la vertical, relativo a un eje de coordenadas

$v(t) = \frac{dx}{dt}$ = velocidad

$F_{grav} =$ fuerza debida a la gravedad = mg
donde $g = 9,8m/s^2$ $F_{roz} =$ fuerza de rozamiento, proporcional a la velocidad y de sentido contrario = $-cv$, $c > 0$.

Usamos la Segunda Ley de Newton, esto es la suma de las fuerzas totales que actúan sobre un cuerpo de masa m es igual al producto de la masa m y la aceleración $a(t)$. Recorremos que la aceleración es la tasa de cambio de la velocidad, es decir la derivada segunda de la posición.

Usando todas las relaciones mencionadas

$$\begin{aligned} ma(t) &= mv'(t) = F_{total} \\ &= F_{grav} + F_{roz} \\ &= mg - cv \end{aligned}$$

vale decir

$$x''(t) + \frac{c}{m}x'(t) = g. \quad (1.1)$$

$$v'(t) + \frac{c}{m}v = g. \quad (1.2)$$

1.2 Algunos conceptos relacionados con ecuaciones diferenciales

Definición 1.2.2 (Orden) El índice de la mayor derivada interviniente en la ecuación.

Por ejemplo la ecuación (1.1) es de orden 2 y la ecuación (1.2), si bien está estrechamente relacionada con la anterior, es de orden 1. Como regla casi general, cuanto menor es el orden, más fáciles de estudiar y/o resolver las ecuaciones son.

Definición 1.2.3 (Solución) Una función que satisface la relación que indica la ecuación.

Por ejemplo

$$v(t) = \frac{m}{c}g + ke^{-\frac{c}{m}t}, \quad (1.3)$$

resuelve (1.2), para todo $C \in \mathbb{R}$. No deberíamos perder tiempo en chequear una cuestión tan sencilla, pero aprovechemos la ocasión para usar SymPy.

```
>>>from sympy import *
>>>m,g,c,k,t=symbols('m,g,c,k,t')
>>>v=m/c*g+k*exp(-c/m*t)
>>>simplify(v.diff(t)+c/m*v)
g
```

Notar que las líneas que comienzan con el signo del prompt >>> indican entradas por línea de comandos y las que comienzan sin este signo son las respuestas del interprete.

Rara vez utilizaremos las siguientes funcionalidades de sympy, pero es oportuno decir que SymPy puede encontrar la solución a una ecuación diferencial

```
>>>v=symbols('v',cls=Function)
>>>EqCaida=Eq(v(t).diff(t)+c/m*v(t),g)
>>>Vel=dsolve(EqCaida,v(t))
>>> Vel
v(t) == (g*m + exp(c*(C1 - t/m)))/c
```

La solución obtenida es la ya conocida. Es instructivo averiguar que tipo de dato tiene la variable Vel

```
>>> type(Vel)
<class 'sympy.core.relational.Equality'>
```

A este tipo de cuestiones hay que prestar atención cuando se trabaja con sympy, pues existe la tendencia a confundir los conceptos matemáticos con los propios del lenguaje. Por ejemplo, matemáticamente una solución es una función. Sin embargo, en este caso, cuando le solicitamos una solución a sympy nos entrega un objeto de tipo "relación de igualdad".

Definición 1.2.4 (Ecuación diferencial ordinaria (EDO)) Es una ecuación donde las variables dependientes sólo dependen de una única variable independiente.

Las ecuaciones (1.1) y (1.2) son ejemplo de ello, la variable independiente es el tiempo.

Definición 1.2.5 (Ecuación en derivadas parciales (EDP)) Es una ecuación donde las variables dependientes dependen de más de una variable independiente.

Ejemplo de este tipo de ecuación es la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Puede ocurrir también que dispongamos de varias ecuaciones diferenciales que se deben satisfacer simultáneamente. En estos casos, el conjuntos de ecuaciones se suele escribir como una única ecuación vectorial. Por este motivo, en algunas ocasiones cuando dispongamos de una única ecuación diremos que tenemos una ecuación *escalar*.

Definición 1.2.6 (Sistema de ecuaciones) Es un conjunto de ecuaciones diferenciales que se deben satisfacer simultáneamente.

En ese caso es de esperar que tengamos varias incógnitas en nuestro problema. En general una ecuación escalar determina sólo una incógnita. De hecho aquí ocurre, a semejanza con ecuaciones algebraicas, que es frecuente necesitar tantas ecuaciones como incógnitas.

Ejemplo 1.2.2 El sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -\operatorname{sen}(x) \end{cases}$$

es muy conocido pues modeliza el movimiento de un péndulo.

Muy a menudo hablaremos de resolver una ecuación, pero es oportuno discutir qué queremos significar con esto.

Definición 1.2.7 (Resolver una ecuación) Es expresar la solución como combinaciones algebraicas y composiciones de funciones que consideramos elementales.

Esta definición contiene una vaga apelación a ciertas "funciones elementales". El universo de funciones que se considera elemental es una cuestión política, no matemática. En principio, consideraremos elementales a las potencias, exponenciales, logarítmos, trigonométricas y trigonométricas inversas. No obstante esta lista se puede expandir con muchas funciones especiales. Las operaciones permitidas para combinar estas funciones también están sujetas a convenciones. Por ejemplo, admitiremos como válida una expresión que contenga una integral, al menos en el caso que no sea claro como resolver esta integral.

Casi todo este curso trata con la discusión de métodos para resolver ecuaciones. Sin embargo resolver ecuaciones no es quizás el problema principal relacionado con las ecuaciones diferenciales. No importa tanto lograr una expresión formal de la solución, como, por ejemplo, conocer las propiedades que poseen las soluciones. Al fin y al cabo, uno conoce una función a través de sus propiedades.

Definición 1.2.8 (Solución general) Usualmente una ecuación presenta infinitas soluciones. Una solución general es una expresión que representa todas estas soluciones. Es habitual que una solución general contenga parámetros. Cada elección de estos parámetros determina una solución distinta.

Por ejemplo (1.3) es la solución general de (1.2). La afirmación anterior requiere una demostración puesto que sólo hemos mostrado que (1.3) es solución, pero no que toda solución se expresa con (1.3). Para demostrar la afirmación, hay que multiplicar ambos miembros de (1.2) por $e^{\frac{c}{m}t}$ y luego integrar respecto a t

$$\frac{mg}{c} e^{\frac{c}{m}t} = \int g e^{\frac{c}{m}t} dt = \int v'(t) e^{\frac{c}{m}t} + \frac{c}{m} e^{\frac{c}{m}t} v dt = e^{\frac{c}{m}t} v + C.$$

Despejando v del primer y último miembro obtenemos (1.3) con $k = -C$.

Ejemplo 1.2.3 En algunas ocasiones sólo podemos dejar una relación implícita entre las variables dependientes e independientes. Por ejemplo

$$x = e^y + y + C \quad \text{para } C \in \mathbb{R} \tag{1.4}$$

es solución general de

$$y'(e^y + 1) = 1.$$

Vamos a chequear sólo que (1.4) es solución, dejando la justificación que toda solución tiene esa forma para más adelante. Derivando (1.4)

$$1 = e^y y' + y'$$

Luego $y' = 1/(1 + e^y)$. Reemplazando esta relación en la ecuación diferencial corroboramos que es solución.

1.3 Definición formal

Definición 1.3.9 (Ecuación diferencial) Una ecuación diferencial ordinaria de orden n es una relación de la forma

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0.$$

donde $F : (a, b) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, Ω es abierto de \mathbb{R}^{n+1} y (a, b) un intervalo de \mathbb{R} .

Ejemplo 1.3.4 El problema de hallar una primitiva de una función es una ecuación diferencial que, como ya se ha visto en cursos iniciales de análisis, se relaciona con el concepto de integral. Supongamos $f : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Consideremos la ecuación diferencial

$$y'(x) = f(x).$$

Sea $x_0 \in (a, b)$, integrando respecto a x entre x_0 y x

$$y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^x f(t)dt$$

Que es una solución general. Quedaría determinada una única solución si, por ejemplo, conociersemos $y(x_0)$.

Ejemplo 1.3.5 Supongamos $f : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como antes. Consideremos la ecuación diferencial

$$y''(x) = f(x).$$

Tomemos una integral indefinida respecto a x

$$y'(x) = C_1 + \int f(t)dt$$

Ahora deberemos tomar una integral indefinida más

$$y(x) = C_2 + C_1 t + \int \left(\int f(x)dx \right) dx.$$

Ahora quedan dos constantes C_1 y C_2 .

En el caso de un sistema de ecuaciones diferenciales, la forma de describirlo es esencialmente igual a la de la Definición 1.3.9. La nueva definición contiene a la Definición 1.3.9 como caso particular.

Definición 1.3.10 (Sistema de ecuación diferenciales) Una sistema de k -ecuaciones diferenciales ordinarias de orden n es una relación de la forma

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0.$$

donde $F : (a, b) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$,

$$\Omega \subset \underbrace{\mathbb{R}^k \times \cdots \times \mathbb{R}^k}_{n+1-\text{veces}}$$

es abierto y (a, b) un intervalo de \mathbb{R} . Notar que el $=$ en la derecha de la ecuación está en \mathbb{R}^k y que tenemos k ecuaciones e incógnitas, las k componentes de $y =$

(y_1, \dots, y_k) .

Ejemplo 1.3.6 En el caso del péndulo $k = 2, n = 1$, mientras que $(a, b) = \mathbb{R}, \Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ y $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ viene dada por

$$F \left(\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \xi - v \\ \eta + \operatorname{sen}(x) \end{pmatrix}$$

Más adelante veremos que toda ecuación, o sistemas de ecuaciones, ordinaria de orden n se puede reducir a un sistema de orden 1. De modo tal que es más frecuente considerar este tipo de sistemas. También es común considerar, se trate ya de ecuaciones escalares o sistemas, ecuaciones donde es posible despejar de manera explícita la derivada de mayor orden. A esta forma la denominaremos *forma explícita* de la ecuación

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)). \quad (1.5)$$

1.4 Problemas bien planteados, condiciones iniciales

La siguiente definición expresa lo que entenderemos cuando digamos que un problema está bien planteado.

Definición 1.4.11 (Principio de Hadamard) Un problema se dice bien planteado según Hadamard si satisface que

1. El problema admite solución
2. La solución es única
3. La solución depende de manera continua de los datos numéricos del problema.



Jacques Hadamard
(1865-1963)

Como hemos visto, una ecuación diferencial no determina una única solución, por consiguiente no sería un problema bien planteado. Debemos agregar relaciones a nuestro problema para que sea bien planteado. Es así que aparecen condiciones iniciales, problemas de contorno, etc.

Definición 1.4.12 (Problemas de valores iniciales (PVI)) Sea $x_0 \in (a, b)$, $F : (a, b) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ e $y_0, y_0^1, \dots, y_0^{n-1} \in \mathbb{R}$. Las siguientes relaciones se denominan problema de valores iniciales

$$\begin{cases} F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 & x \in (a, b) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0^1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1} \end{cases} \quad (1.6)$$

Más adelante demostraremos el teorema de existencia y unicidad para ecuaciones y sistemas de ecuaciones. Este teorema nos dice que, para ciertas F , el problema (1.6) tiene una única solución alrededor de un entorno de x_0 .

Es común en las aplicaciones físicas de las EDO, que la variable x represente el tiempo e $y = y(x)$ represente alguna cantidad física (posición, velocidad, temperatura, etc) caracterizando a cierto sistema físico. Es muy frecuente que aparezcan ecuaciones de orden 2 ($n = 2$). En esta situación, al par (y, y') se lo denomina *estado del sistema* y las

condiciones 1 y 2 en la Definición 1.4.11 se leen como que el estado del sistema en un momento x_0 dado determina el estado del mismo en cualquier otro momento. Este es el postulado principal de la corriente filosófica conocida por determinismo.

Es común que una ecuación que modela un sistema físico dependa de parámetros. Pensar por ejemplo del papel de la masa en la ecuación (1.1). Estos parámetros o incluso los valores iniciales del problema (1.6) dependen muchas veces de resultados de mediciones y sólo es posible tener de ellos un valor aproximado. Por consiguiente, casi nunca se resuelve el PVI que se debería resolver, sino otro, con parámetros y valores iniciales aproximadamente iguales a los correctos¹. La condición 3 en la Definición 1.4.11 expresa el hecho de que las soluciones a PVIs aproximadamente iguales son aproximadamente iguales entre sí.

Vamos a destacar la siguiente instancia particular de la Definición 1.6.

Definición 1.4.13 (PVI para ecuaciones de primer orden) La ecuación general de primer orden tiene la forma

$$F(x, y(x), y'(x)) = 0,$$

donde $F : (a, b) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ y Ω abierto de \mathbb{R}^2 . Con frecuencia asumiremos que y' se despeja de la relación anterior, es decir que existe $f : \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$, Ω' abierto de \mathbb{R}^2 , tal que

$$y' = f(x, y).$$

Bajo esta suposición, si $(x_0, y_0) \in \Omega'$ el problema de valores iniciales se escribe

$$\begin{cases} y' &= f(x, y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases}$$

1.5 Familias paramétricas de funciones

Hemos dicho que en el común de los casos es de esperar que una ecuación tenga asociado un conjunto de soluciones. En esta sección vamos a preguntarnos sobre el problema inverso, dado un conjunto de funciones encontrar una ecuación que lo tenga por solución.

Problema. Dada una familia paramétrica de funciones

$$y = y(x, c), \quad (1.7)$$

dependiente del parámetro $c \in \mathbb{R}$, ¿Será posible hallar una ecuación para la cual la familia sea la solución general?

En líneas generales la respuesta es si. Nos conviene expresar (1.7) como una ecuación implícita

$$f(x, y, c) = 0. \quad (1.8)$$

Derivando esta ecuación respecto a x

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y'(x, c) = 0. \quad (1.9)$$

Ahora es posible eliminar c de (1.8) y (1.9) al costo de quedarnos con una sola ecuación.

Ejemplo 1.5.7 Encontrar la ecuación que satisface la familia paramétrica

$$x^2 + y^2 = c^2.$$

¹Estamos usando una noción bastante ingenua de corrección

Derivamos

$$2x + 2yy' = 0.$$

Ya está!!!

Ejemplo 1.5.8 Idem $x^2 + y^2 = 2cx$. Derivando

$$2x + 2yy' = 2c.$$

Eliminamos c de las dos relaciones

$$\frac{x^2 + y^2}{x} = 2x + 2yy' \Rightarrow y' = \boxed{\frac{y^2 - x^2}{2xy}}.$$

Dada una familia paramétrica

$$f(x, y, c) = 0,$$

encontrar otra

$$g(x, y, d) = 0$$

tal que los ángulos que forman los gráficos entre las funciones de una y de otra familia sean rectos en cada punto de corte entre ellos.

Para resolver este problema se completan estos pasos

- Se encuentra la ecuación diferencial que satisface la familia dada, digamos

$$y' = h(x, y).$$

- Se resuelve

$$y' = -\frac{1}{h(x, y)}.$$

Ejemplo 1.5.9 Encontrar la familia de curvas ortogonales a la flia de circunferencias

$$x^2 + y^2 = c^2$$

Hallamos antes que la ecuación que satisfacen estas curvas es

$$y' = -\frac{x}{y}.$$

Luego deberíamos resolver

$$y' = \frac{y}{x}.$$

Que aún no sabemos resolver, pero SymPy si!!!

```
dsolve
Sintaxis (ampliar en la documentación SymPy)
dsolve(eq, f(x), hint)
eq: Ecuación (posicional)
f(x): función incognita (posicional)
hint: Método a emplear. Argumento con nombre hint='cadena'.
```

```
x=symbols('x')
y=Function('y')(x)
MiEcua=Eq(y.diff(x),y/x)
f=dsolve(MiEcua,y)
```

Resultado: Flía rectas por el origen.

La instrucción

```
f=dsolve(MiEcua,y,hint='separable')
```

produce el mismo resultado.

```
plot
```

Sintaxis (Ampliar en la documentación SymPy)

Para un gráfico simple

```
plot(expr, rango, opcionales(claves))
```

expr: Expresión a graficar

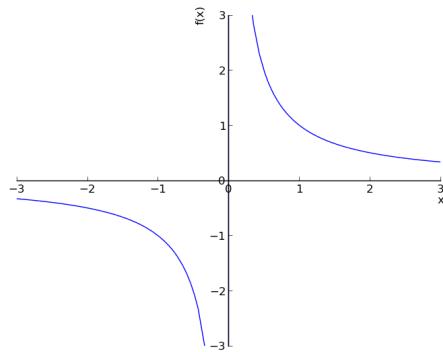
rango: Conjunto donde varia la variable independiente

opcionales Argumentos que modifican la apariencia del gráfico. Generalmente de la forma de clave=valor

Ejemplo 1.5.10

```
x=symbols('x')
f=plot(1/x,(x,-3,3),ylim=(-3,3))
```

Resultado:



Ejemplo 1.5.11 Grafiquemos una familia paramétrica de funciones.

```
from sympy import *
x,y=symbols('x,y')
Rango=range(21)
L=[tan(pi*k/21.0) for k in Rango]
p=plot(L[0]*x,(x,-2,2),show=False,xlim=(-2,2),\
ylim=(-2,2),aspect_ratio=(1,1))
for pend in L[1:]:
    p1=plot(pend*x,(x,-2,2),show=False,\n
    xlim=(-2,2),ylim=(-2,2),aspect_ratio=(1,1))
    p.append(p1[0])
for r in range(1,10):
    p1=plot_implicit(Eq(x**2 + y**2, 0.2*r),\n
    show=False,aspect_ratio=(1,1),xlim=(-2,2),ylim=(-2,2))
    p.append(p1[0])
p.show()
```

Resultado:

Familias paramétricas de funciones en coordenadas polares. En ocasiones la ecuación de la familia de curvas está dada en otras coordenadas. Por ejemplo supongamos que tenemos la familia de curvas dadas por una EDO en coordenadas polares

$$\frac{dr}{d\theta} = f(r, \theta),$$

y queremos hallar su familia ortogonal.

Solución: Calculemos dy/dx para las curvas en la familia dada.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{r_\theta \sin \theta + r \cos \theta}{r_\theta \cos \theta - r \sin \theta} = \frac{f \sin \theta + r \cos \theta}{f \cos \theta - r \sin \theta},$$

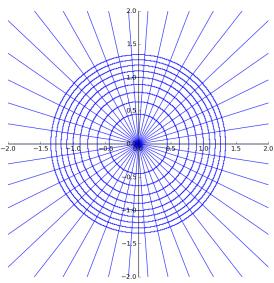


Figura 1.2: Familia curvas ortogonales

donde $r_\theta = dr/d\theta$. La familia ortogonal tiene que satisfacer

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f \cos \theta - r \sin \theta}{f \sin \theta + r \cos \theta}$$

Luego

$$\frac{r_\theta \sin \theta + r \cos \theta}{r_\theta \cos \theta - r \sin \theta} = -\frac{f \cos \theta - r \sin \theta}{f \sin \theta + r \cos \theta}.$$

Si despejamos r_θ llegamos a la ecuación de la familia de curvas ortogonales en coordenadas polares

$$\frac{dr}{d\theta} = -\frac{r^2}{f}. \quad (1.10)$$

Aconsejamos ampliar este tema de [?].

1.6 Separación de variables

En esta unidad presentaremos algunos métodos de solución para ecuaciones de primer orden. Empezaremos con el, quizás, más popular de todos, el método de *separación de variables*.

Definición 1.6.14 (Ecuaciones en variables separadas) Se dice que en una ecuación de primer orden

$$y' = f(x, y)$$

separan las variables, si es posible la factorización $f(x, y) = g(x)h(y)$.

Una ecuación en la que se separan variables se puede resolver siguiendo los siguientes pasos. Hallamos los valores y_0 tales que cuando $h(y_0) = 0$. Notar que para cualquiera de esos valores la función constante $y(x) \equiv y_0$ es solución. De esta manera podemos encontrar algunas soluciones por esta consideración.

Para hallar otras, asumamos $h(y) \neq 0$.

$$\frac{y'}{h(y)} = g(x),$$

Si H y G son primitivas de $1/h$ y g respectivamente por la regla de la cadena tenemos

$$\frac{d}{dx}H(y) = \frac{d}{dx}G(x)$$

Luego

$$H(y) = G(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Por último, si podemos encontrar la inversa de H

$$y(x) = H^{-1}(G(x) + C), \quad (1.11)$$

será la solución general junto con aquellas soluciones constantes obtenidas antes.

Ejemplo 1.6.12 Resolver

$$y' = \frac{y}{x}.$$

Como queremos agrupar todos los factores que contienen la variable y en uno de los miembros, debemos "pasar dividiendo" y . Esto es imposible si $y = 0$. Reemplazando $y \equiv 0$ en la ecuación vemos que la resuelve. Así hemos encontrado nuestra primera solución $y \equiv 0$. El resto del método, es común llevarlo adelante de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} &\implies \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \implies \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \\ &\implies \ln|y| = \ln|x| + C \implies |y| = k|x|, \text{ con } k > 0 \\ &\implies y = kx, \text{ con } k \neq 0 \end{aligned}$$

Notar que, al fin y al cabo, la solución general es $y = kx$ con $k \in \mathbb{R}$. La solución "díscola" $y \equiv 0$ también se escribe $y = kx$, cuando $k = 0$.

```
classify_ode: clasificación de ecuaciones Sintaxis
classify_ode(eq, f(x))
```

Sympy contiene un comando que nos dice que método es posible aplicar a una ecuación dada.

```
x=symbols('x')
y=Function('y')(x)
MiEcua=Eq(y.diff(x),y/x)
tipo=classify_ode(MiEcua,y)
```

Resultado:

```
('separable', '1st_exact', '1st_linear',
'almost_linear', 'lie_group', etc)
```

1.7 Aplicaciones

Vamos a describir algunos ejemplos. Algunos de ellos llevan a problemas matemáticos muy simples. No obstante es oportuno discutirlos por dos motivos, habituarnos a la utilización de la matemática para resolver problemas de otras ciencias y sentar las bases para discutir problemas más relevantes desde una óptica matemática.

1.7.1 Ley de reproducción normal

En muchos ejemplos de biología, química-física, etc, hay magnitudes que crecen(decrecen) siguiendo una ley que denominaremos Ley de reproducción normal. Según esta ley la cantidad de individuos, sustancia, materia, energía, etc, que se agrega o elimina de una población, cuerpo, etc por unidad de tiempo es proporcional a la cantidad de individuos, sustancia, etc que hay presente. Una población de seres vivos puede reproducirse de esta manera bajo algunas circunstancias especiales, por ejemplo si cuenta con fuente ilimitada de alimentos.

Si $P(t)$ es la cantidad de individuos en el momento t , la ley de reproducción normal establece en este caso la siguiente ecuación diferencial de primer orden

$$P'(t) = kP(t), \quad \text{con } k > 0.$$

La solución es hallada con suma facilidad, por ejemplo usando separación de variables, siendo ella

$$P(t) = Ce^{kt}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

La constante C se puede determinar si tenemos un problema a valores iniciales (pvi), por ejemplo $P(0) = P_0$, siendo $P_0 \in \mathbb{R}$ dado. En ese caso $C = P_0$.

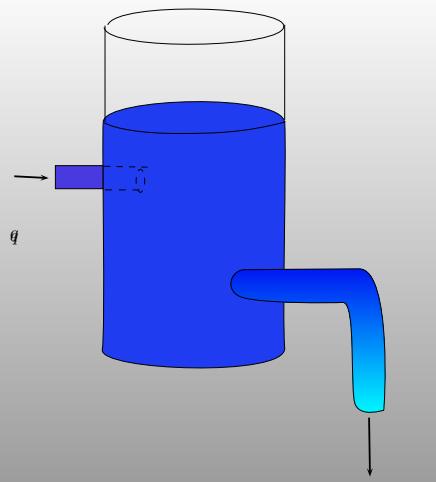
Otro ejemplo de comportamiento similar es la desintegración radiactiva. Algunos átomos de ciertas sustancias, pueden “desarmarse” en átomos de otras sustancias. En el proceso suelen emitir radiaciones. La velocidad de desintegración sigue una ley de reproducción normal pero hay que tener en cuenta que la materia radiactiva, es decir la “población” en este caso, se pierde. Si $x(t)$ es la masa de materia radiactiva en el momento t , evolucionará acorde a la ley

$$x'(t) = -kx(t), \quad \text{con } k > 0.$$

1.7.2 Soluciones

Problema

Un tanque contiene inicialmente $N \text{ m}^3$ de H_2O entre los cuales hay disueltos $C \text{ kg}$ de sal común $NaCl$. A través de una boca de entrada y una de salida empieza circular la solución, entrando y saliendo con el mismo caudal $q \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$. Se supone que la solución entrante tiene una concentración conocida r . Encontrar la cantidad de sal en el momento t .



Sea $x(t)$ la cantidad de $NaCl$ en el tanque en el momento t . entonces

$$\begin{aligned} x'(t) &= \text{cantidad que entra} - \text{cantidad que sale} \\ &= qr - q \frac{x(t)}{N} \end{aligned}$$

1.7.3 Dinámica del punto

1.7.3.1 Discusión Teórica

Vamos a recordar algunas temáticas de la asignatura física. En particular, el tema del movimiento de un cuerpo de masa m , al que podemos suponer puntual, dentro del espacio euclídeo tridimensional. A un cuerpo de estas características lo llamaremos punto masa. Denotamos por $x(t) \in \mathbb{R}^3$ su posición en algún marco de referencia cartesiano

En mecánica newtoniana, un sistema de referencia inercial es un sistema de referencia en el que las leyes del movimiento cumplen las leyes de Newton

ortogonal e inercial. Suponemos que sobre él actúa una fuerza F . Recordemos que $x'(t)$ es la velocidad $v(t)$ y que $x''(t)$ es la aceleración $a(t)$. La segunda ley de Newton implica que

$$mx''(t) = F \quad (1.12)$$

Supongamos que el movimiento del punto masa se realiza entre los momentos t_0 y t_1 . Como has visto en Cálculo III la longitud de la curva recorrida $s(t)$ se puede calcular por

$$s = \int_{t_0}^{t_1} |x'(t)| dt = \int_{t_0}^{t_1} |v(t)| dt. \quad (1.13)$$

A s se lo suele denominar elemento de arco. Es común querer utilizar a s como variable independiente en lugar de t , puesto que algunas fórmulas se simplifican de esta forma. Por ejemplo

$$F \cdot v(t) dt = F \cdot \frac{v(t)}{|v(t)|} |v(t)| dt = F_t ds, \quad (1.14)$$

donde F_t denota la proyección de la fuerza F sobre la dirección tangente a la trayectoria.

Si integramos (1.14) entre t_0 y t_1 y usamos (1.12) obtenemos

$$\begin{aligned} W := \int_{s_0}^{s_1} F_t ds &= \int_{t_0}^{t_1} F \cdot v(t) dt \\ &= m \int_{t_0}^{t_1} v'(t) \cdot v(t) dt \\ &= \frac{m}{2} \int_{t_0}^{t_1} \frac{d|v|^2}{dt} dt \\ &= \frac{m}{2} |v(t_1)|^2 - \frac{m}{2} |v(t_0)|^2. \end{aligned} \quad (1.15)$$

A la cantidad $\frac{m}{2}|v|^2$ se la denomina *energía cinética* E_c y a W se lo denomina *trabajo*. Las relaciones obtenidas dicen que la variación de la energía cinética es igual al trabajo realizado $W = \Delta E_c$ por la fuerza F . El trabajo realizado depende de la proyección tangencial de la fuerza F_t . Llamaremos a esta relación Principio de Conservación de la Energía Mecánica.

Vamos a referirnos por *rapidez* al módulo de la velocidad. Si uno quiere incrementar o reducir la rapidez final $|v(t_1)|$ entonces deberá tener fuerzas con una componente tangencial no nula. Dicho de otra forma, si la fuerza es perpendicular al movimiento, no hay cambio de rapidez.

Hay fuerzas que siempre actúan en la dirección del movimiento. El ejemplo más conocido son las fuerzas de fricción, resistencia del aire, resistencia a la rodadura, etc. Estás fuerzas, actúan sólo en la dirección del movimiento y se oponen a él.

Por el contrario hay otras que actúan perpendiculares al movimiento $F_t = 0$. Ejemplo de ello son las fuerzas que mantienen a un cuerpo moviéndose a lo largo de una guía. Por ejemplo un niño cayendo por un tobogán. Que el niño no se despegue de la guía (tobogán) se explica por la aparición de una fuerza que se denomina reacción de vínculo que actúa en la dirección perpendicular al movimiento esto es decir a la guía. Esta fuerza debe compensar a toda otra fuerza que trata de apartar al cuerpo de la guía. En el caso del tobogán la gravedad trata de apartar al niño de aquél.

1.7.3.2 Cuerpos cayendo por guías

Analicemos más en detalle el movimiento de un cuerpo cayendo a lo largo de una guía estando además influído por la acción de la gravedad. Supondremos el movimiento en las proximidades de la superficie de la Tierra y por ello, supondremos que la magnitud de la fuerza de la gravedad es la constante mg .

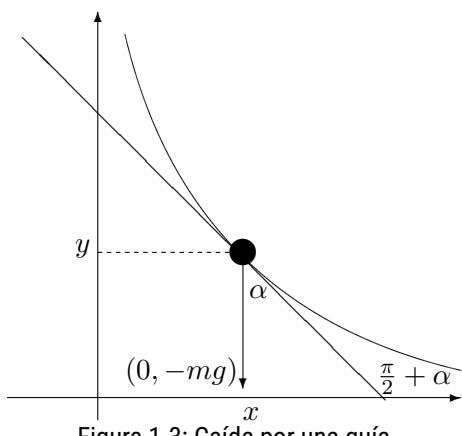


Figura 1.3: Caída por una guía

Supongamos que la guía esta confinada a un plano. Introducimos un sistema de coordenadas ortogonales en dicho plano, con el suelo paralelo al eje x

El elemento longitud de arco s de una curva que es el gráfico de una función $y(x)$ para x en $[x_0, x_1]$ viene dado por

$$s = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'(x)^2} dx$$

La fuerza de vínculo de la guía tiene componente tangencial nula, la gravedad tiene una componente tangencial no nula. Su magnitud es $mg \cos \alpha$ (ver dibujo). Vamos a tratar de expresar $\cos \alpha$ en términos de $y'(x)$. Supongamos $\cos \alpha > 0$ e $y'(x) < 0$. Los demás

casos quedan como **ejercicio**.

$$\tan^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1$$

e

$$y'(x) = \tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\frac{1}{\tan \alpha}$$

Podemos usar las relaciones anteriores para escribir $\cos \alpha$ en función de $y'(x)$

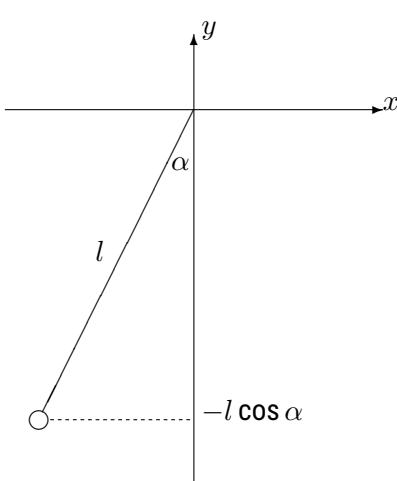
$$\cos \alpha = -\frac{y'(x)}{\sqrt{1 + y'(x)^2}} \quad (1.16)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \frac{m}{2}|v(t_1)|^2 - \frac{m}{2}|v(t_0)|^2 &= \int_{s_0}^{s_1} F_t ds = \int_{x_0}^{x_1} F_t \frac{ds}{dx} dx \\ &= -mg \int_{x_0}^{x_1} \frac{y'(x)}{\sqrt{1 + y'(x)^2}} \sqrt{1 + y'(x)^2} dx \quad (1.17) \\ &= -mg(y_1 - y_0) \end{aligned}$$

Esto nos permite escribir la rapidez en función de la altura respecto al piso.

1.7.4 El péndulo



Se trata de una masa puntual m suspendida de un punto por medio de una barra de longitud l a la que suponemos sin masa. Equivale al movimiento sobre una guía circular. Usaremos el ángulo α marcado en la figura, como variable dependiente.

Supondremos que el origen del sistema de coordenadas está sobre el punto de amarre de la barra. Entonces de (1.17) con $t_1 = t$ deducimos

$$\begin{aligned} \frac{m|v(t)|^2}{2} - \frac{m|v(t_0)|^2}{2} \\ = -mg(y(t) - y(t_0)) \\ = mg \cos \alpha(t) - mg \cos \alpha(t_0). \end{aligned}$$

Figura 1.4: Péndulo

Ahora la posición de la masa es $x(t) = l(\cos \alpha, -\sin \alpha)$ luego

$$v(t) = l\alpha'(t)(\cos \alpha, \sin \alpha).$$

Tomando módulo

$$|v(t)|^2 = l^2\alpha'(t)^2.$$

Entonces

$$\frac{ml^2\alpha'(t)^2}{2} = mgl \cos \alpha(t) - mgl \cos \alpha(t_0) + \frac{mv(t_0)^2}{2}.$$

Derivando esta relación

$$ml^2\alpha'(t)\alpha''(t) = -mgl\alpha'(t) \operatorname{sen} \alpha(t).$$

De esto deducimos la ecuación del péndulo

$$\boxed{\alpha''(t) = -\frac{g}{l} \operatorname{sen} \alpha(t)}.$$

1.8 Ecuaciones homogéneas

Volvemos al problema de resolver ecuaciones de primer orden. Abordamos un nuevo método.

Definición 1.8.15 (Funciones homogéneas) Una función $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se dice homogénea de grado α si

$$f(rx, ry) = r^\alpha f(x, y).$$

Ejemplo 1.8.13

- $f(x, y) = \frac{y}{x}$ es homogénea de grado 0.
- Más generalmente, cualquier función $f(x, y)$ que dependa sólo de x/y , esto es que se escriba de la forma $f(x, y) = g(y/x)$ es homogénea de grado 0. Así $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$ es homogénea de grado 0 pues $\frac{x-y}{x+y} = \frac{1-x/y}{1+x/y}$
- $f(x, y) = \sum_{k=0}^n a_k x^k y^{n-k}$ es homogénea de grado n .

Definición 1.8.16 (Ecuaciones homogéneas) Una ecuación

$$y' = f(x, y) \tag{1.18}$$

tal que f es homogénea de grado 0 se llamará ecuación homogénea.

Si una ecuación del tipo (1.18) es homogénea entonces se transforma en una ecuación separable mediante el cambio de variable dependiente $[z = y/x]$. En efecto, para $x \neq 0$

$$f(x, y) = x^0 f\left(1, \frac{y}{x}\right) = f(1, z)$$

y

$$y' = z'x + z$$

Como $y' = f(x, y)$ tenemos

$$z'x + z = f(1, z) \implies \frac{dz}{f(1, z) - z} = \frac{dx}{x}. \quad (1.19)$$

Ejemplo 1.8.14 Resolver $y' = \frac{x+y}{x-y}$.

La ecuación (1.19) queda

$$\begin{aligned} \frac{dx}{x} &= \frac{dz}{\frac{1+z}{1-z}-z} = \frac{(1-z)dz}{1+z^2} \\ &\Downarrow \\ \ln|x| + C &= \arctan(z) - \frac{1}{2}\ln|1+z^2| \end{aligned}$$

1.9 Ecuaciones exactas

Definición 1.9.17 (Diferencial) Dada una función f de n variables independientes x_1, \dots, x_n definimos su diferencial por

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n. \quad (1.20)$$

Esta definición obviamente carece de rigor pues el miembro de la derecha en (1.20) contiene las expresiones indefinidas dx_j . La diferencial puede ser definida con toda corrección, es un ejemplo de forma diferencial, en particular es una 1-forma. En la unidad que sigue hablaremos un poco más del concepto de forma diferencial. El uso que faremos de las formas diferenciales es muy elemental, podríamos evitar por completo su uso al costo de usar una notación ligeramente menos compacta y simétrica.

Es costumbre escribir una ecuación diferencial como la 1-forma diferencial

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (1.21)$$

Que corresponde a la ecuación, escrita de manera tradicional, $y' = -M(x, y)/N(x, y)$.

Dada $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, satisfaciendo las condiciones del Teorema de la Función Implícita, la expresión

$$f(x, y) = c \quad (1.22)$$

define una familia paramétrica de curvas, con parámetro c . Derivando la expresión podemos representar esta familia como soluciones de la EDO

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}y' = 0 \iff \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0 \iff df = 0.$$

Esto nos sugiere la idea de que, dada una ecuación diferencial cualquiera, indaguemos si se puede escribir o puede ser transformada de alguna manera en una ecuación de la forma $df = 0$. Para que la ecuación (1.21), se pueda expresar como $df = 0$ se debe cumplir que $M = \partial f / \partial x$ y $N = \partial f / \partial y$. Vale decir el campo vectorial $(x, y) \mapsto (M(x, y), N(x, y))$ es un campo gradiente o conservativo, con potencial f .

No todo campo es un campo gradiente, recordemos el siguiente teorema del análisis vectorial.

Teorema 1.9.1 (Caracterización de campos conservativos) Sea \mathcal{O} un conjunto abierto y simplemente conexo de \mathbb{R}^n . Son equivalentes

1. El campo $F : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un gradiente.

Si una fuerza F está dada por $(M, N) = \nabla f$ (campo conservativo) reemplazando en (1.15) y llamando $U = -f$ obtenemos que $E := m|v(t)|^2/2 + U(x(t))$ es constante. Se dice que E es una magnitud conservada y se la denomina en este caso energía.

2. Si C es cualquier camino cerrado entonces

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = 0.$$

3.

$$\frac{\partial F^i}{\partial x_j} = \frac{\partial F^j}{\partial x_i}, \quad \text{para } i, j = 1, \dots, n$$

Pensando al campo \mathbf{F} como un campo de fuerzas sobre el espacio euclídeo tridimensional, el ítem 2 expresa que el trabajo realizado por la fuerza a lo largo de un camino cerrado es cero. El ítem 3 afirma que $\nabla \times \mathbf{F} = 0$, la fuerza es irrotacional.

El ítem 3 es simple de chequear. Una vez establecido que un campo es conservativo tendremos el problema de hallar el potencial f . Ilustremos esto con el campo $(x, y) \mapsto (M(x, y), N(x, y))$. Supongamos que \mathcal{O} es abierto de \mathbb{R}^2 y

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}, \quad \text{para } (x, y) \in \mathcal{O}.$$

En primer lugar debemos tener un campo escalar f tal que

$$M = \frac{\partial f}{\partial x} \Rightarrow f = \int M dx + C(y).$$

Ahora como $f_y = N$

$$N = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int M dx + C'(y) \Rightarrow C'(y) = N - \frac{\partial}{\partial y} \int M dx.$$

Para que esta ecuación tenga solución $N - \frac{\partial}{\partial y} \int M dx$ debe ser sólo función de y . Pero la condición necesaria y suficiente para ello es

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial x} \left(N - \frac{\partial}{\partial y} \int M dx \right) \\ &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \int M dx \\ &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \int M dx \\ &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}. \end{aligned}$$

Pero estamos bajo ese supuesto, entonces

$$f = \int M dx + \int \left(N - \frac{\partial}{\partial y} \int M dx \right) dy. \quad (1.23)$$

Ejemplo 1.9.15 Resolver $e^y dx + (xe^y + 2y)dy = 0$.

Solución: Aquí

$$M = e^y \quad y \quad N = xe^y + 2y.$$

Así

$$\frac{\partial M}{\partial y} = e^y = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

La ecuación es exacta. El potencial f debe cumplir

$$f = \int e^y dx = xe^y + C(y).$$

Luego

$$C(y) = \int \left(xe^y + 2y - \frac{\partial}{\partial y} xe^y \right) dy = y^2$$

Tener en cuenta que la función potencial f no es única, queda determinada hasta una constante aditiva de integración que podemos elegir a gusto ya que debemos encontrar sólo un potencial. Entonces podemos tomar

$$f = xe^y + y^2.$$

La solución general de la ecuación estará dada por

$$xe^y + y^2 = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Como no sabemos despejar y de aquí dejamos indicada de esta manera la solución.

1.10 Factores integrantes

Las ecuaciones exactas son raras, no obstante tenemos un recurso para llevar algunas ecuaciones no exactas a una equivalente y exacta.

Supongamos que la ecuación (1.21) no es exacta. La idea es encontrar una función $\mu(x, y)$ llamada factor integrante que haga exacta la ecuación

$$\mu(Mdx + Ndy) = 0.$$

Para ello se debe cumplir que

$$\frac{\partial \mu M}{\partial y} = \frac{\partial \mu N}{\partial x} \iff \boxed{\mu \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial \mu}{\partial y} M = \frac{\partial N}{\partial x} \mu + N \frac{\partial \mu}{\partial x}}. \quad (1.24)$$

Proposición 1.10.1(Existencia de factores integrantes) oda ecuación de primer orden (1.21), con $N \neq 0$, que tiene una solución general que se escribe como en (1.22), con $\partial f / \partial y \neq 0$ tiene un factor integrante.

Comentario: La suposición $N \neq 0 \neq \frac{\partial f}{\partial y}$, es razonable pues $N = 0$ implicaría que no podemos despejar y' de (1.21) y $\partial f / \partial y$ contradice las hipótesis del Teorema de la Función Implícita, herramienta necesaria para suponer que y es función de x

Dem. Si derivamos (1.22) conseguimos

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0.$$

De esta ecuación y (1.21) vemos que

$$-\frac{M}{N} = y' = -\frac{\partial f / \partial x}{\partial f / \partial y} \implies \frac{\partial f / \partial x}{M} = \frac{\partial f / \partial y}{N} =: \mu(x, y)$$

De la igualdad de arriba se deduce que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \mu M \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \mu N.$$

Es decir μ es factor integrante. □

La proposición anterior nos dice que, mientras la ecuación sea resoluble, siempre existe un factor integrante. Pero no ayuda a hallarlo dado que parte de la solución que es lo que queremos hallar. Otra alternativa es resolver la ecuación (1.24) que es una

ecuación en derivadas parciales para μ , que normalmente es más difícil que resolver la original. Así, mientras que el método es siempre aplicable, en la práctica es útil en situaciones específicas.

Hay que señalar que sólo necesitamos una solución de (1.24) y no su solución general. En la práctica se suele hacer alguna suposición sobre μ que simplifique la expresión. Es decir proponer alguna forma específica para μ que haga la ecuación (1.24) más sencilla de resolver. Por supuesto, a priori el factor integrante, si bien existe, no tiene ninguna forma predeterminada. Lo que hacemos es lo que en lenguaje culto se conoce como ansatz, y en lenguaje coloquial, que aquí es más significativo, estamos haciendo un lance o tratando de adivinar μ , sin mucho más criterio que buscarlo entre esas funciones con una forma (simple) predeterminada. Por ejemplo, es común suponer que μ es sólo función de una de las variables. Si por ejemplo asumimos que $\mu = \mu(x)$ la ecuación (1.24) se escribe

$$\mu \frac{\partial M}{\partial y} = \mu \frac{\partial N}{\partial x} + N \mu'(x) \implies \boxed{\frac{\mu'}{\mu} = \frac{\partial M / \partial y - \partial N / \partial x}{N}}$$

Este ansatz no siempre funcionará, para que lo haga, la función en el segundo miembro $(\partial M / \partial y - \partial N / \partial x) / N$ debe depender sólo de x . Si eso ocurre

$$\mu(x) = e^{\int \frac{\partial M / \partial y - \partial N / \partial x}{N} dx}. \quad (1.25)$$

es un factor integrante. Recordar que sólo necesitamos hallar uno, por ese motivo omitivos constantes de integración.

De manera similar, si la función

$$\frac{\partial N / \partial x - \partial M / \partial y}{M}$$

depende sólo de y tenemos que

$$\mu(y) = e^{\int \frac{\partial N / \partial x - \partial M / \partial y}{M} dy}$$

es un factor integrante que, en este caso, sólo depende de y .

Ejemplo 1.10.16 $ydx + (x^2y - x)dy = 0$.

Primero chequeemos la posible exactitud.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 \text{ y } \frac{\partial N}{\partial x} = 2xy - 1 \implies \text{no exacta.}$$

Ahora

$$\frac{\partial M / \partial y - \partial N / \partial x}{N} = \frac{2 - 2xy}{x(xy - 1)} = -\frac{2}{x}.$$

El factor integrante es

$$\mu(x) = e^{-2 \ln |x|} = \frac{1}{x^2}.$$

1.11 Aplicación: antenas y espejos parabólicos

Ejemplo 1.11.17 *Espejos, antenas parabólicos.* Hallar la forma del espejo curvo tal que el reflejo de todo haz de luz que viaja paralelo al eje x con dirección negativa respecto a este eje pasa por el $(0, 0)$.

Ejercicio 1.11.1 Dejamos como ejercicio demostrar que un haz de luz que se refleja sobre un espejo lo hace de tal manera que los ángulos que se forman con los rayos de incidencia y refracción y la tangente al espejo en el punto de incidencia

son iguales ($\beta = \alpha$ en el dibujo). Para resolver esto hay que usar el principio de mínimo tiempo de Fermat.

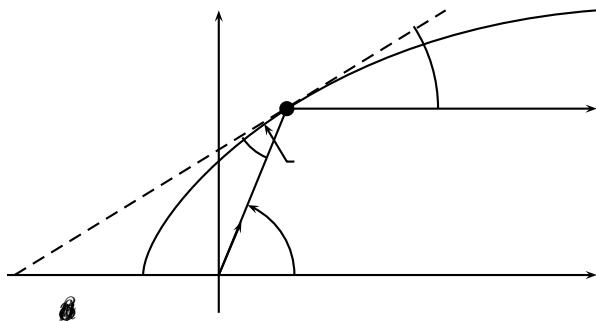


Figura 1.5: Reflejo en un espejo curvo

Solución. Sea (x, y) el punto de incidencia. Apelando a la geometría elemental, $\phi = \beta$ y $\theta = \alpha + \phi = 2\beta$. Como $\tan \theta = \frac{y}{x}$ y como

$$\begin{aligned}\tan \theta &= \tan 2\beta \\ &= \frac{2 \tan \beta}{1 - \tan^2 \beta},\end{aligned}$$

deducimos que

$$\frac{y}{x} = \frac{2dy/dx}{1 - (dy/dx)^2}.$$



Antena parabólica

Despejando

$$(\pm \sqrt{x^2 + y^2} + x)dx + ydy = 0 \quad (1.26)$$

La expresión sugiere introducir coordenadas polares

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta.$$

Atendiendo a (1.20) tenemos:

$$dx = \cos \theta dr - r \sen \theta d\theta, \quad dy = \sen \theta dr + r \cos \theta d\theta.$$

Sustituyendo en (1.26)

$$\mp r^2 \sin(\theta)d\theta + (\pm r \cos(\theta) + r)dr = 0.$$

Notar que

$$\frac{N_\theta - M_r}{M} = -\frac{1}{r}$$

es independiente de θ . Tenemos que $\mu(r) = r^{-1}$ es factor integrante. Multiplicando por μ llegamos a la ecuación exacta

$$\mp r \sen \theta d\theta + (\pm \cos \theta + 1)dr = 0.$$

Siguiendo las técnicas expuestas llegamos a la función potencial

$$\Phi(\theta, r) = \pm r \cos \theta + r.$$

Convirtiendo nuevamente a coordenadas cartesianas, encontramos que la solución general es

$$\pm x + \sqrt{x^2 + y^2} = c.$$

Despejando

$$y^2 = \mp 2xc + c^2 = 2c \left(\mp x + \frac{c}{2} \right)$$

Que es la familia de todas las parábolas con eje de simetría x y con foco en $(0, 0)$. El signo \mp refleja el hecho que el espejo podría mirar hacia un lado u otro.

1.12 Ecuaciones Lineales

Definición 1.12.18 (Ecuación lineal) Se llama ecuación diferencial lineal a una ecuación que es lineal respecto a la/s variables dependientes. La siguiente es la ecuación diferencial lineal general de primer orden

$$y' + p(x)y = q(x) \quad (1.27)$$

y la de segundo orden

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x). \quad (1.28)$$

Aquí p , q y r son funciones de x usualmente definidas sobre un intervalo abierto de \mathbb{R} .

La ecuación puede ser no lineal respecto a la variable independiente.

Es costumbre introducir los operadores diferenciales $L_1[y] = y' + py$ y $L_2[y] = y'' + py' + qy$. Para una ecuación lineal, los operadores L_1 y L_2 son lineales. Es decir, $L_1[y_1 + y_2] = L_1[y_1] + L_1[y_2]$.

Vamos a resolver la ecuación lineal de primer orden (1.27). Esto es sencillo pues la forma diferencial asociada

$$dy + (p(x)y - q(x))dx = 0 \quad (1.29)$$

tiene un factor integrante que depende sólo de x . En efecto como $M = p(x)y - q(x)$ y $N = 1$.

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{\partial M / \partial y - \partial N / \partial x}{N} = p(x).$$

Entonces $\mu(x) = e^{\int pdx}$ es factor integrante. Luego si multiplicamos por μ en (1.29), la expresión es exacta.

$$e^{\int pdx} dy + p(x)e^{\int pdx} y dx = q(x)e^{\int pdx} dx.$$

Podemos identificar rápidamente, sin necesidad de hacer cálculos, el correspondiente potencial.

$$d\left(e^{\int pdx} y\right) = d\left(\int q(x)e^{\int pdx} dx\right).$$

Integrando

$$e^{\int pdx} y = \int e^{\int pdx} q(x) dx + C.$$

Entonces

$$y = e^{-\int pdx} \left\{ \int e^{\int pdx} q(x) dx + C \right\} \quad (1.30)$$

Ejemplo 1.12.18 Resolver $y' + y/x = 3x$.

Solución. En la práctica, para evitar recordar fórmulas, se suele repetir el procedimiento que llevo a la fórmula (1.30), ahora, dado la cercanía de su derivación, vamos a usarla de manera directa. La solución general es

$$\begin{aligned}
y(x) &= e^{-\int \frac{1}{x} dx} \left\{ \int e^{\int \frac{1}{x} dx} 3x dx + C \right\} \\
&= \frac{1}{|x|} \left\{ \int |x| 3x dx + C \right\} \\
&= x^2 + \frac{C}{|x|} \\
&= x^2 + \frac{C}{x}
\end{aligned}$$

1.13 Reducción de orden

Algunas ecuaciones de segundo orden

$$F(x, y, y', y'') = 0 \quad (1.31)$$

se pueden reducir a una de primer orden. Por ejemplo si F no depende de y . Es decir la ecuación es

$$F(x, y', y'') = 0 \quad (1.32)$$

Aquí introducimos la nueva variable dependiente $p = y'$, que resuelve

$$F(x, p, p') = 0.$$

Que es una ecuación de primer orden. Supuesto que la podemos resolver y encontrar una solución general para p , tendremos

$$y = \int pdx + C \quad (1.33)$$

Es la solución general de la ecuación de segundo orden.

Si la ecuación general de segundo orden (1.31) no depende de x , es decir tenemos $F(y, y', y'') = 0$ entonces nuevamente usaremos $p = y'$ como nueva variable dependiente pero también y como nueva variable independiente. Como

$$y'' = p' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} p$$

La ecuación se reduce a la siguiente ecuación de primer orden

$$F \left(y, p, \frac{dp}{dy} p \right) = 0 \quad (1.34)$$

1.14 Aplicaciones

1.14.1 Velocidad de escape

Velocidad de escape. Que velocidad hay que imprimirle a un proyectil que es lanzado verticalmente desde la superficie de la Tierra si nuestra pretensión es que el proyectil se escape al infinito. La velocidad más chica con esta cualidad se llama velocidad de escape.

Solución. Para resolver este problema hay que tomar en consideración la Ley de gravitación universal de Newton. En la parte que nos interesa, esta Ley afirma que el módulo de la fuerza de gravedad que se ejercen entre si dos cuerpos de masa m_1 y m_2 separados una distancia r es proporcional al producto de las masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa. Vale decir

$$|F| = G \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

donde G es la constante de proporcionalidad. Cuando los cuerpos no son puntos masa, sino esferas de densidad uniforme la distancia de separación hay que medirla entre los centros de masa de los cuerpos.

Hay que aclarar que usando el Principio conservación energía mecánica podemos resolver el problema de una manera más simple. Incluso podemos ver que la suposición de que el tiro es vertical no es necesaria, es decir la velocidad de escape es la misma aunque el tiro sea oblicuo. Discutiremos esa solución durante la clase. Lamentablemente, esta solución no usa ecuaciones diferenciales. Vamos a dar una solución, quizás un poco más complicada, pero que invoca las técnicas discutidas.

Supondremos a la Tierra una esfera de radio R , masa M y su centro de masa en el centro de la esfera. Al proyectil lo supondremos un punto masa con masa m y su posición en el momento t , denotada $x = x(t)$, la mediremos sobre un eje vertical con origen en la superficie de la Tierra. Todo como está indicado en la figura 1.6. Luego la distancia Tierra-proyectil será igual a $R + x$ donde x es la posición del proyectil. Utilizando la Segunda ley de Newton, $F = ma$, obtenemos

$$mx''(t) = -\frac{GMm}{(R+x)^2}.$$

Es una ecuación de la forma

$$F(x, x', x'') = 0.$$

Con variable dependiente x e independiente t . Pero F no depende de t y por consiguiente, como vimos, se puede convertir en una ecuación de primer orden tomando como nuevas variables: 1) independiente x 2) dependiente $v = x'$. En estas variables

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx}.$$

La ecuación se convierte en

$$v \frac{dv}{dx} = -\frac{GM}{(R+x)^2} \implies v dv + \frac{GM}{(R+x)^2} dx = 0.$$

Que es una ecuación en variables separables y también es exacta. Usaremos la técnica discutida para ecuaciones exactas, los que nos indica que la solución general se expresa de la siguiente forma

$$\frac{v^2}{2} - \frac{GM}{(R+x)} = E = \text{cte.} \quad (1.35)$$

La igualdad anterior es precisamente consecuencia directa del Principio conservación energía mecánica, La hemos deducido como consecuencia de que la ecuación era

Siempre las ecuaciones en variables separables son exactas pues se escriben de la forma

$$M(x)dx + N(y)dy = 0,$$

por consiguiente tienen potencial

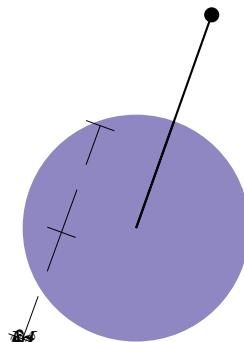


Figura 1.6: Velocidad de Escape

exacta. Sea v_0 la velocidad inicial para $t = 0$. Como E es constante y $x = 0$ en $t = 0$ debemos tener

$$E = \frac{v_0^2}{2} - GM/R \quad (1.36)$$

Como $v^2 \geq 0$ y por (1.35) y (1.36).

$$-\frac{GM}{(R+x)} \leq \frac{v^2}{2} - \frac{GM}{(R+x)} = \frac{v_0^2}{2} - \frac{GM}{R}$$

Queremos encontrar v_0 tal que $x \rightarrow \infty$. Si tomamos límite cuando $x \rightarrow \infty$ en la expresión anterior obtenemos

$$0 \leq \frac{v_0^2}{2} - GM/R$$

De aquí deducimos que el valor mínimo de velocidad de escape es $\sqrt{2 * GM/R}$.

1.14.2 Curvas de persecución

Curvas de persecución. Supongamos que un conejo se mueve sobre una línea recta con rapidez uniforme a y de un punto por fuera de la recta parte un perro que lo persigue con rapidez uniforme b . Encontrar la trayectoria del perro.

Figura 1.7: Persecución en un pentágono estrellado. Art of Pursuit, Ivars Peterson

Supongamos que el perro parte del punto $(c, 0)$, el conejo de $(0, 0)$ y se mueve en línea recta en la dirección positiva del eje y . Vamos a suponer que el perro sigue la trayectoria donde la tangente a su movimiento, en un momento dado, intersecta a la posición del conejo correspondiente a ese momento.

Pasado un tiempo t , el conejo estará en el punto $(0, at)$ y el perro en un punto de su trayectoria que forma un arco de longitud $s = bt$ hasta el punto $(c, 0)$. Ese punto, donde está el perro, lo denominaremos (x, y) . Como hemos supuesto que la tangente a la trayectoria del perro en (x, y) pasa por la posición del conejo $(0, at)$ se debe cumplir que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - at}{x} \implies xy' - y = -at. \quad (1.37)$$

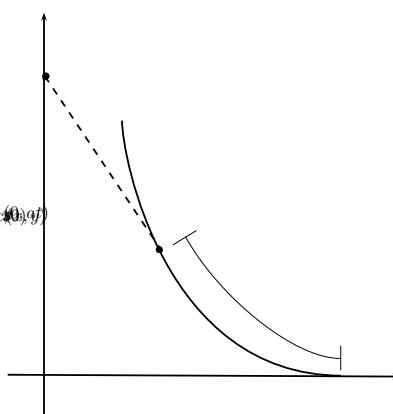


Figura 1.8: Curva persecución

En esta ecuación hay tres variables, t , x e y . No hemos definido cuales son independientes y cuales dependientes. Generalmente el tiempo t se considera variable independiente,

pero en la expresión de arriba aparece la derivada de y respecto a x . Claramente deberíamos eliminar una de las variables. Conviene eliminar t , dado que al no aparecer en la derivación no tendremos que hacer un cambio de variables allí, donde siempre es un poco más engorroso. Por otra parte, la intuición del problema, nos dice que a cada t corresponde uno, y sólo un, x^2 , lo que indica que t es función de x y por consiguiente es de esperar poder escribir la ecuación (1.37) en términos de x e y . Tener en cuenta que no es razonable en matemática, como en la política, pensar que lograremos tener un beneficio (menos variables) sin pagar algún precio, pues, como dice el dicho, "Cuando la limosna es grande hasta el santo desconfía". En este caso, el costo que pagaremos es incrementar el orden de la ecuación. Como hemos dado algunas técnicas de resolver ecuaciones de orden dos, quizás estemos en condiciones de pagar este precio.

Para eliminar t de la ecuación (1.37), derivamos (1.37) respecto a x , para obtener

$$xy'' = -a \frac{dt}{dx}.$$

Como $ds/dt = b$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{dt}{ds} \frac{ds}{dx} = -\frac{\sqrt{1+y'(x)^2}}{b}.$$

Hemos usado la relación $s = \int_x^c \sqrt{1+y'^2} dx$. Entonces

$$xy'' = \frac{a\sqrt{1+y'(x)^2}}{b}. \quad (1.38)$$

Que es una ecuación que no contiene y . De modo que usando $p = y'$ como variable dependiente reducimos el orden de la ecuación. Nos queda

$$\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{a}{b} \frac{dx}{x}.$$

Que es una ecuación en variable separables. Tomando la integral definida entre c y x , y considerando que si $x = c$ entonces $p = 0$, tenemos

$$\ln(p + \sqrt{1+p^2}) = \ln\left(\frac{x}{c}\right)^{\frac{a}{b}}.$$

Si despejamos p conseguimos

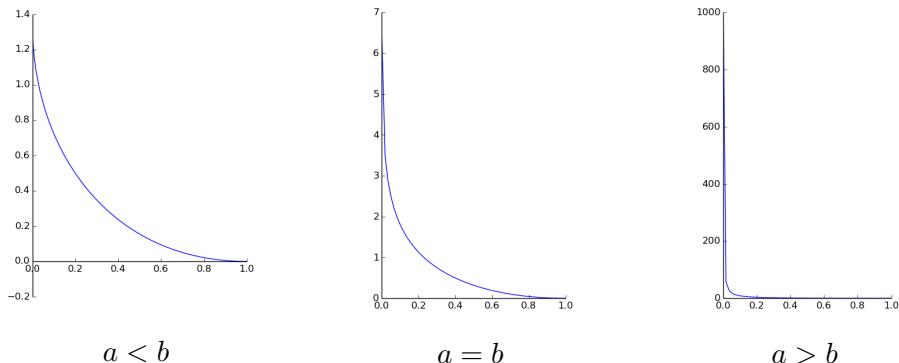
$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{x}{c}\right)^{a/b} - \left(\frac{c}{x}\right)^{a/b} \right]. \quad (1.39)$$

Para hallar y hay que recordar que $y' = p$ e $y(1) = 0$.

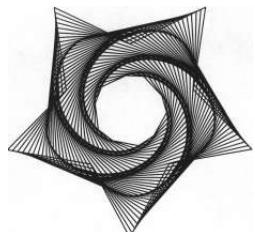
Usemos SymPy para completar este cálculo y hacer los gráficos. El siguiente código evalúa la integral, halla la constante de integración para que $y(1) = 0$ y grafica.

Los resultados son:

²De lo contrario el perro no se hubiera movido en la dirección horizontal entre dos momentos, lo que es absurdo



Lo anterior constituye un ejemplo de lo que se conoce como curva de persecución. Este es un tema muy interesante que tiene varias generalizaciones, por ejemplo el problema de los ratones donde se colocan en cada vértice de un polígono ratones cada uno de los cuales persigue al vecino en sentido antihorario (u horario, da lo mismo). Se consiguen patrones geométricos muy bellos



Persecución en un pentágono estrellado. Extraído de
Art of Pursuit,

1.15 Oscilador armónico

Un oscilador armónico es el más simple de los sistemas físicos vibratorios. Podemos definirlo como un sistema elástico que obedece a la Ley de elasticidad de Hooke, en honor a su descubridor Robert Hooke (1635-1703).

Suele citarse al resorte como un ejemplo familiar de oscilador armónico. Esto debido a que, cuando las oscilaciones de un resorte son pequeñas, se satisface aproximadamente la Ley de elasticidad de Hooke. Esta ley afirma que la fuerza que ejerce un resorte sobre una masa m conectada a él por uno de sus extremos es proporcional en magnitud al desplazamiento del resorte desde la posición de equilibrio. Además la fuerza de elasticidad actúa en sentido opuesto al desplazamiento.



Robert Hooke

Figura 1.9: Resorte

Supongamos que tenemos un resorte, en uno de sus extremos fijado en una pared y unido a una masa m por el otro extremo. Supongamos que no actúa otra fuerza sobre la masa mas que la del resorte. Ver la animación de la figura 1.9. Pongamos un eje de coordenadas en la dirección del movimiento, con origen en la posición de equilibrio del resorte. Esta posición es el punto donde el resorte no ejerce fuerza. Supongamos que la dirección positiva es la dirección donde el resorte se expande. Denotemos por $x(t)$ la posición de la masa en el momento t . Entonces según la Segunda Ley de Newton y la Ley de Elasticidad de Hooke, tenemos que

$$mx''(t) = -kx(t). \quad (1.40)$$

La constante de proporcionalidad k se llama constante elástica. La ecuación (1.40) se denomina la ecuación del oscilador armónico o ecuación del resorte.

La ecuación del oscilador armónico se escribe $0 = f(t, x, x', x'')$, donde $f(t, x, y, z) = kx + mz$ es independiente de t . Podemos intentar usar x como variable independiente y $z = x'$ como dependiente. Como vimos $x''(t) = dz/dt = dz/dxz$. Así

la ecuación queda

$$\begin{aligned} m \frac{dz}{dx} z = -kx &\implies m z dz = -kx dx \implies m \frac{z^2}{2} = -k \frac{x^2}{2} + C_1 \\ &\implies z = \pm \sqrt{-\frac{k}{m} x^2 + C_1} \\ &\implies x'(t) = \pm \sqrt{-\frac{k}{m} x^2 + C_1}. \end{aligned}$$

Debe ser $C_1 \geq 0$ de lo contrario el dominio de la función sería vacío. Nos queda una nueva ecuación para x' . Esta ecuación es en variables separables

$$\frac{dx}{\sqrt{-\frac{k}{m} x^2 + C_1}} = dt.$$

Integrando

$$\begin{aligned} t + C_2 &= \int \frac{dx}{\sqrt{-\frac{k}{m} x^2 + C_1}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{C_1}} \int \frac{dx}{\sqrt{-\frac{k}{C_1 m} x^2 + 1}} \\ &= \sqrt{\frac{m}{k}} \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \quad \left(\text{haciendo } u = \sqrt{\frac{k}{C_1 m}} x \right) \\ &= \sqrt{\frac{m}{k}} \arcsen u. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} x &= \frac{C_1 m}{k} u = \frac{C_1 m}{k} \sen \left(\sqrt{\frac{k}{m}} (t + C_2) \right) \\ &= \boxed{C_3 \sen \sqrt{\frac{k}{m}} t + C_4 \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t}. \end{aligned}$$

Que es la solución general³ de la ecuación del oscilador armónico. Como vemos el movimiento es oscilatorio con frecuencia

$$\boxed{f = \sqrt{\frac{k}{m}}}.$$

En particular, no importan las condiciones iniciales, la frecuencia es siempre la misma.

1.16 EDP, método características

Saber resolver ecuaciones ordinarias de primer orden nos permite resolver algunas ecuaciones en derivadas parciales de primer orden. Vamos a exponer este punto a través del método de características.

Para tener un problema bien planteado con ecuaciones en derivadas parciales no es suficiente conocer el valor de la función en un punto (como en una EDO de primer orden).

³Esta afirmación se justificará en el capítulo 3

Una condición típica extra, para lograr este propósito, es consignar el valor de la función a lo largo de una curva, que por simplicidad asumiremos que es una recta .

Ejemplo 1.16.19 Resolver

$$\left. \begin{array}{l} a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = c(x, y, u) \\ u(x, 0) = f(x) \end{array} \right\} \quad (1.41)$$

Aquí x, y son variables independientes y u dependiente. La primera línea es la ecuación diferencial, que incluye derivadas parciales de la incognita y la segunda línea podemos denominarla condición inicial (pensando que la variable y representa tiempo).

El método de características consiste en encontrar u a lo largo de las soluciones de la EDO

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b(x, y)}{a(x, y)} \quad (1.42)$$

Una solución de esta ecuación es normalmente una curva en el plano x, y . La idea es que las soluciones de (1.42) forman un *familia* uniparamétrica de curvas que llena una parte Ω del plano x, y . Así terminamos conociendo el valor de u sobre este conjunto Ω . Para que (1.42) tenga sentido debemos tener $a \neq 0$. De todas formas si $a = 0$ podemos invertir los roles de x e y .

Supongamos $y(x)$ solución de (1.42), entonces pongamos por abuso de notación $u(x) = u(x, y(x))$. Se tiene que

$$\frac{du}{dx} = u_x + u_y y' = u_x + u_y \frac{b}{a} = \frac{c(x, y(x), u(x))}{a(x, y)} \quad (1.43)$$

Que es otra ecuación ordinaria. Podemos escribir (1.42) y (1.43) en una ecuación más simétrica

$$\frac{du}{c} = \frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} \quad (1.44)$$

Estas ecuaciones se llaman *ecuaciones características*. Las soluciones de estas ecuaciones son un familia de curvas que suele llenar un conjunto abierto de \mathbb{R}^3 . La gráfica de la solución se obtiene eligiendo entre estas curvas las que pasan por los puntos de la gráfica de u especificados en la condición inicial, es decir $(x, 0, f(x))$. Esto, en los casos favorables, forma una superficie que es la gráfica de la solución. La proyección de estas curvas en el plano x, y se denominan *características*. Son la familia de soluciones de $y' = b/a$.

Ejemplo 1.16.20 Resolver

$$\left. \begin{array}{l} u_x + u_y = yu \\ u(x, 0) = f(x) \end{array} \right\} \quad (1.45)$$

En este caso

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} \Rightarrow y' = 1 \Rightarrow y(x) = x + \mu, \quad \mu = \text{cte.}$$

Entonces

$$\frac{du}{dx} = \frac{c}{a} \Rightarrow u' = yu = (x + \mu)u \Rightarrow \ln|u| = \frac{x^2}{2} + \mu x + C(\mu).$$

Notar que la nueva constante de integración $C(\mu)$ debe depender de la primera μ . Entonces

$$u = \pm e^{\frac{x^2}{2}} e^{(y-x)x} e^{C(y-x)}.$$

Ahora

$$u(x, 0) = f(x) \Rightarrow f(x) = \pm e^{\frac{x^2}{2}} e^{-x^2} e^{C(-x)} \Rightarrow C(\mu) = \frac{\mu^2}{2} + \ln|f(-\mu)|.$$

Entonces

$$u(x, y) = \pm e^{\frac{x^2}{2}} e^{(y-x)x} e^{\frac{(y-x)^2}{2} + \ln|f(x-y)|} = e^{\frac{y^2}{2}} f(x-y).$$

Apéndices

1.A La braquistócrona

Dados dos puntos A y B en las proximidades de la superficie terrestre, uno mas abajo respecto al suelo que el otro, queremos diseñar el tobogán óptimo entre los dos, esto es el tobogán que nos lleve de A hasta B en el menor tiempo. La curva solución a este problema se llama curva braquistócrona (braquistos - el más corto, cronos - tiempo).

Este problema fue resuelto por primera vez por Johann Bernoulli y es unos de los problemas precursores de la rama de las matemáticas que se denomina cálculo de variaciones. Vamos a dar la solución del problema encontrada por Johann Bernoulli que es muy elegante y está basada en un resultado de óptica llamado el Principio de Mínimo Tiempo de Fermat.

Principio de Mínimo Tiempo de Fermat La luz sigue para ir de un punto a otro el recorrido que minimiza el tiempo.

La primera impresión es que ese recorrido debería ser la línea recta. Si embargo esto no es así debido a que la velocidad de la luz cambia de acuerdo al medio que atraviesa. La velocidad de la luz en el vacío es 299.792,458km/h y en el diamante 124.034,943 km/h. La velocidad de la luz cambia no sólo con la sustancia sino con sus cualidades, como la densidad.

Si la luz se mueve dentro de un medio homogéneo, el camino que sigue es la línea recta. Esto ya no es más así cuando la luz cambia de medio de propagación. Por ejemplo cuando pasa del aire al vidrio.

Supongamos que la luz une los puntos A y B del plano y en el camino atravieza de un medio a otro, siendo la velocidad de la luz en cada uno de ellos v_1 y v_2 . Supongamos que $A = (a, 0)$ y $B = (c, b)$ y el eje x es la frontera entre los medios.

Como sabemos que mientras se mueva en un medio homogéneo la luz sigue en línea recta, el tiempo que emplea la luz para ir A a B es

$$t = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(c-x)^2 + b^2}}{v_2}$$



Johann Bernoulli (1667-1748)



Pierre de Fermat (1601-1665)

Para determinar la trayectoria es suficiente encontrar x , el punto donde la luz choca con la interfaz entre los medios. El principio de Fermat afirma que el tiempo es mínimo de modo que hallaremos un punto crítico de t respecto a x .

$$\frac{dt}{dx} = -\frac{c-x}{\sqrt{(c-x)^2 + b^2 v_2}} + \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2} v_1} = \frac{\sin \alpha_1}{v_1} - \frac{\sin \alpha_2}{v_2}$$

Deducimos que en un punto crítico

$$\frac{\sin \alpha_1}{v_1} = \frac{\sin \alpha_2}{v_2} \quad (1.46)$$

que se denomina Ley de Snell. El punto crítico es mínimo pues $\frac{dt}{dx}|_{x=0} = -\frac{c}{bv_2} < 0$ y $\frac{dt}{dx}|_{x=c} = \frac{c}{\sqrt{c^2+a^2}v_1} > 0$.

A la razón entre la velocidad de la luz dentro de un determinado medio y la velocidad de la luz en el vacío se lo denomina índice de refracción y se lo denota con la letra n . La Ley de Snell se la suele escribir

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2.$$

Que pasa si la luz atraviesa un medio que va cambiando de manera continua de índice de refracción.

Por ejemplo, el índice de refracción en la atmósfera va cambiando de manera continua con la altitud respecto a la superficie terrestre, ya que la densidad del aire va cambiando con la altitud. La Ley de Snell en este caso es

$$\frac{\sin \alpha}{v} = \text{cte}$$

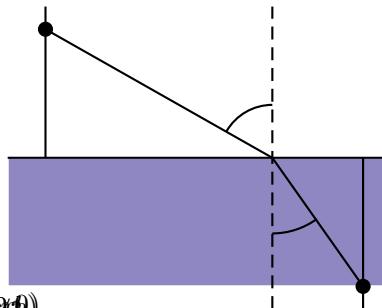


Figura 1.A.1: Refracción de la luz

Aquí el ángulo α y la velocidad v cambian respecto a alguna variable/s real/es, por ejemplo la altitud.

¿Qué tienen en común el recorrido de la luz y la braquistócrona? Bernoulli se dió cuenta que la situación en los dos casos es la misma, ya que en los dos casos se trata de minimizar el tiempo del recorrido. De modo que la braquistócrona también tiene que satisfacer la Ley de Snell. Ahora supongamos un sistema de coordenadas con origen en el punto A , inicial del recorrido. Además supongamos que el móvil parte del reposo. Con estas suposiciones $x(t_0) = 0$ y $v(t_0) = 0$. Por la conservación de la energía

$$\frac{m}{2} |v(t)|^2 = -mgy(t) = mg|y(t)|.$$

Así por la ley de Snell

$$\frac{\sin \alpha}{|v(t)|} = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{2g|y|}} = c = \text{cte.}$$

En (1.16) habíamos expresado el $\cos \alpha$ (en realidad del ángulo opuesto por el vértice, pero es igual) mediante la derivada. Luego

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{1}{\sqrt{1 + y'(x)^2}}.$$

Entonces tenemos

$$\sqrt{2g|y|}\sqrt{1 + y'(x)^2} = c = \text{cte}$$

Despejando llegamos a la ecuación diferencial

$$\sqrt{\frac{y}{c-y}} y' = 1.$$

Es una ecuación con variables separables. La constante c no tiene el mismo valor que en la ecuación anterior.

La solución se obtiene resolviendo la integral

$$x = \int dx = \int \sqrt{\frac{y}{c-y}} dy.$$

lo que no es tan sencillo. Hacemos el cambio de variables

$$\sqrt{\frac{y}{c-y}} = \tan \phi \implies y = c \sin^2 \phi \implies dy = 2c \sin \phi \cos \phi d\phi.$$

Luego

$$x = 2c \int \sin^2 \phi d\phi = \frac{c}{2} (2\phi - \sin 2\phi) + C_1.$$

Como tiene que pasar por $x = 0$ e $y = 0$ debe ser $C_1 = 0$. Tenemos que

$$\begin{cases} y &= c \sin^2 \phi \\ x &= \frac{c}{2}(2\phi - \sin 2\phi) \end{cases} = \frac{c}{2}(1 - \cos 2\phi)$$

Conviene llamar $2\phi = \theta$ y $a = c/2$

$$\begin{cases} y &= a(1 - \cos \theta) \\ x &= a(\theta - \sin \theta) \end{cases}$$

Que son la ecuaciones paramétricas de una curva conocida con el nombre de cicloide. Podemos usar SymPy para graficar esta curva

```
theta=symbols('theta')
from sympy.plotting import *
plot_parametric(theta-sin(theta),1-cos(theta),(theta,0,10*pi))
```

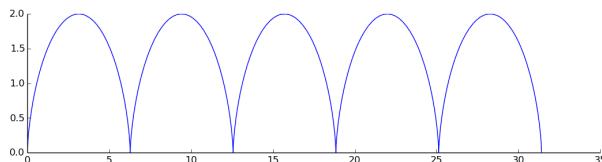


Figura 1.A.2: Cicloide

Figura 1.A.3: Cicloide

Si intentamos resolver las ecuaciones con SymPy el resultado no es muy alentador.

```
x,c=symbols('x,c')
y=Function('y')(x)
MiEcua=Eq(y.diff(x),sqrt((c-y)/y))
f=dsolve(MiEcua,y,hint='separable')
```

Resultado:

$$\begin{cases} -i\sqrt{c}\sqrt{-1 + \frac{1}{c}y(x)}\sqrt{y(x)} - ic \operatorname{acosh}\left(\frac{1}{\sqrt{c}}\sqrt{y(x)}\right) & \text{for } |\frac{1}{c}y(x)| > 1 \\ \frac{\sqrt{c}\sqrt{y(x)}}{\sqrt{1-\frac{1}{c}y(x)}} + c \operatorname{asin}\left(\frac{1}{\sqrt{c}}\sqrt{y(x)}\right) + \frac{y^{\frac{3}{2}}(x)}{\sqrt{c}\sqrt{1-\frac{1}{c}y(x)}} & \text{otherwise} \end{cases} = C_1 + x$$

1.B La tautócrona

Vamos a ver otra propiedad notable de la ciclode. Supongamos que dejamos caer el cuerpo del reposo desde un punto intermedio, digamos en (x_0, y_0) . Sea θ_0 el valor del parámetro θ correspondiente a este punto. ¿Cuánto tardara en llegar el cuerpo al punto mínimo de la curva que ocurre cuando $\theta = \pi$?

Tenemos

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\theta} = a(1 - \cos \theta) \\ \frac{dy}{d\theta} = a \sin \theta \end{cases}$$

Como el cuerpo ahora no parte de $(0, 0)$ tendremos

$$|v| = \sqrt{2g(y_0 - y)}.$$

Por (1.13) $ds/dt = |v|$. Si llamamos T al tiempo que demanda en llegar a $\theta = \pi$, y llamamos s_0 y s_1 a los arcos correspondientes al punto inicial y final. Tenemos

$$T = \int_0^T dt = \int_{s_0}^{s_1} \frac{dt}{ds} ds = \int_{s_0}^{s_1} \frac{1}{\sqrt{2g(y_0 - y)}} ds.$$

Cambiando la variable de integración a θ . Como

$$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} = \sqrt{2a\sqrt{1 - \cos \theta}}.$$

Tenemos

$$T = \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{\theta_0}^{\pi} \frac{\sqrt{1 - \cos \theta}}{\cos \theta_0 - \cos \theta} d\theta = \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{\theta_0}^{\pi} \frac{\frac{\sin \frac{\theta}{2}}{2}}{\cos^2 \frac{\theta_0}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2}} d\theta.$$

Ahora hacemos la sustitución

$$u = \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta_0}{2}} \implies du = -\frac{\frac{\sin \frac{\theta}{2}}{2}}{2 \cos \frac{\theta_0}{2}} d\theta.$$

Vemos que

$$T = 2\sqrt{\frac{a}{g}} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} du.$$

Que es una expresión independiente de θ_0 . En consecuencia el tiempo T que demanda el cuerpo para llegar $\theta = \pi$ es siempre el mismo no importa desde donde se deje caer.

1.C Solución al problema del espejo con Sympy

En este apéndice resolvemos el problema usando formas diferenciales El submódulo `diffgeom` de Sympy implementa formas diferenciales. Del sub-submodulo `sympy.diffgeom.rn` importamos el objeto `R2`. Para comprender el funcionamiento del código remitimos a la documentación de Sympy.

Figura 1.B.1: Tautócrona

```

from sympy import *
from sympy.diffgeom.rn import R2
eq=(-sqrt(R2.x**2+R2.y**2)+R2.x)*R2.dx+R2.y*R2.dy
M=eq.rcall(R2.e_theta)
N=eq.rcall(R2.e_r)
x,y,theta=symbols('x,y,theta')
r=symbols('r',positive=True)
subst={R2.x:r*cos(theta),R2.y:r*sin(theta),R2.theta:theta,R2.r:r}
M=M.subs(subst).simplify()
N=N.subs(subst).simplify()
mu=(N.diff(theta)-M.diff(r))/M
FactInt=exp(Integral(mu,r).doit())
phi=(M/r).integrate(theta)
g=Function('g')(r)
phi=phi+g
dsolve(phi.diff(r)-N/r,g)
phi=(M/r).integrate(theta)+r
phi

```

$$-r \cos(\theta) + r$$

2 Teoría de Lie y ecuaciones diferenciales

2.1 Introducción histórica

«Marius Sophus Lie fue un matemático noruego (17 de diciembre de 1842-18 de febrero de 1899) que creó en gran parte la teoría de la simetría continua, y la aplicó al estudio de la geometría y las ecuaciones diferenciales. La herramienta principal de Lie, y uno de sus logros más grandes fue el descubrimiento de que los grupos continuos de transformación (ahora llamados grupos de Lie), podían ser entendidos mejor "linealizándolos", y estudiando los correspondientes campos vectoriales generadores (los, así llamados, generadores infinitesimales). Los generadores obedecen una versión linealizada de la ley del grupo llamada el corchete o comutador, y tienen la estructura de lo que hoy, en honor suyo, llamamos un álgebra de Lie.»



[Wikipedia](#)

«La historia del análisis de simetrías comenzó a mediados del siglo XIX cuando S. Lie Y F. Klein se reunieron en Berlín. Ambos matemáticos contribuyeron mucho a la teoría de las simetrías. S. Lie presentó su famosa obra para examinar las simetrías en relación con ecuaciones algebraicas y diferenciales. En su programa de Erlangen, Klein desarrolló las contrapartes discreta y algebraica de la aplicación de las simetrías a las funciones. S. Lie creó un gran campo de las ecuaciones diferenciales, que fue muy útil para clasificar las ecuaciones diferenciales de una forma nueva. La teoría desarrollada por Lie es muy laboriosa, si se hace a mano. Esta es una de las razones por las que la aplicación de esta teoría desapareció en la práctica de resolver problemas. Muy pocas personas usaron los procedimientos de Lie para examinar ecuaciones diferenciales. Uno de ellos fue Birkhoff, quien en la década de 1950 aplicó la teoría a problemas hidrodinámicos. En los últimos años, se prestó más atención a la teoría de Lie como uno de los métodos raros para obtener soluciones, especialmente para ecuaciones diferenciales no lineales. Hoy el procedimiento de Lie es accesible para su aplicación, si es usado el poder computacional del álgebra computacional. Los cálculos algebraicos muy extendidos hoy en día se llevan a cabo por computadoras. En los últimos 20 años, ha habido un enorme aumento de la potencia de las computadoras y del desarrollo de lenguajes simbólicos, permitiendo abordar problemas en una manera más sencilla.»

Symmetry Analysis of Differential Equations with Mathematica®
[?]

2.2 Cambios de Variables

Vamos a seguir estudiando ecuaciones no lineales de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (2.1)$$

o, utilizando la escritura en *forma diferencial*

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0. \quad (2.2)$$

En el apéndice ?? discutimos muy sumariamente el concepto de forma diferencial.

Problema (Cambio de variables) Dada la ecuación (2.1) o (2.2) en las variables x, y . Queremos encontrar nuevas variables

$$\begin{cases} \hat{x} = \hat{x}(x, y) \\ \hat{y} = \hat{y}(x, y) \end{cases}. \quad (2.3)$$

tales que la ecuación se transforme en una que podamos resolver.

Para no correr riesgos de perder información en la ecuación transformada, es conveniente que x e y también se expresan en función de \hat{x} e \hat{y} , vale decir que la transformación pueda invertirse:

$$\begin{cases} x = x(\hat{x}, \hat{y}) \\ y = y(\hat{x}, \hat{y}) \end{cases}. \quad (2.4)$$

2.2.1 Cómputos de cambios de variables

Vamos a estudiar en primer lugar como computar cambios de variables. Empezaremos por casos más sencillos hasta ir a la situación más general.

2.2.1.1 Cambio de la variable dependiente manteniendo la independiente

Supongamos que el conjunto de variables se relacionan por las identidades $x = \hat{x}$ e $y = y(x, \hat{y})$. Notar que en este caso usamos la relación inversa. Entonces, derivando y respecto a x y usando la regla de la cadena (que sería más apropiado llamarla regla de cambio de variables para la derivada)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \hat{y}} \frac{d\hat{y}}{dx}.$$

La ecuación se convierte

$$\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \hat{y}} \frac{d\hat{y}}{dx} = f(x, y(x, \hat{y})).$$

Que es una expresión sólo en \hat{y} y x . Parece más complicada, pero en un ejemplo concreto puede ser más simple.

Ejemplo 2.2.1 Hacer el cambio de variable propuesto en la ecuación indicada

$$y = \frac{e^{\hat{y}}}{x} \quad \text{en} \quad y' = [\ln(xy)]^2 xy - \frac{y}{x}.$$

1) Expresemos dy/dx sólo con x, \hat{y} y $d\hat{y}/dx$.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{e^{\hat{y}}}{x^2} + \frac{e^{\hat{y}}}{x} \frac{d\hat{y}}{dx}.$$

2) Reemplazemos y' e y en la ecuación

$$-\frac{e^{\hat{y}}}{x^2} + \frac{e^{\hat{y}}}{x} \frac{d\hat{y}}{dx} = \left[\ln \left(x \frac{e^{\hat{y}}}{x} \right) \right]^2 x \frac{e^{\hat{y}}}{x} - \frac{e^{\hat{y}}}{x}.$$

Es costumbre recurrir a un abuso de notación que suele producir confusión al estudiante. Nos referimos a distinguir las derivadas $\partial y / \partial x$ y dy / dx . Tratándose y en el caso que nos ocupa, de una función de x e \hat{y} , la derivada $\partial y / \partial x$ representa la derivada parcial de y respecto a su primera variable. Como \hat{y} es a su vez función de x , por dy / dx denotamos la derivada de y atendiendo a que la segunda variable también depende de x .

3) Simplifiquemos

$$\frac{d\hat{y}}{dx} = \hat{y}^2 x. \quad (2.5)$$

Importante: Observar que en un cambio de variable, ya se cambie la variable dependiente, independiente o ambas, las derivadas (tratándose de la velocidad de cambio de unas variables respecto a otras) también hay que cambiarlas.

Podemos resolver los cambios de variables con SymPy, lo cual es muy útil por dos motivos. El primero porque nos permite hacer cambios de variables en expresiones muy grandes, resolviendo operaciones que a mano son sumamente tediosas. El segundo, y no menos importante para nosotros, es que es muy rico explorar un procedimiento encarcándolo en un contexto muy distinto. En este caso, el procedimiento es realizar un cambio de variables y estamos explorando el mismo a través de un breve código que lo implementa en un lenguaje de programación.

```
from sympy import *
x=symbols('x') #unico simbolo primitivo
y_n=Function('y_n')(x) #variables nuevas, funciones de x
y=exp(y_n)/x #relacion entre y, y_n
eq=Eq(y.diff(x)-(ln(x*y))**2*x*y+y/x,0) #la ecuacion
eq1=simplify(eq) # simplifica expresiones
```

Obtenemos la ecuación

$$\frac{\left(-x \log \left(e^{y_n(x)}\right)^2 + \frac{d}{dx} y_n(x)\right) e^{y_n(x)}}{x} = 0,$$

que SymPy no simplifica a nuestro gusto

2.2.1.2 Cambio de la variable independiente manteniendo la dependiente

Supongamos $\hat{x} = \hat{x}(x)$. Usamos la relación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\hat{x}} \frac{d\hat{x}}{dx}.$$

Suponiendo que la relación $\hat{x} = \hat{x}(x)$ se invierte en $x = x(\hat{x})$, todo lo que resta es sustituir x por su igual en términos de \hat{x}

$$\frac{dy}{d\hat{x}} = f(x(\hat{x}), y) \left[\frac{d\hat{x}}{dx} \Big|_{x=x(\hat{x})} \right]^{-1}.$$

Que es una expresión sólo en \hat{x} e y . Describir el procedimiento en general puede hacer parecer que es más difícil de lo que en realidad es en un caso concreto.

Ejemplo 2.2.2 Hacer el cambio de variable en la ecuación indicados

$$x = \cos \hat{x} \quad \text{en} \quad -\frac{dy}{dx} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} y = 0.$$

1) $\hat{x} = \arcsen x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\hat{x}} \frac{d\hat{x}}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{dy}{d\hat{x}}.$$

2) Remplazemos x e y' en la ecuación

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{dy}{d\hat{x}} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} y = 0$$

3) Reemplazando x por $\cos(\hat{x})$ y simplificando

$$\frac{dy}{d\hat{x}} + \cos(\hat{x})y = 0.$$

Para hacer esto con SymPy (de ahora en más omitiremos la sentencia de importación del módulo, esta operación se hace sólo una vez por sesión).

```
x=symbols('x')
x_n=acos(x)
y=Function('y')(x_n)
Ecuacion=-y.diff()**1/(sqrt(1-x**2))*y
xn=symbols('xn')
Eq=Ecuacion.subs(x,cos(xn))
```

Obtenemos la ecuación

$$\frac{y(\cos(\cos(xn)))}{\sqrt{1 - \cos^2(xn)}} + \frac{\frac{d}{d\xi_1}y(\xi_1)\Big|_{\xi_1=\cos(\cos(xn))}}{\sqrt{1 - \cos^2(xn)}}$$

hola

Nuevamente SymPy no simplifica a nuestro gusto, esto ocurre aún con aquellas expresiones que parece muy evidente como se simplifican. El caso es que la operación de simplificación es por un lado subjetiva, depende de un supuesto tácito de a que expresión se quiere arribar y por otro algunas expresiones, por ejemplo $\ln \exp(z)$, se simplifican en determinados campos numéricos y en otros no. En el caso del ejemplo $\ln \exp(z)$, la expresión es simplificable si $z \in \mathbb{R}$, pero no lo es si por ejemplo $z \in \mathbb{C}$. De modo que no puede esperarse que SymPy efectúe esta simplificación a menos que conozca que se trabaja en el campo numérico indicado. Hay que distinguir que supuestos tácitos está haciendo uno y hay que indicárselos a SymPy. El lector debe tener en cuenta que en ningún momento uno le dijo a SymPy que tipo de ente estaba manipulando en expresiones del tipo $x_n=acos(x)$. Puede parecer natural que se trata de números reales, no obstante esta información nunca fue comunicada al interprete de SymPy. ¿Por qué el habría de entender que x es real? Si al fin y al cabo $x_n=acos(x)$ tiene sentido si x es complejo y aún si es una matriz. Muchas veces las operaciones que se simplifican en un campo no lo pueden hacer en otro. El comando `symbols` tiene la opción de informar a SymPy que tipo de ente representa x de la siguiente forma `x=symbols('x', real=True)`. De esta forma se consiguen mejores resultados en las simplificaciones.

2.2.1.3 Cambio de variable general $\hat{x} = \hat{x}(x, y)$, $\hat{y} = \hat{y}(x, y)$

1. Calculamos $d\hat{y}/d\hat{x}$ en las variables x, y

$$\frac{d\hat{y}}{d\hat{x}} = \frac{\frac{d\hat{y}}{dx}}{\frac{d\hat{x}}{dx}} = \frac{\frac{\partial \hat{y}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{y}}{\partial y} y'}{\frac{\partial \hat{x}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{x}}{\partial y} y'} = \frac{\frac{\partial \hat{y}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{y}}{\partial y} f(x, y)}{\frac{\partial \hat{x}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{x}}{\partial y} f(x, y)}. \quad (2.6)$$

2. En la expresión resultante sustituímos x, y por las transformaciones inversas $x = x(\hat{x}, \hat{y})$ y $y = y(\hat{x}, \hat{y})$

Ejemplo 2.2.3 Transformar a polares

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^3 + x^2y - x - y}{x^3 + xy^2 - x + y}.$$

Dado que el cálculo es extenso lo haremos con SymPy, el procedimiento seguido ilustra como hacerlo a mano. Es ilustrativo hacer esto último para apreciar la utilidad de usar un sistema de álgebra computacional (SAC) como SymPy.

```
x=symbols('x')
y=Function('y')(x)
r=sqrt(x**2+y**2)
theta=atan(y/x)
Expr2=r.diff(x)/theta.diff(x)
```

Obtenemos la siguiente expresión

$$\frac{\left(1 + \frac{y^2(x)}{x^2}\right) \left(x + y(x) \frac{d}{dx} y(x)\right)}{\sqrt{x^2 + y^2(x)} \left(\frac{\frac{d}{dx} y(x)}{x} - \frac{y(x)}{x^2}\right)}.$$

Ahora sustituímos $y'(x)$ usando la ecuación diferencial, redefinimos r, θ fundamentalmente para limpiar el valor que tenían asignado en el código previo, que era una expresión de x, y , y finalmente sustituímos x e y por su expresión en polares.

```
Expr3=Expr2.subs(y.diff(x),(y**3+x**2*y-x-y)/(x**3+x*y**2-x+y))
r,theta=symbols('r,theta',positive=True)
Expr4=Expr3.subs([(y,r*sin(theta)),(x,r*cos(theta))])
Expr5=simplify(Expr4)
```

Encontramos que en polares la ecuación es mucho más simple

$$\frac{dr}{d\theta} = -r^3 + r.$$

Quizás usar la notación como forma diferencial sea más efectivo. Como r y θ son funciones de x e y , ellas son 0-formas. Usando las reglas de la diferencial, hay que reemplazar

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta; & dx &= \cos \theta dr - \sin \theta r d\theta \\ y &= r \sin \theta; & dy &= \sin \theta dr + \cos \theta r d\theta \end{aligned}$$

en la 1-forma:

$$(y^3 + x^2y - x - y)dx - (x^3 + xy^2 - x + y)dy.$$

Sympy posee un módulo para operar con formas diferenciales, en un apéndice describimos como utilizarlo para resolver este ejemplo.

2.3 Grupos

2.3.1 Definición y ejemplos

Definición 2.3.1 (Grupo) Un grupo es un par (G, \cdot) donde G es un conjunto y $\cdot : G \times G \rightarrow G$ una operación binaria interna que satisface

1. $(g_1 \cdot g_2) \cdot g_3 = g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3)$, para todos $g_1, g_2, g_3 \in G$,
2. Existe $e \in G$ tal que $e \cdot g = g \cdot e = g$, para todo $g \in G$.
3. Para todo $g \in G$ existe $h \in G$ tal que $g \cdot h = h \cdot g = e$. Esta función h se denota g^{-1} .

Las raíces históricas de la teoría de grupos son la teoría de las ecuaciones algebraicas, la teoría de números y la geometría. Euler, Gauss, Lagrange, Abel y Galois fueron los creadores que ponen los cimientos de esta rama del álgebra abstracta. Otros importantes matemáticos que contribuyen son Cayley, Emil Artin, Emmy Noether, Peter Ludwig Mejdell Sylow, A.G. Kurosch, Iwasawa entre muchos otros. (Wikipedia)

Es usual omitir el punto para indicar la operación, i.e. escribimos $g \cdot h = gh$.

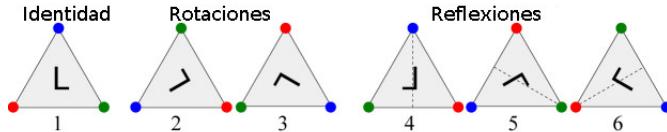
Ejemplo 2.3.4 Sea Π un plano euclídeo y G el conjunto de todas las transformaciones rígidas de Π en si mismo. Entonces G es un grupo con la operación de composición. Se llama el *grupo de transformaciones rígidas*.

Ejemplo 2.3.5 Sea $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ un conjunto de n elementos y S_n definido por

$$S_n = \{\sigma | \sigma : X \rightarrow X \text{ y } \sigma \text{ es biyectiva}\}$$

Entonces S_n es un grupo con la operación de composición. Se denomina *grupo simétrico*.

Ejemplo 2.3.6 Sea Δ un polígono regular de n lados en un plano euclídeo Π y D_{2n} el conjunto de todas las transformaciones rígidas de Π en si mismo que llevan Δ en si mismo. D_{2n} se llama el *grupo diedral* de orden $2n$. Para un triángulo equilátero:



Recordemos el siguiente concepto.

Definición 2.3.2 (Acción de un grupo sobre un conjunto) iremos que un grupo G actúa sobre el conjunto X si existe una operación binaria externa $\star : G \times X \rightarrow G$ que satisface:

1. Si e es el neutro de G , $e \star x = x$, para todo $x \in X$.
2. Para todos $g, h \in G$ y $x \in X$, $g \star (h \star x) = (gh) \star x$.

Como en el caso de grupos suele nos escribirse el símbolo de la operación binaria, i.e. se escribe $g \star x = gx$.

2.4 Grupos continuos de simetrías

2.4.1 Grupos y cambios de variables

Los cambios de variables de un conjunto de dos variables, digamos x e y , son funciones Γ , invertibles, de clase C^1 , donde $\Gamma : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$, con Ω_1, Ω_2 abiertos de \mathbb{R}^2 . Acostumbraremos escribir $(\hat{x}, \hat{y}) = \Gamma(x, y)$ y diremos que (\hat{x}, \hat{y}) son la variables nuevas y (x, y) las viejas.

Ejemplo 2.4.7 Coordenadas polares. Es más facil describir la transformación que lleva coordenadas polares en cartesianas. En este caso $(x, y) = \Gamma(r, \theta)$ y

$$\begin{aligned} \Gamma(r, \theta) &= (r \cos(\theta), r \sin(\theta)), \\ \Omega_1 &= (0, \infty) \times (-\pi, \pi), \\ \Omega_2 &= \mathbb{R}^2 - \{(x, y) | y = 0, x \leq 0\} \end{aligned}$$

2.4.2 Grupos de Lie uniparamétricos

Definición 2.4.3 (Grupos de Lie uniparamétricos) upongamos dada una acción del grupo $(\mathbb{R}, +)$ en \mathbb{R}^2 . En este caso vamos a adoptar una notación funcional, i.e. en lugar de escribir $\epsilon \star (x, y)$, con $\epsilon \in \mathbb{R}$ y $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ pondremos $\Gamma_\epsilon(x, y)$. Denotaremos por $\{\Gamma_\epsilon\}$ a la acción introducida. Notar que $\{\Gamma_\epsilon\}$ satisface que

1. $\forall \epsilon_1, \epsilon_2 \in \mathbb{R} : \Gamma_{\epsilon_1} \circ \Gamma_{\epsilon_2} = \Gamma_{\epsilon_1+\epsilon_2}$.

2. $\Gamma_0 = I$.
3. Γ_ϵ es invertible y $(\Gamma_\epsilon)^{-1} = \Gamma_{-\epsilon}$
- La acción Γ_ϵ se denomina un *grupo de Lie uniparamétrico* si además:
4. $\forall \epsilon \in \mathbb{R} : \Gamma_\epsilon$ es un difeomorfismo sobre \mathbb{R}^2 .
5. Si $\Gamma_\epsilon(x, y) = (\hat{x}(x, y, \epsilon), \hat{y}(x, y, \epsilon))$ entonces las funciones $\hat{x}(x, y, \epsilon)$ y $\hat{y}(x, y, \epsilon)$ se desarrollan en serie de potencias respecto a ϵ . Es decir para todo $\epsilon_0 \in \mathbb{R}$ existen coeficientes a_j y b_j , $j = 0, 1, \dots$, y $r > 0$ tales que
- $$\begin{aligned}\hat{x}(x, y, \epsilon) &= a_0(x, y) + a_1(x, y)(\epsilon - \epsilon_0) + \dots \\ \hat{y}(x, y, \epsilon) &= b_0(x, y) + b_1(x, y)(\epsilon - \epsilon_0) + \dots\end{aligned}\quad (2.7)$$
- para $|\epsilon - \epsilon_0| < r$.

Ejemplo 2.4.8 Demostrar que las siguientes aplicaciones inducen grupos de Lie uniparamétricos

1. $\Gamma_\epsilon(x, y) = (x + \epsilon, y)$ y $\Gamma_\epsilon(x, y) = (x, y + \epsilon)$.
2. $\Gamma_\epsilon(x, y) = (e^\epsilon x, y)$
3. $\Gamma_\epsilon(x, y) = \left(\frac{x}{1-\epsilon x}, \frac{y}{1-\epsilon x} \right)$
4. $\Gamma_\epsilon(x, y) = \begin{pmatrix} \cos(\epsilon) & -\sin(\epsilon) \\ \sin(\epsilon) & \cos(\epsilon) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Vamos a desarrollar sólo el ejemplo de $\Gamma_\epsilon(x, y) = (x + \epsilon, y)$. La propiedad 1 en la definición la chequearemos con SymPy.

```
x,y,epsilon,epsilon1,epsilon2=symbols('x,y,epsilon,epsilon1,epsilon2')
T=Matrix([x+epsilon,y])
x_copete=T.subs(epsilon,epsilon1)[0]
y_copete=T.subs(epsilon,epsilon1)[1]
PropGrupo=T.subs([(x,x_copete),(y,y_copete),(epsilon,epsilon2)])\
-T.subs(epsilon,epsilon1+epsilon2)
```

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La propiedad 2 en la definición es evidente y la propiedad 3 es siempre consecuencia de 1. y 2. Se incluyó en la lista sólo para resaltar su cumplimiento, pero no es necesario chequearla. La propiedad 4. es clara la 5. también lo es, notar que el desarrollo en serie (4.46) es válido en este caso con $a_0(x, y) = x$, $a_1(x, y) = 1$, $a_j(x, y) = 0$, $j \geq 2$, $b_0(x, y) = y$ y $b_j(x, y) = 0$, $j \geq 1$. La justificaciones correspondientes al resto de los ejemplos queda como ejercicio.

Las reflexiones en el plano, por ejemplo $\Gamma(x, y) = (-x, y)$, no pueden pertenecer a un grupo de Lie uniparamétrico. Más generalmente:

Teorema 2.4.1 Una transformación $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que el determinante de la matriz Jacobiana $\det(DT)$ sea negativo en algún punto no puede pertenecer a un grupo de Lie uniparamétrico. Dicho de otro modo, debe ocurrir que $\det(D\Gamma_\epsilon) > 0$ para todo ϵ y todo grupo $\{\Gamma_\epsilon\}$.

Demostración. Si Γ_ϵ es un grupo y supongamos por ejemplo que existe $\epsilon_0 \in \mathbb{R}$ y $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tal que:

$$J(x_0, y_0, \epsilon_0) := \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} & \frac{\partial \hat{x}}{\partial y} \\ \frac{\partial \hat{y}}{\partial x} & \frac{\partial \hat{y}}{\partial y} \end{pmatrix} < 0,$$

donde las derivadas son tomadas en $\epsilon = \epsilon_0, x = x_0$ y $y = y_0$. Por otro lado tenemos que $J(x_0, y_0, 0) = 1$. Como $J(x_0, y_0, \epsilon)$ es continua respecto a ϵ debería existir ϵ' con $J(x_0, y_0, \epsilon') = 0$. Esto implica que la matriz jacobiana $D\Gamma_\epsilon$ es singular y esto contradice que $\Gamma : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es difeomorfismo ($D\Gamma D\Gamma^{-1} = I$). \square

En el caso de la reflexión $\Gamma(x, y) = (x, -y)$, se genera un grupo discreto, ya que $\Gamma^2 = \Gamma \circ \Gamma = I$. Luego Γ genera el grupo finito $G = \{I, \Gamma\}$ que es isomorfo a \mathbb{Z}_2 . En este caso diremos que $\{I, \Gamma\}$ es un *grupo discreto*.

2.4.3 Grupos de simetrías de EDO

Definición 2.4.4 (Grupo de simetrías de una ecuación) Consideremos una ecuación

$$y' = f(x, y). \quad (2.8)$$

Una transformación o cambio de variables Γ se denomina una *simetría* de la ecuación si el cambio de variables dado por $(\hat{x}, \hat{y}) = \Gamma(x, y)$ deja invariante la ecuación. Diremos que un grupo de Lie uniparamétrico $\{\Gamma_\epsilon\}$ es un grupo uniparamétrico de simetrías de (2.8) si Γ_ϵ es simetría de la ecuación para cada ϵ .

De acuerdo con (2.6) para que $(\hat{x}, \hat{y}) = \Gamma(x, y)$ sea una simetría de (2.8) se debe cumplir que

$$\frac{\frac{\partial \hat{y}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{y}}{\partial y} f(x, y)}{\frac{\partial \hat{x}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{x}}{\partial y} f(x, y)} = f(\hat{x}, \hat{y}) \quad (2.9)$$

Esta ecuación se llama *condición de simetría*. Es una ecuación en derivadas parciales, en principio más compleja que la ecuación original. Tiene varios grados de libertad, por lo que suele haber muchas simetrías. Es común que encontremos soluciones a través de un ansatz.

Ejemplo 2.4.9 Consideremos la ecuación

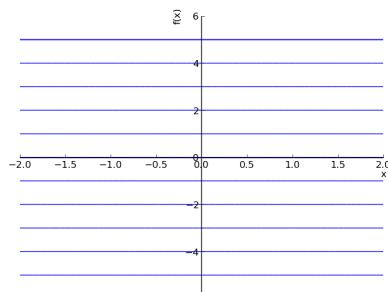
$$y' = 0. \quad (2.10)$$

La condición de simetría se reduce a

$$\frac{\frac{\partial \hat{y}}{\partial x}}{\frac{\partial \hat{x}}{\partial x}} = 0$$

Debemos tener que $\frac{\partial \hat{y}}{\partial x} = 0$. Vale decir \hat{y} es independiente de x . De allí la forma general de una simetría es

$$\hat{x} = \hat{x}(x, y) \quad \hat{y} = \hat{y}(y).$$



Hay muchas simetrías. Las traslaciones en cualquier dirección $(x, y) \mapsto (x + \alpha, y + \beta)$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$). Cambios de escala en ambos ejes $(x, y) \mapsto (e^\epsilon x, y)$, $(x, y) \mapsto (x, e^\epsilon y)$. Reflexiones respecto ambos ejes $(x, y) \mapsto (-x, y)$, $(x, y) \mapsto (x, -y)$. Observar que el gráfico de las soluciones posee las mismas simetrías, pues en general las simetrías de una ecuación llevan soluciones en soluciones.

De todas las simetrías encontradas $\Gamma_\epsilon(x, y) = (e^\epsilon x, y)$, $\Gamma_\epsilon(x, y) = (x + \epsilon, y)$ y $\Gamma_\epsilon(x, y) = (x, y + \epsilon)$ se llaman *triviales* pues llevan una curva solución en si misma. Cualquier cambio de la forma $\hat{x} = \hat{x}(x, y)$, $\hat{y} = y$ es trivial. Estamos interesados en hallar grupos de Lie uniparamétricos de simetrías no triviales.

Ejemplo 2.4.10 Hallar simetrías de

$$\frac{dy}{dx} = f(x).$$

De acuerdo con (2.6) se debe cumplir que

$$\frac{\frac{\partial \hat{y}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{y}}{\partial y} f(x)}{\frac{\partial \hat{x}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{x}}{\partial y} f(x)} = f(\hat{x})$$

La forma de la ecuación sugiere el ansatz

$$\boxed{\hat{x} = x}, \quad \frac{\partial \hat{y}}{\partial x} = \frac{\partial \hat{x}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \hat{y}}{\partial y} = \frac{\partial \hat{x}}{\partial x}.$$

Luego

$$\frac{\partial \hat{y}}{\partial y} = 1 \Rightarrow \boxed{\hat{y} = y + \epsilon}$$

con ϵ constante arbitraria. Hallamos que

$$\Gamma_\epsilon(x, y) = (x, y + \epsilon)$$

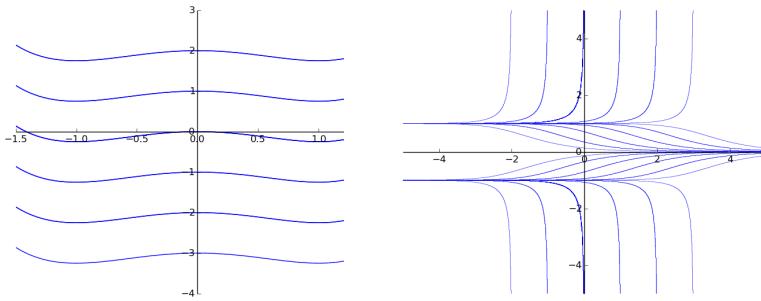
es un grupo de Lie uniparamétrico de simetrías. De manera similar

$$\Gamma_\epsilon(x, y) = (x + \epsilon, y)$$

es un grupo uniparamétrico de simetrías para

$$\frac{dy}{dx} = f(y).$$

Geométricamente en el primer caso todas las soluciones se obtienen trasladando una cualquiera verticalmente y en el segundo caso horizontalmente.



Soluciones de $y' = x^3 - x$

Soluciones de $y' = y^3 - y$

Ejemplo 2.4.11 Demostrar que las rotaciones alrededor del origen es un grupo de Lie uniparamétrico de simetrías de

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^3 + x^2 y - x - y}{x^3 + xy^2 - x + y}. \quad (2.11)$$

Sea Γ_ϵ la transformación que rota un ángulo ϵ alrededor del origen. Es un ejercicio demostrar que $\{\Gamma_\epsilon | \epsilon \in \mathbb{R}\}$ es un grupo uniparamétrico de simetrías. Se tiene la representación matricial

$$\Gamma_\epsilon(x, y) = \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\epsilon) & -\sin(\epsilon) \\ \sin(\epsilon) & \cos(\epsilon) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Gamma_\epsilon^{-1}(\hat{x}, \hat{y}) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\epsilon) & \sin(\epsilon) \\ -\sin(\epsilon) & \cos(\epsilon) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix}$$

Para el cálculo recurrimos a SymPy (usamos x_n en lugar de \hat{x})

```
x, theta=symbols('x,theta')
y=Function('y')(x)
x_n=cos(theta)*x-sin(theta)*y
y_n=sin(theta)*x+cos(theta)*y
Expr2=y_n.diff(x)/x_n.diff(x)
Expr3=Expr2.subs(y.diff(),\
(y**3+x**2*y-x-y)/(x**3+x*y**2-x+y))
x_n,y_n=symbols('x_n,y_n')
Expr4=Expr3.subs([(y, -sin(theta)*x_n+cos(theta)*y_n),\
(x, cos(theta)*x_n+sin(theta)*y_n)])
Expr5=simplify(Expr4)
```

La ecuación resultante es *la misma*

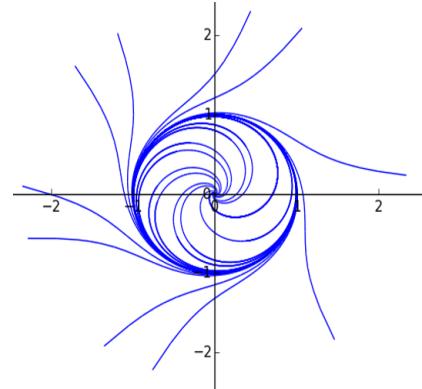
$$\frac{x_n^2 y_n - x_n + y_n^3 - y_n}{x_n^3 + x_n y_n^2 - x_n + y_n}$$

A la misma conclusión arribábamos si recordabamos que en coordenadas polares la ecuación se escribe

$$\frac{dr}{d\theta} = r - r^3,$$

y que esta ecuación tiene las simetrías Γ_ϵ : $(r, \theta) \mapsto (r, \theta + \epsilon)$. Si rotamos un ángulo fijo el gráfico de una solución obtenemos el gráfico de otra solución.

Ejemplo 2.4.12 Supongamos que $y' = f(x, y)$ tiene el grupo de Lie uniparamétrico de simetrías



$$(\hat{x}, \hat{y}) = \Gamma_\epsilon(x, y) = (x, y + \epsilon) \quad (2.12)$$

Usando la condición de simetrías (2.9) tenemos

$$f(x, y) = f(\hat{x}, \hat{y}) = f(x, y + \epsilon).$$

La igualdad vale para todo ϵ , luego poniendo $\epsilon = -y$ vemos que $f(x, y) = f(x, 0) := f(x)$. Vale decir que f es independiente de y y la ecuación

$$y' = f(x),$$

se resuelve simplemente integrando.

2.5 Órbitas, tangentes y curvas invariantes

Definición 2.5.5 (Órbitas) Sea un grupo uniparamétrico de simetrías $G = \{\Gamma_\epsilon | \epsilon \in \mathbb{R}\}$, y $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ llamamos *órbita* (x_0, y_0) *bajo la acción de G* (simplemente órbita si es claro quien es G) a la curva

$$\{\Gamma_\epsilon(x_0, y_0) | \epsilon \in \mathbb{R}\}$$

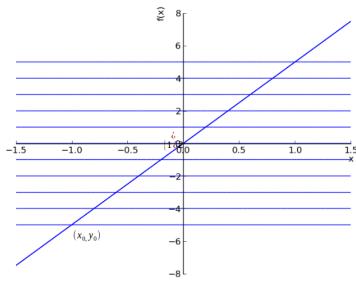
Si G es un grupo de simetrías no trivial, entonces es de esperar que la órbita de (x_0, y_0) cruce transversalmente las curvas solución. La órbita se usará como una nueva coordenada. La órbita atraves de (x, y) es el conjunto de puntos de coordenadas

$$(\hat{x}(x, y, \epsilon), \hat{y}(x, y, \epsilon)) = \Gamma_\epsilon(x, y), \quad (2.13)$$

donde

$$(\hat{x}(x, y, 0), \hat{y}(x, y, 0)) = (x, y).$$

Las ecuaciones (2.13) son ecuaciones parámetricas (parámetro ϵ) de una curva en el plano.



Definición 2.5.6 (Puntos invariantes) Un punto (x, y) se llama invariante si su órbita se reduce a $\{(x, y)\}$, vale decir

$$(x, y) = \Gamma_\epsilon(x, y), \quad \forall \epsilon > 0$$

Ejemplo 2.5.13 La órbita de (x, y) bajo la acción del grupo de Lie uniparamétrico

$$\Gamma_\epsilon(x, y) = \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\epsilon) & -\sin(\epsilon) \\ \sin(\epsilon) & \cos(\epsilon) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Son circunferencias con centro en el origen. El punto $(0, 0)$ es invariante.

Definición 2.5.7 (Campo vectorial de tangentes) dado un grupo de Lie uniparamétrico $(\hat{x}(x, y, \epsilon), \hat{y}(x, y, \epsilon)) = \Gamma_\epsilon(x, y)$ definimos el campo vectorial

$$(\xi(x, y), \eta(x, y)) = \left(\frac{d\hat{x}}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0}, \frac{d\hat{y}}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} \right).$$

ξ y η se llaman *símbolos infinitesimales*.

Como \hat{x}, \hat{y} eran analíticas respecto a ϵ tenemos las fórmulas.

$$\begin{aligned} \hat{x} &= x + \epsilon\xi(x, y) + O(\epsilon^2) \\ \hat{y} &= y + \epsilon\eta(x, y) + O(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (2.14)$$

En un punto invariante $\boxed{\xi(x, y) = \eta(x, y) = 0}$.

Ejemplo 2.5.14 Campo vectorial de infinitesimales para las rotaciones.

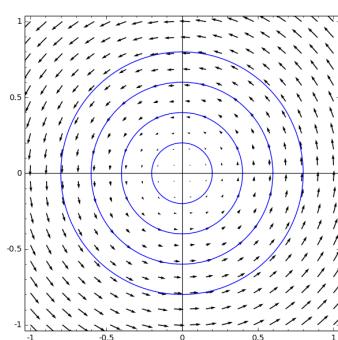


Figura 2.5.1: Campo vectorial de infinitesimales (ξ, η)

Definición 2.5.8 Ás generalmente, un conjunto $C \subset \mathbb{R}^2$ se dice *invariante* por un grupo uniparamétrico de simetrías de Lie Γ_ϵ si y sólo si $\forall \epsilon : \Gamma_\epsilon(C) \subset C$, i.e. las órbitas de puntos en C permanecen en C .

Observaciones

1. El conjunto unitario $\{(x, y)\}$ es invariante si y sólo si el punto (x, y) es invariante.
2. Se C es una curva plana suave, supongamos que C viene dada por la ecuación implícita $g(x, y) = 0$, con $\nabla g \neq 0$. Supongamos que $(\xi, \eta) \neq (0, 0)$ sobre C . Entonces C es invariante si y sólo si la tangente a C en cada punto (x, y) es paralela a $(\xi(x, y), \eta(x, y))$. La demostración de este hecho se propone como ejercicio.
3. Si en particular C es una curva que viene descripta como el gráfico de una función $y = h(x)$, entonces C es invariante si y sólo si

$$Q(x, y, y') = \eta(x, y) - h' \xi(x, y) \equiv 0. \quad (2.15)$$

En efecto, en este caso $g(x, y) = y - h(x)$ (notar que $\nabla g = (-h'(x), 1) \neq 0$). Como ∇g es perpendicular a C tenemos la ecuación (2.15). La ecuación (2.15) se llama *ecuación característica*.

4. Si además de lo anterior, Γ_ϵ es un grupo de Lie de simetrías de $y' = f(x, y)$ e $y(x)$ es una curva invariante y solución de la ecuación entonces:

$$\bar{Q}(x, y) = \eta(x, y) - f(x, y) \xi(x, y) \equiv 0. \quad (2.16)$$

A esta ecuación la llamamos *ecuación característica reducida*.

El recíproco también es cierto.

Teorema 2.5.2 Supongamos que $y(x)$ es solución de la ecuación característica y que

$$\left. \frac{\partial \bar{Q}}{\partial y} \right|_{y=y(x)} \neq 0.$$

Entonces $y(x)$ es una solución invariante de la ecuación.

Demostración. Será completada más adelante. □

Ejemplo 2.5.15 La EDO

$$y' = y \quad (2.17)$$

tiene simetrías de escala

$$(\hat{x}, \hat{y}) = \Gamma_\epsilon(x, y) = (x, e^\epsilon y).$$

Luego

$$(\xi, \eta) = \left(\left. \frac{d\hat{x}}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0}, \left. \frac{d\hat{y}}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \right) = (0, y)$$

Cualquier punto en el conjunto $\{(x, 0) | x \in \mathbb{R}\}$ es invariante. La ecuación característica reducida es.

$$\bar{Q}(x, y) = 0 \Rightarrow y = 0$$

Esta formada enteramente por puntos invariantes.

Ejemplo 2.5.16 Demostrar que la siguiente expresión es un grupo de Lie uniparamétrico de simetrías

$$(\hat{x}, \hat{y}) = \Gamma_\epsilon(x, y) = (e^\epsilon x, e^{(e^\epsilon - 1)x} y),$$

para la ecuación (2.17). Para este grupo tenemos

$$(\xi, \eta) = (x, xy)$$

Todo punto en $x = 0$ es invariante. La ecuación característica reducida es

$$\bar{Q}(x, y) = 0 \Rightarrow xy - xy = 0$$

De modo que estas simetrías actúan trivialmente sobre las soluciones. Llevan una solución en si misma. Chequeemos esta afirmación de manera directa.

Buscamos el cambio de variables inverso

$$\left. \begin{array}{l} \hat{x} = e^\epsilon x \\ \hat{y} = e^{(\epsilon-1)x} y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = e^{-\epsilon}\hat{x} \\ y = e^{(\epsilon-1)\hat{x}}\hat{y} \end{array} \right\}$$

Las soluciones son $y = ke^x$, sustituímos en esta expresión, luego de unas operaciones, llegamos a $\hat{y} = ke^{\hat{x}}$.

Ejemplo 2.5.17 La ecuación de Riccati

$$y' = xy^2 - \frac{2y}{x} - \frac{1}{x^3}, \quad x \neq 0$$

Tiene el grupo de Lie de simetrías

$$(\hat{x}, \hat{y}) = \Gamma_\epsilon(x, y) = (e^\epsilon x, e^{-2\epsilon} y).$$

Tenemos

$$(\xi, \eta) = (x, -2y).$$

La característica reducida

$$\bar{Q}(x, y) = \frac{1}{x^2} - x^2 y^2 = 0.$$

Tenemos dos soluciones invariantes

$$y = \pm \frac{1}{x^2}.$$

2.6 Simetrías a partir de Infinitesimales

La mayoría de los métodos de simetría usan (ξ, η) en lugar de las simetrías en sí mismas. Por otra parte $(\xi(\hat{x}, \hat{y}), \eta(\hat{x}, \hat{y}))$ determinan las simetrías a través de las ecuaciones

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\hat{x}}{d\epsilon} = \xi(\hat{x}, \hat{y}) \\ \frac{d\hat{y}}{d\epsilon} = \eta(\hat{x}, \hat{y}) \\ \hat{x}(x, y, 0) = x \\ \hat{y}(x, y, 0) = y \end{array} \right.} \quad (2.18)$$

Justificación de las ecuaciones. De la propiedad de grupo $\Gamma_{\epsilon_1} \circ \Gamma_\epsilon = \Gamma_{\epsilon+\epsilon_1}$, deducimos

$$\hat{x}(x, y, \epsilon + \epsilon_1) = \hat{x}(\hat{x}(x, y, \epsilon), \hat{y}(x, y, \epsilon), \epsilon_1).$$

Derivando respecto a ϵ_1 y evaluando en $\epsilon_1 = 0$ justificamos las EDO en (2.18).

El sistema de ecuaciones (2.18) puede ser difícil de resolver. Pero en algunos casos puede ser posible.

Ejemplo 2.6.18 Encontrar el grupo de simetrías para los infinitesimales $\xi(x, y), \eta(x, y)) = (x^2, xy)$.

$$\frac{d\hat{x}}{d\epsilon} = \xi(\hat{x}, \hat{y}) = \hat{x}^2 \quad y \quad \hat{x}(x, y, 0) = x \Rightarrow \hat{x} = \frac{x}{1 - \epsilon x}$$

y

$$\frac{d\hat{y}}{d\epsilon} = \eta(\hat{x}, \hat{y}) = \hat{x}\hat{y} \quad y \quad \hat{y}(x, y, 0) = y \Rightarrow \hat{y} = \frac{y}{1 - \epsilon x}$$

2.7 Condición de Simetría Linealizada

En esta sección discutiremos una técnica para encontrar simetrías de ecuaciones. Desarrollando en serie de Taylor las funciones \hat{x} e \hat{y} en ϵ alrededor de $\epsilon = 0$

$$\begin{aligned}\hat{x} &= x + \epsilon\xi + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ \hat{y} &= y + \epsilon\eta + \mathcal{O}(\epsilon^2)\end{aligned}$$

Reemplazando en la condición de simetría, que recordemos es

$$\frac{\frac{\partial \hat{y}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{y}}{\partial y} f(x, y)}{\frac{\partial \hat{x}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{x}}{\partial y} f(x, y)} = f(\hat{x}, \hat{y}),$$

obtenemos

$$\frac{f + \epsilon\{\eta_x + f\eta_y\} + \mathcal{O}(\epsilon^2)}{1 + \epsilon\{\xi_x + f\xi_y\} + \mathcal{O}(\epsilon^2)} = f(x + \epsilon\xi + \mathcal{O}(\epsilon^2), y + \epsilon\eta + \mathcal{O}(\epsilon^2))$$

Desarrollando en serie de Taylor para x e y el segundo miembro y luego de algunas operaciones

$$f + \epsilon\{\eta_x + (\eta_y - \xi_x)f - \xi_y f^2\} + \mathcal{O}(\epsilon^2) = f + \epsilon\{\xi f_x + \eta f_y\} + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

Cancelando f dividiendo por ϵ y haciendo $\epsilon \rightarrow 0$ llegamos a la *Condición de Simetría Linealizada*

$$\boxed{\eta_x + (\eta_y - \xi_x)f - \xi_y f^2 = \xi f_x + \eta f_y} \quad (2.19)$$

Recordando la característica reducida $\bar{Q} = \eta - f\xi$, la fórmula anterior se escribe más sintéticamente

$$\boxed{\bar{Q}_x + f\bar{Q}_y = f_y \bar{Q}} \quad (2.20)$$

Cada solución de (2.20) conlleva una infinita cantidad de grupos de Lie de simetrías, porque si \bar{Q} resuelve (2.20) entonces para toda función ξ el par $(\xi, \bar{Q} + f\xi)$ son infinitesimales para un grupo de Lie de simetrías de la ecuación. La solución trivial $\bar{Q} \equiv 0$ de (2.20) se corresponde con simetrías triviales. En principio podríamos utilizar el método de características, que hemos visto en la unidad anterior, para resolver la ecuación lineal en derivadas parciales de primer orden (2.20) que, recordando lo visto, se puede escribir

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{f} = \frac{d\bar{Q}}{f_y \bar{Q}}.$$

La primera igualdad en la ecuación anterior equivale a $dy/dx = f$, que es al fin y al cabo, la ecuación que queremos resolver. Así estas consideraciones parecen habernos llevado al origen de nuestro problema. No obstante, algunas veces es posible encontrar una solución de (2.19) recurriendo a un ansatz.

Ejemplo 2.7.19 Encontrar un grupo de Lie de simetrías no trivial de $y' = \frac{y}{x} + x$.

La condición de simetría linealizada es

$$\eta_x + (\eta_y - \xi_x) \left(\frac{y}{x} + x \right) - \xi_y \left(\frac{y}{x} + x \right)^2 = \xi \left(1 - \frac{y}{x^2} \right) + \frac{\eta}{x},$$

que luce intimidante. Hagamos el ansatz $\xi = 0$ y $\eta = \eta(x)$. Conseguimos

$$\eta_x - \frac{\eta}{x} = 0$$

Cuya solución general es $\boxed{\eta = cx}$. Ahora podemos encontrar simetrías de la ecuación.

Recordando (2.18), tenemos

$$\begin{cases} \frac{d\hat{x}}{d\epsilon} = 0 \\ \frac{d\hat{y}}{d\epsilon} = c\hat{x} \\ \hat{x}(x, y, 0) = x \\ \hat{y}(x, y, 0) = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{x} = x \\ \hat{y} = c\epsilon x + y \end{cases}$$

Podemos constatar de manera directa que $\hat{x} = x$ e $\hat{y} = c\epsilon x + y$ constituyen un grupo de Lie uniparamétrico de simetrías de la ecuación, para el cual $\bar{Q} \neq 0$.

Ejemplo 2.7.20 Encontrar valiéndose de SymPy los infinitesimales de la ecuación (2.11).

```
from sympy import *
init_printing()
x,y=symbols('x,y',real=True)
f=(y**3+x**2*y-x-y)/(x**3+x*y**2-x+y)
```

Cómo en muchos otras situaciones que se presentan cuando intentamos resolver de manera exacta ecuaciones diferenciales, debemos recurrir a una heurística con el objeto de resolver el problema. Por ejemplo, SymPy incorpora una estrategia de búsqueda entre distintos candidatos a infinitesimales, ver [?, ?] para los detalles. Por ejemplo, la primera heurística que se enumera en [?] es la que usamos en el ejemplo anterior, es decir $\xi = 0$ y $\eta = \eta(x)$. En el ejemplo actual, vamos a usar la siguiente heurística

$$\xi = ax + by + h, \quad \eta = cx + dy + k.$$

```
a,b,c,d,h,k=symbols('a,b,c,d,h,k',real=True)
xi=a*x+b*y+h
eta=c*x+d*y+k
Q=eta-f*xi
```

Reemplazamos el valor de Q en la condición de simetría linealizada.

```
CondSim=Q.diff(x)+f*Q.diff(y)-f.diff(y)*Q
CondSim=simplify(CondSim)
```

Llegamos a una ecuación de la forma

$$\frac{P_1(x, y)}{P_2(x, y)} = 0,$$

donde P_1 y P_2 son polinomios bivariados. Obviamente sólo nos interesa P_1 , que podemos extraer de la siguiente forma

```
P1,P2=fraction(CondSim)
P1
```

Heurística: ...significa «hallar, inventar» (etimología que comparte con eureka)... Cuando se usa como sustantivo, se refiere a la disciplina, el arte o la ciencia del descubrimiento... Cuando aparece como adjetivo, se refiere a cosas más concretas, como estrategias, reglas, silogismos y conclusiones heurísticas. Estos dos usos están íntimamente relacionados, ya que la heurística usualmente propone estrategias que guían el descubrimiento. El término fue utilizado por Albert Einstein en la publicación sobre efecto fotoeléctrico (1905).

Wikipedia

Obtenemos la siguiente expresión monstruosa de P_1 , que sólo reproducimos a modo anecdótico

$$\begin{aligned} P_1 = & -ax^4 - 2ax^2y^2 - ax^2 + 2axy - ay^4 + ay^2 - bx^2 - 2bxy \\ & + by^2 - cx^2 - 2cxy + cy^2 - dx^4 - 2dx^2y^2 + dx^2 - 2dxy \\ & - dy^4 - dy^2 + hx^4y - 2hx^3 + 2hx^2y^3 - 2hx^2y - 2hxy^2 + hy^5 \\ & - 2hy^3 + 2hy - kx^5 - 2kx^3y^2 + 2kx^3 - 2kx^2y - kxy^4 + 2kxy^2 \\ & - 2kx - 2ky^3 \end{aligned}$$

Hay que resolver $P_1 = 0$. A pesar de la apariencia atemorizante de esta ecuación, es completamente inofensiva si tenemos en mente que el “juego” consiste en hallar los coeficientes a, b, c, d, h, k que resuelven la ecuación para todo x e y . De modo que podemos reemplazar x e y por distintos valores y resolver las ecuaciones resultantes. En el código debajo usamos el método `collect(x)` que agrupa los términos de una expresión que tienen la misma potencia para x .

```
P1.subs(y,0).collect(x)
```

Resulta

$$0 = -kx^5 - 2kx + x^4(-a - d) + x^3(-2h + 2k) + x^2(-a - b - c + d)$$

Es un polinomio en x que debería ser idénticamente 0, debe para ello tener todos los coeficientes iguales a 0. Inferimos inmediatamente de esto que $k = h = 0$, $d = -a$ y $c = -2a - b$. Reemplazemos ahora y por 1.

```
P11=P1.subs({h:0,k:0,d:-a,c:-2*a-b})
P11.subs(y,1).collect(x)
```

Resulta en la expresión $8ax$, que si es idénticamente 0 fuerza que $a = 0$. Luego $d = 0$ y $c = -b$. El valor de c es arbitrario, se puede elegir cualquiera, elejimos $c = 1$ y por consiguiente $b = -1$.

```
xi=xi.subs({d:0,a:0,b:-1,c:1,h:0,k:0})
eta=eta.subs({d:0,a:0,b:-1,c:1,h:0,k:0})
xi,eta
```

Cocnluímos $\xi = -y$ y $\eta = x$. Todavía no estamos seguros que estos ξ y η resuelvan nuestro problema. El razonamiento anterior está incompleto sino chequeamos que la solución obtenida resuelve la ecuación de simetría linealizada para todo x e y , esto porque con la metodología utilizada solo estamos seguros que los valores obtenidos para los coeficientes solucionan el problema en los valores que elegimos para y ($y = 0$ e $y = 1$). Ahora podemos chequear que en realidad se resuelve la ecuación de simetría linealizada para cualquier valor de x e y .

```
CondSimLin=Q.diff(x)+f*Q.diff(y)-f.diff(y)*Q
CondSimLin.simplify()
```

Que definitivamente establece que la elección que hemos hecho resuelve el problema.

Completación de la demostración del Teorema 2.5.2. Restaba demostrar que si $y(x)$ resuelve la ecuación $\bar{Q}(x, y(x)) = 0$ y $\bar{Q}_y \neq 0$ en los puntos a lo largo de la curva $(x, y(x))$ entonces $y(x)$ es solución invariante de la ecuación $y' = f$.

Por el Teorema de la función implícita, la condición de simetría linealizada (2.20) y $\bar{Q} = 0$

$$y'(x) = -\frac{\bar{Q}_x}{\bar{Q}_y} = f - f_y \frac{\bar{Q}}{\bar{Q}_y} = f$$

Luego y es solución de la ecuación. El hecho de que es invariante es simplemente la igualdad $\overline{Q} = 0$.

2.8 Coordenadas canónicas

2.8.1 Definición y ejemplos

Definición 2.8.9 (Coordenadas canónicas) iremos que las coordenadas (r, s) son canónicas respecto a el grupo de Lie de simetrías Γ_ϵ si en las coordenadas (r, s) la acción de grupo es la traslación

$$(\hat{r}, \hat{s}) := (r(\hat{x}, \hat{y}), s(\hat{x}, \hat{y})) = (r(x, y), s(x, y) + \epsilon). \quad (2.21)$$

Ejemplo 2.8.21 Las coordenadas polares son canónicas respecto al grupo de Lie de rotaciones. Las rotaciones en coordenadas cartesianas y polares se escriben

$$\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\epsilon) & -\sin(\epsilon) \\ \sin(\epsilon) & \cos(\epsilon) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} \hat{r} = r \\ \hat{\theta} = \theta + \epsilon \end{matrix}$$

Derivando las ecuaciones (2.21) respecto a ϵ obtenemos

$$\begin{aligned} \xi(x, y) \frac{\partial r}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial r}{\partial y} &= 0 \\ \xi(x, y) \frac{\partial s}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial s}{\partial y} &= 1 \end{aligned} \quad (2.22)$$

Los cambios de coordenadas deben ser invertibles, de modo que pediremos la condición de no degeneración

$$\frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial y} - \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial s}{\partial x} \neq 0 \quad (2.23)$$

Observaciones:

1. El vector tangente en cualquier punto no invariante es paralelo a la curva $r = \text{cte}$ que pasa por ese punto. Luego esa curva continene las órbitas de cada punto en ella. Las órbitas son invariantes, así r se llama la *coordenada invariante*. Las curvas $s = \text{cte}$ son transversales a las órbitas.
2. Las coordenadas canónicas no están definidas en un punto (x, y) invariante pues en esos puntos $\xi(x, y) = \eta(x, y) = 0$.
3. Las coordenadas canónicas están definidas en un entorno de cualquier punto no invariante. Esta afirmación requiere una demostración que utiliza métodos y conceptos que están fuera de los objetivos de este curso.
4. Las coordenadas canónicas no son únicas. De hecho si (r, s) son canónicas $(\tilde{r}, \tilde{s}) = (F(r), G(r) + s)$ lo son para cualquier F y G con $F'(r) \neq 0$ (para la no degeneración).

2.9 Encontrando coordenadas canónicas

2.9.1 Integrales primeras

Definición 2.9.10 (Integrales primera) na integral primera de la EDO $y' = f(x, y)$ es una función $\phi(x, y)$ que es constante a lo largo de cualquier curva solución de la EDO. Se la denomina también *magnitud conservada*.

Teorema 2.9.3 (Propiedad de conservación de coordenadas canónicas) Si (r, s) son coordenadas canónicas de una grupo de Lie de simetrías entonces r es una integral primera de la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\eta(x, y)}{\xi(x, y)}. \quad (2.24)$$

Dem. La afirmación del teorema es consecuencia de que el campo (ξ, η) es tangente a las curvas $r = c$, con c constante. Justifiquemos el teorema del siguiente modo. Supongamos $y(x)$ solución de la EDO, es suficiente demostrar que $\frac{d}{dx}r(x, y(x)) = 0$. Pero, en efecto

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}r(x, y(x)) &= \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial s}{\partial y}y' && \text{(regla cadena)} \\ &= \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial s}{\partial y}\frac{\eta(x, y)}{\xi(x, y)} && \text{(Ec. (2.24))} \\ &= 0 && \text{(Ec. (2.22))} \end{aligned}$$

□

Ejemplo 2.9.22 Ya conocemos las coordenadas canónicas de las rotaciones,

$$\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\epsilon) & -\sin(\epsilon) \\ \sin(\epsilon) & \cos(\epsilon) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

hallemosla por el método propuesto. Hay que resolver

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \Rightarrow ydy = -xdx \Rightarrow y^2 + x^2 = C$$

Luego $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ es una integral primera.

La coordenada r es constante sobre los puntos en la gráfica de una solución de (2.24). Sobre esos puntos $(x, y(x))$, la coordenada s satisface:

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dx} &= \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial s}{\partial y}y'(x) && \text{(Regla cadena)} \\ &= \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial s}{\partial y}\frac{\eta(x, y)}{\xi(x, y)} && \text{(2.24)} \\ &= \frac{1}{\xi} && \text{(2.22).} \end{aligned} \quad (2.25)$$

Ahora podemos aprovechar que ya conocemos r y expresar y como función de r, x . Luego

Teorema 2.9.4 (Expresión para s)

$$s = \int \frac{ds}{dx} dx = \int \frac{dx}{\xi(x, y(r, x))}. \quad (2.26)$$

En la igualdad resultante reemplazamos r por su expresión en las variables x, y .

Si ocurriese que $\xi = 0$ y $\eta \neq 0$. Entonces por (2.24) $r_y = 0$, de modo que r es sólo función de x . Se puede asumir $r = x$. Además $\eta s_y = 1$, entonces

$$s = \int \frac{dy}{\eta(r, y)}. \quad (2.27)$$

Ejemplo 2.9.23 Retornando al ejemplo de las rotaciones, donde hallamos que $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, vemos que

$$s = \int \frac{dx}{-y} = - \int \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \arccos\left(\frac{x}{r}\right).$$

Por consiguiente s es el ángulo polar.

Ejemplo 2.9.24 Encontrar coordenadas canónicas para el grupo de Lie de simetrías

$$(\hat{x}, \hat{y}) = (e^\epsilon x, e^{k\epsilon} y) \quad k > 0.$$

El vector tangente es

$$(\xi, \eta) = \left(\frac{d\hat{x}}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0}, \frac{d\hat{y}}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} \right) = (x, ky).$$

Resolvamos la ecuación (2.24)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ky}{x} \Rightarrow y = Cx^k.$$

Luego $\Phi = y/x^k$ es integral primera. Entonces podemos tomar $r = y/x^k$. Para s

$$s = \int \frac{dx}{\xi} = \frac{dx}{x} = \ln|x|.$$

Entonces $(r, s) = (yx^{-k}, \ln|x|)$ son coordenadas canónicas. No están definidas en $x = 0$. Podemos encontrar coordenadas canónicas definidas en $x = 0$ del siguiente modo. Recordamos que para todas F y G

$$(\tilde{r}, \tilde{s}) = (F(r), G(r) + s) = (F(x^{-k}y), G(x^{-k}y) + \ln|x|).$$

Son canónicas también. Si tomamos $F(r) = 1/r$ y $G(r) = \frac{1}{k} \ln|r|$, evitamos la singularidad. Luego

$$(\tilde{r}, \tilde{s}) = (x^k y^{-1}, \frac{1}{k} \ln|y|).$$

Son canónicas, están definidas en $x = 0$ pero no en $y = 0$.

Ejemplo 2.9.25 Encontrar coordenadas canónicas para

$$(\hat{x}, \hat{y}) = \left(\frac{x}{1 - \epsilon x}, \frac{y}{1 - \epsilon x} \right).$$

$$(\xi, \eta) = \left(\frac{d\hat{x}}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0}, \frac{d\hat{y}}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} \right) = (x^2, xy).$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\eta}{\xi} = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{y}{x} = \text{cte.}$$

Podemos tomar $r = y/x$. Para s

$$s = \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}.$$

Luego $(r, s) = (\frac{y}{x}, -\frac{1}{x})$ son canónicas.

En este caso los puntos sobre $x = 0$ son invariantes, no podemos definir coordenadas canónicas allí.

Lo podemos desarrollar con SymPy.

```

x,y,epsilon=symbols('x,y,epsilon')
T=Matrix([x/(1-epsilon*x),y/(1-epsilon*x)])
xi=T[0].diff(epsilon).subs(epsilon,0)
print(xi)
eta=T[1].diff(epsilon).subs(epsilon,0)
print(eta/xi)
y=Function('z')(x)
sol=dsolve(y.diff(x)-y/x,y)
print(sol)
Integral(1/xi,x).doit()

```

2.9.2 Infinitesimales → Simetrías (Revisitado)

Las coordenadas canónicas nos dan otra manera de encontrar simetrías a partir de los infinitesimales siguiendo el procedimiento:

1. Determinar las coordenadas canónicas (sólo necesitamos conocer los infinitesimales).
2. Expresamos las relaciones $\hat{r} = r$ y $\hat{s} = s + \epsilon$ en las coordenadas x, y .

Ejemplo 2.9.26 Hallar el grupo de simetrías asociado a los infinitesimales $\xi = x^2$ y $\eta = xy$.

1. En la sección hallamos las coordenadas canónicas $(r, s) = \left(\frac{y}{x}, -\frac{1}{x}\right)$ asociadas a los infinitesimales dados.
2. Entonces

$$\begin{aligned} (\hat{r}, \hat{s}) &= (r, s + \epsilon) \Rightarrow \frac{\hat{y}}{\hat{x}} = \frac{y}{x}, \quad -\frac{1}{\hat{x}} = -\frac{1}{x} + \epsilon \\ &\Rightarrow \hat{x} = \frac{x}{1 - \epsilon x}, \quad \hat{y} = \frac{y}{1 - \epsilon x}. \end{aligned}$$

2.10 Resolviendo EDO con grupos de Lie de simetrías

2.10.1 Método de solución

Finalmente, toda la teoría expuesta nos permite elaborar un método que puede resolver una ecuación dada supuesto que conocemos un grupo de Lie de simetrías de ella. Supongamos dado un grupo de Lie de simetrías (\hat{x}, \hat{y}) de la ecuación

$$y' = f(x, y) \tag{2.28}$$

Supongamos que las simetrías son no triviales. Según (2.16) debemos tener

$$\eta(x, y) \not\equiv f(x, y)\xi(x, y)$$

La razón de esta condición es que si fuese falsa entonces la ecuación (2.24) es la misma que la ecuación (2.28) y el método es inútil.

Supongamos (r, s) coordenadas canónicas. La ecuación en las coordenadas (r, s) , según (2.6), se escribirá

$$\frac{ds}{dr} = \hat{f}(r, s) := \frac{s_x + f(x, y)s_y}{r_x + f(x, y)r_y}. \tag{2.29}$$

Las coordenadas canónicas se definen por (2.21) de modo que el grupo de simetrías actúe por traslación $(\hat{r}, \hat{s}) = (r, s + \epsilon)$. Cómo se justifica en el Ejemplo 2.4.12, \hat{f} es independiente de s , por consiguiente la ecuación se reduce a

$$\frac{ds}{dr} = \hat{f}(r) \quad (2.30)$$

que se resuelve integrando.

Ejemplo 2.10.27 Resolver

$$y' = xy^2 - \frac{2y}{x} - \frac{1}{x^3}, \quad x \neq 0,$$

sabiendo que la ecuación es invariante para el grupo de simetrías

$$(\hat{x}, \hat{y}) = (e^\epsilon x, e^{-2\epsilon} y).$$

Por los resultados de la sección :

$$(r, s) = (x^2 y, \ln |x|)$$

son canónicas. Según (2.29) la ecuación en (r, s) es:

$$\frac{dr}{ds} = \frac{\frac{1}{x}}{2xy + x^2 \left(xy^2 - \frac{2y}{x} - \frac{1}{x^3} \right)} = \frac{1}{x^4 y^2 - 1} = \frac{1}{r^2 - 1}$$

Como sabíamos que debía suceder el resultado del segundo miembro no depende sólo de r . Integrando

$$s = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{r-1}{r+1} \right) + C.$$

Sustituyendo

$$\ln |x| = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x^2 y - 1}{x^2 y + 1} \right) + C.$$

Despejando

$$y = -\frac{x^2 + C}{x^2(x^2 - C)} \quad (2.31)$$

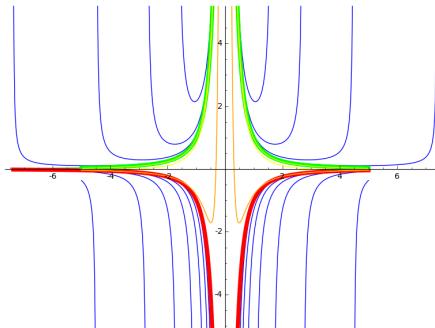


Figura 2.10.1: Soluciones de $y' = xy^2 - \frac{2y}{x} - \frac{1}{x^3}$

La ecuación característica reducida (2.16) es para la ecuación de este ejemplo:

$$0 = \bar{Q} = -2y - \left(xy^2 - \frac{2y}{x} - \frac{1}{x^3} \right) x = -x^2 y^2 + \frac{1}{x^2}$$

Cuyas soluciones son

$$y = \pm \frac{1}{x^2}.$$

Que además son solución de la ecuación diferencial. La curva $y = -1/x^2$ se obtiene de (2.31) con $C = 0$. La curva $y = 1/x^2$. En la figura 2.10.1 graficamos las distintas soluciones. Las curvas azules y naranjas se corresponden con las gráficas de (2.31) con $c > 0$ y $c < 0$ respectivamente. La verde es la de $y = 1/x^2$ y la roja de $y = -1/x^2$.

Ejemplo 2.10.28 Resolver

$$y' = \frac{y+1}{x} + \frac{y^2}{x^3}, \quad x \neq 0,$$

sabiendo que la ecuación es invariante para el grupo de simetrías

$$(\hat{x}, \hat{y}) = \left(\frac{x}{1-\epsilon x}, \frac{y}{1-\epsilon x} \right).$$

Ya hemos computado las coordenadas canónicas en la subsección :

$$(r, s) = \left(\frac{y}{x}, \frac{1}{x} \right).$$

Por (2.29) la ecuación se escribe

$$\frac{dr}{ds} = \frac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{y}{x^2} + \frac{1}{x} \left(\frac{y+1}{x} + \frac{y^2}{x^3} \right)} = \frac{1}{1+r^2},$$

cuya solución es

$$s = \arctan(r) + C \Rightarrow y = -x \tan \left(\frac{1}{x} + C \right).$$

2.10.2 Ecuaciones homogéneas

Ejemplo 2.10.29 En este ejemplo deduciremos nuevamente el método de solución de ecuaciones homogéneas apelando a las simetrías. Es decir, queremos resolver la ecuación

$$y' = F \left(\frac{y}{x} \right). \quad (2.32)$$

Aquí tenemos el Grupo de Lie de simetrías de cambio de escalas

$$(\hat{x}, \hat{y}) = (e^\epsilon x, e^\epsilon y).$$

Por los resultados de la subsección , $(r, s) = (y/x, \ln|x|)$ son canónicas y la ecuación se escribe

$$\frac{ds}{dr} = \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{y}{x^2} + \frac{F(\frac{y}{x})}{x}} = \frac{1}{F(r) - r}.$$

La solución general es

$$\ln|x| = \int^{y/x} \frac{dr}{F(r) - r} + c.$$

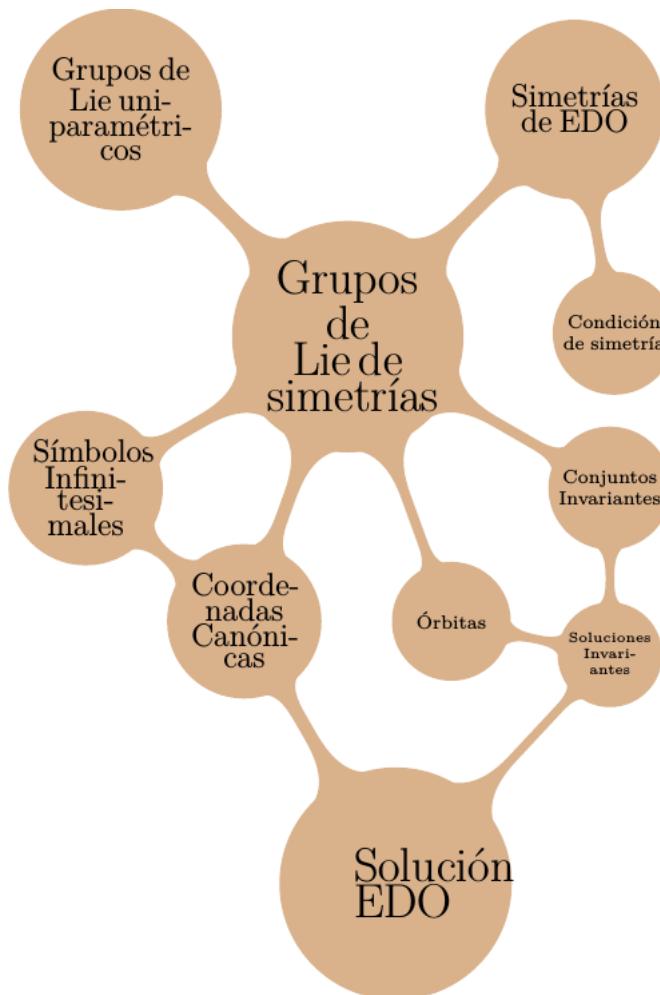
2.10.3 Método de Lie y SymPy

SymPy Incorpora distintas estrategias para resolver ecuaciones por el método de Lie. Hay mucho por indagar al respecto, pero sólo vamos a mencionar una función para calcular los infinitesimales (ξ, η) . Aprovechamos para mostrar como luce una consola de ipython, otra manera de usar Python y SymPy.

```
x=symbols('x')
y=Function('y')(x)
from sympy.solvers.ode import infinitesimals
xi_eta=infinitesimals((y+1)/x+y**2/x**3-y.diff(x))
```

$$[\{\eta(x, y(x)) : xy(x), \xi(x, y(x)) : x^2\}]$$

2.11 Diagrama conceptual



Apéndices

2.A Formas Diferenciales, una introducción ingenua

La expresión (2.1) es más asimétrica, entre las variables x e y una de ellas es independiente (x) y la otra independiente (y). La expresión (2.2) es más simétrica, las dos variables tienen el mismo estatus.

Las expresiones del tipo (2.2) representan un ente matemático importante llamado forma diferencial. No disponemos del tiempo necesario para dotar con entidad matemática el concepto de forma diferencial. Tampoco resulta de vital importancia. Pero las reglas que rigen la combinación de las formas diferenciales son muy simples y nos gustaría describir este aspecto de las formas diferenciales brevemente; como motivación

para un estudio posterior más profundo y para que el lector gane en confianza en su manipulación. Daremos así una pintura de las formas diferenciales incompleta, por cuanto sólo diremos como ellas se combinan pero no contestaremos la pregunta de que son. Sólo digamos, para advertir al lector sobre los requisitos teóricos que se requieren, que las formas diferenciales se encuentran asociados al concepto de variedad diferencial, concepto este que generaliza al de curva y superficie. Más concretamente, las formas diferenciales son funciones que toman valores en los duales de los espacios tangentes a las variedades diferenciales. En particular hay formas diferenciales asociadas a los espacios euclídeo, que podemos identificar con \mathbb{R}^n .

Aquí vamos a pensar a las formas diferenciales como objetos puramente formales sobre los que actúa un operador d , leyes de composición internas y externas. Se construyen formas diferenciales invocando un sistema de coordenadas x_1, \dots, x_n . Estas coordenadas, deben ser coordenadas de alguna variedad diferencial, pero, por simplicidad, supondremos que son coordenadas cartesianas ortogonales de un espacio euclídeo. Las formas diferenciales forman un espacio vectorial con una operación de suma $+$ y producto por un escalar. Además tienen definido un producto \wedge , llamado producto exterior, que posee algunas particularidades. Como los polinomios, las formas diferenciales tienen grado. Por eso se dice que forman un álgebra graduada. A diferencia de los polinomios, este grado no supera la dimensión n del espacio (\mathbb{R}^n o más generalmente una variedad) a la que están asociadas. Para ser más exactas, la única forma de grado $k > n$ es la trivial, esto es la nula. Denotamos Λ_k las formas de grado k , siendo $\Lambda = \bigoplus_{k=0}^n \Lambda_k$ el espacio vectorial de todas ellas. Luego $d : \Lambda \rightarrow \Lambda$ y $\wedge : \Lambda \times \Lambda \rightarrow \Lambda$. Ahora describimos unas simples reglas de las formas, d y \wedge .

1. Una 0-forma diferencial es una función $g(x_1, \dots, x_n)$.
2. Si $\alpha \in \Lambda_k$ y $\beta \in \Lambda_p$ entonces $\alpha \wedge \beta \in \Lambda_{k+p}$.
3. El producto \wedge es asociativo, distributivo y satisface una especie de anticomutatividad, específicamente si $\alpha \in \Lambda_k$ y $\beta \in \Lambda_p$ entonces $\alpha \wedge \beta = (-1)^{kp} \beta \wedge \alpha$. En particular $\alpha \wedge \alpha = 0$ cuando α es un k -forma con k impar.
4. El diferencial satisface
 - a) Si ω es una k -forma diferencial $d\omega$ es una $k+1$ forma diferencial.
 - b) $d^2\omega = d(d\omega) = 0$, para toda $\omega \in \Lambda$.
 - c) Si $\alpha \in \Lambda_k$ entonces $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta$.
 - d) En el caso de 0-forma (función) $g(x_1, \dots, x_n)$ el diferencial se define

$$dg = \frac{\partial g}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial g}{\partial x_n} dx_n$$

5. Las expresiones dx_i , $i = 1, \dots, n$ forman una especie de base del espacio de las formas Λ , en el sentido que cualquier k forma α se expresa de la siguiente manera:

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} g_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k},$$

para ciertas funciones $g_{i_1 \dots i_k}$. Observar que la suma se extiende sobre todos los subconjuntos ordenados de $\{1, \dots, n\}$.

Una k -forma diferencial α se llama exacta cuando es el diferencial de una $k-1$ -forma y se dice cerrada cuando $d\alpha = 0$. Las propiedades de las formas implican que toda forma exacta es cerrada. Un famoso Lema de Poincaré trata con el recíproco de esta afirmación.

Las reglas anteriores permiten computar cualquiera de las operaciones. **Ejemplo 2.1.30**
Si $\alpha = M(x, y)dx + N(x, y)dy$ es una 1-forma de \mathbb{R}^2 , entonces

$$\begin{aligned} d\alpha &= dM \wedge dx - Md^2x + dN \wedge dy - Nd^2y \\ &= \left(\frac{\partial M}{\partial x} dx + \frac{\partial M}{\partial y} dy \right) \wedge dx + \left(\frac{\partial N}{\partial x} dx + \frac{\partial N}{\partial y} dy \right) \wedge dy \\ &= \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx \wedge dy \end{aligned}$$

Recordemos el famoso Teorema de Green , que afirmaba que si $D \subset \mathbb{R}^2$ era una región cuyo borde $C = \partial D$ era una curva cerrada simple, entonces

$$\oint_{\partial D} M dx + N dy = \iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy.$$

Utilizando formas diferenciales este resultado se escribe de la manera, mucho más compacta y sugerente

$$\oint_{\partial D} \alpha = \iint_D d\alpha,$$

donde $\alpha = M(x, y)dx + N(x, y)dy$. Esto es una relación clave de las formas diferenciales que se generaliza en un teorema fundamental de la matemática llamado Teorema de Stokes .

Ejemplo 2.1.31 Computemos d^2g , cuando g es una función (0-forma).

$$\begin{aligned} d^2g &= d \left(\frac{\partial g}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial g}{\partial x_n} dx_n \right) \\ &= d \left(\frac{\partial g}{\partial x_1} \right) \wedge dx_1 + \cdots + d \left(\frac{\partial g}{\partial x_n} \right) \wedge dx_n - \frac{\partial g}{\partial x_1} \wedge d^2x_1 - \cdots - \frac{\partial g}{\partial x_n} \wedge d^2x_n \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_1} dx_i \right) \wedge dx_1 + \cdots + \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_n} dx_i \right) \wedge dx_n \\ &= \sum_{i \neq 1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_1} dx_i \wedge dx_1 + \cdots + \sum_{i \neq n}^n \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_n} dx_i \wedge dx_n \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left\{ \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 g}{\partial x_j \partial x_i} \right\} dx_i \wedge dx_j = 0. \end{aligned}$$

Que es lo que tenía que ser.

2.B Formas diferenciales en Sympy

En este apéndice resolveremos el problema planteado en el ejemplo 2.2.3 usando formas diferenciales y Sympy. Usaremos el módulo de geometría diferencial, donde se pueden definir formas diferenciales y otros entes propios de la geometría diferencial: campos escalares y vectoriales. No es posible entender completamente este módulo sin introducir conceptos básicos de geometría diferencial, cosa que no haremos pues nos alejaría del propósito del curso. De modo que vamos a discutir superficialmente la solución de este problema. Es suficiente importar del módulo de geometría diferencial el submodulo R2, que ya nos crea las formas diferenciales dx, dy (se accede por `R2.dx, R2.dy`), como así también las formas dr y $d\theta$ (`R2.dr, R2.dtheta`). Técnicamente hablando R2 es una variedad diferencial –en este caso el espacio euclídeo bidimensional– con toda la estructura algebraica que lleva consigo.

En el siguiente código, luego de las sentencias de importación, cada línea efectúa lo siguiente: 4-define la forma diferencial en coordenadas cartesianas, 5 y 6-calcula el valor de M y N en coordenadas polares $-Md\theta + Ndr$. Sin embargo el resultado, todavía tiene apelaciones a las coordenadas x e y . Por este motivo en las líneas 7 y 8 introducimos los símbolos r y $theta$ y en las líneas 9 a 11 sustituímos x e y por $r \cos \theta$ y $r \sin \theta$ respectivamente. Hay que notar que los símbolos que introdujimos r y θ son diferentes de `R2.theta` y `R2.r`, a los que `sympy` despliega en negritas en la consola de ipython. Por ese motivo, también sustituímos `R2.theta` y `R2.r` por θ y r respectivamente.

```

1 from sympy import *
from sympy.diffgeom.rn import R2
3 init_printing()

```

```

1 forma=(R2.y**3+R2.x**2*R2.y-R2.x-R2.y)*R2.dx-(R2.x**3+R2.x*R2.y**2-R2.x+R2.y)*
2 R2.dy
3 M=forma.rcall(R2.e_theta)
4 N=forma.rcall(R2.e_r)
5 r=symbols('r',positive=True)
6 theta=symbols('theta')
7 sust={R2.x:r*cos(theta),R2.y:r*sin(theta),R2.theta:theta,R2.r:r}
8 Mpol=M.simplify()
9 Npol=N.simplify()
10 forma_pol=Mpol*R2.dtheta+Npol*R2.dr
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20

```

scripts/sust_formas.py

La forma obtenida es $-rdr + (-r^4 + r^2)d\theta$.

2.C Teoría de grupos computacional: GAP

«GAP (Groups, Algorithms, Programming) es un sistema de álgebra discreta computacional, con especial énfasis en la teoría de grupos computacional. GAP proporciona un lenguaje de programación, una biblioteca de miles de funciones implementando algoritmos algebraicos escritos en el lenguaje GAP, así como bibliotecas de datos de objetos algebraicos de gran tamaño [...] GAP se utiliza en la investigación y la enseñanza para estudiar grupos y sus representaciones, anillos, espacios vectoriales, álgebras, estructuras combinatorias, y más. El sistema, incluida la fuente, se distribuye libremente.»

(Página Oficial de GAP)

Hasta donde sabemos Sympy no implementa objetos de teoría de grupos. Sin embargo existe software libre para estudiar grupos. El más conocido de ellos es GAP. Este sistema provee un lenguaje muy sencillo y transparente. Lamentablemente el estudio de esta herramienta está más allá de los alcances de este documento. Desarrollaremos un simple ejemplo.

Ejemplo 2.3.32 En el siguiente ejemplo de sesión con línea de comandos de GAP introducimos sentencias que quedan indicadas en cada línea iniciada con el símbolo de sistema (prompt) >gap. Las líneas que no inician con el símbolo de sistema indican la salida correspondiente a la sentencia que antecede dichas líneas. En línea 1 introducimos el grupo simétrico de orden 3 y lo llamamos G. En línea 3 pedimos que nos enumere los elementos de G. En línea 5, introducimos el elemento de G que en notación cíclica se escribe (1, 3, 2). En líneas 7 y 9 calculamos potencias de r. En 11 definimos como H el subgrupo generado por r y en 13 enumeramos los elementos de H. En 15 averiguamos si H es normal. Siendo este el caso, podemos calcular el grupo cociente en 17 y lo llamamos K. Por último averiguamos el orden de K en 19.

```

1 gap> G:=SymmetricGroup(3);
2 Sym( [ 1 .. 3 ] )
3 gap> Elements(G);
4 [ (), (2,3), (1,2), (1,2,3), (1,3,2), (1,3) ]
5 gap> r:=(1,3,2);
6 (1,3,2)
7 gap> r^2;
8 (1,2,3)
9 gap> r^3;
10 ()
11 gap> H:=Subgroup(G,[r]);
12 Group([ (1,3,2) ])
13 gap> Elements(H);
14 [ (), (1,2,3), (1,3,2) ]
15 gap> IsNormal(G,H);
16 true
17 gap> K:=FactorGroup(G,H);
18 Group([ f1 ])
19 gap> Size(K);
20 2

```

scripts/gap_basico.g

3 Teoremas de Existencia y Unidad

3.0.1 Introducción

«El determinismo es una doctrina filosófica que sostiene que todo acontecimiento físico, incluyendo el pensamiento y acciones humanas, está causalmente determinado por la irrompible cadena causa-consecuencia, y por tanto, el estado actual determina en algún sentido el futuro...En física, el determinismo sobre las leyes físicas fue dominante durante siglos, siendo algunos de sus principales defensores Pierre Simon Laplace y Albert Einstein.»

«Podemos mirar el estado presente del universo como el efecto del pasado y la causa de su futuro. Se podría condensar un intelecto que en cualquier momento dado sabría todas las fuerzas que animan la naturaleza y las posiciones de los seres que la componen. Si este intelecto fuera lo suficientemente vasto para someter los datos al análisis, podría condensarse en una simple fórmula de movimiento de los grandes cuerpos del universo y del átomo más ligero; para tal intelecto nada podría ser incierto y el futuro, así como el pasado, estaría frente sus ojos»

Laplace, citado en [?] [?]

La ciencia se vale de estructuras matemáticas para describir a través de modelos la evolución de sistemas reales. Usualmente esas estructuras son ecuaciones (diferenciales) donde el tiempo es una de sus variables. Conocer el estado actual de un sistema (las posiciones que menciona Laplace) es conocer las condiciones iniciales. Mientras que las ecuaciones en sí mismas se derivan de las fuerzas que animan la naturaleza. Así, para que la matemática colabore con la filosofía determinista, debería ella misma plantear problemas deterministas. En ese sentido, hablando específicamente de ecuaciones diferenciales, para que podamos decir que un PVI sea determinista, el problema debería tener solución (existencia de soluciones), caso contrario este PVI no produciría ninguna predicción del futuro. Pero también esta solución debería ser única (unicidad de soluciones), porque de no ser así, el problema produciría múltiples predicciones y por tanto el estado actual no determinaría el futuro. Un problema que satisfaga estas condiciones lo denominaremos *bien planteado*¹.

Por lo expuesto, es de trascendencia para la ciencia en general que se pueda establecer que los problemas matemáticos que modelizan problemas de estas ciencias sean bien planteados. Este es el propósito de este capítulo.

Para nuestra sorpresa, PVIs sin ningún problema aparente a la vista no son problemas bien planteados.

Ejemplo 3.0.1 Considerar el siguiente PVI:

$$\begin{cases} y'(x) = y(x)^{2/3} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

La ecuación es en variables separables. Deberíamos dividir por $y(x)$, pero notar antes de hacer ello que $y \equiv 0$ es solución. Supongamos $y(x) \neq 0$, una vez dividido

$$\frac{dy}{y^{2/3}} = dx \Rightarrow 3y^{1/3} = x + C \Rightarrow y(x) = \left(\frac{x}{3} + C\right)^3.$$

A pesar de la limitación original de que $y(x) \neq 0$, la expresión para $y(x)$ que hemos hallado es solución para todo $x \in \mathbb{R}$. Notar que $y(x) = 0$ cuando $x = -C/3$. Sin

¹Es común en la literatura requerir, además de la existencia y unicidad, la estabilidad para hablar de problema bien planteado

embargo, el valor problemático $y = 0$ nos trae aparejado un inesperado problema. Ocurre que la función $y_C(x) := \left(\frac{x}{3} + C\right)^3$ tiene derivada igual a cero en $x = -C/3$. Esto implica que si $C_1 < C_2$ entonces la función

$$y_{C_1, C_2}(x) := \begin{cases} y_{C_1}(x) & \text{si } x \leq -C_2 \\ 0 & \text{si } x \in [C_1, C_2] \\ y_{C_2}(x) & \text{si } x \geq -C_1 \end{cases}$$

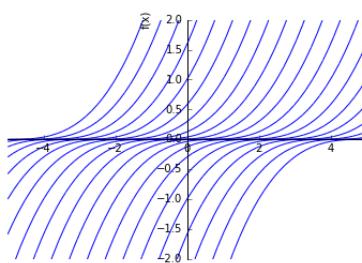
está bien definida y es diferenciable en \mathbb{R} . Además de ello, cualquiera de estas funciones con $C_1 \leq 0 \leq C_2$ resuelven el PVI. De esta manera hemos encontrado un PVI con infinitas soluciones.

```

1 from sympy import *
2 x, y=symbols('x, y')
3 Rango=range(-10,11)
4 C=[k/6.0 for k in Rango]
5 p=plot((x/3+C[0])**3,(x,-5,5),show=False,xlim=(-5,5),
6 ylim=(-2,2),aspect_ratio=(1,1))
7 for pend in C[1:]:
8     p1=plot((x/3+pend)**3,(x,-5,5),
9     show=False,xlim=(-5,5),
10    ylim=(-2,2),aspect_ratio=(1,1))
11    p.append(p1[0])
12 p.show()

```

scripts/no-unicidad.py



3.1 Sistemas de Ecuaciones Diferenciales

3.1.1 Definición y ejemplos

Un *sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden* es un conjunto de ecuaciones que relacionan una variable independiente, digamos x , un conjunto de variables dependientes, digamos $y_1(x), \dots, y_n(x)$, y sus derivadas respecto a x . A las ecuaciones diferenciales con una incognita y una ecuación las denominaremos *ecuaciones escalares*.

Definición 3.1.1 Un sistema de ecuaciones diferenciales es una conjunto de ecuaciones de la forma

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx}(x) = f_1(x, y_1(x), \dots, y_n(x)) \\ \frac{dy_2}{dx}(x) = f_2(x, y_1(x), \dots, y_n(x)) \\ \vdots \\ \frac{dy_n}{dx}(x) = f_n(x, y_1(x), \dots, y_n(x)) \end{cases}, \quad (3.1)$$

donde $f_j : [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, n$, son funciones.

Una manera alternativa y compacta de denotar un sistema se logra introduciendo las funciones $y = (y_1, \dots, y_n)$ y $f = (f_1, \dots, f_n)$. Entonces $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función con valores en \mathbb{R}^n y $f : [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un campo vectorial dependiente de x . Con estas notaciones el sistema se escribe:

$$y'(x) = f(x, y(x)). \quad (3.2)$$

Ejemplo 3.1.2 Si $x(t)$ es el ángulo que forma un péndulo, de longitud l , con la vertical en el tiempo t y $v(t) = x'(t)$, entonces $x(t)$ y $v(t)$ deben satisfacer el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x'(t) = v(t) \\ v'(t) = -\frac{g}{l} \operatorname{sen}(x(t)). \end{cases} \quad (3.3)$$

Ejemplo 3.1.3 En 1925 y 1926, Alfred J. Lotka y Vito Volterra respectivamente, introdujeron las ecuaciones de Lotka-Volterra. Se trata de un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden que se usan para describir dinámicas de sistemas biológicos en el que dos especies interactúan, una como presa y otra como depredador. Se definen como:

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)(\alpha - \beta y(t)) \\ y'(t) = -y(t)(\gamma - \delta x(t)) \end{cases} \quad (3.4)$$

La variable y representa el número de individuos de algún predador (por ejemplo, un lobo) y x es el número de sus presas (por ejemplo, conejos), t representa el tiempo; y α, β, γ y δ son parámetros (positivos)



Vito Volterra (1860-1940)

3.1.2 Sistemas de ecuaciones y ecuaciones de orden superior

Es posible convertir el sistema (3.1) de n -ecuaciones diferenciales de primer orden en una ecuación escalar de orden n

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}). \quad (3.5)$$

y viceversa.

Para justificar la aseveración anterior supongamos que $y = y(x)$ resuelven (3.5) y escribamos:

$$y_1 = y, y_2 = y', y_3 = y'', \dots, y_n = y^{(n-1)}.$$

Entonces notar que

$$\begin{cases} y'_1(x) &= y_2(x) \\ y'_2(x) &= y_3(x) \\ &\vdots \\ y'_{n-1}(x) &= y_n(x) \\ y'_n(x) &= f(x, y_1(x), \dots, y_n(x)) \end{cases}, \quad (3.6)$$

Recíprocamente, supongamos que y_1, \dots, y_n resuelven (3.1). Por simplicidad vamos a suponer que las f_j son independientes de x , el procedimiento general sigue las mismas líneas que el caso que discutimos aquí. Se toma $y = y_n$ (podríamos usar cualquier y_j , $j = 1, \dots, n$). Ahora derivamos sucesivamente n -veces respecto a x la ecuación para y_n , y reemplazamos cada derivada y'_j por f_j (vamos a omitir los argumentos de f_j que son en todos los casos (y_1, \dots, y_n)):

$$\begin{aligned} y'_n(x) &= f_n(y_1, \dots, y_n) &=: g_1(y_1, \dots, y_n) \\ y''_n(x) &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_n}{\partial y_j} f_j + &=: g_2(y_1, \dots, y_n) \\ y'''_n(x) &= \sum_{k,j=1}^n \frac{\partial^2 f_n}{\partial y_k \partial y_j} f_k f_j + \sum_{k,j=1}^n \frac{\partial f_n}{\partial y_j} \frac{\partial f_j}{\partial y_k} f_k &=: g_k(y_1, \dots, y_n) \\ &\vdots &\vdots \\ y_n^{(n)}(x) &= \dots &=: g_n(y_1, \dots, y_n) \end{aligned}$$

Las igualdades anteriores tienen la estructura $z = G(y)$, donde $y = (y_1, \dots, y_n)$, $z = (y'_n, y''_n, \dots, y_n^{(n)})$ y $G = (y_1, \dots, y_n)$. Si la función $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es invertible y escribimos $H = G^{-1}$ entonces

$$y_n = H_n(z) = H_n(y'_n, y''_n, \dots, y_n^{(n)}).$$

La anterior es una ecuación escalar de orden n para y_n . Por consiguiente hemos logrado reducir el sistema de n -ecuaciones a una ecuación de orden n . Observar que si resolvemos esta ecuación, encontrando y_n , podemos hallar el resto de las incognitas y_j , $j = 1, \dots, n - 1$, usando que $y_j = H_j(y'_n, y''_n, \dots, y_n^{(n)})$.

Ejemplo 3.1.4 Reduzcamos las ecuaciones de Lotka-Volterra a una ecuación de orden 2 y luego revirtamos el camino.

La primera parte la resolvemos con Sympy:

```

1 t=symbols('t')
2 y=Function('y')(t)
3 x=Function('x')(t)
4 alpha,beta,gamma,delta=symbols('alpha,beta,gamma,delta',positive=True)
5 ec=y.diff()+gamma*x-delta*x*y
6 ec1=alpha*x-beta*x*y
7 ec2=ec.diff(t)
8 ec3=ec2.subs(x.diff(),ec1)
9 ec4=(y+gamma*x)/delta/y #Esto es x
10 ec5=ec3.subs(x,ec4)
11 ec6=ec5.simplify()
12 ec6

```

scripts/Sist-Ecua.py

Resulta en

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) - \frac{d}{dt}y(t) + (-\alpha\gamma - \alpha)y(t) + (\beta\gamma + \beta)y^2(t) = 0 \quad (3.7)$$

El camino inverso es más sencillo. Llamamos $z = y'$. Usando las variables y, z la ecuación (3.7) se escribe

$$\begin{cases} y'(t) &= v(t) \\ v'(t) &= v + (\alpha\gamma + \alpha)y(t) - (\beta\gamma + \beta)y^2(t) \end{cases}$$

No llegamos a la ecuación de partida. Hay que tener presente que una ecuación tiene diferentes representaciones en diferentes variables y que las variables que hemos elegido para el camino de vuelta y, v , no son las originales del problema y, x .



Émile Picard (1856-1941)

3.2 Método de iteraciones de Picard

En esta sección vamos a describir la estrategia que emplearemos para la demostración de la existencia de soluciones. El método que seguiremos fue ideado por Émile Picard

Introducimos previamente algunas definiciones elementales.

Definición 3.2.2 ea α una función definida en un intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ con valores en \mathbb{R}^n , $n \geq 1$, tal que cada componente es una función integrable. Entonces, como es usual, escribimos

$$\int_a^b \alpha(s)ds = \left(\int_a^b \alpha_1(s)ds, \dots, \int_a^b \alpha_n(s)ds \right)$$

Es un ejercicio muy sencillo demostrar que vales las propiedades elementales de las integrales, para esta extensión del concepto de integral a funciones con valores vectoriales. En particular vale el Teorema Fundamental del Cálculo: Si α es continuamente diferenciable entonces

$$\int_a^b \alpha'(s)ds = \alpha(b) - \alpha(a).$$

Además vale la desigualdad triangular: si $a < b$

$$\left\| \int_a^b \alpha(s)ds \right\| \leq \int_a^b \|\alpha(s)\| ds.$$

Nuestra intención es demostrar la existencia de soluciones de un PVI para el sistema de EDOs

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}, \quad (3.8)$$

donde $f : \Omega \subset (a, b) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, Ω abierto, $y : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ (se debe satisfacer que $(x, y(x)) \in \Omega$, para $x \in [a, b]$), $x_0 \in (a, b)$ e $y_0 \in \mathbb{R}^n$ son dados con $(x_0, y_0) \in \Omega$.

Integremos la ecuación diferencial en un intervalo de extremos x_0 y x y tomando en consideración las condiciones iniciales obtenemos una nueva ecuación para $y(x)$, en este caso una ecuación integral :

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t))dt. \quad (3.9)$$

Esta ecuación presenta una estructura muy particular. Podemos pensar el miembro derecho de (3.9) como una transformación (función) T que lleva la función $y = y(x)$ en la función

$$T(y)(x) := y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t))dt.$$

Pensando de esta manera (3.9) se escribe sencillamente

$$T(y) = y.$$

Vale decir, la ecuación integral expresa el hecho que T lleva a la función y en si misma. Esto en matemática es conocido como un punto fijo. En análisis numérico los puntos fijos son utilizados para resolver ecuaciones algebraicas del tipo $h(x) = x$, donde $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. En aquel contexto se ve que un procedimiento para aproximar soluciones es interar la función h , i.e. dado un x_0 cualquiera considerar la sucesión de aproximaciones sucesivas

$$x_n = h(x_{n-1}), \quad n = 1, 2, \dots$$

El fundamento de proceder así es que si la sucesión x_n converge a algún valor x^* y si h es continua entonces x^* resuelve $h(x) = x$ pues

$$h(x^*) = h\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} h(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = x^*. \quad (3.10)$$

Vamos a proceder por analogía y proponer el siguiente proceso iterativo que genera las funciones φ_k , $k = 0, 1, \dots$:

$$\begin{cases} \varphi_0 &= y_0 \\ \varphi_{k+1}(x) &= y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi_k(t))dt. \end{cases} \quad (3.11)$$

Este proceso se denomina *método de las aproximaciones sucesivas de Picard* y fué propuesto por E. Picard en [?] y luego generalizado por Ernest Lindelöf en [?].

Deberemos indagar por condiciones que nos aseguren que la sucesión φ_k converja a una función φ y que esta función φ es solución del PVI. Antes de adentrarnos en los detalles de las demostraciones, constatemos que la idea funciona en algunos ejemplos sencillos.

Ejemplo 3.2.5 Resolver

$$\begin{cases} y'(x) &= y(x) \\ y(0) &= y_0 \end{cases},$$

donde $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e y_0 es un punto arbitrario de \mathbb{R} .



Ernst L. Lindelöf (1870–1946)

Aplicando el método de picard:

$$\begin{aligned}\varphi_0(x) &= y_0 \\ \varphi_1(x) &= y_0 + \int_0^x \varphi_0(t) dt = y_0(1+x) \\ \varphi_2(x) &= y_0 + \int_0^x \varphi_1(t) dt = y_0(1+x + \frac{x^2}{2}) \\ &\vdots & &\vdots \\ \varphi_k(x) &= y_0 + \int_0^x \varphi_{k-1}(t) dt = y_0(1+x + \cdots + \frac{x^k}{k!})\end{aligned}$$

Se aprecia que en φ_k aparecen las sumas parciales del desarrollo en serie de Taylor alrededor de 0 de la función exponencial. Luego tenemos que φ_k converge a $y_0 e^x$ que es justamente la solución del PVI propuesto.

Más ejemplos será tratados en la actividad práctica.

3.3 Teorema de punto fijo Banach

Definición 3.3.3 ea (X, d) un espacio métrico completo. Una función $K : X \rightarrow X$ se denominará una contracción si existe un $\theta \in [0, 1)$ tal que

$$d(K(x), K(y)) \leq \theta d(x, y), \quad x, y \in X.$$

Dada una función $K : X \rightarrow X$ escribiremos

$$K^n(x) = \underbrace{K(K(K \cdots K(x) \cdots))}_{n-\text{veces}}.$$

Cuando $n = 0$ ponemos $K^0(x) = x$.

Teorema 3.3.1 (Principio de contracción de Banach) Sea (X, d) un espacio métrico completo y $K : X \rightarrow X$ una contracción. Entonces K tiene un único punto fijo x^* . Además para todo x

$$d(K^n(x), x^*) \leq \frac{\theta^n}{1 - \theta} d(K(x), x).$$



Stefan Banach (1892–1945)

Demostración. Sea $x \in X$ un punto arbitrario y definimos $x_n := K^n(x)$. Entonces si $m < n$

$$\begin{aligned}d(K^n(x), K^m(x)) &\leq d(K^n(x), K^{n-1}(x)) + \cdots + d(K^{m+1}(x), K^m(x)) \\ &\leq \theta^{n-1} d(K(x), x) + \cdots + \theta^m d(K(x), x) \\ &\leq \frac{\theta^m}{1 - \theta} d(K(x), x)\end{aligned}$$

Como $\theta < 1$ vemos que si m, n son suficientemente grandes podemos hacer que $d(K^n(x), K^m(x))$ sea arbitrariamente chico. Hemos probado que la sucesión $K^n(x)$ es de Cauchy, de allí tiene límite, al que llamaremos x^* . Que x^* es punto fijo se justifica como en (3.10) (notar que una contracción es continua).

Que el punto fijo es único, se deduce de suponer que existe otro z^* y aplicar que K es contracción

$$d(x^*, z^*) = d(K(x^*), K(z^*)) \leq \theta d(x^*, z^*) < d(x^*, z^*).$$

Lo que es una contradicción. □

Corolario 3.3.1 Sea (X, d) un espacio métrico completo y $K : X \rightarrow X$ continua y K^m contracción para algún $m \in \mathbb{N}$. Entonces K tiene un único punto fijo x^* y para todo $x \in X$ se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K^n(x) = x^*.$$

Demostración. Sea x^* el único punto fijo de K^m dado por el principio de contracción de Banach aplicado a K^m . Sean $x \in X$ y $0 \leq r < m$. Consideremos las sucesiones $\{K^{km+r}(x)\}_{k \in \mathbb{N}}$. Tenemos m de estas sucesiones, una para cada valor de $r = 0, \dots, m-1$. Todas ellas son subsucesiones de $\{K^n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$. Además

$$\bigcup_{r=0}^{m-1} \{K^{km+r}(x)\}_{k \in \mathbb{N}} = \{K^n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}.$$

Vamos a demostrar que estas m subsucesiones convergen todas a x^* . Esto es fácil consecuencia de que K^m es contracción. Pues de ello obtenemos que $(K^m)^n(y) \rightarrow x^*$, cuando $n \rightarrow \infty$ para todo $y \in X$. Luego

$$\lim_{k \rightarrow \infty} K^{km+r}(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} (K^m)^k(K^r(x)) = x^*.$$

Esto establece que $\lim_{n \rightarrow \infty} K^n(x) = x^*$.

Veamos que x^* es punto fijo de K .

$$K(x^*) = K\left(\lim_{n \rightarrow \infty} K^n(x)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} K(K^n(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} K^{n+1}(x) = x^*.$$

Para la unicidad, observar que un punto fijo de K lo es de K^m . Cómo K^m tiene un único punto fijo, lo mismo podemos afirmar de K .

□

Definición 3.3.4 ea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Diremos que f es *lipschitziana* (o que es una función Lipschitz) si existe una constante $K \geq 0$ tal que

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\|, \quad \forall x, y \in \Omega.$$

Si $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, diremos que $f = f(t, x)$ es lipschitziana respecto a la segunda variable si existe $K \geq 0$ tal que

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\|, \quad \forall (t, x), (t, y) \in \Omega.$$

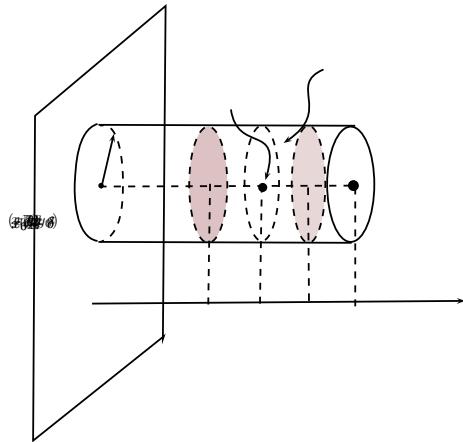
Teorema 3.3.2 (Picard- Lindelöf) Sean $x_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$ y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua y lipschitziana respecto a la segunda variable, donde $\Omega = I_a \times B_b$, $I_a = [x_0 - a, x_0 + a]$ y $B_b = \{y \in \mathbb{R}^n | \|y - y_0\| \leq b\}$. Como Ω es compacto y f es continua, existe $M \geq 0$ tal que $\|f\| \leq M$. Entonces existe una única solución del PVI:

$$\begin{cases} y'(x) &= f(x, y(x)), \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases},$$

en $I_\delta = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ con $\delta := \min\{a, b/M\}$.

Demostración. Definamos

$$X = C(I_\delta, B_b) := \{\varphi | \varphi : I_\delta \rightarrow B_b \text{ continua}\}.$$

Figura 3.3.1: Conjunto $I_\delta \times B_b$ **Ejercicio 3.3.1** a función

$$d(\varphi_1, \varphi_2) := \max \{ \| \varphi_1(x) - \varphi_2(x) \| \mid x \in I_\delta \}$$

define una métrica sobre el conjunto X y con esta métrica (X, d) es completo.

Para $\varphi \in X$, definamos una nueva función $K(\varphi)$ por:

$$K(\varphi)(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi(t)) dt.$$

Afirmación 1: $K : X \rightarrow X$.

En efecto, si $x \geq x_0$ y $x \in I_\delta$ (si $x \leq x_0$ queda como ejercicio)

$$\| K(\varphi)(x) - y_0 \| \leq \int_{x_0}^x \| f(t, \varphi(t)) \| dt \leq M|x - x_0| \leq b.$$

Esto muestra que $K(\varphi) : I_\delta \rightarrow B_b$.

La continuidad se establece del siguiente modo. Si $x_1 < x_2$

$$\| K(\varphi)(x_1) - K(\varphi)(x_2) \| \leq \int_{x_1}^{x_2} \| f(t, \varphi(t)) \| dt \leq M|x_1 - x_2|.$$

Lo que implica la continuidad. Entonces $K(\varphi) \in X$.

Afirmación 2: K^m es contracción para m suficientemente grande.

La afirmación es consecuencia de la siguiente desigualdad, para $\varphi_1, \varphi_2 \in X$ y $x \in I_\delta$

$$\| K^m(\varphi_1)(x) - K^m(\varphi_2)(x) \| \leq \frac{L^m |x - x_0|^m}{m!} d(\varphi_1, \varphi_2).$$

La prueba procede por inducción sobre m . Cuando $m = 0$ es inmediata. Supuesta válida la desigualdad para m vemos que (otra vez asumimos $x_0 \leq x$)

$$\begin{aligned}
\|K^{m+1}(\varphi_1)(x) - K^{m+1}(\varphi)(x)\| &= \|K(K^m(\varphi_1))(x) - K(K^m(\varphi))(x)\| \\
&= \left\| \int_{x_0}^x f(t, K^m(\varphi_1)(t)) - f(t, K^m(\varphi_2)(t)) dt \right\| \\
&\leq \int_{x_0}^x \|f(t, K^m(\varphi_1)(t)) - f(t, K^m(\varphi_2)(t))\| dt \\
&\leq L \int_{x_0}^x \|K^m(\varphi_1)(t) - K^m(\varphi_2)(t)\| dt \\
&\leq \frac{L^{m+1}}{m!} d(\varphi_1, \varphi_2) \int_{x_0}^x |t - x_0|^m dt \\
&= \frac{L^{m+1} |x - x_0|^{m+1}}{(m+1)!} d(\varphi_1, \varphi_2)
\end{aligned}$$

Notar que $L^m|x - x_0|^m/m!$ es el valor absoluto del término general de la serie de Taylor de e^{Lx} alrededor de x_0 . Como esta serie tiene radio de convergencia infinito, el término general tiende a cero. Por consiguiente existe m suficientemente grande para que $L^m|x - x_0|^m/m! < 1$. Para este m , K^m será contracción. Luego, por el Corolario 3.3.1, deducimos que K tiene un único punto fijo. Vale decir que existe $y \in X$ con

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt.$$

Notar que $y(x_0) = y_0$, i.e. y satisface la condición inicial. Por el teorema fundamental del cálculo $y'(x) = f(x, y(x))$, i.e. y satisface la ecuación y por tanto, finalmente, es solución del PVI. \square

Corolario 3.3.2 Sea Ω abierto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua con $\partial f_j / \partial y_k$ también continuas $j, k = 1, \dots, n$. Entonces para todo $(x_0, y_0) \in \Omega$ existe un entorno $V = [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times B_b(y_0)$ tal que el PVI

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases},$$

tiene solución única en $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. Además el gráfico de esta solución está contenido en V .

Demostración. Sea $(x_0, y_0) \in \Omega$ arbitrario. Como Ω es abierto, existen $a, b > 0$ tal que $[x_0 - a, x_0 + a] \times B_b(y_0) \subset \Omega$. Como $\partial f_j / \partial y_k$ son continuas y V es compacto, tenemos que existe $M > 0$ con $|\partial f_j / \partial y_k| \leq M$ en V , $j, k = 1, \dots, n$. El Teorema del valor medio para funciones en varias variables implica que existe una constante $C > 0$ tal que si $(t, x), (t, z) \in V$

$$\|f(t, x) - f(t, z)\| \leq CM\|x - z\|.$$

i.e. f es Lipschitziana respecto a la segunda variable en V . La conclusión del Corolario sigue del Teorema de Picard-Lindelöf. \square

4 Ecuaciones Lineales de Segundo Orden

4.1 Introducción

Me convertí en ateo porque como estudiante de post-grado en física cuántica, la vida parecía ser reducible a ecuaciones diferenciales de segundo orden. Matemáticas, química y física tenían todo y yo no veo ninguna necesidad de ir más allá de eso.

Francis Collins

Definición 4.1.1 (Ecuación lineal general de segundo orden)

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = r(x), \quad (4.1)$$

donde p, q, r son funciones definidas en un intervalo $I = (a, b)$ de \mathbb{R} con valores en \mathbb{R} . Si $r \equiv 0$ se llama homogénea

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = 0, \quad (4.2)$$

Teorema 4.1.1 (Teorema de existencia y unicidad de soluciones) Supongamos p, q, r continuas y acotadas sobre I . Sean $x_0 \in I$ e $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$ dados. Entonces existe una única solución del PVI

$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = r(x), & x \in I \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases}$$

Demostración. Es un caso particular del Teorema Picard-Lindelöf. Más específicamente de un ejercicio que se presentó en la actividad práctica. Llamando $z = y'(x)$ el PVI propuesto se convierte en un PVI asociado a un sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} y'(x) = z(x) \\ z'(x) = -p(x)z(x) - q(x)y + r(x), \\ y(x_0) = y_0 \\ z(x_0) = y_1 \end{cases}$$

Es un sistema de la forma $w'(x) = f(x, w(x))$ donde $w(x) = (y(x), z(x))$ y $f(x, w) = (z, -p(x)z - q(x)y + r(x))$. Vamos a chequar que f es Lipschitz respecto a la segunda variable en $I \times \mathbb{R}^2$. Si $(x, w_0), (x, w_1) \in I \times \mathbb{R}^2$ ($w_0 = (z_0, y_0)$ y $w_1 = (z_1, y_1)$) entonces:

$$\begin{aligned} \|f(x, w_1) - f(x, w_2)\| &\leq \sqrt{(z_1 - z_0)^2 + (p(x)(z_1 - z_0) + q(x)(y_1 - y_0))^2} \\ &\leq C\|w_1 - w_0\|, \end{aligned}$$

para una constante apropiada C que depende de una cota de $|p(x)|, |q(x)|, x \in I$. Cómo f es Lipschitz respecto a la segunda variable en todo \mathbb{R}^2 , el sistema tiene una solución definida en todo I .

□

4.2 Estructura del conjunto de soluciones

Teorema 4.2.2 Si y_1 e y_2 son soluciones de (4.2) y $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ entonces $c_1y_1 + c_2y_2$ es solución. Vale decir, el conjunto de soluciones es un espacio vectorial. En particular $y \equiv 0$ es una solución, a la que llamaremos *trivial*.

Demostración. El operador

$$L[y] := y'' + py' + qy$$

es lineal, por consiguiente $L[c_1y_1 + c_2y_2] = c_1L[y_1] + c_2L[y_2] = 0$. □

Teorema 4.2.3 Supongamos que y_p es una solución particular de (4.1) y que $y_g = y_g(x, c_1, c_2)$ es una solución general de (4.2). Entonces $y = y_p + y_g$ es solución general de (4.1).

Demostración. El operador

$$L[y] := y'' + py' + qy$$

es lineal, por consiguiente $L[y_g + y_p] = L[y_g] + L[y_p] = 0 + r = r$. Recíprocamente supongamos y solución de $L[y] = r$, entonces $L[y - y_p] = L[y] - L[y_p] = r - r = 0$. Luego debe haber c_1 y c_2 con $y(x) - y_p(x) = y_g(x, c_1, c_2)$. □

Volviendo a las ecuaciones homogéneas, supongamos que tenemos dos soluciones de (4.2) y_1 e y_2 . Entonces la expresión

$$c_1y_1 + c_2y_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \tag{4.3}$$

es solución también. Notar que en la expresión aparecen dos constantes y habíamos dicho que era de esperar que la solución general de una ecuación de orden 2 contuviese precisamente dos constantes de integración. De modo que podemos conjeturar que (4.3) es solución general de (4.2). Hay una situación especial, si, por ejemplo, $y_1 = ky_2$, $k \in \mathbb{R}$, entonces $c_1y_1 + c_2y_2 = (c_1k + c_2)y_2 = cy_2$. Vale decir la combinación lineal (4.3) termina siendo sólo combinación lineal de la función y_2 y por ende siendo esencialmente una expresión uniparamétrica.

Definición 4.2.2 (Independencia lineal) Un conjunto finito de funciones $\{y_1, \dots, y_n\}$ se dirá linealmente independiente sobre un conjunto I , si la única solución de $c_1y_1(t) + \dots + c_ny_n(t) = 0$, para $t \in I$, es $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$.

Definición 4.2.3 (Definición wronskiano) Dadas n funciones $\{y_1, \dots, y_n\}$ con dominio I , el wronskiano $W(x) = W(y_1, y_2, \dots, y_n)(x)$ de estas funciones en un

punto $x \in I$ se define por

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) & \cdots & y'_n(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

Lema 4.2.1 (Propiedades Wronskiano I) sea $\{y_1, \dots, y_n\}$ un conjunto de n funciones. Si existe un $x_0 \in I$ con $W(x_0) \neq 0$ entonces $\{y_1, \dots, y_n\}$ son linealmente independientes

Demostración. Supongamos que $c_1y_1 + \cdots + c_ny_n \equiv 0$. Derivando $n - 1$ veces esta igualdad y evaluando el resultado en x_0 obtenemos

$$c_1y_1(x_0) + \cdots + c_ny_n(x_0) = 0$$

$$c_1y'_1(x_0) + \cdots + c_ny'_n(x_0) = 0$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$c_1y_1^{(n-1)}(x_0) + \cdots + c_ny_n^{(n-1)}(x_0) = 0$$

Las igualdades anteriores dicen que el vector $(c_1, \dots, c_n)^t$ pertenece al nucleo de la matriz

$$\begin{pmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \cdots & y_n(x_0) \\ y'_1(x_0) & y'_2(x_0) & \cdots & y'_n(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix}$$

Como por hipótesis la matriz es no singular, debe ocurrir que $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$. \square

Teorema 4.2.4 (Teorema. Propiedades wronskiano II, Fórmula de Abel) Supongamos que y_1 e y_2 son solución de

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = 0, \quad x \in I = (a, b) \quad (4.5)$$

Entonces existe $c \in \mathbb{R}$ que satisface

$$W(y_1, y_2)(x) = ce^{-\int p dx}. \quad (4.6)$$

Esta expresión se denomina fórmula de Abel. En particular vale que

$$\exists x_0 \in I : W(x_0) \neq 0 \iff \forall x \in I : W(x) \neq 0.$$

Demostración. Tenemos que

$$W(x) = y_1(x)y'_2(x) - y'_1(x)y_2(x).$$

Derivando y usando (4.5)

$$\begin{aligned} W'(x) &= y_1y''_2 - y''_1y_2 \\ &= y_1(-py'_2 - qy_2) - y_2(-py'_1 - qy_1) \\ &= -pW. \end{aligned}$$

Vale decir W resuelve la ecuación $W' = -pW$ la cual es fácilmente resoluble, mostrando su resolución que se satisface (4.6) \square

Teorema 4.2.5 (Propiedades wronskiano III) Sean y_1 e y_2 soluciones de (4.5). Entonces son equivalentes

1. y_1 e y_2 son linealmente independientes en I .
2. $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$ para todo $x \in I$.

Demostración. Que 2 implica 1 es consecuencia de la propiedad del wronskiano I. Veamos que 1 implica 2. Supongamos que existe un x_0 con $W(x_0) = 0$. Esto quiere decir que una de las columnas de la matriz wronskiana en x_0 es múltiplo de la otra. Supongamos que $y_2(x_0) = ky_1(x_0)$ e $y'_2(x_0) = ky'_1(x_0)$. Esto quiere decir que y_2 y ky_1 resuelven el mismo PVI. Por lo tanto $y_2(x) = ky_1(x)$ para todo x . Lo que nos dice lo contrario de 1 \square

Teorema 4.2.6 (Estructura del conjunto de soluciones, ecuación homogénea) Si y_1 e y_2 son soluciones linealmente independientes de

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = 0, \quad x \in I = (a, b)$$

entonces

$$y(x, c_1, c_2) = c_1y_1 + c_2y_2 \quad (4.7)$$

es solución general.

Demostración. Que la expresión (4.7) es solución ya lo hemos dicho. Restaría ver que cualquier solución se escribe como en (4.7). Sea y cualquier solución y $x_0 \in I$. La matriz wronskiana

$$\begin{pmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y'_1(x_0) & y'_2(x_0) \end{pmatrix}$$

Es no singular dado que el determinante es no nulo. Por este motivo el sistema

$$\begin{aligned} c_1y_1(x_0) + c_2y_2(x_0) &= y(x_0) \\ c_1y'_1(x_0) + c_2y'_2(x_0) &= y'(x_0) \end{aligned}$$

tiene solución para c_1 y c_2 . De este modo vemos que la función $c_1y_1 + c_2y_2$ resuelve el PVI

$$\begin{cases} \frac{d^2z}{dx^2} + p(x)\frac{dz}{dx} + q(x)z = 0, & x \in I \\ z(x_0) = y(x_0) \\ z'(x_0) = y'(x_0) \end{cases}.$$

Evidentemente y es solución también, por el Teorema de Existencia y Unicidad vemos que $y = c_1y_1 + c_2y_2$ \square

4.3 Reducción de orden

Como conclusión de los anterior, vemos que si queremos resolver (4.5) debemos conseguir dos soluciones linealmente independientes. Suponiendo que ya contamos con una solución no trivial vamos a describir un método que posibilita encontrar otra solución y_2 linealmente independiente de y_1 . El método consiste en proponer que y_2 se escribe

$$y_2(x) = v(x)y_1(x).$$

Sustituyendo este ansatz en la ecuación

$$\begin{aligned} 0 &= y_2'' + py_2' + qy_2 \\ &= y_1v'' + 2v'y_1' + vy_1'' + pv'y_1 + pvy_1' + qvy_1 \\ &= y_1v'' + (2y_1' + py_1)v' + v(y_1'' + py_1' + qy_1) \\ &= y_1v'' + (2y_1' + py_1)v' \end{aligned}$$

La fórmula anterior es nuevamente una ecuación de segundo orden para v , pero en este caso afortunadamente contamos con herramientas para resolverla puesto que se trata de una ecuación donde la variable dependiente v no aparece explícitamente, sino que aparecen sus derivadas v' y v'' . Hay que intentar la sustitución $w = v'$. Luego

$$y_1w' + (2y_1' + py_1)w = 0$$

Recordar que y_1 la asumimos conocida, así $2y_1' + py_1$ es también una función conocida. La ecuación es una ecuación lineal homogénea de primer orden. Usando la fórmula para resolver este tipo de ecuación, obtenemos

$$w(x) = Ce^{-\int \frac{y_1'}{y_1} + pdx} = Ce^{-2\ln|y_1|}e^{-\int pdx} = C\frac{1}{y_1^2}e^{-\int pdx}$$

Es suficiente encontrar sólo una función v , de allí podemos tomar $C = 1$.

$$w(x) = \frac{1}{y_1^2}e^{-\int pdx} \implies v(x) = \int \frac{1}{y_1^2}e^{-\int pdx} dx \quad (4.8)$$

Otra manera de testear la independencia lineal de dos funciones y_1 e y_2 es notar que si fueran linealmente dependientes e $y_1 \neq 0$ en un conjunto $J \subset I$ entonces y_2/y_1 sería constante. Luego uno chequearía independencia si comprobase que y_2/y_1 no es constante en algún subdominio $J \subset I$. En el caso anterior $y_2/y_1 = v$, luego deberíamos tener v no constante sobre algún subconjunto J . Pero v constante implicaría $y_1^{-2}e^{-\int pdx} = 0$ y esto claramente no ocurre. De modo que por el método anterior encontramos dos soluciones independientes.

4.4 Ecuaciones homogéneas con coeficientes constantes

Consideramos la ecuación

$$y'' + py' + qy = 0, \quad p, q \in \mathbb{R} \quad (4.9)$$

Propongamos una solución de la forma

$$y(x) = e^{\lambda x}, \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

Reemplazando en la ecuación

$$(\lambda^2 + \lambda p + q)e^{\lambda x} = 0.$$

Se debe satisfacer la llamada *ecuación característica*

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0 \quad (4.10)$$

Tenemos tres casos acorde al valor de $\Delta := p^2 - 4q$

1. $\Delta = p^2 - 4q > 0$, **raíces reales distintas** λ_1, λ_2 . Este es el caso más sencillo de todos, obtenemos las soluciones

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x} \quad y \quad y_2(x) = e^{\lambda_2 x}.$$

Para chequear la independencia

$$\frac{y_2}{y_1} = e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x} \neq \text{cte.}$$

Luego

$$y(x, c_1, c_2) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}. \quad (4.11)$$

es solución general

2. $\Delta = p^2 - 4q < 0$, **raíces complejas conjugadas** $\lambda_1 = \mu + i\nu, \lambda_2 = \mu - i\nu, \mu, \nu \in \mathbb{R}$. Proponemos una solución de la forma

$$y(x) = e^{\mu x} v(x)$$

Hagamos los cálculos con SymPy

```
>>> x, p, q=symbols('x, p, q')
>>> v=Function('v')(x)
>>> y=exp(-p/2*x)*v
>>> ecua=y.diff(x,2)+p*y.diff(x)+q*y
>>> simplify(ecua/exp(-p/2*x))
```

$$-\frac{p^2}{4}v(x) + qv(x) + \frac{d^2}{dx^2}v(x) = 0$$

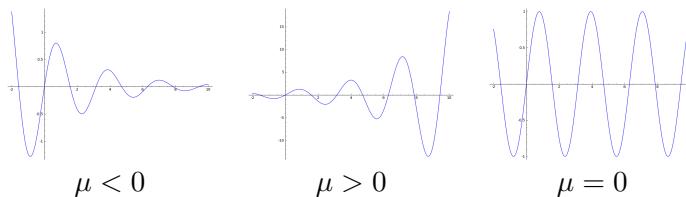
Como $\nu^2 := -\frac{1}{4}(p^2 - 4q) > 0$, v resuelve la ecuación del oscilador armónico con frecuencia ν . Recordar que la solución general para v es

$$v(x) = C_1 \cos \nu x + C_2 \operatorname{sen} \nu x,$$

y de allí

$$y(x) = e^{\mu x} \{C_1 \cos \nu x + C_2 \operatorname{sen} \nu x\} \quad (4.12)$$

Seguidamente presentamos las gráficas de las soluciones para distintos valores de μ .



3. $\Delta = p^2 - 4c = 0$, **raíces iguales**. Conocemos una solución $y_1 = e^{-\frac{p}{2}x}$. Podemos hallar otra por el método de reducción de orden. Esto consiste en proponer otra solución de la forma $y_2(x) = y_1(x)v(x)$. Dejemos que lo haga SymPy

```
>>> x, p=symbols('x, p')
>>> y=Function('y')(x)
>>> v=Function('v')(x)
>>> y=v*exp(-p/2*x)
>>> ecua=y.diff(x,2)+p*y.diff(x)+p**2/4*y
>>> ecuav=simplify(ecua/exp(-p/2*x))
>>> ecuav
```

Se obtiene

$$\frac{d^2}{dx^2}v(x) = 0.$$

La solución general para v es $v = c_1 + c_2x$. Así el método mencionado proporciona la solución extra

$$y_2(x) = xe^{-\frac{p}{2}x}.$$

4.5 Ecuación no homogénea

4.5.1 Método coeficientes indeterminados

Intentamos resolver

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = r(x), \quad (4.13)$$

donde $p, q, r \in \mathbb{R}$, $r \in C(I)$ $r \neq 0$. El método consiste en buscar soluciones en la misma clase de funciones a la que pertenece $r(x)$. Funciona de manera metódica sólo para algunos tipos de funciones $r(x)$. Concretamente para $r(x)$ combinación lineal de funciones polinómicas, exponenciales e^{ax} o trigonométricas $\cos ax$ y $\sin ax$. Lo vamos a ilustrar con ejemplos para cada caso.

1. **Caso $r(x) = e^{ax}$ y $a^2 + pa + q \neq 0$.** En esta situación se propone como solución una función de la forma $y(x) = Ae^{ax}$. Usamos SymPy para el cálculo

```

1 >>> x,p,q,a,A=symbols('x,p,q,a,A')
2 >>> y=A*x*exp(a*x)
3 >>> ecua=y.diff(x,2)+p*y.diff(x)+q*y-exp(a*x)
4 >>> ecua=simplify(ecua/exp(a*x))
5 >>> ecua
A*a**2 + A*a*p + A*q - 1
7 >>> solve(ecua,A)
[1/(a**2 + a*p + q)]

```

Si $a^2 + pa + q \neq 0$, encontramos la solución particular

$$y(x) = \frac{1}{(a^2 + pa + q)} e^{ax}.$$

2. **Caso $r(x) = e^{ax}$ y $a^2 + pa + q = 0$.** En esta situación diremos que la ecuación está en *resonancia*. Más generalmente, diremos que se presenta resonancia cuando $r(x)$ es solución del problema homogéneo. Propongamos como solución $y(x) = Axe^{ax}$. Hagamos los cálculos con SymPy.

```

>>> x,p,q,a,A=symbols('x,p,q,a,A')
2 >>> y=A*x*exp(a*x)
3 >>> ecua=y.diff(x,2)+p*y.diff(x)+q*y-exp(a*x)
4 >>> ecua=simplify(ecua/exp(a*x))
>>> ecua
6 A*a*(a*x + 2) + A*p*(a*x + 1) + A*q*x - 1
8 >>> ecua.subs(q,-a**2 - a*p).simplify()
8 2*A*a + A*p - 1

```

Luego, si $2a + p \neq 0$, $y(x) = \frac{1}{2a+p}xe^{ax}$ resuelve el problema.

3. **Caso** $r(x) = e^{ax}$, $a^2 + pa + q = 0$ y $2a + p = 0$. Si $2a + p = 0$, como también $a^2 + pa + q = 0$, tenemos que a es una raíz doble de la ecuación $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$. En este caso, proponemos como solución $y(x) = Ax^2e^{ax}$.

```

1 >>> x,p,q,a,A=symbols('x,p,q,a,A')
2 >>> y=A*x**2*exp(a*x)
3 >>> ecua=y.diff(x,2)+p*y.diff(x)+q*y-exp(a*x)
4 >>> ecua=simplify(ecua/exp(a*x))
5 >>> ecua
A*p*x*(a*x + 2) + A*q*x**2 + A*(a*x**2 + 4*a*x + 2) - 1
6 >>> ecua.subs([(q,-a**2 - a*p), (p,-2*a)]).simplify()
7 2*A - 1

```

Hay que tomar $y(x) = \frac{1}{2}x^2e^{ax}$

4. **Caso** $r(x) = \sin bx$. Proponemos

$$y(x) = A \cos x + B \sin x,$$

como candidato a solución.

```

1 >>> x,p,q,a,b,A,B=symbols('x,p,q,a,b,A,B')
2 >>> y=A*cos(b*x)+B*sin(b*x)
3 >>> ecua=y.diff(x,2)+p*y.diff(x)+q*y-sin(b*x)
4 >>> ecua.simplify()
5 -b**2*(A*cos(b*x) + B*sin(b*x)) - b*p*(A*sin(b*x) -
6 B*cos(b*x)) + q*(A*cos(b*x) + B*sin(b*x)) - sin(b*x)

```

La expresión en el miembro de la izquierda es una combinación lineal de las funciones $\cos bx$ y $\sin bx$. Como estas funciones son linealmente independientes debemos tener que los coeficientes en la combinación lineal deben ser cero

```

1 >>> ecua.expand().coeff(sin(b*x))
2 -A*b*p - B*b**2 + B*q - 1
3 >>> ecua.expand().coeff(cos(b*x))
4 -A*b**2 + A*q + B*b*p

```

Obtenemos un sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} -Abp - (b^2 - q)B = 1 \\ Bbp - (b^2 - q)A = 0 \end{cases} \quad (4.14)$$

Para que el sistema tenga solución la matriz de coeficientes debe ser no singular

$$0 \neq \det \begin{pmatrix} -bp & -(b^2 - q) \\ -(b^2 - q) & bp \end{pmatrix} = -(b^2 p^2 + (b^2 - q)^2)$$

Podemos suponer $b \neq 0$, de lo contrario la ecuación hubiese sido homogénea. entonces la condición de arriba ocurre si y sólo si $p \neq 0$ o $b^2 \neq q$. En esa situación encontraremos una solución de la forma

$$y(x) = A \cos bx + B \sin bx,$$

donde A y B resuelven (4.14).

Cuando $p = 0$ y $b^2 = q$ el sistema (4.14) puede no tener solución. Notar que en este caso la ecuación queda

$$y'' + b^2y = \operatorname{sen} bx$$

Es una ecuación de un oscilador armónico no homogénea. Habíamos visto que justamente $r(x) = \operatorname{sen} bx$ es una solución del problema homogéno. Nuevamente estamos en una situación de resonancia. Como en casos anteriores hay que proponer como solución

$$y(x) = x(A \cos x + B \operatorname{sen} x),$$

5. Caso $r(x) = \operatorname{sen} bx$ con resonancia

```

2  >>> x,b,A,B=symbols('x,b,A,B')
3  >>> y=x*(A*x*cos(b*x)+B*x*sin(b*x))
4  >>> ecua=y.diff(x,2)+b**2*y-sin(b*x)
5  >>> eq1=ecua.expand().coeff(sin(b*x))
6  >>> eq2=ecua.expand().coeff(cos(b*x))
7  >>> H=solve([eq1,eq2],[A,B])
8  >>> H
9  {B: 0, A: -1/(2*b)}
10 >>> y.subs(H)
11 -x*cos(b*x)/(2*b)

```

Encontramos la solución general

$$y(x) = -\frac{x}{2b} \cos bx.$$

El caso donde $r(x) = \cos bx$ se trata de manera completamente similar.

6. Caso $r(x)$ polinomio

Hay que proponer como solución un polinomio, en primera instancia, del mismo grado.

Supongamos

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p \frac{dy}{dx} + q(x)y = c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n \quad (4.15)$$

Se propone $y = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$. Luego

$$\begin{aligned} 2a_2 + 3 \cdot 2x + \cdots + n(n-1)x^{n-2} + \\ pa_1 + p2a_2x + \cdots + pna_nx^{n-1} + \\ qa_0 + qa_1x + \cdots + qa_nx^n = c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n \end{aligned}$$

Como las funciones $1, x, \dots, x^n$ son linealmente independientes, los coeficientes en ambos lados de la igualdad deben ser iguales.

$$\begin{aligned} 2a_2 + pa_1 + qa_0 &= c_0 \\ 3 \cdot 2 + 2pa_2 + qa_1 &= c_1 \end{aligned}$$

⋮

$$\begin{aligned} n(n-1) + p(n-1)a_{n-1} + qa_{n-2} &= c_{n-2} \\ pna_n + qa_{n-1} &= c_{n-1} \\ qa_n &= c_n \end{aligned}$$

Es útil escribir estas igualdades matricialmente.

$$\begin{pmatrix} q & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & q & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & q & pn & \\ \vdots & & & & & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{pmatrix}$$

Es un sistema triángular superior que se resuelve por sustitución ascendente. Esto siempre que $q \neq 0$. En caso contrario la matriz es singular y es posible que el sistema no tenga solución.

El caso $q = 0$ es una forma de resonancia. Puede ser tratado como las anteriores resonancias, pero notando que la ecuación se reduce a $y'' + py' = r$ conviene tomar $v = y'$ como nueva variable dependiente y reducir la ecuación a una de primer orden.

Por último señalemos que si deseamos resolver un problema de la forma

$$L[y] \equiv y'' + py' + qy = r_1(x) + \cdots + r_n(x),$$

donde las funciones r_i son de alguna de las formas descriptas en los casos previos, entonces la linealidad de L implica que, si y_i resuelve $L[y_i] = r_i$, $y = y_1 + \cdots + y_n$ resuelve la ecuación deseada.

4.5.2 Método de variación de los parámetros

Queremos resolver la ecuación

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = r(x). \quad (4.16)$$

Supongamos que contamos con un par de soluciones y_1, y_2 linealmente independientes de la ecuación homogénea asociada

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0. \quad (4.17)$$

El método de variacion de los parámetros consiste en proponer una solución de la forma

$$y(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x). \quad (4.18)$$

Hay dos funciones incógnitas c_1 y c_2 , pero sólo una ecuación. Tendremos por esto libertad de introducir otra condición que consideremos conveniente. Tenemos

$$y' = c'_1y_1 + c_1y'_1 + c'_2y_2 + c_2y'_2.$$

Pidamos que

$$c'_1y_1 + c'_2y_2 = 0. \quad (4.19)$$

Supuesta esta igualdad

$$y' = c_1y'_1 + c_2y'_2.$$

Derivando

$$y'' = c'_1y'_1 + c'_2y'_2 + c_1y''_1 + c_2y''_2.$$

Entonces

$$\begin{aligned} r(x) &= y'' + py' + qy \\ &= c'_1y'_1 + c'_2y'_2 + c_1y''_1 + c_2y''_2 + p(c_1y'_1 + c_2y'_2) + q(c_1y_1 + c_2y_2) \\ &= c_1(y''_1 + py'_1 + qy_1) + c_2(y''_2 + py'_2 + qy_2) + c'_1y'_1 + c'_2y'_2 \\ &= c'_1y'_1 + c'_2y'_2 \end{aligned}$$

Esta ecuación junto a (4.19) nos dan el sistema

$$\begin{cases} c'_1 y_1 + c'_2 y_2 = 0 \\ c'_1 y'_1 + c'_2 y'_2 = r \end{cases} \quad (4.20)$$

Las incógnitas son c'_1 y c'_2 . El determinante de la matriz de coeficientes es precisamente el Wronskiano W de las soluciones y_1 e y_2 , por la suposición de independencia $W \neq 0$ y por lo tanto el sistema tiene solución única. Se tiene

$$c'_1 = -\frac{\det \begin{pmatrix} 0 & y_2 \\ r & y'_2 \end{pmatrix}}{W} = -\frac{ry_2}{W}$$

y

$$c'_2 = -\frac{\det \begin{pmatrix} y_1 & 0 \\ y'_1 & r \end{pmatrix}}{W} = \frac{ry_1}{W}$$

En consecuencia

$$c_1 = -\int \frac{ry_2}{W} dx \quad (4.21)$$

y

$$c_2 = \int \frac{ry_1}{W} \quad (4.22)$$

Usando estas fórmulas y (4.18) obtenemos una solución particular del sistema. La solución general es la suma de la particular más una solución general del homogéneo. Esta última solución general se escribe como una combinación lineal genérica entre y_1 e y_2 .

Ejemplo 4.5.1 Resolver el siguiente pvi $y'' + y = \csc x$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ y $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. La ecuación homogénea asociada tiene el par $y_1(x) = \cos(x)$ e $y_2(x) = \sin(x)$ de soluciones linealmente independientes. El wronskiano es $W \equiv 1$ y entonces una solución particular es

$$\begin{aligned} y(x) &= -\int \frac{ry_2}{W} dx y_1 + \int \frac{ry_1}{W} dx y_2 \\ &= -\int dx \cos(x) + \int \frac{1}{\tan(x)} dx \sin(x) \\ &= -x \cos(x) + \ln(\sin(x)) \sin(x). \end{aligned}$$

La solución general es

$$y(x) = -x \cos(x) + \ln(\sin(x)) \sin(x) + c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x).$$

Las condiciones $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ y $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ nos conducen a $c_2 = 0$ y $c_1 = \frac{\pi}{2}$.

4.6 Conclusiones

- Si podemos encontrar dos soluciones linealmente independientes de una ecuación lineal homogénea de segundo orden, tenemos la solución general a través de combinaciones lineales.
- Si tenemos una solución no trivial de una ecuación lineal homogénea de segundo orden podemos hallar otra por el método de reducción de orden.

3. Podemos resolver completamente una ecuación lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes.
4. Podemos resolver algunos problemas no homogéneos por el método de coeficientes indeterminados.
5. Si conocemos las soluciones del problema homogéneo podemos resolver, en teoría, el no homogéneo para cualquier $r(x)$ por el método de variación de los parámetros

4.7 Aplicaciones

4.7.1 Vibraciones mecánicas

Problema Estudiar el movimiento de un resorte (cómo el de la unidad anterior) pero suponer que además de actuar sobre la masa la fuerza elástica del resorte, tenemos una fuerza de fricción debida a la resistencia del medio. Por la acción de esta fuerza, se dice que es un sistema resorte-masa amortiguado. Además suponemos que hay otra fuerza F externa y que sólo depende de t . Por ejemplo si el resorte se colocase verticalmente y se dejase suspendida la masa, F sería la fuerza de gravedad. Si la masa estuviese hecha de metal, F podría ser una fuerza provista por un imán. Por la acción de esta fuerza el sistema se dice forzado. Por consiguiente el sistema completo, con la acción de las tres fuerzas, se denomina un sistema resorte-masa, amortiguado y forzado.

La fuerza elástica del resorte se modeliza con la Ley de Hooke. Para la amortiguación, supongamos que el módulo de la fuerza es proporcional a la velocidad de la masa. La constante de proporcionalidad c se llama coeficiente de viscosidad. La dirección y sentido de la fuerza amortiguadora es siempre contraria al movimiento. Por el principio de conservación de la energía, vemos que la fuerza de amortiguación siempre realiza un trabajo W negativo, por consiguiente hace perder energía cinética. De la fuerza externa F no sabemos nada en principio. Por todo lo expuesto, si ponemos un sistema de coordenadas con origen en la posición de equilibrio del sistema masa-resorte y si $x(t)$ es la posición de la masa en el momento t , la ecuación que gobierna el sistema masa-resorte con amortiguación y forzamiento es

$$mx''(t) = \underbrace{-kx(t)}_{\text{2da Ley Newton}} + \underbrace{-cx'(t)}_{\text{Amortiguación}} + \underbrace{F(t)}_{\text{Fuerza externa}} \quad (4.23)$$

4.7.1.1 Vibraciones amortiguadas no forzadas ($c > 0, F = 0$)

Escribamos la ecuación (4.23) de la siguiente forma

$$x''(t) + 2\mu x'(t) + \omega^2 x = 0 \quad \mu := \frac{c}{2m}, \omega := \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (4.24)$$

Las raíces de la ecuación característica son

$$\lambda_{1,2} = -\mu \pm \sqrt{\Delta}, \quad \Delta := \mu^2 - \omega^2$$

Caso $\Delta > 0$. Aquí la viscosidad es “grande” relativa a la rigidez k . Se dice que el sistema está sobreamortiguado. En este caso tenemos dos soluciones linealmente independientes del problema homogéneo y la solución general de este es de la forma

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

Notar que $\lambda_1, \lambda_2 < 0$. Supongamos que el sistema masa-resorte parte del resenso $x'(0) = 0$ y de una posición indeterminada x_0 . Resolvamos este pvi

```

1  >>> from sympy import *
2  >>> init_printing()
3  >>> lambda1,lambda2,t,x0,c1,c2=symbols('lambda1,lambda2,t,x0,c1,c2')
4  >>> x=c1*exp(lambda1*t)+c2*exp(lambda2*t)
5  >>> C=solve([x.subs(t,0)-x0,x.diff(t).subs(t,0)], [c1,c2])
6  >>> C

```

$$\left\{ c_1 : -\frac{\lambda_2 x_0}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad c_2 : \frac{\lambda_1 x_0}{\lambda_1 - \lambda_2} \right\}$$

```
>>> x=x.subs(C[0])
```

$$x(t) = x_0 \left\{ \frac{\lambda_1 e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2} - \frac{\lambda_2 e^{\lambda_1 t}}{\lambda_1 - \lambda_2} \right\} \quad (4.25)$$

```

1 >>> x=x.subs({lambda1:-1,lambda2:-2,x0:1})
2 >>> plot(x,(t,0,10))

```

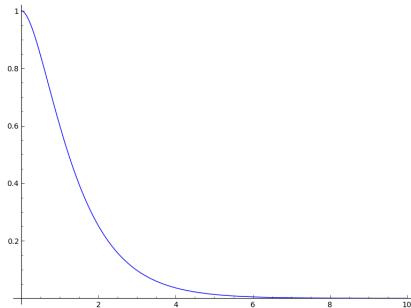


Figura 4.7.1: Vibraciones amortiguadas no forzadas ($c > 0, F = 0$)

Figura 4.7.2: Masa-resorte sobreamortiguado

Como se observa en la gráfica 4.7.1 y la animación 4.7.2 la masa ejecuta una oscilación, lo cual le demanda un tiempo infinito. Podría haber pasado por la posición de

equilibrio sólo en el pasado, puesto que $x(t) = 0$ cuando

$$t = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_2} < 0$$

Caso $\Delta = 0$. En esta situación se dice que hay amortiguación crítica. Las raíces son iguales $\lambda_1 = \lambda_2 = -\mu$. Sabemos que

$$x_1(t) = c_1 e^{-\mu t} + c_2 t e^{-\mu t} = e^{-\mu t} \{c_1 + c_2 t\} \quad (4.26)$$

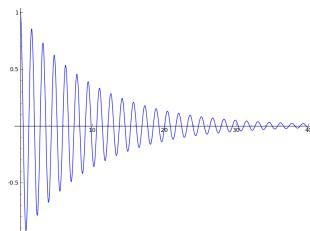
Nuevamente la solución puede pasar a lo sumo una vez por la posición de equilibrio, siempre y cuando $C_2 \neq 0$. El comportamiento cualitativo de la solución es muy parecido al caso anterior.

Caso $\Delta < 0$, caso subamortiguado. $\lambda_{1,2} = -\mu \pm \nu i$ con $\nu = \sqrt{|\Delta|} = \sqrt{|\omega^2 - \mu^2|}$. La solución general viene dada por

$$x(t) = e^{-\mu t} \{c_1 \cos \nu t + c_2 \sin \nu t\} \quad (4.27)$$

Esta función tiene por gráfica una onda sinusoidal modulada por una función exponencial decreciente.

```
>>> c1,c2,mu,nu,x0,t=symbols('c1,c2,mu,nu,x0,t')
2>>> x=exp(-mu*t)*(c1*cos(nu*t)+c2*sin(nu*t))
>>> C=solve([x.subs(t,0)-x0,x.diff(t).subs(t,0)],[c1,c2])
4>>> x=x.subs(C).subs({mu:.1,nu:4,x0:1})
>>> plot(x,(t,0,100))
```



Vibraciones amortiguadas no forzadas ($c > 0, F = 0$)

Figura 4.7.3: Masa-resorte subamortiguado

Se suele escribir la ecuación (4.27) de otra forma. Expresemos el vector (c_1, c_2) en coordenadas polares.

$$c_1 = \rho \cos \alpha, \quad c_2 = \rho \sin \alpha.$$

Entonces usando las fórmulas de adición de las funciones trigonométricas

$$x(t) = e^{-\mu t} \{c_1 \cos \nu t + c_2 \sin \nu t\} = \boxed{\rho e^{-\mu t} \cos(\nu t - \alpha)}.$$

Llamaremos este régimen *movimiento quasi-oscilatorio*. Se ejecutan vibraciones, que se disipan con el tiempo, de frecuencia

$$f = \frac{1}{\text{período}} = \frac{\nu}{2\pi}, \quad \nu = \sqrt{\omega^2 - \mu^2} = \sqrt{\left(\frac{k}{m}\right)^2 - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}.$$

En lugar de la frecuencia se suele considerar la frecuencia angular que se define como $2\pi f$. La ventaja de esta definición es que la frecuencia angular de la función de arriba es ν .

Ejercicio: Demostrar que en cualquiera de las situaciones descriptas, $x(t) \rightarrow 0$ y $x'(t) \rightarrow 0$, cuando $t \rightarrow \infty$. Es decir, el movimiento se va deteniendo.

4.7.1.2 Vibraciones no amortiguadas y forzadas ($c = 0, F \neq 0$)

Vamos a considerar una fuerza externa oscilatoria de frecuencia angular ω_0 y amplitud F_0 . Tenemos que resolver

$$\boxed{x''(t) + \omega^2 x(t) = F_0 \cos(\omega_0 t)}. \quad (4.28)$$

Usaremos el método de coeficientes indeterminados. Recordar que si $\omega = \omega_0$ estamos en resonancia. Tendremos que considerar ese caso por separado. Supongamos pues $\omega \neq \omega_0$. Tenemos que reemplazar en la ecuación

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t),$$

y hallar A y B que logren que $x(t)$ sea solución. Usamos SymPy

```

1 >>> from sympy import *
2 >>> init_printing()
3 >>> t, omega, omega0, F0, A, B=symbols('t, omega, omega0, F0, A, B')
4 >>> x=A*cos(omega0*t)+B*sin(omega0*t)
5 >>> eq=x. diff(t,2)+omega**2*x-F0*cos(omega0*t)
6 >>> eqL1=eq. factor(). coeff(sin(omega0*t))
7 >>> eqL2=eq. factor(). coeff(cos(omega0*t))
8 >>> Incog=[A,B]
9 >>> Ecuas=[eqL1, eqL2]
>>> Matrix([[ecu. coeff(inco) for inco in Incog] for ecu in Ecuas])

```

La matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones para A y B es

$$\begin{bmatrix} 0 & \omega^2 - \omega_0^2 \\ \omega^2 - \omega_0^2 & 0 \end{bmatrix}$$

claramente es una matriz no singular, cuando $\omega \neq \omega_0$, y por consiguiente en no resonancia tiene una solución

```

1 >>> SolAB=solve([eqL1, eqL2],[A,B])
2 >>> x=x. subs(SolAB)
3 >>> x

```

$$x(t) = \frac{F_0 \cos(\omega_0 t)}{\omega^2 - \omega_0^2}.$$

La solución general del problema es la solución particular que acabamos de obtener más una solución general del homogéneo que sabemos es una combinación lineal generica entre $\cos \omega t$ y $\sin \omega t$.

$$x(t) = \frac{F_0 \cos(\omega_0 t)}{\omega^2 - \omega_0^2} + c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t). \quad (4.29)$$

Como ya hemos visto, considerando las coordenadas polares ρ y α de c_1, c_2 podemos reescribir la solución

$$x(t) = \frac{F_0 \cos(\omega_0 t)}{\omega^2 - \omega_0^2} + \rho \cos(\omega t - \alpha)$$

Vemos que el movimiento es la superposición de dos movimientos oscilatorios de frecuencias ω , que se denomina la *frecuencia natural* del resorte, y ω_0 que se denomina *frecuencia impresa*.

Resolvamos el pvi

$$\begin{cases} x''(t) + \omega^2 x(t) = F_0 \cos(\omega_0 t), \\ x'(0) = x(0) = 0 \end{cases}$$

```

1 >>> from sympy import *
2 >>> init_printing()
3 >>> var('t, c1, c2, omega, omega0, F0')
4 >>> x=F0/(omega**2-omega0**2)*cos(omega0*t)+c1*cos(omega*t)+c2*sin(omega*t)
5 >>> C=solve([x.subs(t,0),x.diff(t).subs(t,0)], [c1,c2])
6 >>> x=x.subs(C)
7 >>> x

```

$$x(t) = -\frac{F_0 \cos(\omega t)}{\omega^2 - \omega_0^2} + \frac{F_0 \cos(\omega_0 t)}{\omega^2 - \omega_0^2}$$

Ahora usemos la identidad $\cos(a-b) - \cos(a+b) = 2 \sin a \sin b$, con $a = \frac{1}{2}(\omega + \omega_0)$ y $b = \frac{1}{2}(\omega - \omega_0)$. Deducimos

$$x(t) = \frac{2F_0}{\omega^2 - \omega_0^2} \sin\left(\frac{\omega - \omega_0}{2}t\right) \sin\left(\frac{\omega + \omega_0}{2}t\right). \quad (4.30)$$

Esta expresión la podemos ver como una onda de frecuencia grande $\omega + \omega_0$ modulada por una de frecuencia chica $\omega - \omega_0$.

```

1 x=x.subs({F0:1, omega:1, omega0:.9})
2 plot(x,(t,0,200))

```

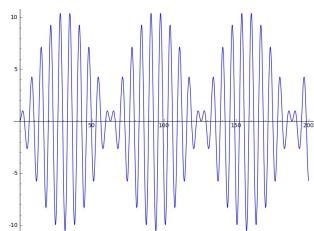


Figura 4.7.4: Fenómeno de batido

Calculemos el límite $\lim_{\omega_0 \rightarrow \omega} x(t)$,

```
>>> limit(x0, omega0, omega)
```

$$x(t) = \frac{F_0 t \sin(\omega t)}{2\omega}$$

El caso $\omega = \omega_0$ es el caso con resonancia, que debemos resolver, como fue indicado, proponiendo como solución $y(x) = x(A \cos x + B \sen x)$. El siguiente código SymPy muestra que la solución es la misma función que la obtenida por el proceso de límite de los casos sin resonancia.

```

1 >>> var('t,omega,F0,A,B')
2 >>> x=t*(A*cos(omega*t)+B*sin(omega*t))
3 >>> eq=x.diff(t,2)+omega**2*x-F0*cos(omega*t)
4 >>> eqL1=eq.factor().coeff(sin(omega*t))
5 >>> eqL2=eq.factor().coeff(cos(omega*t))
6 >>> SolAB=solve([eqL1,eqL2],[A,B])
7 >>> x=x.subs(SolAB)
```

Se producen "vibraciones" no acotadas.

```
>>> plot(x.subs({omega:1,F0:1}),(t,0,100))
```

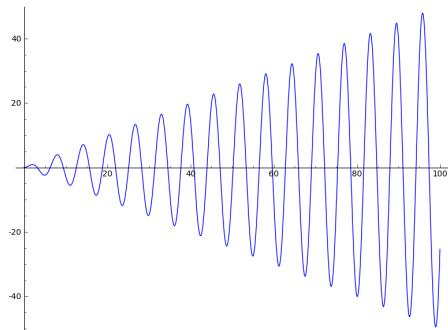


Figura 4.7.5: Resonancia

En la wiki Hearing a trigonometric identity se puede escuchar ondas sonoras con los fenómenos de resonancia y batido.

4.7.1.3 Vibraciones amortiguadas y forzadas ($c > 0, F \neq 0$)

Vamos a considerar una fuerza externa oscilatoria de frecuencia ω_0 y amplitud F_0 . Tenemos que resolver

$$x''(t) + 2\mu x'(t) + \omega^2 x(t) = F_0 \cos(\omega_0 t). \quad (4.31)$$

Proponemos por solución $x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sen(\omega_0 t)$.

```

1 >>> var('t,mu,omega,omega0,F0,A,B')
2 >>> x=A*cos(omega0*t)+B*sin(omega0*t)
3 >>> eq=x.diff(t,2)+2*mu*x.diff(t)+omega**2*x-F0*cos(omega0*t)
4 >>> eqL1=eq.factor().coeff(sin(omega0*t))
5 >>> eqL2=eq.factor().coeff(cos(omega0*t))
6 >>> Incog=[A,B]
7 >>> Ecuas=[eqL1,eqL2]
>>> M=Matrix([[ecu.coeff(inco) for inco in Incog] for ecu in Ecuas])
```

⁹ `>>> M.det()`

La matriz M del sistema lineal que satisfacen las incógnitas A y B tiene determinante

$$\det(M) = -4\mu^2\omega_0^2 - \omega^4 + 2\omega^2\omega_0^2 - \omega_0^4.$$

No queda claro si, eventualmente, puede ser singular. Calculando las posibles soluciones para ω de $\det(M) = 0$

¹ `>>> solve(M.det(), omega)`

$$\left[-\sqrt{-2i\mu\omega_0 + \omega_0^2}, \sqrt{-2i\mu\omega_0 + \omega_0^2}, -\sqrt{2i\mu\omega_0 + \omega_0^2}, \sqrt{2i\mu\omega_0 + \omega_0^2} \right]$$

son todas complejas no reales, por consiguiente la matriz es siempre no singular.

¹ `>>> SolAB=solve([eqL1, eqL2], [A, B])`
² `>>> x.subs(SolAB)`

$$x(t) = \frac{2F_0\mu\omega_0 \sin(\omega_0 t)}{4\mu^2\omega_0^2 + (\omega^2 - \omega_0^2)^2} + \frac{F_0(\omega^2 - \omega_0^2) \cos(\omega_0 t)}{4\mu^2\omega_0^2 + (\omega^2 - \omega_0^2)^2} \quad (4.32)$$

Es un movimiento oscilatorio de frecuencia angular ω_0 . Podemos escribir $x(t) = \rho \cos(\omega_0 t - \alpha)$, donde (ρ, α) son las coordenadas polares de (A, B) . En particular la amplitud de la oscilación viene dada por $\rho = \sqrt{A^2 + B^2}$. Recurrimos nuevamente a SymPy para calcular ρ .

¹ `>>> rho=sqrt(A**2+B**2).subs(SolAB).simplify()`
² `>>> rho`

$$\rho(\omega_0) = \frac{F_0}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\mu^2\omega_0^2}}$$

Grafiquemos la función $\rho(\omega_0)$ para $\omega = 5$ y $\mu = 0,1$.

`>>> plot(rho.subs({F0:1, mu:.1, omega:5}),(omega0,0,10))`

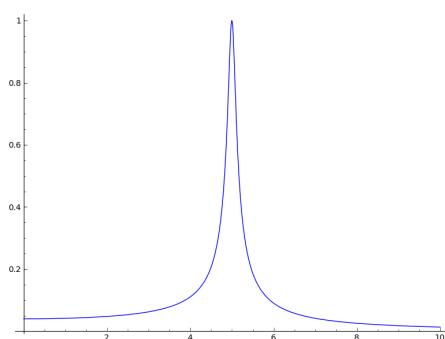


Figura 4.7.6: Gráfico amplitud vs. frecuencia, resorte amortiguado y forzado

La función tiene un notorio máximo cerca de $\omega_0 = 5$. Seguramente es debido a la aparición de resonancias. Hallemos el punto de máximo exacto, primero encontraremos puntos críticos.

```
>>> sol=solve(rho.diff(omega0),omega0)
>>>sol
```

$$\left[0, -\sqrt{-2\mu^2 + \omega^2}, \sqrt{-2\mu^2 + \omega^2}, -\sqrt{\tilde{\omega}\sqrt{F_0^2 - 2\mu^2 + \omega^2}}, \sqrt{\tilde{\omega}\sqrt{F_0^2 - 2\mu^2 + \omega^2}} \right]$$

El único lícito, si $2\mu^2 < \omega$, es $\hat{\omega}_0 = \sqrt{-2\mu^2 + \omega^2}$. Podemos constatar el carácter, si es máximo/mínimo o ninguna de estas opciones. Calculando la derivada segunda

```
>>> rho.diff(omega0,2).subs(omega0,sol[2])
```

$$\frac{2\sqrt{\frac{F_0^2}{4\mu^4+4\mu^2(-2\mu^2+\omega^2)}}(4\mu^2-2\omega^2)}{4\mu^4+4\mu^2(-2\mu^2+\omega^2)}$$

vemos que es claramente negativa. Luego tenemos un máximo local en $\hat{\omega}_0$. Comparando el valor de $\rho(\hat{\omega}_0)$ con los de $\rho(0)$ y $\rho(+\infty)$ determinamos si es máximo global. Un cálculo, que podemos hacer con SymPy, nos muestra que

$$\lim_{\omega_0 \rightarrow \infty} \rho(\omega_0) = 0 < \frac{F_0}{\omega^2} = \rho(0) < \frac{1}{2} \frac{F_0}{\mu \sqrt{\omega^2 - \mu^2}} = \rho(\hat{\omega}_0).$$

En consecuencia $\hat{\omega}_0$ es máximo absoluto.

En el ejemplo que graficamos el máximo ocurre en

```
>>> sol[2].subs({mu:1, omega:5})
4.99799959983992
```

Vale decir, un oscilador armónico en reposo es más sensible a excitaciones en ciertas frecuencias, aproximadamente igual a la frecuencia natural del resorte cuando el coeficiente de viscosidad $c = 2m\mu$ es chico. Esto es utilizado para diseñar dispositivos que captan ondas sísmicas.

Hasta aquí hemos encontrado una solución particular del sistema no homogéneo. Para encontrar una solución general deberíamos adicionar a la particular que disponemos una solución general $x_g(t)$ de la ecuación homogénea. La forma de esta solución general es de alguno de los tipos 4.27, 4.26 o 4.25. Sin embargo no nos importa ahora la fórmula explícita de estas soluciones, sino que nos interesa resaltar que trátese del tipo que se trate, se satisface que $\lim_{t \rightarrow \infty} x_g(t) = 0$. Por este motivo, vamos a decir que esta parte de la solución es *transitoria*. En cambio la solución que prevalece en el tiempo dada por (4.32) la denominaremos solución *estacionaria*.

4.7.2 Un poco de mecánica celeste

Vamos a considerar ahora el problema del movimiento de un planeta, digamos la Tierra, de masa m_\oplus alrededor del sol, de masa m_\odot . Como $m_\odot \gg m_\oplus$ vamos a ignorar la fuerza que actúa sobre el Sol debido a la atracción gravitatoria de la Tierra. Esta suposición, aunque falsa, la hacemos por simplicidad. No obstante, con sólo un poco de trabajo, el caso más general se reduce al tratado aquí. Ver el trabajo final de la Lic. Matemática de Leopoldo Buri, para una deducción más cuidadosa. Vamos a suponer además que el movimiento del planeta se restringe a un plano. Esta afirmación es cierta y aunque su demostración es sencilla no la desarrollaremos aquí. Supongamos un sistema de coordenadas cartesianas sobre el plano en que se realiza el movimiento orbital del planeta. Asumimos el Sol en el origen de coordenadas y en reposo. Como no actúa fuerza sobre él, permanecerá en esa situación. Vamos a suponer que la posición de la Tierra es \vec{r} .

Los dos ingredientes básicos para derivar la leyes de movimiento del planeta son la Segunda Ley de Newton y la Ley Gravitación Universal. Ya hemos considerado ambas con

anterioridad. Según la Ley de Gravitación Universal, la magnitud de la fuerza de gravedad es proporcional a $\frac{m_\oplus m_\odot}{d^2}$, donde d es la distancia tierra-sol. A la constante de proporcionalidad la llamaremos, como es costumbre, G . La dirección de la fuerza gravitatoria es la de la recta que une los dos astros y el sentido es tal que la fuerza es atractiva entre los cuerpos. Vale decir, la dirección y sentido de la fuerza de gravedad vienen dados por el versor $-\vec{r}/r$, donde $r = |\vec{r}|$. Luego se debe satisfacer que

$$m_\oplus \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\frac{G m_\oplus m_\odot}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} = -G m_\oplus m_\odot \frac{\vec{r}}{r^3}.$$

Es decir

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3} \quad \text{donde } \mu := G m_\odot \quad (4.33)$$

Esta ecuación se conoce como la ecuación de los dos cuerpos. Dado que esta ecuación entraña, a su vez, tres ecuaciones escalares, una por cada componente de \vec{r} , se nos presenta aquí un *Sistema de Ecuaciones Diferenciales*. No sabemos resolver sistemas de ecuaciones. No obstante vamos a ver como podemos reducir la ecuación anterior, mediante ingeniosos cambios de variables, a ecuaciones diferenciales que sabemos resolver.

Vamos a usar coordenadas polares (r, θ) y los versores $\vec{u}_r := (\cos \theta, \sin \theta)$ y $\vec{u}_\theta := (-\sin \theta, \cos \theta)$. Notar que $\vec{u}_r \perp \vec{u}_\theta$ y por consiguiente $\mathcal{B} := \{\vec{u}_r, \vec{u}_\theta\}$ forma una base del espacio euclídeo 2-dimensional. Usaremos este hecho para representar distintos vectores como combinación lineal de vectores de la base. Los cálculos, como es ya habitual, se los dejaremos a SymPy,

Primero declaramos las variables y asignamos los vectores \vec{u}_r , \vec{u}_θ y el vector \vec{r} al que llamamos pos.

```

1 >>> from sympy import *
2 >>> init_printing()
3 >>> var('t, mu')
4 >>> x, y, r, theta=symbols('x, y, r, theta', cls=Function)
5 >>> u_r=Matrix([cos(theta(t)), sin(theta(t))])
6 >>> u_theta=Matrix([-sin(theta(t)), cos(theta(t))])
>>> pos=r(t)*u_r

```

Como vamos a necesitar representar vectores en la base $\mathcal{B} = \{\vec{u}_r, \vec{u}_\theta\}$, construimos una matriz con los vectores de la base en las columnas.

```

1 >>> M=u_r.row_join(u_theta)

```

Concretamente queremos representar el vector aceleración $\vec{a} := \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$ en la base \mathcal{B} , para ello debemos resolver $MX = \vec{a}$, donde X y \vec{a} los asumimos vectores columna. Con SymPy lo hacemos en un periquete

Código (linsolve) Resuelve un sistema $Ax = b$

Sintaxis (documentación SymPy)

`linsolve((A,b), símbolos)`

`(A,b)`: tuple con la matriz y el término independiente del sistema.

`símbolos`: Muchas veces la solución no es única, en ese caso trata de representar la solución paramétricamente con los símbolos introducidos por `símbolos`.

Retorna: Un conjunto finito (tipo de datos de SymPy).

```

1 >>> alpha=symbols('alpha')
2 >>> a=lin_solve((M, pos.diff(t,2)), alpha)
3 >>> a=list(a) #convertimos de finite set a list
4 >>> a=a[0] #es una lista de tuples, sacamos el tuple
5 >>> a

```

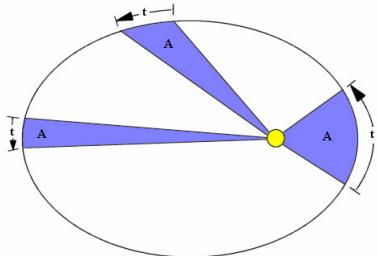
$$\left\{ \left(-r(t) \frac{d}{dt} \theta(t)^2 + \frac{d^2}{dt^2} r(t), \quad r(t) \frac{d^2}{dt^2} \theta(t) + 2 \frac{d}{dt} r(t) \frac{d}{dt} \theta(t) \right) \right\}$$

Obtenemos así las dos componentes de \vec{a} .

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2\dot{\theta}) \end{pmatrix}$$

El vector aceleración debe ser igual a la fuerza por unidad de masa $-\mu \vec{r}/r^3$. Notemos que esta fuerza es central, es decir tiene componente nula respecto al vector \vec{u}_θ . Por consiguiente se debe satisfacer que

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2\dot{\theta}) = 0 \iff \exists h \in \mathbb{R} : [r^2\dot{\theta} = h].$$



Hemos derivado la Segunda Ley de Kepler: El radio vector barre áreas iguales en tiempos iguales.

En la dirección radial \vec{u}_r la componente de la fuerza es $-\mu/r^2$. Es decir se satisface la ecuación

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{\mu}{r^2}$$

Notar que esta ecuación entraña dos incógnitas r y θ , pero $\dot{\theta}$ puede ser remplazado por h/r^2 por la segunda Ley de Kepler. Declaremos la variable h que juega un rol importante y reemplacemos $\dot{\theta}$ en la ecuación

**2)

```

1 | >>> var('h')
2 | >>> ed=(a[0]).subs((theta(t)).diff(t),h/r(t))
3 | >>> ed+=mu/r(t)**2

```

Resulta

$$-\frac{h^2}{r^3(t)} + \frac{\mu}{r^2(t)} + \frac{d^2}{dt^2} r(t) = 0.$$

Conseguimos una ecuación no lineal de segundo orden para r . De los métodos que hemos visto, ninguno se aplica a esta ecuación. El truco mágico consiste en considerar la nueva variable dependiente $z = 1/r$ y la nueva variable independiente θ .

```

1 | >>> z=Function('z')(theta(t))
2 | >>> r=1/z
3 | >>> ed2=r.diff(t,2)+mu/r**2-h**2/r**3
4 | >>> ed2

```

Se obtiene

$$0 = -h^2 z^3(\theta(t)) + \mu z^2(\theta(t)) + \frac{1}{z^2(\theta(t))} \left(-\frac{d}{dt} \theta(t)^2 \frac{d^2}{d\theta(t)^2} z(\theta(t)) \right. \\ \left. - \frac{d^2}{dt^2} \theta(t) \frac{d}{d\xi_1} z(\xi_1) \Big|_{\xi_1=\theta(t)} + \frac{2 \frac{d}{dt} \theta(t)^2}{z(\theta(t))} \frac{d}{d\xi_1} z(\xi_1) \Big|_{\xi_1=\theta(t)}^2 \right)$$

En la complicada ecuación resultante nuevamente aparece θ' y además aparece θ'' . Tenemos que reemplazar θ' por hz^2 y θ'' por $\frac{d}{dt} hz^2$.

```

1 >>> theta2diff=(h*z**2).diff(t).subs(theta(t).diff(t),h*z**2)
2 >>> ed3=ed2.subs({theta(t).diff(t):h*z**2,theta(t).diff(t,2):theta2diff})
3 >>> ed4=(ed3/z**2/h**2).expand()
4 >>> ed4

```

Resulta

$$-z(\theta(t)) - \frac{d^2}{d\theta(t)^2}z(\theta(t)) + \frac{\mu}{h^2} = 0.$$

La ecuación del oscilador armónico. Sabemos resolver esta ecuación y S también!!

```

1 >>> var('theta')
2 >>> z=Function('z')(theta)
3 >>> ed5=ed4.subs(theta(t),theta)
4 >>> d solve(ed5,z).simplify()

```

Obtenemos

$$z(\theta) = C_1 \sin(\theta) + C_2 \cos(\theta) + \frac{\mu}{h^2}.$$

Ahora si escribimos $C_1 = \rho \cos \omega$ y $C_2 = -\rho \sen \omega$ y recordamos que $z = 1/r$, deducimos

$$r = \frac{1}{\frac{\mu}{h^2} + \rho \sen(\theta - \omega)}$$

Llamando $p = \frac{h^2}{\mu}$ y $e = \frac{\rho h^2}{\mu}$

$$r = \frac{p}{1 + e \sen(\theta - \omega)} \quad (4.34)$$

Ejercicio: La ecuación (4.34) es la ecuación de una cónica con foco en el origen y excentricidad e . Recordemos que la variable θ es el ángulo polar. Hagamos algunos gráficos para distintas excentricidades.

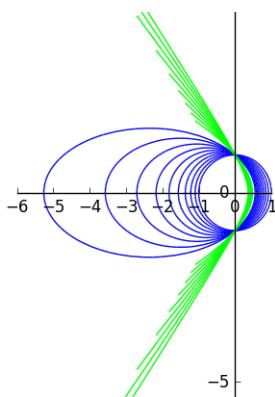
```

from sympy.plotting import plot_parametric
"""
Gráfico de excentricidades menores a uno """
cant=20
e_s=[.04*j for j in range(cant)]
e=e_s[0]
p=plot_parametric(1/(1+e*cos(theta))*cos(theta),\
                   1/(1+e*cos(theta))*sin(theta),\
                   (theta,0,6.28),show=False)

for e in e_s[1:]:
    p1=plot_parametric(1/(1+e*cos(theta))*cos(theta),\
                        1/(1+e*cos(theta))*sin(theta),\
                        (theta,0,6.28),show=False)
    p.append(p1[0])

"""
Gráfico de excentricidades mayores a uno """
e_s=[.04*j+1 for j in range(1,cant)]
for e in e_s:
    p1=plot_parametric(1/(1+e*cos(theta))*cos(theta),\
                        1/(1+e*cos(theta))*sin(theta),\
                        (theta,-pi*2/3,pi*2/3),show=False, line_color=(0,1,0))
    p.append(p1[0])
p.show()

```



Hemos logrado encontrar r como función de θ . No obstante no hemos logrado resolver aún el problema de los dos cuerpos (4.33), para ello deberíamos encontrar $\vec{r}(t)$, es decir poner a \vec{r} como función de t . Esto nos serviría para decir que punto de la órbita ocupa el planeta en un dado momento. Este problema no lo desarrollaremos aquí dado que su solución se aparta del tema de las ecuaciones diferenciales.

4.8 Ecuaciones lineales de orden superior

Definición 4.8.4 (Ecuación lineal general de orden n) Es una ecuación de la forma

$$y^{(n)}(x) + p_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + p_0(x)y(x) = r(x) \quad (4.35)$$

donde $p_i, r, i = 0, \dots, n-1$ son funciones definidas en un intervalo I

Los resultados y técnicas que hemos desarrollado para ecuaciones de orden 2 se aplican con cambios previsibles a ecuaciones de mayor orden. Exponemos de manera sumaria estos resultados.

4.8.1 Existencia y unicidad de soluciones

Teorema 4.8.7 (Teorema de existencia y unicidad de soluciones) Supongamos $p_i, r, i = 0, \dots, n-1$ continuas sobre I . Sean $x_0 \in I$ e $y_0, y_1, \dots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$ dados. Entonces existe una única solución del PVI

$$\begin{cases} y^{(n)}(x) + p_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + p_0(x)y(x) = r(x), x \in I \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

4.8.2 Estructura del conjunto de soluciones

Teorema 4.8.8 (Estructura conjunto de soluciones ecuaciones homogéneas) Su-

pongamos y_1, y_2, \dots, y_n soluciones linealmente independientes de

$$y^{(n)}(x) + p_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + p_0(x)y(x) = 0.$$

Entonces

$$y = c_1y_1 + \dots + c_ny_n, \quad c_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n,$$

es solución general. Vale decir, el conjunto de soluciones es un espacio vectorial n -dimensional.

Teorema 4.8.9 (Estructura conjunto de soluciones ecuaciones no homogéneas)

Una solución general de la ecuación no homogénea

$$y^{(n)}(x) + p_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + p_0(x)y(x) = r(x),$$

es la suma de una solución particular de esta ecuación más una solución general de la ecuación homogénea asociada.

Teorema 4.8.10 (Fórmula Abel) Si y_1, y_2, \dots, y_n son soluciones de la ecuación homogénea

$$y^{(n)}(x) + p_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + p_0(x)y(x) = 0, \quad (4.36)$$

Entonces el Wronskiano satisface

$$W(y_1, \dots, y_n)(x) = W(y_1, \dots, y_n)(x_0)e^{-\int_{x_0}^x p_{n-1}(t)dt}. \quad (4.37)$$

En particular $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ son linalmente independientes si y solo si $W(x) \neq 0$ para todo $x \in I$.

Dem. Las demostraciones de los resultados anteriores es tan similar a su análogo de orden 2 que no vale la pena invertir tiempo en ellas. La demostración de la fórmula de Abel, si nos parece lo suficientemente interesante para dejarla como **ejercicio**.

4.8.3 Ecuaciones homogéneas con coeficientes constantes

Las ecuaciones lineales de orden n , homogéneas con coeficientes constantes se resuelven por métodos análogos a los considerados para ecuaciones de segundo orden. Se propone $y(x) = e^{rx}$ como solución. Reemplazando esta función en (4.36) vemos que y sería solución si y solo si r es solución de la ecuación característica

$$r^n + p_{n-1}r^{n-1} + \dots + p_1r + p_0 = 0. \quad (4.38)$$

Ahora se presentan diversos casos.

4.8.3.1 Raíces reales distintas.

Si la ecuación característica (4.38) tiene n raíces r_1, \dots, r_n reales y distintas entonces $y_1(x) = e^{r_1x}, \dots, y_n(x) = e^{r_nx}$ son soluciones linealmente independientes y por ende

$$y(x) = c_1e^{r_1x} + \dots + c_ne^{r_nx}$$

es solución general.

Dejamos como ejercicio la demostración de la independencia lineal. En lugar de usar el Wronskiano, se puede utilizar la siguiente idea basada en métodos operacionales. Denotemos por D el operador diferenciación, esto es D es sencillamente la función definida sobre el conjunto de funciones diferenciables sobre un intervalo abierto y que actúa derivando, esto es $Dy = y'(x)$. Dado un polinomio $p(X) = p_n X^n + p_{n-1} X^{n-1} + \dots + p_1 X + p_0$, $p_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, \dots, n$, denotamos por $p(D)$ el operador definido por

$$p(D)y = p_n y^{(n)} + p_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + p_1 y' + p_0 y.$$

Diremos que $p(D)$ es un *operador diferencial polinomial*.

Ejercicio 1 Dado que dos polinomios se pueden sumar y multiplicar, resultando estas operaciones en un nuevo polinomio, es posible hacer lo propio con operadores diferenciales polinomiales. Demostrar que el producto de dos de tales operadores $p(D)$ y $q(D)$ es comutativo. Esta propiedad es lo mismo que afirmar que el producto de polinomios es comutativo. Analizar que ocurriría si permitiésemos que los coeficientes p_i fuesen funciones de x , $p_i = p_i(x)$.

Ejercicio 2 Supongamos ahora que r_1, \dots, r_n son números reales distintos y que

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + \dots + c_n e^{r_n x}.$$

Considerar el operador diferencial

$$p(D) = (D - r_1) \cdots (D - r_{i-1})(D - r_{i+1}) \cdots (D - r_n).$$

Demostrar que

$$p(D)y = (r_i - r_1) \cdots (r_i - r_{i-1})(r_i - r_{i+1}) \cdots (r_i - r_n) e^{r_i x}.$$

Deducir de esto la independencia lineal de $\{e^{r_1 x}, \dots, e^{r_n x}\}$.

4.8.3.2 Raíces reales repetidas.

Supongamos que la ecuación característica (4.38) tiene raíces reales repetidas. Sean r_1, \dots, r_k las raíces distintas y m_j la multiplicidad de la raíz r_j . Por cada raíz r_j considerar las m_j funciones

$$\mathcal{B}_j := \{y_j^0(x) = e^{r_j x}, y_j^1(x) = x e^{r_j x}, \dots, y_j^{m_j-1}(x) = x^{m_j-1} e^{r_j x}\}.$$

Ejercicio 3 Demostrar que $\mathcal{B} := \mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_k$ forma un conjunto de n soluciones linealmente independientes.

4.8.3.3 Raíces complejas.

Supongamos que la ecuación característica (4.38) tiene raíces complejas. Como la ecuación característica tiene coeficientes reales, las raíces aparecen de a pares conjugados $\mu \pm \nu i$. Si las raíces son simples por cada uno de estos pares hay que considerar las soluciones

$$e^{\mu x} \cos x \quad y \quad e^{\mu x} \sin x.$$

Si son múltiples con multiplicidad k hay que considerar las $2k$ soluciones

$$x^0 e^{\mu x} \cos x, \dots, x^{k-1} e^{\mu x} \cos x \quad y \quad x^0 e^{\mu x} \sin x, \dots, x^{k-1} e^{\mu x} \sin x.$$

Dejamos los detalles que es necesario completar como trabajo práctico.

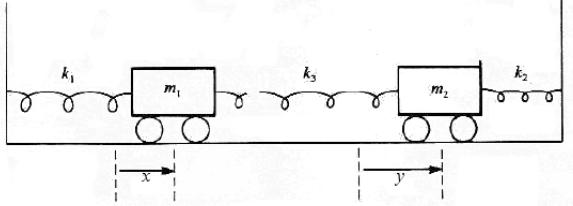
4.8.4 Aplicación: osciladores armónicos acoplados

Supongamos dos masas m_1 y m_2 sujetas a dos puntos fijos por sendos resortes y, a su vez, unidas entre sí por un tercer resorte.

Vamos a medir la posición de las masas desde orígenes distintos situados en los respectivos puntos de equilibrio. Por consiguiente las posiciones x e y de las masas representan también su desplazamiento desde el equilibrio. Utilizando la segunda ley de Newton, la Ley de Elasticidad de Hooke y tomando en consideración que el resorte central está desplazado desde su estado de equilibrio en una cantidad igual a $y - x$, vemos que se debe satisfacer que

$$\begin{cases} m_1 x''(t) = -k_1 x + k_3(y - x) \\ m_2 y''(t) = -k_3(y - x) - k_2 y \end{cases} \quad (4.39a)$$

$$(4.39b)$$



Se nos presentó un sistema de ecuaciones de segundo orden. Vamos a poder convertirlo en una ecuación pagando el precio de incrementar el orden. El procedimiento es derivar (4.39a) (obviamente es lo mismo empezar por (4.39b)) dos veces respecto a t . En el resultado sustituímos y'' por su igual según (4.39b). El resultado es una ecuación que todavía tiene la variable y , pero podemos usar (4.39a) para sustituir y por una expresión que sólo tiene x y sus derivadas. Todo esto lo haremos con SymPy.

```

1 >>> from sympy import *
2 >>> init_printing()
3 >>> var('x,y,t,m1,m2,k1,k2,k3')
4 >>> x,y=symbols('x,y',cls=Function)
5 >>> eq1=m1*x(t).diff(t,2)+k1*x(t)-k3*(y(t)-x(t))
6 >>> eq2=m2*y(t).diff(t,2)+k2*y(t)+k3*(y(t)-x(t))
7 >>> sust1,_=solve(eq2,y(t).diff(t,2))
8 >>> sust2,_=solve(eq1,y(t))
9 >>> eq3=eq1.diff(t,2).subs({y(t).diff(t,2):sust1, y(t):sust2})
>>> eq3.expand().collect(x(t))

```

Obtenemos la ecuación de cuarto orden

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^4}{dt^4}x(t) + & \left(\frac{k_1 k_2}{m_2} + \frac{k_1 k_3}{m_2} + \frac{k_2 k_3}{m_2} \right) x(t) \\ & + \left(k_1 + \frac{k_2 m_1}{m_2} + \frac{k_3 m_1}{m_2} + k_3 \right) \frac{d^2}{dt^2}x(t) = 0. \end{aligned}$$

Vamos a suponer todos los parámetros igual a 1. Encontremos y resolvamos la ecuación característica

```

2 >>> eq4=eq3.subs({m1:1,m2:1,k1:1,k2:1,k3:1})
>>> eq4

```

$$3x(t) + 4 \frac{d^2}{dt^2}x(t) + \frac{d^4}{dt^4}x(t) = 0.$$

```

>>> r=var('r')
2 >>> z=exp(r*t)
>>> eq5=eq4.subs({x(t):z,x(t).diff(t,4):z.diff(t,4),x(t).diff(t,2):z.diff(t,2)
})/z
4 >>> eq5.expand()

```

Las soluciones de la ecuación característica son sol .

```
>>> sol=solve(eq5,r)
```

Según lo que hemos dicho antes, la solución general será

$$x(t) = A \cos(t) + B \sin(t) + C \cos(\sqrt{3}t) + D \sin(\sqrt{3}t) \quad (4.40)$$

La solución es una superposición de ondas con frecuencias incommensurables. Decimos que dos magnitudes no nulas son incommensurables cuando su cociente es irracional.

¿Tendrá el sistema de osciladores acoplados soluciones periódicas? Notar que una superposición de funciones periódicas no necesariamente es periódica. La pregunta nos lleva a una pregunta más general. Si $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones periódicas de período T_1 y T_2 , será $f + g$ periódica. La respuesta es el teorema de abajo.

Teorema 4.8.11 Si $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones no constantes, periódicas y continuas de período T_1 y T_2 , la función $f + g$ será periódica si y sólo si T_1 y T_2 son commensurables.

Demostración. La demostración descansa sobre varios hechos, que poco tienen que ver con las ecuaciones diferenciales. Pero, el teorema nos parece tan interesante, que vamos a dar algunos detalles y otros los dejaremos como ejercicio. \square

Ejercicio Sea $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función periódica y sea \mathfrak{P} el conjunto de todos los períodos. Entonces

1. \mathfrak{P} es un subgrupo aditivo de \mathbb{R} . Si F es continua \mathfrak{P} es cerrado.
2. Si \mathfrak{P} es cualquier subgrupo aditivo propio y cerrado de \mathbb{R} entonces \mathfrak{P} es un grupo cíclico, es decir existe $a > 0$ con $\mathfrak{P} = a\mathbb{Z}$. Como corolario, si \mathfrak{P} es cualquier subgrupo aditivo cerrado propio y $T_1, T_2 \in \mathfrak{P}$ entonces T_1 y T_2 son commensurables.

Ayuda: Considerar

$$a := \inf\{x \in \mathfrak{P} : x > 0\}$$

Entonces si $a > 0$, $\mathfrak{P} = a\mathbb{Z}$ y si $a = 0$, $\mathfrak{P} = \mathbb{R}$.

¿Qué ocurrirá si no suponemos \mathfrak{P} cerrado?

3. Demostrar el Teorema. Ayuda: Supongamos que $f + g$ tiene período $T > 0$. Entonces:

$$F(x) := f(x + T) - f(x) = g(x) - g(x + T).$$

La función F tendrá períodos T_1 y T_2 .

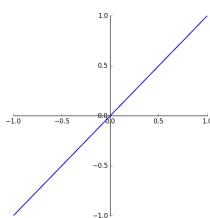
Retornando al oscilador armónico y a su solución general (4.40), el ejercicio anterior nos dice que la solución no será periódica, a menos que $A = B = 0$ o $C = D = 0$. Estos casos especiales de soluciones se denominan modos normales. Usemos SymPy para encontrar y graficar algunos modos normales. Gráficaremos las soluciones sobre el espacio de configuraciones. Esto es decir que graficaremos las curvas $t \mapsto (x(t), y(t))$ en \mathbb{R}^2 .

Primer modo normal

```

1 >>> var('A,B,C,D')
2 >>> x=A*cos(t)+B*sin(t)+C*cos(sqrt(3)*t)+D*sin(sqrt(3)*t)
3 >>> x1=x.ssubs({A:1,B:0,C:0,D:0})
4 >>> y1=x1.diff(t,2)+2*x1
5 >>> from sympy.plotting import *
>>> plot_parametric(x1,y1,(t,0,10*pi))

```



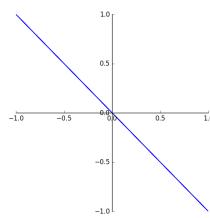
Los desplazamientos de las dos masas estan sobre la recta $y = x$, vale decir las masas se mueven perfectamente en fase.

Segundo modo normal

```

1 >>> x1=x.ssubs({A:0,B:0,C:1,D:0})
2 >>> y1=x1.diff(t,2)+2*x1
3 >>> plot_parametric(x1,y1,(t,0,10*pi))

```



Los desplazamientos de las dos masas estan sobre la recta $y = -x$, vale decir las masas se mueven perfectamente fuera de fase. Cuando una alcanza el desplazamiento negativo menor la otra alcanza el mayor positivo.

Fuera de un modo normal

```

1 >>> x1=x.ssubs({A:1,B:0,C:1,D:0})
2 >>> y1=x1.diff(t,2)+2*x1
3 >>> plot_parametric(x1,y1,(t,0,10*pi))

```

Se obtienen gráficas bonitas llamadas Curvas de Lissajous, que fuera de los modos normales llenan densamente un cuadrado del plano.

4.9 Métodos Operacionales

El denominado Método Operacional es una técnica iniciada por el ingeniero eléctrico Oliver Heaviside (1850-1925).

Hemos mencionado que una ecuación lineal de orden n con coeficientes constantes y no homogénea se puede pensar como

$$p(D)y = r(x), \quad (4.41)$$

donde $p(D) = D^n + p_{n-1}D^{n-1} + \dots + p_1D + p_0$ es un operador diferencial polinomial.

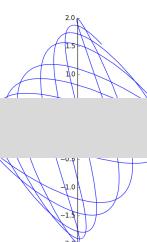


Figura 4.8.1: Curva de Lissajous

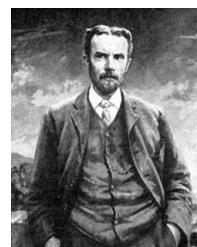


Figura 4.9.1: Oliver Heaviside

La idea central del método es proceder desde una manera puramente formal, para afirmar que si y resuelve (4.41) entonces

$$y = \frac{1}{p(D)} r(x), \quad (4.42)$$

Esto no parece más que un juego de símbolos del que no se puede desprender nada interesante. Vamos a ver que no es ese el caso.

El símbolo $1/p(D)$ debería ser interpretado como el operador inverso de $p(D)$. Por ejemplo, supongamos que $p(D) = D$. entonces $p(D)y = y'$. En este caso $1/p(D)$ puede ser definido como

$$\frac{1}{p(D)}r = \int r(x)dx \quad (4.43)$$

Si tuviésemos $p(D) = D - q$, $q \in \mathbb{R}$, entonces $p(D)y = y' - qy$. En este caso, teniendo en mente que $y(x) = (1/p(D))r(x)$ debería resolver la ecuación lineal de primer orden $y' - qy = r(x)$, y por la fórmula explícita que obtuvimos para esta solución, es natural definir

$$\frac{1}{p(D)}r = e^{qx} \int e^{-qx}r(x)dx \quad (4.44)$$

4.9.1 Raíces simples

Supongamos ahora que p es un polinomio que se factoriza en monomios de primer orden

$$p(D) = (D - p_0) \cdots (D - p_k).$$

Siguiendo la línea de razonamiento anterior definimos

$$\frac{1}{p(D)}r = \frac{1}{D - p_0} \left(\frac{1}{D - p_1} \left(\cdots \frac{1}{D - p_k} (r) \cdots \right) \right) \quad (4.45)$$

Problema. Resolver $y'' - 3y' + 2y = xe^x$. Las cuentas las haremos con SymPy. Primero veamos si el polinomio se factoriza

```

1 >>> var('D')
2 >>> p=D**2-3*D+2
3 >>> p.factor()
```

Vemos que $p(D) = (D - 2)(D - 1)$. Ahora programemos la fórmula (4.44) y usemosla para resolver la ecuación.

```

1 >>> x=var('x')
2 >>> LinInv=lambda r,a: exp(a*x)* integrate(exp(-a*x)*r,x)
3 >>> LinInv(LinInv(x*exp(x),1),2)
```

Dedujimos $y = \frac{e^x}{2} (-x^2 - 2x - 2)$ es solución.

4.9.1.1 Fracciones simples

Otra idea es descomponer $1/p(D)$ en fracciones simples. Suponiendo $p(D) = (D - p_0) \cdots (D - p_k)$, con p_j raíces simples

$$\frac{1}{(D - p_0) \cdots (D - p_k)} = \left\{ \frac{A_0}{(D - p_0)} + \cdots + \frac{A_k}{(D - p_k)} \right\}.$$

Como cada término del miembro de la derecha lo tenemos definido, sólo tenemos que sumar cada uno de ellos. Reprocesemos con esta idea el ejemplo de antes. La función `apart` de sympy hace descomposiciones en fracciones simples. En el caso del operador $p(D) = (D - 2)(D - 1)$ obtenemos descomposición en fracciones simples

```
1 >> apart(1/p)
```

$$\frac{1}{p(D)} = -\frac{1}{D - 1} + \frac{1}{D - 2}.$$

Entonces la siguiente expresión debería darnos una solución

```
1 >>> LinInv(x*exp(x),2)-LinInv(x*exp(x),1)
```

Obviamente obtenemos la misma solución que obtuvimos antes.

4.9.2 Series

En algunas ocasiones es conveniente desarrollar en serie $1/p(D)$:

$$\frac{1}{p(D)} r(x) = (a_0 + a_1 D + a_2 D^2 + \cdots) r(x). \quad (4.46)$$

Por ejemplo cuando r es un polinomio, puesto que salvo una cantidad finita, todas las derivadas de orden k de r son cero.

Ejemplo. Resolver $y''' + 2y'' + y = x^4 + 2x + 5$. Como r es un polinomio de grado 4, desarrollemos en serie $1/p(D)$ hasta ese orden

```
1 >>> L=1/(1+2*D**2+D**3)
2 >>> L.series(D,0,5)
```

Obtenemos

$$\frac{1}{p(D)} = \frac{1}{1 + 2D^2 + D^3} = 1 - 2D^2 - D^3 + 4D^4 + \mathcal{O}(D^5).$$

Ahora el siguiente código define el operador diferencial asociado a la expresión anterior

```
1 >>> coeficientes=[Q.diff(D,j).subs(D,0)/factorial(j) for j in range(5)]
2     def Q_op(f):
         return sum([coeficientes[j]*f.diff(x,j) for j in range(5)])
```

Evaluamos el segundo miembro de (4.46) en $r(x) = x^4 + 2x + 5$.

```
1 >>> Q_op(x**4+2*x+5)
```

Llegamos a la solución

$$y = x^4 - 24x^2 - 22x + 101$$

5 Ecuaciones lineales de segundo orden

5.1 Teorema de separación de Sturm

5.1.1 Motivación

El objetivo de esta unidad es mostrar como se pueden estudiar propiedades de las soluciones de ecuaciones lineales de segundo orden sin resolver la ecuación diferencial. En particular estudiaremos propiedades de los ceros de las soluciones. Recordemos que denominamos cero de una función y a un punto x tal que $y(x) = 0$.

Veamos como se comportan los ceros de la ecuación $y'' + ay = 0$. Para ser más concretos consideremos el siguiente pvi asociado a esta ecuación.

$$\begin{cases} y'' + ay = 0, \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

Las soluciones acordes al valor de a son

$$y(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{|a|}} e^{\sqrt{|a|}x} - \frac{1}{2\sqrt{|a|}} e^{-\sqrt{|a|}x} & \text{cuando } a < 0 \\ x & \text{cuando } a = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{|a|}} \operatorname{sen}(\sqrt{a}x) & \text{cuando } a > 0 \end{cases}$$

En la siguiente animación representamos los gráficos de las soluciones a medida que a varía desde -2 hasta 6 de a saltos de $0,1$.

La separación entre ceros sucesivos de la solución disminuye a medida que a crece, la solución pasa de tener un único cero para $a < 0$ a tener, cuando $a > 0$, infinitos separados una distancia de π/\sqrt{a} . Cuando $a > 0$, el número \sqrt{a} es la frecuencia circular de la solución sinusoidal $y(x) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \operatorname{sen}(\sqrt{a}x)$, por analogía la seguiremos denominando frecuencia para otros valores de a .

Vamos a desarrollar dos resultados principales, el Teorema de Separación de Sturm y el Teorema de Comparación de Sturm. Luego generalizaremos este último teorema al Teorema de Comparación de Sturm-Picone.

5.1.2 Teorema separación de Sturm

Nuestra investigación sobre los ceros de soluciones comienza con el siguiente teorema que muestra que los ceros de soluciones linealmente independientes alternan entre sí.

Teorema 5.1.1 (Separación de Sturm) Sean y_1 e y_2 soluciones linealmente independientes de

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0. \quad (5.1)$$

Entonces entre dos ceros consecutivos de y_2 hay exactamente un cero de y_1 .

Dem. Sean x_1 y x_2 ceros sucesivos de y_2 . Podemos suponer $y_2 > 0$ en (x_1, x_2) . Vamos a considerar el Wronskiano de las soluciones

$$W = y_1(x)y'_2(x) - y_2(x)y'_1(x),$$

que es no nulo por la independencia lineal y por lo tanto tiene siempre el mismo signo. En los puntos x_1 y x_2 tenemos $W = y_1(x)y'_2(x)$. Notar que

$$y'_2(x_1) = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{y_2(x_1 + h)}{h} \geq 0.$$

De manera similar deducimos $y'_2(x_2) \leq 0$. Por la invariancia del signo de $W = y_1y'_2$ debe ocurrir que $y_1(x_1)$ e $y_1(x_2)$ tienen signos diferentes. Y por lo tanto y_1 se debe anular en (x_1, x_2) . \square

Ejemplo 5.1.1 as funciones $y_1(x) = c_1 \cos x + c_2 \sen x$ e $y_2(x) = c_3 \cos x + c_4 \sen x$ son soluciones de la ecuación del oscilador armónico $y'' + y = 0$. Para que sean linealmente independientes se tiene que satisfacer que el Wronskiano W sea no nulo en todo punto. Evaluamos W en 0

$$W = \det \begin{pmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y'_1(0) & y'_2(0) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} c_1 & c_3 \\ c_2 & c_4 \end{pmatrix} = c_1c_4 - c_2c_3 \neq 0$$

Bajo este supuesto los ceros de y_1 e y_2 alternan. Veamos esta afirmación de manera directa, sin invocar el Teorema de Separación de Sturm. Como es costumbre escribamos

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \rho_1 \cos(x - \alpha_1), \quad \text{donde } c_1 = \rho_1 \cos \alpha_1 \text{ y } c_2 = \rho_1 \sen \alpha_1 \\ y_2(x) &= \rho_2 \cos(x - \alpha_2), \quad \text{donde } c_3 = \rho_2 \cos \alpha_2 \text{ y } c_4 = \rho_2 \sen \alpha_2. \end{aligned}$$

La condición $c_1c_4 - c_2c_3 \neq 0$ equivale a la independencia lineal de los vectores (c_1, c_2) y (c_3, c_4) y esto último a que $\alpha_1 - \alpha_2 \notin \mathbb{Z}$. Por consiguiente los ceros de y_1 e y_2 alternan como predice el Teorema.

5.1.3 Reducción a la ecuación normal

La ecuación general lineal de segundo orden (5.1) no es muy apropiada para el estudio que nos proponemos. Vamos a mostrar que podemos reducir aquella ecuación a una más simple que denominaremos *normal*.

Teorema 5.1.2 existe una función v tal que el cambio de variables $y(x) = v(x)u(x)$ transforma la ecuación (5.1) en la ecuación

$$u'' + q(x)u = 0. \quad (5.2)$$

Dem.

```

1 >>> from sympy import *
2 >>> init_printing()
3 >>> x=var('x')
4 >>> u,v,P,Q=symbols('u v P Q',cls=Function)
5 >>> y=u(x)*v(x)
6 >>> eq=y.diff(x,2)+P(x)*y.diff(x)+Q(x)*y
7 >>> eq.expand().coeff(u(x).diff(x))
P(x)*v(x) + 2*Derivative(v(x), x)

```

Para que la ecuación lineal de segundo orden resultante no tenga el término con u' se debe cumplir que

$$P(x)v(x) + 2\frac{d}{dx}v(x) = 0,$$

que es una ecuación lineal de primer orden para v , cuya solución general es $v(x) = e^{-\int \frac{P}{2} dx}$. \square

Hallemos q .

```

1 >>> y=u(x)*exp(-Integral(P(x)/2,x))
2 >>> eq=y.diff(x,2)+P(x)*y.diff(x)+Q(x)*y
3 >>> eq=eq/exp(-Integral(P(x)/2,x))
4 >>> eq.simplify()

```

Obtenemos

$$\left[-\frac{1}{4}P^2(x)u(x) + Q(x)u(x) - \frac{1}{2}u(x)\frac{d}{dx}P(x) + \frac{d^2}{dx^2}u(x) = 0 \right].$$

y por lo tanto

$$q = -\frac{1}{4}P^2(x) + Q(x) - \frac{1}{2}\frac{d}{dx}P(x).$$

Ejemplo 5.1.2 n caso particular de importancia lo constituye la ecuación de Bessel

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - a^2)y = 0 \quad (5.3)$$

. La ecuación equivale a

$$u'' + \left(1 + \frac{1 - 4a^2}{4x^2}\right)u = 0. \quad (5.4)$$

Notar que si $v(x) \neq 0$, entonces los ceros de la función $u(x)$ e $y(x) = v(x)u(x)$ son los mismos. De allí que, si nuestro objetivo es estudiar ceros de soluciones de ecuaciones lineales de segundo orden, podemos suponer que la ecuación viene dada en la forma normal (5.2).

Por analogía entre las ecuación a coeficientes constantes $y'' + ay = 0$ y la ecuación con coeficientes variables (5.2), llamaremos a la función $q(x)$ frecuencia. El objetivo que tenemos es ver si se observa un comportamiento similar entre las soluciones de la ecuación (5.2) y las de su contraparte a coeficientes constantes.

5.1.4 Teorema de Comparación de Sturm

Teorema 5.1.3 Sean $q_i, i = 1, 2$, continuas e $y_i, i = 1, 2$, soluciones de

$$y_i''(x) + q_i(x)y_i(x) = 0, \quad i = 1, 2.$$

Sean x_0 y x_1 ceros sucesivos de y_2 y supongamos que $q_2(x) \leq q_1(x)$ y $q_2 \not\equiv q_1$ en $[x_0, x_1]$. entonces y_1 tiene al menos un cero en (x_0, x_1) .

Dem. Por la linealidad de las ecuaciones y como x_0 y x_1 son ceros consecutivos, podemos suponer $y_2 > 0$ en (x_0, x_1) . Supongamos que y_1 no tiene ceros en (x_0, x_1) , entonces en virtud del Teorema de Bolzano, y_1 no cambia de signo en (x_0, x_1) y por consiguiente podemos suponer también que $y_1 > 0$ en (x_0, x_1) . Derivando el Wronskiano y usando las ecuaciones diferenciales que satisfacen y_1 e y_2

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dx} &= \frac{d}{dx}(y_1 y_2' - y_1' y_2) \\ &= y_1 y_2'' - y_1'' y_2 \\ &= -q_2 y_1 y_2 + q_1 y_1 y_2 \\ &= (q_1 - q_2) y_1 y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Integrando esta desigualdad, tomando en cuenta que $q_1 \not\equiv q_2$ y que x_0 y x_1 son ceros de y_2

$$0 < \int_{x_0}^{x_1} \frac{dW}{dx} dx = W(x_1) - W(x_0) = y_1(x_1)y_2'(x_1) - y_1(x_0)y_2'(x_0). \quad (5.5)$$

Por un razonamiento análogo al de la demostración del Teorema 5.1.1 debemos tener que $y_2'(x_0) \geq 0$ e $y_2'(x_1) \leq 0$. Luego $y_1(x_0)y_2'(x_0) \geq 0 \geq y_1(x_1)y_2'(x_1)$ que es una contradicción con (5.5). \square

Corolario 5.1.1 Si $q \leq 0$ y $q \not\equiv 0$ en el intervalo, acotado o no, I e $y(x)$ es solución de $y'' + q(x)y = 0$, entonces y tiene al menos un cero en I .

Dem. Si $y(x)$ tuviese dos ceros entonces podemos usar el Teorema de Comparación de Sturm con $q_2 = q$, $y_2 = y$, $q_1 = 0$ e $y_1 \equiv 1$ (notar que y_1 resuelve $z'' + q_1(x)z = 0$) y llegaríamos a que y_1 debería anularse en algún punto. Esta contradicción demuestra el corolario. \square

Corolario 5.1.2 Si existe $q_0 \in \mathbb{R}$ tal que $q(x) \geq q_0 > 0$ en $I = (a, +\infty)$ y si $y(x)$ es solución de $y'' + q(x)y = 0$, entonces y tiene infinitos ceros en el intervalo no acotado $(a, +\infty)$. De hecho y tiene un cero en cualquier intervalo de longitud $\pi/\sqrt{q_0}$.

Dem. Evidentemente hay que usar el Teorema de Comparación de Sturm con la ecuación $z'' + q_0 z = 0$. La función $z(x) = \cos(\sqrt{q_0}x - \alpha)$ es solución esta ecuación. La función z tiene ceros en $k\frac{\pi}{\sqrt{q_0}} + \alpha$, $k = 1, 2, \dots$. Si $[a, b]$ es cualquier intervalo de longitud $\frac{\pi}{\sqrt{q_0}}$, podemos elegir $\alpha = a$ y entonces b será $\frac{\pi}{\sqrt{q_0}} + \alpha$. Por consiguiente y tiene un cero en $[a, b]$. \square

Corolario 5.1.3 Supongamos que $q(x) \geq (1 + \epsilon)/4x^2$, para $x > 0$. Entonces toda solución de $y'' + q(x)y = 0$ tiene infinitos ceros en $(0, +\infty)$. Más aún, hay una sucesión de ceros tendiendo a infinito y otra tendiendo a cero.

Dem. En la ecuación

$$\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{1+\epsilon}{4x^2}z = 0, \quad (5.6)$$

hagamos el cambio de variable dependiente $z = y\sqrt{x}$. Primero computemos las derivadas

$$\frac{dz}{dx} = \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{2}y + x^{\frac{1}{2}}\frac{dy}{dx}$$

y

$$\frac{d^2z}{dx^2} = -\frac{x^{-\frac{3}{2}}}{4}y + x^{-\frac{1}{2}}\frac{dy}{dx} + x^{\frac{1}{2}}\frac{d^2y}{dx^2} \quad (5.7)$$

Sustituyendo (5.7) y $z = y\sqrt{x}$ en (5.6) obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d^2z}{dx^2} + \frac{1+\epsilon}{4x^2}z \\ &= -\frac{x^{-\frac{3}{2}}}{4}y + x^{-\frac{1}{2}}\frac{dy}{dx} + x^{\frac{1}{2}}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1+\epsilon}{4x^2}x^{\frac{1}{2}}y \\ &= \boxed{\frac{\epsilon}{4}x^{-\frac{3}{2}}y + x^{-\frac{1}{2}}\frac{dy}{dx} + x^{\frac{1}{2}}\frac{d^2y}{dx^2}}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Ahora cambiemos la variable independiente por $t = \ln x$. Entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \frac{dy}{dt} = \boxed{e^{-t} \frac{dy}{dt}}. \quad (5.9)$$

y

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \left(\frac{d}{dx} e^{-t} \right) \frac{dy}{dt} + e^{-t} \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dt} \right) \\ &= e^{-t} \left(\frac{-1}{x} \right) \frac{dy}{dt} + e^{-t} \frac{d^2y}{dt^2} \frac{1}{x} \\ &= -e^{-2t} \frac{dy}{dt} + e^{-2t} \frac{d^2y}{dt^2} \\ &= \boxed{e^{-2t} \left(-\frac{dy}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2} \right)}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Sustituyendo (5.9) y (5.10) y $x = e^t$ en (5.8)

$$0 = \frac{\epsilon}{4}e^{-\frac{3}{2}t}y + e^{-\frac{3}{2}t}\frac{dy}{dt} + e^{-\frac{3}{2}t} \left(-\frac{dy}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2} \right) = \frac{\epsilon}{4}e^{-\frac{3}{2}t}y + e^{-\frac{3}{2}t}\frac{d^2y}{dt^2}$$

Dividiendo por $e^{-\frac{3}{2}t}$ vemos que y resuelve la ecuación del oscilador armónico

$$\boxed{\frac{\epsilon}{4}y + \frac{d^2y}{dt^2} = 0}. \quad (5.11)$$

Confirmemos los cálculos con SymPy

```
>>> from sympy import *
2>>> t=symbols('t')
3>>> y=Function('y')(t)
4>>> x=symbols('x')
5>>> z=y.subs(t,ln(x))*sqrt(x)
6>>> epsilon=symbols('epsilon')
>>> eq=z.diff(x,2)+(1+epsilon)/4*x**2*z
```

Obtenemos

$$\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\epsilon}{4} + \frac{1}{4} \right) y(\log(x)) + \frac{1}{4x^{\frac{3}{2}}} \left(-y(\log(x)) + 4 \frac{d^2}{d\xi_1^2} y(\xi_1) \Big|_{\xi_1=\log(x)} \right)$$

```
>>> eq1=(eq**x***(3.0/2)).subs(ln(x),t).simplify()
>>> eq1
```

$$\frac{\epsilon}{4} y(t) + \frac{d^2}{d\xi_1^2} y(\xi_1) \Big|_{\xi_1=t}$$

Continuando con la demostración, observemos que como las soluciones de la ecuación del oscilador armónico (5.11) tienen infinitos ceros de la forma $k\pi + \alpha$, para $k \in \mathbb{Z}$ y para algún $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $z(x) = \sqrt{x}y(\ln(x))$ va a tener infinitos de la forma $e^{k\pi+\alpha}$.

Sea ahora y solución de $y'' + q(x)y = 0$. Si aplicamos el Teorema de Comparación de Sturm con $q_2(x) = \frac{1+\epsilon}{4x^2}$ y $q_1 = q$. Deducimos que entre los números $e^\alpha(e^\pi)^k$ y $e^\alpha(e^\pi)^{k+1}$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{Z}$, hay siempre un cero de y , digamos $e^\alpha(e^\pi)^k < x_{k,\alpha} < e^\alpha(e^\pi)^{k+1}$. Ahora tomando $\alpha = 0$ y $k \rightarrow \infty$ obtenemos una sucesión $x_{k,0}$, $k = 1, 2, \dots$, de ceros tendiendo a infinito. Tomando $\alpha = 0$ y $k \rightarrow -\infty$ obtenemos la sucesión $x_{k,0}$, $k = -1, -2, \dots$, de ceros tendiendo a cero. \square

Corolario 5.1.4 Una solución a la ecuación de Bessel (5.3) tiene infinitos ceros en $(0, +\infty)$ que forman una sucesión x_n tal que $x_{n+1} - x_n \rightarrow \pi$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Dem. Vamos a utilizar la ecuación (5.4) cuyas soluciones u tienen los mismos ceros que las respectivas de (5.3). Fijemos una de estas soluciones $u(x)$. Vamos a distinguir tres casos.

Caso $a = \frac{1}{2}$ En este caso la ecuación se reduce a la ecuación del oscilador armónico $u'' + u = 0$ y la afirmación es ya conocida. **Caso $a < \frac{1}{2}$** En esta situación $1 + \frac{1-4a^2}{4x^2} > 1$ en $(0, +\infty)$. Luego por el Teorema de Comparación de Sturm, entre dos ceros de la solución $z(x) = \operatorname{sen}(x - \alpha)$ de la ecuación $z'' + z = 0$ tenemos un cero de u . Como α es arbitrario, esto implica que u tiene infinitos ceros que distan entre sí menos de π . Ahora como $(1-4a^2)/4x^2 \rightarrow 0$, cuando $x \rightarrow \infty$, para todo $\epsilon > 0$ existe $x_0 > 0$ tal que $(1-4a^2)/4x < \epsilon$, para $x \geq x_0$. Entonces en $[x_0, +\infty)$ podemos usar el Teorema de comparación de Sturm, con $q_2(x) = 1 + (1-4a^2)/4x^2$ y $q_1(x) = 1 + \epsilon$, $y_2(x) = u(x)$ e $y_1(x) = \operatorname{sen}(\sqrt{1+\epsilon}x - \alpha)$, que es solución de $y'' + (1+\epsilon)y = 0$. Concluimos que entre dos ceros de u hay siempre uno de y_1 . Debe ocurrir entonces que dos ceros sucesivos de u en $[x_0, +\infty)$ distan en más de $\pi/\sqrt{1+\epsilon}$. De lo contrario, si a y b son ceros de u y $b-a < \pi/\sqrt{1+\epsilon}$, entonces para $\alpha = \sqrt{1+\epsilon}a$, la función $y_1(x) = \operatorname{sen}(\sqrt{1+\epsilon}x - \alpha)$ satisface $y_1(a) = \operatorname{sen}0 = 0$. Además el cero de y_1 inmediato posterior al cero a es $a + \pi/\sqrt{1+\epsilon}$ que es mayor que b . Por consiguiente entre $(a, a + \pi/\sqrt{1+\epsilon})$ (y de allí en (a, b)) y_1 no se anula, contradiciendo esto el Teorema de Comparación de Sturm.

Caso $a > \frac{1}{2}$ Es esencialmente muy similar y queda como **ejercicio**. \square

Ahora vamos a extender el Teorema de Comparación de Sturm a ecuaciones que, sin ser la ecuación general lineal de segundo orden, son más generales que (5.2). Concretamente, supongamos que $p(x)$ es una función diferenciable y $q(x)$ es continua en un intervalo I , entonces consideraremos ecuaciones del tipo

$$(p(x)y'(x))' + q(x)y(x) = 0. \quad (5.12)$$

Lema 5.1.1 (Identidad de Picone) Supongamos y, z dos veces diferenciables en I con $z(x) \neq 0$ en I , y p_0, p_1 diferenciables en I . Entonces

$$\left[\frac{y}{z} (zp_0y' - yp_1z') \right]' = y(p_0y')' - \frac{y^2}{z}(p_1z')' + (p_0 - p_1)y'^2 + p_1 \left(y' - \frac{y}{z}z' \right)^2 \quad (5.13)$$

Dem.

```

x=var('x')
y,z,p0,p1=symbols('y,z,p0,p1',cls=Function)
eq1=(y(x)/z(x)*(z(x)*p0(x)*y(x).diff(x)-y(x)*p1(x)*z(x).diff(x))).diff()
eq2=y(x)*(p0(x)*y(x).diff(x)).diff(x)-y(x)**2/z(x)*(p1(x)*z(x).diff(x)).diff(x)
    )+\
(p0(x)-p1(x))*(y(x).diff(x))**2+p1(x)*(y(x).diff(x)-y(x)/z(x)*z(x).diff(x))**2
eq1=eq1.expand()
eq2=eq2.expand()
eq1==eq2
True

```

□

Teorema 5.1.4 (Teorema de comparación de Sturm-Picone) Sean $p_i, i = 1, 2$, diferenciables y $q_i, i = 1, 2$, continuas sobre I , con $0 < p_1(x) \leq p_0(x), q_0(x) \leq q_1(x)$ en I . Supongamos $y_i, i = 1, 2$, soluciones no triviales de las ecuaciones

$$(p_i(x)y'_i(x))' + q_i(x)y_i = 0, \quad i = 1, 2 \quad (5.14)$$

respectivamente. Entonces entre ceros consecutivos de y_0 hay uno de y_1 , a menos que $p_0 \equiv p_1, q_0 \equiv q_1$ y que las funciones y_0 e y_1 sean linealmente dependientes.

Dem. Supongamos a y b ceros consecutivos de y_0 y que $y_1 \neq 0$ en (a, b) . Aplicando la identidad de Picone, con $y = y_0, z = y_1$, y las ecuaciones (5.14), que permiten reemplazar $(p_i y'_i)'$ por $-q_i y_i$ en (5.13). Obtenemos

$$\left[\frac{y_0}{y_1} (y_1 p_0 y'_0 - y_0 p_1 y'_1) \right]' = (q_1 - q_0)y_0^2 + (p_0 - p_1)y_0'^2 + p_1 \left(y'_0 - \frac{y_0}{y_1}y'_1 \right)^2$$

Ahora integramos esta desigualdad entre a y b , al ser estos puntos ceros de y_0 obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b \left[\frac{y_0}{y_1} (y_1 p_0 y'_0 - y_0 p_1 y'_1) \right]' dx \\ &= \int_a^b \left[(q_1 - q_0)y_0^2 + (p_0 - p_1)y_0'^2 + p_1 \left(y'_0 - \frac{y_0}{y_1}y'_1 \right)^2 \right] dx \end{aligned}$$

Como por hipótesis el integrando es una función no negativa, entonces debe ser la función idénticamente nula y de allí cada término que lo compone es la función nula. Como $y_i, i = 1, 2$, son no triviales, debemos tener que $p_0 \equiv p_1, q_0 \equiv q_1$ y que $W(y_0, y_1) = -(y_1 y'_0 - y_0 y'_1) = 0$, es decir y_0 e y_1 son linealmente independientes. □

6 Métodos de desarrollo en serie de potencias y en serie de Frobenius

6.1 Series de potencias

En esta sección recordamos algunos conceptos y teoremas sobre series de potencias. Dado que este tema es motivo de un estudio más profundo en otras materias de la licenciatura en matemática omitimos algunas demostraciones.

6.1.1 Definición

Definición 6.1.1 Una serie de potencias es una serie de la forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

donde $a_n, n = 0, 1, \dots, z_0$ y z son elementos de \mathbb{C} .

Estamos interesados en determinar los valores de z para los cuales una serie converge.

Ejemplo 6.1.1 La serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n,$$

es una serie de potencias. Aquí $a_n = 1, n = 0, 1, \dots$ y $z_0 = 0$. Esta serie converge para $|z| < 1$ a

$$\frac{1}{1-z}$$

y no converge para cualquier otro valor de $z \in \mathbb{C}$.

Ejemplo 6.1.2 Supongamos $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, donde I es un intervalo abierto $I = (a, b)$ y que f tiene derivadas de todo orden en $z_0 \in I$. Entonces es posible construir la serie de Taylor de f en z_0 que es una serie de potencias. Recordemos que esta serie es

$$S(f, z_0, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n.$$

6.1.2 Límites superior e inferior

Definición 6.1.2 Dada una sucesión de números reales x_n , consideramos una nueva sucesión:

$$A_n = \sup\{x_n, x_{n+1}, \dots\}$$

La nueva sucesión de reales A_n es no creciente ($A_n \geq A_{n+1}$), luego tiene un límite (puede ser $\pm\infty$). A este límite lo llamamos el *límite superior de x_n* . Lo denotamos por $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$. Es decir:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} \{x_n, x_{n+1}, \dots\}.$$

Tomando ínfimo en lugar de supremo conseguimos el *límite inferior* (\liminf).

Ejemplo 6.1.3 Si $x_n = (-1)^n$, entonces

$$\{x_n, x_{n+1}, \dots\} = \{\pm 1, \mp 1, \pm 1, \dots\}.$$

El supremo de este conjunto es para todo n igual a 1 y el ínfimo igual a -1. Luego $\liminf x_n = -1$ y $\limsup x_n = 1$.

Ejemplo 6.1.4 Si $x_n = 1/n$, si n es par y $x_n = 1$ si n es impar, entonces el conjunto

$$\{x_n, x_{n+1}, \dots\}$$

tiene por supremo 1 y el ínfimo igual a 0. Luego $\liminf x_n = 0$ y $\limsup x_n = 1$.

Teorema 6.1.1 (Propiedades) Sea x_n e y_n dos sucesiones de números reales, entonces:

1. El $\limsup x_n$ y el $\liminf x_n$ existen si se permite que $\pm\infty$ sean sus posibles valores.
2. $\liminf x_n \leq \limsup x_n$.
3. $\liminf x_n = \limsup x_n$ si y solo si el $\lim x_n$ existe. En este caso todos los límites coinciden.
4. $\liminf(x_n + y_n) \geq \liminf x_n + \liminf y_n$.
5. $\limsup(x_n + y_n) \leq \limsup x_n + \limsup y_n$

6.1.3 Radio de convergencia

Definición 6.1.3 Dada la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n,$$

definimos el *radio de convergencia* R de la siguiente forma:

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}.$$

Ejemplo 6.1.5 La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n,$$

tiene radio de convergencia:

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} 1^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1^{1/n} = 1$$

Luego $R = 1$.

Ejemplo 6.1.6 La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{M}\right)^n z^n,$$

tiene radio de convergencia:

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{1}{M} \right)^n \right)^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{1}{M} \right)^n \right)^{1/n} = \frac{1}{M}$$

Luego $R = M$.

Ejemplo 6.1.7 Fijemos $M > 0$ y n un natural tal que $[n/2] > M$ (aquí $[x]$ es la parte entera de x). Entonces, como $n - [n/2] \geq [n/2] > M$

$$\begin{aligned} n! &= n(n-1) \cdots 1 > n(n-1) \cdots (n-[n/2]) \\ &> \underbrace{M \cdots M}_{[n/2]-\text{veces}} \\ &\geq M^{[n/2]} \\ &> M^{n/3} \end{aligned}$$

Luego

$$\frac{1}{R} := \limsup_{n \rightarrow \infty} (1/n!)^{1/n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{M^{n/3}} \right)^{1/n} = \frac{1}{\sqrt[3]{M}}$$

Como M es arbitrario, haciendo $M \rightarrow \infty$ vemos que el radio de convergencia de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

Teorema 6.1.2 upongamos que la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

tiene radio de convergencia $R > 0$. Entonces:

1. Si $|z - z_0| < R$, la serie converge absolutamente en z .
2. Si $|z - z_0| > R$, la serie diverge.
3. Si $|z - z_0| = R$, no se afirma nada.

Dem. Se puede suponer sin perdida de generalidad $z_0 = 0$. Supongamos $0 < R < \infty$. Sea $L = 1/R$ y tomemos $\epsilon > 0$ pequeño. Como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \{|a_n|^{1/n}, |a_{n+1}|^{1/(n+1)}, \dots\} = L$$

para n_0 suficientemente grande

$$\sup \{|a_n|^{1/n}, |a_{n+1}|^{1/(n+1)}, \dots\} < L + \epsilon.$$

para $n \geq n_0$. Así

$$|a_n|^{1/n} < L + \epsilon \quad \text{para } n \geq n_0.$$

Elijamos $0 < r < 1/(L + \epsilon) < 1/L = R$. Si $|z| < r$ entonces

$$|a_n| |z|^n < (L + \epsilon)^n r^n \quad \text{para } n \geq n_0.$$

Pero $r(L + \epsilon) < 1$. La desigualdad de arriba y el teorema de comparación para series (notar que el miembro de la derecha forma una serie geométrica) implican que la serie converge absolutamente para este z . Esto implica la convergencia para cualquier $|z| < R$, ya que si $|z| < R = 1/L$ existe $\epsilon > 0$ lo suficientemente chico para que $|z| < 1/(L + \epsilon)$. Por el resultado ya demostrado la serie converge absolutamente para este z . \square

Ejercicio 6.1.1 demostrar los casos $R = 0$, $R = \infty$ y el segundo inciso.

Teorema 6.1.3 a función

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n,$$

es diferenciable dentro en $\{z : |z - z_0| < R\}$. Además

$$f'(z) = g(z) := \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1},$$

teniendo esta serie el mismo radio de convergencia que el de f .

Dem. Nuevamente supondremos $z_0 = 0$. La afirmación sobre el radio de convergencia es consecuencia de que $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/n} = 1$. Como el radio R' de convergencia de g es:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R'} &= \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}(n+1)|^{1/(n+1)} \\ &\stackrel{\text{Ejercicio}}{=} \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}|^{1/(n+1)} \lim_{n \rightarrow \infty} |(n+1)|^{1/(n+1)} \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}|^{1/(n+1)} = \frac{1}{R} \end{aligned}$$

Ahora veamos que $f' = g$. Sea $0 < r < R$, $|z_0| < r$ y $N \in \mathbb{N}$. Pongamos:

$$f(z) = S_N(z) + E_N(z),$$

$$S_N(z) = \sum_{n=0}^N a_n z^n \quad y \quad E_N(z) = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n z^n$$

Tomemos $|h| < r - |z_0|$, así $|z_0 + h| < r$. Tenemos

$$\begin{aligned} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} - g(z_0) &= \frac{S_N(z_0 + h) - S_N(z_0)}{h} - S'_N(z_0) \\ &\quad + S'_N(z_0) - g(z_0) \\ &\quad + \frac{E_N(z_0 + h) - E_N(z_0)}{h} \end{aligned}$$

Ahora si $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned} \left| \frac{E_N(z_0 + h) - E_N(z_0)}{h} \right| &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \left| \frac{(z_0 + h)^n - z_0^n}{h} \right| \\ &= \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| (|z_0|^{n-1} + |z_0|^{n-2}h + \cdots + h^{n-1}) \\ &\leq 2 \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| nr^{n-1} < \epsilon \end{aligned}$$

Para N suficientemente grande. Además como $S'_N(z) \rightarrow g(z)$ cuando $N \rightarrow \infty$ podemos elegir, a su vez, N suficientemente grande para que

$$|S'_N(z_0) - g(z_0)| < \epsilon$$

Fijemos un N que satisfaga las condiciones anteriores. Ahora podemos encontrar $\delta > 0$ para que $|h| < \delta$ cumpla que

$$\left| \frac{S_N(z_0 + h) - S_N(z_0)}{h} - S'_N(z_0) \right| < \epsilon.$$

Esto muestra que $f'(z_0) = g(z_0)$ y por consiguiente f es derivable. \square

Corolario 6.1.1 Una serie de potencias es infinitamente diferenciable. Las sucesivas derivadas se obtienen derivando término a término la serie. El radio de convergencia se conserva.

Ejemplo 6.1.8 Hemos visto que la serie:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

tiene radio de convergencia infinito y por ende converge en \mathbb{C} . Ahora vemos que

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

Lo que nos dice que f resuelve la simple ecuación diferencial $f'(z) = f(z)$. La misma ecuación es resuelta por $g(z) = e^z$. Además $f(0) = g(0) = 1$. Por el Teorema de existencia y unicidad $f(z) = g(z)$ para todo z . Hemos probado la importante fórmula.

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n \tag{6.1}$$

6.1.4 Funciones analíticas

Definición 6.1.4 Una función $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ se dirá analítica si para cada $z_0 \in \Omega$, existe $R > 0$ y $a_n \in \mathbb{C}$, tal que:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad \text{para } |z - z_0| < R$$

Ejercicio 6.1.2 Si f es analítica tenemos la siguiente fórmula

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

para los coeficientes a_n .

Teorema 6.1.4 (Operaciones entre series de potencias) Supongamos que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ y $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_0)^n$ son series de potencias con radio de convergencia mayor o igual a $R > 0$. Entonces $f + g$ y fg son funciones analíticas que tienen por desarrollo en serie

$$(f + g)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)(z - z_0)^n$$

$$(fg)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) (z - z_0)^n,$$

y los radios de convergencia de las series anteriores es, al menos, R . Si $g(z) \neq 0$ para $|z - z_0| < R$ entonces $f(z)/g(z)$ es analítica y se desarrolla por una serie de radio de convergencia al menos R . Es posible expresar los coeficientes del cociente en términos de los coeficientes del dividendo y divisor, pero no nos detendremos en ello.

6.2 Solución de EDO mediante series de potencias. Método coeficientes indeterminados

6.2.1 Método coeficientes indeterminados

Dada una EDO

$$(1) \quad F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (6.2)$$

queremos desarrollar en series de potencias la solución general a esta ecuación. El método que estudiaremos se denomina *método de los coeficientes indeterminados*. Consiste en proponer el desarrollo en serie de la solución

$$y(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots$$

reemplazar $y(x)$ por este desarrollo en la ecuación (1) y tratar de resolver la ecuación resultante para los coeficientes (indeterminados) a_n . El método suele funcionar en algunas ecuaciones. Desarrollaremos un ejemplo.

Ejemplo 6.2.9 Hallar el desarrollo en serie de la solución del siguiente pvi

$$\begin{cases} y' \\ y(0) \end{cases} = \begin{cases} y \\ 1 \end{cases}$$

La solución, es bien sabido, es $y(x) = e^x$, pero pretendemos reencontrarla por el método expuesto. Escribimos

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$$

$$y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + (n+1)a_{n+1}x^n + \dots$$

La igualdad $y' = y$ implica que

$$\begin{aligned} a_1 &= a_0 \\ a_2 &= \frac{a_1}{2} \\ a_3 &= \frac{a_2}{3} \\ &\vdots \\ a_{n+1} &= \frac{a_n}{n+1} \end{aligned}$$

Si iteramos la fórmula $a_{n+1} = a_n/(n + 1)$, obtenemos

$$a_n = \frac{1}{n}a_{n-1} = \frac{1}{n(n-1)}a_{n-2} = \cdots = \frac{1}{n(n-1)\cdots 1}a_0 = \frac{a_0}{n!}.$$

Pero $a_0 = y(0) = 1$. Luego

$$a_n = \frac{1}{n!} \quad (6.3)$$

Vemos que la solución es

$$y(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720} + \cdots \quad (6.4)$$

6.2.2 Relaciones de recurrencia

La expresión $a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1}$ es un ejemplo de relación de recurrencia.

Definición 6.2.5 Una relación de recurrencia para una sucesión b_n de números reales es una sucesión de funciones $f_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que relaciona b_{n+1} con los términos anteriores de la sucesión por medio de la expresión

$$b_{n+1} = f_n(b_1, \dots, b_n). \quad (6.5)$$

Resolver una relación de recurrencia es encontrar una fórmula explícita de b_n como función de n .

Hay técnicas y métodos para resolver relaciones de recurrencia que guardan analogías con técnicas y métodos de resolver ecuaciones diferenciales. No vamos a desarrollar este importante tema en este curso, sugerimos la correspondiente wiki en la wikipedia. Sólo agregamos que SymPy resuelve relaciones recurrentes a través del comando `rsolve`.

Ejemplo 6.2.10 Resolvamos con SymPy la sucesión de Fibonacci $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$.

```

1 from sympy import *
2 n=symbols('n',integer=True)
3 y = Function('y')
4 f=Equality(y(n),y(n-1)+y(n-2))
5 sol=rsolve(f,y(n))
```

El resultado es

$$a_n = C_0 \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \right)^n + C_1 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \right)^n \quad (6.6)$$

Las constantes arbitrarias C_0 y C_1 aparecen porque una relación de recurrencia no tiene una única solución. Se dice que una relación de recurrencia tiene orden k o es de k -términos si el coeficiente a_n se expresa en función de los k anteriores. En general la solución general de una relación de recurrencia de k -términos tiene k constantes arbitrarias. Por consiguiente, si queremos una única solución debemos tener k relaciones extras. Usualmente esto se consigue dando los valores de los k -primeros términos a_0, \dots, a_k . Por ejemplo, en la sucesión de Fibonacci si pedimos $a_0 = a_1 = 1$ entonces los primeros números de Fibonacci son

$$[1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55]$$

6.2.3 Serie binomial

Se puede utilizar el método de coeficientes indeterminados para encontrar desarrollos en serie de una función f . La técnica consiste en encontrar un pvi que satisfaga f y le aplicamos el método de coeficientes indeterminados a ese pvi.

Ejemplo 6.2.11 Encontrar el desarrollo en serie de la función

$$y(x) = (1 + x)^p \quad p \in \mathbb{R}$$

La función $y(x)$ resuelve el pvi $(1 + x)y'(x) = py$, $y(0) = 1$. apliquemos el método de coeficientes indeterminados a este pvi. Como

$$\begin{aligned} y &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots \\ y' &= a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + (n+1)a_{n+1}x^n + \cdots \end{aligned}$$

Tenemos

$$\begin{aligned} py &= pa_0 + pa_1x + pa_2x^2 + \cdots + pa_nx^n + \cdots \\ (1 + x)y' &= a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + (n+1)a_{n+1}x^n + \cdots \\ &\quad + a_1x + 2a_2x^2 + 3a_3x^3 + \cdots + na_nx^n + \cdots \\ 0 &= (1 + x)y' - py = (a_1 - pa_0) + (a_1 + 2a_2 - pa_1)x + \cdots + ((n+1)a_{n+1} + na_n - pa_n)x^n + \cdots \end{aligned}$$

Tenemos la relación

$$a_{n+1} = \frac{(p-n)}{n+1}a_n.$$

Que es una relación de recurrencia de un sólo término. Estas relaciones se resuelven iterando la relación de manera sucesiva de modo de relacionar a_n con a_0

$$a_n = \frac{(p-n+1)}{n}a_{n-1} = \frac{(p-n+1)(p-n+2)}{n(n-1)}a_{n-2} = \cdots = \frac{(p-n+1)(p-n+2)\cdots p}{n!}a_0.$$

Como $a_0 = y(0) = 1$ vemos que

$$a_n = \frac{(p-n+1)(p-n+2)\cdots p}{n!}. \quad (6.7)$$

Si $p \in \mathbb{N}$ entonces $a_n = 0$ para $n > p$. Esto es claro, por otro lado, ya que en este caso $(1 + x)^p$ es un polinomio. Por la fórmula del binomio de Newton los coeficientes para $p \in \mathbb{N}$ no son más que los coeficientes binomiales

$$a_n = \binom{p}{n}$$

Cuando $p \in \mathbb{R}$ aún vamos a seguir denominado a a_n , dado por la fórmula (6.7), coeficiente binomial. La serie resultante se llama la serie binomial. Cuando $p \in \mathbb{R} - \mathbb{N}$ es una serie infinita y no un polinomio. Notar que para p no entero positivo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|p-n|}{|n+1|} = 1$$

Luego la serie tiene radio de convergencia 1. Hemos demostrado así que vale la siguiente fórmula, que es una generalización de la fórmula binomial de Newton

$$(1 + x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2!}x^2 + \cdots = 1 + \binom{p}{1}x + \binom{p}{2}x^2 + \cdots \quad (6.8)$$

Esta importante serie se denomina serie binomial.

6.2.4 Oscilador armónico

Ejemplo 6.2.12 Consideremos la ecuación

$$y'' + \omega^2 y = 0.$$

Esta es una ecuación de segundo orden. Veamos si el método de coeficientes indeterminados nos lleva a la solución. Se tiene

$$\begin{aligned} \omega^2 y &= \omega^2 a_0 + \omega^2 a_1 x + \omega^2 a_2 x^2 + \cdots + \omega^2 a_n x^n + \cdots \\ y'' &= 2a_2 + 2 \cdot 3a_3 x + \cdots + (n+1)(n+2)a_{n+2}x^n + \cdots \\ \hline 0 = y'' + \omega^2 y &= (\omega^2 a_0 + 2a_2) + (\omega^2 a_1 + 2 \cdot 3a_3)x + \cdots \\ &\quad + (\omega^2 a_n + (n+1)(n+2)a_{n+2})x^n + \cdots \end{aligned}$$

Encontramos la relación de recurrencia de dos términos

$$a_{n+2} = -\frac{\omega^2 a_n}{(n+1)(n+2)}. \quad (6.9)$$

Notar que en este caso a_1 y, obviamente, a_0 no se relacionan con ningún coeficiente anterior. Por este motivo es de esperar que podamos elegir de manera arbitraria a_0 y a_1 . Esto está de acuerdo con el hecho que remarcamos antes de que en una relación de recurrencia de dos términos aparecen dos constantes arbitrarias y también está de acuerdo con que la solución general de una ecuación de segundo orden tiene dos constantes arbitrarias. En este caso resolvemos la relación de recurrencia relacionando a_n con a_0 cuando n es impar y con a_1 cuando es par. Concretamente si $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$,

$$a_{2k} = -\frac{\omega^2}{2k(2k-2)} a_{2k-2} = \cdots = (-1)^k \frac{\omega^{2k}}{(2k)!} a_0.$$

En cambio si $n = 2k+1$ es impar

$$a_{2k+1} = -\frac{\omega^2}{(2k+1)2k} a_{2k-1} = \cdots = (-1)^k \frac{\omega^{2k}}{(2k+1)!} a_1.$$

Agrupando los términos pares y los impares de la serie de potencias resultante queda

$$\begin{aligned} y(x) &= a_0 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k)!} (\omega x)^{2k} + \frac{a_1}{\omega} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} (\omega x)^{2k+1} \\ &= a_0 \cos \omega x + \frac{a_1}{\omega} \sin \omega x \end{aligned} \quad (6.10)$$

La última igualdad es conocida de las asignaturas de análisis. Es fácil verificar, lo dejamos de ejercicio, que las series involucradas tienen radio de convergencia infinito.

6.2.5 Ecuación de Legendre. Primera aproximación

Ejemplo 6.2.13 Consideremos la ecuación de Legendre.

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + p(p+1)y = 0, \quad (6.11)$$

donde $p > 0$. Esta ecuación aparece en muchas aplicaciones, por ejemplo en muchos problemas que involucran funciones definidas en esferas, como es el caso de los modos normales de vibración de una esfera y en problemas de potenciales esféricos

$$\begin{aligned}
 p(p+1)y &= p(p+1)a_0 + p(p+1)a_1x + p(p+1)a_2x^2 + \cdots + p(p+1)a_nx^n + \cdots \\
 -2xy' &= -2a_1x - 4a_2x^2 - 6a_3x^3 + \cdots - 2na_nx^n + \cdots \\
 (1-x^2)y'' &= 2a_2 + 2 \cdot 3a_3x + \cdots + (n+1)(n+2)a_{n+2}x^n + \cdots \\
 &\quad - 2a_2x^2 - 2 \cdot 3a_3x^3 - \cdots - (n-1)na_nx^n - \cdots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 0 = (1-x^2)y'' - 2xy + p(p+1)y &= (p(p+1)a_0 + 2a_2) + (p(p+1)a_1 - 2a_1 2 \cdot 3a_3)x + \cdots \\
 &\quad + ((p(p+1) - n(n+1))a_n + n(n+1)a_{n+2})x^n + \cdots
 \end{aligned}$$

Obtenemos la relación de recurrencia

$$a_{n+2} = -\frac{(p-n)(p+n+1)}{(n+1)(n+2)}a_n \quad (6.12)$$

Ahora vamos a dividir la serie en los términos pares e impares

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} x^{2k+1}$$

A cada una de estas series le podemos aplicar el criterio de la razón usando la fórmula de recurrencia de arriba. Por ejemplo para los términos pares

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_{2k+2}x^{2k+2}|}{|a_{2k}x^{2k}|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|p_0 - 2k||p_0 + 2k + 1|}{(2k+1)(2k+2)} |x|^2 = |x|^2$$

De modo que la serie tiene radio de convergencia 1. La misma situación ocurre con la serie de términos impares. Esto muestra que la serie en su conjunto también tiene radio de convergencia igual a 1. Era previsible que el radio de convergencia no fuese mayor a 1, pues la forma explícita de la ecuación de la ecuación de Legendre es

$$y'' - \frac{2x}{(1-x^2)}y' + \frac{p(p+1)}{(1-x^2)}y = 0.$$

Se observa que 1 y -1 son puntos singulares de la ecuación.

Podemos relacionar cualquier coeficiente de índice par a_{2k} con el a_0 y cualquiera con índice impar a_{2k+1} con el a_1 .

$$a_{2n} = \frac{(p+1)(p+3) \cdots (p+2n-1) \times p(p-2) \cdots (p-2n+2)}{(2n)!} a_0$$

y

$$a_{2n+1} = \frac{(p+2)(p+4) \cdots (p+2n) \times (p-1)(p-3) \cdots (p-2n+1)}{(2n+1)!} a_1$$

Podemos elegir a_0 y a_1 de manera arbitraria (esto está de acuerdo con que en una ecuación de orden 2 aparecen 2 constantes de integración) y por las relaciones anteriores deducir el valor de los restantes a_n .

Un caso especial se plantea cuando $p \in \mathbb{N}$. En esa situación vemos que infinitos de los a_n resultan iguales a cero. De hecho una de las series, la de términos impares o la de términos pares acorde a que p sea par o impar respectivamente, se truncan. Supongamos que esto ocurre con la serie de términos impares, es decir p es entero positivo impar. Si

ahora tomamos $a_0 = 0$ toda la serie de términos pares se hará cero. Para a_1 elijo algún valor no nulo y esto me garantiza que los términos impares son no nulos hasta el término a_n , pero a partir de allí también se hacen cero. Es usual elegir a_1 para que $y(1) = 1$. Nos queda definida así una función polinómica que se denomina polinomio de Legendre y se denota por P_p . Cuando p es par hacemos una construcción análoga, quedando un polinomio P_p , con todas potencias pares, tal que $P_p(1) = 1$.

Los primeros polinomios de Legendre son:

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{3x^2}{2} - \frac{1}{2}$$

$$P_3(x) = \frac{5x^3}{2} - \frac{3x}{2}$$

$$P_4(x) = \frac{35x^4}{8} - \frac{15x^2}{4} + \frac{3}{8}$$

$$P_5(x) = \frac{63x^5}{8} - \frac{35x^3}{4} + \frac{15x}{8}$$

$$P_6(x) = \frac{231x^6}{16} - \frac{315x^4}{16} + \frac{105x^2}{16} - \frac{5}{16}$$

$$P_7(x) = \frac{429x^7}{16} - \frac{693x^5}{16} + \frac{315x^3}{16} - \frac{35x}{16}$$

$$P_8(x) = \frac{6435x^8}{128} - \frac{3003x^6}{32} + \frac{3465x^4}{64} - \frac{315x^2}{32} + \frac{35}{128}$$

$$P_9(x) = \frac{12155x^9}{128} - \frac{6435x^7}{32} + \frac{9009x^5}{64} - \frac{1155x^3}{32} + \frac{315x}{128}$$

Sus gráficas sobre el intervalo $[-1, 1]$ se muestran en la figura 6.2.1.

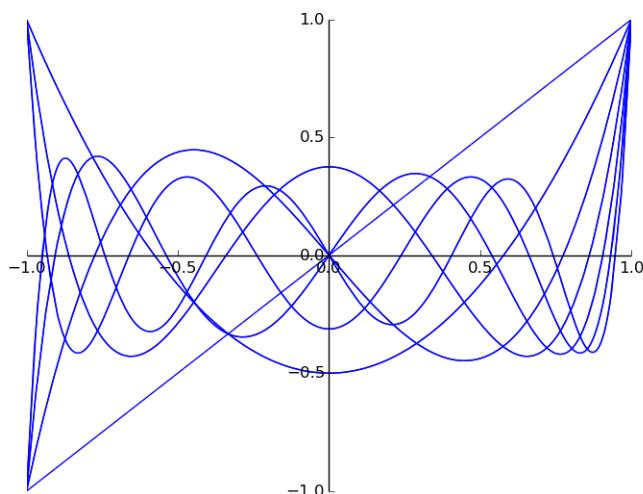


Figura 6.2.1: Polinomios de Legendre hasta el orden 8

6.3 Teorema fundamental sobre puntos ordinarios

Definición 6.3.6 Dada la ecuación diferencial

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$$

donde p, q son funciones definidas en algún intervalo abierto I , diremos que $x_0 \in I$ es un *punto ordinario* de la ecuación si p y q son analíticas en x_0 . Un punto no ordinario se llama *singular*.

Ejemplo 6.3.14 En la ecuación del oscilador armónico

$$y'' + \omega^2 y = 0$$

todo punto es ordinario.

Ejemplo 6.3.15 En la ecuación de Legendre

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + p(p + 1)y = 0$$

1 y -1 son puntos singulares, otros valores de x son puntos ordinarios.

Antes de ir al Teorema más importante de esta sección vamos a enunciar un lema que nos resultará útil.

Lema 6.3.1 (Comparación) Supongamos que tenemos una relación de recurrencia

$$a_n = f_n(a_0, \dots, a_{n-1}) \quad n \geq 2 \quad (6.13)$$

donde las funciones f_n son crecientes respecto a sus todas las variables. Si la sucesión $\{a_n\}$ resuelve (6.13), la sucesión $\{b_n\}$ resuelve la desigualdad

$$b_n \leq f_n(b_0, \dots, b_{n-1}) \quad n \geq 2$$

y además vale que $b_0 \leq a_0$ y $b_1 \leq a_1$, entonces $b_n \leq a_n$ para todo $n = 2, 3, \dots$. En particular la afirmación se satisface cuando f_n es lineal con coeficientes positivos, es decir $f_n(a_0, \dots, a_{n-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k^n a_k$, con $\alpha_k^n \geq 0$ para $k = 0, \dots, n-1$.

Dem. Es muy sencilla y la dejamos de ejercicio (evidentemente hay que utilizar el principio de inducción). \square

Teorema 6.3.5 (Teorema Fundamental Sobre Puntos Ordinarios.) Sea x_0 un punto ordinario de la ecuación

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$$

y sean $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$. Existe una solución de la ecuación que es analítica en un entorno de x_0 y que satisface $y(x_0) = a_0$ e $y'(x_0) = a_1$. El radio de convergencia del desarrollo en serie de y es al menos tan grande como el mínimo de los radios de convergencia de los desarrollos en serie de p y q .

Dem. Supongamos, sin perder generalidad, que $x_0 = 0$. Consideremos que los desarrollos en serie de potencias de p y q ,

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \quad y \quad q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n. \quad (6.14)$$

Supongamos que ambas series convergen en $|x| < R$, para cierto $R > 0$. Vamos a

aplicar el método de coeficientes indeterminados. Tenemos

$$\begin{aligned}y &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots \\y' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}x^n = a_1 + 2a_2 x + \cdots + (n+1)a_{n+1}x^n + \cdots \\y'' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)a_{n+2}x^n = 2a_2 + 2 \cdot 3a_3 x + \cdots + (n+1)(n+2)a_{n+2}x^n + \cdots.\end{aligned}$$

Por el Teorema 6.1.4

$$\begin{aligned}q(x)y &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k q_{n-k} \right) x^n, \\p(x)y' &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n (k+1)a_{k+1}p_{n-k} \right) x^n.\end{aligned}$$

Sustituyendo estos, y los anteriores, desarrollos en la ecuación, obtenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ (n+1)(n+2)a_{n+2} + \sum_{k=0}^n a_k q_{n-k} + \sum_{k=0}^n (k+1)a_{k+1}p_{n-k} \right\} x^n.$$

De esta forma deducimos la ecuación de recurrencia que se satisface en una ecuación lineal general de segundo orden en un punto ordinario.

$$a_{n+2} = -\frac{\sum_{k=0}^n \{a_k q_{n-k} + (k+1)a_{k+1}p_{n-k}\}}{n(n+1)} \quad (6.15)$$

Dados los coeficientes a_0 y a_1 la relación de recurrencia determina los $a_n, n \geq 2$. Queda ver que la serie así definida tiene radio de convergencia al menos R .

Tomemos r tal que $0 < r < R$. Como las series (6.14) tienen radio de convergencia al menos R , convergen absolutamente para $x = r$. El criterio de convergencia de series conocido como criterio del resto implica que $p_n r^n, q_n r^n$ son sucesiones que tienden a 0. En particular están acotadas, y por ello existe $M > 0$ tal que

$$|p_n|r^n, |q_n|r^n \leq M.$$

Tomando módulo en (6.15) y usando las desigualdades de arriba concluimos

$$\begin{aligned}|a_{n+2}| &\leq \frac{M}{(n+1)(n+2)r^n} \sum_{k=0}^n (|a_k| + (k+1)|a_{k+1}|) r^k \\&\leq \frac{M}{(n+1)(n+2)r^n} \sum_{k=0}^n (|a_k| + (k+1)|a_{k+1}|) r^k + \frac{M|a_{n+1}|r}{(n+1)(n+2)}.\end{aligned}$$

En la última desigualdad se agregó un término en apariencia por capricho, pero este término nos servirá para complementar una expresión en el futuro. Definamos la sucesión b_n como la solución de la siguiente relación de recurrencia

$$b_{n+2} = \frac{M}{(n+1)(n+2)r^n} \sum_{k=0}^n (b_k + (k+1)b_{k+1}) r^k + \frac{Mb_{n+1}r}{(n+1)(n+2)}, \quad (6.16)$$

con las condiciones iniciales $b_0 = |a_0|$ y $b_1 = |a_1|$. Por el Lema 6.3.1 tenemos que $|a_n| \leq b_n$ para todo n . Aplicando (6.16) a $n-1$ en lugar de n

$$b_{n+1} = \frac{M}{n(n+1)r^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} (b_k + (k+1)b_{k+1}) r^k + \frac{Mb_nr}{n(n+1)}, \quad (6.17)$$

Multiplicando (6.16) por r y usando 6.17

$$\begin{aligned}
 rb_{n+2} &= \frac{M}{(n+1)(n+2)r^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} (b_k + (k+1)b_{k+1}) r^k \\
 &\quad + \frac{Mr(b_n + (n+1)b_{n+1})}{(n+1)(n+2)} + \frac{Mb_{n+1}r^2}{(n+1)(n+2)} \\
 &= \frac{n(n+1)b_{n+1} - Mb_nr}{(n+1)(n+2)} + \frac{Mr(b_n + (n+1)b_{n+1})}{(n+1)(n+2)} \\
 &\quad + \frac{Mb_{n+1}r^2}{(n+1)(n+2)} \\
 &= \frac{(n(n+1) + Mr(n+1) + Mr^2)}{(n+1)(n+2)} b_{n+1},
 \end{aligned}$$

Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|b_{n+2}x^{n+2}|}{|b_{n+1}x^{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n(n+1) + Mr(n+1) + Mr^2)}{(n+1)(n+2)} \frac{|x|}{r} = \frac{|x|}{r}.$$

Luego la serie $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ converge para $|x| < r$. Como $|a_n| \leq b_n$ la misma afirmación es cierta para $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Como $r < R$ fue elegido arbitrariamente, tenemos que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge en $|x| < R$. \square

6.4 Puntos singulares, método de Frobenius

6.4.1 Series de Frobenius

Definición 6.4.7 (Singularidades, Polos.) Sea f definida en un intervalo abierto I con valores en \mathbb{R} . Diremos que f posee un *punto singular* en $x_0 \in I$, si la función $(x - x_0)^k f(x)$ es analítica en un entorno de x_0 . Vale decir que $(x - x_0)^k f(x)$ se desarrolla en serie de potencias.

$$(x - x_0)^k f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n.$$

En consecuencia

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^{n-k} = \frac{a_0}{(x - x_0)^k} + \cdots + \frac{a_{k-1}}{(x - x_0)} + a_k + a_{k+1}(x - x_0) + \cdots.$$

Este tipo de desarrollo en serie es un caso particular de serie de Laurent.
Cuando el orden de un polo es 1 se lo denomina *punto singular simple*.

Definición 6.4.8 Un punto singular x_0 de la ecuación

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$$

se llama singular regular si $p(x)$ tiene un polo a lo sumo simple en x_0 y $q(x)$ tiene

un polo a lo sumo de orden 2 en x_0 . Es decir

$$(x - x_0)p(x) \quad y \quad (x - x_0)^2q(x)$$

son analíticas en x_0 .

Algunas de las ecuaciones más importantes de la Física-Matemática tienen puntos singulares regulares.

Ejemplo 6.4.16 1 y -1 son puntos singulares regulares de la ecuación de Legendre de orden p

$$y'' - \frac{2x}{1-x^2}y' + \frac{p(p+1)}{1-x^2}y = 0$$

Ejemplo 6.4.17 0 es un punto singular regular de la ecuación de Bessel de orden p

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{p^2}{x^2}\right)y = 0$$

El método de coeficientes indeterminados puede fallar en los puntos donde p y q tienen polos. En su lugar vamos a proponer otro tipo de desarrollo en serie. Lo vamos a motivar con un ejemplo.

Ejemplo 6.4.18 Consideremos la ecuación de Euler, para $p, q \in \mathbb{R}$

$$y'' + \frac{p}{x}y' + \frac{q}{x^2}y = 0$$

o equivalentemente

$$x^2y'' + pxy' + qy = 0$$

Aquí es fácil verificar que las funciones

$$P(x) := \frac{p}{x} \quad y \quad Q(x) := \frac{q}{x^2}$$

satisfacen que

$$\frac{Q' + 2PQ}{Q^{\frac{3}{2}}} \quad \text{es constante.}$$

Cuando se daba esta condición, el ejercicio 6 de la página 102 del libro de Simmons nos enseña que podemos reducir la ecuación a una ecuación con coeficientes constantes por medio del cambio de la variable independiente

$$z = \int \sqrt{Q} dx$$

En este caso, obviando las constantes, el cambio de variables que debemos hacer es

$$z = \ln(x)$$

Aquí asumimos $x > 0$. Seguramente, a esta altura del curso, el alumno ya hizo los cálculos que muestran que la ecuación de Euler se transforma, por medio del cambio de variables propuesto, en la ecuación a coeficientes constantes

$$y'' + (p-1)y' + qy = 0.$$

Cuya ecuación característica es

$$\lambda^2 + (p-1)\lambda + q = 0$$

Resolviendo esta ecuación

$$s_1 = -\frac{p-1}{2} - \frac{\sqrt{p^2 - 2p - 4q + 1}}{2} \quad y \quad s_2 = -\frac{p-1}{2} + \frac{\sqrt{p^2 - 2p - 4q + 1}}{2}.$$

Si $s_1 \neq s_2$ dos soluciones linealmente independientes son:

$$y_1(z) = e^{s_1 z} \quad y \quad y_2(z) = e^{s_2 z}$$

Si $s_1 = s_2$

$$y_1(z) = e^{s_1 z} \quad y \quad y_2(z) = ze^{s_1 z}$$

son soluciones linealmente independientes. Asumamos que las raíces s_1 y s_2 son reales, entonces como $z = \ln(x)$, las soluciones en términos de la variable x son

$$y_1(x) = x^{s_1} \quad y \quad y_2(x) = x^{s_2} \quad \text{para } s_1 \neq s_2$$

y

$$y_1(x) = x^{s_1} \quad y \quad y_2(x) = \ln(x)x^{s_1} \quad \text{para } s_1 = s_2$$

Estas funciones, a menos que s_1 y s_2 sean enteros positivos, ya no son analíticas en cero, pues una función analítica es derivable infinitas veces y claramente hay derivadas (o las mismas funciones si las raíces son negativas) de y_1 e y_2 que son discontinuas.

De modo que, como era de suponer, no podremos encontrar en general en un punto singular una solución analítica. Vamos a intentar flexibilizar nuestro método para incluir otro tipo de desarrollo en serie, que está inspirado en los resultados obtenidos para la ecuación de Euler.

Definición 6.4.9 A una expresión de la forma

$$y(x) = (x - x_0)^m (a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots),$$

donde $m \in \mathbb{R}$ y $a_0 \neq 0$, lo llamaremos Serie de Frobenius.

Las series de Frobenius no son series de potencias ni de Laurent ya que en ellas aparecen potencias no enteras.

El método de Frobenius consiste en proponer como solución de una ecuación diferencial una serie de Frobenius. Este método tiene éxito, por ejemplo, en los puntos singulares regulares de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden.

Ejemplo 6.4.19 En este ejemplo ilustramos el método de Frobenius. Consideremos la ecuación

$$y'' + \left(\frac{1}{2x} + 1\right)y' - \left(\frac{1}{2x^2}\right)y = 0. \quad (6.18)$$

Notar que $x = 0$ es regular singular. Desarrollaremos el método de Frobenius, primero "a mano" y por último con SymPy.

Proponemos como solución

$$y(x) = x^m \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+m}$$

y calculamos

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{2x^2}y &= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2}x^{m+n-2} = -\frac{a_0}{2}x^{m-2} - \frac{a_1}{2}x^{m-1} - \dots - \frac{a_{n+2}}{2}x^{m+n} - \dots \\
 y' &= \sum_{n=0}^{\infty} (m+n)a_n x^{m+n-1} \\
 &= ma_0 x^{m-1} + (m+1)a_1 x^m + \dots + (m+n+1)a_{n+1} x^{m+n} + \dots \\
 \frac{1}{2x}y' &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(m+n)a_n}{2} x^{m+n-2} \\
 &= \frac{ma_0}{2}x^{m-2} + \frac{(m+1)a_1}{2}x^{m-1} + \dots + \frac{(m+n+2)a_{n+2}}{2}x^{m+n} + \dots \\
 y'' &= \sum_{n=0}^{\infty} (m+n)(m+n-1)a_n x^{m+n-2} \\
 &= m(m-1)a_0 x^{m-2} + (m+1)ma_1 x^{m-1} + \dots \\
 &\quad + (m+n+2)(m+n+1)a_{n+2} x^{m+n} + \dots .
 \end{aligned}$$

Sumando las cuatro igualdades miembro a miembro y sustiyendo en (6.18)

$$\begin{aligned}
 0 &= \left(-\frac{1}{2} + \frac{m}{2} + m(m-1) \right) a_0 x^{m-2} \\
 &\quad + \left(-\frac{a_1}{2} + ma_0 + \frac{(m+1)a_1}{2} + (m+1)ma_1 \right) x^{m-1} + \dots \\
 &\quad + \left(-\frac{a_{n+2}}{2} + (m+n+1)a_{n+1} + \right. \\
 &\quad \left. \frac{(m+n+2)a_{n+2}}{2} + (m+n+2)(m+n+1)a_{n+2} \right) x^{m+n} + \dots \\
 &= \frac{1}{2} (2m+1) (m-1) a_0 x^{m-2} + \\
 &\quad \frac{1}{2} (2a_0 + (1+2(m+1))a_1) mx^{m-1} + \dots \\
 &\quad + \frac{1}{2} (2a_{n+1} + (2(m+n+2)+1)a_{n+2}) (m+n+1) x^{m+n} + \dots .
 \end{aligned}$$

Igualando a cero los coeficientes de cada exponente obtenemos las ecuaciones

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} (2m+1) (m-1) a_0 &= 0 \\
 \frac{1}{2} (2a_0 + (1+2(m+1))a_1) m &= 0 \\
 &\vdots \\
 (2a_{n+1} + (2(m+n+2)+1)a_{n+2}) (m+n+1) &= 0
 \end{aligned} \tag{6.19}$$

Despejando de la última ecuación nos queda la relación de recurrencia de un término

$$a_{n+2} = -\frac{2a_{n+1}}{2(m+n+2)+1}. \tag{6.20}$$

Para llegar a esta igualdad debimos suponer $2(m+n+2)+1 \neq 0$. La primera de las ecuaciones en (6.19) es importante puesto que determina el valor de m . Se llama

ecuación indicial. Vemos que si tomamos $m = 1$ o $m = -1/2$ se resuelve la primera ecuación. Supongamos $m = 1$. Entonces (6.20) se transforma en

$$a_{n+2} = -\frac{2a_{n+1}}{2n+7}, \quad n = -1, 0, \dots$$

Con ayuda de la relación de recurrencia podemos determinar el radio de convergencia de la serie sin necesidad de conocer el valor de los a_n

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2|x|}{2n+7} = 0.$$

Por consiguiente el radio de convergencia es infinito. Iterando la relación de recurrencia llegamos

$$a_n = -\frac{2}{2n+3}a_{n-1} = \frac{2}{(2n+3)(2n+1)}a_{n-2} = \dots = \frac{(-1)^n 2^n}{(2n+3)(2n+1)\dots 5}a_0.$$

El valor de a_0 determina al resto de los a_n y se puede elegir arbitrariamente. Supongamos que $a_0 = 1$. Hemos hallado la siguiente solución

$$y_1(x) = x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{(2n+3)(2n+1)\dots 5} x^n. \quad (6.21)$$

Cuando $m = -\frac{1}{2}$, la relación de recurrencia es

$$a_{n+1} = -\frac{a_n}{n+1}.$$

Por ende

$$a_n = -\frac{a_{n-1}}{n} = \frac{1}{n(n-1)}a_{n-2} = \dots = \frac{(-1)^n}{n!}a_0 = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Conseguimos la solución

$$y_2(x) = x^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n = \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \quad (6.22)$$

Estas dos soluciones son linealmente independientes. Para justificar esta afirmación basta ver que $y_1(0) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow 0^+} y_2(x) = +\infty$. Estas igualdades hacen imposible la relación $c_1 y_1 + c_2 y_2 = 0$ a menos que $c_1 = c_2 = 0$.

6.4.2 Ecuación de Bessel, funciones de Bessel de primera especie

6.4.2.1 Relaciones de recurrencia y solución por el método de Frobenius

Definición 6.4.10 Recordemos a la ecuación de Bessel de orden p ($p > 0$)

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2) y = 0 \quad (6.23)$$

En $x = 0$ la ecuación de Bessel tiene un punto singular regular. Vamos a aplicarle el método de Frobenius. Suponemos que

$$y = x^m \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+m}$$

es solución, donde $a_0 \neq 0$ y la serie de potencias converge para x . Calculado

$$\begin{aligned} y' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+m)a_n x^{n+m-1}, \\ y'' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+m-1)(n+m)a_n x^{n+m-2}, \\ x^2 y'' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+m-1)(n+m)a_n x^{n+m} \\ xy' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+m)a_n x^{n+m} \\ x^2 y &= \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n+m} \\ -p^2 y &= \sum_{n=0}^{\infty} -p^2 a_n x^{n+m} \end{aligned}$$

Sumando esas series e igualando a cero el coeficiente de x^{n+m} se obtiene

$$\begin{aligned} (m^2 - p^2)a_0 &= 0 \\ ((m+1)^2 - p^2)a_1 &= 0 \\ ((n+m)^2 - p^2)a_n + a_{n-2} &= 0 \quad n \geq 2. \end{aligned} \tag{6.24}$$

La primera es la ecuación indicial para la ecuación de Bessel y como $a_0 \neq 0$ entonces se infiere que

$$m = p \vee m = -p.$$

Consideremos el caso que $m = p$. Se tiene que $(2p+1)a_1 = 0$. Podría ocurrir que $p = -1/2$ o también que $a_1 = 0$. El caso $p = \pm 1/2$ lo vamos a trabajar en un ejercicio. Supongamos pues $a_1 = 0$. La ecuación en recurrencia se transforma, luego de sustituir m por p

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(2p+n)}$$

Ahora, como $a_1 = 0$, aplicando repetidas veces la recurrencia se deduce que $a_n = 0$ para todo n impar. Reemplazamos $n \leftrightarrow 2n$ en la relación de recurrencia

$$a_{2n} = -\frac{1}{4n(p+n)} a_{2n-2} \tag{6.25}$$

Iterando esta relación

$$\begin{aligned} a_{2n} &= -\frac{1}{4n(p+n)} a_{2n-2} \\ &= \frac{1}{4n(p+n-1)} \cdot \frac{1}{4(n-1)(p+n-1)} a_{2n-4} = \dots \\ &= (-1)^n \frac{1}{4^n n! (p+n)(p+n-1) \cdots (p+1)} a_0. \end{aligned}$$

Obtenemos la solución

$$y(x) = x^p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a_0}{4^n n! (p+n)(p+n-1)\cdots(p+1)} x^{2n} \quad (6.26)$$

En la próxima sección veremos que cierta elección especial de a_0 no lleva a lo que denominaremos funciones de Bessel.

6.4.2.2 Función Gamma y la función de Bessel de primera especie

Vamos a elegir un valor de a_0 apropiado de modo que la expresión de la solución (6.26) sea más simple. Si p fuese un entero positivo, eligiendo a_0 como $1/2^p p!$ la expresión quedaría

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(p+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}$$

Con el objeto de considerar p no entero, vamos a generalizar la función factorial a números reales.

Definición 6.4.11 Para $p > 0$ definimos la *función Gamma* por

$$\Gamma(p) := \int_0^{\infty} t^{p-1} e^{-t} dt \quad (6.27)$$

En la clase demostraremos que la integral impropia en la definición converge. Además demostraremos las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} \Gamma(1) &= 1 \\ \Gamma(p+1) &= p\Gamma(p) \end{aligned} \quad (6.28)$$

Estas igualdades implican, cuando $p = n$ es entero positivo, que $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = \dots = n! \Gamma(1) = n!$. Luego podemos ver a la función gamma como una extensión de la función factorial a los reales no negativos. Notar que

$$\lim_{p \rightarrow 0^+} \Gamma(p) = \lim_{p \rightarrow 0^+} \frac{\Gamma(p+1)}{p} = +\infty.$$

La función Gamma tiende a infinito cuando nos acercamos a cero por derecha.

La Definición 6.27 es válida para $p > 0$. Utilizando la relación (6.28) podemos extender la función a $p < 0$. Concretamente, supongamos que $-1 < p < 0$, en este caso definimos

$$\Gamma(p) := \frac{\Gamma(p+1)}{p}. \quad (6.29)$$

Observar que el segundo miembro esta bien definido pues $p+1 > 0$. Como consecuencia de esta definición tendremos

$$\lim_{p \rightarrow 0^-} \Gamma(p) = \lim_{p \rightarrow 0^-} \frac{\Gamma(p+1)}{p} = -\infty.$$

y

$$\lim_{p \rightarrow -1^+} \Gamma(p) = \lim_{p \rightarrow -1^+} \frac{\Gamma(p+1)}{p} = -\infty.$$

Ahora podemos extender Γ a $p \in (-2, 1)$. Pues podemos usar la fórmula (6.29) y el hecho de que ya tenemos definida la función Gamma en $(-1, 0)$. Continuando de esta forma, definimos Γ para cualquier valor de $p < 0$ y $p \notin \mathbb{Z}$. Si n es un entero negativo ocurre que

$$\lim_{p \rightarrow n^+} \Gamma(p) = (-1)^n \infty \quad y \quad \lim_{p \rightarrow n^-} \Gamma(p) = (-1)^{n-1} \infty.$$

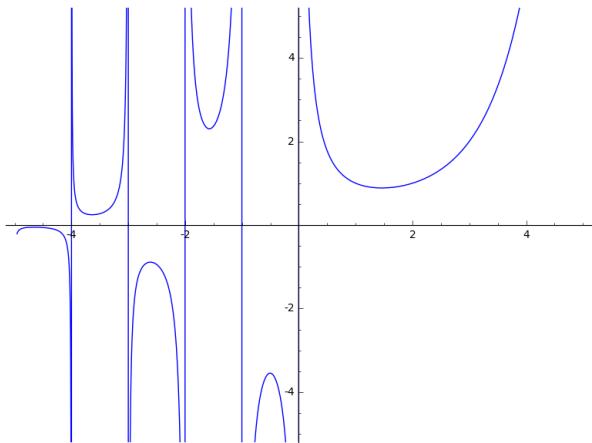


Figura 6.4.1: La función gamma Γ

Ahora estamos en condiciones de definir la *función de Bessel de primera especie* que resulta de tomar a_0 como $1/2^p \Gamma(p + 1)$.

Definición 6.4.12 Definimos la función de Bessel de primera especie como

$$J_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(p+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p} \quad (6.30)$$

En la figura 6.4.2 se muestran diversos gráficos de funciones de Bessel obtenidos con sympy (ver apéndice).

Ahora consideremos la solución $m = -p$ de la ecuación indicial. Notar que la fórmula (6.30) continúa teniendo sentido a menos que $-p + n + 1 = 0$, cosa que puede ocurrir cuando $p \in \mathbb{N}$.

Definición 6.4.13 Si $p \notin \mathbb{N}$ definimos la función de Bessel de primera especie J_{-p} como

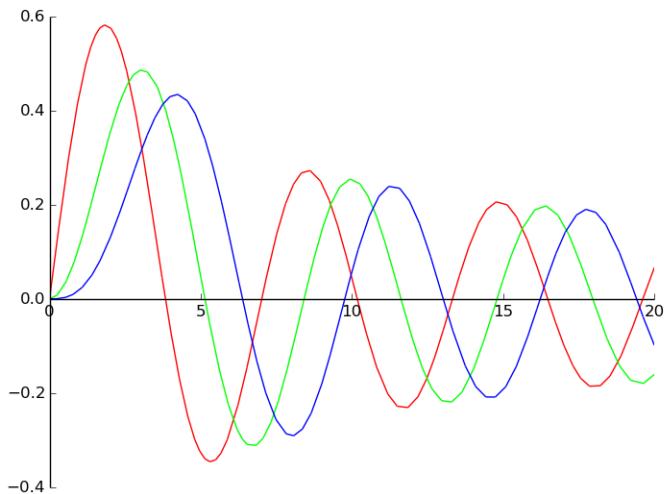
$$J_{-p}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(-p+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-p} \quad (6.31)$$

Cuando $p \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$, la función J_{-p} es no acotada cuando $x \rightarrow 0$ y esto es razón suficiente para asegurar que es linealmente independientes con J_p . En la figura 6.4.3 graficamos algunas de estas funciones de Bessel. La solución general de la ecuación de Bessel para $0 < p \notin \mathbb{N}$ es entonces

$$y(x) = c_1 J_p(x) + c_2 J_{-p}(x).$$

Es una función acotada si y solo si $c_2 = 0$.

El caso $p = 0$ continua siendo problemático dado que obviamente $J_p = J_{-p}$ y no generamos una solución linealmente independiente de la que ya teníamos.

Figura 6.4.2: Funciones de Bessel J_p , $p = 1, 2, 3$

Más adelante vamos a seguir estudiando con más profundidad la ecuación de Bessel.
Observación 6.4.1 Es importante enfatizar que todas las series anteriores tienen un carácter formal. Cuando decimos esto entendemos que son resultado de la aplicación del método de coeficientes indeterminados, pero todavía no está establecido que estas series representen una solución, ni tampoco siquiera que las series converjan en un disco de radio positivo. Por lo tanto podría darse el caso que estas series no definen una función más allá de $x = 0$. Esta problemática la abordamos en la sección siguiente.

Ejercicio 6.4.3 Proponiendo una solución de la forma $y(x) = v(x)\sqrt{x}$ econtrar de otra manera una solución de la ecuación de Bessel de orden $p = 1/2$. Usar la relación $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ para concluir

$$J_{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \operatorname{sen}(x), \quad J_{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos(x).$$

Ejercicio 6.4.4 Recordando que Γ tiene polos en $-n = 0, 1, 2, \dots$ escribamos

$$\frac{1}{\Gamma(-n)} = 0, \quad \text{cuando } n \in \mathbb{N}.$$

Con esta suposición la fórmula (6.4.13) tendría sentido aún con $p \in \mathbb{N}$. Demostrar que $J_{-n} = (-1)^n J_n$. En conclusión de esta manera se encuentra una solución linealmente independiente con J_n .

6.4.3 Teorema fundamental sobre puntos singulares regulares

Habiendo visto algunos ejemplos, ahora pasaremos a discutir la situación general del método de Frobenius.

Supongamos $x = 0$ un punto regular singular de la ecuación

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \quad (6.32)$$

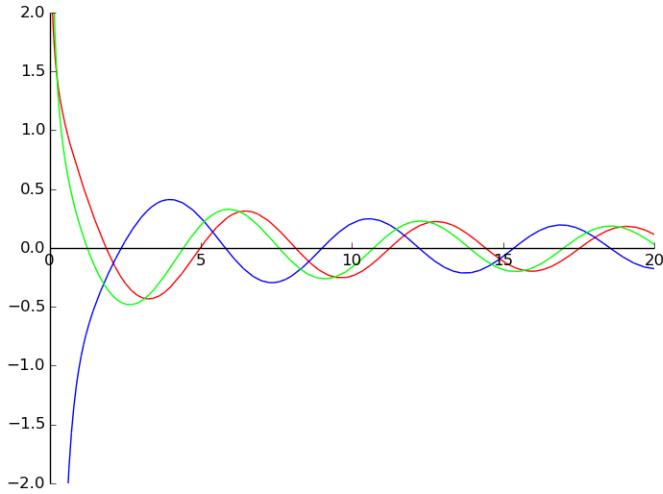


Figura 6.4.3: Funciones de Bessel $J_{-1/3}$, $J_{-2/3}$ y $J_{-5/3}$.

Supongamos que $xp(x)$ y $x^2q(x)$ poseen los siguientes desarrollos en serie

$$xp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \quad \text{y} \quad x^2 q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$$

Proponemos como solución

$$y = x^m \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{m+n}.$$

Empecemos por hallar las relaciones de recurrencia para los coeficientes a_n , $n = 0, 1, \dots$. Tenemos

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (m+n)a_n x^{m+n-1} \tag{6.33a}$$

$$\begin{aligned} y'' &= \sum_{n=0}^{\infty} (m+n)(m+n-1)a_n x^{m+n-2} \\ &= x^{m-2} \sum_{n=0}^{\infty} (m+n)(m+n-1)a_n x^n. \end{aligned} \tag{6.33b}$$

Luego

$$\begin{aligned} p(x)y'(x) &= \frac{1}{x} \left(\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} (m+n)a_n x^{m+n-1} \right) \\ &= x^{m-2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} (m+n)a_n x^n \right) \\ &= x^{m-2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n p_{n-k}(m+k)a_k \right) x^n \\ &= x^{m-2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} p_{n-k}(m+k)a_k + p_0(m+n)a_n \right) x^n \end{aligned} \tag{6.34}$$

Ahora desarrollemos $q(x)y(x)$,

$$\begin{aligned}
 q(x)y(x) &= \frac{1}{x^2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{m+n} \right) \\
 &= x^{m-2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \\
 &= x^{m-2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n q_{n-k} a_k \right) x^n \\
 &= x^{m-2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} q_{n-k} a_k + q_0 a_n \right) x^n
 \end{aligned} \tag{6.35}$$

A partir de (6.42), (6.35), (6.34) y (6.33b) obtenemos

$$\begin{aligned}
 0 &= x^{m-2} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ [(m+n)(m+n-1) + p_0(m+n) + q_0] a_n \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{k=0}^{n-1} a_k [p_{n-k}(m+k) + q_{n-k}] \right\} x^n.
 \end{aligned} \tag{6.36}$$

Entonces se debe satisfacer

$$[(m+n)(m+n-1) + p_0(m+n) + q_0] a_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k [p_{n-k}(m+k) + q_{n-k}] = 0,$$

(6.37)

para $n = 0, 1, \dots$. Definamos

$$f(m) = m(m-1) + p_0 m + q_0. \tag{6.38}$$

Entonces las ecuaciones (6.37) se escriben

$$f(m+n)a_n = - \sum_{k=0}^{n-1} a_k [p_{n-k}(m+k) + q_{n-k}], \quad n = 0, 1, \dots \tag{6.39}$$

La primera de estas ecuaciones es

Definición 6.4.14 Definimos la ecuación indicial por

$$f(m) = m(m-1) + p_0 m + q_0 = 0. \tag{6.40}$$

Si m resuelve la ecuación indicial entonces m resuelve la ecuación (6.39) para $n = 0$ y el valor de a_0 se puede elegir arbitrariamente.

Supongamos que la ecuación indicial tiene las soluciones $m_2 \leq m_1$. Podría ocurrir que las soluciones fueran complejas conjugados, pero no trataremos este caso aquí. Ahora discutamos cuando es posible resolver las relaciones de recurrencia (6.39). El

único problema que podría ocurrir es que $f(m+n) = 0$ para algún valor de $n = 1, 2, \dots$, dado que en ese caso (6.39) se reduce a

$$0 = - \sum_{k=0}^{n-1} a_k [p_{n-k}(m+k) + q_{n-k}]. \quad (6.41)$$

Esta ecuación no nos dice nada sobre a_n y no podemos esperar que se satisfaga. Sin embargo, cuando $m = m_1$ esta desafortunada situación no se da, de lo contrario $m_1 + n$ sería una raíz de la ecuación indicial distinta que m_2 y m_1 . En consecuencia, si $m = m_1$ y $a_0 \neq 0$ es elegido arbitrariamente las ecuaciones (6.39) determinan los coeficientes a_n , $n = 1, 2, \dots$

Cuando $m = m_2$ si puede ocurrir que $f(m_2 + n) = 0$, esto es así cuando $m_2 + n = m_1$ para algún $n = 1, 2, \dots$, vale decir cuando $m_1 - m_2 \in \mathbb{Z}$. Luego estamos en condiciones de afirmar que si $m = m_2$, $m_1 - m_2 \notin \mathbb{Z}$ y $a_0 \neq 0$ es elegido arbitrariamente las ecuaciones (6.39) determinan los coeficientes a_n , $n = 1, 2, \dots$. En esta situación, se demuestra con facilidad que las dos soluciones obtenidas por el método de Frobenius son linealmente independientes. Por ejemplo, si estas soluciones son

$$y_1 = x^{m_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{y} \quad y_2 = x^{m_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n,$$

con $a_0 \neq 0 \neq b_0$ y si suponemos que ellas son linealmente dependientes entonces su cociente y_1/y_2 sería una constante c no nula. Pero tomando límite en la expresión y_1/y_2 cuando $x \rightarrow 0$ vemos que

$$c = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y_1}{y_2} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{m_1 - m_2} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n} = 0 \cdot \frac{a_0}{b_0} = 0.$$

Si $m_1 - m_2 := n_0 \in \mathbb{Z}$, entonces la situación es diferente. Si, en particular, tuviésemos $n_0 = 0$ ($m_1 = m_2$) entonces claramente podremos encontrar esencialmente sólo una solución en serie de Frobenius.

Hemos discutido con cierto detalle las posibles soluciones de las ecuaciones de recurrencia. No resta considerar la cuestión de la convergencia de las series. Esto lo tratamos en el siguiente teorema.

Teorema 6.4.6 Supongamos $x = 0$ un punto regular singular de la ecuación

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \quad (6.42)$$

Supongamos que $xp(x)$ y $x^2q(x)$ poseen los siguientes desarrollos en serie

$$xp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \quad \text{y} \quad x^2q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$$

y que estas series convergen para $|x| < R$ ($R > 0$). Supongamos que la ecuación indicial tiene las raíces reales m_1, m_2 con $m_2 \leq m_1$. Entonces la ecuación (6.42) tiene una solución en serie de Frobenius dada por

$$y_1 = x^{m_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad a_0 \neq 0.$$

La serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge en $|x| < R$. Si $m_1 - m_2$ no es un entero no negativo entonces tenemos una segunda solución en serie de Frobenius con m_2 en lugar de m_1 y satisfaciendo las mismas condiciones que la primera serie.

Dem. Dado que m_1 y m_2 son raíces de la ecuación indicial vale la factorización

$$f(m) = (m - m_1)(m - m_2) = m^2 - (m_1 + m_2)m + m_1 m_2.$$

Entonces

$$f(m_1 + n) = n(n + m_1 - m_2) \quad \text{y} \quad f(m_2 + n) = n(n + m_2 - m_1).$$

Luego

$$|f(m_1 + n)| \geq n(n - |m_1 - m_2|) \quad \text{y} \quad |f(m_2 + n)| \geq n(n - |m_1 - m_2|). \quad (6.43)$$

Tomemos r tal que $0 < r < R$. Por las mismas razones expresadas en el Teorema (6.3.5), existe $M > 0$ tal que

$$|p_n|r^n, |q_n|r^n \leq M.$$

Usando (6.39), con $m = m_1$, (6.43) y las desigualdades de arriba concluimos

$$n(n - |m_1 - m_2|)|a_n| \leq M \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|a_k|}{r^{n-k}} (|m_1| + k + 1).$$

Ahora definimos la sucesión b_n por $b_n = |a_n|$, para $0 \leq n \leq |m_1 - m_2|$ y para $n > |m_1 - m_2|$

$$n(n - |m_1 - m_2|)b_n = M \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{r^{n-k}} (|m_1| + k + 1). \quad (6.44)$$

Por una variación simple del Lema 6.3.1 tenemos que $|a_n| \leq b_n$, para todo $n = 0, 1, \dots$

Ahora veremos que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ converge para $|x| < r$. Por (6.44) tenemos que

$$\begin{aligned} r(n+1)(n+1 - |m_1 - m_2|)b_{n+1} &= M \sum_{k=0}^n \frac{|b_k|}{r^{n-k}} (|m_1| + k + 1) \\ &= M \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{r^{n-k}} (|m_1| + k + 1) + Mb_n (|m_1| + n + 1) \\ &= n(n - |m_1 - m_2|)b_n + Mb_n (|m_1| + n + 1). \end{aligned}$$

Luego

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{n(n - |m_1 - m_2|) + M(|m_1| + n + 1)}{r(n+1)(n+1 - |m_1 - m_2|)}$$

Y así

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1}|x|^{n+1}}{b_n|x|^n} = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n - |m_1 - m_2|) + M(|m_1| + n + 1)}{r(n+1)(n+1 - |m_1 - m_2|)} = \frac{|x|}{r}$$

Luego la serie $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ converge para $|x| < r$. Como $|a_n| \leq b_n$ tendremos que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge absolutamente para $|x| < r$. Finalmente como $0 < r < R$ fue elegido arbitrariamente tendremos que la convergencia se da para $|x| < R$.

Restaría considerar el caso $m = m_2$ cuando $m_1 - m_2$ no es entero. Pero la demostración del mismo sigue el mismo camino que para $m = m_1$.

□

6.4.4 Caso raíces que difieren en un entero

Cuando $n_0 := m_1 - m_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ la ecuación de recurrencia (6.39) se convierte en con m_2 y n_0 en lugar de m y n respectivamente, la cual puede ser imposible de satisfacer.

Una aparente solución sería tomar $0 = a_0 = \dots = a_{n_0-1}$ que resolverían la ecuación conflictiva. Podríamos elegir $a_{n_0} \neq 0$ arbitrariamente y continuar la iteración

$$\begin{aligned} f(m_1 + 1)a_{n_0+1} &= -\sum_{k=0}^{n_0} a_k [p_{n_0+1-k}(m_2 + k) + q_{n_0+1-k}] = -a_{n_0}[p_1 m_1 + q_1] \\ f(m_1 + 2)a_{n_0+2} &= -\sum_{k=0}^{n_0+1} a_k [p_{n_0+2-k}(m_2 + k) + q_{n_0+2-k}] \\ &= -a_{n_0}[p_2 m_1 + q_2] - a_{n_0+1}[p_1(m_1 + 1) + q_0] \\ &\vdots \\ (6.45) \end{aligned}$$

Como se ve, la iteración termina siendo la misma que la correspondiente iteración para la raíz m_1 . Además tendríamos que el desarrollo en serie

$$y(x) = x^{m_2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = x^{m_2} \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n x^n = x^{m_2+n_0} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+n_0} x^n = x^{m_1} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n,$$

donde $b_n := a_{n+n_0}$ resuelve el esquema de iteración (6.45) que, como dijimos, es el esquema de iteración correspondiente a $m = m_1$. Vale decir que elegir $0 = a_0 = \dots = a_{n_0-1}$ nos lleva a una solución linealmente dependiente con la solución que ya encontramos para $m = m_1$.

Podríamos tener la suerte que eligiendo $a_0 \neq 0$ se satisfaga la ecuación (6.41) con $m = m_2$ y $n = n_0$. Si esto ocurre podemos elegir a_{n_0} arbitrariamente, por ejemplo $a_{n_0} = 0$, y continuar la iteración. Obtenemos una solución que es linealmente independiente de la correspondiente a m_1 . En síntesis, si $n_0 := m_1 - m_2 \in \mathbb{Z}$, si $a_0 \neq 0$ es elegido arbitrariamente, si a_1, \dots, a_{n_0-1} son hallados mediante (6.37) y si se satisface (6.41) tenemos una segunda solución en serie de Frobenius para $m = m_2$. Esta situación ocurría con la ecuación de Bessel cuando $p = (2k - 1)/2$, $k \in \mathbb{N}$.

Si falla esta última condición ya no hay otra solución en serie de Frobenius. Se puede encontrar otro desarrollo, emparentado pero que ya no constituye una serie de Frobenius. Una manera de llegar a este es aplicando el método de reducción de orden a partir de la solución conocida $y_1 = x^{m_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Este método nos decía que la otra solución venía dada a partir de las relaciones

$$y_2(x) = v(x)y_1(x), \quad \text{donde } v'(x) = \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)dx}.$$

Teniendo en cuenta que

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^{n-1} = \frac{p_0}{x} + p_1 + p_2 x + \dots$$

Vemos que

$$\begin{aligned} v'(x) &= \frac{1}{x^{2m_1} (\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)^2} e^{-\int (\frac{p_0}{x} + p_1 + p_2 x + \dots) dx} \\ &= \frac{1}{x^{2m_1} (\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)^2} e^{-p_0 \ln x - p_1 x - \dots} \\ &= \frac{1}{x^{2m_1+p_0} (\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)^2} e^{-p_1 x - \dots} \end{aligned}$$

Ahora la función

$$g(x) = \frac{e^{-p_1 x - \dots}}{(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)^2},$$

es analítica en 0 puesto que el denominador no se anula en cero. Por consiguiente tenemos un desarrollo en serie

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \quad b_0 \neq 0.$$

En la práctica encontrar este desarrollo en serie de manera explícita puede ser muy difícil. Llamemos $k := 2m_1 + p_0$. Por la conocida fórmula para la suma de las raíces de una ecuación de segundo grado, se tiene que $m_1 + m_2 = 1 - p_0$. Luego $2m_1 + p_0 = 2m_1 + 1 - m_1 - m_2 = m_1 - m_2 + 1 \in \mathbb{N}$.

Tenemos que

$$v'(x) = \frac{b_0}{x^k} + \frac{b_1}{x^{k-1}} + \cdots + \frac{b_{k-1}}{x} + b_k + \cdots$$

Entonces

$$v(x) = \frac{b_0}{(-k+1)x^{k-1}} + \frac{b_1}{(-k+2)x^{k-2}} + \cdots + b_{k-1} \ln x + b_k x + \cdots$$

Reemplazando esta identidad en la expresión para y_2 ,

$$\begin{aligned} y_2 &= vy_1 \\ &= y_1 \left(\frac{b_0}{(-k+1)x^{k-1}} + \frac{b_1}{(-k+2)x^{k-2}} + \cdots + b_{k-1} \ln x + b_k x + \cdots \right) \\ &= b_{k-1} \ln xy_1 + x^{m_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \left(\frac{b_0}{(-k+1)x^{k-1}} + \frac{b_1}{(-k+2)x^{k-2}} \cdots \right) \\ &= b_{k-1} \ln xy_1 + x^{m_1-k+1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \left(\frac{b_0}{(-k+1)} + \frac{b_1}{(-k+2)} x + \cdots \right) \end{aligned}$$

Ahora $m_1 - k + 1 = m_1 - 2m_1 - p_0 + 1 = -p_0 - m_1 + 1$. Es sabido que la suma de las raíces $m_1 + m_2$ es igual a $-p_0 + 1$, es decir $m_1 = -p_0 + 1 - m_2$. Entonces $m_1 - k + 1 = m_2$. Obtenemos una solución de la forma

$$y_2(x) = b_{k-1} y_1 \ln x + x^{m_2} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n. \quad (6.46)$$

La segunda solución y_2 es la suma de una serie de Frobenius, con $m = m_2$, y un múltiplo de la función $y_1 \ln x$. Esta última función no se puede desarrollar en serie de potencias alrededor de 0.

En un caso particular se puede hallar los coeficientes b_{k-1} y c_n por el método de coeficientes indeterminados. Hay fórmulas para estos coeficientes, que en algunos casos pueden ser útiles. Vamos a obtener algunas de estas.

Tratemos primero la situación cuando tenemos una única raíz $m_1 = m_2$. Notar que en este caso $k = 1$ y $b_{k-1} = b_0 = g(0) = 1/a_0^2 \neq 0$. En este caso el término logarítmico siempre está presente. Sólo restan determinar los c_n , $n \geq 1$.

Para un valor arbitrario de m tal que $m_1 - m \notin \mathbb{N}$, escribamos

$$y(x; m) = x^m \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(m) x^n \right), \quad (6.47)$$

donde a_n son la solución de la ecuación en recurrencia (6.39) con $a_0 = 1$. Se tiene que

Ejercicio 6.4.5 Demostrar que

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = x^{m-2}(m - m_1)^2.$$

Notar que la fórmula anterior vuelve a verificar que $y(x; m_1)$ es solución.

Derivando respecto a m

$$\left(\frac{\partial y}{\partial m}\right)'' + p \left(\frac{\partial y}{\partial m}\right)' + q \left(\frac{\partial y}{\partial m}\right) = x^{m-2}(m - m_1)^2 \ln x + 2x^{m-2}(m - m_1).$$

El miembro derecho es cero cuando $m = m_1$. De esta manera se puede obtener una segunda solución

$$\begin{aligned} y_2(x) &= \frac{\partial y(x; m)}{\partial m} \Big|_{m=m_1} \\ &= x^m \ln x \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(m)x^n\right) + x^m \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial a_n(m)}{\partial m} \Big|_{m=m_1} x^n\right) \\ &= \ln xy_1(x) + x^m \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial a_n(m)}{\partial m} \Big|_{m=m_1} x^n\right). \end{aligned} \quad (6.48)$$

Llegamos a la conclusión que los coeficientes en (6.46) vienen dados cuando $m_1 = m_2$ por

$$b_{k-1} = b_0 = 1, c_0 = 1, \quad c_n = \frac{\partial a_n(m)}{\partial m} \Big|_{m=m_1}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.49)$$

La dificultad de esta fórmula es que requiere resolvete la relación de recurrencia para m arbitrario y esto puede resultar más difícil que cuando m era solución de la ecuación indicial.

En el caso de que las raíces de la ecuación indicial satisfagan que $0 < k - 1 = m_1 - m_2 \in \mathbb{N}$, calculos similares, aunque bastante mas arduos muestran que los coeficientes en (6.46) se obtienen mediante las fórmulas

$$b_{k-1} = \lim_{m \rightarrow m_2} (m - m_2)a_{k-1}(m), \quad (6.50)$$

$$c_0 = 1, \quad c_n = \frac{\partial(m - m_2)a_n(m)}{\partial m} \Big|_{m=m_2}, \quad n = 1, \dots \quad (6.51)$$

6.4.5 Funciones de Bessel de segunda especie, funciones de Neumann

Vamos a ejemplificar los resultados de la subsección anterior para lograr una expresión para una solución de la ecuación de Bessel de orden 0 linealmente independiente con J_0 .

Reemplazando p por 0 en las relaciones (6.24) y despejando, llegamos cuando $m \neq 0$ a

$$\begin{aligned} (m+1)^2 a_1 &= 0 \\ a_n &= -\frac{1}{(n+m)^2} a_{n-2} \end{aligned}$$

Se infiere que $a_1 \equiv a_3 \equiv \dots \equiv 0$ y consecuentemente las derivadas de estas funciones respecto a m también son nulas. Para los valores pares

$$a_{2n}(m) = \frac{(-1)^n a_0}{(2n+m)^2(2n-2+m)^2 \cdots (4+m)^2(2+m)^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (6.52)$$

Debemos determinar $a'_n(0)$, este cálculo puede efectuarse considerando la función

$$f(x) = (x - \alpha_1)^{\beta_1} (x - \alpha_2)^{\beta_2} (x - \alpha_3)^{\beta_3} \cdots (x - \alpha_n)^{\beta_n},$$

entonces

$$\begin{aligned} f'(x) &= \beta_1 (x - \alpha_1)^{\beta_1 - 1} \left[(x - \alpha_2)^{\beta_2} \cdots (x - \alpha_n)^{\beta_n} \right] \\ &\quad + \beta_2 (x - \alpha_2)^{\beta_2 - 1} \left[(x - \alpha_1)^{\beta_1} (x - \alpha_3)^{\beta_3} \cdots (x - \alpha_n)^{\beta_n} \right] + \dots \end{aligned}$$

De donde, para x no igual a $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\beta_1}{x - \alpha_1} + \frac{\beta_2}{x - \alpha_2} + \cdots + \frac{\beta_n}{x - \alpha_n}.$$

Aplicado a (6.52)

$$\frac{a'_{2n}(m)}{a_{2n}(m)} = -2 \left(\frac{1}{2n+m} + \frac{1}{2n-2+m} + \cdots + \frac{1}{2+m} \right),$$

Entonces

$$a'_{2n}(0) = -2 \left[\frac{1}{2n} + \frac{1}{2(n-1)} + \frac{1}{2(n-2)} + \cdots + \frac{1}{2} \right] a_{2n}(0)$$

De la fórmula (6.30) inferimos que $a_{2n}(0) = (-1)^n / 2^{2n} (n!)^2$, luego

$$a'_{2n}(0) = -H_n \frac{(-1)^n a_0}{2^{2n} (n!)^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

donde

$$H_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \cdots + \frac{1}{2} + 1$$

Usando las identidades (6.48), (6.50), tomando $a_0 = 1$ y $y_1(x) = J_0(x)$ se obtiene

$$y_2(x) = J_0(x) \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} H_n}{2^{2n} (n!)^2} x^{2n}, \quad x > 0.$$

En vez de y_2 , como segunda solución suele usarse la siguiente combinación lineal entre J_0 e y_2 . La misma se conoce como función de Bessel de segunda clase de orden cero o función de Neumann de orden 0. Se denota por Y_0 y se define de la siguiente forma

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi} [y_2(x) + (\gamma - \ln 2) J_0(x)],$$

donde γ es la *constante de Euler-Máscheroni* que se define por la ecuación

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} (H_n - \ln n) \cong 0,5772.$$

De manera explícita

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi} \left[\left(\gamma + \ln \frac{x}{2} \right) J_0(x) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} H_m}{2^{2m} (m!)^2} x^{2m} \right], \quad x > 0$$

Las funciones de Neumann se definen para cualquier orden p . Se suele seguir otro camino que exponemos de manera breve

Definición 6.4.15 Para $0 < p \notin \mathbb{N}$ definimos la *función de Bessel de segunda especie* o *función de Neumann* Y_p por

$$Y_p = \frac{\cos p\pi J_p - J_{-p}}{\operatorname{sen} p\pi}. \quad (6.53)$$

La función Y_p es una solución no acotada cerca de 0 dado que J_p es acotada y J_{-p} no. La razón de esta llamativa definición es el siguiente resultado.

Lema 6.4.2 Para n entero no negativo, el límite $\lim_{p \rightarrow n} Y_p$ existe. Por consiguiente, podemos definir

$$Y_n(x) := \lim_{p \rightarrow n} Y_p(x). \quad (6.54)$$

Esta función es solución de la ecuación de Bessel de orden n y se denomina, también, función de Bessel de segunda especie. También resulta ser una función no acotada cerca de 0 y por consiguiente, linealmente independiente de J_n .

Demostración. La omitiremos. □

7 Problemas de Sturm-Liouville

7.1 Problemas físicos que llevan a problemas de Sturm-Liouville

Recordemos la ecuación diferencial del Calor

$$\frac{\partial c\rho u}{\partial t} - \operatorname{div}(k\nabla u) = S$$

con:

- u temperatura del medio
- c calor específico
- ρ densidad
- k coeficiente conductividad térmica
- S fuente externa de calor

c, ρ, k, S son funciones del tiempo t y el espacio (x, y, z) .

En algunos problemas la fuente externa S además de contener términos $h(x, y, y, t)$ que dependen de la posición y el tiempo contiene otros que dependen de la temperatura u .

Por ejemplo en la Ley *Enfriamiento de Newton* el calor que ingresa a un cuerpo es proporcional a la diferencia de temperatura entre el cuerpo y el medio circundante. La ecuación se transforma

$$\frac{\partial c\rho u}{\partial t} - \operatorname{div} k\nabla u - qu = h. \quad (7.1)$$

También q podría ser función de t y (x, y, z) .

Para mayor simplicidad nos restringiremos al caso de un alambre recto y tan delgado que la asumimos uni-dimensional. La única variable espacial es $x \in [a, b]$ y $t > 0$.

$$c(x)\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \left[k(x)\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right] + q(x)u(x, t) + h(x, t). \quad (7.2)$$

Para tener un problema bien panteado debemos introducir *Condiciones de contorno*: en $x = a$ o $x = b$. Hay de varios tipos

Extremos fijos (Dirichlet) $u = 0$

Alambre aislado (Neuman) $\partial u / \partial x = 0$

Condiciones Robin $\partial u / \partial x + cu = 0$.

Para generalizar la situación, supondremos

$$\begin{cases} a_1u(a, t) + a_2\frac{\partial u}{\partial x}(a, t) = 0 \\ b_1u(b, t) + b_2\frac{\partial u}{\partial x}(b, t) = 0 \end{cases} \quad (7.3)$$

También debemos conocer *Condiciones iniciales*

$$u(x, 0) = f(x)$$

Para simplificar nuestro problema supondremos que $h(x, t) \equiv 0$. Vamos a estudiar el siguiente problema de contorno y valores iniciales.

$$\begin{cases} r(x) \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} [p(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)] + q(x)u(x, t) & a < x < b, t > 0, \\ a_1u(a, t) + a_2\frac{\partial u}{\partial x}(a, t) = 0 & t > 0, \\ b_1u(b, t) + b_2\frac{\partial u}{\partial x}(b, t) = 0 & t > 0, \\ u(x, 0) = f(x) & a < x < b. \end{cases}$$

donde $r(x) = c(x)\rho(x)$ y $p(x) = k(x)$.

Ejercicio 7.1.1 [Separación Variables]

Supongamos $u(x, t) = y(x)T(t)$ resuelve la ecuación. Demostrar que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ (es un número por determinar)

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] + q(x)y + \lambda r(x)y = 0 & a < x < b, \\ a_1y(a) + a_2y'(a) = 0, \\ b_1y(b) + b_2y'(b) = 0 \end{cases}$$

Este sistema se llama un *problema de Sturm-Liouville* con valores en la frontera. Excluimos las condiciones triviales en la frontera, donde $a_1 = a_2 = 0$ o $b_1 = b_2 = 0$.

7.1.1 Clasificación problemas Sturm-Liouville

Definición 7.1.1 Cuando:

- $p(x), q(x)$ y $r(x)$ son continuas en $[a, b]$,
- p' derivable en (a, b) ,
- $p(x) > 0$ y $r(x) > 0$ en $[a, b]$,

decimos que tenemos un *problema regular de Sturm-Liouville*.

Decimos que la ecuación es *singular* si:

- p se anula en a o b ,
- si $p(x), q(x)$ o $r(x)$ no están acotadas cuando x tiende a a o a b ,
- cuando el intervalo (a, b) no está acotado.

Ejemplo 7.1.1 [Ejemplo (problema singular)] Problema contorno para la Ecuación de Bessel en $[0, b]$

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left[x \frac{dy}{dx} \right] + \lambda xy = 0, & 0 < x < b \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} y(x) \text{ y } \lim_{x \rightarrow 0^+} y'(x) \text{ existen y son finitos,} \\ y(b) = 0. \end{cases}$$

Este problema surge al estudiar el flujo de calor en un cilindro. En este caso, $p(x) = r(x) = x$, que se anula en $x = 0$.

7.2 Problemas de contorno

7.2.1 Clasificación condiciones de contorno

Problemas contorno ecuaciones lineales ordinarias de segundo orden
Supongamos el problema de contorno

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), & 0 < x < b \\ a_{11}y(a) + a_{12}y'(a) + b_{11}y(b) + b_{12}y'(b) = c_1 \\ a_{21}y(a) + a_{22}y'(a) + b_{21}y(b) + b_{22}y'(b) = c_2 \end{cases}$$

Estas son condiciones de contorno lineales. Cuando $c_1 = c_2 = 0$, decimos que las condiciones de contorno son *homogéneas*; en caso contrario, son *no homogéneas*.

Ciertas condiciones en la frontera aparecen con frecuencia en las aplicaciones; estas condiciones son

Separadas:

$$\begin{aligned} a_1y(a) + a_2y'(a) &= c_1, \\ b_1y(b) + b_2y'(b) &= c_2 \end{aligned}$$

Dirichlet:

$$y(a) = c_1, \quad y(b) = c_2.$$

Neumann:

$$y'(a) = c_1, \quad y'(b) = c_2$$

Periódicas

$$\begin{aligned} y(-T) &= y(T), \quad y'(-T) = y'(T), \\ y(0) &= y(2T), \quad y'(0) = y'(2T), \end{aligned}$$

donde el periodo es $2T$

7.2.2 Conjunto de soluciones

Hay tres posibilidades para la ecuación homogénea con condiciones homogéneas en la frontera

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, & 0 < x < b \\ a_{11}y(a) + a_{12}y'(a) + b_{11}y(b) + b_{12}y'(b) = 0 \\ a_{21}y(a) + a_{22}y'(a) + b_{21}y(b) + b_{22}y'(b) = 0 \end{cases}$$

- Si $\phi(x)$ es solución no trivial entonces también lo es $A\phi$ para cualquier $A \in \mathbb{R}$. Tenemos una *familia uniparamétrica de soluciones*.
- Si $\phi_1(x)$ y $\phi_2(x)$ son dos soluciones linealmente independientes, entonces $A_1\phi_1(x) + A_2\phi_2(x)$ también es solución para cualesquier $A_1, A_2 \in \mathbb{R}$. Tenemos una *familia biparamétrica de soluciones*.
- La otra posibilidad es que $\phi(x) \equiv 0$ sea la única solución, en cuyo caso existe una única solución.

Conclusión. Hay tres situaciones: el problema de contorno tiene una única solución, una familia uniparamétrica de soluciones, o una familia bi-paramétrica de soluciones.

Ejemplo 1

Determinar todas las soluciones de

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 5y = 0; \\ y(0) = 2, \quad y(\pi/4) = 1. \end{cases}$$

Solución. La ecuación carascterística es:

$$r^2 + 2r + 5 = 0,$$

que tiene las raíces $r = -1 \pm 2i$. La solución general es:

$$y(x) = c_1 e^{-x} \cos 2x + c_2 e^{-x} \sin 2x.$$

Determinamos c_1 y c_2 usando las condiciones de contorno

$$y(0) = c_1 = 2, \quad y(\pi/4) = c_2 e^{-\pi/4} = 1.$$

Por consiguiente, $c_1 = 2$ y $c_2 = e^{\pi/4}$, y hay solución única

$$y(x) = 2e^{-x} \cos 2x + e^{x/4} e^{-x} \sin 2x$$

Ejemplo 2

Determinar todas las soluciones del problema con valores en la frontera

$$\begin{cases} y'' + y = \cos 2x; \\ y'(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0. \end{cases}$$

Solución Ecuación característica:

$$r^2 + 1 = 0,$$

Solución general para la ecuación homogénea:

$$y_h(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x.$$

Usamos el método de coeficientes indeterminados. Una solución particular del problema no-homogéneo tiene la forma

$$y_p(x) = A \cos 2x + B \sin 2x.$$

Ejemplo 2 (continuación) Al sustituir y_p y despejar A y B , vemos que $A = -1/3$ y $B = 0$. Por lo tanto, $y_p(x) = -(1/3) \cos 2x$. Así, una solución general es

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x - (1/3) \cos 2x.$$

Sustituimos la solución general en las condiciones de contorno

$$y'(0) = c_2 = 0, \quad y'(\pi) = -c_2 = 0.$$

Así, $c_2 = 0$ y c_1 es arbitrario. El problema tiene una familia uni-paramétrica de soluciones:

$$y(x) = c_1 \cos x - (1/3) \cos 2x, \quad c_1 \in \mathbb{R}$$

Ejemplo 3

Determinar las soluciones de

$$\begin{cases} y'' + 4y = 0; \\ y(-\pi) = y(\pi), \quad y'(-\pi) = y'(\pi). \end{cases}$$

Solución. Ecuación característica es

$$r^2 + 4 = 0,$$

Solución general

$$y(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x.$$

Cualquiera sea c_1 y c_2 se tiene

$$y(-\pi) = y(\pi), \quad y'(-\pi) = y'(\pi).$$

Así hay una familia a bi-parámetrica de soluciones.

Ejemplo 3 (continuación)

Si, en el ejemplo anterior, reemplazamos la ecuación diferencial (10) por la ecuación no homogénea

$$y'' + 4y = 4x$$

Una solución general es

$$y(x) = x + c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x.$$

Como

$$y(-\pi) = -\pi + c_1, \quad y(\pi) = \pi + c_1,$$

no existen soluciones de que satisfagan $y(-\pi) = y(\pi)$. Así, el problema no homogéneo con valores en la frontera no tiene soluciones.

7.2.3 Problemas de autovalores

Los problemas de Sturm-Liouville con valores en la frontera son ejemplos de problemas con valores en la frontera en dos puntos que contienen un parámetro λ . Nuestro objetivo es *determinar para qué valores de λ el problema con valores en la frontera*

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy}{dx} \right) + q(x)y + \lambda r(x)y = 0, & a < x < b \\ a_1 y(a) + a_2 y'(a) = 0, \\ b_1 y(b) + b_2 y'(b) = 0, \end{cases} \quad (7.4)$$

tiene soluciones no triviales. Tales problemas se llaman *problemas de valores propios*. Las soluciones no triviales se llaman *funciones propias o autofunciones* y el número correspondiente λ es un *valor propio o autovalor*.

La importancia de los problemas de valores propios es que surgen al usar el método de separación de variables para resolver ecuaciones diferenciales parciales.

Ejemplo 7.2.2 En el problema

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases}$$

se tiene que

$$\lambda = \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \quad n = 1, 2, \dots$$

son los autovalores del problema, y las funciones

$$X_n(x) = \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right), \quad n = 1, 2, \dots$$

son las correspondientes autofunciones.

Ejemplo 7.2.3 El problema

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 & 0 < x < L \\ X'(0) = X'(L) = 0 \end{cases}$$

tiene los autovalores y autofunciones

$$\lambda = \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad \text{y } X(x) = \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right)$$

respectivamente

Ejemplo 7.2.4 Determinar todos los valores propios reales y funciones propias correspondientes para

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0; \\ y(0) = 0, \quad 3y(\pi) - y'(\pi) = 0. \end{cases}$$

Ecuación característica

$$r^2 + \lambda = 0.$$

Hay tres casos

Caso 1. $\lambda = -\mu^2 < 0$. Raíces:

$$r = \pm\mu,$$

Solución general:

$$y(x) = c_1 e^{\mu x} + c_2 e^{-\mu x}.$$

Equivalentemente

$$y(x) = C_1 \cosh \mu x + C_2 \sinh \mu x.$$

Al sustituir en las condiciones en la frontera:

$$C_1 = 0, \quad 3(C_1 \cosh \mu\pi + C_2 \sinh \mu\pi) - (\mu C_1 \sinh \mu\pi + \mu C_2 \cosh \mu\pi) = 0$$

Para $C_1 = 0$, la última ecuación se convierte en

$$C_2(3 \sinh \mu\pi - \mu \cosh \mu\pi) = 0.$$

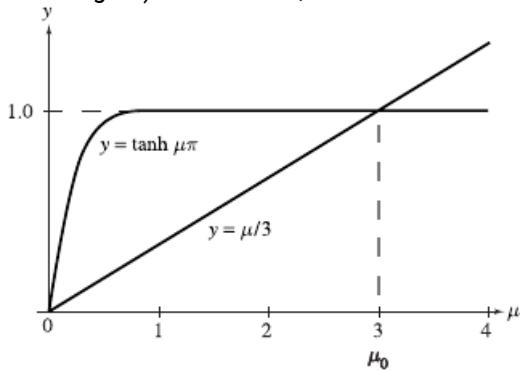
Para obtener una solución no trivial, debemos tener $C_2 \neq 0$, de modo que:

$$3 \sinh \mu\pi - \mu \cosh \mu\pi = 0;$$

es decir, μ debe satisfacer

$$\tanh \mu\pi = \frac{1}{3}\mu.$$

En el plano μy , la recta $y = \mu/3$ corta a la curva $y = \tanh \mu\pi$ sólo una vez para $\mu > 0$ (véase la figura). Por lo tanto, sólo existe una solución positiva de, que denotaremos μ_0 .



En resumen, el problema con valores en la frontera (20)-(21) tiene un valor propio negativo $\lambda_0 = -\mu_0^2$, tal que $\tan \mu_0\pi = \mu_0/3$, y las funciones propias correspondientes son $y_0(x) = c_0 \sinh \mu_0 x$, con $c_0 \neq 0$ arbitrario.

Conclusión. En el caso $\lambda < 0$ el problema con valores en la frontera tiene un valor propio negativo

$$\lambda_0 = -\mu_0^2,$$

tal que

$$\tan \mu_0\pi = \mu_0/3,$$

y las funciones propias correspondientes son

$$y_0(x) = c_0 \sinh \mu_0 x, \quad c_0 \in \mathbb{R}.$$

Caso 2. $\lambda = 0$. Cero es una raíz doble de la ecuación auxiliar, la solución general es:

$$y(x) = c_1 x + c_2.$$

Al sustituir en las condiciones de contorno

$$c_2 = 0, \quad 3\pi c_1 + 3c_2 - c_1 = 0$$

que tiene la solución $c_1 = c_2 = 0$.

No tenemos funciones propias.

Caso 3. $\lambda = \mu^2 > 0$ para $\mu > 0$. Raíces:

$$r = \pm \mu i,$$

Solución general:

$$y(x) = c_1 \cos \mu x + c_2 \sin \mu x.$$

Sustituyendo en condiciones de contorno

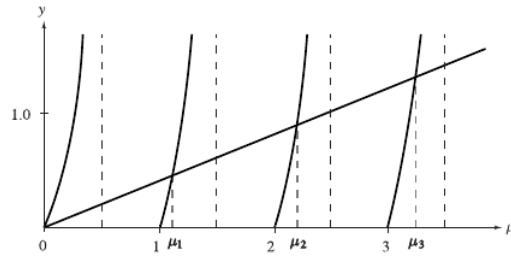
$$c_1 = 0, \quad 3(c_1 \cos \mu\pi + c_2 \sin \mu\pi) - (-\mu c_1 \sin \mu\pi + \mu c_2 \cos \mu\pi) = 0.$$

Al hacer $c_1 = 0$ en la última ecuación, obtenemos

$$c_2(3 \sin \mu\pi - \mu \cos \mu\pi) = 0.$$

Para que existan soluciones no triviales, μ debe satisfacer

$$\tan \mu\pi = \frac{1}{3}\mu.$$



Hay una infinidad de soluciones $\mu_1 < \mu_2 < \dots$ por ende de autovalores $\lambda_n = \mu_n^2$, $n = 1, 2, 3, \dots$ con autofunciones correspondientes

$$y_n(x) = c_2 \sin \mu_n x, \text{ con } c_2 \neq 0,$$

7.3 Problemas regulares de Sturm-Liouville

Retornemos al problema general de hallar los valores propios y funciones propias de:

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy}{dx} \right) + q(x)y + \lambda r(x)y = 0, & a < x < b \\ a_1 y(a) + a_2 y'(a) = 0, \\ b_1 y(b) + b_2 y'(b) = 0, \end{cases} \quad (7.5)$$

donde

- $p(x), p'(x), q(x)$ y $r(x)$ son funciones continuas en $[a, b]$
- $p(x) > 0$ y $r(x) > 0$ en $[a, b]$.
- Se excluye el caso en que $a_1 = a_2 = 0$ o $b_1 = b_2 = 0$.

7.3.1 Llevando a la forma de Sturm-Liouville

Disgresión: cualquier ecuación de la forma

$$A_2(x)y''(x) + A_1(x)y'(x) + A_0(x)y(x) + \lambda \rho(x)y(x) = 0 \quad (7.6)$$

se puede convertir en una ecuación del tipo que (7.5).
Debemos determinar p de modo que

$$(py')' = py'' + p'y' = A_2y'' + A_1y'.$$

Es decir

$$p = A_2, \quad p' = A_1.$$

Pero en general, $A'_2 \neq A_1$, de modo que este método directo no siempre es aplicable.

Idea! Buscar factor integrante $\mu(x)$ tal que al multiplicar (7.6) por μ , obtenemos coeficientes tales que $(\mu A_2)' = \mu A_1$.

Lamemos $p = \mu A_2$, queremos

$$p' = \mu A_1 = pA_1/A_2.$$

Es una ecuación en variables separables. Resolviendo

$$p(x) = C e^{\int A_1(x)/A_2(x) dx}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Tomamos $C = 1$

$$\mu(x) = p/A_2 = [1/A_2(x)] e^{\int A_1(x)/A_2(x) dx}.$$

Al multiplicar (7.6) por μ se tiene

$$(py')' + qy + \lambda ry = 0,$$

donde $p = \mu A_2$, $q = \mu A_0$ y $r = \mu \rho$. Necesitamos que $A_2(x) \neq 0$

Ejemplo

Convertir la siguiente ecuación a la forma de una ecuación de Sturm-Liouville:

$$3x^2y''(x) + 4xy'(x) + 6y(x) + \lambda y(x) = 0, \quad x > 0.$$

Solución. $A_2(x) = 3x^2$ y $A_1(x) = 4x$.

$$\begin{aligned} \mu(x) &= \frac{1}{3x^2} e^{\int A_1(x)/A_2(x) dx} = \frac{1}{3x^2} e^{\int (4x)/3x^2 dx} \\ &= \frac{1}{3x^2} e^{(4/3) \int x^{-1} dx} = \frac{1}{3x^2} e^{(4/3) \ln x} = \frac{x^{4/3}}{3x^2} = \frac{1}{3x^{2/3}}. \end{aligned}$$

Al multiplicar la ecuación por $\mu(x) = 1/(3x^{2/3})$, obtenemos

$$\left(x^{4/3}y'(x)\right)' + 2x^{-2/3}y(x) + \lambda \left(3x^{2/3}\right)^{-1}y(x) = 0.$$

7.3.2 Identidades Lagrange-Green

Identidad de Lagrange Definimos

$$L[y](x) := (p(x)y'(x))' + q(x)y(x)$$

la ecuación se escribe

$$L[y](x) + \lambda r(x)y(x) = 0.$$

Teorema 7.3.1 [Identidad de Lagrange] Sean u y v funciones con segundas derivadas continuas en el intervalo $[a, b]$. Entonces,

$$uL[v] - vL[u] = \frac{d}{dx}(pW[u, v]),$$

donde el **wronskiano** de u y v se define $W[u, v] = uv' - vu'$

Identidad de Lagrange (Demostración)

Usamos la regla del producto y sumamos y restamos $pu'v'$ para tener

$$\begin{aligned} uL[v] - vL[u] &= u \left[(pv')' + qv \right] - v \left[(pu')' + qu \right] \\ &= u (pv')' + quv - v (pu')' - quv \\ &= u (pv')' + u' (pv') - v' (pu') - v (pu')' \\ &= [u (pv')]' - [v (pu')]' \\ &= [p (uv' - vu')]' \\ &= \frac{d}{dx} [pW[u, v]] \end{aligned}$$

Fórmula de Green

Corolario 7.3.1 [Fórmula de Green] Sean u y v funciones con segundas derivadas continuas en el intervalo $[a, b]$. Entonces,

$$\int_a^b (uL[v] - vL[u])(x) dx = (pW[u, v])(x)|_a^b. \quad (7.7)$$

Si además u y v satisfacen las condiciones en la frontera de (7.5), la fórmula de Green se simplifica a

$$\int_a^b (uL[v] - vL[u])(x) dx = 0. \quad (7.8)$$

Fórmula de Green (Demostración)

La primera fórmula surge de integrar la identidad de Lagrange.

Para la segunda notar que si $a_2 \neq 0$ y $b_2 \neq 0$, entonces

$$\begin{aligned} u'(a) &= -(a_1/a_2) u(a), & u'(b) &= -(b_1/b_2) u(b) \\ v'(a) &= -(a_1/a_2) v(a), & v'(b) &= -(b_1/b_2) v(b) \end{aligned}$$

Al sustituir estos valores en el lado derecho de la primera fórmula

$$\begin{aligned} p(b)W[u, v](b) - p(a)W[u, v](a) &= p(b) [u(b)v'(b) - u'(b)v(b)] - p(a) [u(a)v'(a) - u'(a)v(a)] \\ &= p(b) [u(b)(-b_1/b_2)v(b) - (-b_1/b_2)u(b)v(b)] \\ &\quad - p(a) [u(a)(-a_1/a_2)v(a) - (-a_1/a_2)u(a)v(a)] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Fórmula de Green (Demostración) Cuando $a_2 = 0$ (de modo que $a_1 \neq 0$), las condiciones de contorno implican que $u(a)$ y $v(a)$ se anulan. Por lo tanto,

$$[u(a)v'(a) - u'(a)v(a)] = 0.$$

De manera análoga, cuando $b_2 = 0$, obtenemos

$$[u(b)v'(b) - u'(b)v(b)] = 0.$$

□

7.4 Operadores autoadjuntos

Definición 7.4.2 [Producto interno] Para $f, g \in L^2([a, b])$ se define

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx. \quad (7.9)$$

entonces

$$(\cdot, \cdot) : L^2([a, b]) \times L^2([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$$

es un producto interior en $L^2([a, b])$

Autoadjunción Ecuación (7.8) Equivale

$$(u, L[v]) = (L[u], v). \quad (7.10)$$

Definición 7.4.3 [Operadores autoadjuntos] Un operador diferencial lineal L que satisface (7.10) para todas las funciones u y v en su dominio se llama un *operador autoadjunto*.

Observación. Hemos mostrado que si $L[y] = (py')' + qy$ y el dominio de L es el conjunto de funciones que tienen segundas derivadas continuas en $[a, b]$ y satisfacen las condiciones en la frontera en (7.5), entonces L es un operador autoadjunto.

7.4.1 Autoadjunción $\Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$

Teorema 7.4.2 [Autoadjunción $\Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$] Los valores propios de un problema regular de Sturm-Liouville (7.5) son reales y tienen funciones propias con valores reales.

Demostración. Supongamos que $\lambda \in \mathbb{C}$ es un valor propio, con función propia $\phi(x)$, la que puede asumir valores complejos. Es decir,

$$L[\phi](x) + \lambda r(x)\phi(x) = 0.$$

y $\phi \not\equiv 0$ satisface las condiciones en la frontera en (7.5). Como p, q y r asumen valores reales, obtenemos

$$\overline{L[\phi](x) + \lambda r(x)\phi(x)} = L[\bar{\phi}](x) + \bar{\lambda}r(x)\bar{\phi}(x) = 0$$

Como a_1, a_2, b_1 y b_2 son reales $\bar{\phi}$ también satisface las condiciones en la frontera en (7.5). Por lo tanto, $\bar{\lambda}$ es un valor propio con función propia $\bar{\phi}$

Autoadjunción $\Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$

Por otro lado

$$\int_a^b L[\phi](x)\bar{\phi}(x)dx = -\lambda \int_a^b r(x)\phi(x)\bar{\phi}(x)dx = -\lambda \int_a^b r(x)|\phi(x)|^2dx.$$

Además por la segunda identidad de Green y el hecho de que $\bar{\lambda}$ sea un valor propio con función propia $\bar{\phi}$, vemos que

$$\int_a^b L[\phi](x)\bar{\phi}(x)dx = \int_a^b \phi(x)L[\bar{\phi}](x)dx = -\bar{\lambda} \int_a^b r(x)|\phi(x)|^2dx$$

Pero los lados izquierdos de las ecuaciones anteriores son los mismos, de modo que

$$-\lambda \int_a^b r(x)|\phi(x)|^2 dx = -\bar{\lambda} \int_a^b r(x)|\phi(x)|^2 dx$$

Autoadjunción $\Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$ Como $r(x) > 0$ y $\phi \neq 0$, entonces

$$\int_a^b r(x)|\phi(x)|^2 dx > 0.$$

Obtenemos $\lambda = \bar{\lambda}$, vale decir $\lambda \in \mathbb{R}$.

Tomando partes real e imaginaria de ϕ obtenemos funciones propias con valores reales correspondientes a λ . \square

7.4.2 Multiplicidad de autovalores

Multiplicidad de autovalores

Definición 7.4.4 [Autovalores simples] Si todas las funciones propias asociadas a un valor propio particular son sólo múltiplos escalares entre sí, entonces el valor propio se llama *simple*.

Teorema 7.4.3 [Teorema [Autovalores simples]] Todos los valores propios del problema regular de Sturm-Liouville con valores en la frontera (7.5) son simples.

Multiplicidad de autovalores

Demostración. Si $\phi(x)$ y $\psi(x)$ son autofunciones correspondientes a λ :

$$a_1\phi(a) + a_2\phi'(a) = 0, \quad a_1\psi(a) + a_2\psi'(a) = 0$$

Supongamos que $a_2 \neq 0$. (si $a_2 = 0$ y $a_1 \neq 0$ queda de **ejercicio.**) Despejando

$$\phi'(a) = (-a_1/a_2)\phi(a), \quad \psi'(a) = (-a_1/a_2)\psi(a)$$

Calculemos el wronskiano de ϕ y ψ en $x = a$

$$\begin{aligned} W[\phi, \psi](a) &= \phi(a)\psi'(a) - \phi'(a)\psi(a) \\ &= \phi(a)(-a_1/a_2)\psi(a) - (-a_1/a_2)\phi(a)\psi(a) = 0 \end{aligned}$$

Si el wronskiano de dos soluciones de una ecuación lineal homogénea de segundo orden se anula en un punto, entonces las dos soluciones son linealmente dependientes. Así, λ es un valor propio simple. \square

7.4.3 Ortogonalidad

Ortogonalidad

Teorema 7.4.4 [Ortogonalidad] Las funciones propias que corresponden a valores propios distintos de un problema regular de Sturm-Liouville con valores en la frontera (7.5) son *ortogonales* con respecto de la función de ponderación $r(x)$ en $[a, b]$. Vale decir si ϕ y ψ son autofunciones asociadas a los autovalores λ y μ con $\lambda \neq \mu$ entonces

$$\int_a^b \phi(x)\psi(x)r(x)dx = 0. \quad (7.11)$$

Demostración. Tenemos

$$L[\phi] = -\lambda r\phi \quad \text{y} \quad L[\psi] = -\mu r\psi.$$

Podemos suponer que ϕ y ψ tienen valores reales. Por la fórmula de Green

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b (\phi L[\psi] - \psi L[\phi])(x)dx \\ &= \int_a^b (-\phi\mu r\psi + \psi\lambda r\phi)(x)dx \\ &= (\lambda - \mu) \int_a^b \phi(x)\psi(x)r(x)dx \end{aligned}$$

Como $\lambda \neq \mu$, tenemos

$$\int_a^b \phi(x)\psi(x)r(x)dx = 0$$

□

Ejercicio Demostrar que el problema

$$y'' + \lambda y = 0; \quad y(0) = y(\pi) = 0$$

tiene autovalores $\lambda_n = n^2$, $n = 1, 2, 3, \dots$, con funciones propias correspondientes $\phi_n(x) = c_n \operatorname{sen} nx$. Verificar la ortogonalidad de manera directa.

7.4.4 Desarrollo en serie de autofunciones

Teorema 7.4.5 Los valores propios del problema regular de Sturm-Liouville con valores en la frontera (7.5) forman una sucesión numerable y creciente

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots$$

con:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = +\infty.$$

Demostración. Será omitida, ver por ejemplo Garrett Birkhoff y Gian-Carlo Rota. Ordinary Differential Equations

Si $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots$ son valores propios del problema (7.5) con funciones propias $\{\phi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, ortonormales respecto a $r(x)$ en $[a, b]$:

$$\int_a^b \phi_n(x)\phi_m(x)r(x)dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 1, & m = n, \end{cases}$$

En la unidad 7 vimos como asociar a una función f un desarrollo ortogonal

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x), \quad (7.12)$$

donde

$$c_n = \int_a^b f(x) \phi_n(x) r(x) dx. \quad (7.13)$$

Observación Podemos usar las funciones propias para formar un *sistema ortonormal* con respecto de $r(x)$, normalizando a cada función propia ϕ_n , de modo que

$$\int_a^b \phi_n^2(x) r(x) dx = 1.$$

Ejercicio Considerar el problema de Sturm-Liouville con valores en la

$$y'' + \lambda y = 0; \quad y(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0.$$

- $\lambda_n = (2n - 1)^2 / 4, n = 1, 2, 3, \dots$ valores propios.
- $\phi_n(x) = a_n \operatorname{sen}(\frac{2n-1}{2}x)$ funciones propias ortogonales respecto $r(x) \equiv 1$ en $[0, \pi]$.
- Si $a_n = \sqrt{2/\pi}$ el sistema es ortonormal.

Teorema 7.4.6 Sea $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ un sistema ortonormal de funciones propias para el problema regular de Sturm-Liouville con valores en la frontera (7.5), entonces $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ es completo en el conjunto de funciones continuas de cuadrado integrable en $[a, b]$, es decir si f es continua:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x), \quad a \leq x \leq b,$$

donde la convergencia de la serie es en media. Si además f' continua por partes en $[a, b]$ y satisface las condiciones en la frontera la serie converge uniformemente en $[a, b]$.

Demostración. Será omitida, ver por ejemplo Garrett Birkhoff y Gian-Carlo Rota. Ordinary Differential Equations

Expresar

$$f(x) = \begin{cases} 2x/\pi, & 0 \leq x \leq \pi/2 \\ 1, & \pi/2 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

mediante el sistema:

$$\begin{aligned} \phi_n(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{sen}\left(\frac{2n-1}{2}x\right) \\ c_n &= \int_0^{\pi} f(x) \sqrt{2/\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{2n-1}{2}x\right) dx \\ &= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{3/2} \int_0^{\pi/2} x \operatorname{sen}\left(\frac{2n-1}{2}x\right) dx + \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_{\pi/2}^{\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{2n-1}{2}x\right) dx \\ &= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{3/2} \left[\frac{-2x}{2n-1} \cos\left(\frac{2n-1}{2}x\right) + \frac{4}{(2n-1)^2} \operatorname{sen}\left(\frac{2n-1}{2}x\right) \right] \Big|_0^{\pi/2} \\ &\quad - \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \left[\frac{2}{2n-1} \cos\left(\frac{2n-1}{2}x\right) \right] \Big|_{\pi/2}^{\pi}, \end{aligned}$$

Entonces

$$c_n = \frac{2^{7/2}}{\pi^{3/2}(2n-1)^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sqrt{2}/\pi \sin\left(\frac{2n-1}{2}x\right) \\ &= \frac{2^{7/2}}{\pi^2} \sin(x/2) + \frac{2^{7/2}}{9\pi^2} \sin(3x/2) - \frac{2^{7/2}}{25\pi^2} \sin(5x/2) - \frac{2^{7/2}}{49\pi^2} \sin(7x/2) + \dots, \end{aligned}$$

Como $f(0) = 0$ y $f'(\pi) = 0$, f satisface las condiciones en la frontera. Además, f es continua y f' es continua por partes en $[0, \pi]$. Por lo tanto, la serie converge uniformemente a f en $[0, \pi]$.

Teorema 7.4.7 Sea $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión ortonormal de funciones propias para el problema regular de Sturm-Liouville con valores en la frontera (7.5). Sean f y f' continuas por partes en $[a, b]$. Entonces, para cualquier x en (a, b) ,

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x) = \frac{1}{2} [f(x^+) + f(x^-)], \quad (7.14)$$

donde las c_n están dadas por la fórmula (7.13).

7.5 Aplicaciones

7.5.1 Vibraciones longitudinales de barras

Este ejemplo fu tomado de [?].

Bibliografía Charles Henry Edwards y David E. Penney. *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*.

- Cuerda elástica situada en el intervalo $[0, L]$ del eje x cuando no está estirada con área de sección transversal A y densidad δ .
- Solo hay vibraciones longitudinales de la cuerda. $u(x, t)$: desplazamiento de la sección transversal en el tiempo t , cuya posición es x cuando la barra no está estirada. La posición en el tiempo t de la sección transversal x es $x + u(x, t)$.



Por la Ley de Hooke existe una constante E , tal que la fuerza $F(x, t)$ ejercida por la barra es

$$F(x, t) = -AEu_x(x, t).$$

Ecuación vibraciones longitudinales

Por la Ley Balance Momentos

$$(\delta A \Delta x) u_{tt}(\bar{x}, t) \approx -F(x + \Delta x, t) + F(x, t) = AE [u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)]$$

donde \bar{x} representa el punto medio de $[x, x + \Delta x]$. Cuando se divide la expresión entre $\delta A \Delta x$ y se toma el límite conforme $\Delta x \rightarrow 0$, el resultado es la ecuación de onda de una dimensión

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

donde

$$a^2 = \frac{E}{\delta}$$

Ejemplo vibraciones longitudinales

Supongamos una cuerda donde su extremo $x = 0$ está fijo y una masa m está adherida a su otro extremo que es libre.



Inicialmente la barra está estirada linealmente de tal manera que la sección transversal x de la barra está desplazada a bx . En el tiempo $t = 0$ el sistema se pone en libertad partiendo del reposo. Debe resolverse el problema con valores en la frontera

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & (0 < x < L, t > 0) \\ u(0, t) = 0 \\ mu_{tt}(L, t) = -AEu_x(L, t) \\ u(x, 0) = bx, \quad u_t(x, 0) = 0 \end{cases}$$

Ejemplo vibraciones longitudinales

La sustitución de $u(x, t) = X(x)T(t)$ en $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ lleva, como es usual, a las ecuaciones

$$X'' + \lambda X = 0, \quad T'' + \lambda a^2 T = 0$$

La condición de frontera implica

$$u(0, t) = X(0)T(t) = 0,$$

y esto que

$$X(0) = 0.$$

Debido a que $u_{tt} = XT''$ y $u_x = X'T$, reemplazando en la condición de corno para $x = L$

$$mX(L)T''(t) = -AEX'(L)T(t)$$

como la otra condición de la frontera.

Ejemplo vibraciones longitudinales

La sustitución de

$$T''(t) = -\lambda a^2 T(t) = -\frac{\lambda E}{\delta} T(t)$$

seguida por la división entre $-ET(t)/\delta$, resulta en

$$m\lambda X(L) = A\delta X'(L).$$

Así, el problema de autovalores para $X(x)$ es

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = 0, \quad m\lambda X(L) = A\delta X'(L) \end{cases}$$

Debido a la presencia de λ en la condición de frontera derecha éste no es un problema de Sturm-Liouville, por lo que los teoremas que hemos establecido lamentablemente no aplican.

No obstante, todos los eigenvalores son positivos (**ejercicio**), por tanto, se escribe $\lambda = \alpha^2$.

Ejemplo vibraciones longitudinales

De la condición de frontera izquierda inferimos

$$X(x) = \sin \alpha x.$$

De la condición de frontera derecha

$$m\alpha^2 \sin \alpha L = A\delta\alpha \cos \alpha L$$

y así

$$\tan \alpha L = \frac{A\delta}{m\alpha} = \frac{M/m}{\alpha L}$$

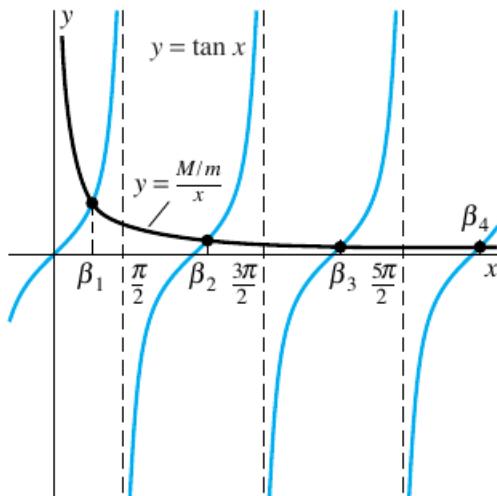
donde $M = A\delta L$ es la masa total y $\beta := \alpha L$. Luego los autovalores y sus autofunciones asociadas son

$$\lambda_n = \frac{\beta_n^2}{L^2}, \quad X_n(x) = \sin \frac{\beta_n x}{L}$$

para $n = 1, 2, 3, \dots$, donde $\{\beta_n\}_1^\infty$ son las raíces positivas de la ecuación

$$\tan x = \frac{M/m}{x},$$

Ejemplo vibraciones longitudinales



Ejemplo vibraciones longitudinales

Continuando

$$T_n'' + \frac{\beta_n^2 a^2}{L^2} T_n = 0, \quad T_n'(0) = 0$$

Así

$$T_n(t) = \cos(\beta_n at/L).$$

Sólo falta encontrar los coeficientes $\{c_n\}_1^\infty$ de tal manera que la serie

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos \frac{\beta_n at}{L} \sin \frac{\beta_n x}{L}$$

satisfaga la condición no homogénea

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{\beta_n x}{L} = f(x) = bx.$$

En este ejemplo las autofunciones $\{\sin(\beta_n x/L)\}_1^\infty$ no son ortogonales en el intervalo $[0, L]$ con respecto al peso $r(x) \equiv 1$ (**ejercicio**), de modo que la fórmula para los coeficientes no aplica.

7.6 Problemas singulares de Sturm-Liouville

7.6.1 Definición y ejemplos

Problemas singulares de Sturm-Liouville Supongamos el operador

$$L[y](x) := \frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] + q(x)y$$

y consideremos la ecuación

$$L[y](x) + \lambda r(x)y(x) = 0, \quad a < x < b.$$

donde $p(x), p'(x), q(x)$ y $r(x)$ son continuas en (a, b) con valores reales, y además $p(x)$ y $r(x)$ son positivas en (a, b) . Llamamos a la ecuación una ecuación *singular de Sturm-Liouville* si una de las siguientes situaciones ocurren:

- $\lim_{x \rightarrow a^+} p(x) = 0 \circ \lim_{x \rightarrow b^-} (x) = 0$.
- $p(x), q(x)$ o $r(x)$ se vuelven no acotadas cuando x tiende a a o b .
- El intervalo (a, b) no está acotado (por ejemplo, (a, ∞) , $(-\infty, b)$ o $(-\infty, \infty)$).

Ejemplos: Ecuación Bessel

La ecuación de Bessel de orden ν

$$t^2 y''(t) + y'(t) + (t^2 - \nu^2) y = 0, \quad 0 < t < \sqrt{\lambda}b \quad (7.15)$$

se puede transformar mediante la sustitución $t = \sqrt{\lambda}x$ en la ecuación singular de Sturm-Liouville

$$\frac{d}{dx} \left[x \frac{dy}{dx} \right] - \frac{\nu^2}{x} y + \lambda x y = 0, \quad 0 < x < b. \quad (7.16)$$

En este caso, $p(x) = x$, que se anula para $x = 0$. Además, para $\nu \neq 0$, la función $q(x) = -\nu^2/x$ no está acotada cuando $x \rightarrow 0^+$.

Ejemplos: Ecuación de Legendre

$$(1 - x^2) y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0, \quad -1 < x < 1 \quad (7.17)$$

se puede escribir como la ecuación singular de Sturm-Liouville

$$\frac{d}{dx} \left[(1 - x^2) \frac{dy}{dx} \right] + \lambda y = 0, \quad -1 < x < 1, \quad (7.18)$$

donde $\lambda = n(n + 1)$. En este caso, $p(x) = 1 - x^2$ se anula en los dos extremos ± 1 .

Ejemplos: Ecuación de Hermite

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad (7.19)$$

al ser multiplicada por e^{-x^2} , se convierte en la ecuación singular de Sturm-Liouville

$$\frac{d}{dx} \left[e^{-x^2} \frac{dy}{dx} \right] + \lambda e^{-x^2} y = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad (7.20)$$

donde $\lambda = 2n$. En este caso, el intervalo $(-\infty, \infty)$ no está acotado.

7.6.2 Autoadjunción

Autoadjunción

¿Cuáles condiciones en la frontera convierten a una ecuación singular de Sturm-Liouville en un problema autoadjunto?

Debemos tener

$$\int_a^b (uL[v] - vL[u])(x)dx = \lim_{x \rightarrow b^-} p(x)W[u, v](x) - \lim_{x \rightarrow a^+} p(x)W[u, v](x).$$

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow a^+} p(x) [u(x)v'(x) - u'(x)v(x)] \\ &= \lim_{x \rightarrow b^-} p(x) [u(x)v'(x) - u'(x)v(x)] = 0 \end{aligned} \quad (7.21)$$

Lema 7.6.1 Cualquiera de las condiciones siguientes garantizan la ecuación (7.21) en a :

1. $\lim_{x \rightarrow a^+} p(x) = p(a)$ existe y u, v satisfacen la condición en la frontera

$$a_1y(a) + a_2y'(a) = 0, \text{ con } a_1, a_2 \text{ no ambos nulos.} \quad (7.22)$$

2. $\lim_{x \rightarrow a^+} p(x) = 0$ y u, v satisfacen la condición en la frontera

$$y(x), y'(x) \text{ permanecen acotados cuando } x \rightarrow a^+. \quad (7.23)$$

3. Las funciones u, v satisfacen la condición en la frontera

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \sqrt{p(x)}y(x) = 0 \text{ y } \lim_{x \rightarrow a^+} \sqrt{p(x)}y'(x) = 0 \quad (7.24)$$

Demostración. (1) Sin pérdida de generalidad, suponemos que $a_1 \neq 0$, Entonces, implica que $u(a) = -(a_2/a_1)u'(a)$ y $v(a) = -(a_2/a_1)v'(a)$. Al sustituir

$$\begin{aligned} p(a) [u(a)v'(a) - u'(a)v(a)] &= p(a) [-(a_2/a_1)u'(a)v'(a) + (a_2/a_1)u'(a)v'(a)] \\ &= 0 \end{aligned}$$

(2) Si u, u', v y v' permanecen acotadas cuando x tiende a a por la derecha, entonces $W[u, v]$ permanece acotado. Como $\lim_{x \rightarrow a^+} p(x) = 0$ y el producto de un factor acotado, por un factor que tiende a cero tiende a cero, se cumple (7.21).

(3) Si u y v satisfacen (7.24), entonces

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a^+} p(x) [u(x)v'(x) - u'(x)v(x)] &= \left(\lim_{x \rightarrow a^+} \sqrt{p(x)}u(x) \right) \left(\lim_{x \rightarrow a^+} \sqrt{p(x)}v'(x) \right) \\ &\quad - \left(\lim_{x \rightarrow a^+} \sqrt{p(x)}u'(x) \right) \left(\lim_{x \rightarrow a^+} \sqrt{p(x)}v(x) \right) \\ &= 0 - 0 = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, se cumple la ecuación (7.21).

Se puede establecer similarmente las mismas afirmaciones para el punto b .

□

7.6.3 Ecuación de Bessel

Un problema singular de Sturm-Liouville con valores en la frontera típico asociado a la ecuación de Bessel de orden ν es

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dx} \left[x \frac{dy}{dx} \right] - \frac{\nu^2}{x} y + \lambda xy = 0, \quad 0 < x < 1. \\ y(x), y'(x) \text{ permanecen acotadas cuando } x \rightarrow 0^+, \end{array} \right. \quad (7.25)$$

$$(7.26)$$

$$y(1) = 0. \quad (7.27)$$

Este problema es autoadjunto, pues la condición (2) del lema se cumple en $a = 0$ y la condición (1) se cumple en $b = 1$.

Si $\lambda > 0$, la sustitución $t = \sqrt{\lambda}x$ transforma la ecuación en la ecuación de Bessel

$$t^2 y'' + t y' + (t^2 - \nu^2) y = 0.$$

Ejemplo: Ecuación de Bessel

En cursos básicos de ecuaciones diferenciales se demuestra que la solución general se escribe

$$y(t) = c_1 J_\nu(t) + c_2 Y_\nu(t)$$

o

$$y(x) = c_1 J_\nu(\sqrt{\lambda}x) + c_2 Y_\nu(\sqrt{\lambda}x)$$

- J_ν se llama *Función de Bessel de primera especie* y satisface las hipótesis (2) del Lema en $x = 0$ para $\nu = 0$ y $\nu \geq 1$.
- Y_ν se llama *Función de Bessel de segunda especie* y no está acotada cerca de $x = 0$.

Ejemplo: Ecuación de Bessel

Para que se cumpla la condición de contorno en $x = 0$ debemos tener $c_2 = 0$

Para que se cumpla la condición de contorno en $x = 1$ con $y(x) = c_1 J_\nu(\sqrt{\lambda}x)$, necesitamos que $c_1 = 0$ o

$$J_\nu(\sqrt{\lambda}) = 0$$

Teorema 7.6.8 La función de Bessel J_ν tiene una sucesión creciente de ceros reales:

$$0 < \alpha_{\nu 1} < \alpha_{\nu 2} < \alpha_{\nu 3} < \dots$$

Por lo tanto,

$$\lambda_{\nu n} = \alpha_{\nu n}^2, \nu, n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

son valores propios con funciones propias correspondientes

$$y_{\nu n}(x) = c_1 J_\nu(\alpha_{\nu n} x).$$

Éstos son los únicos valores propios positivos. Además, se puede mostrar que no existen valores propios no positivos.

Las funciones propias son ortogonales con respecto de la función de ponderación $r(x) = x$:

$$\int_0^1 J_\nu(\alpha_{\nu n} x) J_\nu(\alpha_{\nu m} x) x dx = 0, \quad n \neq m$$

Ejemplo: Ecuación de Bessel
 Si $f(x)$ es una función dada, entonces un desarrollo mediante funciones propias asociado a f es

$$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_{\nu}(\alpha_{vn}x)$$

donde

$$a_n = \frac{\int_0^1 f(x) J_{\nu}(\alpha_{vn}x) x dx}{\int_0^1 J_{\nu}^2(\alpha_{vn}x) x dx}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Cuando f y f' son continuas por partes en $[0, 1]$, el desarrollo converge a

$$[f(x^+) + f(x^-)] / 2$$

para cada x en $(0, 1)$.

7.6.4 Ecuación de Legendre

Ejemplo: Ecuación de Legendre

Un problema singular de Sturm-Liouville con valores en la frontera típico asociado a la ecuación de Legendre es

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dy}{dx} \right] + \lambda y = 0, \quad -1 < x < 1 \\ y(x), y'(x) \text{ permanecen acotadas cuando } x \rightarrow \pm 1. \end{array} \right. \quad (7.28)$$

$$(7.29)$$

Es autoadjunto, pues se cumple la condición (2) del lema en $x = \pm 1$.

En cursos de ecuaciones diferenciales ordinarias se ve que la ecuación tiene soluciones polinomiales para $\lambda = n(n+1)$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Estas soluciones son múltiplos constantes de los *polinomios de Legendre*

$$P_n(x) = 2^{-n} \sum_{m=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^m (2n-2m)!}{(n-m)! m! (n-2m)!} x^{n-2m}$$

donde $[n/2]$ es la parte entera.

Ejemplo: Ecuación de Legendre

$P_n(x)$ son ortogonales en $[-1, 1]$ con respecto de $r(x) = 1$:

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = 0, \quad n \neq m$$

Si $f(x)$ es una función dada, entonces un desarrollo mediante funciones propias para $f(x)$, en términos de los polinomios de Legendre es

$$f \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x),$$

donde

$$a_n = \frac{\int_{-1}^1 f(x)P_n(x)dx}{\int_{-1}^1 P_n^2(x)dx}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Los resultados de convergencia similares a los dados para series de Fourier se cumplen para este desarrollo.

7.6.5 Ecuación de Hermite

Ejemplo: Ecuación de Hermite

Un problema singular de Sturm-Liouville con valores en la frontera asociado a la ecuación de Hermite es

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left[e^{-x^2} \frac{dy}{dx} \right] + \lambda e^{-x^2} y = 0, & -\infty < x < \infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2/2} y(x) = 0 \text{ y } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2/2} y'(x) = 0. \end{cases} \quad (7.30)$$

$$(7.31)$$

Por la condición (3) del lema , el operador lineal asociado al problema es autoadjunto.

Se puede demostrar que se puede transformar la ecuación del problema en la ecuación de Hermite

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0.$$

También que esta ecuación tiene soluciones polinomiales que son múltiplos constantes de los *polinomios de Hermite* $H_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Ejemplo: Ecuación de Hermite Las soluciones polinomiales son las únicas que satisfacen las condiciones en la frontera. Se deduce que los valores propios son $\lambda_n = 2n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, con funciones propias correspondientes $H_n(x)$.

Los polinomios de Hermite $H_n(x)$ son ortogonales en $(-\infty, \infty)$ con respecto de la función de ponderación $r(x) = e^{-x^2}$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(x)H_m(x)e^{-x^2} dx = 0, \quad n \neq m. \quad (7.32)$$

Ejemplo: Ecuación de Hermite Si f es una función dada, entonces un desarrollo con funciones propias asociado a f está dado por

$$f \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n H_n(x)$$

donde

$$a_n = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)H_n(x)e^{-x^2} dx}{\int_{-\infty}^{\infty} H_n^2(x)e^{-x^2} dx}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

7.6.6 Aplicaciones

Vibraciones transversales de una membrana elástica Membrana elástica, por ejemplo un tambor, que es mantenida fija a un arocircular. Viene gobernada por la ecuación de *ondas bidimensional*

$$u_{tt} = \Delta u := u_{xx} + u_{yy}$$

Figura 7.6.1: Membrana vibrante

Variables y suposiciones

Variables

- t es el tiempo,
- x, y, u son las coordenadas de un punto sobre la membrana en un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales.

Suposiciones.

- No actúa otra fuerza más que la tensión de la membrana.
- El material de esta membrana es uniforme.
- La dirección de desplazamientos de un punto sobre la membrana es perpendiculares al plano que contiene al aro de sujeción.
- El aro de sujeción se supone de radio 1 y centro en $(0, 0)$ y está contenido en el plano x, y .
- B denota la bola de centro $(0, 0)$ y radio 1.

Condiciones de contorno e iniciales

Condición de contorno

$$u = 0 \text{ en } \partial B \quad \text{membrana fija en el aro.} \quad (7.33)$$

Condiciones iniciales nos dicen cual es el estado de la membrana en $t = 0$,

$$\begin{cases} u(x, y, 0) = f(x) & x \in B, \\ u_t(x, y, 0) = g(x) & x \in B. \end{cases}$$

Supondremos, para simplificar los cálculos, $g \equiv 0$

$$\begin{cases} u(x, y, 0) = f(x), & (x, y) \in B, \\ u_t(x, y, 0) = 0, & (x, y) \in B. \end{cases} \quad (7.34)$$

$$(7.35)$$

Separación variables

Reemplazando $u(x, y, t) = v(x, y)T(t)$ en la ecuación:

$$v(x, y)T''(t) = T(t)(v_{xx}(x, y) + v_{yy}(x, y)). \quad (7.36)$$

Vale decir

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{v_{xx}(x, y) + v_{yy}(x, y)}{v(x, y)}.$$

Esto implica T''/T y $\Delta v/v$ son constantes. Existe λ tal que

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{v_{xx}(x, y) + v_{yy}(x, y)}{v(x, y)} = -\lambda.$$

Tenemos así dos ecuaciones

$$\begin{cases} T''(t) + \lambda T(t) = 0, t \in \mathbb{R} \\ v_{xx}(x, y) + v_{yy}(x, y) + \lambda v(x, y) = 0, (x, y) \in B \end{cases} \quad (7.37)$$

$$(7.38)$$

Positividad del autovalor

Ejercicio 7.6.2 a) Sean $u, v \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$. Aplicar ejercicio de identidad de Green a) con $M = uv$ y $N = 0$ y deducir la *fórmula de integración por partes*

$$\iint_{\Omega} uv_x dx dy = - \iint_{\Omega} u_x v dx dy + \oint_{\partial\Omega} uv n_x ds,$$

donde $\vec{n} = (n_x, n_y)$ es el vector normal exterior a $\partial\Omega$. Por supuesto vale una fórmula similar con la derivada respecto a y .

b) Suponer $v \not\equiv 0$. Multiplicar la ecuación (7.38) por v la segunda ecuación en (7.36) integrar en Ω y usar la fórmula del inciso a) para deducir que

$$\lambda = \frac{\iint_{\Omega} v_x^2 + v_y^2 dx dy}{\iint_{\Omega} v^2 dx dy} > 0$$

Las condiciones de contorno

$$u(x, y, t) = 0, \quad (x, y) \in \partial B \Rightarrow 2- > a1v = 0 \text{ en } \partial B$$

La condición inicial (7.35) implica

$$u_t(x, y, 0) = v(x, y)T'(0) = 0 \Rightarrow 3- > b1T'(0) = 0 \text{ en } \partial B$$

No es posible satisfacer las condiciones iniciales con la función propuesta, pues

$$u(x, y, 0) = v(x, y)T(0) = f(x, y).$$

Lo se cumpliría si, por casualidad, elegimos f solución de

$$v_{xx}(x, y) + v_{yy}(x, y) + \lambda v(x, y) = 0.$$

Más adelante veremos como tratar las condiciones iniciales.

Resolviendo

Escribamos $\lambda = \omega^2$. La solución general de la ecuación (7.37) con la condición $T'(0) = 0$ es

$$T(t) = k \cos(\omega t), \quad k \in \mathbb{R}. \quad (7.39)$$

La ecuación (7.38) se conoce como la ecuación de autovalores del Laplaciano o *ecuación de Helmholtz*. Los valores de λ para los que esta ecuación tiene solución se llaman autovalores del operador de Laplace.

Para encontrar estos autovalores vamos a usar coordenadas polares $v = v(r, \theta)$. Escribiendo el Laplaciano en estas coordenadas

$$v_{rr} + \frac{1}{r}v_r + \frac{1}{r^2}v_{\theta\theta} + \omega^2 v = 0 \quad (7.40)$$

Separando variables otra vez Nuevamente vamos a considerar la técnica de separación de variables. Proponemos que

$$v(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$$

Reemplazando en (7.40)

$$R''\Theta + \frac{1}{r}R'\Theta + \frac{1}{r^2}R\Theta'' + \omega^2 R\Theta = 0.$$

Multiplicando por $r^2/R\Theta$ y dejando los términos conteniendo Θ

$$\frac{r^2 R''}{R} + \frac{r R'}{R} + \omega^2 r^2 = -\frac{\Theta''}{\Theta}. \quad (7.41)$$

Resolviendo

Cada miembro depende de variables independientes entre si, por consiguiente las funciones deben ser constantes. Debe existir μ tal que

$$r^2 R'' + r R' + (\omega^2 r^2 - \mu)R = 0 \quad (7.42)$$

$$\Theta'' + \mu\Theta = 0. \quad (7.43)$$

Además la condición de contorno implica

$$R(1) = 0. \quad (7.44)$$

Queremos una solución acotada cuando $r \rightarrow 0^+$, esto lo escribimos

$$|R(0)| < \infty. \quad (7.45)$$

La función Θ al depender de θ debería ser periódica. Para que esto sea así μ debe ser positivo, puesto que las soluciones de 7.42 son periódicas solo para estos valores de μ . Por consiguiente

$$\Theta(\theta) = c_1 \cos \sqrt{\mu}\theta + c_2 \sin \sqrt{\mu}\theta. \quad (7.46)$$

Resolviendo

Como más específicamente el período debe ser 2π , el valor de μ debe ser un entero cuadrado, es decir que existe un entero positivo n tal que $\mu = n^2$. Así (7.46) se convierte en

$$\Theta(\theta) = c_1 \cos n\theta + c_2 \sin n\theta.$$

Obtendremos dos soluciones linealmente independientes eligiendo $c_1 = 0$ y $c_2 = 1$ y permutando estos valores.

$$\Theta_{1n}(\theta) = \cos n\theta, \quad \Theta_{2n}(\theta) = \sin n\theta. \quad (7.47)$$

Resolviendo

Reemplazando μ por n^2 en (7.42)

$$r^2 R'' + r R' + (\omega^2 r^2 - n^2)R = 0, \quad (7.48)$$

La podemos convertir fácilmente en la ecuación de Bessel por el cambio de variable independiente $s = \omega r$. Tenemos

$$\frac{dR}{dr} = \frac{dR}{ds} \frac{ds}{dr} = \frac{dR}{ds} \omega$$

y

$$\frac{d^2 R}{dr^2} = \frac{d^2 R}{ds^2} \omega^2$$

Reemplazando las igualdades anteriores y r por s/ω en (7.48) llegamos a

$$s^2 R''(s) + sR' + (s^2 - n^2)R = 0$$

Resolviendo obtuvimos la ecuación de Bessel de orden n , con n entero no negativo. La solución general se escribe:

$$R = c_1 J_n + c_2 Y_n$$

donde J_n es continua en 0 e Y_n es no acotada en 0. Pero (7.45) $\Rightarrow c_2 \neq 0$. Sin perder generalidad, supongamos $c_1 = 1$. Así tenemos que R como función de r es

$$R(r) = J_n(\omega r). \quad (7.49)$$

Resolviendo Ahora la condición de contorno (7.43) implica que

$$J_n(\omega) = 0. \quad (7.50)$$

Sabemos que los ceros de la ecuación de Bessel forman una sucesión

$$\omega_{n0} < \omega_{n1} < \dots, \quad \text{con } \omega_{nk} \nearrow \infty, \text{ cuando } k \rightarrow \infty$$

Tenemos una solución distinta por cada n entero positivo y por cada ω_{nk} en la lista de ceros de J_n

$$u_{1nk}(r, \theta, t) = \cos(\omega_{nk}t) v_{1nk}(r, \theta) = \cos(\omega_{nk}t) \cos(n\theta) J_n(\omega_{nk}r) \quad (7.51)$$

$$u_{2nk}(r, \theta, t) = \cos(\omega_{nk}t) v_{2nk}(r, \theta) = \cos(\omega_{nk}t) \sin(n\theta) J_n(\omega_{nk}r) \quad (7.52)$$

Tonos normales

Las funciones u_{1nk}, u_{2nk} se llaman *tonos normales*. Todos los puntos de la membrana vibran a la misma frecuencia ω_{nk} . Si es un tambor se produce una nota pura.

$$n = 0, k = 0$$

$$n = 0, k = 1$$

$$n = 1, k = 1$$

Ejercicio 7.6.3 La familia de funciones $\{v_{1nk}\}_{n,k=0}^{\infty} \cup \{v_{2nk}\}_{n,k=0}^{\infty}$ es ortogonal en B con ponderación r . Es decir si $(n, k) \neq (n', k')$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \cos(n\theta) \cos(n'\theta) J_n(\omega_{nk}r) J_{n'}(\omega_{n'k'}r) r d\theta dr = 0 \quad (7.53)$$

y $\forall(n, k), (n', k')$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \cos(n\theta) \sin(n'\theta) J_n(\omega_k r) J_{n'}(\omega_{k'} r) r d\theta dr = 0 \quad (7.54)$$

Teorema 7.6.9 La familia de funciones $\{v_{1nk}\}_{n,k=0}^{\infty} \cup \{v_{2nk}\}_{n,k=0}^{\infty}$ es un sistema ortogonal completo en B con ponderación r . Si $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua de cuadrado integrable entonces

$$f(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} J_n(\omega_{km} r) (a_{nk} \cos n\theta + b_{nk} \sin n\theta) \quad (7.55)$$

Con convergencia en media. Los coeficientes vienen dados por

$$a_{nk} = \frac{2}{\pi J_{n+1}(\omega_{nk})} \int_0^{2\pi} \int_0^1 f(r, \theta) J_n(\omega_{nk} r) \cos n\theta r dr d\theta \quad (7.56)$$

$$b_{nk} = \frac{2}{\pi J_{n+1}(\omega_{nk})} \int_0^{2\pi} \int_0^1 f(r, \theta) J_n(\omega_{nk} r) \sin n\theta r dr d\theta \quad (7.57)$$

Separación variables

Finalmente se propone una solución al problema original de la forma

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \cos(\omega_{nk} t) J_n(\omega_{km} r) (a_{nk} \cos n\theta + b_{nk} \sin n\theta) \quad (7.58)$$

Esta u será solución pues es una suma de soluciones, satisface que $u = 0$ en ∂B y que $u_t(x, y, 0) = 0$. Debería cumplirse

$$f(x, y) = u(x, y, 0),$$

y el Teorema anterior nos dice como elegir a_{nk}, b_{nk} para conseguir esto.

7.7 Lecturas recomendadas

[?]

8 Ecuación de la membrana, separación de variables

8.1 Ecuación de la membrana vibrante

El movimiento de una membrana elástica sujeta a un aro circular viene gobernada por la ecuación de *ondas bidimensional*

$$u_{tt} = \Delta u := u_{xx} + u_{yy}$$

Esta ecuación es un ejemplo de *ecuación en derivadas parciales*. Aquí la función incógnita u depende de tres variables independientes x, y, t . No hemos tratado hasta aquí este tipo de ecuaciones, en esta breve unidad vamos a ver como los resultados que desarrollamos antes nos sirven para encontrar algunas soluciones de esta ecuación.

En la deducción de esta ecuación, que no haremos, se supone que no actúa otra fuerza más que la tensión de la membrana, que el material de esta membrana es uniforme, que la dirección de desplazamientos de un punto sobre la membrana es perpendiculares al plano que contiene al aro de sujeción.

El significado de las variables es el siguiente: t es el tiempo, las variables x, y, u son las coordenadas de un punto sobre la membrana en un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales. Las coordenadas x, y se toman en el plano que contiene al aro de sujeción y por ende, como el desplazamiento es solo en la dirección vertical, son independientes de t . El aro de sujeción se supone de radio 1 y centro en $(0, 0)$. La función u depende de x, y y t . La ecuación se satisface en la bola de radio 1 y centro $(0, 0)$ de \mathbb{R}^2 . Se impone además una *condición de contorno* que da cuenta del hecho que la membrana está fija al aro, esta condición es $u = 0$ en ∂B . Por último necesitamos una *condición inicial* que nos dice cual es el estado de la membrana en $t = 0$, vamos a suponer que en ese momento la membrana está en reposo, esto es $u_t(x, y, 0) = 0$.

8.2 separación de variables

Buscaremos soluciones de la ecuación de ondas en variables separadas, esto es supondremos que u se escribe $u(x, y, t) = v(x, y)T(t)$. Estas soluciones tienen el significado físico de ser *tonos normales*, esto es regímenes de vibración donde todos los puntos de la membrana vibran a la misma frecuencia. Asumamos además que u parte del reposo, esto es $u_t(x, y, 0) = 0$.

Reemplazando $u(x, y, t) = v(x, y)T(t)$ en la ecuación obtenemos

$$v(x, y)T''(t) = T(t)(v_{xx}(x, y) + v_{yy}(x, y)). \quad (8.1)$$

Vale decir que

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{v_{xx}(x, y) + v_{yy}(x, y)}{v(x, y)}.$$

Las variables t, x, y son independientes entre si. En el miembro de la izquierda sólo aparece t y en el de la derecha sólo x, y . Por consiguiente podríamos cambiar t en el miembro de la izquierda dejando x, y fijos. La conclusión es entonces que el miembro de la izquierda no cambia por cambiar t , vale decir T''/T es una función constante y por lo tanto $\Delta v/v$ es constante. Debe existir $\lambda > 0$ tal que

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{v_{xx}(x, y) + v_{yy}(x, y)}{v(x, y)} = -\lambda.$$

Tenemos así las dos ecuaciones

$$T''(t) + \lambda T(t) = 0, \quad (8.2)$$

$$v_{xx}(x, y) + v_{yy}(x, y) + \lambda v(x, y) = 0 \quad (8.3)$$

Además se deben satisfacer la condiciones de contorno $u(x, y, t) = 0$ para $(x, y) \in \partial B$. Esta condición implica que ¹

$$v = 0 \text{ en } \partial B. \quad (8.4)$$

No olvidemos la condición inicial $u_t(x, y, 0) = 0$. Atendiendo a la separación de variables debe ocurrir que $T'(0)v(x, y) = 0$ y esto implica que $T'(0) = 0$ o $v(x, y) \equiv 0$. La segunda opción nos llevaría a la solución trivial de la ecuación, lo que no es de nuestro interés. De modo que aceptaremos

$$T'(0) = 0. \quad (8.5)$$

La ecuación (7.37) es una ecuación de segundo orden, lineal con coeficientes constantes, que hemos considerado en múltiples oportunidades. Si $\lambda \leq 0$ obtendríamos soluciones que tienden a infinito cuando $t \rightarrow \infty$ lo que no es compatible con el comportamiento esperado para una membrana. Hay que tener en cuenta que la validez física del modelo matemático alcanza solo a pequeñas oscilaciones, esto es valores chicos de u . De modo que podemos suponer $\lambda = \omega^2$. La ecuación resulta la ecuación del oscilador armónico, cuya solución general es

$$T(t) = k_1 \cos(\omega t) + k_2 \sin(\omega t)$$

Se debe cumplir (??)

$$0 = T'(0) = k_2\omega \Rightarrow [k_2 = 0].$$

La membrana vibra en con frecuencia ω dado que el factor T de u vibra en esa frecuencia y el otro factor que compone u , esto es v , no depende de t es decir es estático. La ecuación (7.38), que ahora escribimos

$$v_{xx}(x, y) + v_{yy}(x, y) + \omega^2 v(x, y) = 0, \quad (8.6)$$

se conoce como la ecuación de autovalores del Laplaciano o ecuación de Helmholtz. Los valores de ω para los que esta ecuación tiene solución (no todo ω lo es) son justamente los autovalores del operador de Laplace. Es decir los autovalores de Laplaciano resultan ser los cuadrados de las frecuencias de los tonos normales. Para encontrar estos autovalores vamos a escribir v en coordenadas polares $v = v(r, \theta)$. Acorde a la fórmula (??) del Apéndice ?? tenemos que (??) equivale a

$$v_{rr} + \frac{1}{r}v_r + \frac{1}{r^2}v_{\theta\theta} + \omega^2 v = 0 \quad (8.7)$$

Nuevamente vamos a considerar la técnica de separación de variables. Proponemos que

$$v(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$$

Reemplazando en (7.40)

$$R''\Theta + \frac{1}{r}R'\Theta + \frac{1}{r^2}R\Theta'' + \omega^2 R\Theta = 0.$$

Multiplicando por $r^2/R\Theta$ y dejando los términos contenido Θ

$$\frac{r^2 R''}{R} + \frac{r R'}{R} + \omega^2 r^2 = -\frac{\Theta''}{\Theta}. \quad (8.8)$$

¹Otra posible solución de la condición de contorno sería tomar $T = 0$, pero esto nos llevaría a la solución trivial

Ahora se razona como lo hemos hecho con la ecuación (7.36). Cada miembro depende de variables independientes entre si, esto es de r el primer miembro y de θ el segundo. Para que la igualdad sea posible las funciones deben ser constantes. Luego debe existir μ tal que

$$r^2 R'' + rR' + (\omega^2 r^2 - \mu)R = 0 \quad (8.9)$$

$$\Theta'' + \mu\Theta = 0. \quad (8.10)$$

Además teníamos la condición de contorno (??) que se convierte en

$$R(1) = 0. \quad (8.11)$$

La función Θ al depender de θ debería ser periódica de periodo 2π . Para que esto sea así μ debe ser positivo, puesto que las soluciones de 7.42 son periódicas solo para estos valores de μ . Por consiguiente

$$\Theta(\theta) = c_1 \cos \sqrt{\mu}\theta + c_2 \sin \sqrt{\mu}\theta. \quad (8.12)$$

Como la solución, además de periódica, debe tener más específicamente periodo 2π , el valor de μ debe ser un entero cuadrado, es decir que existe un entero positivo n tal que $\mu = n^2$. Así (7.46) se convierte en

$$\Theta(\theta) = c_1 \cos n\theta + c_2 \sin n\theta.$$

Nuestras suposiciones no determinan el valor de las constantes c_1 y c_2 . Obtendremos dos soluciones linealmente independientes eligiendo $k_1 = 0$ y $k_2 = 1$ o permutando estos valores. Vamos a seguir ilustrando el método con la segunda elección, es decir

$$\Theta(\theta) = \cos n\theta \quad (8.13)$$

Reemplazando μ por n^2 en (7.42)

$$r^2 R'' + rR' + (\omega^2 r^2 - n^2)R = 0, \quad (8.14)$$

que se parece mucho a la ecuación de Bessel. De hecho si ω fuese 1 sería exactamente la ecuación de Bessel. La podemos convertir fácilmente en la ecuación de Bessel por el cambio de variable independiente $s = \omega r$. Tenemos

$$\frac{dR}{dr} = \frac{dR}{ds} \frac{ds}{dr} = \frac{dR}{ds} \omega$$

y

$$\frac{d^2R}{dr^2} = \frac{d^2R}{ds^2} \omega^2$$

Reemplazando las igualdades anteriores y r por s/ω en (7.48) llegamos a

$$s^2 R''(s) + sR'(s) + (s^2 - n^2)R(s) = 0$$

Que es la ecuación de Bessel de orden n . Como el orden es precisamente un entero hemos visto que la ecuación tiene como par de soluciones linealmente independientes la función de Bessel de primera especie J_n que es analítica en 0 y la función de Bessel de segunda especie Y_n que es no acotada en 0. Debería ocurrir entonces que $R = c_1 J_p + c_2 Y_p$. Pero de ser $c_2 \neq 0$ tendríamos que R sería no acotada y esto implicaría que la membrana sería la gráfica de una función no acotada, cosa que no se condice con nuestra idea de lo que es una membrana. De modo que estas soluciones, que matemáticamente son correctas, las descartamos por carecer de significado físico. Sin perder generalidad, supongamos $c_1 = 1$. Así tenemos que R como función de s es $J_n(s)$. Retornando a la variable r

$$R(r) = J_n(\omega r) \quad (8.15)$$

Ahora la condición de contorno (??) implica que

$$J(\omega) = 0 \quad (8.16)$$

Así llegamos a la sorprendente conclusión que cuando una membrana vibra en un tono normal su frecuencia es un cero de una función de Bessel de orden n para algún entero n positivo. Sabemos que los ceros de la ecuación de Bessel forman una sucesión $\omega_0 < \omega_1 < \dots$ que tiende a infinito y que la distancia entre ceros sucesivos $\omega_{k+1} - \omega_k$ tiende a π cuando $k \rightarrow \infty$. Hemos encontrado muchas soluciones del problema propuesto, tenemos una solución distinta por cada n entero positivo y por cada ω_k en la lista de ceros de J_n . Al tono normal que obtenemos para un n y k dados lo llamamos el tono (n, k) y resulta estar dado en coordenadas polares por

$$u(r, \theta, t) = \cos(\omega_k t) \cos(n\theta) J_n(\omega_k r) \quad (8.17)$$

Siendo u una función de tres variables independientes no es posible graficarla en nuestro mundo 3d. Tampoco nos interesa la grafica, pues la interpretación de u es que para un tiempo t fijo la gráfica en \mathbb{R}^3 de $u(r, \theta, t)$ es la posición de la membrana. Con SAGE (ver el Apéndice ??) generamos un conjunto de gráficos para distintos valores de t y luego los animamos con el paquete `animate` de L^AT_EX. Los tonos normales representados son el $(0, 1)$, $(0, 2)$ y $(1, 2)$.

Figura 8.2.1: Modo $(0, 1)$

Figura 8.2.2: Modo (0, 2)

Figura 8.2.3: Modo (1, 2)

8.3 Apéndice A: Laplaciano en coordenadas polares

Escribamos el operador de Laplace en coordenadas polares. Las coordenadas cartesianas x, y se escriben en función de las coordenadas polares r, θ de la siguiente forma

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta.$$

Tenemos que expresar las derivas tomadas respecto a las coordenadas cartesianas en términos de derivas tomadas respecto a coordenadas polares.

$$\begin{aligned} u_x &= u_{rr}r_x + u_{\theta\theta}\theta_x \\ u_{xx} &= (u_r)_x r_x + u_r r_{xx} + (u_\theta)_x \theta_x + u_\theta \theta_{xx} \\ &= u_{rr}r_x^2 + u_{\theta\theta}\theta_x^2 + 2u_{r\theta}r_x\theta_x + u_{rr}r_{xx} + u_\theta \theta_{xx} \end{aligned} \quad (8.18)$$

Usemos SAGE para calcular $r_x, \theta_x, r_{xx}, \theta_{xx}$

```

1 >>> from sympy import *
2 >>> x,y=symbols('x,y')
3 >>> r=sqrt(x**2+y**2)
4 >>> theta=atan2(y,x)
5 >>> rho=symbols('rho',positive=True)
6 >>> phi=symbols('phi')
7 >>> r.diff(x).subs({x:rho*cos(phi),y:rho*sin(phi)}).simplify()
cos(phi)

```

Es decir

$$r_x = \cos(\theta). \quad (8.19)$$

En el cálculo anterior rho y phi son introducidas en reemplazo de r y theta aunque son exactamente iguales. La razón de hacer esto es que SymPy reemplaza r y theta por sus expresiones en términos de x e y. Esto es así por que en las líneas 12 y 13 del código anterior hemos declarado r y theta como expresiones. Cada vez que uno invoca estas variables, SymPy nos devuelve las expresiones que representan. Oviamente SymPy "no se da cuenta" que nosotros queremos expresar todo en función de r y theta considerando estas variables como independientes. Las restantes derivadas son

```

>>> r.diff(x,2).subs({x:rho*cos(phi),y:rho*sin(phi)}).simplify()
2 sin(phi)**2/rho

```

$$r_{xx} = \frac{\operatorname{sen}^2(\theta)}{r}. \quad (8.20)$$

```

>>> theta.diff(x).subs({x:rho*cos(phi),y:rho*sin(phi)}).simplify()
2 -sin(phi)/rho

```

$$\theta_x = -\frac{\operatorname{sen}(\theta)}{r}. \quad (8.21)$$

```

>>> theta.diff(x,2).subs({x:rho*cos(phi),y:rho*sin(phi)}).simplify()
2 sin(2*phi)/rho**2

```

$$\theta_{xx} = \frac{2 \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta)}{r^2}. \quad (8.22)$$

Sustituyendo en (??), (??), (??) y (??) en (??)

$$u_{xx} = u_{rr} \cos^2 \theta + u_{\theta\theta} \frac{\sin^2 \theta}{r^2} - 2u_{r\theta} \frac{\cos \theta \sin \theta}{r} + u_r \frac{\sin^2(\theta)}{r} + u_\theta \frac{2 \sin(\theta) \cos(\theta)}{r^2}.$$

(8.23)

Para las derivadas respecto a y tenemos

$$u_{yy} = u_{rr} r_y^2 + u_{\theta\theta} \theta_y^2 + 2u_{r\theta} r_y \theta_y + u_r r_{yy} + u_\theta \theta_{yy}$$

Y las derivadas

```
>>> theta.diff(y).subs({x:rho*cos(phi),y:rho*sin(phi)}).simplify()
2      cos(phi)/rho
>>> r.diff(y).subs({x:rho*cos(phi),y:rho*sin(phi)}).simplify()
4      sin(phi)
>>> theta.diff(y,2).subs({x:rho*cos(phi),y:rho*sin(phi)}).simplify()
6      -sin(2*phi)/rho**2
>>> r.diff(y,2).subs({x:rho*cos(phi),y:rho*sin(phi)}).simplify()
8      cos(phi)**2/rho
```

Luego

$$u_{yy} = u_{rr} \sin^2 \theta + u_{\theta\theta} \frac{\cos^2 \theta}{r^2} + 2u_{r\theta} \frac{\cos \theta \sin \theta}{r} + u_r \frac{\cos^2(\theta)}{r} - u_\theta \frac{2 \sin(\theta) \cos(\theta)}{r^2}.$$

(8.24)

De (??) y (??) obtenemos

$$u_{xx} + u_{yy} = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} \quad (8.25)$$

8.4 Apendice B: Código SAGE para animación de tornos normales

```
P.<x>=RR[x]
2
n=2
l=0
4 J= sum([(-1)^k/factorial(k)/gamma(k+1)*(x/2)^(2*k+n) for k in range(20)])
Ceros=J.roots()
6 Ceros=[i[0] for i in Ceros if i[0]>0]
t,theta,r=var('t,theta,r')
8 u=cos(Ceros[l]*t)*cos(n*theta)*J(Ceros[l]*r)
gra=[]
10 Trans = Cylindrical('height', ['radius', 'azimuth'])
z=var('z')
12 Trans.transform(radius=r, azimuth=theta, height=z)
aux=parametric_plot3d([-1,-1,t],(t,-1,1),opacity=0)
14 for j in range(50):
    gra=plot3d(u(t=2*pi/Ceros[l]*j/50),(r,0,1),(theta,0,2*pi),\
16 transformation=Trans,viewer='tachyon')+aux
    str2='mem-'+str(j)
    #La sentencia siguiente guarda la gráfica
    #\texttt{\{gra\}} en el directorio MiDirectorio
    #Hay que descomentarla para que funcione.
    #gra.save('/MiDirectorio/'+str2+'.png')
```

9 Sistemas Lineales

9.1 Introducción

Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo, $A : I \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ y $b : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ funciones continuas. Un *sistema lineal* es una ecuación de la forma

$$\dot{x} = A(t)x + b(t). \quad (9.1)$$

Escribamos

$$\begin{aligned} A(t) &= \{a_{i,j}(t)\}_{i,j=1}^n, \\ b(t) &= (b_1(t), \dots, b_n(t)) \\ x(t) &= (x_1(t), \dots, x_n(t)) \end{aligned}$$

el sistema (??) comprende el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}(t)x_1(t) + a_{12}(t)x_2(t) + \dots + a_{1n}(t)x_n(t) + b_1(t) \\ \vdots \quad \vdots \\ \dot{x}_n = a_{n1}(t)x_1(t) + a_{n2}(t)x_2(t) + \dots + a_{nn}(t)x_n(t) + b_n(t) \end{cases} \quad (9.2)$$

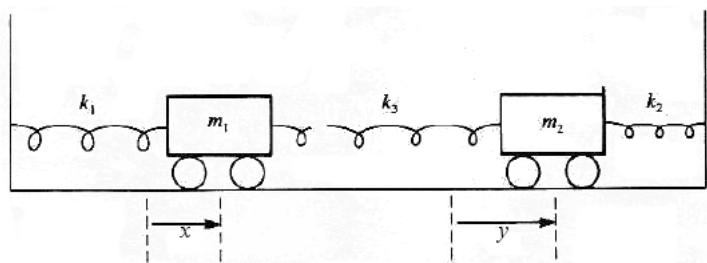
Observación: Los valores de las funciones con rango en \mathbb{R}^n son asumidos vectores columna.

Ejemplo 9.1.1 $\ddot{x} = -kx$. se transforma en un sistema mediante $x_1 = x, x_2 = x'$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -kx_1 \end{cases}$$

9.2 Ejemplos

9.2.1 Resortes acoplados



$$\begin{aligned} m_1 x''(t) &= -k_1 x + k_3(y - x) \\ m_2 y''(t) &= -k_3(y - x) - k_2 y \end{aligned} \quad (\text{SL})$$

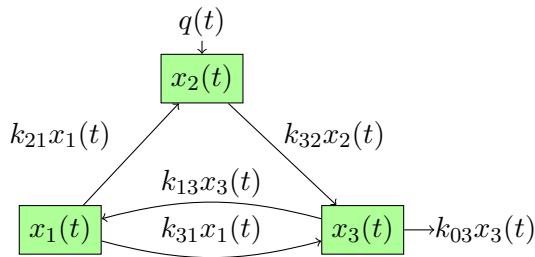
Convertimos en un sistema de primer orden.

$$x_1 = x, x_2 = x', x_3 = y \text{ y } x_4 = y'.$$

$$\begin{cases} x'_1 = x_2 \\ x'_2 = -\frac{k_1}{m_1}x_1 + \frac{k_3}{m_1}(x_3 - x_1) \\ x'_3 = x_4 \\ x'_4 = -\frac{k_3}{m_2}(x_3 - x_1) - \frac{k_2}{m_2}x_3 \end{cases} \quad (9.3)$$

9.2.2 Modelos Compartimentados

1. Se representan gráficamente como un conjunto de cajas *compartimentos* conectados por flechas.
2. Puede haber flechas que nacen o apuntan a un espacio vacío.
3. Una sustancia viaja por las cajas siguiendo estas flechas. Si la flecha termina en un espacio vacío indica que la sustancia abandona el conjunto de compartimentos. Si la flecha viene del vacío quiere decir que la sustancia ingresa del exterior.
4. En cada momento t la sustancia en cierta caja abandona esta caja siguiendo la dirección de las flechas a una tasa dada.
5. Si la tasa es proporcional a la cantidad de sustancia que hay en las cajas el *modelo es lineal*.

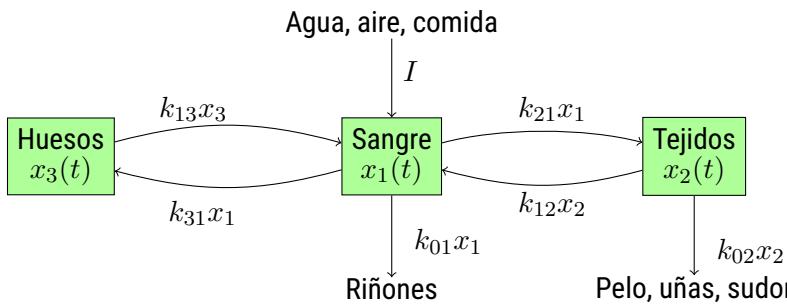


$$\begin{cases} x'_1(t) = -(k_{12} + k_{13})x_1(t) + k_{31}x_3(t) \\ x'_2(t) = -k_{23}x_2(t) + k_{12}x_1(t) + q(t) \\ x'_3(t) = (k_{13} + k_{23})x_1(t) - (k_{31} + k_{30})x_3(t) \end{cases}$$

9.2.3 Un estudio de caso: plomo en sangre

1. El plomo es una sustancia tóxica.
2. Ingresa al torrente sanguíneo desde el aire, agua y comida.
3. Se deposita en tejidos, especialmente huesos.
4. Parte del plomo es eliminado por los riñones.
5. Otra parte es eliminado con las uñas, pelo y el sudor.

$$\begin{cases} x'_1(t) = -(k_{01} + k_{21} + k_{31})x_1(t) + k_{13}x_3(t) + k_{12}x_2(t) + I \\ x'_2(t) = -(k_{12} + k_{02})x_2(t) + k_{21}x_1(t) \\ x'_3(t) = -k_{13}x_3(t) + k_{31}x_1(t) \end{cases}$$



Michael Rabinowitz, George Wetherill, and Joel Kopple. Estudio controlado de absorción y secreción de plomo del sur de California. Estimaron I en microgramos/día y las tasas k_{ji} in 1/día. Los resultados:

$$I_1 = 49,3; \quad k_{01} = 0,0211, \quad k_{21} = 0,0111, \quad k_{31} = 0,0039 \\ k_{02} = 0,0162, \quad k_{12} = 0,0124, \quad k_{13} = 0,000035$$

Resolvemos numéricamente el modelo en un periodo de 800 días con dos condiciones iniciales diferentes

$$x(0) = (0, 0, 0), \quad x(0) = (1800, 800, 1000).$$

```

1 from scipy.integrate import odeint
2 import numpy as np
3 import matplotlib.pyplot as plt

```

```

1 def ecuacion(x,t,k,I):
2     x1,x2,x3=x
3     k01,k21,k31,k02,k12,k13=k
4     x1prima=-(k01+k21+k31)*x1+k13*x3+k12*x2+I
5     x2prima=-(k12+k02)*x2+k21*x1
6     x3prima= -k13*x3+k31*x1
7     return x1prima, x2prima, x3prima

```

```

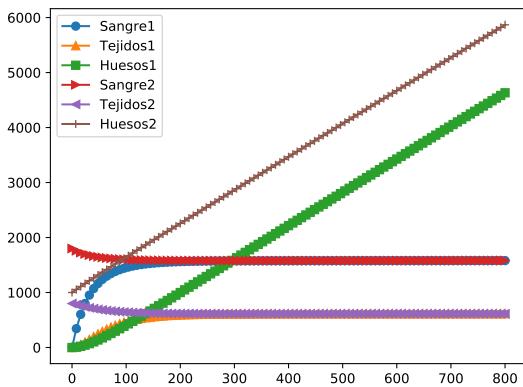
1 I=49.3
2 k=0.0211,0.0111,0.0039,.0162,0.0124,0.000035
3 t=np.linspace(0,800,101)
4 x0=[0,0,0]
5 x=odeint(ecuacion,x0,t,args=(k,I))
6 fig, ax = plt.subplots(1,1)
7 ax.plot(t,x[:,0],marker='o')
8 ax.plot(t,x[:,1],marker='^')
9 ax.plot(t,x[:,2],marker='s')

```

```

1 x0=[1800,800,1000]
2 x=odeint(ecuacion,x0,t,args=(k,I))
3 ax.plot(t,x[:,0],marker='>')
4 ax.plot(t,x[:,1],marker='<')
5 ax.plot(t,x[:,2],marker='+')
6 ax.legend(('Sangre1','Tejidos1','Huesos1',\
7 'Sangre2','Tejidos2','Huesos2'))
8 plt.savefig('plomo2.pdf', bbox_inches='tight')

```



La conclusión del análisis es que sin importar la condición inicial el plomo en sangre se estabiliza en un valor de $1800\mu\text{g}$ y en tejidos $800\mu\text{g}$. El plomo en huesos parece crecer a infinito.

9.3 Sistemas y ecuaciones de orden n

En general una ecuación lineal de orden n

$$x^{(n)}(t) = a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + a_{n-2}(t)x^{(n-2)}(t) + \cdots + a_0(t)x(t) + b(t).$$

se transforma en un sistema mediante

$$x_1 = x, x_2 = x', \dots, x_n = x^{(n-1)}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n = a_0(t)x_1 + a_1(t)x_2 + \cdots + a_{n-1}(t)x_n + b(t) \end{cases}$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ a_0(t) & a_1(t) & a_2(t) & \cdots & a_{n-1}(t) \end{pmatrix} \quad b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ b(t) \end{pmatrix}$$

Ejercicio 9.3.1 Cuando $b(t) = 0$ el problema se llama *homogéneo*. Demostrar que en este caso el conjunto de soluciones es un espacio vectorial

9.4 La matriz fundamental

Teorema 9.4.1 (Existencia y unicidad para Sistemas Lineales) Sea $A : I \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, $b : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ continuas. Entonces para cada $x_0 \in \mathbb{R}^n$ existe una única solución $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ del PVI.

$$\begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) + b(t), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Definición 9.4.1 (Matriz fundamental) Sean e^0, \dots, e^n los vectores canónicos de \mathbb{R}^n , $t_0 \in I \subset \mathbb{R}$. Definimos $\Phi^0, \dots, \Phi^n : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ como las soluciones de los PVI

$$\begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) \\ x(t_0) = e^k \end{cases}$$

La matriz fundamental se define como

$$G = [\Phi^1 | \dots | \Phi^n]$$

Observación: La matriz fundamental satisface

$$\begin{cases} G'(t) = A(t)G(t) \\ G(t_0) = I_{n \times n} \end{cases}$$

Ejemplo 9.4.2

$$x'' + \omega^2 x = 0.$$

Si $x_1 = x, x_2 = \dot{x}$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\omega^2 x_1 \end{cases} \quad (9.4)$$

Sabemos que

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_1^0 \cos \omega t + x_2^0 \sin \omega t, \\ x_2(t) &= -x_1^0 \omega \sin \omega t + x_2^0 \omega \cos \omega t, \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix} R(-\omega t) \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Para encontrar la matriz fundamental hay que resolver las condiciones iniciales $x(0) = e^1$ y $x(0) = e^2$. La condición $x(0) = e^1 \Rightarrow x_1^0 = 1$ y $x_2^0 = 0$ y la condición $x(0) = e^2 \Rightarrow x_1^0 = 0$ y $x_2^0 = 1/\omega$. Luego las columnas de la MF son

$$\Phi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix} R(-\omega t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix} R(-\omega t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\omega \end{pmatrix}$$

Entonces

$$G = [\Phi_1 | \Phi_2] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix} R(-\omega t) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\omega \end{pmatrix} = H R(-\omega t) H^{-1} \quad (9.5)$$

Teorema 9.4.2 si $G(t)$ es una matriz fundamental entonces $\Phi(t) = G(t)x_0$, con $x_0 \in \mathbb{R}^n$, es una solución general del problema homogéneo.

$$x' = Ax.$$

Ejercicio 9.4.2 Demostrar el Teorema ??.

Corolario 9.4.1 El conjunto de soluciones de $x' = Ax$ es un subespacio n -dimensional.

La matriz fundamental es invertible. Para probar esto necesitamos

Lema 9.4.1 Supongamos la función matricial $A : I \subset \mathbb{R}^{n \times n}$ descompuesta en bloques columna

$$A = [A_{*1} | \dots | A_{*n}].$$

Supongamos además que $A \in C^1(I, \mathbb{R}^{n \times n})$. Entonces

$$\frac{d}{dt} \det(A(t)) = \sum_{i=1}^n \det([A_{*1} | \dots | A'_{*i} | \dots | A_{*n}])$$

Dem. Usaremos la fórmula de Leibniz del determinante

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\epsilon(\sigma)} a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n},$$

donde S_n es el grupo simétrico de orden n , esto es el grupo de permutaciones de n -elementos y $\epsilon(\sigma)$ es la paridad de la permutación σ .

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \det(A) &= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\epsilon(\sigma)} a'_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\epsilon(\sigma)} a_{\sigma(1),1} a'_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n} \\ &\quad \vdots \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\epsilon(\sigma)} a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a'_{\sigma(n),n} \\ &= \sum_{i=1}^n \det([A_{*1} | \dots | A'_{*i} | \dots | A_{*n}]) \end{aligned}$$

□

Observación: También vale que

$$\frac{d}{dt} \det(A(t)) = \sum_{i=1}^n \det \begin{pmatrix} A_{1*} \\ \vdots \\ A'_{i*} \\ \vdots \\ A_{n*} \end{pmatrix} \quad (9.6)$$

Teorema 9.4.3 Si G es la matriz fundamental para $x' = Ax$ entonces

$$\det(G(t)) = e^{\int_{t_0}^t \operatorname{tr} A(s) ds} \quad (9.7)$$

Dem. Usamos (??) y que:

$$\begin{aligned} G'_{i*} &= \sum_{j=1}^n a_{ij} G_{j*} \\ \frac{d}{dt} \det(G(t)) &= \sum_{i=1}^n \det \begin{pmatrix} G_{1*} \\ \vdots \\ G'_{i*} \\ \vdots \\ G_{n*} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \det \begin{pmatrix} G_{1*} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} G_{j*} \\ \vdots \\ G_{n*} \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \det \begin{pmatrix} G_{1*} \\ \vdots \\ G_{j*} \\ \vdots \\ G_{n*} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n a_{ii} \det \begin{pmatrix} G_{1*} \\ \vdots \\ G_{i*} \\ \vdots \\ G_{n*} \end{pmatrix} = \text{tr}(A) \end{aligned}$$

Integrando sigue el resultado \square

Corolario 9.4.2 $G(t)$ es no singular.

Ejemplo 9.4.3 Para el oscilador armónico.

$$G(t) = \begin{pmatrix} \cos \omega t & \frac{\sin \omega t}{\omega} \\ -\omega \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix}. \quad (9.8)$$

$$\det(G(t)) = \cos^2 \omega t + \sec^2 \omega t = 1$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{tr}(A) = 0 \Rightarrow e^{\int_{t_0}^t \text{tr}(A) dt} = 1$$

9.5 Problema no homogéneo

Teorema 9.5.4 Supongamos $t_0 \in I \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $A : I \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ y $b : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ y que $G(t)$ matriz fundamental de $A(t)$ ($G' = AG$, $G(t_0) = I_{n \times n}$), entonces

$$\varphi(t) = G(t) \left[x_0 + \int_{t_0}^t (G(s))^{-1} b(s) ds \right] \quad (9.9)$$

es solución de

$$\begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (9.10)$$

Dem.

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}(t) &= \dot{G}(t) \left[x_0 + \int_{t_0}^t (G(s))^{-1} b(s) ds \right] + G(t)(G(t))^{-1} b(t). \\ &= AG \left[x_0 + \int_{t_0}^t (G(s))^{-1} b(s) ds \right] + b(t) \\ &= A\varphi(t) + b(t) \end{aligned}$$

□

Escribamos la fórmula (??)

$$\varphi(t) = G(t)x_0 + G(t) \int_{t_0}^t (G(s))^{-1} b(s) ds = \varphi_h(t) + \varphi_p(t)$$

Notar que φ_h resuelve el problema homogéneo y φ_p el no-homogéneo.

Ejemplo 9.5.4 Se trata de la ecuación

$$x''(t) = -\omega^2 x(t) + F(t).$$

Llamando $x_1 = x$ y $x_2 = x'$,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\omega^2 x_1(t) + F(t) \end{cases}$$

Alternativamente

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ F(t) \end{pmatrix}$$

$$G(t) = HR(-\omega t)H^{-1}, \quad R(-\omega t) = \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix}$$

Hallemos φ_p cuando $t_0 = 0$.

$$\varphi_p(t) = G(t) \int_0^t (G(s))^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ F(s) \end{pmatrix} ds = \int_0^t G(t)(G(s))^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ F(s) \end{pmatrix} ds$$

Tenemos

$$G(t)(G(s))^{-1} = HR(-\omega t)H^{-1}HR(\omega s)H^{-1} = HR(\omega(s-t))H^{-1}.$$

Ahora

$$\begin{aligned} \varphi_p(t) &= H \int_0^t R(\omega(s-t))H^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ F(s) \end{pmatrix} ds = H \int_0^t R(\omega(s-t)) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{F(s)}{\omega} \end{pmatrix} ds \\ &= \omega^{-1} H \int_0^t \begin{pmatrix} -\sin(\omega(s-t)) \\ \cos(\omega(s-t)) \end{pmatrix} F(s) ds = \omega^{-1} \int_0^t \begin{pmatrix} -\sin(\omega(s-t)) \\ \cos(\omega(s-t)) \end{pmatrix} F(s) ds \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} x_1(t) &= -\frac{1}{\omega} \int_0^t \sin(\omega(s-t)) F(s) ds \\ x_2(t) &= \frac{1}{\omega} \int_0^t \cos(\omega(s-t)) F(s) ds \end{aligned}$$

9.6 Sistemas lineales homogéneos con coeficientes constantes

Son sistemas de la forma

$$x' = Ax, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (9.11)$$

La forma de resolver es considerar la sustitución

$$y = P^{-1}x \quad (9.12)$$

donde P es no singular. Entonces

$$y' = P^{-1}x' = P^{-1}Ax = P^{-1}APy$$

Es una ecuación de la forma

$$y' = By, \quad \text{con } B \sim A.$$

¿Que sistemas sabríamos resolver? Si B fuese diagonal

$$B = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$$

Entonces quedaría un sistema *desacomplado* que podríamos resolver

$$\begin{aligned} y'_1 &= \lambda_1 y_1 \\ &\vdots \\ y'_n &= \lambda_n y_n \end{aligned}$$

Las soluciones son:

$$y_j(t) = A_j e^{\lambda_j t}, \quad A_j \in \mathbb{R}$$

La matriz fundamental es

$$G(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \quad (9.13)$$

Pero desafortunadamente no toda matriz es diagonalizable.

Ejercicio 9.6.3 Demostrar que si $v \in \mathbb{R}^n$ es un autovector asociado al autovalor λ de A entonces $x(t) = e^{\lambda t}v$ es solución de $x' = Ax$.

9.6.1 Exponencial de matrices

La solución de

$$\begin{cases} x(t) = \lambda x(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

con $\lambda, x_0 \in \mathbb{R}$, $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, es $x(t) = e^{\lambda t}a$. Razonando por analogía, la de

$$\begin{aligned} x' &= Ax \\ x(0) &= x_0 \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

debería ser

$$x(t) = e^{At}x_0$$

Para ello deberíamos darle sentido a la exponencial de una matriz.

Recordemos que sobre el espacio de las matrices cuadradas se dice que una norma se llama *norma matricial* si satisface

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|.$$

Hay muchas normas matriciales, todas equivalentes. Por ejemplo

$$\|A\| = \sup\{\|Ax\| \mid x \in \mathbb{R}^n, \|x\| = 1\}.$$

Estas normas dotan a $\mathbb{R}^{n \times n}$ de una estructura de *espacio de Banach*, es decir es un espacio normado completo.

Definición 9.6.2 Sean $A_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $j = 0, 1, \dots$ una sucesión de matrices. Diremos que la serie

$$\sum_{j=0}^{\infty} A_j$$

converge si la sucesión de sumas parciales

$$S_m = \sum_{j=0}^m A_j$$

converge en el espacio métrico de las matrices dado por una norma matricial.

Teorema 9.6.5 Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Entonces la serie matricial

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = I + A + \frac{A^2}{2!} + \dots$$

converge. La matriz resultante se denomina exponencial de A y se denota e^A .

Dem. Veamos que la sucesión de sumas parciales es de Cauchy. Sean $M > N$.

$$\|S_M - S_N\| = \left\| \sum_{j=N+1}^M \frac{A^j}{j!} \right\| \leq \sum_{j=N+1}^M \frac{\|A\|^j}{j!}$$

y la última suma puede hacerse tan chica como queramos pues la serie

$$e^{\|A\|} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|A\|^n}{n!}$$

es convergente □

Ejemplo 9.6.5 Si

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Entonces

$$A^j = \begin{pmatrix} \lambda_1^j & 0 & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n^j \end{pmatrix}$$

Luego si $t \in \mathbb{R}$

$$e^{tA} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} \begin{pmatrix} \lambda_1^j & 0 & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} \lambda_1^j & 0 & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} \lambda_n^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

Que resulta ser la matriz fundamental del sistema $x' = Ax$.

Ejemplo 9.6.6 Calculemos aproximaciones de la exponencial con SymPy para el sistema

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

```

1   from sympy import *
2   omega,t=symbols('omega,t')
3   A=Matrix([[0, 1], [-omega**2,0]])
4   G=t**0*A**0
5   for j in range(1,10):
6       G=G+t**j*A**j/factorial(j)

```

Se obtiene

$$\sum_{j=0}^{10} t^j \frac{A^j}{j!} = \left(-\frac{\frac{\omega^8 t^8}{40320} - \frac{\omega^6 t^6}{720} + \frac{\omega^4 t^4}{24} - \frac{\omega^2 t^2}{6} + 1}{\frac{362880}{\omega^{10} t^{10}} + \frac{5040}{\omega^8 t^8} - \frac{120}{\omega^6 t^6} + \frac{6}{\omega^4 t^4} - \omega^2 t^2} \quad \frac{\frac{\omega^8 t^9}{362880} - \frac{\omega^6 t^7}{5040} + \frac{\omega^4 t^5}{120} - \frac{\omega^2 t^3}{24} + t}{\frac{40320}{\omega^8 t^8} - \frac{720}{\omega^6 t^6} + \frac{24}{\omega^4 t^4} - \frac{6}{\omega^2 t^2} + 1} \right). \quad (9.14)$$

Comparar con (??).

Ejemplo 9.6.7 Una matriz $N \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se llama *nilpotente de orden r* si $0 \neq N, O \neq N^2, \dots, O \neq N^{r-1}$ y $0 = N^r$. Si N es nilpotente entonces

$$e^{tN} = I + tN + \frac{t^2}{2}N^2 + \dots + \frac{t^{r-1}}{(r-1)!}N^r$$

La matriz

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

es nilpotente. Notar que sobre un vector opera

$$N \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \\ 0 \end{pmatrix}$$

Luego

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

\vdots

$$N^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

$$N^n = \mathbf{0}$$

Luego

$$\begin{aligned}
e^{Nt} &= I + tN + \frac{t^2}{2!}N^2 + \cdots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}N^{n-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & t \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{t^2}{2!} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & t \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ejemplo 9.6.8 Calculemos e^R donde

$$R = \begin{pmatrix} \mu & \nu \\ -\nu & \mu \end{pmatrix}$$

Definición 9.6.3

$$\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} \mu & \nu \\ -\nu & \mu \end{pmatrix} \mid \mu, \nu \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ejercicio 9.6.4 (a) M es cuerpo. (b) La función:

$$\begin{aligned}
f : \mathbb{C} &\rightarrow \mathcal{M} \\
\mu + i\nu &\mapsto \begin{pmatrix} \mu & \nu \\ -\nu & \mu \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

es continua y un isomorfismo de cuerpos.

$$R = \begin{pmatrix} \mu & \nu \\ -\nu & \mu \end{pmatrix} = f(\mu + \nu i) = f(z)$$

$$\begin{aligned}
e^R &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(I + R + \cdots + \frac{R^n}{n!} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(f(1) + f(z) + \frac{f^2(z)}{2!} + \cdots + \frac{f^n(z)}{n!} \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} f \left(1 + z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^n}{n!} \right) = f \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + z + \cdots + \frac{z^n}{n!} \right) \right) \\
&= f(e^z) = f(e^\mu(\cos \nu + i \sin \nu)) = \begin{pmatrix} e^\mu \cos \nu & e^\mu \sin \nu \\ -e^\mu \sin \nu & e^\mu \cos \nu \end{pmatrix} = e^\mu \begin{pmatrix} \cos \nu & \sin \nu \\ -\sin \nu & \cos \nu \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{9.15}$$

Teorema 9.6.6 (Propiedades de la exponencial)

1. $e^0 = I$,
2. $e^{P^{-1}AP} = P^{-1}e^A P$. En particular $A \sim B \Rightarrow e^A \sim e^B$,
3. Si A comuta con B ($AB = BA$) entonces

$$e^{A+B} = e^A e^B,$$

4. e^A es no singular y $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.

Dem. Demostremos 2. Observar que

$$(P^{-1}AP)^n = P^{-1}APP^{-1}AP \cdots P^{-1}AP = P^{-1}A^n P$$

Luego

$$e^{P^{-1}AP} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(P^{-1}AP)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P^{-1}A^n P}{n!} = P^{-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \right) P = P^{-1}e^A P.$$

Demostremos 3. Usando la formula del binomio de Newton

$$(A+B)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} A^j B^{n-j}$$

Luego

$$e^{A+B} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} A^j B^{n-j}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} e^A e^B &= \left(I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots \right) \left(I + B + \frac{B^2}{2} + \frac{B^3}{3} + \cdots \right) \\ &= I + A + B + \frac{A^2}{2} + AB + \frac{B^2}{2} + \frac{A^3}{3!} + \frac{A^2}{2!} B + A \frac{B^2}{2!} + \frac{B^3}{3} + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} A^j B^{n-j} = e^{A+B} \end{aligned}$$

□

Teorema 9.6.7 (Exponencial y matriz fundamental) Si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ entonces

$$\frac{d}{dt} e^{At} = Ae^{At} = e^{At} A$$

Luego si $G(t) = e^{At}$, como $G(0) = I$, $G(t)$ es la matriz fundamental para el sistema $x' = Ax$ en $t_0 = 0$.

Dem.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e^{tA} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{(t+h)A} - e^{tA}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{hA} e^{tA} - e^{tA}}{h} = \left[\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{e^{hA} - I}{h} \right) \right] e^{tA} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(hA + \frac{h^2}{2} A^2 + \cdots \right)}{h} e^{tA} = A \lim_{h \rightarrow 0} (I + h(A + \cdots)) e^{tA} = Ae^{tA} \end{aligned}$$

□

9.7 Exponenciales y formas de Jordan

Un bloque elemental de Jordan asociado a un autovalor real $\lambda \in \mathbb{R}$ es una matriz de la siguiente forma

$$\begin{aligned} J &= \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \lambda \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \\ &= \lambda I + N. \end{aligned}$$

Como $t\lambda I$ y tN comutan

$$e^{tJ} = e^{t(\lambda I + N)} = e^{t\lambda I} e^{tN}.$$

Cada uno de los factores $e^{t\lambda I}$ y e^{tN} los hemos calculado.

Un bloque elemental de Jordan asociado a un autovalor complejo $\lambda = \mu + i\nu \in \mathbb{C}$ es una matriz de la siguiente forma

$$\begin{aligned} J &= \begin{pmatrix} R & I & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & R & I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & R & I \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & R \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} R & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & R & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & R & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & R \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & I & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & I \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \\ &= D + N. \end{aligned}$$

En las fórmulas anteriores

$$R = \begin{pmatrix} \mu & -\nu \\ \nu & \mu \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

J debe tener una cantidad par de filas y columnas.

Ejercicio 9.7.5 Demostrar que si $D, N \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$

1.

$$\begin{aligned} e^{Nt} &= I + tN + \frac{t^2}{2} N^2 + \cdots + \frac{t^{n-1}}{n-1} N^{n-1} \\ &= \begin{pmatrix} I & tI & \frac{t^2}{2!} I & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} I \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{t^2}{2!} I \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & tI \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & I \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2.

$$e^{tD} = \begin{pmatrix} e^{Rt} & 0 & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{Rt} \end{pmatrix}$$

Recordar que e^{Rt} la hemos calculado en el ejemplo ??.

El Teorema de Jordan asegura que dada cualquier matriz existe una matriz no singular P tal que $P^{-1}AP = J$, donde J es una matriz diagonal por bloques,

$$J = \text{diag}\{J_1, J_2, \dots, J_r\},$$

y cada bloque J_k es un bloque elemental de Jordan asociado a algún autovalor. A un mismo autovalor de A pueden estar asociados varios bloques elementales de Jordan. Para la descripción precisa de la matriz J y para una discusión de como calcularla ver [?], también ver [?].

9.8 Clasificación de los retratos de fases de los sistemas planos

9.8.1 Retratos de fases

En física el espacio de fases es un sistema cartesianos donde se representan variables posicionales y sus velocidades. En el espacio de fases no se representa el tiempo. Por ejemplo, en el caso del sistema masa-resorte hay una variable posicional, digamos x . Por consiguiente, el espacio de fases del resorte es un espacio euclídeo 2-dimensional, una coordenada para la posición x y otro para x' . En general llamaremos *espacio de fases* asociado a un sistema bidimensional de ecuaciones $x' = Ax + b(t)$ al espacio euclídeo \mathbb{R}^2 donde las coordenadas representadas en los ejes del sistema cartesiano son las dos coordenadas de la variable dependiente $x = (x_1, x_2)$ del sistema de ecuaciones. Una *trayectoria* u *órbita* del sistema es la representación gráfica del conjunto $\{(x_1(t), x_2(t)) \mid t \in \mathbb{R}\}$, donde (x_1, x_2) es una solución. Un *retrato de fases* es representar diversas trayectorias en el espacio de fases. El estudio del retrato de fases es muy importante para entender propiedades de las soluciones, especialmente cuando el sistema es *autónomo*. Un sistema lineal es autónomo cuando es homogéneo.

Ejemplo 9.8.9 Vamos a usar SymPy para hacer un retrato de fases del sistema (??) (con $\omega = 1$). Usamos (??) para calcular la matriz fundamental.

```

1  from sympy import *
2  t=symbols('t')
3  H=Matrix([[1, 0],[0,1]])
4  R=Matrix([[cos(t), sin(t)],[ -sin(t),cos(t)]])
5  G=H*R*H.inv()
6  Phi=G*Matrix([[.1],[0]])
7  P=plot_parametric(Phi[0],Phi[1],(t,0,2*pi),show=False,\n                  aspect_ratio=(1,1))
8  X=[0.1*n for n in range(1,20)]
9  for x0 in X:
10     Phi=G*Matrix([[x0],[0]])
11     P.append(plot_parametric(Phi[0],Phi[1],(t,0,2*pi),\n                               show=False,aspect_ratio=(1,1))[0])
12
13
14 P.show()
```

9.8.2 Polinomio característico de una matriz $A \in A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$

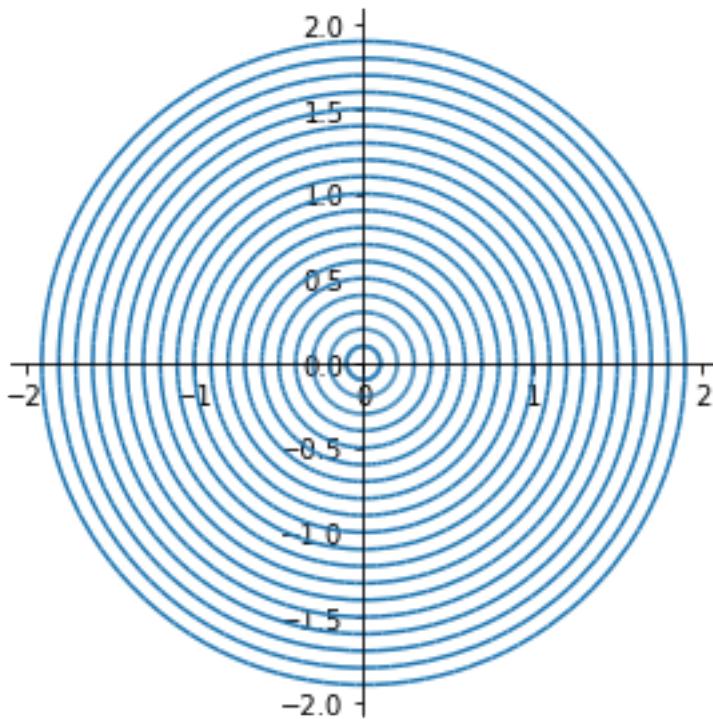


Figura 9.8.1: Retrato de fases para el oscilador armónico

Dada $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ su polinomio característico es

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A) =: \lambda^2 - \tau\lambda + \delta \quad (9.16)$$

Donde la *traza*, *determinante* y *discriminante* son

$$\tau = \text{tr}(A), \quad \delta = \det(A), \quad \text{y} \quad \Delta = \tau^2 - 4\delta.$$

Los autovalores

$$\lambda_1 = \frac{\tau - \sqrt{\Delta}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{\tau + \sqrt{\Delta}}{2}$$

satisfacen

$$\lambda_1 \leq \lambda_2, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = \tau, \quad \lambda_1 \lambda_2 = \delta.$$

9.8.3 Caso $\delta < 0$

En esta situación tendremos que $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, y la matriz A es diagonalizable. Luego existe $P \in \text{Gl}(2, \mathbb{R})$ tal que

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = P^{-1}AP.$$

Las columnas de P son autovectores de A . Si hacemos el cambio de variables (??) acorde a (??) y Teorema ??

$$y(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} y_1^0 \\ e^{\lambda_2 t} y_2^0 \end{pmatrix} \quad (9.17)$$

Es la solución general de $y' = By = P^{-1}APy$. Observar que $y(0) = (y_1^0, y_2^0)$. Eliminando t de las relaciones $y_1(t) = e^{\lambda_1 t} y_1^0$ y $y_2(t) = e^{\lambda_2 t} y_2^0$ conseguimos (si $y_1^0 \neq 0$)

$$\frac{1}{\lambda_2} \ln \left(\frac{y_2}{y_2^0} \right) = t = \frac{1}{\lambda_1} \ln \left(\frac{y_1}{y_1^0} \right) \Rightarrow y_2 = y_2^0 e^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \ln \left(\frac{y_1}{y_1^0} \right)} = y_2^0 \left(\frac{y_1}{y_1^0} \right)^\alpha, \quad (9.18)$$

donde $\alpha = \lambda_2/\lambda_1 < 0$. Tomamos la parte principal de la función potencia que está bien definida y está en \mathbb{R} pues siempre $y_1/y_1^0 > 0$. Tomando en cuenta los signos de λ_1, λ_2

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y_1(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} y_2(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} y_1(t) = \infty, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} y_2(t) = 0.$$

En la figura ?? representamos un retrato de fases del sistema $y' = By$, cuando $\lambda_1 = -2$ y $\lambda_2 = 1$. Notar que agregamos flechas indicando el recorrido de la curva cuando t va de $-\infty$ a $+\infty$, lo que es una práctica habitual. Si $(y_1^0, y_2^0) = (0, 0)$ entonces $(y_1(t), y_2(t)) = (0, 0)$ para todo t . Esta solución se denomina *estacionaria* pues es constante en el tiempo. También se dice que $(0, 0)$ es un *punto de equilibrio*. Esa solución se representada en rojo en el retrato de fases. Observar que dos trayectorias distintas no tienen puntos en común, a menos que sean la misma trayectoria. Esta observación se mantiene cierta para todos sistemas de ecuaciones que sea autónomo, esto es que se escriba $x'(t) = f(x(t))$, con f independiente de t . En particular ninguna trayectoria pasa por el $(0, 0)$ a menos que sea la trayectoria estacionaria. Si $y_2^0 = 0$ entonces $y_2(t) = 0$ para todo t y la solución permanece sobre el eje y_1 . En ese caso se dice que el eje $y_2 = 0$ es un *subespacio invariante*. De igual manera el eje $y_1 = 0$ es un subespacio invariante en este caso.

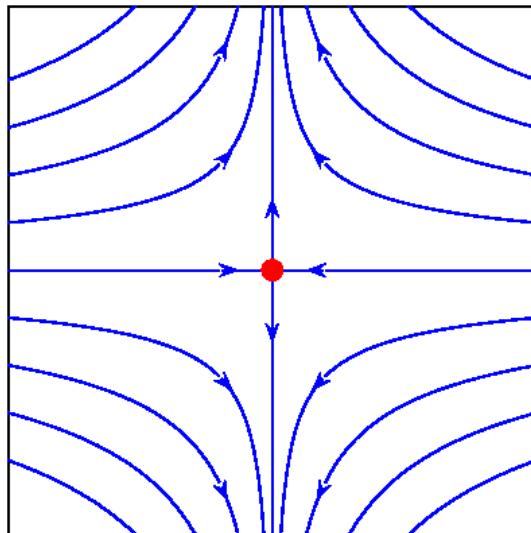


Figura 9.8.2: Retrato de fases ecuación $y'_1 = -2y_1, y'_2 = y_2$

Recordemos que las variables originales están relacionadas con y por medio de $x = Py$. La transformación $v \mapsto Pv$ lleva los ejes coordenados en las líneas por el $(0, 0)$ con la dirección de los autovectores. El retrato de fases correspondiente al sistema original $x' = Ax$ tiene por subespacios invariantes los ejes determinados por los autovectores. Las soluciones se hacen asintóticas cuando $t \rightarrow +\infty$ a la línea determinada por el autovector correspondiente al autovalor positivo, es decir λ_2 . En la figura ?? se representa un retrato de fases correspondiente a

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

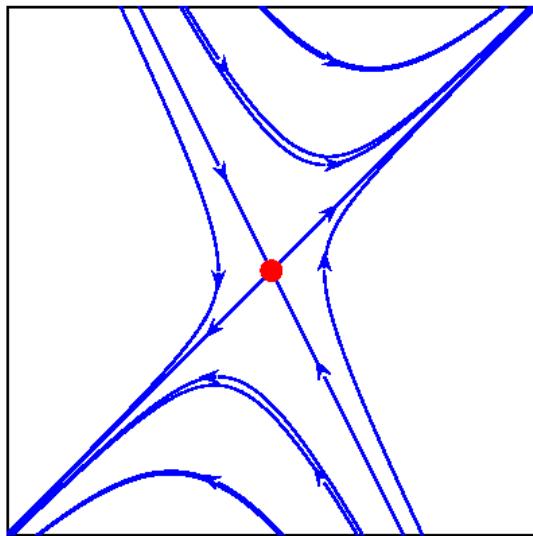


Figura 9.8.3: Retrato de fases ecuación $y'_1 = y_2, y'_2 = 2y_1 - y_2$

9.8.4 Caso $\delta = 0$

La matriz es singular vanuoso a dejar como ejercicio el estudio de este caso. Observar que el nucleo de la matriz es no trivial y si $(x_1^0, x_2^0) \in \text{Ker } A$ entonces $x(t) \equiv (x_1^0, x_2^0)$ es solución estacionaria. En este caso hay más equilibrios que el $(0, 0)$. La figura ?? representa un retrato de fases de un sistema de estas características.

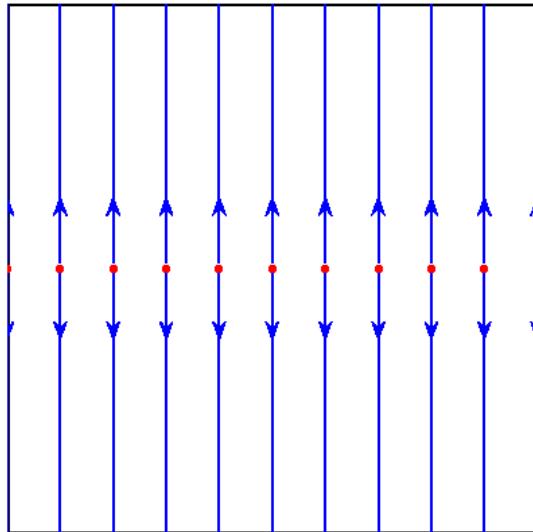


Figura 9.8.4: Retrato de fases de la ecuación $x'_1 = 0, x'_2 = x_2$

9.8.5 Caso $\delta > 0, \Delta > 0 (\delta < \frac{\tau^2}{4})$

Los autovalores son reales, distintos y del mismo signo. El signo de los autovalores es igual al signo de τ . La matriz nuevamente es diagonalizable, la expresión de las soluciones es la misma que en el caso de sillas, es decir para las variables y las ex-

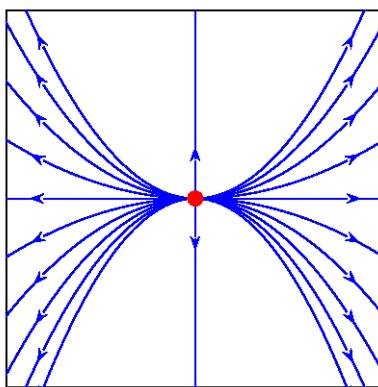
presiones ?? y ??, lo que cambia es el signo del exponente α , ahora $\alpha > 0$. Así las curvas $y_2 = y_2^0 (y_1/y_1^0)^\alpha$ pasan por el origen. Sin embargo, es oportuno remarcar, que una trayectoria corresponde solo a una rama de esa curva completa, recordar que una trayectoria no puede pasar por $(0, 0)$ a menos que sea la solución estacionaria. En este caso tendremos que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y_1(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} y_2(t) = \infty \quad y \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} y_1(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} y_2(t) = 0,$$

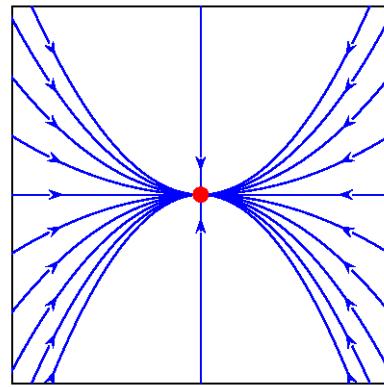
cuando $\tau > 0$. Cuando $\tau < 0$ vale que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y_1(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} y_2(t) = 0 \quad y \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} y_1(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} y_2(t) = \infty.$$

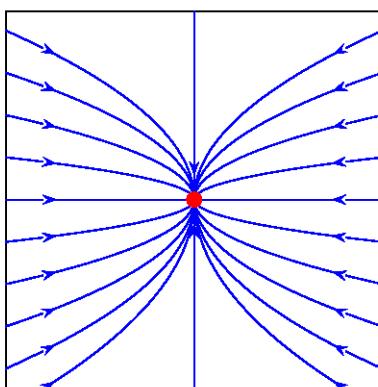
La primera situación se dice que el $(0, 0)$ es un *nodo inestable* y en la segunda que es un *nodo estable*. En las figuras ?? y ?? se grafican un ejemplo de cada uno. La curvatura de las trayectorias, esto es si son concavas o convexas, depende de si $\alpha > 1$ o $\alpha < 1$, en la figura ?? se grafica un nodo estable con $\alpha < 1$. En la figura ?? se muestra un nodo estable con $\alpha = 1$.



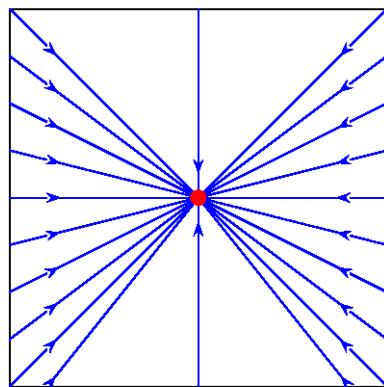
(a) Retrato de fases de la ecuación $x'_1 = x_1, x'_2 = 2x_2$ (nodo inestable)



(b) Retrato de fases de la ecuación $x'_1 = -x_1, x'_2 = -2x_2$ (nodo estable)



(c) Retrato de fases de la ecuación $x'_1 = -2x_1, x'_2 = -x_2$ (nodo estable)



(d) Retrato de fases de la ecuación $x'_1 = -x_1, x'_2 = -x_2$ (nodo estable)

Figura 9.8.5: Distintos tipos de nodos

En las figuras ?? se representaron retratos de fases cuando A ya estaba en forma diagonal. En esta situación los subespacios invariantes son los ejes de coordenadas. Cuando A no está en su forma diagonal, pero continua en el caso que estamos analizando, los retratos de fases resultan de aplicarle la transformación lineal P a los retratos de las figuras ??, donde P , diagonaliza A . Los subespacios invariantes serán las columnas de P que a la postre son un sistema de autovectores linealmente independiente de A .

Desarrollaremos un ejemplo con SymPy. En SymPy pueden definir matrices y tienen muchas funciones y métodos actuando sobre estas matrices. Por ejemplo `A.diagonalize()` nos retorna una par de matrices P y D que, por supuesto satisfacen que D es diagonal y $PDP^{-1} = A$, las columnas de P son autovectores de A . Por supuesto A podría ser no-diagonalizable, en cuyo caso la función `diagonalize()` retorna error.

Ejemplo 9.8.10 Consideremos

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

```

1 A=Matrix([[-2, -1],[0,-1]])
2 delta=A.det()
3 tau=A.trace()
4 delta>0,delta<tau**2/4

```

Resulta (True, True). Estamos en el caso $\delta > 0, \delta < \tau^2/4$.

```

1 P,D=A.diagonalize()

```

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

```

1 tau<0

```

Resulta True. Por todo lo anterior el retrato de fases corresponde a un nodo estable con subespacios invariantes dados por las rectas paralelas a los vectores $(1, 0)$ y $(-1, 1)$. En la figura ?? representamos el retrato de fases, los subespacios invariantes están indicados en color verde.

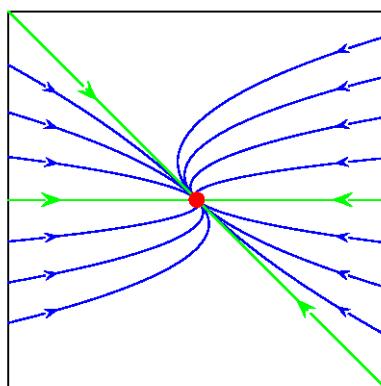


Figura 9.8.6: Retrato de fases de la ecuación $x'_1 = -2x_1 - x_2, x'_2 = -x_2$ (nodo estable)

9.8.6 Caso $\delta > 0, \Delta = 0$ ($\delta = \frac{\tau^2}{4}$)

En esta situación los autovalores son iguales $\lambda_1 = \lambda_2 =: \lambda$. La matriz puede o no ser diagonalizable. Si lo fuera, existiría $P \in \text{GL}(2, \mathbb{R})$ tal que

$$\lambda I = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = P^{-1}AP.$$

Despejando deducimos que $A = \lambda I$. Así nuevamente las soluciones vienen dadas por (??) con $\lambda = 1 = \lambda_2$ y el retrato de fases es como el de la figura ?? (podría ser inestable si $\lambda > 0$).

Si A es no diagonalizable, es decir λ es un autovalor definiciente o, más concreto aún, la dimensión del autoespacio asociado a λ es 1, entonces el Teorema de Jordan me dice que $A \sim J$ con

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =: D + N$$

Calculemos e^{tJ} .

$$e^{tJ} = e^{tD}e^{tN} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}$$

La solución general del sistema $y' = Jy$ es:

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} \alpha + \beta t \\ \beta \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y_1(t) = e^{\lambda t}(\alpha + \beta t) \\ y_2(t) = \beta e^{\lambda t} \end{cases}$$

Si $y_0^0 = 0$ entonces $y_2(t) = 0$ e $y_1(t) = \alpha e^{\lambda t}$. Luego el eje y_1 es un subespacio invariante. Si $\beta \neq 0$ entonces y_2 no cambia de signo, niunca se cruza el eje y_1 . Facilmente se muestra que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y_1(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} y_2(t) = \infty \quad y \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} y_1(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} y_2(t) = 0,$$

si $\lambda > 0$ y

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y_1(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} y_2(t) = 0 \quad y \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} y_1(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} y_2(t) = \infty,$$

si $\lambda < 0$

De la segunda ecuación

$$t = \frac{1}{\lambda} \ln \left(\frac{y_2}{\beta} \right).$$

Reemplazando en la primera, llamando $z = y_2/\beta$, $w = y_1/\alpha$, $\gamma = \frac{1}{\alpha\lambda}$.

$$w = \frac{y_1}{\alpha} = y_1 = \frac{y_2}{\alpha\beta} \left(\alpha + \frac{\beta}{\lambda} \ln \left(\frac{y_2}{\beta} \right) \right) = z + \gamma z \ln(z) = g(z).$$

Supongamos $\gamma > 0$. Puede verse que $g(z)$ satisface que

1.

$$g(z) \begin{cases} > 0, & \text{si } z > e^{-\frac{1}{\gamma}} \\ = 0, & \text{si } z = e^{-\frac{1}{\gamma}} \\ < 0, & \text{si } z < e^{-\frac{1}{\gamma}} \end{cases}$$

2. $\lim_{z \rightarrow 0} g(z) = 0$,

3. g es creciente en $(e^{-\frac{\gamma-1}{\gamma}}, +\infty)$ y decreciente en $(-\infty, e^{-\frac{\gamma-1}{\gamma}})$

Todo este análisis explica que el retrato de fases tiene la apariencia de la figura ???. Corresponde a un nodo estable, tal como el de la figura ?? donde los dos subespacios invariantes coinciden.

9.8.7 Caso $\delta > 0, \Delta < 0 (\delta > \frac{\tau^2}{4})$

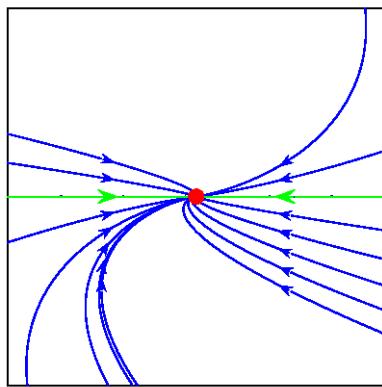


Figura 9.8.7: Retrato de fases de la ecuación $x'_1 = -x_1 + x_2, x'_2 = -x_2$ (nodo estable)

En este caso la matriz es diagonalizable y los autovalores $\lambda = \mu \pm \nu i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Se conoce desde la teoría de diagonalización de matrices (ver [?]) que existe una matriz $P \in \text{GL}(2, \mathbb{R})$ tal que

$$J = \begin{pmatrix} \mu & \nu \\ -\nu & \mu \end{pmatrix} = P^{-1}AP$$

Una manera de obtener P es considerar un autovector V asociado a uno de los autovalores, digamos $\mu + \nu i$, y poner $P = [\text{Re}(V), \text{Im}(V)]$.

Resulta que el retrato de fases de $x'Ax$ se obtiene del retrato de fases de $y' = Ry$ aplicando la transformación P . En (??) se obtuvo que

$$e^{tR} = e^{\mu t} \begin{pmatrix} \cos \nu t & \sin \nu t \\ -\sin \nu t & \cos \nu t \end{pmatrix}$$

Se tiene que

$$R(t) := \begin{pmatrix} \cos \nu t & \sin \nu t \\ -\sin \nu t & \cos \nu t \end{pmatrix} \in O(2, \mathbb{R}),$$

es decir $R(t)$ es una matriz especial ortogonal ($R^t R = RR^t = I$, $\det(R) = 1$), de hecho $R(t)$ corresponde a una rotación en un ángulo de νt alrededor del origen. Dado un vector fijo de condiciones iniciales $(\alpha, \beta)^t \in \mathbb{R}^2$ tendremos que la aplicación

$$y : t \mapsto e^{\mu t} \begin{pmatrix} \cos \nu t & \sin \nu t \\ -\sin \nu t & \cos \nu t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

corresponde a una rotación de un ángulo de νt seguido de un cambio de escala (homotecia) en un factor de $e^{\mu t}$. Esto explica que el retrato de fases luzca como xxxxxxx

Ejemplo 9.8.11 Consideremos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

```

1 A=Matrix([[1, 4], [-2, -3]])
2 delta=A.det()
3 tau=A.trace()
4 delta>0,delta>tau**2/4

```

Resulta (True, True). Estamos en el caso $\delta > 0, \delta > \tau^2/4$.

```

1 V,D=A.diagonalize()

```

$$V = \begin{pmatrix} -1+i & -1-i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1-2i & 0 \\ 0 & -1+2i \end{pmatrix}.$$

Como dijimos arriba hay que considerar

```
1 P=Matrix([re(V[:,0]).T,im(V[:,0]).T])
```

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

```
1 J=P.inv()*A*P
```

$$J = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Luego la matriz fundamental es

$$\begin{aligned} G(t) &= \exp(At) = \exp(tPJP^{-1}) = P \exp(tJ)P^{-1} \\ &= e^{-t} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(-2t) & \sin(-2t) \\ -\sin(-2t) & \cos(-2t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= e^{-t} \begin{pmatrix} \sin(2t) + \cos(2t) & 2\sin(2t) \\ -\sin(2t) & -\sin(2t) + \cos(2t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Como cabia imaginar, SymPy sabe calcular exponencial de matrices.

```
1 t=symbols('t',real=True)
2 G=exp(t*A)
```

Obetenemos

$$G = \begin{pmatrix} e^{-t} \sin(2t) + e^{-t} \cos(2t) & 2e^{-t} \sin(2t) \\ -e^{-t} \sin(2t) & -e^{-t} \sin(2t) + e^{-t} \cos(2t) \end{pmatrix},$$

que coincide con nuestros cálculos previos.

La solución general se obtiene tomando $y_0 = (y_0^1, y_0^2)$ y poniendo

$$x(t) = G(t)y_0 = e^{-2t}PR(-2t)P^{-1}y_0.$$

Luego teniendo en cuenta que R es ortogonal

$$\|P^{-1}x(t)\| = e^{-2t}\|R(-2t)P^{-1}y_0\| = e^{-2t}\|P^{-1}y_0\|$$

Entonces $\|P^{-1}x(t)\| \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow +\infty$. De esto se infiere que $\|x(t)\| \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow +\infty$.

El retrato de fases es representado en la figura ?? y se dice que el origen es un *foco estable*.

Cuando el autovalor tiene parte real negativa entonces el retrato de fases es similar pero las soluciones tienden a $+\infty$ cuando $t \rightarrow +\infty$. Esos casos se llaman *focos inestables*.

Un caso especial ocurre cuando el autovalor tiene parte real igual a cero. En ese caso la solución general tiene la forma

$$x(t) = P \begin{pmatrix} \cos(\nu t) & \sin(\nu t) \\ -\sin(\nu t) & \cos(\nu t) \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

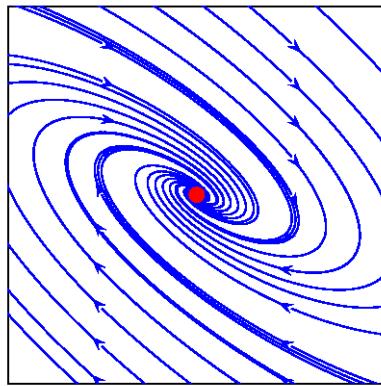


Figura 9.8.8: Retrato de fases de la ecuación $x'_1 = x_1 + 4x_2, x'_2 = -2x_1 - 3x_2$ (foco estable)

Así en el momento t el vector $w(t) := RP^{-1}(\alpha, \beta)^t$ se determina rotando el vector $P^{-1}(\alpha, \beta)^t$ un ángulo de νt . Por consiguiente $w(t)$ recorre una circunferencia. La imagen de una circunferencia por la transformación P resulta ser una elipse. Luego la variable $x = Pw$ recorrerá una elipse. En estos casos se dice que el retrato de fases, o el origen, es un *centro*, ver la figura ??.

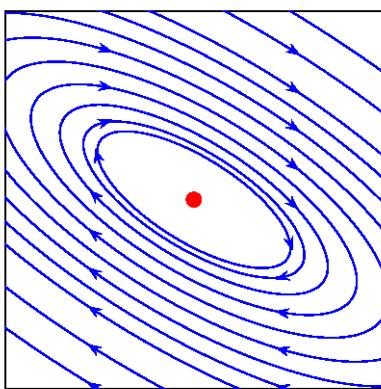


Figura 9.8.9: Retrato de fases de la ecuación $x'_1 = 2x_1 + 4x_2, x'_2 = -2x_1 - 2x_2$ (centro)

9.9 El problema no-homogéneo para sistemas con coeficientes constantes

Corolario 9.9.3 Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ constante, $t_o \in \mathbb{R}$ y $x_0 \in \mathbb{R}^n$. La solución del PVI

$$\begin{cases} x' &= Ax + b(t) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

viene dada por la expresión

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)}b(s)ds \quad (9.19)$$

Dem. Se verifica que la matriz $G(t) = e^{A(t-t_0)}$ resuelve $G'(t) = AG(t)$ y $G(t_0) = I$. Luego es una matriz fundamental del sistema $x' = Ax$ en t_0 . Usando la fórmula (??) y inciso 4. del Teorema ?? deuducimos

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} \left[x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)}b(s)ds \right] = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)}b(s)ds$$

□

9.10 Ejemplos

Ejemplo 9.10.12 Sea $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{11}{18} & \frac{34}{45} & -\frac{22}{45} \\ -\frac{62}{45} & \frac{53}{90} & -\frac{28}{45} \\ -\frac{1}{45} & \frac{23}{45} & -\frac{7}{90} \end{pmatrix}$$

Usemos la función `jordan_form` de SymPy para averiguar la forma de Jordan compleja asociada a A .

```

1 from sympy import *
2 A=Rational(1,90)*Matrix([[-55, 68, -44], \
3 [-124, 53, -56], \
4 [-2, 46, -7]])
5 P1,J1=A.jordan_form()
```

$$P_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 1-i & 1+i \\ \frac{1}{3} & -2i & 2i \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad J_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{10}-i & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{10}+i \end{pmatrix}.$$

El espectro de la matriz A es

$$\sigma(A) = \left\{ \frac{1}{10}, -\frac{1}{10}-i, -\frac{1}{10}+i \right\}$$

La matriz es diagonalizable. Para llevar a la matriz A a su forma de Jordan real, hay que tomar como P la matriz cuyas columnas son los autovectores asociados a los autovalores reales y para los autovalores complejos tomar la parte real e imaginaria del autovector correspondiente a uno del par de autovalores, digamos en nuestro ejemplo el $-2+i$. Luego

```

1 P=Matrix([P1[:,0].T,re(P1[:,2]).T,im(P1[:,2]).T]).T
2 J=P.inv()*A*P
```

Obtenemos

$$P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 1 & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{10} & 1 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{10} \end{pmatrix}.$$

Este resultado nos indica que las soluciones se comportaran como un foco estable en el subespacio generado por los vectores

$$V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

y como e^t sobre el subespacio generado por

$$V_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

El subespacio S_1 generado por V_1 y el S_2 generado por $\{V_2, V_3\}$ son invariantes. Una solución que inicialmente está en S_1 permanece allí y tiende a $+\infty$. En cambio si inicialmente está en S_2 permanecerá en el plano S_2 describiendo una trayectoria de foco estable. Es de esperar que una solución cualquiera tienda a $+\infty$ a medida que se va enrollando alrededor del eje generado por V_1 .

Observar que

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{\frac{t}{10}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\frac{t}{10}} \cos(t) & e^{-\frac{t}{10}} \sin(t) \\ 0 & -e^{-\frac{t}{10}} \sin(t) & e^{-\frac{t}{10}} \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Luego

$$\begin{aligned} e^{tA} &= e^{tPJP^{-1}} = Pe^{tJ}P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 1 & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\frac{t}{10}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\frac{t}{10}} \cos(t) & e^{-\frac{t}{10}} \sin(t) \\ 0 & -e^{-\frac{t}{10}} \sin(t) & e^{-\frac{t}{10}} \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La matriz que resulta de la multiplicación de matrices del último término es demasiado complicada para dejarla escrita.

Grafiquemos una solución con condición inicial en S_2

```
from sympy.plotting import plot3d_parametric_line
G=exp(t*A)
sol=G*P[:,2]
p=plot3d_parametric_line(sol[0],sol[1],sol[2],\
(t,-10,12),line_color='blue')
sol=G*P[:,0]
p.append(plot3d_parametric_line(sol[0],sol[1],sol[2],\
(t,-100,12),line_color='red')[0])
sol=G*(P[:,0]+P[:,2])
p.append(plot3d_parametric_line(sol[0],sol[1],sol[2],\
(t,-10,12),line_color='green')[0])
p.show()
```

Ejemplo 9.10.13 Sea $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{11}{13} & \frac{115}{13} & -\frac{56}{13} & \frac{61}{13} \\ \frac{6}{13} & \frac{20}{13} & \frac{13}{13} & \frac{14}{13} \\ -\frac{10}{13} & \frac{23}{13} & -\frac{32}{13} & \frac{20}{13} \\ \frac{13}{13} & \frac{13}{13} & \frac{13}{13} & \frac{1}{13} \\ -\frac{6}{13} & \frac{33}{13} & \frac{1}{13} & \frac{1}{13} \end{pmatrix}.$$

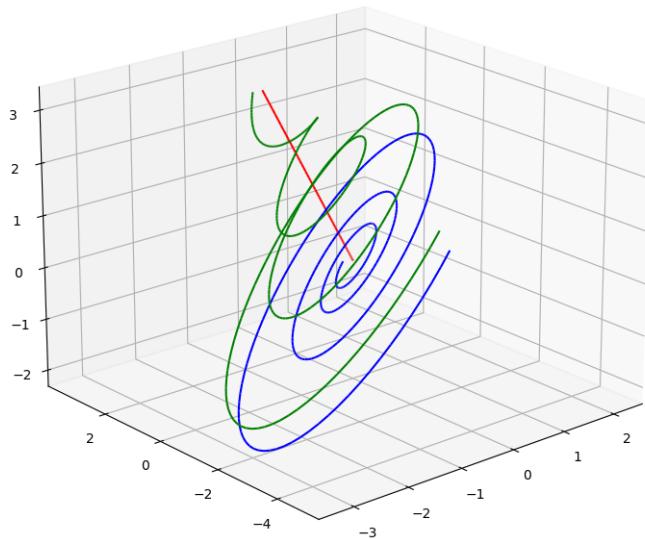


Figura 9.10.1: Retrato de fases del ejemplo ???. La linea azul satisface $X(0) = V_3 \in S_2$, la roja $x(0) = V_1 \in S_1$ y la verde $x(0) = V_1 + V_3 \in S_1 \oplus S_2$, pero $x(0) \notin S_1 \cup S_2$

```

1   from sympy import *
2   A=Rational(1,13)*Matrix([[11, 115, -56, 61], \
3     [-6, 20, 1, 14], \
4     [10, 23, -32, 20], \
5     [-6, 33, 1, 1]])
6   P1,J1=A.jordan_form()

```

El espectro de la matriz A es

$$\sigma(A) = \{-1, 1 - 2i, 1 + 2i\}$$

El autovalor -1 es deficiente, luego la matriz es no diagonalizable. Para llevar a la matriz A a su forma de Jordan real, hay que tomar como P la matriz cuyas columnas son los autovectores asociados a los autovalores reales y para los autovalores complejos tomar la parte real e imaginaria del autovector correspondiente a uno del par de autovalores, digamos en nuestro ejemplo el $1 + 2i$. Luego

```

1   P=Matrix([P1[:,0].T,P1[:,1].T,re(P1[:,3]).T,im(P1[:,3]).T]).T
2   J=P.inv()*A*P

```

Obtenemos

$$P = \begin{pmatrix} -\frac{9}{65} & \frac{13}{10} & \frac{62}{17} & -\frac{78}{17} \\ -\frac{1}{65} & \frac{1}{5} & 1 & 0 \\ -\frac{7}{65} & 1 & \frac{15}{17} & -\frac{26}{17} \\ -\frac{1}{65} & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Este resultado nos indica que las soluciones se comportaran como un foco inestable en el subespacio generado por los vectores

$$V_3 = \begin{pmatrix} \frac{62}{17} \\ \frac{1}{17} \\ \frac{15}{17} \\ \frac{1}{17} \end{pmatrix}, \quad V_4 = \begin{pmatrix} -\frac{78}{17} \\ 0 \\ -\frac{26}{17} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

y como un nodo estable del tipo de la figura ?? sobre el subespacio generado por

$$V_1 = \begin{pmatrix} -\frac{9}{65} \\ -\frac{1}{65} \\ -\frac{7}{65} \\ -\frac{65}{65} \\ -\frac{1}{65} \end{pmatrix} \quad y \quad V_2 = \begin{pmatrix} \frac{13}{10} \\ \frac{1}{5} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

El subespacio S_1 generado por $\{V_1, V_2\}$ y el S_2 generado por $\{V_3, V_4\}$ son invariantes. Una solución que inicialmente está en S_1 permanece allí y tiende a 0 cuando $t \rightarrow +\infty$. En cambio si inicialmente está en S_2 permanecerá en el plano S_2 describiendo una trayectoria de foco inestable. Es de esperar que una solución cualquiera tienda a $+\infty$ a medida que se va enrollando alrededor de S_1^1 y cuando $t \rightarrow +\infty$, $d(x(t), S_2) \rightarrow 0$.

Observar que

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^t \cos(2t) & e^t \sin(2t) \\ 0 & 0 & -e^t \sin(2t) & e^t \cos(2t) \end{pmatrix}.$$

Luego

$$\begin{aligned} e^{tA} &= e^{tPJP^{-1}} = Pe^{tJ}P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{9}{65} & \frac{13}{10} & \frac{62}{17} & -\frac{78}{17} \\ -\frac{1}{65} & \frac{1}{5} & 1 & 0 \\ -\frac{7}{65} & 1 & \frac{15}{17} & -\frac{26}{17} \\ -\frac{1}{65} & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^t \cos(2t) & e^t \sin(2t) \\ 0 & 0 & -e^t \sin(2t) & e^t \cos(2t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & \frac{85}{2} & -15 & -\frac{95}{2} \\ 0 & 5 & 0 & -5 \\ \frac{1}{13} & \frac{17}{26} & -\frac{3}{13} & \frac{7}{26} \\ -\frac{4}{13} & \frac{26}{26} & \frac{7}{26} & \frac{3}{13} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La matriz que resulta de la multiplicación de matrices del último término es demasiado complicada para dejarla escrita.

Ejemplo 9.10.14 Sea $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{4}{13} & -\frac{122}{13} & \frac{9}{13} & -\frac{35}{13} \\ \frac{15}{26} & -\frac{69}{26} & \frac{1}{13} & -\frac{15}{26} \\ \frac{1}{26} & -\frac{26}{26} & -\frac{13}{6} & -\frac{27}{26} \\ -\frac{11}{26} & \frac{9}{26} & -\frac{13}{13} & -\frac{15}{26} \end{pmatrix}.$$

```

1 from sympy import *
2 A=Rational(1,26)*Matrix([[-8, -244, 18, -70], \
3 [15, -69, 2, -15], \
4 [1, -119, -12, -27], \
5 [-11, 9, -24, -15]])
6 P1,J1=A.jordan_form()

```

El espectro de la matriz A es

$$\sigma(A) = \{-1 - i, -1 + i\}$$

El autovalor $-1 - i$ y su conjugados son deficientes, luego la matriz es no diagonalizable. Para llevar a la matriz A a su forma de Jordan real, hay que tomar como P la matriz cuyas columnas son la parte real e imaginaria de las columnas de P_1 correspondientes a uno del par de autovalores, digamos en nuestro ejemplo $-1 - i$. Luego

```

1 P=Matrix([re(P1[:,0]).T,im(P1[:,0]).T,re(P1[:,1]).T, \
2 im(P1[:,1]).T]).T
3 J=P.inv()*A*P

```

¹Habrá que precisar que significa enrollarse alrededor de un plano

Obtenemos

$$P = \begin{pmatrix} -\frac{18}{65} & -\frac{121}{65} & \frac{67}{25} & \frac{19}{25} \\ \frac{187}{260} & -\frac{260}{75} & \frac{11}{50} & \frac{27}{50} \\ -\frac{19}{52} & -\frac{52}{52} & 1 & 0 \\ -\frac{103}{52} & -\frac{7}{52} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Observar que

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{-t} \cos(t) & -e^{-t} \sin(t) & te^{-t} \cos(t) & -te^{-t} \sin(t) \\ e^{-t} \sin(t) & e^{-t} \cos(t) & te^{-t} \sin(t) & te^{-t} \cos(t) \\ 0 & 0 & e^{-t} \cos(t) & -e^{-t} \sin(t) \\ 0 & 0 & e^{-t} \sin(t) & e^{-t} \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Luego

$$\begin{aligned} e^{tA} &= e^{tPJP^{-1}} = Pe^{tJ}P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{18}{65} & -\frac{121}{65} & \frac{67}{25} & \frac{19}{25} \\ \frac{187}{260} & -\frac{260}{75} & \frac{11}{50} & \frac{27}{50} \\ -\frac{19}{52} & -\frac{52}{52} & 1 & 0 \\ -\frac{103}{52} & -\frac{7}{52} & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e^{-t} \cos(t) & -e^{-t} \sin(t) & te^{-t} \cos(t) & -te^{-t} \sin(t) \\ e^{-t} \sin(t) & e^{-t} \cos(t) & te^{-t} \sin(t) & te^{-t} \cos(t) \\ 0 & 0 & e^{-t} \cos(t) & -e^{-t} \sin(t) \\ 0 & 0 & e^{-t} \sin(t) & e^{-t} \cos(t) \end{pmatrix} \\ &\quad \times \begin{pmatrix} -\frac{189}{5329} & \frac{266}{5329} & \frac{448}{5329} & -\frac{2650}{5329} \\ \frac{2781}{5329} & -\frac{3914}{5329} & -\frac{6592}{5329} & -\frac{594}{5329} \\ \frac{54}{73} & -\frac{76}{73} & -\frac{55}{73} & -\frac{25}{73} \\ -\frac{73}{73} & \frac{138}{73} & -\frac{73}{73} & \frac{55}{73} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La matriz que resulta de la multiplicación de matrices del último término es demasiado complicada para dejarla escrita.

Ejemplo 9.10.15 Osciladores acoplados

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -(\frac{k_1}{m_1} + \frac{k_3}{m_1}) & 0 & \frac{k_3}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_3}{m_2} & 0 & -(\frac{k_3}{m_2} + \frac{k_2}{m_2}) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Usamos todos los parámetros iguales a 1.

```

1 k1,k2,k3,m1,m2=symbols('k1,k2,k3,m1,m2',\
2     positive=True)
3 A=Matrix([[0,1,0,0],\
4     [-(k1/m1+k3/m1), 0, k3/m1, 0],\
5     [0,0,0,1], [k3/m2, 0, -(k3/m2+k2/m2),0] ])
6 A=A.subs({k1:1,k2:1,k3:1,m1:1,m2:1})
7 P,D=A.jordan_form()

```

$$P = \begin{pmatrix} i & -i & -\frac{\sqrt{3}i}{3} & \frac{\sqrt{3}i}{3} \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ i & -i & \frac{\sqrt{3}i}{3} & -\frac{\sqrt{3}i}{3} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3}i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3}i \end{pmatrix}.$$

Podemos considerar los autovalores i y $\sqrt{3}i$. Tenemos $\mu_1 = 0$, $\nu_1 = 1$, $\mu_2 = 0$, $\nu_2 = \sqrt{3}$. Además

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad R_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 \end{pmatrix},$$

Obtenemos que la solución general se escribe:

$$\varphi(t) = c_1 \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \\ \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \\ -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -\sin \frac{\sqrt{3}}{3}t \\ -\cos \frac{\sqrt{3}}{3}t \\ \sin \frac{\sqrt{3}}{3}t \\ \cos \frac{\sqrt{3}}{3}t \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} \cos \frac{\sqrt{3}}{3}t \\ -\sin \frac{\sqrt{3}}{3}t \\ -\cos \frac{\sqrt{3}}{3}t \\ \sin \frac{\sqrt{3}}{3}t \end{pmatrix}$$

Si tomamos $c_3 = c_4 = 0$ la solución resultará 2π periódica. Observar que en este caso $x = y$ los desplazamientos son iguales.

Si tomamos $c_1 = c_2 = 0$ la solución resultará $2\pi/\sqrt{3}$ periódica. Observar que en este caso $x = -y$ los desplazamientos son opuestos.

La superposición de dos funciones oscilatorias con frecuencias cuyo cociente es un número irracional no resulta periódica (para una demostración ver apuntes Ecuaciones Diferenciales 1913). Entonces $c_3 = c_4 = 0, c_1 = c_2 = 0$ son las únicas elecciones que nos dan una solución periódica. Se llaman *modos normales de vibración*.

Ejemplo 9.10.16 Plomo en sangre

«Este mal condicionamiento hace que sea muy difícil desarrollar un algoritmo numérico robusto para la forma normal de Jordan, ya que el resultado depende críticamente de si se considera que dos valores propios son iguales. Por esta razón, la forma normal de Jordan suele evitarse en el análisis numérico....»

[Wikipedia](#)

Numpy no implementa Formas de Jordan. Con flotantes Sympy tiene dificultades con la función jordan_form

Vamos a resolver el problema de plomo en sangre con $x(0) = (0, 0, 0)$.

Usaremos la función `diagonalize`

```

1 I=49.3
2 k01,k21,k31,k02,k12,k13=0.0211,0.0111,0.0039,\ 
3 .0162,0.0124,0.000035
4 A=Matrix([[ -(k01+k21+k31), k12, k13], \
5 [k21,-(k12+k02), 0], \
6 [k31, 0, -k13]])
7 P,D=A.diagonalize()
```

$$P = \begin{pmatrix} 0,8207 & -0,6077 & 0,00113 \\ -0,5669 & -0,7876 & 0,0004391 \\ -0,07171 & 0,1185 & 1,009 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} -0,04467 & 0 & 0 \\ 0 & -0,02004 & 0 \\ 0 & 0 & -3,063 \cdot 10^{-5} \end{pmatrix}.$$

Escribimos la fórmula para el problema no homogéneo.

```

1 t,s=symbols('t,s',real=True)
2 G=P*exp(D*t)*P.inv()
3 Ginv=P*exp(-D*s)*P.inv()
4 B=Matrix([[I],[0],[0]])
5 x=G*(Integral(Ginv*B,(s,0,t)).doit()).simplify()
```

$$\begin{aligned}
 x_1(t) = & 8,656 \cdot 10^{-14} e^{0,0247t} && (\text{Errores redondeo?}) \\
 & +1800,0 && (\text{cantidad límite}) \\
 & -718,2e^{-0,0447t} \\
 & +2,842 \cdot 10^{-14} e^{-0,0447t} \\
 & -1,362 \cdot 10^{-13} e^{-0,0247t} \\
 & -856,8e^{-0,02t} \\
 & +4,263 \cdot 10^{-14} e^{-0,0199t} \\
 & -224,9e^{-3,063 \cdot 10^{-5}t}
 \end{aligned}$$

Conclusión: La concentración límite en sangre es de $1800\mu\text{g}$.

$$\begin{aligned}
 x_2(t) = & 1,137 \cdot 10^{-13} e^{0,0247t} && (\text{Errores redondeo?}) \\
 & +701,8 && (\text{cantidad límite}) \\
 & +496,1e^{-0,0447t} \\
 & -1,421 \cdot 10^{-14} e^{-0,0447t} \\
 & +1,137 \cdot 10^{-13} e^{-0,0247t} \\
 & -1111,0e^{-0,02t} \\
 & +7,105 \cdot 10^{-14} e^{-0,01996t} \\
 & -87,37e^{-3,0636 \cdot 10^{-5}t}
 \end{aligned}$$

Conclusión: La concentración límite en tejidos es de $701.8\mu\text{g}$.

Ejercicio 9.10.6 Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y supongamos que $E \subset \mathbb{R}^n$ es un subespacio invariante por A , es decir $v \in E \Rightarrow Av \in E$. Demostrar que si $x(t)$ es solución de

$$\begin{cases} x' = Ax \\ x(0) = C \end{cases},$$

con $C \in E$, entonces $x(t) \in E$ para todo t .

Ejercicio 9.10.7 Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$). Supongamos que toda solución de $x' = Ax$ es periódica con el mismo periodo. Demostrar que A es semisimple y el polinomio característico de A es una potencia de $t^2 + a^2$, $a \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 9.10.8 Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Diremos que la ecuación *preserva longitudes* si toda solución $x(t)$ satisface que $|x(t)| = |x(0)|$. Demostrar que las siguientes condiciones son equivalentes:

1. La ecuación preserva longitudes.
2. La matriz e^{tA} es ortogonal para todo t .
3. A es antisimétrica, es decir $A = -A^t$.

Ejercicio 9.10.9 Supongamos que μ no es un autovalor de A . Demostrar que

$$x' = Ax + e^{\mu t}b \quad (b \in \mathbb{R}^n)$$

tiene una solución de la forma $e^{\mu t}v$, con $v \in \mathbb{R}^n$.

Ejercicio 9.10.10 ea $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ semisimple y supongamos que los autovalores de A son $\pm ai$ y $\pm bi$; $a > 0, b > 0$. Demostrar que:

1. Si a/b es racional entonces toda solución de $x' = Ax$ es periódica.
2. Si a/b es irracional, hay una solución no periódica $x(t)$ tal que:

$$M < |x(t)| < N$$

para ciertas constantes $M, N > 0$.

Ejercicio 9.10.11) Verificar con SymPy para dos soluciones $x(t)$ distintas a elección del ejemplo ?? que se verifica que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} d(x(t), S_2) = 0.$$

b) Demostrar la afirmación del inciso a).

10 Sistemas autónomos

En esta unidad abordaremos el estudio de sistemas no lineales y autónomos, en particular sistemas autónomos planos.

10.1 Ecuaciones autónomas

Una ecuación

$$x'(t) = f(x(t)), \quad (10.1)$$

donde Ω es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, se denomina *ecuación autónoma*. De ahora en más asumiremos que f es de clase C^1 en Ω , de modo que para cada $(t_0, x^0) \in \mathbb{R} \times \Omega$ existe una solución $\varphi(t)$ que pasa por (t_0, x^0) . Cuando invoquemos esta solución supondremos que es una solución máxima y denotaremos su intervalo de definición por $I_\varphi = (a_\varphi, b_\varphi)$. Las soluciones a ecuaciones autónomas tienen la siguiente propiedad.

Teorema 10.1.1 Si φ es solución de (??) entonces $\psi(t) = \varphi(t + c)$ es también solución e $I_\psi = I_\varphi - c$.

Dem. Por la regla de la cadena y (??)

$$\psi'(t) = \varphi'(t + c) = f(\varphi'(t + c)) = f(\psi'(t)).$$

□

Vemos así que toda trasladada, sobre el eje t , de una solución es también solución. Si $x^0 \in \Omega$ satisface que $f(x^0) = 0$ entonces $\varphi(t) \equiv x^0$ es una solución. Dado que esta solución no experimenta cambios con el tiempo, x^0 se denomina *punto de equilibrio* del sistema (??). El teorema anterior tiene la siguiente consecuencia.

Teorema 10.1.2 Si φ y ψ son soluciones de (??) y $\varphi(t_0) = \psi(t_1)$ entonces existe un $c \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi(t) = \psi(t + c)$.

Dem. Por el Teorema ??, la función $\psi_1(t) := \psi(t + t_1 - t_0)$ es solución y, por hipótesis, $\psi_1(t_0) = \varphi(t_0)$, así, por unicidad, $\varphi(t) = \psi_1(t)$ para todo t . □

Corolario 10.1.1 Si φ es solución de (??) y $\varphi(t_0) = \varphi(t_1)$ para ciertos $t_0 \neq t_1$ entonces φ es periódica.

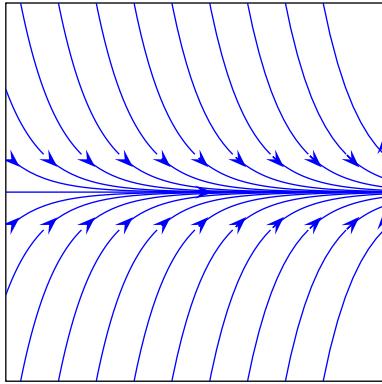
Dem. Por el teorema anterior aplicado a $\psi = \varphi$ obtenemos $\varphi(t) = \varphi(t + c)$, luego φ es periódica. □

10.2 Ecuaciones unidimensionales

Ejemplo 10.2.1 Considerar la ecuación

$$x' = x, \quad x \in \mathbb{R},$$

que tiene por solución general $\varphi(t) = Ce^t$. Notar que el conjunto Ω , en este caso $\Omega = \mathbb{R}$, queda dividido en tres regiones $(-\infty, 0)$, $\{0\}$ y $(0, \infty)$. Cada una de estas tres regiones

Figura 10.2.1: Ecuación $x' = x$

es imagen de soluciones, por ejemplo $(0, +\infty)$ es imagen de las soluciones positivas. Notar que hay una cantidad infinita de soluciones positivas, de hecho está la solución $\varphi_0(t) = e^t$ y todas sus trasladadas.

El conjunto $\{0\}$ es la imagen de la función nula, que, obviamente, coincide con sus trasladadas. Notar que 0 es un punto de equilibrio.

Ejemplo 10.2.2 Consideremos ahora

$$x' = \frac{1}{2}(x^2 - 1).$$

Para resolver esta ecuación escribamos

$$dt = \frac{2dx}{x^2 - 1}$$

e integremos

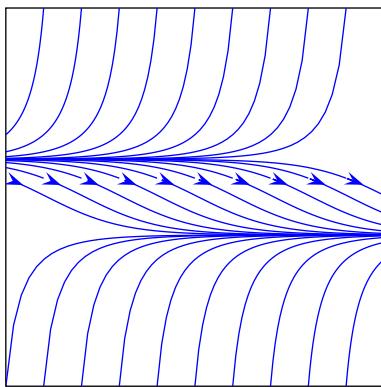
$$\begin{aligned} t + c &= \int \frac{2dx}{x^2 - 1} = \int \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+1} dx \\ &= \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right|. \end{aligned}$$

Luego

$$x(t) = \frac{1 \pm ke^t}{1 \mp ke^t}, \quad k > 0$$

es la solución general. Notar que hay dos "ramas" de $x(t)$ que corresponden a los intervalos $(-\infty, -\ln k)$ y $(-\ln k, +\infty)$. En realidad hay que pensar estas ramas como dos soluciones máximas diferentes. La primera tiene su gráfica debajo de -1 y la segunda por encima de 1 . Las soluciones que empiezan en $(-1, 1)$ están definidas en todo \mathbb{R} y permanecen en $(-1, 1)$. Los puntos -1 y 1 son de equilibrio de la ecuación.

Como muestra la figura ??, ahora tenemos dividido $\Omega = \mathbb{R}$ en cinco regiones $(-\infty, -1)$, $\{-1\}$, $(-1, 1)$, $\{1\}$ y $(1, +\infty)$. Las propiedades cualitativas de cualquier solución en cualquiera de estas ramas son determinadas por las de cualquier solución fija en una de estas ramas, ya que una es una trasladada de la otra. Notar que si $x(t_0)$ no es un punto de equilibrio entonces $x'(t) = f(x(t)) \neq 0$ para todo t , luego $x(t)$ es una función monótona. Por ende, si x está definida en un intervalo $(a, +\infty)$ el siguiente límite $x^0 := \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t)$ debe existir. Si $x^0 \in \mathbb{R}$ entonces, por el ejercicio ??, debe ser un punto de equilibrio, de lo contrario $x^0 = \pm\infty$. Notar que, como toda solución máxima $\varphi(t)$ satisface que $(t, \varphi(t))$ se sale de cualquier compacto contenido en $\mathbb{R} \times \Omega$, se tiene que si $\varphi(t_0)$ está entre dos puntos de equilibrio, $\varphi(t)$ permanece entre ellos para todo tiempo t y $I_\varphi = \mathbb{R}$. En el ejemplo, como $f(x) < 0$ en $(-1, 1)$ debemos tener que una solución φ tal que $\varphi(t_0) \in (-1, 1)$ está definida en \mathbb{R} y $1 = \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t)$ y $-1 = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t)$. Toda esta información cualitativa la podemos representar en el eje

Figura 10.2.2: Ecuación $x' = \frac{1}{2}(x^2 - 1)$ 

-41

Figura 10.2.3: Retrato de fases de $x' = \frac{1}{2}(x^2 - 1)$.

x como en la figura ???. Las flechas indican la dirección en que las soluciones recorren la región. Este tipo de representación la llamaremos *retrato de fases*.

Se observa que de haber una cantidad finita de puntos de equilibrio hay sólo una cantidad finita posible de retratos de fases. Por ejemplo si hay sólo un punto de equilibrio hay sólo los cuatro retratos de fases mostrados en la figura ???. Por ejemplo $x' = x$, $x' = x^3$ y $x' = x - a$, tienen el mismo retrato de fases d). En este caso diremos que las tres ecuaciones son *cualitativamente equivalentes*.

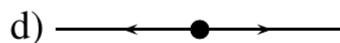
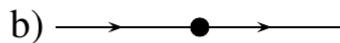


Figura 10.2.4: Retrato de fases un punto de equilibrio

10.3 Sistemas autónomos planos

Ahora consideraremos la ecuación

$$x' = f(x), \quad f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (10.2)$$

donde Ω es un abierto de \mathbb{R}^2 . En un sistema autónomo unidimensional el retrato de fases queda completamente determinado por la cantidad de puntos de equilibrio y el comportamiento de las soluciones cerca de sus puntos de equilibrio, esto, a la vez, determina las propiedades cualitativas de las soluciones. En otras palabras, estudiando propiedades locales, cerca de los puntos de equilibrio, de las soluciones inferimos su comportamiento

cualitativo global. En dimensiones mayores las propiedades cualitativas de las soluciones de ecuaciones no lineales no se pueden analizar sólo a partir de propiedades locales. Es por ello que el análisis de sistemas autónomos planos implica desarrollar dos teorías: una local y otra global.

10.3.1 Técnicas elementales

Como en el caso de un sistema unidimensional, las soluciones de ?? determinarán regiones de Ω . Como consecuencia del Teorema ?? obtenemos que estas regiones son disjuntas. Cada una de ellas es la imagen de alguna solución φ , y por ende también de cualquier trasladada de φ . En símbolos estas regiones son los conjuntos $\varphi(I_\varphi)$, con φ solución. Es por ello que estas regiones son curvas de \mathbb{R}^2 y nos referiremos a ellas como *trayectorias* u *órbitas* de (??). Algunas veces es relativamente sencillo construir estas órbitas por técnicas elementales. Estas técnicas incluyen

1. Estudiar las simetrías de la ecuación.
2. Distinguir si el sistema está desacoplado.
3. Eliminar el tiempo de la ecuación.
4. Transformar el sistema por un cambio de variables.

En los siguientes ejemplos ilustramos estas técnicas.

Ejemplo 10.3.3 Ecuación del péndulo. Consideremos la ecuación del péndulo plano

$$\begin{cases} x'_1 = x_2 \\ x'_2 = -\operatorname{sen}(x_1) \end{cases} \quad (10.3)$$

Para construir las trayectorias de (??) vamos usar una técnica que consiste en eliminar el tiempo de la ecuación y relacionar a x_2 con x_1 por medio de una ecuación, a saber:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-\operatorname{sen}(x_1)}{x_2}.$$

Resolviendo esta ecuación con variables separadas obtenemos

$$x_2 = \pm \sqrt{2 \cos(x_1) + c}.$$

Para que esta ecuación tenga solución debemos tener $c \geq -2$. Notar que los puntos de equilibrio del sistema son los puntos $(n\pi, 0)$, con $n \in \mathbb{Z}$. Si (x_1, x_2) resuelve (??) entonces $(-x_1, -x_2)$ también lo hace, de modo que es suficiente obtener las trayectorias para $x_2 \geq 0$ las trayectorias por debajo del eje x_1 se obtienen reflejando las de arriba respecto al origen (observar que esta reflexión puede invertir el recorrido de las trayectorias). Así supongamos que

$$x_2 = \sqrt{2 \cos(x_1) + c}.$$

Observar que $x'_1 = x_2 > 0$ de modo que x_1 crece en el semiplano superior y, por ende, las trayectorias se recorren de izquierda a derecha en el semiplano superior. En el semiplano inferior el sentido es pues de derecha a izquierda. Si $c > 2$ entonces $x_2 > 0$ para todo t e x_2 es una función periódica de x_1 con mínimos en $2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, y máximos en $(2n+1)\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Si $c = 2$ la trayectoria va desde $(-\pi, 0)$ a $(\pi, 0)$ (lo mismo ocurre en cada intervalo que resulta de trasladar el intervalo $(-\pi, \pi)$ por un múltiplo de 2π), no obstante estas trayectorias no puede tocar a los puntos de la forma $((2n+1)\pi, 0)$ ya que las trayectorias son disjuntas. Vemos así que estas últimas trayectorias se realizan en un tiempo infinito. Si $-2 < c < 2$ la parte de la trayectoria donde $x_2 \geq 0$ y $-\pi < x_1 < \pi$ va desde el punto $(-\xi, 0)$ a $(\xi, 0)$, con $\cos(\xi) = -\frac{c}{2}$. Esta trayectoria se “empalma” con su reflejada que irá en el sentido contrario de modo que estas trayectorias provienen de soluciones periódicas. Por otro lado es fácil verificar que

$$\|Df\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos(x_1) & 0 \end{pmatrix} \right\| = 1,$$

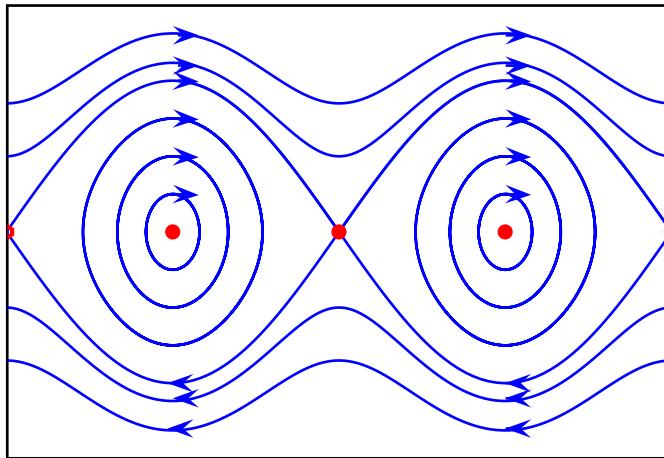


Figura 10.3.1: Retrato de fases de la ecuación del péndulo

luego $f = (f_1, f_2)$ es lipchitziana sobre \mathbb{R}^2 y las soluciones están definidas para todo tiempo. El aspecto del retrato de fases es mostrado en la figura ???. Vemos que los puntos de equilibrio de la forma $(n\pi, 0)$ son similares, en los sistemas lineales, a centros cuando n es par y a silllas cuando n es impar.

No obstante en los sistemas no lineales pueden aparecer otros comportamientos en rededor de los puntos de equilibrio que aquellos ejemplificados en los sistemas lineales.

Ejemplo 10.3.4 Consideremos el sistema

$$\begin{cases} x'_1 = x_1^2 \\ x'_2 = x_2 \end{cases} \quad (10.4)$$

Este sistema es fácil de resolver pues está desacoplado. Resolviendo cada una de las ecuaciones independientemente obtenemos

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{1}{-t + a} \\ x_2(t) &= be^t = e^{t-c} \quad (e^{-c} = b) \end{aligned}$$

Claramente las soluciones no están definidas para todo t , para cada a hay dos ramas que corresponden a soluciones diferentes. Notar que si (x_1, x_2) es solución $(x_1, -x_2)$ lo es lo que implica que el retrato de fases es simétrico respecto al eje x_1 . Eliminando el tiempo obtenemos que las trayectorias están sobre las curvas definidas por

$$x_2 = ce^{-\frac{1}{x_1}} \quad c > 0.$$

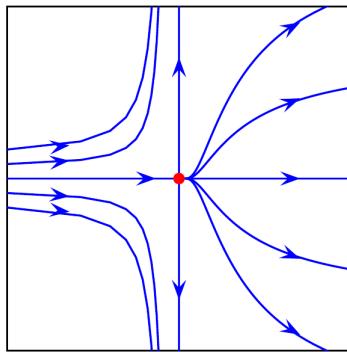
Es fácil ver que x_2 es una función creciente de x_1 cuando x_1 está en $(-\infty, 0)$ o en $(0, +\infty)$. Cuando $x_1 > 0$, x_2 está acotada por c y $\lim_{x_1 \rightarrow +\infty} x_2 = c$. Cuando $x_1 \rightarrow 0$ por derecha, $x_2 \rightarrow 0$. En el cuadrante $x_1 < 0$ e $x_2 > 0$ notemos que $x_2 \rightarrow c$ cuando $x_1 \rightarrow -\infty$ e $x_2 \rightarrow +\infty$ cuando $x_1 \rightarrow 0$ por izquierda. Hay un sólo punto de equilibrio en $(0, 0)$. Por último el recorrido de las curvas es de izquierda a derecha pues x_2 es función creciente de t . Ver la figura ???

En un sistema lineal hay un sólo punto de equilibrio o infinitos puntos de equilibrio que forman una recta de \mathbb{R}^2 . En un sistema no lineal autónomo podemos tener infinitos puntos de equilibrios aislados.

Ejemplo 10.3.5 Consideremos el sistema

$$\begin{cases} x'_1 = \operatorname{sen}(x_1) \\ x'_2 = -\operatorname{sen}(x_2) \end{cases} \quad (10.5)$$

El sistema tiene puntos de equilibrio en $(n\pi, m\pi)$, $n, m \in (\mathbb{Z})$. Observar que si (x_1, x_2) resuelve ???, entonces $(x_1 + 2n\pi, x_2 + 2m\pi)$, $n, m \in (\mathbb{Z})$, también lo resuelve, luego es

Figura 10.3.2: Retrato de fases ecuación $x'_1 = x_1^2, x'_2 = x_2$

suficiente hacer el retrato de fases en la caja $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ y trasladar este retrato por vectores de la forma $(2n\pi, 2m\pi)$. A la vez $(x_2 + \pi, x_1 + \pi), (2\pi - x_1, x_2)$ y $(x_1, 2\pi - x_2)$ son soluciones. Estas simetrías dicen que es suficiente graficar la solución en la caja $[0, \pi] \times [0, \pi]$. El sistema está desacoplado, para x_1 tenemos la ecuación:

$$\frac{dx_1}{\sin x_1} = 1.$$

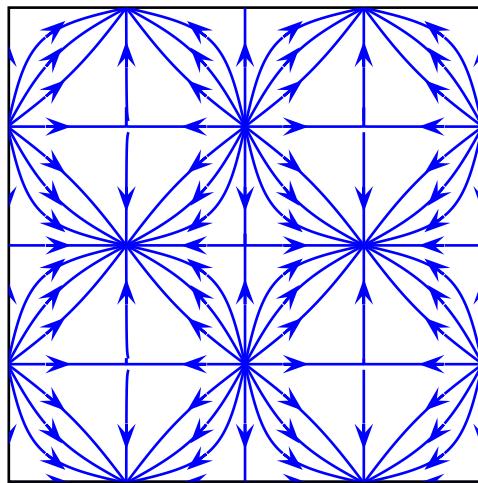
Integrando y haciendo la sustitución $s = \tan(\frac{x_1}{2})$ obtenemos

$$x_1(t) = 2 \arctan(ae^t), \quad a > 0$$

De manera similar para x_2

$$x_2(t) = 2 \arctan(be^{-t}), \quad b > 0$$

También tenemos las soluciones $x_1, x_2 = \pm\pi$. De la expresiones se deduce que si $(x_0, y_0) \in [0, \pi] \times [0, \pi]$ entonces $(x_1(t), x_2(t)) \in [0, \pi] \times [0, \pi]$ para todo t . Cuando $t \rightarrow -\infty, x_1 \rightarrow 0$ e $x_2(t) \rightarrow \pi$ y cuando $t \rightarrow +\infty, x_1 \rightarrow \pi$ e $x_2(t) \rightarrow 0$. Ver figura ??

Figura 10.3.3: Retrato de fases ecuación $x'_1 = \operatorname{sen} x_1, x'_2 = -\operatorname{sen} x_2$

Veamos un último ejemplo ilustrando un cambio de variables.

Ejemplo 10.3.6 Consideraremos el sistema:

$$\begin{cases} x'_1 = -x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) \\ x'_2 = x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^2 - 1) \end{cases}. \quad (10.6)$$

Aquí vamos a usar coordenadas polares $x_1 = r \cos \theta$ e $x_2 = r \sin \theta$. Se tiene

$$\begin{aligned} r' &= \frac{x_1 x'_1 + x_2 x'_2}{r} \\ \theta' &= \frac{x_1 x'_2 - x_2 x'_1}{r^2}. \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación (??) obtenemos

$$\begin{cases} r' = r(r^2 - 1) \\ \theta' = 1 \end{cases}, \quad (10.7)$$

que es un sistema desacoplado y fácil de resolver, obteniendo para θ la solución:

$$\theta(t) = t + a.$$

Para r tenemos, entre otras, las soluciones $r \equiv 1$ y $r \equiv 0$. La primera de ellas junto con $\theta = t + a$ determinan la circunferencia de radio uno y centro en el origen, la segunda la órbita del equilibrio $(x_1, x_2) \equiv (0, 0)$. Observar que, puesto que las órbitas no se cruzan, una órbita que empieza dentro de la bola unidad cerrada B_1 permanece allí por siempre y está definida para todo t . Si resolvemos r obtenemos

$$r(t) = \sqrt{\frac{1}{1 + ce^{2t}}},$$

cuando $c \geq 0$ estamos en B_1 y cuando $c < 0$ estamos fuera. Si $c < 0$ las soluciones están definidas (recordar que r debe ser no negativo) en el intervalo $(-\infty, -\ln \sqrt{|c|})$. De la ecuación $r' = r(r^2 - 1)$, o de su solución explícita, concluimos que r es decreciente cuando $0 < r < 1$ y es creciente cuando $1 < r$, además se ve fácilmente que $\lim_{t \rightarrow -\infty} r(t) = 1$ y $\lim_{t \rightarrow +\infty} r(t) = 0$, cuando $c > 0$, y $\lim_{t \rightarrow -\infty} r(t) = 1$ y $\lim_{t \uparrow -\ln \sqrt{|c|}} r(t) = +\infty$, cuando $c < 0$. Como θ crece linealmente (una partícula que se mueva según la ecuación tiene velocidad angular respecto al origen constante) vemos que las soluciones (salvo $r \equiv 1$ y $r \equiv 0$) son espirales que convergen a 0 ($c > 0$) o infinito ($c < 0$). Ver la figura ???. Escribamos el campo f de este ejemplo como $f_1 + f_2$

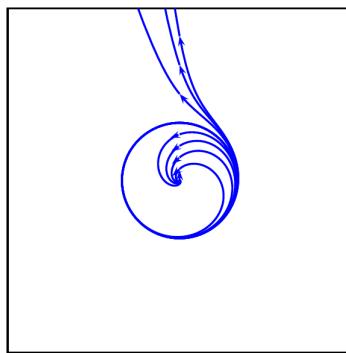


Figura 10.3.4: Retrato de fases de la ecuación $r' = r(r^2 - 1)$, $\theta' = 1$

donde

$$f_1 = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad f_2 = \begin{pmatrix} x_1(r^2 - 1) \\ x_2(r^2 - 1) \end{pmatrix}.$$

La expresión $f_1 + f_2$ es la descomposición de f como suma de un vector en la dirección de (x_1, x_2) y el otro en una dirección perpendicular a él (notar que $f_1 \perp f_2$ y f_1 tiene la dirección de (x_1, x_2)). Luego si pensamos a f como el campo de fuerzas que actúa sobre una partícula, vemos que si $r < 1$, f_2 actúa en la dirección opuesta a (x_1, x_2) , así

esta fuerza tiende a acercar la partícula al origen cuando $r < 1$. Cuando $r > 1$ la fuerza f_2 rechaza la partícula. En tanto f_1 actúa en la dirección que hace rotar la partícula con velocidad angular constante.

10.3.2 Linearización

En la sección anterior construimos los retratos de fases de varios sistemas. La técnicas elementales empleadas fueron *ad hoc*, es decir pueden funcionar en algunos sistemas pero en otros no. El interés en lo que sigue estará puesto en elaborar técnicas más generales de análisis de los retratos de fases. Una de estas técnicas es la linearización. Esta técnica es de índole local, nos dará información del comportamiento de las soluciones cerca de los puntos de equilibrio. Como ya dijimos, esto es insuficiente para analizar los retratos de fases de sistemas no lineales. Expliquemos brevemente esta técnica. Sea la ecuación

$$x' = f(x) \quad f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (10.8)$$

y $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ un punto de equilibrio. Aproximando el campo f por su polinomio de Taylor de grado 1 y recordando que $f(x^0) = 0$ tenemos

$$x' = Df(x^0)(x - x^0) + R(x - x^0), \quad (10.9)$$

donde el resto R en esta expresión satisface

$$\lim_{x \rightarrow x^0} \frac{\|R(x - x^0)\|}{\|x - x^0\|} = 0.$$

Si despreciamos R en la ecuación (??) (suponiendo que estamos cerca de (x_0, y_0)) y escribimos $u = (u_1, u_2) = x - x^0$ obtenemos

$$u' = Df(x^0)u := Au \quad (10.10)$$

que es un sistema lineal. La esperanza es que las propiedades cualitativas de los sistemas (??) y (??) sean las mismas. Para comprobar esto empíricamente volvamos a los ejemplos de la subsección anterior.

En la ecuación del péndulo los puntos de equilibrio del sistema (??) son $x^0 = (n\pi, 0)$, $n \in \mathbb{Z}$. Calculando Df en estos puntos, con $f = (x_2, -\sin x_1)$ obtenemos

$$A = Df(n\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (-1)^{n+1} & 0 \end{pmatrix} \quad (10.11)$$

Como puede verse fácilmente con las técnicas desarrolladas para sistemas lineales, esta matriz corresponde a un centro cuando n es par y a una silla cuando n es impar. Así en este ejemplo la técnica se aplicaría. Pero esto no siempre es así, como lo muestra el ejercicio ???. Una situación similar, en cierto aspecto, al ejercicio lo representa el ejemplo ?? cuya linearización en el origen satisface

$$A = Df(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

El retrato de fases del sistema $u' = Au$ se muestra en la figura ???. Como se ve comparando las figuras ?? y ?? los retratos de fases son muy distintos. ¿Por qué no funciona la técnica de linearización en estos ejemplos? Ocurre que en los sistemas de estos ejemplos la matriz A tiene autovalores con parte real igual a 0. Como hemos visto un autovalor con parte real positiva determina soluciones cualitativamente muy diferentes que un autovalor con parte real negativa, un autovalor con parte real 0 está en el límite y cualquier pequeña perturbación del sistema proveniente del resto R puede cambiar radicalmente el retrato de fases de un sistema respecto a su linearización. Esta discusión nos muestra que la técnica de linearización no funcionará cuando A tenga autovalores con parte real nula. Pero examinemos más detenidamente la técnica en los casos en que si funciona, por ejemplo en la ecuación del péndulo (??). Notar que la matriz A en (??) satisface que $\sigma(A) = \{\pm 1\}$, si n es impar, y $\sigma(A) = \{\pm i\}$, si n es par, por lo dicho anteriormente

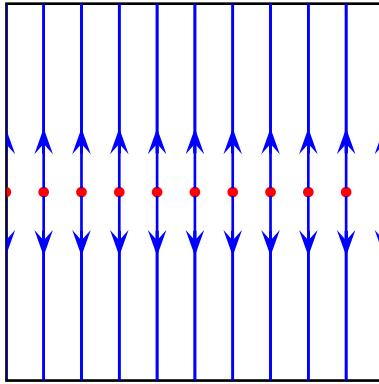


Figura 10.3.5: Retrato de fases de la ecuación $u'_1 = 0, u'_1 = u_2$

consideremos sólo el caso n impar, ya que el otro caso tiene autovalores con parte real 0. Tomemos $n = 1$, el comportamiento en otro equilibrio con n impar es similar por la periodicidad. Observar que

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

son autovectores correspondientes a los autovalores $\lambda = 1$ y $\lambda = -1$, respectivamente, de A . El origen es una silla de $u' = Au$ y sus subespacios estable e inestables son

$$E^s = \{(-x_1, x_1) : x_1 \in \mathbb{R}\} \quad \text{y} \quad E^u = \{(x_1, x_1) : x_1 \in \mathbb{R}\}.$$

Como se sabe E^u determinan las órbitas que “llegan” a $(0, 0)$, cuando “ $t = +\infty$ ”, y E^s que “salen” cuando “ $t = -\infty$ ”. En el sistema del péndulo (??) encontramos trayectorias que salían de $(\pi, 0)$ y llegaban. Estas trayectorias estaban sobre las gráficas de

$$x_2 = \sqrt{2 \cos(x_1) + 2} = 2 \cos\left(\frac{x_1}{2}\right)$$

y su reflejada

$$x_2 = -\sqrt{2 \cos(x_1) + 2} = -2 \cos\left(\frac{x_1}{2}\right).$$

Las primera llegaba a $(\pi, 0)$ y la segunda sale. Estas curvas se llaman la *variedad estable* y la *variedad inestable*, respectivamente, de la ecuación en $(\pi, 0)$. Notar que las pendientes con que estas trayectorias llegan y salen del equilibrio son igual a

$$\lim_{x_1 \rightarrow \pi^-} \frac{dx_2}{dx_1} = \lim_{x_1 \rightarrow \pi^-} -\sin\left(\frac{x_1}{2}\right) = -1$$

y

$$\lim_{x_1 \rightarrow \pi^-} \frac{dx_2}{dx_1} = \lim_{x_1 \rightarrow \pi^-} \sin\left(\frac{x_1}{2}\right) = 1.$$

Vemos así que, aparte de tener un retrato de fases similar, los subespacios estables e inestables de la linearización son tangentes a las variedades estables e inestables, respectivamente, del sistema (ver figura ??). Esto es un hecho general que después demostraremos. Antes de continuar con el tema de linearización discutiremos algunos conceptos.

10.4 El flujo de una ecuación diferencial

El concepto de *flujo* es una manera nueva de mirar las soluciones de la ecuación diferencial

$$x' = f(x) \quad f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n. \quad (10.12)$$

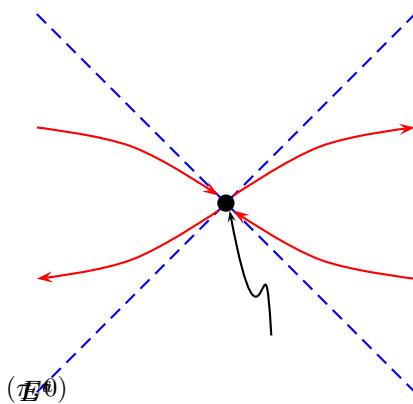


Figura 10.3.6: Linearización de la ecuación del péndulo

El flujo es una función $\Phi_t : \Omega \rightarrow \Omega$, es decir una transformación (movimiento) del espacio de fases \mathbb{R}^n . Supongamos que la ecuación (??) corresponda a las trayectoria seguida por una partícula que obedece cierta ley física. Entonces $\Phi_t(x)$ es la posición después de t segundos que ocupa la partícula que inicialmente está en x . Notar que al ser el sistema autónomo es irrelevante el valor exacto del tiempo inicial (es lo mismo ver como evoluciona la partícula de x a $\Phi_t(x)$ hoy o mañana). La definición del flujo es pues:

Definición 10.4.1 Definimos el flujo Φ de la ecuación (??) por $\Phi_t(x) = \varphi(t)$, donde φ es solución de (??) y $\varphi(0) = x$.

Notar que para tener definido $\Phi_t(x)$ debemos tener que $t \in I_\varphi$.

Teorema 10.4.3 El flujo tiene las siguientes propiedades.

1. $\Phi_t \circ \Phi_s = \Phi_{t+s}$,
2. Φ_0 es la transformación identidad,
3. Φ_t es un homeomorfismo con inversa Φ_{-t} .

Dem. Para demostrar la primera propiedad tomemos φ solución de (??) con $t \in I_\varphi$ y $\varphi(0) = x$ y ψ solución con $s \in I_\psi$ y $\psi(0) = \Phi_t(x)$. Luego $\varphi(t) = \Phi_t(x) = \psi(0)$ y por el Teorema ?? debemos tener $\varphi(t+s) = \psi(s)$ que es la igualdad ???. La propiedad ?? es inmediata de la definición. Para la propiedad en ?? notemos que por ?? y ?? Φ_t tiene por inversa Φ_{-t} . El hecho de que estas trasformaciones son continuas se sigue de la continuidad de las soluciones respecto a las condiciones iniciales, esto no lo demostraremos en este curso. \square

Si toda las soluciones estuvieran definidas en \mathbb{R} entonces la aplicación $t \rightarrow \Phi_t$ es un homomorfismo entre el grupo \mathbb{R} y el grupo de todos los homeomorfismos con la operación de composición. Por este motivo se dice que el flujo Φ_t forma un *grupo uniparamétrico*.

10.5 Conjuntos invariantes

El siguiente concepto de *conjunto invariante* desempeña un rol importante.

Definición 10.5.2 Sea Φ_t el flujo asociado a la ecuación (??). Un conjunto $S \subset \Omega$ se dirá invariante por Φ si $\Phi_t(x) \in S$, para cada $x \in S$ y para cada t tal que tengamos definido $\Phi_t(x)$.

Vale decir un conjunto es invariante si una solución que en un momento está dentro de él lo está, y estuvo, siempre. Análogamente podemos definir *conjunto invariante hacia el futuro*

Definición 10.5.3 iremos que $S \subset \Omega$ es invariante hacia el futuro si $\Phi_t(x) \in S$, para cada $x \in S$ y para cada $t > 0$ tal que $\Phi_t(x)$ este definida.

Una condición que utilizaremos para demostrar la invariancia hacia el futuro de un conjunto abierto $S \subset \Omega$ viene de una intuición geométrica clara. Supongamos que en cada punto $x \in \partial S$ el campo $f(x)$ apunta hacia dentro del conjunto S , en ese caso podemos intuir que el conjunto es invariante hacia el futuro. Esto se afirma porque para escaparse de S una trayectoria debería atravesar ∂S y, en el punto x en que la atraviesa, la dirección de $f(x)$ que debe ser tangente a la trayectoria debería apuntar en la dirección exterior de S . En lo que sigue trataremos de explicitar mejor estas afirmaciones.

Definición 10.5.4 Sea v un vector v definimos el cono de amplitud $\theta > 0$, de longitud $h > 0$, con centro en x^0 y dirección de v por

$$S(x^0, v, \theta, h) = B_h(x^0) \cap \{x \in \mathbb{R}^n : (x - x^0) \cdot v > \theta \|x - x^0\| \|v\|\}.$$

Vale decir $S(x^0, v, \theta, h)$ corresponde a todos los puntos x tales que $x - x^0$ forma un ángulo menor a $\arccos \theta$ con v y que $x \in B(x^0, h)$.

Teorema 10.5.4 Sea $S \subset \Omega$ un conjunto abierto y supongamos que para cada $x^0 \in \partial S$ existen un $1 \geq \theta > 0$ y $h > 0$ tales que $S(x^0, f(x^0), \theta, h) \subset S$ (vale decir, no sólo $f(x^0)$ sino todo un cono apunta hacia el interior), entonces S es invariante hacia el futuro.

Dem. Supongamos que por el contrario existe $x \in S$ y $t > 0$ tales que $y := \Phi_t(x) \notin S$. Debe ocurrir que existe un $t_0 \in [0, t]$ tal que $x^0 = \Phi_{t_0}(x) \in \partial S$. De lo contrario la trayectoria entre $[0, t]$, que es un conjunto conexo, estaría contenida en la unión del interior y exterior de S que daría una contradicción. Sea $t_1 = \sup\{s : \Phi_s(x) \in \partial S\}$, entonces por continuidad y como ∂S es cerrado $x^0 = \Phi_{t_1}(x) \in \partial S$. Además, de la definición $\Phi_s(x) \notin S$, cuando $s > t_1$. Sean θ y h los parámetros de las hipótesis del teorema. Pongamos $\varphi(t) = \Phi_{t+t_1}(x)$ y desarrollemos φ por su polinomio de Taylor de grado 1 alrededor de $t = 0$:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= x^0 + t\varphi'(0) + R(t) \\ &= x^0 + tf(x^0) + R(t) \quad \text{con } \|R(t)\|/t \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow 0. \end{aligned} \tag{10.13}$$

Sea $\epsilon > 0$ tal que $2\epsilon < (1 - \theta)\|f(x^0)\|$ (notar que debe ser $f(x^0) \neq 0$) y sea $\delta > 0$ suficientemente pequeño para que

$$\|R(t)\| \leq \epsilon t,$$

para $0 < t < \delta$, entonces

$$\|\varphi(t) - x^0\| \leq t\|f(x^0)\| + \|R(t)\| \leq t\|f(x^0)\| + \epsilon t.$$

para $0 < t < \delta$. Así tendremos $\|\varphi(t) - x^0\| \leq h$ eligiendo δ suficientemente pequeño.

Entonces

$$\begin{aligned}
 (\varphi(t) - x^0) \cdot f(x^0) &\geq t\|f(x^0)\|^2 - \|R(t)\|\|f(x^0)\| \\
 &\geq t\|f(x^0)\|^2 - \epsilon t\|f(x^0)\| \\
 &\geq \theta t\|f(x^0)\|^2 + (1-\theta)t\|f(x^0)\|^2 - \frac{(1-\theta)}{2}t\|f(x^0)\|^2 \\
 &\geq \theta t\|f(x^0)\|^2 + \frac{(1-\theta)}{2}t\|f(x^0)\|^2 \\
 &\geq \theta t\|f(x^0)\|^2 + \epsilon t\|f(x^0)\| \\
 &\geq \theta\|\varphi(t) - x^0\|\|f(x^0)\|
 \end{aligned}$$

De esta manera vemos que $\varphi(t) = \Phi_{t+t_1}(x) \in S(x^0, f(x^0), \theta, h) \subset S$ para $0 < t < \delta$ y esto contradice la elección de t_1 . \square

10.6 Linearización: continuación

En esta sección elaboraremos técnicas que nos permitirán demostrar que, en ciertos casos, el retrato de fases de un sistema se comporta de manera similar a su linearización. Sólo demostraremos el caso de nodos estables, otros casos quedarán como ejercicio. Consideremos f una campo de clase C^1 definido sobre $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Supongamos que x^0 es un punto de equilibrio *aislado* de f , es decir $f(x^0) = 0$ y existe una bola $B(x^0, \delta)$ tal que dentro de esta bola el único equilibrio es x^0 . A lo largo de esta sección vamos a considerar la linearización del sistema

$$x' = f(x). \quad (10.14)$$

Notar que si x resuelve este sistema entonces $y = x - x^0$ resuelve $y' = g(y)$, donde $g(y) := f(y + x^0)$, y que g tiene un equilibrio en $x^0 = 0$. Por ello, de ahora en más supondremos $x^0 = 0$. Con esta convención, la linearización de (??) es el sistema

$$x' = Ax, \quad (10.15)$$

donde, a lo largo de la sección escribiremos A para la matriz jacobiana $Df(0)$.

Definición 10.6.5 iremos que el punto de equilibrio $x^0 = 0$ es *simple* si la matriz A es no singular.

Para un vector no nulo v escribiremos $\arg v = v/\|v\|$, el valor $\arg v$ se puede identificar continuamente con un único ángulo θ cuando $\theta \in (-\pi, \pi)$.

Lema 10.6.1 Un punto de equilibrio simple es aislado. Además

$$\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \frac{\|f(x)\|}{\|Ax\|} = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{\|x\| \rightarrow 0} (\arg f(x) - \arg Ax) = 0$$

Dem. Como A es no singular $Ax \neq 0$ para todo x con $\|x\| = 1$. Luego

$$c := \inf_{\|x\|=1} \|Ax\| > 0.$$

La constante c satisface que

$$c\|x\| \leq \|Ax\|, \quad (10.16)$$

para todo $x \in \mathbb{R}^2$. Como f es diferenciable y $f(0) = 0$:

$$f(x) = Ax + R(x), \quad \text{con} \quad \lim_{\|x\| \rightarrow 0} \frac{\|R(x)\|}{\|x\|} = 0. \quad (10.17)$$

Luego

$$\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \left\| \frac{f(x)}{\|Ax\|} - \frac{Ax}{\|Ax\|} \right\| \leq c \lim_{\|x\| \rightarrow 0} \left\| \frac{f(x)}{\|x\|} - \frac{Ax}{\|x\|} \right\| = 0.$$

Esta última desigualdad implica que $f(x) \neq 0$ en un entorno de 0 y por otro lado

$$\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \left| \frac{\|f(x)\|}{\|Ax\|} - 1 \right| \leq \lim_{\|x\| \rightarrow 0} \left\| \frac{f(x)}{\|Ax\|} - \frac{Ax}{\|Ax\|} \right\| = 0$$

y

$$\begin{aligned} \lim_{\|x\| \rightarrow 0} (\arg f(x) - \arg Ax) &= \lim_{\|x\| \rightarrow 0} \left\| \frac{f(x)}{\|f(x)\|} - \frac{Ax}{\|Ax\|} \right\| \\ &= \lim_{\|x\| \rightarrow 0} \left\| \frac{f(x)}{\|f(x)\|} - \frac{f(x)}{\|Ax\|} + \frac{f(x)}{\|Ax\|} - \frac{Ax}{\|Ax\|} \right\| \\ &\leq \lim_{\|x\| \rightarrow 0} \left\| \frac{f(x)}{\|f(x)\|} - \frac{f(x)}{\|Ax\|} \right\| \\ &= \lim_{\|x\| \rightarrow 0} \left| \frac{\|f(x)\|}{\|Ax\|} - 1 \right| = 0. \end{aligned}$$

□

A menudo aplicaremos este lema de la siguiente forma: para todo $\epsilon > 0$ existe un $r > 0$ tal que para todo x en la bola abierta B_r con centro en 0 y radio r se tiene que

$$\left| \frac{\|f(x)\|}{\|Ax\|} - 1 \right| < \epsilon \quad y \quad \|\arg f(x) - \arg Ax\| < \epsilon. \quad (10.18)$$

Definición 10.6.6 ea $x(t)$ una solución de (??) tal que $x(t)$ tiende al equilibrio 0 cuando $t \rightarrow \infty$. Diremos que $x(t)$ entra en el equilibrio 0 en la dirección de v si $\arg(x(t)) \rightarrow v$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Teorema 10.6.5 Sea $x(t)$ que entra a 0 cuando $t \rightarrow \infty$ en la dirección de v , entonces v es un autovector de $A = Df(0)$.

Dem. Por la ecuaciones (??), (??), dividiendo por $\|x(t)\|$ y tomando límite para $t \rightarrow \infty$ tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x'(t)}{\|x(t)\|} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(x(t))}{\|x(t)\|} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{Ax(t)}{\|x(t)\|} + \frac{R(x(t))}{\|x(t)\|} \\ &= Av. \end{aligned}$$

Por lo tanto $x'(t)/\|x(t)\|$ tiene límite cuando cuando $t \rightarrow +\infty$. Utilizando la regla de l'Hospital en cada coordenada $i = 1, 2$ y teniendo en cuenta que

$$\frac{d}{dt} \|x(t)\| = \frac{x(t) \cdot x'(t)}{\|x(t)\|}$$

obtenemos que

$$\begin{aligned} v &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x(t)}{\|x(t)\|} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x'(t)}{\frac{x(t) \cdot x'(t)}{\|x(t)\|}} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x'(t)}{\|x(t)\|} \frac{1}{\frac{x(t) \cdot x'(t)}{\|x(t)\|^2}} \\ &= \frac{1}{v \cdot Av} Av. \end{aligned}$$

Lo que muestra que v es un autovector correspondiente al autovalor $\lambda := v \cdot Av$. \square

Sea $x(t)$ solución no nula de (??) que tiende a 0 cuando $t \rightarrow \infty$, sea P cualquier matriz no singular y pongamos

$$y = P^{-1}x, \quad (10.19)$$

entonces y resuelve

$$y' = P^{-1}x' = P^{-1}f(x) = P^{-1}f(Py) =: g(y).$$

Notar que

$$Dg(y) = P^{-1}DfP = P^{-1}AP =: B,$$

si elegimos P de modo que B sea la forma de Jordan de A , vemos que el retrato de fases del sistema (??) y su linearizado se obtienen por una transformación afín del retrato de fases de un sistema cuya linerización tiene una matriz en forma de Jordan; como este tipo de transformaciones preservan todas las características que deseamos estudiar, a menudo supondremos que $A = Df(0)$ esta dada en forma de Jordan.

En lo que sigue será importante considerar el ángulo $\alpha \in (-\pi, \pi]$ que forma el campo $f(x)$ con $-x$ ($x \neq 0$), ver la figura ???. Este ángulo satisface:

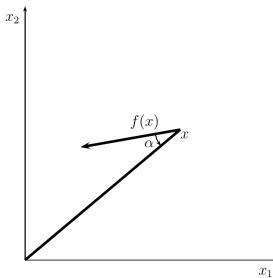


Figura 10.6.1: Ángulo α

$$\cos \alpha = -\frac{f(x) \cdot x}{\|f(x)\| \|x\|} = -\arg f(x) \cdot \arg x.$$

Análogamente definimos $\beta \in (-\pi, \pi]$, que satisface:

$$\cos \beta = -\frac{Ax \cdot x}{\|Ax\| \|x\|} = -\arg Ax \cdot \arg x.$$

Estas ecuaciones determinan $|\alpha|$ y $|\beta|$, pero no el signo de los ángulos. Los ángulos α y β pueden ser funciones discontinuas de x cuando asumen el valor π , no obstante $\cos \alpha$

y $\cos \beta$ son funciones continuas de $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Recordando el Lema ?? tenemos que para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|\cos \alpha - \cos \beta| < \epsilon, \quad \text{cuando } \|x\| < \delta. \quad (10.20)$$

Notar además que $\beta(x) = \beta(\lambda x)$, para todo λ . Es a menudo conveniente representar la ecuación en coordenadas polares (r, θ) , teniendo en cuenta que $(x_1, x_2) \perp (-x_2, x_1)$ nos queda:

$$\begin{aligned} r' &= \frac{x \cdot x'}{r} = -\frac{x \cdot f(x)}{r} = -\|f(x)\| \cos \alpha \\ \theta' &= \frac{x_1 x'_2 - x'_1 x_2}{r^2} \\ &= \frac{(f_1, f_2) \cdot (-x_2, x_1)}{r^2} \\ &= \frac{\|f(x)\| \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{r} \\ &= \frac{\|f(x)\| \sin \alpha}{r}. \end{aligned} \quad (10.21)$$

Vamos a considerar por separado la linearización de sistemas (??) para tipos distintos (no todos) del sistema linearizado (??).

Teorema 10.6.6 (Nodos estables) Supongamos que $f(0) = 0$ y que (??) tiene un nodo estable en 0, es decir A tiene autovalores reales distintos y negativos $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$. Entonces existe $\delta > 0$ tal que si $x \in B_\delta(0)$:

1. $\Phi_t(x)$ está definida para todo $t \geq 0$ y $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi_t(x) = 0$.
2. $\Phi_t(x)$ entra en $(0, 0)$ y lo puede hacer sólo en las direcciones determinadas por los autovectores de A .
3. Hay al menos una trayectoria que llega en la dirección de cada autovector.

Dem. Por el cambio de variables (??) podemos suponer

$$A = Df(0, 0) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

y

$$f(x) = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2) + R(x),$$

donde

$$\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \frac{\|R(x)\|}{\|x\|} = 0.$$

Por las suposiciones sobre los autovalores se tiene $\cos \beta > 0$, cuando $x \neq 0$. Como $\cos \beta$ es una función continua, $\cos \beta(x) = \cos \beta(\lambda x)$ y $\partial B_1(0)$ es compacto se tiene que existe $x^0 \in \partial B_1(0)$ tal que

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}} \cos \beta = \min_{x \in \partial B_1(0)} \cos \beta = \cos(\beta(x^0)) =: c_0 > 0. \quad (10.22)$$

Esto muestra que siempre el ángulo β satisface que $|\beta| < \pi/2$ en \mathbb{R}^2 . Sea $\epsilon > 0$ y tomemos $\delta > 0$ que satisface (??). Tomando $\epsilon = c_0/2$ obtenemos a partir de (??) y (??) que

$$\cos \alpha \geq \frac{c_0}{2} =: c_1 > 0, \quad (10.23)$$

para todo $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Sea $x \in B_\delta \setminus \{0\}$, expresando la trayectoria $\Phi_t(x)$ usando las ecuaciones (??) tenemos

$$r'(t) \leq -\|f(\Phi_t(x))\| c_1 < 0 \quad \text{y} \quad \theta'(t) = \frac{\|f(\Phi_t(x))\| \sin \alpha}{r}. \quad (10.24)$$

Así vemos que r' es decreciente y, por ende, $\Phi_t(x) \in B_\delta$, para todo $t \geq 0$. Esto implica que $\Phi_t(x)$ está definida para todo $t \geq 0$. Supongamos que $\Phi_t(x)$ no tiende a 0, luego, ya que $r(t)$ es decreciente, existe r_0 tal que $\delta \geq r(t) \geq r_0$, para todo $t > 0$. Como 0 es un equilibrio aislado podemos elegir δ de modo que en $B_{2\delta}(0)$ sólo exista el equilibrio $x = 0$. Entonces $\|f(y)\|$ tiene una cota inferior $k > 0$ cuando $r_0 \leq \|y\| \leq \delta$. Esto y (??) implican que $r'(t) \leq -c_1 k$, e integrando entre 0 y t esta desigualdad obtenemos

$$r(t) \leq -c_1 kt + r(0) \leq -c_1 r_0 t + \delta. \quad (10.25)$$

Luego si t es suficientemente grande tendríamos $r(t) < r_0$ que contraría nuestra suposición. Luego $\Phi_t(x) \rightarrow 0$, cuando $t \rightarrow \infty$, para todo $x \in B_\delta$. Esto prueba el inciso ??.

Ahora el Teorema ?? implica que de entrar en el origen $\Phi_t(x)$ lo debería hacer en las direcciones de los autovectores de A , que en este caso podrían ser los vectores $\pm e_1, \pm e_2$. Probaremos ahora que toda trayectoria que empieza en B_δ entra al origen, más precisamente probaremos que si $\Phi_t(x)$ no entra al origen con la dirección de $\pm e_1$ lo hace en la de $\pm e_2$.

Sea $\eta > 0$. Cubramos los ejes x_1 y x_2 del plano con sectores de ángulo η y nombremos las regiones resultantes como en la figura ???. Sea x un vector en el primer cuadrante

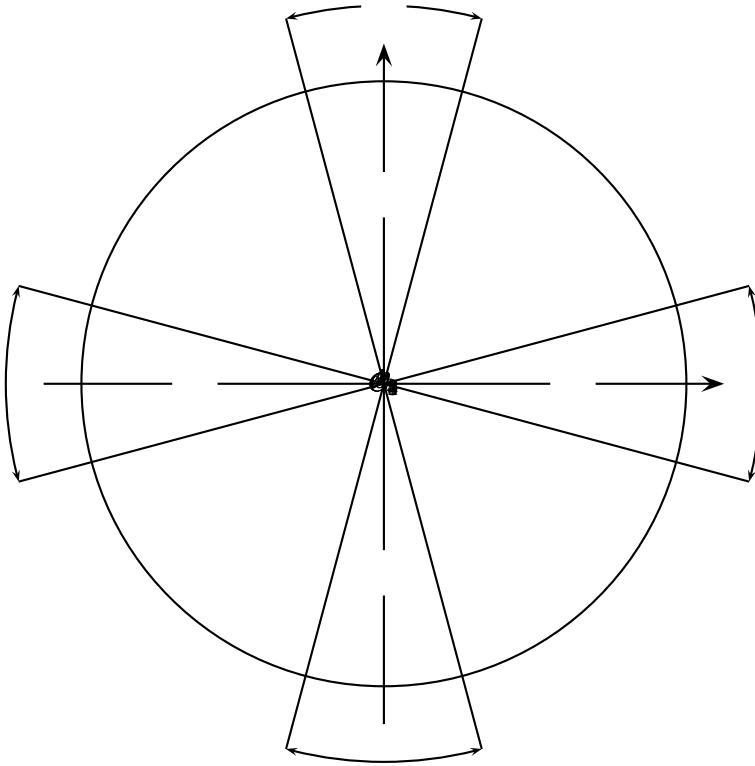


Figura 10.6.2: División del plano

con $\|x\| = 1$. Notemos que la desigualdad de Cauchy-Schwartz dice que la igualdad

$$|Ax \cdot x| = \|Ax\| \|x\| = \|Ax\|$$

se alcanza si, y sólo si, Ax y x están alineados, es decir si existe μ tal que $Ax = \mu x$ y, en otras palabras si μ es un autovalor y x un autovector. Esto nos dice que $\mu = \lambda_1$ y $x = e_1$ o $\mu = \lambda_2$ y $x = e_2$. Por ende si $x \in C_1$ tenemos que

$$-1 < \cos \beta = \frac{Ax \cdot x}{\|Ax\| \|x\|} < 1$$

Consideremos el compacto $K := C_1 \cap \partial B_1(0)$. La función (continua respecto a x) $\cos \beta = \cos \beta(x)$ alcanza un máximo c_0 y un mínimo c_1 en K . Luego, por la desigualdad

anterior y dado que $e_1, e_2 \notin K$, si $x \in K$

$$-1 < c_1 \leq \cos \beta \leq c_0 < 1. \quad (10.26)$$

Ahora (??) y la identidad $H(\lambda x) = H(x)$ implican que (??) se mantiene para todo $x \in C_1 \setminus \{0\}$. Esto prueba que

$$-1 < c_1 \leq \cos \beta \leq c_0 < 1. \quad (10.27)$$

Tomando \arccos tenemos $0 < \beta_0 < |\beta| < \pi - \beta_0$, para cierto β_0 . Lo mismo ocurre en las otras regiones C . Nuevamente, de la continuidad de $\cos \beta(x)$ vemos que β debe asumir sólo un signo en cada región C . Se puede verificar que β es positivo en el primer y tercer cuadrante (en el interior de ellos para ser más específico) y negativo en los restantes, entonces $0 < \beta_0 < \beta < \pi - \beta_0$ en C_1 . Entonces, si x^0 es un punto de la frontera común entre A_1 y C_1 se tiene

$$S(x^0, Ax^0, \cos \beta_0, h) \subset C_1, \quad \text{para algún } h > 0. \quad (10.28)$$

Pongamos $\theta_1 = \cos \beta_0$. De la acotación (??) existe $\lambda > 0$ tal que

$$\lambda \|x\| \leq \|Ax\|,$$

para todo x . Sean ϵ, θ_0 números positivos que especificaremos con más precisión luego. En virtud del Lema ?? y la diferenciabilidad de f , podemos elegir $\delta > 0$ de modo que

$$\|R(x)\| \leq \epsilon \|x\| \quad \text{y} \quad \|f(x)\| > (1 - \epsilon) \|Ax\|,$$

cuando $\|x\| < \delta$. Ahora si $x \in S(x^0, f(x^0), \theta_0, h)$ y $x^0 \in B_\delta$ tenemos que

$$\begin{aligned} \theta_0(1 - \epsilon) \|Ax^0\| \|x - x^0\| &\leq \theta_0 \|f(x^0)\| \|x - x^0\| \\ &\leq f(x^0) \cdot (x - x^0) \\ &\leq Ax^0 \cdot (x - x^0) + R(x^0) \cdot (x - x^0) \\ &\leq Ax^0 \cdot (x - x^0) + \|R(x^0)\| \|x - x^0\| \\ &\leq Ax^0 \cdot (x - x^0) + \epsilon \|x^0\| \|x - x^0\| \\ &\leq Ax^0 \cdot (x - x^0) + \epsilon \lambda^{-1} \|Ax^0\| \|x - x^0\| \end{aligned}$$

Ahora eligiendo θ_0 arbitrariamente en el intervalo $(\theta, 1)$ y $\epsilon > 0$ de modo que $(1 - \epsilon)\theta_0 > \frac{\theta_1 + \theta_0}{2}$ y $\epsilon \lambda^{-1} < \frac{\theta_0 - \theta_1}{2}$ (para lo cual habrá que achicar δ convenientemente), obtenemos que

$$\theta_1 \|Ax^0\| \|x - x^0\| \leq Ax^0 \cdot (x - x^0),$$

lo que prueba que

$$S(x^0, f(x^0), \theta_0, h) \subset S(x^0, Ax^0, \theta_1, h).$$

Recordando (??), vemos que si x^0 está en el borde común entre C_1 y A_1 entonces existe $h > 0$ y θ_0 tales que

$$S(x^0, f(x^0), \theta_0, h) \subset C_1. \quad (10.29)$$

Luego por el Teorema ?? si $x \in B_\delta \cap C_1$ entonces $\Phi_t(x)$ no puede cruzar $\partial C_1 \cap \partial A_1$. Recordando que δ se había elegido de modo que $r(t)$ era decreciente ($\Phi_t(x)$ no puede cruzar ∂B_δ) y haciendo un análisis análogo al anterior sobre cada lado de los sectores angulares A_i , $i = 1, \dots, 4$, se finaliza por demostrar las siguientes afirmaciones:

1. Si $i = 2, 4$, entonces $B_\delta \cap A_i$ es invariante hacia el futuro.
2. Si $x \in B_\delta$ pero x no está en A_i , $i = 1, 3$, entonces $\Phi_t(x)$ nunca entra a A_i , $i = 1, 3$.

Sea $x \in B_\delta \setminus \{0\}$. Observar que una condición necesaria y suficiente para que $\Phi_t(x)$ entre al origen en la dirección de $-e_1$ es que para todo $\delta' > 0$ y $\eta > 0$ exista $t_{\eta, \delta'}$ tal que para $t > t_{\eta, \delta'}$ tengamos $\Phi_t(x) \in A_1(\eta) \cap B_\delta$. Una afirmación análoga se mantiene para las otras tres direcciones en que $\Phi_t(x)$ puede entrar a 0.

Supongamos que $x \in B_\delta$ y que $\Phi_t(x)$ no entra al origen en la dirección de $\pm e_1$. Por el comentario del párrafo anterior existen $\delta > \delta' > 0$, $\eta' > 0$ y t_0 tales que $\Phi_{t_0}(x) \notin (A_1(\eta') \cup A_3(\eta')) \cap B_{\delta'}$. Vamos a ver, observando que en las regiones C_i , $i = 1, \dots, 4$ la velocidad angular θ' es estrictamente positiva, que, para todo $\eta < \eta'$, la trayectoria $\Phi_t(x)$ entra a las regiones $A_i(\eta)$, i par, para algún $t > t_0$.

Si esto no fuera cierto $\Phi_t(x)$, $t > t_0$ permanecería en una región C_i , digamos C_1 , para algún η . Ahora en C_1 el ángulo α es positivo y por (??) tenemos

$$\theta'(t) = \frac{\|f(\Phi_t(x))\| \operatorname{sen} \alpha}{r} > 0.$$

Es decir que la función $\theta(t)$ es creciente, además θ está acotado en C_1 , más precisamente $\theta < \frac{\pi}{2} - \frac{\eta}{2}$. De esta manera el límite $\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) =: \theta_0$ existe, es menor a $\pi/2$ y positivo. Esto implica que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\Phi_t(x)}{r(t)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} (\cos \theta, \operatorname{sen} \theta) = (\cos \theta_0, \operatorname{sen} \theta_0) =: v_0,$$

donde v_0 es distinto de e_1 y e_2 , lo que contradice que las únicas formas de entrar eran en la dirección de los autovectores.

Hemos probado que para todo η , existe un t_1 tal que $\Phi_{t_1}(x)$ está en las regiones A_2 . Como A_2 es invariante hacia el futuro, tenemos que $\Phi_t(x) \in A_2$, para todo $t \geq t_1$. Luego $\Phi_t(x)$ entra al origen en la dirección de $-e_2$. Con esto probamos el inciso ??.

Observar que, de paso, probamos que toda trayectoria que empieza en la bola B_δ y en alguna de las regiones C entra al origen en la dirección de $\pm e_2$. Si empieza en C_i , con $i = 1, 2$, entra en la dirección de $-e_2$; si empieza en C_i , con $i = 3, 4$, entra en la dirección de e_2 . Entonces hay trayectorias que entran en la dirección de $\pm e_2$. Lo único que restaría probar es que hay al menos una trayectoria que entra al origen en la dirección de $\pm e_1$.

Esto se hará con un argumento puramente topológico. Supongamos que no hay trayectorias entrando al origen en la dirección de $-e_1$. Consideraremos el sector $A_1(\eta)$, para cualquier η . De modo que si $x \in A_1(\eta) \cap B_\delta$, $\Phi_t(x)$ debe entrar al origen en la dirección de $\pm e_2$. Para ello $\Phi_t(x)$ debe pasar primero por alguno de los interiores de las regiones C_1 o C_4 . Dividimos $A_1(\eta) \cap B_\delta$ en los dos conjuntos G_1 y G_2 acorde a aquellos puntos que llegan al interior de C_1 o al de C_4 . Se tiene que $A_1(\eta) \cap B_\delta = G_1 \cup G_2$, $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ y que G_1 y G_2 son abiertos relativos en $A_1(\eta) \cap B_\delta$ (esto sigue de la continuidad de Φ_t). Además los conjuntos G son no vacíos, para ver esto solo hay que notar que $A_1(\eta) \cap B_\delta$ contiene puntos de las regiones C_1 y C_4 correspondientes a $\eta/2$. Todo esto implica una contradicción pues $A_1(\eta) \cap B_\delta$ es conexo. De esta forma alguna trayectoria entra al origen en la dirección de e_1 . \square

Para puntos sillas tenemos el siguiente teorema.

Teorema 10.6.7 (Sillas) Supongamos que $f(0) = 0$ y que (??) tiene un punto silla en 0, es decir A tiene autovalores reales de distinto signo $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$. Consideremos las regiones $A_2(\eta)$ y $A_4(\eta)$ como en la demostración del teorema anterior. Entonces existe $\delta > 0$ tal que:

1. Si $x \in A_i(\eta) \cap B_\delta$, $i = 2, 4$, $\Phi_t(x)$ se sale de $A_i(\eta) \cap B_\delta$ cruzando $A_i(\eta) \cap \partial B_\delta$. Vale decir la trayectoria sale de la región cruzando la parte curva de la región y no los lados del sector A_i .
2. Si $\Phi_t(x)$ no entra en $(0, 0)$ entonces $\Phi_t(x) \not\rightarrow 0$.
3. Hay al menos una trayectoria que llega en la dirección de $\pm e_1$.

Por último mencionamos el siguiente teorema.

Teorema 10.6.8 (Focos) Supongamos que $f(0) = 0$ y que (??) tiene un foco estable en 0, es decir A tiene autovalores complejos conjugados $\lambda = a \pm bi$ con $a < 0$ y $b > 0$. Entonces existe $\delta > 0$ tal que:

1. Si $x \in B_\delta$ entonces $\Phi_t(x)$ está definida para todo $t \geq 0$ y $\Phi_t(x) \rightarrow 0$, cuando $t \rightarrow \infty$.
2. Para ningún $x \in B_\delta$, $\Phi_t(x)$ entra en $(0, 0)$.
3. El ángulo $\theta(t)$ satisface que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \theta(t) = +\infty$.

Notar entonces que las trayectorias tienen que formar espirales que se aproximan al origen.

10.7 Aplicación a un modelo biológico

Hemos modelizado la dinámica de una población por una ecuación del tipo $x' = kx$. Cuando k es constante obtenemos la ley de reproducción normal, que representa la ley que obedece la evolución de la población cuando no hay ningún agente externo que influya en la misma. En general podemos pensar en una ley del tipo $x' = k(x)x$, donde k es función de x , por ejemplo si $k(x) = a - x$ obtenemos la ecuación logística, esta ecuación toma cuenta de una provisión de alimentos limitada. Cuando pensamos en dos especies que interactúan y denotamos x_i , $i = 1, 2$, la cantidad de individuos en cada una de ellas podemos representar la dinámica de las mismas por un sistema del tipo

$$\begin{cases} x'_1 = k_1(x_1, x_2)x_1 \\ x'_2 = k_2(x_1, x_2)x_2 \end{cases} \quad (10.30)$$

Aquí k_i representa la naturaleza de la interacción. Pensemos en dos especies compitiendo por la misma fuente de alimentos, es lógico suponer entonces que en esta situación la función k_i disminuya a medida que aumenten las cantidades x_i . Por otro lado, si x_i son pequeños, los k_i deberían estar cerca de la constante en la ley de reproducción normal r_i . Un modelo simple que da cuenta de estos comportamientos es:

$$\begin{aligned} x'_1 &= (r_1 - a_1x_1 - b_1x_2)x_1 \\ x'_2 &= (r_2 - a_2x_2 - b_2x_1)x_2 \end{aligned} \quad (10.31)$$

Todos los coeficientes son positivos y para abolir casos especiales supondremos que $a_1a_2 - b_1b_2 \neq 0$. Hay cuatro equilibrios en este modelo:

$$\begin{aligned} E_1 &= (0, 0) & E_2 &= (0, r_2/a_2) \\ E_3 &= (r_1/a_1, 0) & E_4 &= (a_1a_2 - b_1b_2)(a_2r_1 - b_1r_2, a_1r_2 - b_2r_1) \end{aligned} \quad (10.32)$$

El equilibrio E_1 corresponde a que ambas especies se han extinguido. En los equilibrios E_2 y E_3 se ha extinguido una especie y la otra ha llegado al equilibrio con la provisión de alimentos. El equilibrio E_4 tiene sentido para nuestro problema si tiene ambas componentes positivas, es el más "sano" de todos los equilibrios pues representa un equilibrio donde ambas especies coexisten.

El análisis del modelo requiere dividir en casos acorde a la magnitud relativa de los coeficientes. De todos los casos posibles analizaremos el siguiente:

$$a_2r_1 < b_1r_2 \quad y \quad a_1r_2 < b_2r_1. \quad (10.33)$$

Multiplicando las dos ecuaciones y dividiendo por r_1r_2 obtenemos

$$a_2a_2 < b_1b_2. \quad (10.34)$$

Con estas asignaciones E_4 está en el primer cuadrante. La desigualdad (??) se puede interpretar como que la competencia intraespecies es más débil que la interespecies.

Empecemos por considerar el sistema linearizado en $E_1 = (0, 0)$. No hay necesidad de derivar la ecuación ya que muy fácilmente se desarrolla f en series de potencias respecto a las variables x_1 , x_2 y despreciando todos los monomios en (??) de grado mayor que 1, nos queda que

$$A = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix}.$$

El equilibrio es por ende un nodo inestable. Los vectores e_1 y e_2 son autovectores de A (únicos si $r_1 \neq r_2$), de modo que las trayectorias nacen en $-\infty$ tangentes a alguno de estos vectores (nuevamente si $r_1 \neq r_2$). El desarrollo en E_2 lo obtenemos reemplazando $x_1 = u_1 + r_1/a_1$ y $x_2 = u_2 - x_1$ y eliminando los monomios cuadráticos, obtenemos

$$A = \begin{pmatrix} -r_1 & -r_1 b_1/a_1 \\ 0 & -(b_2 r_1 - a_1 r_2)/a_1 \end{pmatrix}.$$

Como A es triangular los autovalores están sobre la diagonal y son negativos acorde a (??). Así el equilibrio es un nodo estable. Un autovector correspondiente a $-r_1$ es e_1 y un autovector correspondiente a $-(b_2 r_1 - a_1 r_2)/a_1$ es $((a_1 r_2 - b_2 r_1 - r_1 a_1)/a_1, 1)$, notar que la primera coordenada es negativa.

La linearización en E_3 es simétrica respecto a E_2 . Para analizar el sistema linearizado en E_4 pongamos $E_4 = (A_1, A_2)$ sustituimos $x_1 = u_1 + A_1$ y $x_2 = u_2 + A_2$ en el campo y eliminemos los monomios cuadráticos, obtenemos

$$A = \begin{pmatrix} -a_1 A_1 & -b_1 A_1 \\ -b_2 A_2 & -a_2 A_2 \end{pmatrix}.$$

Como $A_1, A_2 > 0$ tenemos que $\det A = (a_1 a_2 - b_1 b_2) A_1 A_2 < 0$ que implica que tenemos un punto silla. No vamos a buscar los autovectores en este caso.

Por supuesto que con sólo la información local en los puntos de equilibrio no podemos generalmente reconstruir el retrato de fases, es necesario pues utilizar alguna información global, en este ejemplo vamos a ilustrar el método de las *isoclinas*. Las isoclinas son curvas donde el sentido y dirección del campo f es constante. En particular es útil considerar cuando $f(x)$ es horizontal o vertical que corresponde a $f_2(x_1, x_2) = 0$ o $f_1(x_1, x_2) = 0$ respectivamente. En nuestro caso tenemos $f_2(x_1, x_2) = 0$ en las rectas

$$\begin{aligned} L_1 : 0 &= x_2 \\ L_2 : 0 &= r_2 - a_2 x_2 - b_2 x_1 \end{aligned}$$

y $f_1(x_1, x_2) = 0$ en las rectas

$$\begin{aligned} L_3 : 0 &= x_1 \\ L_4 : 0 &= r_1 - a_1 x_1 - b_1 x_2 \end{aligned}$$

Recordar que $x_1, x_2 \geq 0$ de modo que miramos estas rectas sólo en el primer cuadrante. El corte de las rectas L_2 y L_4 es el equilibrio E_4 . Estas rectas dividen el primer cuadrante en cuatro regiones como muestra la figura ??.

Notar que si $x_2 = 0$ podemos fácilmente analizar la ecuación que queda para x_1 , esta es $x'_1 = (r_1 - a_1 x_1)x_1$ que resulta ser la ecuación logística. Vemos así que una solución que empieza sobre el eje x_2 permanece allí (es decir L_1 es invariante). Analizando esta ecuación vemos que tiene un equilibrios en $x_1 = 0$ y $x_1 = r_1/a_1$, 0 es un equilibrio inestable y r_1/a_1 estable (de hecho esto ocurría en \mathbb{R}^2). Lo mismo ocurre para $x_1 = 0$.

Sobre la recta L_2 tenemos que la dirección $f(x)$ es horizontal y sobre L_4 es vertical. Para determinar los sentidos de estos vectores notar que en los puntos por encima de la recta L_4 tenemos que $x'_1 = f_1(x_1, x_2) = (r_1 - a_1 x_1 - b_1 x_2)x_1 < 0$ y, para los puntos debajo de esta recta tenemos $x'_1 = f_1(x_1, x_2) > 0$. Haciendo el mismo análisis para la recta L_2 averiguamos el sentido de los vectores sobre las rectas L_2 y L_4 . Además notemos que de paso averiguamos que:

1. En la región I $x'_1 < 0$ y $x'_2 < 0$ y por ende x_1 y x_2 decrecen,
2. En la región II x_1 decrece y x_2 crece,
3. En la región III x_1 y x_2 crecen,
4. Por último, en la región IV x_1 crece y x_2 decrece.

Toda esta información la podemos consignar en un gráfico marcando un vector en cada una de las regiones I-IV indicando como se comportan x_1 y x_2 allí. Esto lo hicimos en la figura ?? Vemos así que las regiones II y IV son invariantes hacia el futuro pues sobre los bordes de ellas correspondientes a las rectas L_1 y L_2 el campo apunta hacia

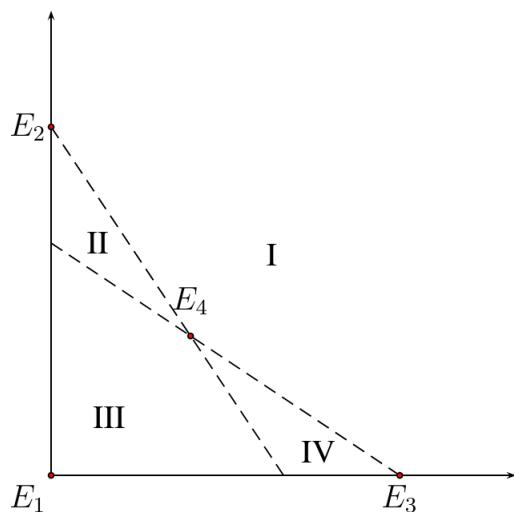


Figura 10.7.1

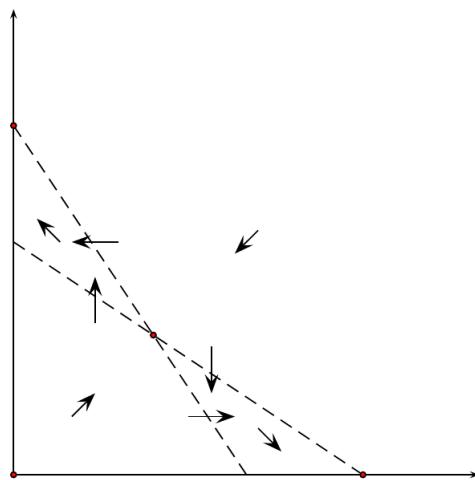


Figura 10.7.2

el interior de la región, el borde restante está formado por una trayectoria de modo que otra trayectoria no la puede cruzar. Por el sentido en que apuntan los vectores y ya que E_2 y E_3 eran equilibrios estables inferimos que una solución que entra a la región II o a la IV tiende a E_2 o E_3 respectivamente. De manera similar si una trayectoria está en la región III el equilibrio E_4 atrae a la trayectoria, no obstante en este caso la trayectoria puede pasar a las otras regiones pues la región III no es invariante. Lo mismo ocurre en la región I. Aunque no hayamos calculado los autovectores de $Df(E_4)$ de la información brindada podemos concluir que un autovector correspondiente al autovalor positivo tiene que apuntar (supuesto su origen en E_4) hacia las regiones II o IV, mientras que un autovector correspondiente al autovalor negativo lo tiene que hacer hacia las regiones I o III. Esto es así pues de lo contrario inferiríamos que habría trayectorias que no se comportan como vimos. En la figura ?? realizamos el retrato de fases con el paquete de \LaTeX pstricks-add para los valores $a_1 = a_2 = 1$, $b_1 = b_2 = 1,5$ y $r_1 = r_2 = 3$. Con estos valores (en particular de que $r_1 = r_2$) puede ocurrir que las trayectorias entren a los nodos estables en cualquier dirección.

La conclusión del análisis es negativa desde el punto de vista de la diversidad biológica, pues salvo el equilibrio E_4 y las dos trayectorias que tienden a él, cualquier otra

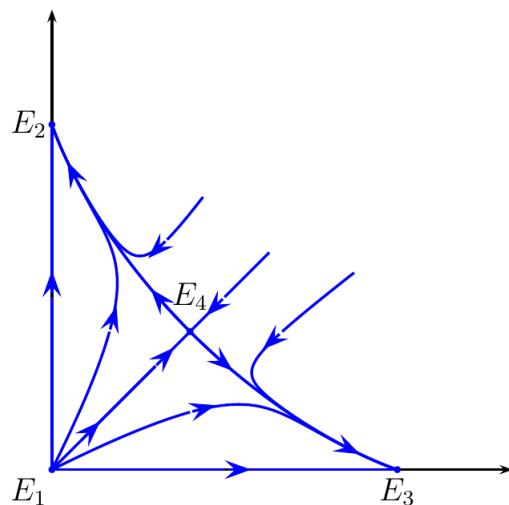
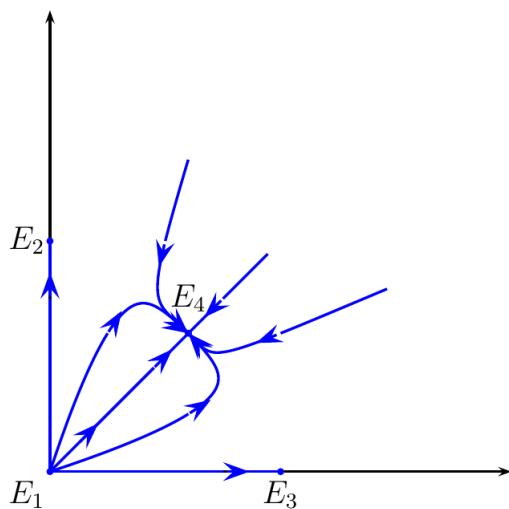


Figura 10.7.3: Retrato de fases modelo biológico

trayectoria termina con la extinción de alguna de las dos especies. No obstante recordemos que nuestras suposiciones (??) implicaban la desigualdad (??) que nos decía que la competencia interespecies era más fuerte que la intraespecies. Cuando las desigualdades (??) son invertidas de modo que la competencia intraespecies es más fuerte que la interespecies el retrato de fases adquiere la forma de la figura ??, como se observa el equilibrio E_4 ahora es estable.

Figura 10.7.4: $a_1a_2 > b_1b_2$

10.8 Teoría global

10.8.1 Puntos regulares

10.8.2 ω -límites

10.8.3 Teorema de Poincare-Bendixson

10.9 Estabilidad en el sentido de Lyapunov

Ejercicios

Ejercicio 10.9.1 Sea φ una solución de $x' = f(x)$ con $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Demostrar que si el $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t)$ existe y es un punto x^0 en Ω entonces x^0 es un punto de equilibrio.

Ejercicio 10.9.2 Demostrar que los siguientes sistemas

$$\begin{cases} x'_1 = -x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ x'_2 = x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{cases} \quad \begin{cases} x'_1 = -x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) \\ x'_2 = x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2 - 1) \end{cases},$$

tienen la misma linearización en su equilibrio común $(0, 0)$ pero se comportan de manera cualitativamente diferente allí.

Ejercicio 10.9.3 Analizar todas las posibles formas en que una solución a un sistema lineal $x' = Ax$, con $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ no singular, puede entrar a 0

Ejercicio 10.9.4 Hacer el retrato de fases de los siguientes sistemas:

$$1. \begin{cases} x' = -y + x(1 - x^2 - y^2) \\ y' = x + y(1 - x^2 - y^2) \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x' = -y + x(x^2 + y^2) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \\ y' = x + y(x^2 + y^2) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x' = y[y^2 + (x^2 - 1)^2] + x(1 - x^2 - y^2) \\ y' = -x[y^2 + (x^2 - 1)^2] + y(1 - x^2 - y^2) \end{cases}$$

Ejercicio 10.9.5 En el modelo de dos especies (??) suponer que las desigualdades (??) son invertidas. Demostrar que el retrato de fases es como se muestra en la figura ??.

Ejercicio 10.9.6 Demostrar los teoremas ?? y ??.

Ejercicio 10.9.7 Sea f una función continua definida en un abierto D de \mathbb{R}^n . Supongamos que existe una función $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f = \nabla \varphi$. Demostrar que $x' = f(x)$ no posee órbitas periódicas. Si f tiene sólo puntos de equilibrio aislados, demostrar que para toda órbita x , $\Omega[x]$ es vacío o es un punto de equilibrio.

Sugerencia: Notar que

$$\frac{d\varphi(x(t))}{dt} > 0$$

para toda trayectoria, esto es $\varphi(x(t))$ es creciente.

Ejercicio 10.9.8 Sea $\Phi_t(x)$ el flujo generado por un campo f continuo. Un subconjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ se llama *minimal* de f si es invariante, compacto y no contiene subconjuntos propios de esas características. Demostrar que en \mathbb{R}^2 los únicos subconjuntos minimales son los puntos singulares y las órbitas periódicas de f . ¿Si $n > 2$ es cierto esto?

Ejercicio 10.9.9 Determinar los conjuntos $\Omega[x]$ para el sistema

$$\begin{cases} x' = -y + x(1 - x^2 - y^2) \\ y' = x + y(1 - x^2 - y^2) \end{cases}$$

Ejercicio 10.9.10 Encontrar $\Omega[x]$ para el siguiente campo $f = (f_1, f_2)$ definido sobre \mathbb{R}^2 :

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &:= -y + x(x^2 + y^2) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \\ f_2(x, y) &:= x + y(x^2 + y^2) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \end{aligned}$$

Ejercicio 10.9.11 Idem ejercicios anteriores para el sistema

$$\begin{cases} x' = y[y^2 + (x^2 - 1)^2] + x(1 - x^2 - y^2) \\ y' = -x[y^2 + (x^2 - 1)^2] + y(1 - x^2 - y^2) \end{cases}$$

Ejercicio 10.9.12 Criterio de Bendixson Si $f = (f_1, f_2)$ es un campo de clase C^1 en $D \subset \mathbb{R}^2$, con D abierto y simplemente conexo, y

$$\operatorname{div} f \neq 0$$

entonces f no tiene órbitas periódicas. Sugerencia: Aplicar el teorema de Green.

Ejercicio 10.9.13 Determinar los puntos de equilibrio del sistema correspondiente al p'edulo con fricc'i'on:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -b \operatorname{sen} x - ay, \end{cases}$$

Ejercicio 10.9.14 Sistemas conservativos unidimensionales Considerar la ecuaci'on

$$x'' = F(x),$$

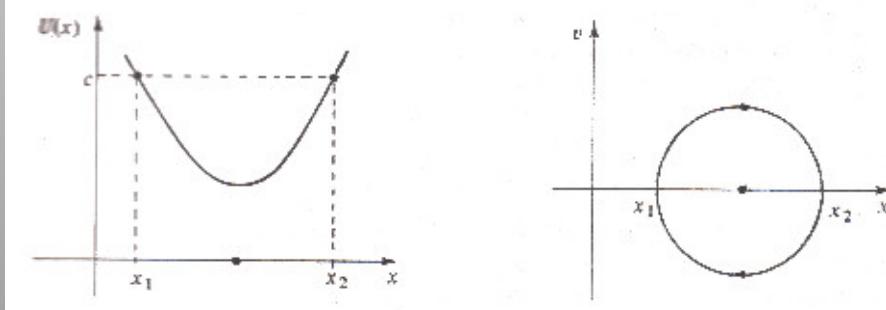
donde $F : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Esta ecuaci'on equivale al sistema:

$$\begin{cases} x' = v \\ v' = F(x) \end{cases} \quad (10.35)$$

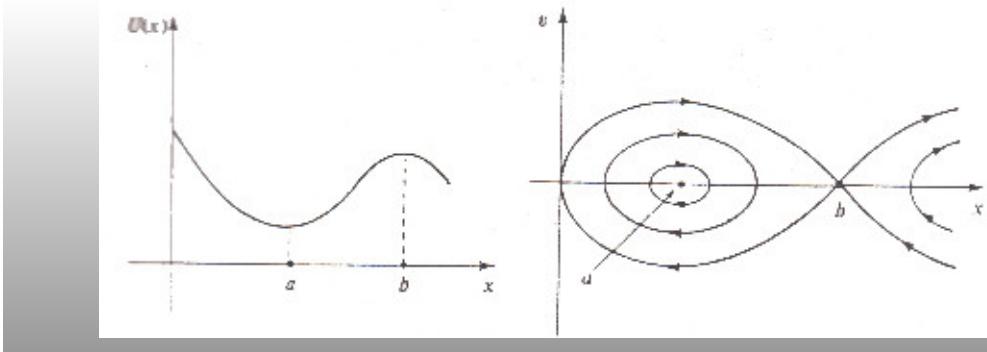
1. Demostrar que las soluciones preservan la energ'ia total del sistema $E := T + U$ donde $T(v) := \frac{v^2}{2}$ es la energ'ia cin'etica y $U(x) := - \int_{x_0}^x f(\xi) d\xi$ es la energ'ia potencial.
2. Demostrar que los puntos de equilibrio del sistema (??) est'an en el eje x . Demostrar que toda 'orbita peri'odica de (??) interseca al eje de las x y son sim'etricas respecto a ese eje.
3. Demostrar que si $U(x_1) = U(x_2) = c$ y $U(x) < c$ para $x_1 < x < x_2$ entonces (??) tiene una soluci'on peri'odica que pasa por los puntos $(x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$. *Sugerencia:* La 'orbita que pasa por $(x_0, 0)$ satisface $\frac{v^2}{2} + U(x) = E$ donde E es su energ'ia. Usar el hecho que:

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{F(x)}{v}$$

para concluir que esta 'orbita se vuelve a cortar con el eje x en $(x_2, 0)$. Usar entonces el item ??.



4. Supongamos $F(x) \neq 0$ para $0 < |x - x_0| < a$. Demostrar que (??) tiene un centro o una silla en $(x_0, 0)$ acorde a $U(x_0)$ sea un m'inimo o un m'ximo relativo.



Ejercicio 10.9.15 Utilizando el ejercicio anterior determinar el espacio de fases de las siguientes ecuaciones:

1. $x'' = -x$ (resorte).
2. $x'' = -\sin x$ (pendulo).
3. $x'' = -\frac{1}{x^2}$ (gravitacion).

Ejercicio 10.9.16 Sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ una campo vectorial continuo. Una función $E : D \rightarrow \mathbb{R}$ se llama integral primera de f en D si:

1. E es constante sobre cada 'órbita' de f .
2. E no es constante en ning'un subconjunto abierto de D .

Resolver los siguientes problemas:

1. Sea $E : D \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que

$$DE(x) \cdot f(x) = 0 \quad \text{y} \quad DE(x) \neq 0,$$

para todo x , donde DE denota el diferencial de E . Entonces E es una integral primera.

2. Encontrar una integral primera para el centro dado por:

$$\begin{cases} x'_1 = -\beta x_2 \\ x'_2 = \beta x_1 \end{cases}$$

y de la silla

$$\begin{cases} x'_1 = \lambda_1 x_1 \\ x'_2 = \lambda_2 x_2 \end{cases}$$

donde $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$.

3. Demostrar que no existe una integral primera para los sumideros o fuentes lineales en \mathbb{R}^2 .
4. Generalizar los dos incisos anteriores a sistemas lineales en \mathbb{R}^n .
5. Sea $H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^1 . Supongamos que los puntos donde $DH(x) = 0$ son aislados. Encontrar una integral primera para el campo:

$$f(x_1, \dots, x_{2n}) = \left(\frac{\partial H}{\partial x_{n+1}}, \dots, \frac{\partial H}{\partial x_{2n}}, -\frac{\partial H}{\partial x_1}, \dots, -\frac{\partial H}{\partial x_n} \right).$$

Tal campo se lo conoce como Hamiltoniano.

6. Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ y $E : D \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que DE no se anula en ning'un abierto de D . Encontrar un campo f que tenga a E por integral primera.
7. Demostrar que si E es una integral primera de f entonces $M_c = f^{-1}(c)$ es invariante para el flujo generado por f . En particular podemos considerar las 'orbitas contenidas en M_c como un "subsistema" de una dimensi'on menor en una unidad al original.

Ejercicio 10.9.17 Consideremos las ecuaciones de Lotka-Volterra:

$$\begin{cases} x' = \alpha x - \beta xy \\ y' = -\gamma x + \delta xy \end{cases}$$

donde α, β, γ y δ son positivos. Demostrar que el sistema tiene una integral primera E que posee en $(\gamma/\delta, \alpha/\beta)$ un punto de m'nimo no degenerado (esto es D^2E es definida positiva en ese punto). Conclu'r que todas las soluciones en el cuadrante positivo son peri'odicas. *Sugerencia:* Transformar el sistema en una ecuaci'on en variables separadas y deducir que

$$E = -y^\alpha x^\gamma e^{-\beta y} e^{-\delta x}$$

Ejercicio 10.9.18 Demostrar que el origen es un punto de equilibrio asint'oticamente estable de:

$$\begin{cases} x' = -x - \frac{x^3}{3} - 2\sin y \\ y' = -y - \frac{y^3}{3} \end{cases}$$

Ejercicio 10.9.19 Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continua y supongamos que $f(0) = 0$ y $\langle x, f(x) \rangle < 0 \forall x \neq 0$. Demostrar que $x \mapsto |x|^2$ es una funci'on de Liapunov estricta para el sistema $x' = f(x)$.

Ejercicio 10.9.20 Sea x_0 un punto de equilibrio de $x' = f(x)$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua, $D \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Sea $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ una funci'on de Liapunov en x_0 . Supongamos que no existe una trayectoria del sistema completamente contenida en $Z := \{x \in U : \dot{V} = 0\}$, excepto $x(t) \equiv x_0$. Entonces x_0 es asintoticamente estable.

Ejercicio 10.9.21 Sea x_0 un punto de equilibrio de $x' = f(x)$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua, $D \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Sea V una funci'on de clase C^1 definida en un entorno de x_0 tal que $\dot{V} > 0 \forall x \neq x_0$ y $V(x_0) = 0$. Si en todo entorno de x_0 existe un x tal que $V(x) > 0$, entonces x_0 es inestable.

Ejercicio 10.9.22 Sea x_0 un punto de equilibrio de $x' = f(x)$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua, $D \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Sea $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ una funci'on de Liapunov estricta de x_0 . Entonces, para cada $c > 0$ tal que $V^{-1}([0, c])$ es compacto se tiene que $V^{-1}([0, c]) \subset E(x_0)$ la variedad estable de x_0 .

Ejercicio 10.9.23 Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^1 . Consideremos el sistema

$$x' = -\nabla V(x).$$

Demostrar que

1. $\dot{V}(x) \leq 0 \forall x \in D$ y $\dot{V}(x) = 0$ si, y solo si, x es un punto de equilibrio de $-\nabla V$.
2. Si x_0 es un mínimo aislado de V , entonces x_0 es un punto de equilibrio asintóticamente estable de $-\nabla V$.
3. $-\nabla V$ no posee órbitas periódicas no constantes.

Ejercicio 10.9.24 Sea $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función C^1 , con $D \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Sea y un punto ω -límite de una trayectoria del campo $-\nabla V$. Entonces y es un punto de equilibrio de este campo. Sugerencia: Demostrar que V es constante en $\Omega[x] \forall x$.

Ejercicio 10.9.25 Considerar una partícula moviéndose bajo la influencia de una función potencial $P : D \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 , $D \subset \mathbb{R}^3$ abierto. El sistema dinámico correspondiente es:

$$\begin{cases} x' = v, \\ v' = -\nabla P(x) \end{cases}$$

Demostrar el Teorema de Lagrange, segúun el cual un punto de equilibrio $(x_0, 0)$ del sistema es estable si x_0 es un mínimo local estricto de P .

Ejercicio 10.9.26 Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $f(0) = 0$. La solución 0 de $x' = f(x)$ se dice globalmente estable cuando es estable y $x(t) \rightarrow 0$ para $t \rightarrow \infty$ para toda otra solución $x(t)$. Sea $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función de Liapunov estricta de $x' = f(x)$ en 0. Supongamos que para cada $c > 0$ existe un $R > 0$ tal que $|x| > R$, implica $V(x) > c$. Entonces 0 es una solución globalmente estable de $x' = f(x)$. Observar que no es necesaria la condición $V(x) = 0$ si $x = 0$. Es suficiente suponer que no existe una solución $x(t)$, distinta de la nula, tal que $V(x(t)) = 0 \forall t$.

11 Estabilidad

Concepto General

«En ciencias, una situación es estable si se mantiene en estado estacionario, es decir, igual en el tiempo y una modificación razonablemente pequeña de las condiciones iniciales no altera significativamente el futuro de la situación. Dependiendo del área en particular, estabilidad tiene significados ligeramente diferentes.»

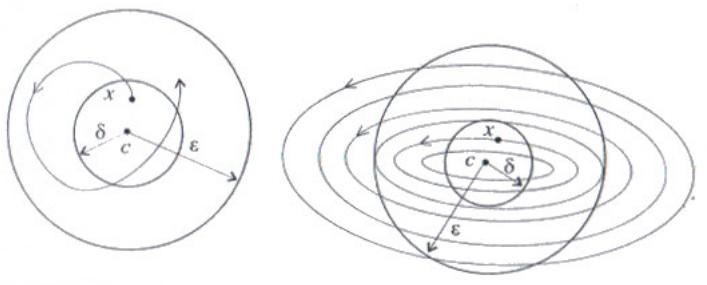
[Wikipedia](#)

11.1 Estabilidad en puntos de Equilibrio

11.1.1 Definiciones

Definición 11.1.1 (Estabilidad de puntos de equilibrio) upongamos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial independiente del tiempo, $\Phi_t(x)$ el flujo asociado a X y $c \in \Omega$ un equilibrio ($X(c) = 0$). Llamamos $I_x = (a_x, b_x)$ al intervalo máximo donde esta definida la solución que en $t = 0$ pasa por $x \in \Omega$. El equilibrio c se dice estable si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|x - c| < \delta \Rightarrow \forall t \in [0, b_x) : |\Phi_t(x) - c| < \epsilon.$$



Definición 11.1.2 (Inestabilidad en puntos de equilibrio) Un punto de equilibrio c se dice *inestable* si no es estable.

Ejercicio 11.1.1 Un punto de equilibrio c es inestable si y sólo si existe un $\epsilon > 0$, una sucesión de puntos $\{x_n\}$ y de tiempos $\{t_n\}$ tal que $t_n \in [0, b_{x_n})$, $x_n \rightarrow c$ y $|\Phi_{t_n}(x_n) - c| \geq \epsilon$.

Observación. Si c es un punto de equilibrio estable de $X : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^n$ entonces $b_x = +\infty$.

Esta afirmación necesita una demostración. Tomemos $\epsilon > 0$ tal que $\overline{B}(c, \epsilon) \subset \Omega$. Por definición de estabilidad, existe $\delta > 0$ tal que si $|x - c| < \delta$ y $t \in [0, b_x)$ entonces $\Phi_t(x) \in B(c, \epsilon)$. Luego la imagen por la solución del intervalo $[0, b_x)$ está contenido dentro de un compacto. Esto implica que $b_x = \infty$.

Definición 11.1.3 (Estabilidad asintótica) Definición: estabilidad asintótica Un punto de equilibrio $c \in \Omega$ se dice *asintóticamente estable* si es estable y existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in B(c, \delta) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi_t(x) = 0.$$

11.1.2 Estabilidad via linealización

Teorema 11.1.1 (Estabilidad asintótica de sistemas lineales) Consideremos el sistema lineal $x' = Ax$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Son equivalentes

1. El sistema lineal $x' = Ax$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tiene un equilibrio asintóticamente estable en 0.
2. Todo autovalor λ de A satisface que $\lambda \in (-\infty, 0)$.

Teorema 11.1.2 (Invariancia de la estabilidad por equivalencias topológicas) Sean $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $Y : \Omega' \rightarrow \mathbb{R}^n$ dos campos C^1 topológicamente equivalentes. Sea $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ un homeomorfismo que realiza esta equivalencia topológica entre X e Y . Sea $c \in \Omega$ un punto de equilibrio de X , recordar que $b := f(c)$ lo es de Y . Entonces tenemos que c es (asintóticamente) estable si y sólo si b es (asintóticamente) estable.

Demostración. Seguir los siguientes pasos. Demostrar como ejercicio que si Φ_t^X y Φ_t^Y son los flujos asociados a X e Y respectivamente, entonces para cada $y \in \Omega'$ y $t \in I_y$ vale que:

$$\Phi_t^Y = f \circ \Phi_t^X \circ f^{-1}.$$

Suponer c estable y tomar $\epsilon > 0$. Como f es continua, $f^{-1}(B(b, \epsilon))$ es abierto y de allí existe $\epsilon_0 > 0$ tal que $B(c, \epsilon_0) \subset f^{-1}(B(b, \epsilon))$. Como c es estable, existe δ_0 tal que $\Phi_t^X(B(c, \delta_0)) \subset B(c, \epsilon_0)$. Como f^{-1} es continua, $f(B(c, \delta_0))$ es abierto, luego existe $\delta > 0$ tal que $B(b, \delta) \subset f(B(c, \delta_0))$. Por todos los hechos previos,

$$\begin{aligned} \Phi_t^Y(B(b, \delta)) &= f \circ \Phi_t^X \circ f^{-1}(B(b, \delta)) \subset f \circ \Phi_t^X(B(c, \delta_0)) \\ &\subset f(B(c, \epsilon_0)) \subset B(b, \epsilon). \end{aligned}$$

La afirmación recíproca, si b es estable entonces c lo es, sería redundante demostrarla. Para la estabilidad asintótica, supongamos c asintóticamente estable y $\delta_0 > 0$ tal que

$$x \in B(c, \delta_0) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi_t^X(x) = 0.$$

Por la continuidad de f^{-1} existe $\delta > 0$ tal que $B(b, \delta) \subset f(B(c, \delta_0))$. Luego, de estos hechos, el ejercicio previo, la continuidad de f y Φ_t^X tenemos que si $y \in B(b, \delta)$ entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi_t^Y(y) = \lim_{t \rightarrow \infty} f \circ \Phi_t^X \circ f^{-1}(y) = f \left(\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi_t^X(f^{-1}(y)) \right) = 0$$

□

Corolario 11.1.1 Supongamos que c es un punto de equilibrio de $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$. Supongamos que todos las partes reales de autovalores de $DX(c)$ son negativas. Entonces c es asintóticamente estable. Si en cambio, algún autovalor tiene parte

real positiva, c es inestable.

El Corolario no afirma nada cuando hay autovalores imaginarios puros. Desafortunadamente esta situación se presenta con frecuencia. Ejemplo de esto es la ecuación del resorte.

11.1.3 Método de Lyapunov

El método de Lyapunov está basado en la introducción de ciertas funciones, campos escalares $\Lambda : U \rightarrow \mathbb{R}$ donde U es entorno de c . Estas funciones se llaman funciones de Lyapunov y cumplen un papel análogo al de energía en sistemas mecánicos.

A pesar del nombre, el método de Lyapunov no es del todo metódico, no tenemos un algoritmo para determinar cuando existe una función de Lyapunov ni tampoco como puede ser obtenida.

Definición 11.1.4 (derivada covariante) Sea $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial sobre el abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. La derivada covariante respecto a X se simboliza por ∇_X y es un operador (diferencial) que actúa sobre campos escalares $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Se define por

$$\nabla_X F(x) = X \cdot \nabla F = \sum_{j=1}^n X_j(x) \frac{\partial F}{\partial x_j}(x).$$

Ejercicio 11.1.2 Demostrar que

1. La derivada covariante de F representa la variación de F a lo largo de una trayectoria del flujo asociado a X . En otros términos

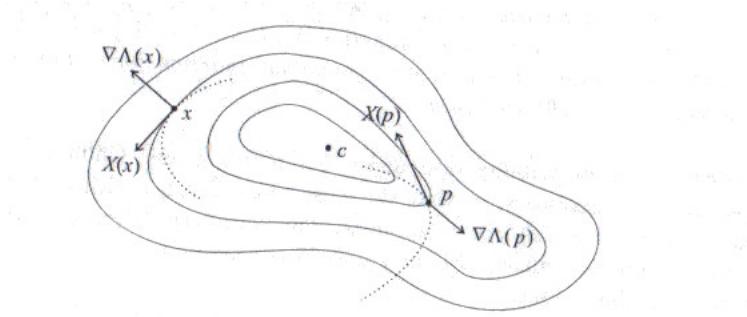
$$(\nabla_X F)(\Phi_t^X(x)) = \frac{d}{dt} (F(\Phi_t^X(x))).$$

2. $(\nabla_X F)(x) = |\nabla F(x)| |X(x)| \cos(\theta(x))$, donde $\theta(x)$ representa el ángulo entre $X(x)$ y uno de los vectores normales a la superficie de la forma $\{y : F(y) = k\}$ que pasa por x .

Definición 11.1.5 (Función de Lyapunov) Sea $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial sobre el abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y c un punto de equilibrio. Una función, de clase C^1 , $\Lambda : U \rightarrow \mathbb{R}$, donde $U \subset \Omega$ es abierto y $c \in U$, se denomina Función de Lyapunov para c si satisface

1. $\Lambda(c) < \Lambda(x)$ para todo $x \in U \setminus \{c\}$.
2. $\nabla_X \Lambda \leq 0$ en U .
3. Si se satisface la desigualdad estricta $\nabla_X \Lambda < 0$ diremos que Λ es una función de Lyapunov estricta.

Acorde al inciso 2 de nuestro ejercicio, la condición $(\nabla_X \Lambda)(x) \leq 0$ dice que el ángulo entre $X(x)$ y la superficie de nivel $\{z : \Lambda(z) = k\}$ que contiene al x es obtuso ($(\nabla_X \Lambda)(x) < 0$) o, a lo sumo, recto ($(\nabla_X \Lambda)(x) = 0$).



Visto a través del inciso 1) del ejercicio, una función de Liapunov satisface que tiene un mínimo en c y que $\Lambda(\Phi_t^X(x))$ es decreciente respecto al tiempo. Esta observación es la idea clave para demostrar el Teorema de Estabilidad de Lyapunov.

Teorema 11.1.3 (Teorema de Estabilidad de Lyapunov) Sea $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial sobre el abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y c un punto de equilibrio. Supongamos que $\Lambda : U \rightarrow \mathbb{R}$, con $U \subset \Omega$ abierto y $c \in U$, es una Función de Lyapunov para c . Entonces c es un equilibrio estable. Si Λ es una función de Lyapunov estricta para c , entonces c es asintóticamente estable.

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Tomemos $0 < \epsilon_0$ tal que $\epsilon_0 \leq \epsilon$ y $\overline{B}(c, \epsilon_0) \subset U$. Como $\partial B(c, \epsilon_0)$ es un compacto y Λ es continua, Λ alcanza un valor mínimo sobre aquel conjunto, es decir existe z_0 , con $|z_0 - c| = \epsilon_0$ tal que

$$\mu := \min\{\Lambda(y) : |y - c| = \epsilon_0\} = \Lambda(z_0) > \Lambda(c). \quad (11.1)$$

Sea ahora $\delta > 0$ tal que

$$B(c, \delta) \subset B(c, \epsilon_0) \cap \Lambda^{-1}(-\infty, \mu).$$

ver figura ??.

Teorema de Estabilidad de Lyapunov

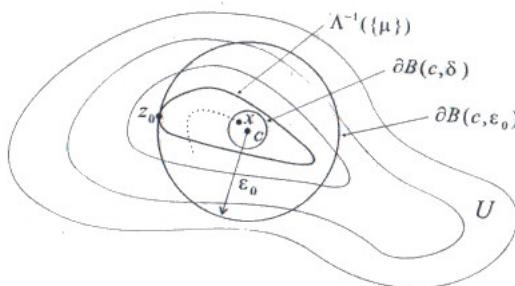


Figura 11.1.1: Demostración Teorema Lyapunov

Teorema de Estabilidad de Lyapunov Supongamos ahora que $x \in B(c, \delta)$. Como $\Lambda(x) < \mu$ y como $\Lambda(\Phi_t(x))$ es decreciente para $t \in [0, b_x]$ tenemos que

$$\Lambda(\Phi_t(x)) < \mu \quad \text{para } t \in [0, b_x]. \quad (11.2)$$

Vemos que $\Phi_t(x) \in B(c, \epsilon_0)$ cuando $t \in [0, b_x]$. De lo contrario existiría un $t_0 > 0$ con $\Phi_{t_0}(x) \notin B(c, \epsilon_0)$. Como $\Phi_t(x)$ es continua respecto a t , el conjunto $\{\Phi_t(x) | t \in [0, t_0]\}$ es conexo. Por consiguiente $\{\Phi_t(x) | t \in [0, t_0]\} \cap \partial B(c, \epsilon_0) \neq \emptyset$. Luego existiría un $t \in [0, t_0]$ tal que $\Phi_t(x) \in \partial B(c, \epsilon_0)$. Para este t_0 por (??) tendremos que $\Lambda(\Phi_{t_0}(x)) \geq \mu$ que contradice (??). Como $B(c, \epsilon_0) \subset B(c, \epsilon)$, hemos demostrado la estabilidad.

Supongamos la función de Lyapunov Λ estricta. Veamos que si $x \in B(c, \delta)$ entonces $\Phi_t(x) \rightarrow c$ cuando $t \rightarrow \infty$. De no ser esto último cierto, existiría un $\epsilon_1 > 0$ y una sucesión de tiempos t_k tendiente a $+\infty$ tal que

$$|\Phi_{t_k}(x) - c| \geq \epsilon_1.$$

Como $\Phi_{t_k}(x) \in \overline{B}(c, \epsilon_0)$ y este conjunto es compacto, existiría una subsucesión de $\Phi_{t_k}(x)$ convergente. Por simplicidad supondremos que esta subsucesión es t_k y llamaremos z a este límite.

Ahora $\Lambda(\Phi_t(z))$ es decreciente respecto a t , por ello existe $s > 0$ tal que $\Lambda(\Phi_s(z)) < \Lambda(z)$. Como la función $y \mapsto \Lambda(\Phi_s(y))$ es continua en y para s fijo, existe un entorno V de z tal que si $y \in V$ entonces $\Lambda(\Phi_s(y)) < \Lambda(z)$. Como $\Phi_{t_k}(x)$ tiende a z , existiría $K > 0$ tal que $\Phi_{t_k}(x) \in V$, cuando $k > K$. Fijemos uno de tales k , lo llamaremos k_0 . Ahora si elegimos cualquier k suficientemente grande para que $t_k > t_{k_0} + s$, tendremos

$$\Lambda(z) \leq \Lambda(\Phi_{t_k}) < \Lambda(\Phi_{t_{k_0}+s}) = \Lambda(\Phi_s(\Phi_{t_{k_0}}(x))) < \Lambda(z).$$

□

11.1.4 Método de Lyapunov: Ejemplos

Ejemplo 11.1.1 Estabilidad de los equilibrios $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, en la ecuación del péndulo

```
x,y=var('x,y')
Eq1=y
Eq2=-sin(x)
Equilibrios=solve([Eq1,Eq2],[x,y])
Equilibrios
```

Sympy encuentra los equilibrios $[[x = \pi z_0, y = 0]]$, que es su manera de expresar $x = n\pi$, $y = 0$, con $n \in \mathbb{Z}$. Analicemos el equilibrio $(0, 0)$.

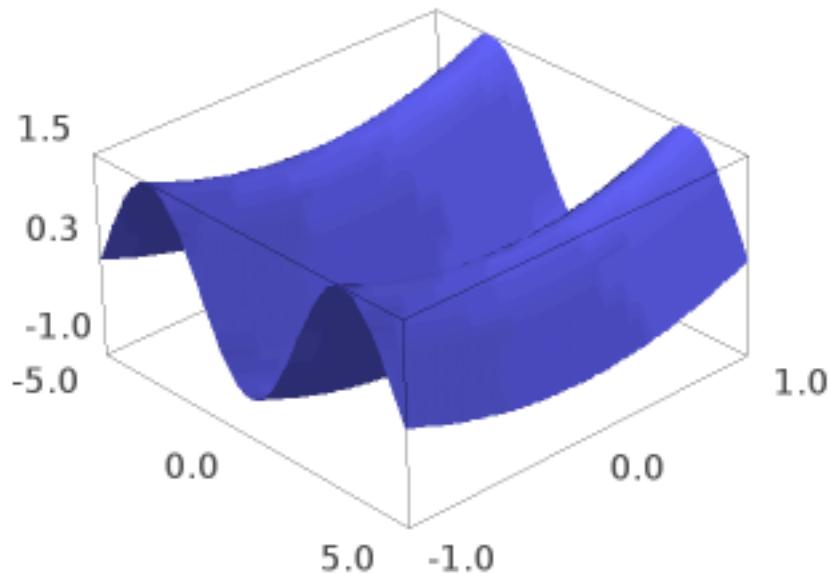
```
X=Matrix([Eq1,Eq2])
A=jacobian(X,(x,y)).subs({x:0,y:0})
D=A.eigenvalues()
```

Los autovalores son $[-i, i]$. No se puede aplicar el Teorema Linearización, autovalores imaginarios puros. Vamos a usar la energía

$$E = \frac{1}{2}y^2 - \cos(x)$$

como función de Lyapunov.

```
Lambda=1.0/2*y**2-cos(x)
```



Es facil demostrar que

$$\Lambda(x, y) > \Lambda(0, 0) \quad \text{para } -2\pi < x < \pi, y \in \mathbb{R}, (x, y) \neq (0, 0)$$

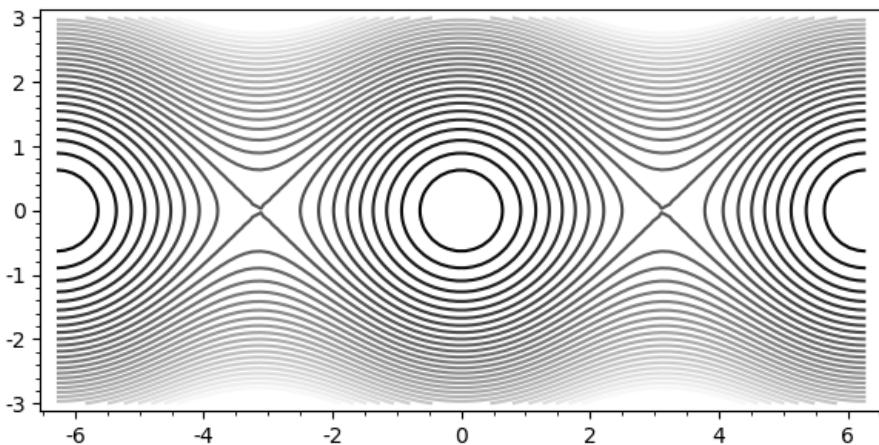
Calculamos la derivada covariante.

```
DLambdaX=jacobian(Lambda,(x,y))*X.T
```

$$\nabla \Lambda \cdot X = (0)$$

Como es no positiva, Λ es una función de Lyapunov y por consiguiente $(0, 0)$ es estable. Es interesante analizar las curvas de nivel de la función de Lyapunov.

```
p=contour_plot(Lambda,(x,-2*pi,2*pi),(y,-3,3) \
,contours=range(-1,5,.2),fill=False)
```



Ejemplo 11.1.2 [?, Ejemplo 6.1]

$$X(x, y, z) = (y(z-1), x(z+1), -2xy)$$

```
x,y,z=var('x,y,z')
Eq1=y*(z-1)
Eq2=x*(z+1)
Eq3=-2*x*y
Equilibrios=solve([Eq1,Eq2,Eq3], [x,y,z])
```

Encontramos los equilibrios

$$[[x = 0, y = 0, z = r_1], [x = r_2, y = 0, z = (-1)], [x = 0, y = r_3, z = 1]]$$

Vamos a analizar el $(0, 0, 0)$. Estamos en problemas para aplicar el Teorema de Linearización, ni siquiera los puntos de equilibrio están aislados. Un teorema afirma que equilibrio hiperbólico está aislado de otros equilibrios.

```
X(x,y,z)=[Eq1,Eq2,Eq3]
A=X.diff()(0,0,0)
D=A.eigenmatrix_right()

D = \left( \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ i & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)
```

Como adelantamos, la linearización no es posible. Vamos a demostrar que

$$\Lambda(x, y, z) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2),$$

es una función de Lyapunov para el equilibrio $(0, 0, 0)$. Claramente Λ tiene un mínimo en $(0, 0, 0)$.

```
Lambda(x,y,z)=1/2*(x^2+y^2+z^2)
DX=Lambda.diff().dot_product(X).simplify_full()
```

$$DX = 0.$$

Por el Teorema de Lyapunov $(0, 0, 0)$ es estable. Grafiquemos las superficies de nivel y algunas soluciones.

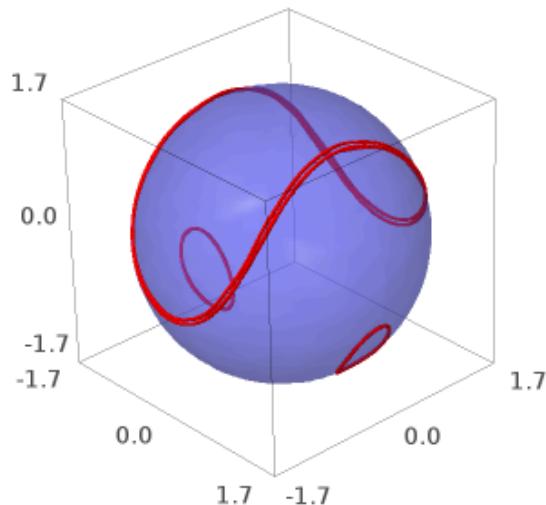
```
def X(t,x):
    return [ x[1]*(x[2]-1),x[0]*(x[2]+1),-2*x[0]*x[1] ]

T = ode_solver()
T.function=X
T.algorithm="rk8pd"
A=[]
T.ode_solve(y_0=[1,1,1],t_span=[0,30], num_points=100)
```

```

a=T.solution
Sol=[soln[1] for soln in a]
Gra=list_plot(Sol,plotjoined=True,thickness=.5,rgbcolor=(1,0,0))
theta,phi=var('theta,phi')
Esfe=parametric_plot3d([sqrt(3.0)*cos(theta)*sin(phi), sqrt(3.0) \
*sin(theta)*sin(phi), sqrt(3.0)*cos(phi)], (theta,0,2*pi) \
, (phi,0,pi),opacity=0.4)
Gra+=Esfe
T.ode_solve(y_0=[1,0,sqrt(2)],t_span=[0,30], num_points=100)
a=T.solution
Sol=[soln[1] for soln in a]
Gra+=list_plot(Sol,plotjoined=True,thickness=.5,rgbcolor=(1,0,0))
T.ode_solve(y_0=[1,0,-sqrt(2)],t_span=[0,30], num_points=100)
a=T.solution
Sol=[soln[1] for soln in a]
Gra+=list_plot(Sol,plotjoined=True,thickness=.5,rgbcolor=(1,0,0))
T.ode_solve(y_0=[-1,0,-sqrt(2)],t_span=[0,30], num_points=100)
a=T.solution
Sol=[soln[1] for soln in a]
Gra+=list_plot(Sol,plotjoined=True,thickness=.5,rgbcolor=(1,0,0))

```



11.2 Estabilidad de órbitas periódicas

11.2.1 Definiciones

Recordemos: si $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un campo de clase C^1 y $x \in \Omega$, entonces $I_x = (a_x, b_x)$ denota el intervalo máximo de definición de la solución γ que satisface que

$$\gamma(0) = x$$

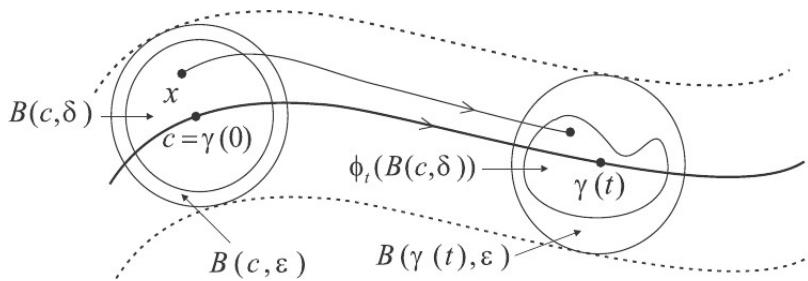
Definición 11.2.6 (Estabilidad de Soluciones en General) Sea $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un campo de clase C^1 y $c \in \Omega$. Sea $\gamma : I_c \rightarrow \Omega$ la solución tal que $\gamma(0) = c$. Diremos que γ es estable si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ con $B(c, \delta) \subset \Omega$ y si $x \in B(c, \delta)$ entonces:

1. $[0, b_c) \subset [0, b_x)$
2. $|\Phi_t(x) - \gamma(t)| < \epsilon$, para todo $t \in [0, b_c)$.

Si además tenemos que $b_x = +\infty$ y

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\Phi_t(x) - \gamma(t)| = 0,$$

diremos que γ es asintóticamente estable.



11.2.2 Ecuaciones Variacionales

Si desarrollamos en serie de Taylor X alrededor de cualquier $x \in \Omega$, tenemos para $h \in \mathbb{R}^n$ chico

$$X(x+h) = X(x) + DX(x)h + \dots$$

Supongamos γ la solución de la cual queremos considerar su estabilidad, y sea α otra solución (luego habrá que suponer que $\alpha(0)$ es cercano a $\gamma(0)$). Escribamos $\alpha = \gamma + \xi$. Se suele decir que ξ es la variación de γ . ¿Resolverá alguna ecuación ξ ? Reemplazando en el desarrollo de Taylor x por γ y h por ξ y desestimando los términos de mayor orden vemos ξ resolvería aproximadamente

$$\xi'(t) = DX(\gamma(t))\xi(t).$$

$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un campo de clase C^1 y $\gamma : I \rightarrow \Omega$ una solución. A la función a valores matriciales $A(t) = DX(\gamma(t))$ la llamaremos *matriz variacional* o *matriz de monodromía*.

El sistema lineal asociado $x'(t) = A(t)x(t)$ se llama el sistema de *ecuaciones variacionales*.

La matriz fundamental de este sistema $G : I \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ se llama la *matriz característica*.

Sea γ una solución periódica que no es un equilibrio. Entonces existe un período $p > 0$ mínimo entre todos los períodos positivos. Esto es $\gamma(x+p) = \gamma(x)$ y cualquier otro período es múltiplo de p . Es sabido que en este caso el dominio máximo de definición de γ es \mathbb{R} . En esta situación definiremos los *multiplicadores característicos* de γ como los autovalores de $G(p)$.

11.2.3 Ejemplos

Ejemplo 11.2.3 [?, Ejemplo 6.3] Considerar el sistema

$$\begin{cases} x' &= -y + xz \\ y' &= x + yz \\ z' &= -z(x^2 + y^2) \end{cases}$$

Vale decir $X : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, es el campo

$$X(x, y, z) = (-y + xz, x + yz, -z(x^2 + y^2))$$

Computemos la matriz Jacobiana

```
x,y,z,t=var('x,y,z,t')
X(x,y,z)=(-y+x*z,x+y*z,-z*(x^2+y^2))
DX=X.diff()(x,y,z)
```

$$DX = \begin{pmatrix} z & -1 & x \\ 1 & z & y \\ -2xz & -2yz & -x^2 - y^2 \end{pmatrix}$$

La función $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), 0)$ es solución de periódica de periodo 2π . Computemos la matriz de monodromía.

```
A=(X.diff())(cos(t),sin(t),0).simplify_trig()
```

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \cos(t) \\ 1 & 0 & \sin(t) \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Las ecuaciones características

```
Eq=A*vector([x,y,z]).column()
```

$$Eq = \begin{pmatrix} z \cos(t) - y \\ z \sin(t) + x \\ -z \end{pmatrix}.$$

Para resolverlas notar que la tercera ecuación está desacoplada de las dos primeras. SAGE no sabe sacar provecho de eso. Lo tenemos que ayudar un poco

```
t=var('t')
x=function('x')(t)
y=function('y')(t)
z=function('z')(t)
z_sol=desolve( z.diff(t)==-z,z)
z = C e^{(-t)}.
```

```
a,b,c=var('a,b,c')
Sol=desolve_system([x.diff(t)==c*e^{(-t)}*cos(t)-y\
,y.diff(t)==sin(t)*c*e^{(-t)}+x],[x,y],ivar=t,ics=[0,a,b])
```

$$\begin{aligned} x(t) &= -c \cos(t) e^{(-t)} + (a + c) \cos(t) - b \sin(t) \\ y(t) &= -ce^{(-t)} \sin(t) + b \cos(t) + (a + c) \sin(t) \end{aligned}$$

Calculamos la matriz fundamental del sistema, que resulta ser la matriz característica de γ .

```
c1=Sol[0].rhs()
c2=Sol[1].rhs()
c3=c*exp(-t)
e1={a:1,b:0,c:0}
e2={a:0,b:1,c:0}
e3={a:0,b:0,c:1}
G=matrix([
[c1.substitute(e1),c1.substitute(e2),c1.substitute(e3)]\
,[c2.substitute(e1),c2.substitute(e2),c2.substitute(e3)]\
,[c3.substitute(e1),c3.substitute(e2),c3.substitute(e3)]])
```

$$G = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & -\cos(t)e^{(-t)} + \cos(t) \\ \sin(t) & \cos(t) & -e^{(-t)}\sin(t) + \sin(t) \\ 0 & 0 & e^{(-t)} \end{pmatrix}.$$

Por último los multiplicadores característicos

```
D=G.subs(t=2*pi).eigenmatrix_right()

((e^{(-2\pi)}, 0, 0), ((1, 1, 0), (0, 0, 1), (-1, 0, 0)))
```

Ejemplo 11.2.4 [?, Ejemplo 6.4] Hallar matriz de monodromía y multiplicadores característicos para el sistema 2-dimensional

$$\begin{aligned} x'(t) &= -x - by + x^3 + xy^2 \\ y'(t) &= bx - y + x^2y + y^3 \end{aligned}$$

```
x,y,t,b=var('x,y,t,b')
X(x,y)=(-x-b*y+x^3+x*y^2,b*x-y+x^2*y+y^3)
```

Si se expresa el sistema en coordenadas polares se puede demostrar que $\gamma(t) = (\cos(b*t), \sin(b*t))$ es solución periódica de período $2\pi/b$. Chequeemos esta última afirmación de manera directa.

```
((X(cos(b*t),sin(b*t)))[0]-(cos(b*t)).diff(t))\
.simplify_full()
((X(cos(b*t),sin(b*t)))[1]-(sin(b*t)).diff(t))\
.simplify_full()
```

Matriz de Monodromía

```
A(t)=(X.diff())(cos(b*t),sin(b*t)).simplify_trig()

A(t) = \begin{pmatrix} 2 \cos(bt)^2 & 2 \cos(bt) \sin(bt) - b \\ 2 \cos(bt) \sin(bt) + b & -2 \cos(bt)^2 + 2 \end{pmatrix}.
```

Ejercicio 11.2.3 Demostrar que la matriz característica viene dada por:

```
G=matrix([[e^(2*t)*cos(b*t), -sin(b*t)], [e^(2*t)*sin(b*t), cos(b*t)]])
```

$$G = \begin{pmatrix} \cos(bt)e^{(2t)} & -\sin(bt) \\ e^{(2t)}\sin(bt) & \cos(bt) \end{pmatrix}.$$

Multiplicadores característicos

```
D=G.subs(t==2*pi/b).eigenmatrix_right()

D = \left( \left( e^{\left(\frac{4\pi}{b}\right)}, 0 \right), \left( \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right) \right). \quad (11.3)
```

11.2.4 Matriz de deformaciones

Definición 11.2.7 Supongamos $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un campo de clase C^1 y $\Phi_t : \mathcal{D} \subset$

$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \Omega$ el flujo asociado. Definimos la *matriz de deformaciones* H como

$$H(t, x) = (D_x \Phi_t)(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_t^1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \Phi_t^1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \Phi_t^n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \Phi_t^n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Teorema 11.2.4 Sea $\gamma : I \rightarrow \Omega$ una solución, con $0 \in I$ y $c = \gamma(0)$. La matriz característica G de γ coincide con la matriz de deformaciones H en c :

$$G(t) = H(t, c).$$

Además

$$G(t)X(c) = X(\gamma(t)) \quad t \in I.$$

Luego si γ es periódica de período p tenemos

$$G(p)X(c) = X(c).$$

Entonces 1 es un autovalor y $X(c)$ (como γ no es equilibrio $X(c) \neq 0$) es un autovector asociado. En conclusión 1 es siempre un multiplicador característico.

Demostración. Derivando respecto a x la relación

$$\frac{d}{dt} \Phi_t(x) = X(\Phi_t(x)),$$

Obtenemos

$$\frac{\partial H}{\partial t}(t, x) = D_x X(\Phi_t(x))H(t, x)$$

Además $H(0, x) = I$, donde I es la identidad (**Ejercicio**). Como $\gamma(t) = \Phi_t(c)$ si reemplazamos x por c arriba tenemos

$$\frac{\partial H}{\partial t}(t, c) = A(t)H(t, c)$$

Lo cual termina por mostrar que $G(t) = H(t, c)$.

Ahora derivando

$$\gamma'(t) = X(\gamma(t)),$$

vemos que

$$\gamma''(t) = D_x X(\gamma(t))\gamma'(t) = A(t)\gamma'(t),$$

es decir que $\gamma'(t)$ es solución de las ecuaciones características. Además $\gamma'(0) = X(\gamma(0)) = X(c)$. Ahora como G es una matriz fundamental para las ecuaciones características

$$X(\gamma(t)) = \gamma'(t) = G(t)X(c).$$

Esto prueba la segunda afirmación. La tercera es consecuencia de que $\gamma(p) = \gamma(0) = c$. \square

Teorema 11.2.5

Sea $f : \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}$ un difeomorfismo entre abiertos de \mathbb{R}^n , $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo C^1 e $Y : \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$ su push-forward, es decir $Y = f_*(X)$. Sean H^X y H^Y las matrices de deformaciones de los campos X e Y respectivamente. También consideraremos los flujos Φ_t^X y Φ_t^Y . Se tiene la siguiente relación

$$H(t, y) = Df(\Phi_t^X(f^{-1}(y)))H(t, f^{-1}(y))(Df(f^{-1}(y)))^{-1}. \quad (11.4)$$

Si $\gamma : I \rightarrow \Omega$ es una solución de $x' = X(x)$, entonces $\beta = f \circ \gamma$ es so-

lución de $y' = Y(y)$. Las matrices características de γ y β , digamos G^X y G^Y respectivamente, son similares. Específicamente

$$G^Y(t) = D_x f(\gamma(t)) G^X(t) (D_x f(c))^{-1}. \quad (11.5)$$

En particular si γ es periódica de periodo p , β es periódica con el mismo periodo y los multiplicadores característicos son los mismos.

Demostración. Derivando respecto a y la siguiente relación, que es sabido que ocurre,

$$\Phi_t^Y(y) = (f \circ \Phi_t^X \circ f^{-1})(y),$$

y usando la regla de la cadena obtenemos (??). Supongamos que $\gamma(0) = c$. Entonces $\gamma(t) = \Phi_t^X(c)$, $\beta(0) = f(c)$ y $\beta(t) = \Phi_t^Y(f(c))$. Luego, reemplazando y por $f(c)$ en (??) llegamos a (??). Reemplazando en esta última ecuación t por el periodo p vemos que $G^Y(p)$ y $G^X(p)$ son similares, de allí tienen el mismo espectro. \square

11.2.5 Radio espectral

Definición 11.2.8 (Radio espectral) Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz, definimos su radio espectral $\rho(A)$ por

$$\rho(A) := \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Aquí, como es usual, $\sigma(A)$ es el espectro de A .

Sea \mathcal{F} la familia de todas las normas sobre \mathbb{R}^n . Si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $\|\cdot\| \in \mathcal{F}$, por abuso de notación seguiremos usando el mismo símbolo $\|A\|$ para la norma como operador sobre A inducida por $\|\cdot\|$. Es decir

$$\|A\| := \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|$$

Teorema 11.2.6 (Una representación del radio espectral)

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Entonces

$$\rho(A) = \inf_{\|\cdot\| \in \mathcal{F}} \|A\|.$$

Corolario 11.2.2

1. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $\epsilon > 0$. Entonces existe una norma $\|\cdot\| \in \mathcal{F}$ tal que

$$\rho(A) \leq \|A\| < \rho(A) + \epsilon.$$

2. Si $\rho(A) < 1$ existirá una norma $\|\cdot\|_0$, para la cual A es una contracción, es decir $\|Ax\|_0 < q\|x\|_0$ y $q < 1$.
3. Si $\rho(A) < 1$ entonces $A^k x \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$.

11.2.6 Discusión heurística

Sea $\gamma(t)$ una solución periódica de periodo p con $\gamma(0) = c$ y $X(c) \neq 0$. Sea $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ los autovalores de $G(p)$, es decir los multiplicadores característicos de

γ . Como 1 es autovalor, podemos suponer $\mu_1 = 1$. Un autovector asociado es $X(c)$. Sea M_c el hiperplano ortogonal a $X(c)$ que contiene a c , $M_c = \{x | (x - c) \cdot X(c) = 0\}$.

Vamos a demostrar que si $|\mu_j| < 1$, $j = 2, \dots, n$ entonces $G(p)$ restringida a M_c es una contracción.

Consideremos α una solución cercana en $t = 0$ a γ . Como vimos podemos escribir

$$\alpha \approx \gamma + \xi, \quad (11.6)$$

donde ξ resuelve las ecuaciones variacionales $\xi'(t) = A(t)\xi(t)$. Como $G(t)$ es una matriz fundamental para ese sistema

$$\xi(t) = G(t)\xi(0). \quad (11.7)$$

Ejercicio 11.2.4 Demostrar que si $A(t)$ es una función a valores matriciales $A : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ que además es periódica con periodo p , entonces la matriz fundamental satisface que $G(t + p) = G(t)G(p)$. En particular

$$G(kp) = G(p)^k. \quad (11.8)$$

Considerando los tiempos $t = p, 2p, \dots$ y usando (??), (??) y (??) llegamos a

$$\alpha(kp) = c + G(p)^k\xi(0),$$

Vamos a ver que todo solución cercana a γ atraviesa M_c , así podremos suponer que $\xi(0) \in M_c$. Luego si $|\mu_j| < 1$, $j = 2, \dots, n$, entonces $\alpha(kp) \rightarrow c$.

Esta discusión da un indicio de por qué podremos esperar estabilidad si $|\mu_j| < 1$, $j = 2, \dots, n$.

11.2.7 Estabilidad orbital

Definición 11.2.9 (Estabilidad orbital) Sea γ una solución periódica y $\Gamma = \gamma(\mathbb{R})$. Diremos que γ es *orbitalmente estable* si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$d(x, \Gamma) < \delta \Rightarrow d(\Phi_t(x), \Gamma) < \epsilon.$$

Si además tenemos que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} d(\Phi_t(x), \Gamma) = 0,$$

diremos que γ es *orbitalmente asintóticamente estable*

11.2.8 Mapeo de Poincaré

Teorema 11.2.7 (Mapeo de Poincaré) Sea $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \Omega$ una solución de período p del sistema $x' = X(x)$, donde $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$. Sea c y M_c como antes. Entonces existe un entorno abierto U de c y una función $C^1 \tau : U \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\tau(c) = p$

$$\Phi_{\tau(x)} \in M_c$$

La aplicación $P : U \cap M_c \rightarrow M_c$ dada por $P(x) = \Phi_{\tau(x)}(x)$ se llama Mapeo de Poincaré.

Demostración. Definimos

$$F(t, x) = (\Phi_t(x) - c) \cdot X(x).$$

Se tiene que $F(p, c) = 0$ y que

$$\frac{\partial}{\partial t} F(t, x) = X(\Phi_t(x)) \cdot X(x).$$

Luego

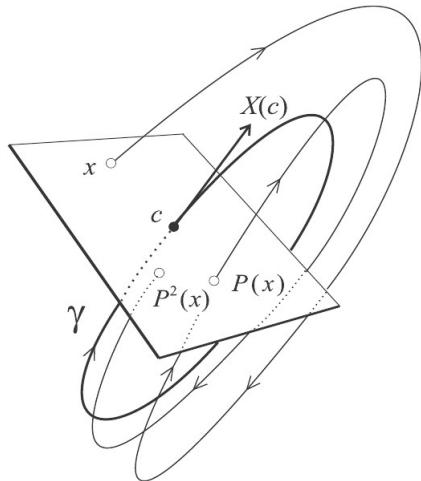
$$\frac{\partial F}{\partial t}(p, c) = |X(c)|^2 > 0.$$

Se satisfacen las hipótesis del teorema de la función implícita, por consiguiente existe un entorno abierto V de (p, c) y un entorno U de c tal que

$$\{(t, x) \in V | F(t, x) = 0\} = \{(t, x) | x \in U \text{ y } t = \tau(x)\}$$

Vale decir $F(\tau(x), x) = 0$, lo que implica $\Phi_{\tau(x)}(x) \in M_c$

□



□

Ejemplo 11.2.5 Hallar el Mapeo Poincaré de

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)^3 + x(t)y(t)^2 - by(t) - x(t) \\ y'(t) = x(t)^2y(t) + y(t)^3 + bx(t) - y(t) \end{cases}$$

Convirtiendo a polares

```
t,b=var('t,b')
theta=function('theta')(t)
r=function('r')(t)
x=r*cos(theta)
y=r*sin(theta)
Eq1=x.diff(t)==-x-b*y+x^3+x*y^2
Eq2=y.diff(t)==b*x-y+x^2*y+y^3
X,Y=var('X,Y')
Eq1s=Eq1.substitute(theta.diff(t)==X,r.diff(t)==Y)
Eq2s=Eq2.substitute(theta.diff(t)==X,r.diff(t)==Y)
Eqpol=solve([Eq1s,Eq2s],[X,Y])
Eq1Pol=Eqpol[0][0].simplify_full()\
.substitute(X==theta.diff(t))
Eq2Pol=Eqpol[0][1].simplify_full()\
.substitute(Y==r.diff(t))
```

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \theta(t) &= b \\ \frac{\partial}{\partial t} r(t) &= r(t)^3 - r(t)\end{aligned}$$

Que es un sistema desacoplado que se puede resolver por técnicas elementales.

```
Sol1=desolve(Eq1Pol,theta,ivar=t)
Sol2=desolve(Eq2Pol,r,ivar=t)
```

$$\begin{aligned}\theta(t) &= bt + C \\ \frac{1}{2} \log(r(t) + 1) + \frac{1}{2} \log(r(t) - 1) - \log(r(t)) &= C + t\end{aligned}$$

Sage pierde la solución $r(t) \equiv 1$, además de que pierde soluciones porque toma como primitiva de $1/x$ a la función $\ln(x)$ en lugar de la función correcta $\ln(|x|)$. Despejando r a mano de la segunda ecuación, tomando en consideración el módulo omitido por Sage, obtenemos.

$$r(t) = \sqrt{\frac{1}{1 - ke^{2t}}}$$

y consecuentemente

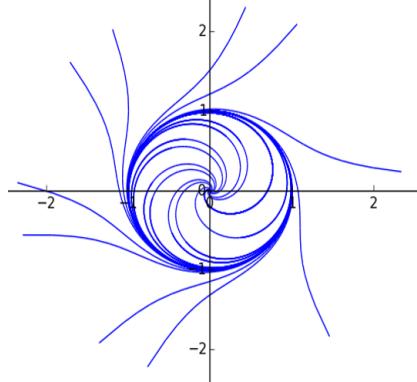
$$\varphi(t) = \sqrt{\frac{1}{1 - ke^{2t}}} (\cos(bt + c), \sin(bt + c)), \quad (11.9)$$

es solución general.

En particular, si $k = c = 0$ vemos que $\gamma(t) = (x(t), y(t)) = (\cos(bt), \sin(bt))$ es solución periódica de período $2\pi/b$. Si $k < 0$ las soluciones permanecen dentro de la circunferencia de radio 1 y tienden a $(0, 0)$ cuando $t \rightarrow +\infty$. Si $k > 0$ las soluciones tienen un dominio dado por $t < \log \frac{1}{k}$ y se escapan a $+\infty$ en tiempo finito. Todo esto indica que la solución periódica $\gamma(t)$ es inestable.

Calculemos la matriz de monodromía. Empezamos por encontrar el flujo

```
k,c,b,t,x0,y0=var('k,c,b,t,x0,y0')
theta=b*t+c
r= sqrt(-1/(k*e**(2*t) - 1))
SolInin=solve([r.subs(t=0)*cos(theta.subs(t=0))-x0\
,r.subs(t=0)*sin(theta.subs(t=0))-y0],[k,c])
```



$$k = \frac{x_0^2 + y_0^2 - 1}{x_0^2 + y_0^2}, \quad c = \arccos \left(\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \right) \quad (11.10)$$

El campo X asociado al sistema satisface que $X(1, 0) = (0, b)$, con lo cual el eje x es el plano $M_{(0,1)}$. Calculemos el flujo para un punto $(x_0, 0) \in M_{(0,1)}$. Por (??) y (??)

$$\Phi(t, 0, (x_0, 0)) = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 - (x_0^2 - 1)e^{2t}}} (\cos(bt), \sin(bt)),$$

La función de retorno $\tau(x)$ es constante en este caso $\tau(x) = 2\pi/b$. Esto siempre y cuando estemos en un punto con retorno. En el caso $x_0 < 1$ siempre hay retorno si $x_0 > 1$ debe ocurrir que $2\pi/b < \log \sqrt{\frac{x_0^2}{x_0^2 - 1}}$, es decir

$$x_0 < [1 - e^{4\pi/b}]^{-1/2} =: L_b$$

La aplicación de Poincaré P para un punto con retorno esta definida por

$$P(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - (x^2 - 1)e^{4\pi/b}}}$$

Notar que $P'(1) = e^{4\pi/b}$ que es multiplicador característico según la ecuación (??). Demostramos que este hecho no es casual.

Definición 11.2.10 (Producto Tensorial) Dados dos vectores $a, b \in \mathbb{R}^n$ definimos su producto tensorial $a \otimes b$ como el operador lineal $a \otimes b : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definido por

$$(a \otimes b)v = (b \cdot v)a, \quad \text{para } v \in \mathbb{R}^n.$$

Ejercicio 11.2.5 Demostrar que respecto a la base canónica de \mathbb{R}^n la representación matricial del operador $a \otimes b$ tiene entrada ij

$$(a \otimes b)_{ij} = a_i b_j.$$

El mapeo de Poincaré P está definido en $U \cap M_c$, pero podemos extenderlo $\tilde{P} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ por

$$\tilde{P}(x) = \Phi_{\tau(x)}(x).$$

Ejercicio 11.2.6 (Matriz Jacobiana del Mapeo de Poincaré) Demostrar que

$$D\tilde{P}(x) = X(\tilde{P}(x)) \otimes \nabla \tau(x) + H(\tau(x), x),$$

en particular

$$D\tilde{P}(c) = X(c) \otimes \nabla \tau(c) + G(p).$$

Teorema 11.2.8 (Matriz Jacobiana Mapeo Poincaré) Asumamos $c = 0$ y $X(0) = (0, 0, \dots, 0, 1)$. Entonces:

$$G(p) = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1,n-1} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ b_{n-1,1} & \cdots & b_{n-1,n-1} & 0 \\ * & \cdots & * & 1 \end{bmatrix} \quad (11.11)$$

$$D\tilde{P}(0) = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1,n-1} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ b_{n-1,1} & \cdots & b_{n-1,n-1} & 0 \\ * & \cdots & * & * \end{bmatrix} \quad (11.12)$$

Al subespacio $M_0 = \{(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) | x_i \in \mathbb{R}\}$ lo identificamos con \mathbb{R}^{n-1} y al abierto relativo $U \cap M_0$ con un abierto V de \mathbb{R}^{n-1} . Con estas identificaciones podemos pensar en el Jacobiano de $P : V \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ siendo este en $c = 0$ dado por

$$DP(0) = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1,n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n-1,1} & \cdots & b_{n-1,n-1} \end{bmatrix} \quad (11.13)$$

Luego si $\mu_1 = 1, \mu_2, \dots, \mu_n$ son los multiplicadores característicos de γ entonces μ_2, \dots, μ_n son autovalores de $DP(0)$.

Demostración. Como $G(p)X(0) = X(0)$ y como $X(0) = (0, 0, \dots, 0, 1)$ vemos que la enésima columna de $G(p)$ es también el enésimo vector canónico. Esto justifica (??).

Tenemos que

$$X(0) \otimes \nabla \tau(0) = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ * & \cdots & * & * \end{bmatrix}$$

Como $D\tilde{P}(0) = X(0) \otimes \nabla \tau(0) + G(p)$ se tiene (??).

Matriz Jacobiana Mapeo Poincaré Sea I_k la matriz identidad de $k \times k$, B la matriz $B = \{b_{ij}\}_{i,j=1}^{n-1}$. Como

$$\det(G(p) - \mu I_n) = (1 - \mu) \det(B - \mu I_{n-1}),$$

los autovalores de B son precisamente μ_2, \dots, μ_n .

Consideramos la incrustación $i : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$, dada por $i(x_1, \dots, x_{n-1}) = (x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$ y la proyección $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$, dada por $\rho(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{n-1})$. Con esta notación

$$P(v) = \rho(\tilde{P}(i(v))), \quad \text{para } v \in V = \rho(U \cap M_0)$$

por la regla de la cadena,

$$DP(0) = [I_{n-1} \ 0_{(n-1) \times n}] \begin{bmatrix} B & 0_{(n-1) \times n} \\ * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n-1} \\ 0_{n \times (n-1)} \end{bmatrix} = B$$

□

Ejercicio 11.2.7 ¿Cómo podemos reducir el caso general c no necesariamente 0 y $X(c) \neq 0$ al caso considerado?

Teorema 11.2.9 (Estabilidad Orbital) Sea $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \Omega$ una solución de período p del sistema $x' = X(x)$, donde $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$. Sea $c = \gamma(0)$ y M_c como antes. Supongamos que $n-1$ de los múltiplos característicos μ_2, \dots, μ_n tienen módulo menor a 1. Entonces γ es orbitalmente estable. Además, si $|\mu_j| < a < 1$, para $j = 2, \dots, n$, entonces existe $L > 0$ y un abierto Ω , con $\Gamma \subset \Omega$ tal que si $x \in \Omega$, existe $T \in \mathbb{R}$ tal que

$$|\Phi_{T+t}(x) - \gamma(t)| \leq La^{t/p}, \quad (11.14)$$

para todo $t \geq p$. El número T , que es el único con la propiedad establecida (**ejercicio**), se denomina la *fase asintótica* de x .

Demostración. Como antes, asumimos $c = 0$ y $X(0) = (0, 0, \dots, 0, 1)$. Sea Ω_0 un abierto con $\Gamma \subset \Omega_0$ y $\bar{\Omega}_0$ compacto. Pongamos $\Phi(t, x) = \Phi_t(x)$, entonces $\Phi : \mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$. Tenemos que $\Phi^{-1}(\Omega_0)$ es un abierto y $(t, 0) \in \Phi^{-1}(\Omega_0)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Luego para cada $t \in [0, 2p]$ existe $(a_t, b_t) \ni t$ y $R_t > 0$ tal que $(t, 0) \in (a_t, b_t) \times B_{R_t}(0) \subset \Phi^{-1}(\Omega_0)$. Como $\{(a_t, b_t)\}_{t \in [0, 2p]}$ es un cubrimiento por abiertos del compacto $[0, 2p]$, podemos cubrir por finitos (a_{t_i}, b_{t_i}) , $i = 1, \dots, m$. Si ahora tomamos $0 < R < R_{t_i}$, $i = 1, \dots, m$, tendremos que

$$[0, 2p] \times \overline{B}_R(0) \subset \Phi^{-1}(\Omega_0).$$

Sea $0 \in U \subset \Omega$ un entorno abierto donde está definida y es de clase C^1 el mapeo de retorno $\tau : U \rightarrow \mathbb{R}$. Podemos asumir $B_R(0) = U$. Sea \tilde{P} , como antes, $\tilde{P} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $\tilde{P}(x) = \Phi(\tau(x), x)$. Por el Teorema anterior y las hipótesis sabemos que los autovalores de $DP(0)$ tienen todos módulo menor que a . Por el resultado de álgebra lineal tenemos que existe una norma $\|\cdot\|_0$ tal que

$$\|DP(0)x\|_0 < a\|x\|_0.$$

Ejercicio 11.2.8 Eligiendo $\delta > 0$ suficientemente chico tendremos que $\|x\|_0 < \delta$ implica $\|P(x)\|_0 \leq a\|x\|_0$.

Podemos asumir $B_\delta(0) \subset U$, donde la bola la tomamos respecto a la norma $\|\cdot\|_0$. Como, en particular, $\|P(x)\|_0 < \delta$, tendremos que $P(W) \subset W$, donde $W = B_\delta(0) \cap M_0$. Luego tenemos definida la secuencia $P^k(x)$, $x \in W$, $k = 1, 2, \dots$

De la continuidad de $\tau : W \rightarrow \mathbb{R}$ podemos suponer que $|\tau(x) - p| \leq p/2$ para todo $x \in W$. En particular $p/2 \leq \tau(x) \leq 2p$.

Sea

$$\Omega := \{\Phi_t(x) | x \in W, t \in [0, \tau(x)]\},$$

Ejercicio 11.2.9 Se tiene que $\Omega \subset \Omega_0$ y Ω es un entorno de Γ .

Veamos que Ω es invariante $\Phi_t(\Omega) \subset \Omega$, $t \geq 0$. Esto probará la estabilidad orbital.

Sea $x \in \Omega$, entonces existe $w_0 \in W$ y $t_0 \in [0, \tau(w_0)]$ tal que $x = \Phi_{t_0}(w_0)$. Ahora definimos:

$$\begin{aligned} w_1 &= P(w_0) & y & t_1 = \tau(w_0) - t_0 \\ w_k &= P(w_{k-1}) & y & t_k = \tau(w_{k-1}) + t_{k-1} \quad \text{para } k = 2, \dots, \end{aligned}$$

Ejercicio 11.2.10 $\Phi_{t_k}(x) = w_k \in W$, $k = 1, 2, \dots$

Como $\tau(y) \geq p/2$, para $y \in W$, tenemos que $t_k \rightarrow \infty$. Luego $[0, \infty) \subset I_x$ y $\Phi_t(x)$, $x \in \Omega$, esta definida para $t \geq 0$. Para probar la invariancia tomemos $x \in \Omega$ y $t > 0$. Supongamos $t_k < t \leq t_{k+1}$, $k \geq 1$, entonces

$$\Phi_t(x) = \Phi_{t-t_k}(\Phi_{t_k}(x)) = \Phi_{t-t_k}(w_k) \in \Omega.$$

Si $t \in (0, t_1)$, entonces $t + t_0 < t_1 + t_0 = \tau(w_0)$ y

$$\Phi_t(x) = \Phi_t(\Phi_{t_0}(w_0)) = \Phi_{t+t_0}(w_0) \in \Omega.$$

Ahora probaremos la estabilidad orbital asintótica. Vamos a establecer algunas desigualdades cuya justificación discutiremos en clase. La compacidad de $\overline{\Omega}_0$ y la continuidad de X nos dan un $L_1 > 0$ tal que

$$\|X(y)\|_0 \leq L_1, \quad y \in \overline{\Omega}_0$$

Como $\Phi \in C^1$ existe $L_2 > 0$ tal que

$$\|\Phi_t(y) - \Phi_t(x)\|_0 \leq L_2 \|y - x\|_0 \quad x, y \in \overline{B}_R(0), \quad t \in [0, 2p].$$

Por las mismas razones existe $L_3 > 0$ tal que

$$\|\tau(y) - \tau(x)\|_0 \leq L_3 \|y - x\|_0 \quad x, y \in \overline{B}_R(0).$$

Tenemos

$$\|w_k\|_0 = \|P(w_{k-1})\|_0 \leq a\|w_{k-1}\|_0,$$

Por inducción

$$\|w_k\|_0 \leq a^k \|w_0\|_0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Pongamos $T_k := t_k - kp$, $k = 0, 1, \dots$

$$\begin{aligned} |T_{k+1} - T_k| &= |t_{k+1} - t_k - p| \\ |\tau(w_k) - p| &= |\tau(w_k) - \tau(0)| \\ &\leq L_3 \|w_k\|_0 \leq L_3 a^k \|w_0\|_0. \end{aligned}$$

La desigualdad anterior implica que T_k es una sucesión de Cauchy, luego existe T tal que $\lim T_k = T$. Este número resulta la fase de x .

Ahora demostremos (??). Sea $t \geq p$ y tomemos $k \in \mathbb{N}$ con $kp \leq t < (k+1)p$. Sea $s := t - kp$.

$$\Phi_{s+t_k}(x) = \Phi_s(\Phi_{t_k}(x)) = \Phi_s(w_k)$$

y $\Phi_s(0) = \gamma(s)$. Como $s \in [0, p]$, se puede usar la desigualdad Lipschitziana para Φ_s para conseguir

$$\begin{aligned} \|\Phi_{s+t_k}(x) - \gamma(s)\|_0 &\leq \|\Phi_s(w_k) - \Phi_s(0)\|_0 \\ &\leq L_2 \|w_k\|_0 \\ &\leq L_2 a^k \|w_0\|_0. \end{aligned}$$

Sea $s_1 < s_2$

$$\begin{aligned} \|\Phi_{s_1}(x) - \Phi_{s_2}(x)\|_0 &\leq \max_{[s_1, s_2]} \left\| \frac{\partial}{\partial s} \Phi_s(x) \right\|_0 |s_1 - s_2| \\ &\leq \max_{[s_1, s_2]} \|X(\Phi_s(x))\|_0 |s_1 - s_2| \leq L_1 |s_1 - s_2|. \end{aligned}$$

Tomando $s_2 = s + t_k$ y $s_1 = s + kp + T$, en este caso $s_2 - s_1 = T_k - T$.

Ejercicio 11.2.11 Probar que

$$\|\Phi_{s+t_k}(x) - \Phi_{s+kp+T}(x)\|_0 \leq L_1 |T_k - T| \leq \frac{L_1 L_3 \|w_0\|_0}{1-a} a^k.$$

Luego

$$\|\Phi_{t+T}(x) - \gamma(t)\| = \|\Phi_{s+kp+T}(x) - \gamma(s)\|_0 \leq K a^{k+1} \leq K a^{t/p}.$$

El caso general se aborda como es usual, mediante un push forward. \square

Corolario 11.2.3 Sea $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \Omega$ una solución de período p del sistema $x' = X(x)$, donde $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$. Sea $c = \gamma(0)$ y M_c como antes. Sea $P : U \cap M_c \rightarrow M_c$ el mapeo de Poincare. Supongamos que para cada entorno \tilde{W} de c en $U \cap M_c$ existe un entorno $W \subset \tilde{W}$ de c en $U \cap M_c$ tal que

$$P(W) \subset W.$$

Entonces γ es orbitalmente estable.

A Breve introducción a Python y SymPy

A.1 Descripción

Python es un lenguaje de programación interpretado, abierto, fácil de aprender, potente y portátil. Es utilizado en proyectos de todo tipo, no sólo aplicaciones científicas.

SciPy, Python científico, es un conjunto de módulos de python para distintos tipos de cálculos. Está integrado por los módulos, SymPy (para cálculos simbólicos), numpy (cálculos numéricos), matplotlib (gráficos) entre otros. En este curso sólo usaremos SymPy.

SymPy es una biblioteca de Python para matemática simbólica. Su objetivo es convertirse en un sistema de álgebra computacional (SAC) completo, manteniendo el código lo más simple posible para que sea comprensible y fácilmente extensible. SymPy está escrito enteramente en Python y no requiere de ninguna biblioteca externa.

Matplotlib es una biblioteca de trazado de gráficos de Python que produce figuras de calidad de publicación en una variedad de formatos impresos y entornos interactivos a través de plataformas. Matplotlib se puede utilizar en scripts Python, en el shell Python e IPython, el portátil jupyter, servidores de aplicaciones web.



A.2 Instalación

Son muchas las componentes requeridas para poder ejecutar los programas con los que trabajaremos en esta asignatura. Hay que instalar un interprete de python, los módulos que utilizaremos (sympy, matplotlib), es útil utilizar entornos integrados de desarrollo (IDE), que facilitan al usuario editores de código fuente (especializados con la sintaxis de python), consolas de comandos mejoradas (ipython, qt, etc). Otro recurso que se dispone son las notebooks, de las cuales hablaremos más adelante. Sería engorroso instalar todas estas componentes, que muchas veces tienen orígenes en desarrolladores diferentes, de manera independiente. Para nuestra fortuna existen, las así llamadas, *distribuciones*. Estas en algunos casos son archivos ejecutables que instalan todas las componentes necesarias, o al menos muchas de ellas, de un determinada aplicación. Recomendamos las siguientes distribuciones.

A.2.1 Anaconda

La versión de código abierto de Anaconda es una distribución de alto rendimiento de Python y R e incluye más de 100 de los paquetes científicos más populares asociados a estos lenguajes. Además, se puede acceder a más de 720 paquetes que pueden ser fácilmente instalados con Conda, un programa incluido en Anaconda para la gestión de paquetes. Anaconda tiene licencia BSD que da permiso para utilizar Anaconda comercialmente y para su redistribución. Al día que se escriben estas líneas, anaconda parece la opción más sencilla y completa para instalar todos los recursos necesarios para desarrollar los contenidos de estas notas. Existen versiones para linux, OS X y Windows.

A.2.2 Windows

Hay distribuciones específicas para distintos sistemas operativos. La distribución python(x,y) instala el interprete de python y todos los módulos de scipy. Además el entorno de desarrollo integrado (IDE) spyder.

A.2.3 linux

Aquí todo es más sencillo, el interprete de python suele venir con la distribución del SO y se pueden instalar los módulos, SymPy, NumPy, etc, recurriendo al administrador de paquetes o tipeando la sentencia adecuada en la línea de comandos.

A.2.4 Android

Qpython es una aplicación que permite ejecutar código python y una versión básica de sympy desde tablets y smartphones. Se descarga desde la plataforma google play. .

A.2.5 Computación en la nube

En los últimos tiempos se ha popularizado el uso de la computación en la nube. Esto se trata de servidores que algunas empresas o asociaciones sin fines de lucro facilitan en la web para ejecutar programas en diversos lenguajes. Citamos como ejemplo cocalc. Una vez registrado en el sitio se pueden subir o crear notebooks de jupyter. Soporta varios lenguajes, incluido Python y sus librerías. Como uno utiliza los recursos instalados en el servidor, no se necesita tener instalado ningún interprete de los lenguajes. Sólo se necesita un navegador web actualizado. De este modo pueden ejecutarse programas desde un smartphone o tablet.

A.3 Forma de trabajo: por medio de scripts e interactiva

Se puede trabajar de tres formas

1. Interactivamente, ingresando sentencias, de a una por vez, en la línea de comandos y obteniendo respuestas. Se requiere una consola.
2. Haciendo un script (programa) donde se guardan todas las sentencias que se desea ejecutar. Posteriormente este script se puede ejecutar, ya sea desde la línea de comandos o desde un IDE (spyder) oprimiendo un botón de ejecución.
3. En una notebook. Se hacen celdas que contienen porciones de código que pueden ejecutarse.

A.4 Características sobresalientes del lenguaje

Seguiremos en esta exposición a [?] de manera cercana. Las principales características del lenguaje son:

- Interpretado. Es necesario un conjunto de programas, el interprete, que entienda el código python y ejecute las acciones contenidas en él.
- Implementa tipos dinámicos.
- Multiparadigma, ya que soporta orientación a objetos, programación imperativa y, en menor medida, programación funcional.
- Multiplataforma.
- Es comprendido con facilidad. Usa palabras donde otros lenguajes utilizarían símbolos. Por ejemplo, los operadores lógicos !, || y \&\& en Python se escriben not, or y and, respectivamente.
- El contenido de los bloques de código (bucles, funciones, clases, etc.) es delimitado mediante espacios o tabuladores.

- Empieza a contar desde cero (elementos en listas, vectores, etc).

A.5 Elementos del Lenguaje

A.5.1 Comentarios

Hay dos formas de producir comentarios, texto que el interprete no ejecuta y que sirve para entender un programa.

Para comentarios largos se utilizan las tildes:
`''' comentario '''`.

La segunda notación utiliza el símbolo #, no necesita símbolo de finalización pues se extiende hasta el final de la línea.

```
'''
Comentario largo en un script de Python
'''
print("Hola mundo") # Comentario corto
```

El intérprete no tiene en cuenta los comentarios, lo cual es útil si deseamos poner información adicional en nuestro código como, por ejemplo, una explicación sobre el comportamiento de una sección del programa.

A.5.2 Variables

Las variables se definen de forma dinámica, lo que significa que no se tiene que especificar cuál es su tipo de antemano y que una variable puede tomar distintos valores en distintos momentos de un programa, incluso puede tomar un tipo diferente al que tenía previamente. Se usa el símbolo = para asignar valores a variables. Es importante distinguir este = (de asignación) con el igual que es utilizado para definir igualdades en sympy, para ecuaciones por ejemplo.

```
x = 1
x = "texto"
```

Esto es posible porque los tipos son asignados dinámicamente

A.5.3 Tipo de datos

Python implementa diferentes tipos de datos. Para la noción de *tipos de datos* en general ver [?]. A continuación describimos sumariamente algunos de los tipos más comunes presentes en Python. Cuando se utilizan módulos específicos (p. ej. sympy) la diversidad de tipos de datos se expande, con la incorporación de tipos con significación matemática, p.ej. matrices, expresiones algebraicas, etc.

Tipo	Clase	Notas	Ejemplo
<code>str</code>	Cadena	Inmutable	<code>'Cadena'</code>
<code>list</code>	Secuencia	Mutable, puede contener objetos de diversos tipos	<code>[4.0, 'Cadena', True]</code>
<code>tuple</code>	Secuencia	Inmutable, puede contener objetos de diversos tipos	<code>(4.0, 'Cadena', True)</code>
<code>dict</code>	Mapping	Grupo de pares clave:valor	<code>{'key1': 1.0, 'key2': False}</code>
<code>int</code>	Número entero	Precisión fija, convertido en <code>long</code> en caso de overflow.	<code>42</code>
<code>long</code>	Número entero	Precisión arbitraria	<code>42L ó 456966786151987643L</code>
<code>float</code>	Número decimal	Coma flotante de doble precisión	<code>3.1415927</code>
<code>complex</code>	Número complejo	Parte real y parte imaginaria, <code>j</code> .	<code>(4.5 + 3j)</code>
<code>bool</code>	Booleano	Valor booleano verdadero o falso	<code>True o False</code>

Se clasifican en:

Mutable si su contenido puede cambiarse.

Inmutable si su contenido no puede cambiarse.

Se usa el comando \type para averiguar que tipo de dato contiene una variable

```
>>> x=1
>>> type(x)
<class 'int'>
>>> x='Ecuaciones'
>>> type(x)
<class 'str'>
```

A.5.4 Listas y tuplas

- Es una estructura de dato, que contiene, como su nombre lo indica, listas de otros datos en cierto orden. Listas y tuplas son muy similares.
- Para declarar una lista se usan los corchetes [], en cambio, para declarar una tupla se usan los paréntesis (). En ambos casos los elementos se separan por comas, y en el caso de las tuplas es necesario que tengan como mínimo una coma.
- Tanto las listas como las tuplas pueden contener elementos de diferentes tipos. No obstante las listas suelen usarse para elementos del mismo tipo en cantidad variable mientras que las tuplas se reservan para elementos distintos en cantidad fija.
- Para acceder a los elementos de una lista o tupla se utiliza un índice entero (empezando por "0", no por "1"). Se pueden utilizar índices negativos para acceder elementos a partir del final.
- Las listas se caracterizan por ser mutables, mientras que las tuplas son inmutables.

```
>>> lista = ["abc", 42, 3.1415]
>>> lista[0] # Acceder a un elemento por su indice
'abc'
>>> lista[-1] # Acceder a un elemento usando un indice negativo
3.1415
>>> lista.append(True) # Agregar un elemento al final de la lista
>>> lista
['abc', 42, 3.1415, True]
>>> del lista[3] # Borra un elemento de la lista usando un indice
>>> lista[0] = "xyz" # Re-asignar el valor del primer elemento
>>> lista[0:2] #elementos del indice "0" al "1"
['xyz', 42]
>>> lista_anidada = [lista, [True, 42]] #Es posible anidar listas
>>> lista_anidada
[[['xyz', 42, 3.1415], [True, 42]]
>>> lista_anidada[1][0] #accede lista dentro de otra lista
True

>>> tupla = ("abc", 42, 3.1415)
>>> tupla[0] # Acceder a un elemento por su indice
'abc'
>>> del tupla[0] # No es posible borrar ni agregar
Traceback (most recent call last):
  File "<stdin>", line 1, in <module>
TypeError: 'tuple' object doesn't support item deletion
>>> tupla[0] = "xyz" # Tampoco es posible re-asignar
Traceback (most recent call last):
  File "<stdin>", line 1, in <module>
TypeError: 'tuple' object does not support item assignment
>>> tupla[0:2] # elementos del indice "0" al "2" sin incluir
```

```
('abc', 42)
>>> tupla_anidada = (tupla, (True, 3.1415)) # es posible anidar
>>> 1, 2, 3, "abc" # Esto tambien es una tupla
(1, 2, 3, 'abc')
>>> (1) # no es una tupla, ya que no posee al menos una coma
1
>>> (1,) # si es una tupla
(1,)
>>> (1, 2) # Con mas de un elemento no es necesaria la coma final
(1, 2)
>>> (1, 2,) # Aunque agregarla no modifica el resultado
(1, 2)
```

A.5.5 Diccionarios

- Para declarar un diccionario se usan las llaves {}. Contienen elementos separados por comas, donde cada elemento está formado por un par clave:valor (el símbolo : separa la clave de su valor correspondiente).
- Los diccionarios son mutables, es decir, se puede cambiar el contenido de un valor en tiempo de ejecución.
- En cambio, las claves de un diccionario deben ser inmutables. Esto quiere decir, por ejemplo, que no podremos usar ni listas ni diccionarios como claves.
- El valor asociado a una clave puede ser de cualquier tipo de dato, incluso un diccionario.

```
>>> dicci = {"cadena": "abc", "numero": 42, "lista": [True, 42]}
>>> dicci["cadena"] # Usando una clave, se accede a su valor
'abc'
>>> dicci["lista"][0]
True
>>> dicci["cadena"] = "xyz" # Re-asignar el valor de una clave
>>> dicci["cadena"]
'xyz'
>>> dicci["decimal"] = 3.1415927 # nuevo elemento clave:valor
>>> dicci["decimal"]
3.1415927
>>> dicci_mixto = {"tupla": (True, 3.1415), "diccionario": dicci}
>>> dicci_mixto["diccionario"]["lista"][1]
42
>>> dicci = {("abc",): 42} # tupla puede ser clave
>>> dicci = {[["abc"]]: 42} # una clave no puede ser lista
Traceback (most recent call last):
  File "<stdin>", line 1, in <module>
TypeError: unhashable type: 'list'
```

A.5.6 Listas por comprensión

Una lista por comprensión es una expresión compacta para definir listas. Al igual que el operador lambda, aparece en lenguajes funcionales. Ejemplos:
`range(n)` devuelve una lista, empezando en 0 y terminando en $n - 1$.

```
>>> range(5) #
range(0, 5)
>>> [i*i for i in range(5)]
[0, 1, 4, 9, 16]
>>> lista = [(i, i + 2) for i in range(5)]
>>> lista
[(0, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 6)]
```

A.5.7 Funciones

- Las funciones se definen con la palabra clave `def`, seguida del nombre de la función y sus parámetros. Otra forma de escribir funciones, aunque menos utilizada, es con la palabra clave `lambda` (que aparece en lenguajes funcionales como Lisp). Generalmente esta forma es apropiada para funciones que es posible definir en una sola línea.
- El valor devuelto en las funciones con `def` será el dado con la instrucción `return`.

```
>>> def suma(x, y = 2): #el argumento y tiene un valor por defecto
...     return x + y # Retornar la suma
...
>>> suma(4) # La variable "y" no se modifica, siendo su valor: 2
6
>>> suma(4, 10) # La variable "y" si se modifica
14

>>> suma = lambda x, y = 2: x + y
>>> suma(4) # La variable "y" no se modifica
6
>>> suma(4, 10) # La variable "y" si se modifica
14
```

A.5.8 Condicionales

Una sentencia condicional (`if condicion`) ejecuta su bloque de código interno sólo si `condicion` tiene el valor booleano `True`. Condiciones adicionales, si las hay, se introducen usando `elif` seguida de la condición y su bloque de código. Todas las condiciones se evalúan secuencialmente hasta encontrar la primera que sea verdadera, y su bloque de código asociado es el único que se ejecuta. Opcionalmente, puede haber un bloque final (la palabra clave `else` seguida de un bloque de código) que se ejecuta sólo cuando todas las condiciones fueron falsas.

```
>>> verdadero = True
>>> if verdadero: # No es necesario poner "verdadero == True"
...     print("Verdadero")
... else:
...     print("Falso")
...
Verdadero
>>> lenguaje = "Python"
>>> if lenguaje == "C":
...     print("Lenguaje de programacion: C")
... elif lenguaje == "Python": # tantos "elif" como se quiera
...     print("Lenguaje de programacion: Python")
... else:
...     print("Lenguaje de programacion: indefinido")
...
Lenguaje de programacion: Python
>>> if verdadero and lenguaje == "Python":
...     print("Verdadero y Lenguaje de programacion: Python")
...
Verdadero y Lenguaje de programacion: Python
```

A.5.9 Bucles

El bucle `for` es similar a otros lenguajes. Recorre un objeto *iterable*, esto es una lista o una tupla, y por cada elemento del iterable ejecuta el bloque de código interno. Se define

con la palabra clave `for` seguida de un nombre de variable, seguido de `in` seguido del iterable, y finalmente el bloque de código interno. En cada iteración, el elemento siguiente del iterable se asigna al nombre de variable especificado:

```
>>> lista = ["a", "b", "c"]
>>> for i in lista: # Iteramos sobre una lista, que es iterable
...     print(i)
...
a
b
c
>>> cadena = "abc"
>>> for i in cadena: # Iteramos sobre una cadena, que es iterable
...     print(i) # una coma al final evita un salto de linea
...
a
b
c
```

El bucle `while` evalúa una condición y, si es verdadera, ejecuta el bloque de código interno. Continúa evaluando y ejecutando mientras la condición sea verdadera. Se define con la palabra clave `while` seguida de la condición, y a continuación el bloque de código interno:

```
>>> numero = 0
>>> while numero < 3:
...     print(numero)
...     numero += 1
...
0
1
2
```

A.6 Introducción a Sympy

Sympy es una librería del lenguaje Python para realizar cálculo simbólicos

```
x=symbols('x')
type(x)

sympy.core.symbol.Symbol
```

```
f=(x**3+3*x)**4-(x-1)*3+8
```

$$f = -3x + (x^3 + 3x)^4 + 11.$$

```
type(f)

sympy.core.add.Add

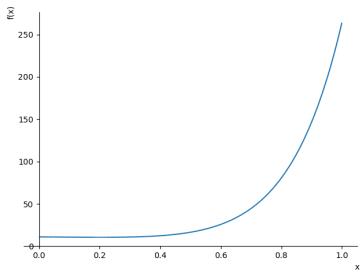
g=f.expand()
```

$$g = x^{12} + 12x^{10} + 54x^8 + 108x^6 + 81x^4 - 3x + 11.$$

```
h=f.diff(x,12)
```

$$\frac{d^{12}f}{dx^{12}} = h = 479001600.$$

```
plot(f,(x,0,1))
```



A.6.1 Álgebra lineal

```
a=symbols('a1:6')

$$a = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5).$$

```

```
a=symbols('a:2:2')

$$a = (a_{00}, a_{01}, a_{10}, a_{11}).$$

```

```
b=Matrix(a).reshape(2,2)
```

$$b = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{pmatrix}$$

```
type(b)
sympy.matrices.dense.MutableDenseMatrix
```

```
lam=symbols('lambda')
p=(b-lam*eye(2)).det() #eye=indentidad
```

$$p = a_{00}a_{11} - a_{00}\lambda - a_{01}a_{10} - a_{11}\lambda + \lambda^2.$$

```
soluciones=solve(p, lam)
```

$$\lambda_1 = \frac{a_{00}}{2} + \frac{a_{11}}{2} - \frac{\sqrt{a_{00}^2 - 2a_{00}a_{11} + 4a_{01}a_{10} + a_{11}^2}}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{a_{00}}{2} + \frac{a_{11}}{2} + \frac{\sqrt{a_{00}^2 - 2a_{00}a_{11} + 4a_{01}a_{10} + a_{11}^2}}{2}$$

```
M=[Rational(1,i+j) for i in range(1,5) for j in range(1,5)]
M=Matrix(M).reshape(4,4)
```

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

```
type(Rational(1,3))
sympy.core.numbers.Rational

lam=symbols('lambda')
p=(M-lam*eye(4)).det()
```

$$p = \lambda^4 - \frac{25\lambda^3}{24} + \frac{22151\lambda^2}{352800} - \frac{19\lambda}{169344} + \frac{1}{423360000}.$$

A.6.2 Lógica

```
p,q=symbols('p,q')
r=p>>q
```

$$r = p \Rightarrow q.$$

```
r=simplify((p>>q)&(q>>p))
```

$$r = (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q).$$

```
L=[r.subs({p:i,q:j}) for i in (True,False) for j in (True,False)]
```

$$L = [\text{True}, \text{False}, \text{False}, \text{True}].$$

A.6.3 Problema elemental

De un cartón de $12m^2$ se va a construir una caja sin tapa. Encontrar el volumen máximo de la caja

```
x,y,z=symbols('x,y,z')
lam=symbols('lambda')
g1=2*x*z+2*y*z+x*y-12
f=x*y*z-lam*g1
Eq1=[f.diff(h) for h in (x,y,z)]
Eq2=Eq1+[g1]
sol=solve(Eq2, [x,y,z, lam])
```

Soluciones:

$$\left[\left(-2, -2, -1, -\frac{1}{2} \right), \left(2, 2, 1, \frac{1}{2} \right) \right]$$

evidentemente solo sirve la segunda.

A.7 Numpy

```
import numpy as np
import sympy as sp

np.sin(1)
```

$$\text{sen}(1) = 0,8414709848078965$$

Bibliografía

- [1] Gerd Baumann. *Symmetry Analysis of Differential Equations With Mathematica®*. Springer Science & Business Media, sep 2013.
- [2] David Betounes. *Differential Equations: Theory and Applications*. Springer Science & Business Media, oct 2009.
- [3] ES Cheb-Terrab, LGS Duarte, and LACP Da Mota. Computer algebra solving of first order odes using symmetry methods. *Computer Physics Communications*, 101(3):254–268, 1997.
- [4] C. Henry Edwards and David E. Penney. *Elementary Differential Equations With Boundary Value Problems: Pearson New International Edition*. Pearson Education Limited, ago 2013.
- [5] Equipo-Sympy. Ode, lie heuristics, 2019.
- [6] Peter Farrell. *Math Adventures With Python: An Illustrated Guide to Exploring Math With Code*, volume 1. No Starch Press, ene 2019.
- [7] Ivan Idris. *NumPy 1.5: Beginner's Guide*, volume 1. Packt Publishing, ago 2011.
- [8] Ivan Idris and Numpy Cookbook. *NumPy Cookbook*, volume 1. Packt Publishing, ago 2012.
- [9] Ronan Lamy. *Instant SymPy Starter: Learn to Use SymPy's Symbolic Engine to Simplify Python Calculations*, volume 1. Packt Pub., ago 2013.
- [10] Hans Petter Langtangen. *A Primer on Scientific Programming With Python*, volume 1. Springer Science & Business Media, ago 2009.
- [11] Ernest Lindelöf. Sur l'application des méthodes d'approximations successives à l'étude des intégrales réelles des équations différentielles ordinaires. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 10:117–128, 1894.
- [12] Fernando Mazzone. Ecuaciones diferenciales, 2020. Notas de clases.
- [13] Fernando Mazzone. Repaso álgebra lineal. Notas complementarias a Ecuaciones Diferenciales (1913), July 2020.
- [14] Wes McKinney. *Python for Data Analysis*, volume 1. O'Reilly Media, oct 2012.
- [15] Carl D. Meyer. *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*, volume 1. SIAM, ene 2000.
- [16] R. Kent Nagle, Edward B. Saff, and Arthur David Snider. *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*. Pearson Educación, jun 2005.
- [17] Emile Picard. Sur l'application des méthodes d'approximations successives à l'étude de certaines équations différentielles ordinaires. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 9:217–272, 1893.
- [18] Amit Saha. *Doing Math With Python: Use Programming to Explore Algebra, Statistics, Calculus, and More!*, volume 1. No Starch Press, ago 2015.
- [19] G. Simmons. *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones y Notas Históricas*. McGraw-Hill, Madrid, 1991.
- [20] Jorge Sotomayor. *Lições de equações diferenciais ordinárias*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, feb 1979.
- [21] Mark Summerfield. *Rapid GUI Programming With Python and Qt: The Definitive Guide to PyQt Programming*, volume 1. Prentice Hall, ago 2008.
- [22] Wikipedia. Determinismo – wikipedia, la enciclopedia libre, 2017. [Internet; descargado 2-mayo-2017].

Índice Conceptos

Condiciones

 contorno, 138

 iniciales, 138

cono, 213

Constante

 Euler-Máscheroni, 136

Ecuación

 Bessel, 124

 ecuación indicial, 124

Función

 Bessel de primera especie, 127

 Bessel de segunda especie, 135

 Neumann, 135

Ley

 Enfriamiento de Newton, 138

órbitas, 206

simple, 214