Ecuaciones de primer orden

19 de marzo de 2016

Índice

1. Ecuaciones homogéneas

Definición 1 (Funciones homogéneas)**.**

Una función $F:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ se dice homogénea de grado α si

$$f(rx,ry)=r^{\alpha}f(x,y).$$

Ejemplo 1.

- $f(x,y) = \frac{y}{x}$ es homogénea de grado 0.
- Más generalmente, cualquier función $f(x,y)$ que dependa sólo de x/y, esto es que se escriba de la forma $f(x,y) = g(y/x)$ es homogénea de grado 0. Así $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$ es homogénea de grado 0 pues $\frac{x-y}{x+y} = \frac{1-x/y}{1+x/y}$
- $f(x,y) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k y^{n-k}$ es homogénea de grado n.

Definición 2 (Ecuaciones homogéneas)**.**

Una ecuación
$$y' = f(x,y) \tag{1}$$
tal que f es homogénea de grado 0 se llamará ecuación homogénea.

Si una ecuación del tipo (1) es homogénea entonces se transforma en una ecuación separable mediante el cambio de variable dependiente $\boxed{z = y/x}$. En efecto, para $x \neq 0$
$$f(x,y) = x^0 f\left(1, \frac{y}{x}\right) = f(1,z)$$
y
$$y' = z'x + z$$
Como $y' = f(x,y)$ tenemos
$$z'x + z = f(1,z) \Longrightarrow \frac{dz}{f(1,z) - z} = \frac{dx}{x}. \tag{2}$$

Ejemplo 2. Resolver $y' = \frac{x+y}{x-y}$.

La ecuación (2) queda
$$\begin{array}{c} \frac{dx}{x} = \frac{dz}{\frac{1+z}{1-z} - z} = \frac{(1-z)dz}{1+z^2} \\ \Downarrow \\ \ln|x| + C = \arctan(z) - \frac{1}{2}\ln|1+z^2| \end{array}.$$

2. Ecuaciones exactas

Definición 1 (Diferencial)**.**

Dada una función f de n variables independientes $x_1, \ldots, x_n$ definimos su diferencial por
$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n. \tag{3}$$

Esta definición obviamente carece de rigor pues el miembro de la derecha en (3) contiene las expresiones indefinidas dx_j. La diferencial puede ser definida con toda corrección, es un ejemplo de forma diferencial, en particular es una 1-forma. En la unidad que sigue hablaremos un poco más del concepto de forma diferencial. El uso que haremos de las formas diferenciales es muy elemental, podríamos evitar por completo su uso al costo de usar una notación ligeramente menos compacta y simétrica.

Es costumbre escribir una ecuación diferencial como la 1-forma diferencial

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{4}$$

Que corresponde a la ecuación, escrita de la manera tradicional, $y' = -M(x,y)/N(x,y)$.

Dada $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, satisfaciendo las condiciones del Teorema de la Función Implícita, la expresión

$$f(x,y) = c \tag{5}$$

define una familia paramétrica de curvas, con parámetro c. Derivanda la expresión podemos representar esta familia como soluciones de la EDO

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = 0 \Longleftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0 \Longleftrightarrow df = 0.$$

Esto nos sugiere la idea de que, dada una ecuación diferencial cualquiera, indaguemos si se puede escribir, o puede ser transformada de alguna manera en, una ecuación de la forma $df = 0$. Para que la ecuación (4), se pueda expresar como $df = 0$ se debe cumplir que $M = \partial f/\partial x$ y $N = \partial f/\partial y$. Vale decir el campo vectorial $(x,y) \mapsto (M(x,y), N(x,y))$ es un campo gradiente o conservativo, con potencial f.

No todo campo es un campo gradiente, recordemos el siguiente teorema de Cálculo III

Teorema 1 (Caracterización de campos conservativos)**.**

Sea $\mathcal{O}$ un conjunto abierto y simplemente conexo de $\mathbb{R}^n$. Son equivalentes

1. El campo $F : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^n$ es un gradiente.
2. Si C es cualquier camino cerrado entonces
$$\oint_C F \cdot dx = 0.$$
3. $$\frac{\partial F^i}{\partial x_j} = \frac{\partial F^j}{\partial x_i}, \quad \text{para } i,j = 1,\ldots,n$$

Pensando al campo F como un campo de fuerzas sobre el espacio euclideo tridimensional, el ítem 2 expresa que el trabajo realizado por la fuerza a lo largo de un camino cerrado es cero. El ítem 3 afirma que $\nabla \times F = 0$, la fuerza es irrotacional.

El item 3 es simple de chequear. Una vez establecido que un campo es conservativo tendremos el problema de hallar el potencial f. Ilustremos esto con el campo $(x, y) \mapsto (M(x, y), N(x, y))$. Supongamos que $\mathcal{O}$ es abierto de $\mathbb{R}^2$ y

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}, \quad \text{para } (x, y) \in \mathcal{O}.$$

En primer lugar debemos tener un campo escalar f tal que

$$M = \frac{\partial f}{\partial x} \Rightarrow f = \int M dx + C(y).$$

Ahora como $f_y = N$

$$N = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int M dx + C'(y) \Rightarrow C'(y) = N - \frac{\partial}{\partial y} \int M dx.$$

Para que esta ecuación tenga solución $N - \frac{\partial}{\partial y} \int M dx$ debe ser sólo función de y. Pero la condición necesaria y suficiente para ello es

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial x} \left(N - \frac{\partial}{\partial y} \int M dx \right) \\ &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \int M dx \\ &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \int M dx \\ &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}. \end{aligned}$$

Pero estamos bajo ese supuesto, entonces

$$\boxed{f = \int M dx + \int \left(N - \frac{\partial}{\partial y} \int M dx \right) dy.} \tag{6}$$

Ejemplo 3. Resolver $e^y dx + (xe^y + 2y)dy = 0$.
Solución: Aquí

$$M = e^y \quad \text{y} \quad N = xe^y + 2y.$$

Así

$$\frac{\partial M}{\partial y} = e^y = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

La ecuación es exacta. El potencial f debe cumplir

$$f = \int e^y dx = xe^y + C(y).$$

Luego

$$C(y) = \int \left(xe^y + 2y - \frac{\partial}{\partial y} xe^y \right) dy = y^2$$

Tener en cuenta que la función potencial f no es única, queda deerminada hasta una constante aditiva de integración que podemos elegir a gusto ya que debemos encontrar sólo un potencial. Entonces podemos tomar

$$f = xe^y + y^2.$$

La solución general de la ecuación estará dada por

$$xe^y + y^2 = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Como no sabemos despejar $\boxed{y}$ de aquí dejamos indicada de esta manera la solución.

3. Factores integrantes

Factores integrantes Las ecuaciones exactas son raras, no obstante tenemos un recurso para llevar algunas ecuaciones no exactas a una equivalente y exacta.

Supongamos que la ecuación (4) no es exacta. La idea es encontrar una función $\mu(x, y)$ llamada factor integrante que haga exacta la ecuación

$$\mu\,(Mdx + Ndy) = 0.$$

Para ello se debe cumplir que

$$\frac{\partial \mu M}{\partial y} = \frac{\partial \mu N}{\partial x} \iff \boxed{\mu\frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial \mu}{\partial y}M = \frac{\partial N}{\partial x}\mu + N\frac{\partial \mu}{\partial x}}. \tag{7}$$

Proposición 1 (Existencia de factores integrantes)**.**

Toda ecuación de primer orden (4), con $N \neq 0$, que tiene una solución general que se escribe como en (5), con $\partial f/\partial x$ tiene un factor integrante.

Comentario: La suposición $N \neq 0 \neq \frac{\partial f}{\partial y}$, es razonable pues $N = 0$ imlpicaría que no podemos despejar y' de (4) y $\partial f/\partial y$ contradice las hipótesis del Teorema de la Función Implícita, herramienta necesaria para suponer que y es función de x

Dem. Si derivamos (5) conseguimos

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0.$$

De esta ecuación y (4) vemos que

$$-\frac{M}{N} = y' = -\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y} \Longrightarrow \frac{\partial f/\partial x}{M} = \frac{\partial f/\partial y}{N} =: \mu(x, y)$$

De la igualdad de arrriba se deduce que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \mu M \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \mu N.$$

Es decir μ es factor integrante. $\square$

La proposición anterior nos dice que, mientras la ecuación sea resoluble, siempre existe un factor integrante. Pero no ayuda a hallarlo dado que parte de la solución que es lo que queremos hallar. Otra alternativa es resolver la ecuación (7) que es una ecuación en derivadas parciales para μ, que normalmente es más dificil que resolver la original. Así, mientras que el método es siempre aplicable, en la práctica es útil en situaciones específicas.

Hay que señalar que sólo necesitamos una solución de (7) y no su solución general. En la práctica se suele hacer alguna suposición sobre μ que simplifique la expresión. Es decir proponer alguna forma específica para μ que haga la ecuación (7) más sencilla de resolver. Por supuesto, a priori el factor integrante, si bien existe, no tiene ninguna forma predeterminada. Lo que hacemos es lo que en lenguaje culto se conoce como ansatz, y en lenguaje coloquial, que aquí es más significativo, estamos haciendo un lance o tratando de adivinar μ, sin mucho más criterio que buscarlo entre equellas funciones con una forma (simple) predeterminada. Por ejemplo, es común suponer que μ es sólo función de una de las variables. Si por ejemplo asumimos que $\mu = \mu(x)$ las ecuación (7) se escribe

$$\mu \frac{\partial M}{\partial y} = \mu \frac{\partial N}{\partial x} + N\mu'(x) \Longrightarrow \boxed{\frac{\mu'}{\mu} = \frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N}}$$

Este ansatz no siempre funcionará, para que lo haga, la función en el segundo miembro $(\partial M/\partial y - \partial N \partial x)N$ debe depender sólo de x. Si eso ocurre

$$\mu(x) = e^{\int \frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N} dx}. \tag{8}$$

es un factor integrante. Recordar que sólo necesitamos hallar uno, por ese motivo omitivos constantes de integración.

De manera similar, si la función

$$\frac{\partial N/\partial x - \partial M/\partial y}{M}$$

depende sólo de y tenemos que

$$\mu(y) = e^{\int \frac{\partial N/\partial x - \partial M/\partial y}{M} dy}$$

es un factor integrante que, en este caso, sólo depende de y.

Ejemplo 4. $ydx + (x^2y - x)dy = 0$.

Primero chequeemos la posible exactitud.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 \text{ y } \frac{\partial N}{\partial x} = 2xy - 1 \Longrightarrow \text{no exacta.}$$

Ahora

$$\frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N} = \frac{2 - 2xy}{x(xy-1)} = -\frac{2}{x}.$$

El factor integrante es

$$\mu(x) = e^{-2\ln|x|} = \frac{1}{x^2}.$$

4. Otras Técnicas relacionadas con exactitud

Veamos otra forma de trabajar para transformar ecuaciones no exactas en exactas. Esta forma no es metódica, sino que depende de la habilidad de quien la lleva adelante en encontrar la similitud de la ecuación diferencial con alguna expresión exacta conocida. Ilustremos esto con el ejemplo anterior $ydx + (x^2y - x)dy = 0$. Escrita de este modo no se advina ninguna similitud. Pero si la escribimos

$$x^2ydy - (xdy - ydx) = 0.$$

Recordando que

$$d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{xdy - ydx}{x^2}.$$

Lo que sugiere dividir por x^2 la ecuación.

$$0 = ydy - \frac{xdy - ydx}{x^2} = d\left(\frac{y^2}{2}\right) - d\left(\frac{y}{x}\right) = d\left(\frac{y^2}{2} - \frac{y}{x}\right).$$

La solución general es pues

$$\frac{y^2}{2} - \frac{y}{x} = c.$$

Se obtienen otras formas diferenciales exactas derivando expresiones sencillas

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2} \quad \text{nada nuevo} \tag{9}$$

$$d(xy) = ydx + xdy \tag{10}$$

$$d(x^2 + y^2) = 2(xdx + ydy) \tag{11}$$

$$d\left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right) = \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} \quad \text{falla caracterización pag (1)!!! Qué ocurre?}$$

$$d\left(\ln\left(\frac{y}{x}\right)\right) = \frac{ydx - xdy}{xy} \tag{12}$$

Ejemplo 5. *Espejos, antenas parabólicos.* Hallar la forma del espejo curvo tal que el reflejo de todo haz de luz que viaja paralelo al eje x con dirección negativa repecto a este eje pasa por el $(0, 0)$.

Ejercicio. Dejamos como ejercicio demostrar que un haz de luz que se refleja sobre un espejo lo hace de tal manera que los ángulos que se forman con los rayos de incidencia y refracción y la tangente al espejo en el punto de incidencia son iguales ($\beta = \alpha$ en el dibujo). Para resolver esto hay que usar el principio de mínimo tiempo de Fermat

Solución. Sea (x, y) el punto de incidencia. Apelando a la geometría elemental, $\phi = \beta$ y $\theta = \alpha + \phi = 2\beta$. Como $\tan\theta = \frac{y}{x}$ y como

$$\tan\theta = \tan 2\beta = \frac{2\tan\beta}{1 - \tan^2\beta},$$

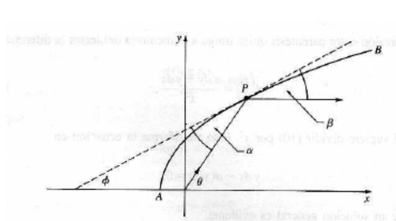


Figura 1: Reflejo en un espejo curvo

deducimos que

$$\frac{y}{x} = \frac{2dy/dx}{1-(dy/dx)^2}.$$

Despejando

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x \pm \sqrt{x^2+y^2}}{y}.$$

Que es la familia de todas las parábolas con eje de simetría x, positivamente orientadas y con foco en $(0,0)$. Podemos escribir la ecuación de este otro modo

$$xdx + ydy = \pm\sqrt{x^2+y^2}dx.$$

Figura 2: Antena parabólica

Tomando en cuenta (11)

$$\pm\frac{d(x^2+y^2)}{2\sqrt{x^2+y^2}} = dx.$$

Si $r = x^2+y^2$

$$dx = \pm\frac{dr}{2\sqrt{r}} = \pm d\sqrt{r} = \pm d\sqrt{x^2+y^2}$$

Las solución general es

$$\pm\sqrt{x^2+y^2} = x + c.$$

Elevando al cuadrado ambos miembros

$$y^2 = 2xc + c^2 = 2c\left(x + \frac{c}{2}\right)$$

5. Ecuaciones Lineales

Definición 1 (Ecuación lineal)**.**

Se llama ecuación diferencial lineal a una ecuación que es lineal respecto a la/s variables dependientes. La siguiente es la ecuación diferencial lineal general de primer orden

$$y' + p(x)y = q(x) \tag{13}$$

y la de segundo orden

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x). \tag{14}$$

Aquí p, q y r son funciones de x usualmente definidas sobre un intervalo abierto de $\mathbb{R}$.

La ecuación puede ser no lineal repecto a la variable independiente.

Es costumbre introducir los operadores diferenciales $L_1[y] = y' + py$ y $L_2[y] = y'' + py' + qy$. Para una ecuación lineal, los operadores L_1 y L_2 son lineales. Es decir, $L_1[y_1 + y_2] = L_1[y_1] + L_1[y_2]$.

Vamos a resolver la ecuación lineal de primer orden (13). Esto es sencillo pues la forma diferencial asociada

$$dy + (p(x)y - q(x))dx = 0 \tag{15}$$

tiene un factor integrante que depende sólo de x. En efecto como $M = p(x)y - q(x)$ y $N = 1$.

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N} = p(x).$$

Entonces $\mu(x) = e^{\int p dx}$ es factor integrante. Luego si multiplicamos por μ en (15), la expresión es exacta.

$$e^{\int p dx}dy + p(x)e^{\int p dx}ydx = q(x)e^{\int p dx}dx.$$

Podemos identificar rápidamente, sin necesidad de hacer cálculos, el correspondiente potencial.

$$d\left(e^{\int p dx}y\right) = d\left(\int q(x)e^{\int p}dx\right).$$

Integrando

$$e^{\int p dx}y = \int e^{\int p dx}q(x)dx + C.$$

Entonces

$$\boxed{y = e^{-\int p dx}\left\{\int e^{\int p dx}q(x)dx + C\right\}} \tag{16}$$

Ejemplo 6. Resolver $y' + y/x = 3x$.

Solución. En la práctica, para evitar recordar fórmulas, se suele repetir el procedimiento que llevo a la fórmula (16), ahora, dado la cercanía de su derivación, vamos a usarla de manera directa. La solución general es

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-\int \frac{1}{x}dx}\left\{\int e^{\int \frac{1}{x}dx}3xdx + C\right\} \\ &= \frac{1}{|x|}\left\{\int |x|3xdx + C\right\} \\ &= x^2 + \frac{C}{|x|} \\ &= x^2 + \frac{C}{x} \end{aligned}$$

6. Reducción de orden

Algunas ecuaciones de segundo orden

$$F(x, y, y', y'') = 0 \tag{17}$$

se pueden reducir a una de primer orden. Por ejemplo si F no depende de y. Es decir la ecuación es

$$F(x, y', y'') = 0 \tag{18}$$

Aquí introducimos la nueva variable dependiente $\boxed{p = y'}$, que resuelve

$$F(x, p, p') = 0.$$

Que es una ecuación de primer orden. Supuesto que la podemos resolver y encontrar una solución general para p, tendremos

$$y = \int p dx + C \tag{19}$$

Es la solución general de la ecuación de segundo orden.

Si la ecuación general de segundo orden (17) no depende de x, es decir tenemos

$$F(y, y', y'') = 0 \tag{20}$$

entonces nuevamente usaremos $\boxed{p = y'}$ como nueva variable depeniente pero también $\boxed{y}$ como nueva variable independiente. Como

$$y'' = p' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}p$$

La ecuación se reduce a la siguiente ecuación de primer orden

$$F\left(y, p, \frac{dp}{dy}p\right) = 0 \tag{21}$$

7. `SymPy`

Función SymPy (Clasificación de EDO).

Sintaxis: `classify_ode(Eq)`
`Eq`: ecuación.

El output son los métodos que se le pueden aplicar

```
from sympy import *
x=symbols('x')
y=Function('y')(x)
classify_ode(y.diff()+y)
```

Resultado:

```
('separable', '1st_exact','1st_linear',
'almost_linear','1st_power_series','lie_group',
'nth_linear_constant_coeff_homogeneous',
'separable_Integral', '1st_exact_Integral',
'1st_linear_Integral','almost_linear_Integral')
```

```
Ecuacion=Eq((x**2*y-x)*sin((y.diff(x,1)))**3\
+y**5+x**3*sin(y),0)
classify_ode(Ecuacion)
```

El único método que puede aplicar `SymPy` a la ecuación

$$(x^2y - x)\,\mathrm{sen}^3(y') + y^5 + x^3\,\mathrm{sen}(y) = 0,$$

es `('lie_group',)`

```
dsolve(Ecuacion,y)
```

Resultado: Piensa, piensa pero no llega a nada.

```
>>>Ecuacion=Eq(y.diff()+(-x+sqrt(x**2+y**2))/y,0)
>>>classify_ode(Ecuacion)
('1st_homogeneous_coeff_best',
'1st_homogeneous_coeff_subs_indep_div_dep',
'1st_homogeneous_coeff_subs_dep_div_indep',
'1st_power_series', 'lie_group',
'1st_homogeneous_coeff_subs_indep_div_dep_Integral',
'1st_homogeneous_coeff_subs_dep_div_indep_Integral')
```

```
>>>dsolve(Ecuacion,y,hint='lie_group')
```

Resultado: Piensa rato largo y:

```
The given ODE (-x + sqrt(x**2 + y(x)**2))/y(x) + Derivative(y(x), x)
cannot be solved by the lie group method
```

```
>>>sol=dsolve(Ecuacion,y,hint='1st_homogeneous_coeff_best')
```

$$y(x) = C_1 e^{\int^{\frac{x}{y(x)}} -\frac{u_2}{u_2^2 - u_2\sqrt{u_2^2+1}-1} du_2 + \int^{\frac{x}{y(x)}} \frac{\sqrt{u_2^2+1}}{u_2^2 - u_2\sqrt{u_2^2+1}-1} du_2}$$

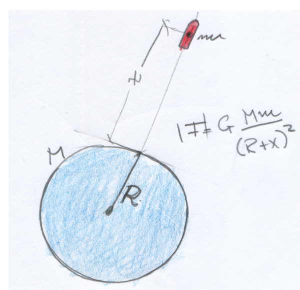
8. Ejemplos

8.1. Velocidad de escape

Problema 1 (Velocidad de escape)**.**

Que velocidad hay que imprimirle a un proyectil que es lanzado verticalmente desde la superficie de la Tierra si nuestra pretensión es que el proyectil se escape al infinito. La velocidad más chica con esta cualidad se llama velocidad de escape.

Solución. Para resolver este problema hay que tomar en consideración la Ley de gravitación universal de Newton. En la parte que nos interesa, esta Ley afirma que el módulo de la fuerza de gravedad que se ejercen entre si dos cuerpos de masa m_1 y m_2 separados una distancia r es proporcional al producto de las masas e inversamente proporcional al cuadrado de las distancia que los separa. Vale decir



$$|F| = G\frac{m_1 m_2}{r^2},$$

donde G es la constante de proporcionalidad. Cuando los cuerpos no son puntos masa, sino cuerpos extendidos en el espacio, la distancia de separación hay que medirla entre los centros de masa de los cuerpos.

Hay que aclarar que usando el Principio conservación energía mecánica podemos resolver el problema de una manera más simple. Incluso podemos ver que la suposición de que el tiro es vertical no es necesaria, es decir la velocidad de escape es la misma aunque el tiro sea oblicuo. Discutiremos esa solución durante la clase. Lamentablemente, esta solución no usa ecuaciones diferenciales. Vamos a dar una solución, quizás un poco más complicada, pero que invoca las técnicas discutidas.

Supondremos a la Tierra una esfera de radio R, masa M y su centro de masa en el centro de la esfera. Al proyectil lo supondremos un punto masa con masa m y su posición en el momento t, denotada $x = x(t)$, la mediremos sobre un eje vertical con origen en la superficie de la Tierra. Todo como está indicado en la página 8.1. Luego la distancia Tierra-proyectil será igual a $R+x$ donde x es la posición del proyectil. Utilizando la Segunda ley de Newton, $F = ma$, obtenemos

$$mx''(t) = -\frac{GMm}{(R+x)^2}.$$

Es una ecuación de la forma

$$F(t, x, x', x'') = 0.$$

Con variable dependiente x e independiente t. Pero, en realidad no depende de t y por consiguiente, como vimos, se puede convertir en una ecuación de primer orden tomando como nuevas variables: 1) independiente x 2) dependiente $v = x'$. En estas variables

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}.$$

La ecuación se convierte en

$$v\frac{dv}{dx} = -\frac{GM}{(R+x)^2} \Longrightarrow vdv + \frac{GM}{(R+x)^2}dx = 0.$$

Que es una ecuación en variables separables y también es exacta. Usaremos la técnica discutida para ecuaciones exactas [1], los que nos indica que la solución general se expresa de la siguiente forma

$$\frac{v^2}{2} - \frac{GM}{(R+x)} = E = \text{cte.} \tag{22}$$

La igualdad anterior es precisamente consecuencia directa del Principio conservación energía mecánica, lo hemos vuelto a deducir como consecuencia de que la ecuación era exacta. Sea v_0 la velocidad inicial para $t = 0$. Como E es constante y $x = 0$ en $t = 0$ debemos tener

$$E = \frac{v_0^2}{2} - GM/R \tag{23}$$

Como $v^2 \geq 0$ y por (22) y (23).

$$-\frac{GM}{(R+x)} \leq \frac{v^2}{2} - \frac{GM}{(R+x)} = \frac{v_0}{2} - \frac{GM}{R}$$

Figura 3: Remera nerd

[1] Siempre las ecuaciones en variables separables son exactas pues se escriben de la forma

$$M(x)dx + N(y)dy = 0,$$

por consiguiente tienen potencial

$$f = \int M(x)dx + \int N(y)dy$$

Queremos encontrar v_0 tal que $x \to \infty$. Luego tiene sentido tomar límite cuando $x \to \infty$ en la expresión anterior y concluimos

$$0 \leq \frac{v_0^2}{2} - GM/R$$

De aquí deducimos que el valor mínimo de velocidad de escape es el impreso en la remera de la figura 3.

8.2. Curvas de persecución

Problema 2 (Curvas de persecución)**.**

Supongamos que un conejo se mueve sobre una línea recta con rapidez uniforme a y de un punto por fuera de la recta parte un perro que lo persigue con rapidez uniforme b. Encontrar la trayectoria del perrro.

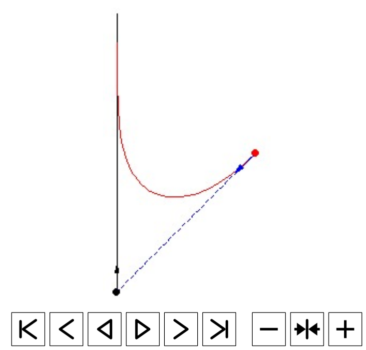


Figura 4: Persecución en un pentágono estrellado. Art of Pursuit, Ivars Peterson

Supongamos que el perro parte del punto $(c, 0)$, el conejo de $(0, 0)$ y la recta sobre la cual se mueve el conejo en dirección positiva es el eje y. Vamos a suponer que la trayectoria del perro sigue la trayectoria donde la tangente a su movimiento, en un momento dado, intersecta a la posición del conejo correspondiente a ese momento.

Pasado un tiempo t, el conejo estará en el punto $(0, at)$ y el perro en un punto de su trayectoria que forma un arco de longitud $s = bt$ hasta el $(c, 0)$. Ese punto, donde está el perro, lo

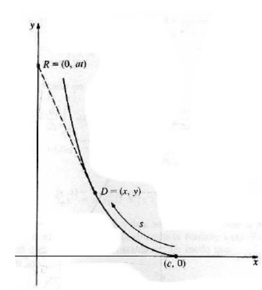


Figura 5: Curva persecución

denotaremos (x, y). Como hemos supuesto que la tangente a la trayectoria del perro en (x, y) pasa por la posición del conejo $(0, at)$ se debe cumplir que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - at}{x} \Longrightarrow xy' - y = -at. \tag{24}$$

En esta ecuación hay tres variables, t , x e y. No hemos definido cuales son independiente y cuales depenientes. Generalmente el tiempo t se considera variable indepeniente, pero en la expresión de arriba aparece la derivada de y respecto a x. Claramente deberíamos eliminar una de las variables. Conviene eliminar t, dado que al no aparecer en la derivación no tendremos que hacer un cambio de variables allí, donde siempre es un poco más engorroso. Por otra parte, la intuición del problema, nos dice que a cada t corresponde uno, y sólo un, x[2], lo que indica que t es función de x y por consiguiente es de esperar poder escribir la ecuación (24) en términos de x e y. Tener en cuenta que no es razonable en matemática, como en la política, pensar que lograremos tener un beneficio (menos variables) sin pagar algún precio, pues, como dice el dicho, "Cuando la limosna es grande hasta el santo desconfía" . En este caso, el costo que pagaremos es incrementar el orden de la ecuación. Como hemos dado algunas técnicas de resolver ecuaciones de orden dos quizás estemos en condiciones de pagar este precio.

Para eliminar t de la ecuación derivamos (24) respecto a x, obtenemos

$$xy'' = -a\frac{dt}{dx}.$$

Como $ds/dt = b$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{dt}{ds}\frac{ds}{dx} = -\frac{\sqrt{1 + y'(x)^2}}{b}.$$

Hemos usado la relación $s = \int_x^c \sqrt{1 + y'^2}dx$. Entonces

$$\boxed{xy'' = \frac{a\sqrt{1 + y'(x)^2}}{b}.} \tag{25}$$

Que es una ecuación que no contiene y. De modo que usando $p = y'$ como variable dependiente reducimos el orden de la ecuación. Nos queda

$$\frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = \frac{a}{b}\frac{dx}{x}.$$

Que es una ecuación en variable separables. Tomando la integral definida entre c y x, y considerando que si $x = c$ entonces $p = 0$, tenemos

$$\ln\left(p + \sqrt{1 + p^2}\right) = \ln\left(\frac{x}{c}\right)^{\frac{a}{b}}.$$

[2] De lo contrario el perro no se hubiera movido en la dirección horizontal entre dos moementos, lo que es absurdo

Si despejamos p conseguimos

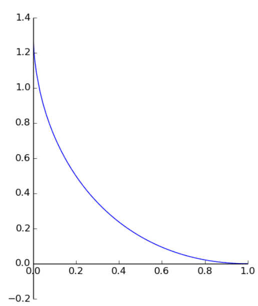
$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{c}\right)^{a/b} - \left(\frac{c}{x}\right)^{a/b}\right]. \tag{26}$$

Para hhalar y hay que recordar que $y' = p$ e $y(1) = 0$.

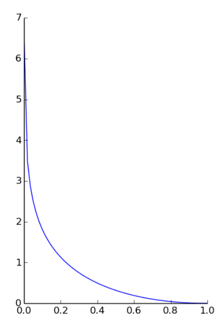
Usemos SymPy para completar este cálculo y hacer los gráficos. El siguiente código evalúa la integral, halla la constante de integración para que $y(1) = 0$ y grafica.

```
from sympy import *
x=symbols('x',real=True)
a=Rational(2)
b=Rational(1)
c=Rational(1)
y=integrate((x/c)**(a/b)-(c/x)**(a/b),x)
C=symbols('C')
C=solve(y.subs(x,1)+C,C)[0]
plot(y+C,(x,0.001,1))
```

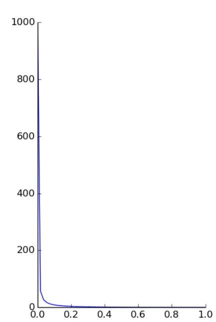
Los resultados son:



$a < b$



$a = b$



$a > b$

Lo anterior constituye un ejemplo de lo que se conoce como curva de persecución. Este es un tema muy interesante que tiene varias generalizaciones, por ejemplo el problema de los ratones donde se colocan en cada vértice de un polígono ratones cada uno de los cuales persigue al vecino en sentido antihorario (u horario, da lo mismo). Se consiguen patrones geométricos myu bellos

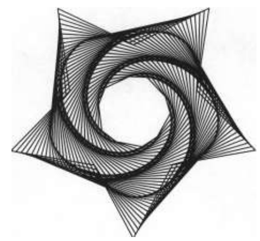


Figura 6: Persecución en un pentágono estrellado. Art of Pursuit, Ivars Peterson

9. Oscilador armónico

Un oscilador armónico es el más simple de los sistemas físicos vibratorios. Podemos definirlo como un sistema elástico que obedece a la Ley de elasticidad de Hooke, en honor a su descubridor Robert Hooke.

Figura 7: Robert Hooke

Suele citarse al resorte como un ejemplo familiar de oscilador armónico. Esto debido a que, cuando las oscilaciones de un resorte son pequeñas, se satisface aproximadamente la Ley de elasticidad de Hooke. Esta ley afirma que la fuerza que ejerce un resorte sobre una masa m conectada a él por uno de sus extremos es proporcional en magnitud al desplazamiento del resorte desde la posición de equilibrio. Además la fuerza de elasticidad actúa en sentido opuesto al desplazamiento.

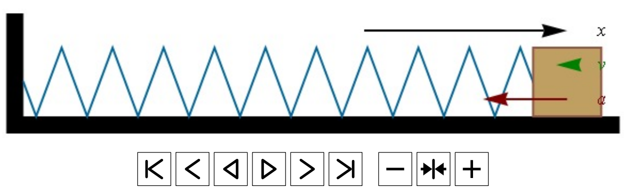


Figura 8: Resorte

Supongamos que tenemos un resorte, en unos de sus extremos fijado en una pared y unido a una masa m por el otro extremo. Supongamos que no actúa otra fuerza sobre la masa. Ver la animación de la figura 8. Pongamos un eje de coordenadas en la dirección del movimiento, con origen en la posición de equilibrio del resorte. Esta posición es el punto donde el resorte no ejerce fuerza. Supongamos que la dirección positiva es la dirección donde el resorte se expande. Denotemos por $x(t)$ la posición de la masa en el momento t. Entonces según la Segunda Ley de Newton y la Ley de Elasticidad de Hooke, tenemos que

$$mx''(t) = -kx(t). \tag{27}$$

La constante de proporcionalidad k se llama constante elástica. La ecuación (27) se denomina la ecuación del oscilador armónico o ecuación del resorte.

La ecuación del oscilador armónico se escribe $0 = f(t, x, x', x'')$, donde $f(t, x, y, z) = kx + mz$ es independiente de t. Podemos intentar usar x como variable independiente y $z = x'$ como dependiente. Como vimos $x''(t) = dz/dt = dz/dxz$. Así la ecuación queda

$$\begin{aligned} m\frac{dz}{dx}z = -kx &\Longrightarrow mzdz = -kxdx \Longrightarrow m\frac{z^2}{2} = -k\frac{x^2}{2} + C_1 \\ &\Longrightarrow z = \pm\sqrt{-\frac{k}{m}x^2 + C_1} \\ &\Longrightarrow x'(t) = \pm\sqrt{-\frac{k}{m}x^2 + C_1}. \end{aligned}$$

Debe ser $C_1 \geq 0$ de lo contrario el dominio de la función sería vacío. Nos queda una nueva ecuación para x'. Esta ecuación es en variables separables

$$\frac{dx}{\sqrt{-\frac{k}{m}x^2 + C_1}} = dt.$$

Integrando

$$\begin{aligned} t + C_2 &= \int \frac{dx}{\sqrt{-\frac{k}{m}x^2 + C_1}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{C_1}} \int \frac{dx}{\sqrt{-\frac{k}{C_1 m}x^2 + 1}} \\ &= \sqrt{\frac{m}{k}} \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \qquad \left(\text{haciendo } u = \sqrt{\frac{k}{C_1 m}}x\right) \\ &= \sqrt{\frac{m}{k}} \operatorname{arc\,sen} u. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} x = \frac{C_1 m}{k}u &= \frac{C_1 m}{k} \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}(t + C_2)\right) \\ &= \boxed{C_3 \operatorname{sen}\sqrt{\frac{k}{m}}t + C_4 \cos\sqrt{\frac{k}{m}}t}. \end{aligned}$$

Que es la solución general de la ecuación del oscilador armónico. Como vemos el movimiento es oscilatorio con frecuencia

$$\boxed{f = \sqrt{\frac{k}{m}}}.$$

En particular, no importan las condiciones iniciales, la frecuencia es siempre la misma.

10. EDP, método características

Saber resolver ecuaciones ordinarias de primer orden nos permite resolver algunas ecuaciones en derivadas parciales de primer orden. Vamos a exponer este punto a través del método de características.

Para tener un problema bien planteado con ecuaciones en derivadas parciales no es suficiente conocer el valor de la función en un punto (como en una EDO de primer orden). Una condición típica extra, para lograr este propósito, es consignar el valor de la función a lo largo de una curva, que por simplicidad asumiremos que es una recta .

Ejemplo 7.

$$\left.\begin{array}{l} a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = c(x,y,u) \\ u(x,0) = f(x) \end{array}\right\} \tag{28}$$

Aquí x, y son variables independientes y u dependiente. La primera línea es la ecución diferencial, que incluye derivadas parciales de la incognita y la segunda línea podemos denominarla condición inicial (pensando que la variable y representa tiempo).

El método de características consiste en encotrar u a lo largo de las soluciones de la EDO

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b(x,y)}{a(x,y)} \tag{29}$$

Una solución de esta ecuación es normalmente una curva en el plano x, y. La idea es que las soluciones de (29) forman un flia uniparamétrica de curvas que llena una gran parte Ω del plano x, y. Así terminamos conociendo el valor de u sobre este conjunto Ω. Para que (29) tenga sentido debemos tener $a \neq 0$. De todas formas si $a = 0$ podemos invertir los roles de x e y.

Supongamos $y(x)$ solución de (29), entonces pongamos por abuso de notación $u(x) = u(x, y(x))$. Se tiene que

$$\frac{du}{dx} = u_x + u_y y' = u_x + u_y \frac{b}{a} = \frac{c(x, y(x), u(x))}{a(x,y)} \tag{30}$$

Que es otra ecuación ordinaria. Podemos escribir (29) y (30) en una ecuación más simétrica

$$\frac{du}{c} = \frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} \tag{31}$$

Estas ecuaciones se llaman ecuaciones características. Las soluciones de estas ecuaciones son un familia de curvas que suele llenar un conjunto abierto de $\mathbb{R}^3$. La gráfica de la solución se obtiene eligiendo entre estas curvas las que pasan por los puntos de la gráfica de u especificados en la condición inicial, es decir $(x, 0, f(x))$. Esto, en los casos favorables, forma una superficie que es la gráfica de la solución. La proyección de estas curvas en el plano x, y se denominan caracterísitcas. Son la familia de soluciones de $y' = b/a$.

Ejemplo 8. Resolver

$$\left.\begin{array}{l} u_x + u_y = yu \\ u(x,0) = f(x) \end{array}\right\} \tag{32}$$

En este caso

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} \Rightarrow y' = 1 \Rightarrow y(x) = x + \mu, \quad \mu = \text{cte}.$$

Entonces

$$\frac{du}{dx} = \frac{c}{a} \Rightarrow u' = yu = (x+\mu)u \Rightarrow \ln|u| = \frac{x^2}{2} + \mu x + C(\mu).$$

Notar que la nueva constante de integración $C(\mu)$ debe depender de la primera μ. Entonces

$$u = \pm e^{\frac{x^2}{2}} e^{(y-x)x} e^{C(y-x)}.$$

Ahora

$$u(x,0) = f(x) \Rightarrow f(x) = \pm e^{\frac{x^2}{2}} e^{-x^2} e^{C(-x)} \Rightarrow C(\mu) = \frac{\mu^2}{2} + \ln|f(-\mu)|.$$

Entonces

$$u(x,y) = \pm e^{\frac{x^2}{2}} e^{(y-x)x} e^{\frac{(y-x)^2}{2} + \ln|f(x-y)|} = e^{\frac{y^2}{2}} f(x-y).$$