

# CAMBIOS DE VARIABLES, TEORÍA DE LIE Y EDO

Fernando Mazzone

Depto de Matemática  
Facultad de Ciencias Exactas Físico-Químicas y Naturales  
Universidad Nacional de Río Cuarto

26 de febrero de 2015



# DISTINTAS FORMAS PARA UNA ECUACIÓN

## ECUACIÓN DIFERENCIAL GENERAL DE PRIMER ORDEN

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (1)$$

## FORMA DIFERENCIAL

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (2)$$

La primera expresión es más asimétrica, entre las variables  $x$  e  $y$  una de ellas es independiente ( $x$ ) y la otra independiente ( $y$ ). La segunda expresión es más simétrica, las dos variables tienen el mismo estatus.

Las expresiones del tipo (2) representan un ente matemático importante llamado **forma diferencial**

## FORMAS DIFERENCIALES, IDEA SOMERA

- 1 Como los polinomios, las formas diferenciales tienen grado.
- 2 Dadas dos (pueden ser mas) variables  $x, y$  una 0-forma diferencial es una función  $g(x, y)$  de  $x, y$ .
- 3 La expresión (2) es una 1-forma diferencial.
- 4 Hay un operador llamado diferencial y denotado por  $d$ . Si  $\omega$  es una  $k$ -forma diferencial  $d\omega$  es una  $k + 1$  forma diferencial.
- 5 En el caso de 0-forma (función)  $g(x, y)$  el diferencial se define

$$dg = \frac{\partial M}{\partial x} dx + \frac{\partial N}{\partial y} dy.$$

Una  $k$ -forma diferencial se llama exacta cuando es el diferencial de una  $k - 1$ -forma.

# CAMBIOS DE VARIABLES

## IDEA BÁSICA

Supongamos la ecuación (1) o (2) en las variables  $x, y$ . La idea es encontrar nuevas variables  $\hat{x} = \hat{x}(x, y)$  y  $\hat{y} = \hat{y}(x, y)$  tales que la ecuación se transforme en una más sencilla de resolver.

## CÓMPUTOS DE CAMBIAMOS VARIABLES

**Cambio de la variable dependiente  $y = h(x, \hat{y})$  manteniendo la independiente**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial \hat{y}} \frac{d\hat{y}}{dx}. \quad (3)$$

La ecuación se convierte

$$\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial \hat{y}} \frac{d\hat{y}}{dx} = f(x, h(x, \hat{y})).$$

Que es una expresión sólo en  $\hat{y}$  y  $x$ . Parece más complicada, pero en un ejemplo concreto puede ser más simple.

## CÓMPUTOS DE CAMBIOS DE VARIABLES, EJEMPLO

**Ejemplo 1** Hacer el cambio de variable en la ecuación

$$y = \frac{e^{\hat{y}}}{x} \quad \text{en} \quad y' = [\ln(xy)]^2 xy - \frac{y}{x}. \quad (4)$$

1) Expresemos  $dy/dx$  sólo con  $x$ ,  $\hat{y}$  y  $d\hat{y}/dx$ .

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{e^{\hat{y}}}{x^2} + \frac{e^{\hat{y}}}{x} \frac{d\hat{y}}{dx}.$$

2) Remplacemos  $y'$  e  $y$  en la ecuación

$$-\frac{e^{\hat{y}}}{x^2} + \frac{e^{\hat{y}}}{x} \frac{d\hat{y}}{dx} = \left[ \ln \left( x \frac{e^{\hat{y}}}{x} \right) \right]^2 x \frac{e^{\hat{y}}}{x} - \frac{e^{\hat{y}}}{x}.$$

3) Simplifiquemos

$$\frac{d\hat{y}}{dx} = \hat{y}^2 x. \quad (5)$$

# CÓMPUTOS DE CAMBIOS DE VARIABLES, EJEMPLO

Lo podemos hacer con SymPy

```
from sympy import *  
x, y, y_n=symbols('x, y, y_n')  
y=Function('y')(x)  
y_n=Function('y_n')(x)  
y=exp(y_n)/x  
eq=Eq(y.diff(x)-(ln(x*y))**2*x*y+y/x, 0)  
simplify(eq)
```

Obtenemos la ecuación

$$\frac{1}{x} \left( -x \log^2 \left( e^{y_n(x)} \right) + \frac{d}{dx} y_n(x) \right) e^{y_n(x)} = 0$$

que SymPy no simplifica a nuestro gusto

# CÓMPUTOS DE CAMBIOS DE VARIABLES

**Cambio de la variable independiente  $\hat{x} = h(x)$  manteniendo la dependiente**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\hat{x}} \frac{d\hat{x}}{dx} = \frac{dy}{d\hat{x}} h'(x). \quad (6)$$

Suponiendo  $h$  biyectiva, la ecuación se convierte

$$\frac{dy}{d\hat{x}} h'(h^{-1}(\hat{x})) = f(h^{-1}(\hat{x}), y).$$

Que es una expresión sólo en  $\hat{x}$  e  $y$ .



## CÓMPUTOS DE CAMBIOS DE VARIABLES, EJEMPLO

**Ejemplo 2** Hacer el cambio de variable en la ecuación

$$x = \cos \hat{x} \quad \text{en} \quad -\frac{dy}{dx} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}y = 0. \quad (7)$$

1)  $h(x) = \arcsen x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\hat{x}} h'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{dy}{d\hat{x}}.$$

2) Remplacemos  $x$  e  $y'$  en la ecuación

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{dy}{d\hat{x}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} y = 0$$

3) Simplificando

$$\frac{dy}{d\hat{x}} + y = 0. \quad (8)$$

# CÓMPUTOS DE CAMBIOS DE VARIABLES, EJEMPLO

Lo podemos hacer con SymPy

```
from sympy import *  
x, x_n=symbols('x, x_n')  
x_n=acos(x)  
y=Function('y')(x_n)  
Ecuacion=-y.diff()+1/(sqrt(1-x**2))*y
```

Obtenemos la ecuación

$$\frac{1}{\sqrt{-x^2 + 1}} \left( y(\operatorname{acos}(x)) + \frac{d}{d\xi_1} y(\xi_1) \Big|_{\xi_1=\operatorname{acos}(x)} \right) = 0$$

Nuevamente SymPy no simplifica a nuestro gusto

# CAMBIOS DE VARIABLES

**Cambio de variable general**  $\hat{x} = \hat{x}(x, y)$ ,  $\hat{y} = \hat{y}(x, y)$

1) Calculamos  $d\hat{y}/d\hat{x}$  en las variables  $x, y$

$$\frac{d\hat{y}}{d\hat{x}} = \frac{\frac{d\hat{y}}{dx}}{\frac{d\hat{x}}{dx}} = \frac{\frac{\partial \hat{y}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{y}}{\partial y} y'}{\frac{\partial \hat{x}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{x}}{\partial y} y'} = \frac{\frac{\partial \hat{y}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{y}}{\partial y} f(x, y)}{\frac{\partial \hat{x}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{x}}{\partial y} f(x, y)}. \quad (9)$$

2) En la expresión resultante sustituir  $x, y$  por las transformaciones inversas  $x = x(\hat{x}, \hat{y})$  y  $y = y(\hat{x}, \hat{y})$

## CAMBIOS DE VARIABLES

**Ejemplo 3. Transformar a polares:**  $\frac{dy}{dx} = \frac{y^3+x^2y-x-y}{x^3+xy^2-x+y}$ .

Dado que el cálculo es extenso lo haremos sólo con SymPy

```
from sympy import *
x=symbols('x')
y=Function('y')(x)
r=sqrt(x**2+y**2)
theta=atan(y/x)
Expr2=r.diff(x)/theta.diff(x)
Expr3=Expr2.subs(y.diff(x), \
(y**3+x**2*y-x-y)/(x**3+x*y**2-x+y))
r,theta=symbols('r,theta',positive=True)
Expr4=Expr3.subs([(y,r*sin(theta)), \
(x,r*cos(theta))])
Expr5=simplify(Expr4)
```

## CAMBIOS DE VARIABLES

Encontramos que en polares la ecuación es mucho más simple

$$\frac{dr}{d\theta} = -r^3 + r. \quad (10)$$

Quizás usar la notación como forma diferencial sea más efectivo. Como  $r$  y  $\theta$  son funciones de  $x$  e  $y$ , ellas son 0-formas. Usando las reglas de la diferencial, hay que reemplazar

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta; & dx &= \cos \theta dr - \sin \theta r d\theta \\ y &= r \sin \theta; & dy &= \sin \theta dr + \cos \theta r d\theta \end{aligned} \quad (11)$$

en la 1-forma:

$$(y^3 + x^2y - x - y)dx - (x^3 + xy^2 - x + y)dy \quad (12)$$

## SAGE Y FORMAS DIFERENCIALES

Encontramos a SAGE más cómodo para operar con formas diferenciales que SymPy

```
sage: r,theta=var('r,theta') 1
sage: U = CoordinatePatch((r,theta)) 2
sage: F = DifferentialForms(U) 3
sage: x= DifferentialForm(F, 0, r*cos(theta)) 4
sage: y= DifferentialForm(F, 0, r*sin(theta)) 5
sage: w=(x^3+x*y^2-x*y)*y.diff()-(y^3+x^2*y-x- 6
      y)*x.diff()
sage: w[0].simplify_full() 7
r 8
sage: w[1].simplify_full() 9
r^4 - r^2 10
```

La forma obtenida es  $rdr + (r^4 - r^2)d\theta$ .

# GRUPOS, REPASO

## GRUPOS

Sean  $G$  un conjunto y  $\alpha$  una función tal que  $\alpha : G \times G \rightarrow G$ . En el contexto de grupos es más usual la notación  $\alpha(g_1, g_2) = g_1 g_2$ . El par  $(G, \alpha)$  se llama un grupo si se satisface

- ❶  $(g_1 g_2) g_3 = g_1 (g_2 g_3)$ , para todos  $g_1, g_2, g_3 \in G$ ,
- ❷ Existe  $e \in G$  tal que  $eg = ge = g$ , para todo  $g \in G$ .
- ❸ Para todo  $g \in G$  existe  $h \in G$  tal que  $gh = hg = e$ . Se acostumbra denotar  $h = g^{-1}$ .

## EJEMPLOS DE GRUPOS

**Ejemplo 1** Sea  $\Pi$  un plano euclideo y  $G$  el conjunto de todas las transformaciones rígidas de  $\Pi$  en si mismo. Entonces  $G$  es un grupo con la operación de composición. Se llama el **grupo de transformaciones rígidas**

**Ejemplo 2** Sea  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  un conjunto de  $n$  elementos y  $S_n$  definido por

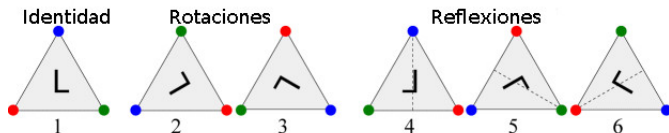
$$S_n = \{\sigma | \sigma : X \rightarrow X \text{ y } \sigma \text{ es biyectiva} \}$$

Entonces  $S_n$  es un grupo con la operación de composición. Se denomina **grupo simétrico**



# EJEMPLOS DE GRUPOS

**Ejemplo 3** Sea  $\Delta$  un polígono regular de  $n$  lados en un plano euclideo  $\Pi$  y  $D_{2n}$  el conjunto de todas las transformaciones rígidas de  $\Pi$  en si mismo que llevan  $\Delta$  en si mismo.  $D_{2n}$  se llama el **grupo diedral** de orden  $2n$ . Para un triángulo equilátero:



# TEORÍA DE GRUPOS COMPUTACIONAL: SAGE Y GAP

**GAP - Groups, Algorithms, Programming** Lenguaje de programación para álgebra discreta

**SAGE:** es un sistema de software de matemáticas libre de código abierto bajo la licencia GPL. Se basa en muchos paquetes de código abierto existentes: NumPy, SciPy, matplotlib, SymPy, Maxima, GAP, FLINT, R y muchos más. Acceda a su poder combinado a través de un lenguaje común, basado en Python  
Misión: Creación de una alternativa libre de código abierto viable a Magma, Maple, Mathematica y Matlab.

# TEORÍA DE GRUPOS COMPUTACIONAL: SAGE Y GAP

<b>sage:</b> <code>G=SymmetricGroup(5)</code>	11
<b>sage:</b> <code>sigma=G([(1,2,3),(4,5)])</code>	12
<b>sage:</b> <code>sigma^2</code>	13
<code>(1,3,2)</code>	14
<b>sage:</b> <code>sigma^3</code>	15
<code>(4,5)</code>	16
<b>sage:</b> <code>sigma^6</code>	17
<code>()</code>	18
<b>sage:</b> <code>G.order()</code>	19
<code>120</code>	20
<b>sage:</b> <code>H=G.subgroup([sigma])</code>	21
<b>sage:</b> <code>H.order()</code>	22
<code>6</code>	23

# TEORÍA DE GRUPOS COMPUTACIONAL: SAGE Y GAP

<b>sage:</b> <code>H.list()</code>	24
<code>[(), (4,5), (1,2,3), (1,2,3)(4,5), (1,3,2),</code>	25
<code>(1,3,2)(4,5)]</code>	
<b>sage:</b> <code>H.is_normal()</code>	26
<code>False</code>	27
<b>sage:</b> <code>G1=DihedralGroup(3)</code>	28
<b>sage:</b> <code>G1[-2]</code>	29
<code>(1,3,2)</code>	30
<b>sage:</b> <code>H1=G1.subgroup(G1[-2])</code>	31
<b>sage:</b> <code>H1.is_normal()</code>	32
<code>True</code>	33
<b>sage:</b> <code>G1.quotient(H1)</code>	34
<code>Permutation Group with generators [(1,2)]</code>	35

# GRUPOS DE SIMETRÍAS

## GRUPOS DE SIMETRÍAS

Los cambios de variables de un conjunto de dos variables, digamos  $x$  e  $y$ , son funciones  $\Gamma$ , invertibles, de clase  $C^\infty$ , donde  $\Gamma : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ , con  $\Omega_1, \Omega_2$  abiertos de  $\mathbb{R}^2$ .

Acostumbraremos escribir  $(\hat{x}, \hat{y}) = \Gamma(x, y)$  y diremos que  $(\hat{x}, \hat{y})$  son las variables nuevas e  $(x, y)$  las viejas.

Llamaremos  $\mathcal{T}$  al conjunto de todos los cambios de variables  $\Gamma$ . El conjunto  $\mathcal{T}$  tiene una estructura de grupo con la operación de composición.

El grupo de las transformaciones rígidas, los grupos diedrales  $D_{2n}$ , el grupo de todas las rotaciones alrededor del origen son subgrupos de  $\mathcal{T}$ .

## GRUPOS DE SIMETRÍAS, EJEMPLOS

**Ejemplo, polares:** Es más fácil describir la transformación que lleva coordenadas polares en cartesianas. En este caso  $(x, y) = \Gamma(r, \theta)$  y

$$\begin{aligned}\Gamma(r, \theta) &= (r \cos(\theta), r \sin(\theta)), \\ \Omega_1 &= (0, \infty) \times (-\pi, \pi), \\ \Omega_2 &= \mathbb{R}^2 - \{(x, y) | y = 0, x \leq 0\}\end{aligned}$$

# GRUPOS DE LIE UNIPARAMÉTRICOS

## GRUPOS UNIPARAMÉTRICOS DE SIMETRÍAS

Sea  $\mathcal{T}$  el grupo de cambios de variables. Supongamos dado un homomorfismo de grupos  $\Gamma : (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathcal{T}, \circ)$ .

### Notación:

- 1 Para  $\varepsilon \in \mathbb{R}$  escribiremos  $\Gamma_\varepsilon = \Gamma(\varepsilon)$
- 2 Si  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  escribimos  $(\hat{x}, \hat{y}) = \Gamma_\varepsilon(x, y)$ . Notar que  $\hat{x}, \hat{y}$  son funciones de  $x, y$  y  $\varepsilon$ .

Si  $\Gamma_\varepsilon(x, y)$  es diferenciable, con inversa diferenciable, respecto a  $(x, y)$  y analítica respecto a  $\varepsilon$  diremos que  $\{\Gamma_\varepsilon | \varepsilon \in \mathbb{R}\}$  es un grupo de Lie uniparamétrico de simetrías.

# GRUPOS DE LIE UNIPARAMÉTRICOS

## PROPIEDADES DE $\Gamma_\varepsilon$

- 1  $\Gamma_\varepsilon$  es biyectiva y diferenciable sobre su dominio de definición.
- 2  $\Gamma_{\varepsilon_1} \circ \Gamma_{\varepsilon_2} = \Gamma_{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}$ .
- 3  $\Gamma_0 = I$ .
- 4  $(\Gamma_\varepsilon)^{-1} = \Gamma_{-\varepsilon}$
- 5 Si  $\Gamma_\varepsilon(x, y) = (\hat{x}, \hat{y})$ , entonces  $\hat{x}(x, y, \varepsilon)$  y  $\hat{y}(x, y, \varepsilon)$  son diferenciables respecto  $(x, y)$  y se desarrollan en serie de potencias respecto a  $\varepsilon$ . Es decir para todo  $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\hat{x}(x, y, \varepsilon) &= a_0(x, y) + a_1(x, y)(\varepsilon - \varepsilon_0) + \cdots \\ \hat{y}(x, y, \varepsilon) &= b_0(x, y) + b_1(x, y)(\varepsilon - \varepsilon_0) + \cdots\end{aligned}$$



# EJEMPLOS GRUPOS DE LIE UNIPARAMÉTRICOS

**Ejercicio:** Demostrar que las siguientes aplicaciones inducen grupos de Lie uniparamétricos

❶  $\Gamma_\varepsilon(x, y) = (x + \varepsilon, y)$  y  $\Gamma_\varepsilon(x, y) = (x, y + \varepsilon)$ .

❷  $\Gamma_\varepsilon(x, y) = (e^\varepsilon x, y)$

❸  $\Gamma_\varepsilon(x, y) = \left( \frac{x}{1-\varepsilon x}, \frac{y}{1-\varepsilon x} \right)$

❹  $\Gamma_\varepsilon(x, y) = \begin{pmatrix} \cos(\varepsilon) & -\sin(\varepsilon) \\ \sin(\varepsilon) & \cos(\varepsilon) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

# GRUPO DE SIMETRÍAS DE UNA ECUACIÓN

## DEFINICIÓN

Consideremos una ecuación

$$y' = f(x, y). \quad (13)$$

Una transformación  $\Gamma \in \mathcal{T}$  se denomina una simetría de la ecuación si el cambio de variables dado por  $(\hat{x}, \hat{y}) = \Gamma(x, y)$  deja invariante la ecuación.

El conjunto de todas las simetrías de una ecuación es un subgrupo de  $(\mathcal{T}, \circ)$ . Lo llamaremos **grupo de simetrías** de la ecuación.

## GRUPO DE SIMETRÍAS DE UNA ECUACIÓN

De acuerdo con (9) para que  $(\hat{x}, \hat{y}) = \Gamma(x, y)$  sea una simetría de (13) se debe cumplir que

$$\frac{\frac{\partial \hat{y}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{y}}{\partial y} f(x, y)}{\frac{\partial \hat{x}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{x}}{\partial y} f(x, y)} = f(\hat{x}, \hat{y}) \quad (14)$$

Esta ecuación se llama **condición de simetría**. Es una ecuación en derivadas parciales, en principio más compleja que la ecuación original. Tiene varios grados de libertad, por lo que suele haber muchas simetrías. Es común que encontremos soluciones a través de **ansatz**.

## EJEMPLOS SIMETRÍAS ECUACIONES

Consideremos la ecuación

$$y' = 0 \quad (15)$$

La condición de simetría se reduce a

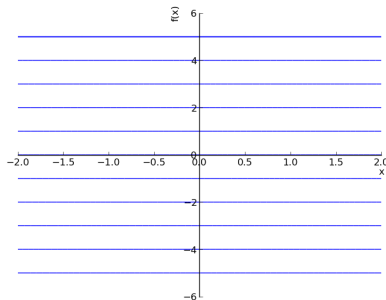
$$\frac{\frac{\partial \hat{y}}{\partial x}}{\frac{\partial \hat{x}}{\partial x}} = 0$$

Debemos tener que  $\frac{\partial \hat{y}}{\partial x} = 0$ . Vale decir  $\hat{y}$  es independiente de  $x$ . La forma general de una simetría es

$$\hat{x} = \hat{x}(x, y) \quad \hat{y} = \hat{y}(y). \quad (16)$$

# EJEMPLOS SIMETRÍAS ECUACIONES

Hay muchas simetrías. Las traslaciones en cualquier dirección  $(x, y) \mapsto (x + \alpha, y + \beta)$  ( $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ). Cambios de escala en ambos ejes  $(x, y) \mapsto (e^\varepsilon x, y)$ ,  $(x, y) \mapsto (x, e^\varepsilon y)$ . Reflexiones respecto ambos ejes  $(x, y) \mapsto (-x, y)$ ,  $(x, y) \mapsto (x, -y)$ . Observar que el gráfico de las soluciones posee las mismas simetrías, pues en general las simetrías de una ecuación llevan soluciones en soluciones.



# SIMETRÍAS TRIVIALES

De todas las simetrías encontradas  $\Gamma_\varepsilon(x, y) = (e^\varepsilon x, y)$ ,  $\Gamma_\varepsilon(x, y) = (x + \varepsilon, y)$  y  $\Gamma_\varepsilon(x, y) = (x, y + \varepsilon)$  se llaman **triviales** pues llevan una curva solución en si misma. Cualquier cambio de la forma  $\hat{x} = \hat{x}(x, y)$   $\hat{y} = y$  es trivial.

**Estamos interesados en hallar grupos de Lie uniparamétricos de simetrías no triviales.**

## SIMETRÍAS TRIVIALES

Las reflexiones  $\Gamma(x, y) = (-x, y)$  no pertenecen a tal tipo de grupo. Para demostrar esto supongamos que  $\Gamma$  es alguna instancia de un tal grupo  $\Gamma_\varepsilon$ , supongamos por ejemplo que  $\Gamma = \Gamma_{\varepsilon_0}$ . Consideramos el jacobiano de la transformación:

$$J(\varepsilon) := \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} & \frac{\partial \hat{x}}{\partial y} \\ \frac{\partial \hat{y}}{\partial x} & \frac{\partial \hat{y}}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Tenemos que  $J(0) = 1$  y  $J(\varepsilon_0) = -1$ . Y  $J(\varepsilon)$  es continua respecto a  $\varepsilon$ . Por ende existiría  $\varepsilon'$  con  $J(\varepsilon') = 0$ . Esto implica que la matriz jacobiana  $D\Gamma$  es singular y esto contradice que  $\Gamma : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  es difeomorfismo ( $D\Gamma D\Gamma^{-1} = I$ ).

$\Gamma$  genera un grupo discreto, ya que  $\Gamma^2 = \Gamma \circ \Gamma = I$ . Luego  $\Gamma$  genera el grupo  $G = \{I, \Gamma\}$  que es isomorfo a  $\mathbb{Z}_2$ . En este caso diremos que  $\{I, \Gamma\}$  es un **grupo discreto** de simetrías.

## EJEMPLO DE SIMETRÍAS

**Ejemplo: hallar simetrías de**

$$\frac{dy}{dx} = f(x).$$

De acuerdo con (9) se debe cumplir que

$$\frac{\frac{\partial \hat{y}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{y}}{\partial y} f(x)}{\frac{\partial \hat{x}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{x}}{\partial y} f(x)} = f(\hat{x})$$

La forma de la ecuación sugiere el **ansatz**

$$\boxed{\hat{x} = x}, \quad \frac{\partial \hat{y}}{\partial x} = \frac{\partial \hat{x}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \hat{y}}{\partial y} = \frac{\partial \hat{x}}{\partial x}.$$

Luego

$$\frac{\partial \hat{y}}{\partial y} = 1 \Rightarrow \boxed{\hat{y} = y + \varepsilon}$$

con  $\varepsilon$  constante arbitraria.



## EJEMPLO DE SIMETRÍAS

Hallamos que

$$\Gamma_{\varepsilon}(x, y) = (x, y + \varepsilon)$$

es un grupo de Lie uniparamétrico de simetrías. De manera similar

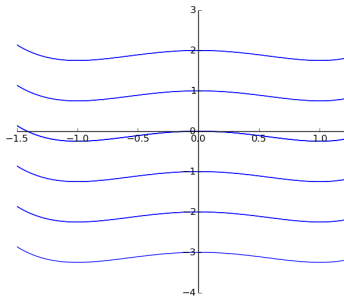
$$\Gamma_{\varepsilon}(x, y) = (x + \varepsilon, y)$$

es un grupo uniparamétrico de simetrías para

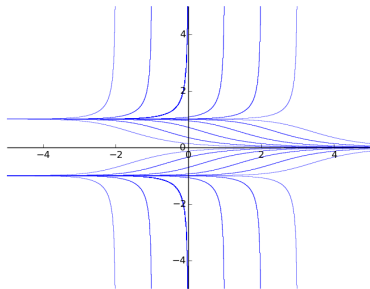
$$\frac{dy}{dx} = f(y).$$

Geoméricamente en el primer caso todas las soluciones se obtienen trasladando una cualquiera verticalmente y en el segundo caso horizontalmente.

# EJEMPLO DE SIMETRÍAS



Soluciones de  $y' = x^3 - x$



Soluciones de  $y' = y^3 - y$

## EJEMPLO DE SIMETRÍAS

**Demostrar que las rotaciones alrededor del origen es un grupo de Lie uniparamétrico de simetrías de**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^3 + x^2y - x - y}{x^3 + xy^2 - x + y}.$$

Sea  $\Gamma_\varepsilon$  la transformación que rota un ángulo  $\varepsilon$  alrededor del origen. Era un ejercicio demostrar que  $\{\Gamma_\varepsilon | \varepsilon \in \mathbb{R}\}$  es un grupo uniparamétrico de simetrías. Se tiene la representación matricial

$$\Gamma_\varepsilon(x, y) = \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varepsilon) & -\operatorname{sen}(\varepsilon) \\ \operatorname{sen}(\varepsilon) & \cos(\varepsilon) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Gamma_\varepsilon^{-1}(\hat{x}, \hat{y}) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varepsilon) & \operatorname{sen}(\varepsilon) \\ -\operatorname{sen}(\varepsilon) & \cos(\varepsilon) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix}$$

## EJEMPLO DE SIMETRÍAS

Para el cálculo recurrimos a SymPy (usamos  $x_n$  en lugar de  $\hat{x}$ )

```
from sympy import *
x, theta = symbols('x, theta')
y = Function('y')(x)
x_n = cos(theta) * x - sin(theta) * y
y_n = sin(theta) * x + cos(theta) * y
Expr2 = y_n.diff(x) / x_n.diff(x)
Expr3 = Expr2.subs(y.diff(), \
    (y**3 + x**2 * y - x - y) / (x**3 + x * y**2 - x + y))
x_n, y_n = symbols('x_n, y_n')
Expr4 = Expr3.subs([(y, -sin(theta) * x_n + cos(theta) * y_n),
    (x, cos(theta) * x_n + sin(theta) * y_n)])
Expr5 = simplify(Expr4)
```

## EJEMPLO DE SIMETRÍAS

Tiene problemas para simplificar, lo tenemos que ayudar

```
Expr6=Expr5.subs(sin(2*theta + pi/4),\  
sin(2*theta)*sqrt(2)+cos(2*theta)*sqrt(2))  
Expr7=Expr6.subs(cos(2*theta),\  
1+(cos(theta))**2)  
Expr8=Expr7.subs(cos(2*theta),\  
1+(cos(theta))**2)  
Expr9=Expr8.subs(sin(2*theta),\  
1-(cos(theta))**2)
```

La ecuación resultante es **la misma**

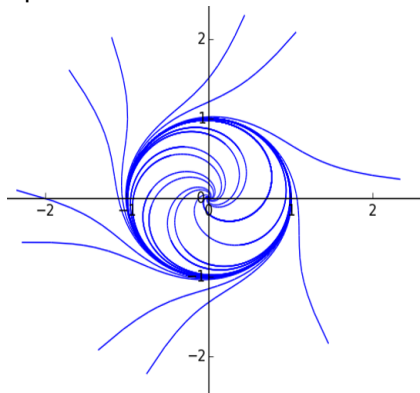
$$\frac{dy_n}{dx_n} = \frac{\eta^3 + \eta\xi^2 - \eta - \xi}{\eta^2\xi + \eta + \xi^3 - \xi}. \quad (17)$$

## EJEMPLO DE SIMETRÍAS

A la misma conclusión arribábamos si recordábamos que en coordenadas polares la ecuación se escribe

$$\frac{dr}{d\theta} = r - r^3,$$

y que esta ecuación tiene las simetrías  $\Gamma_\varepsilon : (r, \theta) \mapsto (r, \theta + \varepsilon)$ .



Si rotamos un ángulo fijo el gráfico de una solución obtenemos el gráfico de otra solución.

## SIMETRÍAS RESUELVEN ECUACIONES

**Ejemplo:** Supongamos que  $y' = f(x, y)$  tiene el grupo de Lie uniparamétrico de simetrías

$$(\hat{x}, \hat{y}) = \Gamma_\varepsilon(x, y) = (x, y + \varepsilon) \quad (18)$$

Usando la condición de simetrías (14) tenemos

$$f(x, y) = f(\hat{x}, \hat{y}) = f(x, y + \varepsilon).$$

Luego

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \varepsilon) - f(x, y)}{\varepsilon} = 0$$

Así  $f$  es independiente de  $y$ :  $f(x, y) = f(x)$  y la ecuación

$$y' = f(x),$$

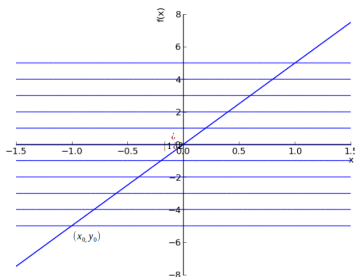
se resuelve simplemente integrando.

# ÓRBITAS

## DEFINICIÓN

Dado un grupo uniparamétrico de simetrías  $G = \{\Gamma_\varepsilon | \varepsilon \in \mathbb{R}\}$ , y  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  llamamos **órbita  $(x_0, y_0)$  bajo la acción de  $G$**  (simplemente órbita si es claro quien es  $G$ ) a la curva

$$\{\Gamma_\varepsilon(x_0, y_0) | \varepsilon \in \mathbb{R}\}$$



Si  $G$  es un grupo de simetrías no trivial, entonces es de esperar que la órbita de  $(x_0, y_0)$  cruce transversalmente las curvas solución. La órbita se usará como una nueva coordenada.



# ÓRBITAS

La órbita a través de  $(x, y)$  es el conjunto de puntos de coordenadas

$$(\hat{x}(x, y, \varepsilon), \hat{y}(x, y, \varepsilon)) = \Gamma_\varepsilon(x, y), \quad (19)$$

donde

$$(\hat{x}(x, y, 0), \hat{y}(x, y, 0)) = (x, y).$$

(19) son ecuaciones paramétricas (parámetro  $\varepsilon$ ) de una curva en el plano.

## PUNTOS INVARIANTES

Un punto  $(x, y)$  se llama invariante si su órbita se reduce a  $\{(x, y)\}$ , vale decir

$$(x, y) = \Gamma_\varepsilon(x, y), \quad \forall \varepsilon > 0$$

**Ejemplo:** La órbita de  $(x, y)$  bajo la acción del grupo de Lie uniparamétrico

$$\Gamma_{\varepsilon}(x, y) = \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varepsilon) & -\operatorname{sen}(\varepsilon) \\ \operatorname{sen}(\varepsilon) & \cos(\varepsilon) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Son circunsferencias con centro en el origen. El punto  $(0, 0)$  es invariante.

# CAMPO VECTORIAL DE TANGENTES

## DEFINICIÓN

Dado un grupo de Lie uniparamétrico  $(\hat{x}(x, y, \varepsilon), \hat{y}(x, y, \varepsilon)) = \Gamma_\varepsilon(x, y)$  definimos el campo vectorial

$$(\xi(\hat{x}, \hat{y}), \eta(\hat{x}, \hat{y})) = \left( \left. \frac{d\hat{x}}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}, \left. \frac{d\hat{y}}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \right)$$

$\xi$  y  $\eta$  se llaman **símbolos infinitesimales**.

Como  $\hat{x}, \hat{y}$  eran analíticas respecto a  $\varepsilon$  :

$$\begin{aligned}\hat{x} &= x + \varepsilon \xi(x, y) + O(\varepsilon^2) \\ \hat{y} &= y + \varepsilon \eta(x, y) + O(\varepsilon^2)\end{aligned}$$

En un punto invariante  $\xi(x, y) = \eta(x, y) = 0$ .

## CAMPO VECTORIAL DE TANGENTES

```
x,y,epsilon = var('x,y,epsilon')
x_n=cos(epsilon)*x-sin(epsilon)*y
y_n=sin(epsilon)*x+cos(epsilon)*y
xi=x_n.diff(epsilon)(epsilon=0)
eta=y_n.diff(epsilon)(epsilon=0)
p=plot([])
for x_abs in srange(0,1,.2):
    p+=parametric_plot([x_n(x=x_abs,y=0),\
y_n(x=x_abs,y=0)], (epsilon,0,2*pi))
p+= plot_vector_field((xi,eta),(x,-1,1),\
(y,-1,1))
```

# CAMPO VECTORIAL DE TANGENTES



??

# CURVAS INVARIANTES

## DEFINICIÓN

Una curva plana  $C$  se dice invariante por un grupo uniparamétrico de simetrías de Lie si y sólo si la tangente a  $C$  en cada punto  $(x, y)$  es paralela a  $(\xi(x, y), \eta(x, y))$ . Si  $C$  es el gráfico de una función  $x \mapsto y(x)$ , como  $(1, y'(x))$  es un vector tangente a la gráfica, la condición que  $C$  es invariante se escribe

$$Q(x, y, y') \stackrel{\text{def}}{=} \eta(x, y) - y'\xi(x, y) \equiv 0 \quad (20)$$

Esta se llama **ecuación característica**.

# CURVAS INVARIANTES

## SOLUCIONES INVARIANTES

Si  $\Gamma_\varepsilon$  es un grupo de Lie de simetrías de  $y' = f(x, y)$  entonces una solución  $y(x)$  es una curva invariante si y sólo si

$$\overline{Q}(x, y) = \eta(x, y) - f(x, y)\xi(x, y) \equiv 0 \quad (21)$$

Se llaman **ecuación característica reducida**.

**Nos conviene tener soluciones no invariantes**

## EJEMPLOS

**Ejemplo:** La EDO

$$y' = y$$

Tiene simetrías de escala

$$(\hat{x}, \hat{y}) = \Gamma_{\varepsilon}(x, y) = (x, e^{\varepsilon} y).$$

Luego

$$(\xi, \eta) = \left( \left. \frac{d\hat{x}}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}, \left. \frac{d\hat{y}}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \right) = (0, y)$$

El conjunto de puntos donde  $y = 0$  es invariante. La ecuación característica reducida es.

$$\overline{Q}(x, y) = 0 \Rightarrow y = 0$$

Esta formada enteramente por puntos invariantes.



## EJEMPLOS

**Ejercicio:** demostrar que la siguiente expresión es un grupo de Lie uniparamétrico de simetrías

$$(\hat{x}, \hat{y}) = \Gamma_\varepsilon(x, y) = (e^\varepsilon x, e^{(e^\varepsilon - 1)x} y).$$

Para este grupo tenemos

$$(\xi, \eta) = (x, xy)$$

Todo punto en  $x = 0$  es invariante. La ecuación característica reducida es

$$\overline{Q}(x, y) = 0 \Rightarrow xy - xy = 0$$

De modo que estas simetrías actúan trivialmente sobre las soluciones. Llevan una solución en sí misma. Chequeemos esta afirmación de manera directa.

## EJEMPLOS

Buscamos el cambio de variables inverso

$$\left. \begin{aligned} \hat{x} &= e^{\varepsilon} x \\ \hat{y} &= e^{(e^{\varepsilon}-1)x} y \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} x &= e^{-\varepsilon} \hat{x} \\ y &= e^{(e^{-\varepsilon}-1)\hat{x}} \hat{y} \end{aligned} \right\}$$

Las soluciones son  $y = ke^x$ , sustituímos en esta expresión, luego de unas operaciones, llegamos a  $\hat{y} = ke^{\hat{x}}$ .

## EJEMPLOS

**Ejemplo.** La ecuación de Riccati

$$y' = xy^2 - \frac{2y}{x} - \frac{1}{x^3}, \quad x \neq 0$$

Tiene el grupo de Lie de simetrías

$$(\hat{x}, \hat{y}) = \Gamma_\varepsilon(x, y) = (e^\varepsilon x, e^{-2\varepsilon} y).$$

Tenemos

$$(\xi, \eta) = (x, -2y).$$

La característica reducida

$$\overline{Q}(x, y) = \frac{1}{x^2} - x^2 y^2 = 0.$$

Tenemos dos soluciones invariantes

$$y = \pm \frac{1}{x^2}.$$

## UNA OBSERVACIÓN

La mayoría de los métodos de simetría usan los infinitesimales  $(\xi, \eta)$  en lugar de las simetrías en si mismas. No obstante  $(\xi, \eta)$  determinan las simetrías a través de las ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \frac{d\hat{x}}{d\varepsilon} & = & \xi(\hat{x}, \hat{y}) \\ \frac{d\hat{y}}{d\varepsilon} & = & \eta(\hat{x}, \hat{y}) \\ \hat{x}(x, y, 0) & = & x \\ \hat{y}(x, y, 0) & = & y \end{array} \right.$$

**Ejemplo:** Estas ecuaciones pueden ser difíciles de resolver. Pero en algunos casos sencillos puede ser fácil. Supongamos dado  $(\xi, \eta) = (0, y)$ . Las ecuaciones implican  $\hat{x}$  independiente de  $\varepsilon$ . Luego  $\hat{x} = A(x, y)$  es función de  $x, y$  solo. Además para  $\hat{y}$  tenemos  $\hat{y} = B(x, y)e^\varepsilon$ . Las condiciones iniciales implican  $A(x, y) = x$  y  $B(x, y) = y$ .

# COORDENADAS CANÓNICAS

## DEFINICIÓN

Diremos que las coordenadas  $(r, s)$  son canónicas respecto a el grupo de Lie de simetrías  $\Gamma_\varepsilon$  si en las coordenadas  $(r, s)$  la acción de grupo es la traslación

$$(\hat{r}, \hat{s}) \stackrel{\text{def}}{=} (r(\hat{x}, \hat{y}), s(\hat{x}, \hat{y})) = (r(x, y), s(x, y) + \varepsilon). \quad (22)$$

**Ejemplo:** Las coordenadas polares son canónicas respecto al grupo de Lie de rotaciones. Las rotaciones en coordenadas cartesianas y polares se escriben

$$\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varepsilon) & -\sin(\varepsilon) \\ \sin(\varepsilon) & \cos(\varepsilon) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} \hat{r} &= r \\ \hat{\theta} &= \theta + \varepsilon \end{aligned}$$

# COORDENADAS CANÓNICAS

Derivando las ecuaciones (22) respecto a  $\varepsilon$  obtenemos

$$\begin{aligned}\xi(x, y) \frac{\partial r}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial r}{\partial y} &= 0 \\ \xi(x, y) \frac{\partial s}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial s}{\partial y} &= 1\end{aligned}\tag{23}$$

Los cambios de coordenadas deben ser invertibles, de modo que pediremos la condición de no degeneración

$$\frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial y} - \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial s}{\partial x} \neq 0\tag{24}$$

## EXTENSIÓN DEFINICIÓN

Cualquier par de coordenadas que satisfacen (23) y (24) se llaman canónicas.

# COORDENADAS CANÓNICAS

## OBSERVACIONES

- 1 El vector tangente en cualquier punto no invariante es paralelo a la curva  $r = \text{cte}$  que pasa por ese punto. Luego esa curva es una órbita. Las órbitas son invariantes, así  $r$  se llama la **coordenada invariante**. Las curvas  $s = \text{cte}$  son transversales a las órbitas.
- 2 Las coordenadas canónicas no están definidas en un punto  $(x, y)$  invariante pues en esos puntos  $\xi(x, y) = \eta(x, y) = 0$ .
- 3 Las coordenadas canónicas están definidas en un entorno de cualquier punto no invariante.
- 4 Las coordenadas canónicas no son únicas. De hecho si  $(r, s)$  son canónicas  $(\tilde{r}, \tilde{s}) = (F(r), G(r) + s)$  lo son para cualquier  $F$  y  $G$  con  $F'(r) \neq 0$  para la no degeneración.

# ENCONTRANDO COORDENADAS CANÓNICAS

## INTEGRALES PRIMERAS

Una integral primera de la EDO  $y' = f(x, y)$  es una función  $\phi(x, y)$  que es constante a lo largo de una curva solución de la EDO.

## TEOREMA

Si  $(r, s)$  son coordenadas canónicas de una grupo de Lie de simetrías entonces  $r$  es una integral primera de la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\eta(x, y)}{\xi(x, y)}. \quad (25)$$



## ENCONTRANDO COORDENADAS CANÓNICAS

**Dem.** Supongamos  $y(x)$  solución de la EDO, es suficiente demostrar que  $\frac{d}{dx}r(x, y(x)) = 0$ . En efecto

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}r(x, y(x)) &= \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial s}{\partial y}y' && \text{(regla cadena)} \\ &= \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial s}{\partial y} \frac{\eta(x,y)}{\xi(x,y)} && \text{(Ec. (25))} \\ &= 0 && \text{(Ec. (23))}\end{aligned}$$

## ENCONTRANDO COORDENADAS CANÓNICAS

Hallar una integral primera implica resolver la ecuación.

**Ejemplo** Ya conocemos las coordenadas canónicas de las rotaciones,

$$\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varepsilon) & -\sin(\varepsilon) \\ \sin(\varepsilon) & \cos(\varepsilon) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

hallemosla por el método propuesto. Hay que resolver

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \Rightarrow ydy = -xdx \Rightarrow y^2 + x^2 = C$$

Luego  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  es una integral primera.