Introducción y motivaciones del cálculo de variaciones

Fernando Mazzone

Dpto de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas Físico-Químicas y Naturales
Universidad Nacional de Río Cuarto Dpto de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad Nacional de La Pampa
CONICET

31 de julio de 2015

Índice

Índice

Ecuaciones de Newton

Sistema mecánico: n-puntos masa en un espacio euclideano tridimensional. Supuesto un sistema de coordenadas cartesiano, sean $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n \in \mathbb{R}^3$ las coordenadas de los puntos masa, $\boldsymbol{x}_i = (x_{i,1}, x_{i,2}, x_{i,3})$, $i = 1, \ldots, n$. Vamos a poner $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n) \in \mathbb{R}^{3n}$. Las variables $\boldsymbol{x}_i$ dependen del tiempo t. A la función $t \mapsto \boldsymbol{x}(t)$ la denominamos un movimiento.
Fuerzas: Supongamos que actúan fuerzas $\boldsymbol{f}_i = \boldsymbol{f}_i(t, \boldsymbol{x}(t), \dot{\boldsymbol{x}}(t))$ sobre cada masa m_i.

Leyes de movimiento de Newton

Suponiendo que el sistema satisface la segunda ley de Newton.

$$m_i \ddot{\boldsymbol{x}}_i = \boldsymbol{f}_i, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

SISTEMAS CONSERVATIVOS

DEFINICIÓN

El sistema se llama conservativo si existe una función $U = U(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, con $U : \mathbb{R}^{3n} \times \mathbb{R}^{3n} \to \mathbb{R}$ tal que

$$\boldsymbol{f}_i = \boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}) = -\left.\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{x}_i}\right|_{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}})}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

El signo menos en el segundo miembro es sólo una convención.
Las derivadas del miembro de la derecha en (2) hay que entenderlas como que presuponen las tres identidades escalares

$$f_{i,j}(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}) = \left.\frac{\partial U}{\partial x_{i,j}}\right|_{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}})}, \quad i = 1, \ldots, n; j = 1, 2, 3.$$

Lagrangiano

En un sistema conservativo se define la energía cinética $T : \mathbb{R}^{3n} \to \mathbb{R}$ por

$$T(\boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{|\boldsymbol{y}_i|^2}{2}, \quad \boldsymbol{y} = (\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_n) \in \mathbb{R}^{3n}$$

La energía potencial por U y la energìa total

$$E = T + U.$$

Vamos a definir la función de Lagrange o Lagrangiano por

$$\boxed{L(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = T - U = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{|\boldsymbol{y}_i|^2}{2} - U(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})} \tag{3}$$

ECUACIONES DE EULER-LAGRANGE

Las ecuaciones de Newton (1) ahora se pueden escribir

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{y}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{x}_i}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

O más sintéticamente

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{y}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{x}}} \tag{4}$$

Estas ecuaciones se denominan ecuaciones de Euler-Lagrange

Ejercicio Demostrar que si $\boldsymbol{x}(t)$ resuelve (1) entonces $E(\boldsymbol{x}(t), \dot{\boldsymbol{x}}(t))$ no depende de t, i.e. la energía total del sistema se conserva.

EJEMPLO

Consideremos la ecuación del resorte u oscilador armónico

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t).$$

En estas ecuaciones hemos dividido por la masa. Aquí el movimiento se realiza sobre una línea, de modo que un eje de coordenadas es suficiente para describir el movimiento $x(t) \in \mathbb{R}$. El sistema es conservativo, pues

$$f = -\omega^2 x = -\frac{dU}{dx}, \quad \text{donde } U = \omega^2 \frac{x^2}{2}.$$

El lagrangiano es

$$L(t, x, y) = \frac{y^2}{2} - \omega^2 \frac{x^2}{2}.$$

Índice

PROBLEMAS DE CONTORNO

La ecuación (4) no caracteriza una única solución, hace falta introducir condiciones adicionales. Hay de distinto tipo, aquí algunos ejemplos. Supongamos $\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1 \in \mathbb{R}^n$,

CONDICIÓN INICIAL $\boldsymbol{x}(a) = \boldsymbol{x}_0$ y $\dot{\boldsymbol{x}}(a) = \boldsymbol{x}_1$.

DIRICHLET $\boldsymbol{x}(a) = \boldsymbol{x}_0$ y $\boldsymbol{x}(b) = \boldsymbol{x}_1$.

NEUMANN $\dot{\boldsymbol{x}}(a) = \boldsymbol{x}_0$ y $\dot{\boldsymbol{x}}(b) = \boldsymbol{x}_1$.

ROBIN (MIXTA) dados α,β,γ y δ en $\mathbb{R}$, con $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ y $\gamma^2 + \delta^2 \neq 0$,

$$\begin{aligned} \alpha\boldsymbol{x}(a) + \beta\dot{\boldsymbol{x}}(a) &= \boldsymbol{x}_0 \\ \gamma\boldsymbol{x}(b) + \delta\dot{\boldsymbol{x}}(b) &= \boldsymbol{x}_1. \end{aligned}$$

PERIÓDICAS $\boldsymbol{x}(a) = \boldsymbol{x}(b)$ y $\dot{\boldsymbol{x}}(a) = \dot{\boldsymbol{x}}(b)$.

Las cuatro últimas condiciones se denominan condiciones de contorno

Índice

PRINCIPIO DE MÍNIMA ACCIÓN DE HAMILTON

PRINCIPIO DE MÍNIMA ACCIÓN DE HAMILTON

Las soluciones del problema de contorno

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{y}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{x}} \\ \boldsymbol{x}(a) = \boldsymbol{x}_0, \quad \boldsymbol{x}(b) = \boldsymbol{x}_1 \end{cases}$$

(4) son puntos críticos de la integral de acción

$$I(\boldsymbol{x}) = \int_a^b L(t, \boldsymbol{x}(t), \dot{\boldsymbol{x}}(t))dt \tag{5}$$

para

$$\boldsymbol{x} \in C := \{\boldsymbol{u} \in H^1([a,b], \mathbb{R}^n) | \quad \boldsymbol{x}(a) = \boldsymbol{x}_0 \quad \text{y} \quad \boldsymbol{x}(b) = \boldsymbol{x}_1\}.$$

Observación: Así los mínimos y máximos de I son solución.

Principio de Hamilton, idea de justificación

Más adelante desarrollaremos esto con detalle.
$\boldsymbol{x} \in C$ es un punto crítico de I si cierta derivada de I es igual a cero.
En este caso tomamos $\boldsymbol{r}(t) \in H^1([0, T])$ con $\boldsymbol{r}(a) = \boldsymbol{r}(b) = 0 \in \mathbb{R}^n$ y definimos la derivada de I en $\boldsymbol{x}$ en la dirección de $\boldsymbol{r}$ por

$$DI(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{r} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{I(\boldsymbol{x} + \varepsilon \boldsymbol{r}) - I(\boldsymbol{x})}{\varepsilon}.$$

Notar que $\boldsymbol{x} \in C$, $\boldsymbol{r}(a) = \boldsymbol{r}(b) = 0$ y $\varepsilon \in \mathbb{R}$ implican $\boldsymbol{x} + \varepsilon \boldsymbol{r} \in C$

Principio de Hamilton, idea de justificación

Suponiendo que podemos intercambiar integrales con límites

$$
\begin{aligned}
DI(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{r} &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{I(\boldsymbol{x}+\varepsilon\boldsymbol{r})-I(\boldsymbol{x})}{\varepsilon}. && \text{(definición)}\\
&= \int_a^b \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{L(t,\boldsymbol{x}+\varepsilon\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{x}}+\varepsilon\dot{\boldsymbol{r}})-L(t,\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}})}{\varepsilon}\,dt && \text{(TCM?)}\\
&= \int_a^b D_{\boldsymbol{x}}L(t,\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}})\cdot\boldsymbol{r}+D_{\boldsymbol{y}}L(t,\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}})\cdot\dot{\boldsymbol{r}}\,dt && \text{(derivamos } L\text{)}\\
&= \int_a^b \left(D_{\boldsymbol{x}}L(t,\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}})-\frac{d}{dt}D_{\boldsymbol{y}}L(t,\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}})\right)\cdot\boldsymbol{r}\,dt && \text{(integral}\\
&\quad + D_{\boldsymbol{y}}L(t,\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}})\cdot\boldsymbol{r}\,\Big|_{t=a}^{t=b} && \text{por partes)}\\
&= \int_a^b \left(D_{\boldsymbol{x}}L(t,\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}})-\frac{d}{dt}D_{\boldsymbol{y}}L(t,\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}})\right)\cdot\boldsymbol{r}\,dt, && (\boldsymbol{r}(a)=\boldsymbol{r}(b)=0)
\end{aligned}
$$

Principio de Hamilton, idea de justificación

Teorema

Sea $\boldsymbol{f} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ integrable, y supongamos que para toda $\boldsymbol{r} \in C^\infty([a,b],\mathbb{R}^n)$, con $\boldsymbol{r}(a) = \boldsymbol{r}(b) = 0$, tenemos

$$\int_a^b \boldsymbol{f}(t)\cdot\boldsymbol{r}(t)dt = 0,$$

entonces $\boldsymbol{f} = 0$, c.t.p.

Ejercicio: demostrar este teorema.
Aplicando el Teorema concluímos que

$$\forall \boldsymbol{r} : DI(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{r} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt}D_{\boldsymbol{y}}L(t,\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}}) = D_{\boldsymbol{x}}L(t,\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}}),\ \text{c.t.p. } t \in [a,b].$$

$\square$

Detalle pendiente: por qué se puede intercambiar los límtes con las intergales?

Índice

ECUACIONES ESCALARES

Las ecuaciones escalares de segundo orden

$$u'' + f(u) = h(t),$$

$u : [a, b] \to \mathbb{R}$ son siempre conservativas. Al menos si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua, pues f tiene la primitiva

$$F(u) = \int_0^u f(s)ds$$

Así tenemos el potencial

$$U(t, u) = F(u) - uh(t).$$

Problema de Dirichlet ecuación lineal no resonante

Ejemplo

$$\begin{cases} u''(t) + \frac{1}{2}u = \operatorname{sen}(t), \quad 0 < t < \pi \\ u(0) = u(\pi) = 0 \end{cases}$$

Por medios elementales hallamos la solución general de la ecuación diferencial. Usamos el método de coeficientes indeterminados. Proponemos

$$u(t) = A\cos(t) + B\operatorname{sen}(t).$$

reemplazamos en la ecuación y hallamos

$$\boxed{\text{A=0}}, \boxed{\text{B=-2}}$$

Problema de Dirichlet ecuación lineal no resonante

La solución general es la solución particular más una general del homogéneo

$$u = c_1 \cos\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) - 2\operatorname{sen}(t).$$

La condición de contorno $u(0) = u(\pi) = 0$ implica $c_1 = c_2 = 0$. El problema tiene una única solución

$$\boxed{u = -2\operatorname{sen}(t).}$$

El lagrangiano es

$$L(t, x, y) = \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{4} + \operatorname{sen}(t)x.$$

PROBLEMA DE DIRICHLET ECUACIÓN LINEAL NO RESONANTE

La solución general es la solución particular más una general del homogéneo

$$u = c_1 \cos\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) - 2\operatorname{sen}(t).$$

La condición de contorno $u(0) = u(\pi) = 0$ implica $c_1 = c_2 = 0$. El problema tiene una única solución

$$\boxed{u = -2\operatorname{sen}(t).}$$

El lagrangiano es

$$L(t, x, y) = \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{4} + \operatorname{sen}(t)x.$$