FACULTAD DE CS. EXACTAS, FÍSICO-QUÍMICAS Y NATURALES
DEPTO DE MATEMÁTICA.
SEGUNDO CUATRIMESTRE DE 2015
CÁLCULO VARIACIONES
PRÁCTICA 3: ESPACIOS DE SOBOLEV.

Ejercicio 1 Sea $I = (-1, 1)$ y sea $u(x) = \frac{1}{2}(|x| + x)$. Verificar que $u \in W^{1,p}(I)$ para todo $1 \leq p \leq \infty$ con $u' = H$ siendo

$$H(x) = \begin{cases} 1 & si \quad 0 < x < 1 \\ 0 & si \quad -1 < x < 0 \end{cases}$$

Justificar que $H \notin W^{1,p}$ para $1 \leq p \leq \infty$.

Ejercicio 2 Sea G función de Lipschitz tal que $G(0) = 0$ y sea $u \in W^{1,p}$. Entonces $G \circ u \in W^{1,p}$ y $(G \dot{\circ} u)(\dot{G} \circ u)\dot{u}$.

Ejercicio 3 Considerar la función $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$u(x) = \frac{1}{(1 + x^2)^{\alpha/2} \ln(2 + x^2)}.$$

Demostrar que $u \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ si $p \geq 1/\alpha$ y que $u \notin L^p(\mathbb{R})$ si $1 \leq p < 1/\alpha$.

Ejercicio 4 Sea $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión acotada de $W^{1,p}(I)$ con $1 < p \leq \infty$.

a. Utilizar el Teorema de Arzela-Ascoli para demostrar que existe una subsucesión $\{u_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ y $u \in W^{1,p}(I)$ tal que $\|u_{n_k} - u\|_{L^\infty} \to 0$.

b. Si $1 < p < \infty$ podemos asumir además que $u'_{n_k} \rightharpoonup u'$ debilmente en $L^p(I)$

c. Si, en cambio, $p = \infty$ podemos asumir que $u'_{n_k} \overset{*}{\rightharpoonup} u'$ en $\sigma(L^\infty, L^1)$.

Ejercicio 5 Sea $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ con $\varphi \not\equiv 0$. Definimos $u_n(x) = \varphi(x + n)$. Supongamos $1 \leq p \leq \infty$. Demostrar que

a. $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es acotada en $W^{1,p}(\mathbb{R})$.

b. No exixte subsucesión que converge en la topología fuerte en $L^q(\mathbb{R})$ para ningun $1 \leq q \leq \infty$.

c. $u'_n \rightharpoonup 0$ debilmente en $W^{1,p}(\mathbb{R})$.

Ejercicio 6 Sea $1 \leq p < \infty$ y $u \in W^{1,p}(\mathbb{R})$. Escribamos

$$D_h u(x) = \frac{u(x + h) - u(x)}{h}, \quad \text{para } h \neq 0, x \in \mathbb{R}.$$

Usar el hecho que $C_c^1(\mathbb{R})$ es denso en $W^{1,p}(\mathbb{R})$ para demostrar que $D_h u \to u'$ en $L^p(\mathbb{R})$ cuando $h \to 0$.