Ecuaciones Diferenciales

Fernando Mazzone

4 de mayo de 2017

Índice general

Prólogo

CARRERA: Lic en Matemática.
PLAN DE ESTUDIOS: 2008 versión 1
ASIGNATURA: Ecuaciones Diferenciales **CÓDIGO:** 1913
DOCENTES RESPONSABLES: Fernando Mazzone
EQUIPO DOCENTE: Fernando Mazzone
AÑO ACADÉMICO: 2017
REGIMEN DE LA ASIGNATURA: Cuatrimestral
RÉGIMEN DE CORRELATIVIDADES:

Aprobada	Regular
	Álgebra Lineal Aplicada (2261)
	Topología (1917)

CARGA HORARIA TOTAL: 80 hs.
Teóricas: 40 hs., **Prácticas:** 40 hs..
CARÁCTER DE LA ASIGNATURA: Obligatoria

A. **CONTEXTUALIZACIÓN DE LA ASIGNATURA**
Primer cuatrimestre de cuarto año

B. **OBJETIVOS PROPUESTOS**

- Presentar la teoría de las ecuaciones diferenciales desde un perspectiva rigurosa.
- Poner en evidencia la retroalimentación entre teoría matemática y modelos físicos. En este sentido se desarrollan aplicaciones a la caída de cuerpos a lo largo de guías (y su relación con la óptica), problema de la braquistócrona, vibraciones de sistemas mecánicos, membranas, potencial sobre una esfera, movimiento planetario, etc.
- Integrar la asignatura a otras asignaturas del plan de estudios de la Lic. en Matemática. En este sentido se desarrolla la teoría de Lie de solución de ecuaciones por medios de grupos continuos. No es costumbre que esta teoría se desarrolle en cursos introductorios.
- Incorporar el uso de sistemas algebraicos computacionales en la práctica del alumno. Se utilizaran recursos de código abierto que derivan del lenguaje Python, en particular SymPy y SAGE.

C. **CONTENIDOS BÁSICOS DEL PROGRAMA A DESARROLLAR** Ecuaciones de primer orden, métodos de solución. Métodos de Lie. Teorema de existencia y unicidad. Ecuaciones lineales de orden superior. Osciladores armónicos. Método de desarrollo en serie. Método de Frobenius. Sistemas de Ecuaciones.

D. **FUNDAMENTACIÓN DE LOS CONTENIDOS**
La gran parte del curso versa sobre temas que ya son estándar en las ecuaciones diferenciales y se consideran básicos en el desarrollo de esta área. No creemos necesario abundar en fundamentos sobre la incorporación de ellos. Si merece fundamentarse aquellos que no son del todo habituales.

Con frecuencia las leyes de la física o modelos matemáticos de sistemas biológicos, sociales, económicos, etc, se expresan por medio de ecuaciones y particularmente con ecuaciones diferenciales. Con igual frecuencia en nuestras aulas la enseñanza de esta, como de otras ramas de la matemática, omite la consideración de las relaciones entre los conceptos matemáticos y otras ciencias. A lo sumo se suele presentar alguna aplicación de la teoría como medio de justificar la relevancia de ella. Se hace extensivo al quehacer pedagógico el postulado formalista que la matemática se valida por si misma y es independiente de cualquier realidad ajena a ella.

Nuestro punto de vista es que las relaciones de la teoría matemática con su entorno constituye un ingrediente insoslayable en la enseñanza de la teoría. Fundamentamos este punto de vista, en que es frecuente que el sistema físico que es modelizado por cierta teoría, ilumine el entendiemiento de la teoría misma. Por ejemplo, el principio de máximo, que afirma que una solución de la ecuación $\triangle u = 0$ en un abierto y acotado Ω alcanza su máximo en la frontera de Ω, no es evidente de la ecuación en si misma, pero si lo es en gran medida de una de las situaciones físicas que modeliza: la temperatura en estado estacionario de un cuerpo sobre el cual el calor fluye por difusión. No puede desaprovecharse el recurso de pensar una solución de la ecuación aludida en estos dos sentidos.

También ocurre el camino inverso, esto es que el desarrollo de la teoría matemática ilumine el entendimiento del sistema físico. Al fin y al cabo, ese es el propósito primario de la modelización matemática. Por ejemplo, para quien escribe no resulta físicamente evidente que un sistema de resortes acoplados tenga esencialmente sólo dos modos normales de vibración, cosa que se demuestra en el actual curso. Por estas consideraciones, entre otras, también estamos convencidos que la demostración matemática rigurosa también constituye un ingrediente insoslayable para el entendimiento de la teoría.

Se incorpora activamente el uso de sistemas algebraicos computacionales SAC. Una causa es contar con asistencia para el desarrollo de cálculos que son engorrosos. Pero la causa fundamental de la introducción de SAC es que ponen al alumno en la situación de hacer un programa que implemente procedimientos de la teoría. Esto suele ser una tarea no trivial para el recién iniciado y obliga a desarrollar aptitudes de programación, pero más importante, obliga a repensar la teoría matemática para adaptarla al nuevo contexto.

En el mismo orden de ideas, esto es poner los conocimientos de la asignatura en diversos contextos, se buscó una integración con otras materias del plan de estudios. Por supuesto que hay algunas de ellas que son absolutamente necesarias para desarrollar la teoría de las ecuaciones diferenciales, pero no es costumbre en los cursos elementales sobre ecuaciones diferenciales recurrir a algunas ramas, por ejemplo teoría de grupos. Sin embargo la teoría de grupos tiene cosas importantes para decir sobre las ecuaciones. Se buscó establecer estas vinculaciones menos tradicionales, por ejemplo se desarrollo una unidad sobre la utilización de grupos de Lie de simetrías para resolver EDO. Utilizamos un concepto particular de grupo de Lie, para evitar las complicaciones técnicas en la definición de este concepto en general. La consideración de simetrías es una técnica matemática básica y las simetrías están indisolublemente ligadas al concepto de grupo.

E. **ACTIVIDADES A DESARROLLAR**

CLASES TEÓRICAS: Presencial, 4 horas semanales. La metodología que se desarrollará es la exposición por parte del docente de los fundamentos teóricos de los contenidos impartidos. Se incentivará la participación de los alumnos durante la clase, requiriendo que ellos aporten, por ejemplo, demostraciones de determinados hechos o, en general, soluciones a determinadas situaciones problemáticas que plantea el desarrollo teórico de la materia.

CLASES PRÁCTICAS: Presencial 4 horas semanales. Se espera que los alumnos trabajen sobre los ejercicios de la práctica en forma independiente fuera de los horarios de la asignatura. Posteriormente estos ejercicios se discutirán durante la clase, el profesor tratará de limitar su participación de modo tal de favorecer que los alumnos autogestionen su aprendizaje.

Internet: Se utilizaron diversos recursos de internet, que estan compendiados en una página de la asignatura y en un repositorio de Git Hub. En la red hay excelentes recursos, videos, páginas web, wikis y, en general, distintos materiales multimedia especialmente útiles para visualizar algunos conceptos, métodos, etc.

F. **NÓMINA DE TRABAJOS PRÁCTICOS** Hay un trabajo práctico por cada unidad de la materia.

G. **HORARIOS DE CLASES:** martes y jueves de 14 a 18.

Horario de clases de consultas: Se convendrá con los alumnos, durante el desarrollo de la materia, los horarios de consultas.

H. **MODALIDAD DE EVALUACIÓN:**

Evaluaciones Parciales: Se le presentará al alumno una serie de problemas que deberá resolver.

Evaluación Final: Será oral, el alumno deberá desarrollar los ejes conceptuales y fundamentos teóricos de la materia.

Condiciones de regularidad: Aprobar los exámenes parciales o sus respectivos recuperatorios.

Condiciones de promoción: no se prevé

I. **CONTENIDOS:**

El asterísco al lado de las referencias citadas más abajo indica la bibliografía considerada principal. Las citas sin el asterísco corresponden a bibliografía suplementaria.

Unidad 0. Python, SymPy, SAGE. Panorama de instalación, distribuciones y recursos online. Tipos de datos en Python, programación elemental.

Unidad 1. Ecuaciones de Primer Orden. Noción de ecuación diferencial y clasificación. Ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO). Problemas de valores iniciales. Familia de curvas y la famila ortogonal. Método de separación de variables. Aplicaciones: dinámica de mezclas, cuerpos en caída a lo largo de guías, curvas braquistócrona y tautócrona. Ecuaciones homogéneas. Ecuaciones exactas. Factores integrantes. Ecuaciones lineales de primer orden. Métodos de reducción de orden. Curvas de persecución. Velocidad de escape. Problema del resorte. Cambios de variables. Usando SymPy para cambiar variables. Grupos de Lie uniparamétricos. Grupos de simetrías. Generadores infinitesimales. Variables canónicas. Solución de EDO por medio de sus grupos de Lie de simetrías. Simmons (1991); Boyce and Diprima (2012); Hydon (2000); S. V. Duzhin (2002)

Unidad 2. Teorema de Existencia y Unicidad. Presentación filosófica: determinismo científico. Funciones Lipschitzianas. Teorema de punto fijo de Banach. Método iterativo de Picard. Teorema de existencia y unicidad para sistemas de EDO de primer orden.Simmons (1991); Boyce and Diprima (2012); Arnold (1992); Sotomayor (1979)

Unidad 3. Ecuaciones Lineales de Segundo Orden. Ecuaciones lineales. Reducción de orden. Ecuaciones homogéneas a coeficientes constantes. El problema no homogéneo. Independencia lineal. Bases de soluciones. Polinomio característico. Ecuaciones no homogéneas. Coeficientes indeterminados y variación de los parámetros. Vibraciones mecánicas. Solución del problema Kepleriano de los dos cuerpos. Osciladores armónicos acoplados. Simmons (1991); Boyce and Diprima (2012)

Unidad 4. Métodos cualitativos. Teoremas de separación y de comparación de Sturn. Aplicaciones, ceros de las funciones de Bessel.Simmons (1991); Sotomayor (1979)

Unidad 5. Desarrollo en serie de potencias. Repaso de series de potencias. Método de coeficientes indeterminados. Resolución de problemas de desarrollo en serie con SymPy. Ecuaciones lineales de segundo orden: puntos regulares. Puntos singulares regulares. Series de Frobenius. Teoremas fundamentales.Simmons (1991); Boyce and Diprima (2012)

Unidad 6. Sistemas lineales. Base de soluciones. Matriz fundamental. Sistemas lineales a coeficientes constantes. Solución del problema homogéneo con formas de Jordan. Problema no homogéneo. Sistemas no-lineales. Boyce and Diprima (2012); Sotomayor (1979)

J. **CÓDIGO QR** Algunos bolques de código Python que expondremos en el texto vienen acompañados de un código QR como note al margen. La finalidad es que el alumno pueda leer este código con algún dispositivo movil y ejecutar el código dentro del dispositivo

K. **MARGENES** El significado de las imágenes en los margenes es el siguiente:

	Enlace de Internet
	Prestar atención
	Lectura adicional
	Actividad práctica

Bibliografía

Arnold, V. I. (1992). *Ordinary Differential Equations.* Springer Science & Business Media.

Boyce, W. E. and Diprima, R. C. (2012). *Elementary Differential Equations, 10th Edition.* Wiley Global Education.

Hydon, P. E. (2000). *Symmetry Methods for Differential Equations: A Beginner's Guide.* Cambridge University Press.

S. V. Duzhin, B. D. C. (2002). *Transformation Groups for Beginners.* American Mathematical Soc.

Simmons, G. (1991). *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones y Notas Históricas.* McGraw-Hill, Madrid.

Sotomayor, J. (1979). *Li,cões de equa,cões diferenciais ordinárias.* Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq.

Capítulo 1

Breve introducción a Python y SymPy

1.1 Descripción

Python es un lenguaje de programación interpretado, abierto, facil de aprender, potente y portátil. Es utilizado en proyectos de todo tipo, no sólo aplicaciones científicas.

SciPy, Python científico, es un conjunto de módulos de python para distintos tipos de cálculos. Está integrado por los módulos, SymPy (para cálculos simbólicos), numpy (cálculos numéricos), matplotlib (gráficos) entre otros. En este curso sólo usaremos SymPy.

SymPy es una biblioteca de Python para matemática simbólica. Su objetivo es convertirse en un sistema de álgebra computacional (SAC) completo, manteniendo el código lo más simple posible para que sea comprensible y fácilmente extensible. SymPy está escrito enteramente en Python y no requiere de ninguna biblioteca externa.

Matplotlib es una biblioteca de trazado de Python 2D que produce cifras de calidad de publicación en una variedad de formatos impresos y entornos interactivos a través de plataformas. Matplotlib se puede utilizar en scripts Python, el shell Python e IPython, el portátil jupyter, servidores de aplicaciones web y cuatro kits de herramientas de interfaz gráfica de usuario.

1.2 Instalación

Son muchas las componentes requeridas para poder ejecutar los programas con los que trabajaremos en esta asignatura. Hay que instalar un interprete de python, los módulos que utilizaremos (sympy, matplotlib), es útil utilizar entornos integrados de desarrollo (IDE), que facilitan al usuario editores de código fuente (especializados con la sintáxis de python), consolas de comandos mejoradas (ipython, qt, etc). Otro recurso que se dispone son las notebooks, de las cuales hablaremos más adelante. Sería engorroso instalar todas estas componentes, que muchas veces tienen orígenes en desarrolladores diferentes, de manera independiente. Para nuestra fortuna existen, las así llamadas, *distribuciones*. Estas son programas que instalan todas las coponentes necesarias, o al menos muchas de ellas, de un determinado paquete de software. Recomendamos las siguientes distribuciones.

1.2.1. Anaconda

La versión de código abierto de Anaconda es una distribución de alto rendimiento de Python y R e incluye más de 100 de los paquetes científicos más populares asociados a estos lenguajes. Además, se puede acceder a más de 720 paquetes que pueden ser fácilmente instalados con Conda, un programa incluído en Anaconda para la gestión de paquetes. Anaconda tiene licencia BSD que da permiso para utilizar Anaconda comercialmente y para su redistribución. Al día que se escriben estas líneas, anaconda parece la opción más sencilla y completa para instalar todos los recursos para desarrollar los contenidos de estas notas. Existen versiones para linux, OS X y Windows.

1.2.2. Windows

Hay distribuciones específicas para distintos sistemas operativos. La distribución python(x,y) instala el interprete de python y todos los módulos de scipy. Además el entorno de desarrollo integrado (IDE) spyder.

1.2.3. linux

Aquí todo es más sencillo, el interprete de python suele venir con la distribución del SO y se pueden instalar los módulos, SymPy, NumPy, etc, recurriendo al administrador de paquetes o tipeando la sentencia adecuada en la línea de comandos.

1.2.4. Android

Qpython es una aplicación que permite ejecutar código python y una versión básica de sympy desde tablets y smartphones. Se descarga desde la plataforma google play.

1.2.5. Otros recursos de utilidad:

SageMath es un sistema de software de matemáticas, libre, de código abierto bajo la licencia GPL. Es construído sobre muchos paquetes de código abierto existentes: NumPy, SciPy, matplotlib, SymPy, Maxima, GAP, FLINT, R y muchos más. Se acceda a su poder combinado a través de un lenguaje común, basado en Python. Puede instalarse bajo linux o usarse en línea desde cualquier plataforma de manera remota, por ejemplo desde el sitio SageMathCloud.

Entre las útilidades destinadas a editor de código fuente para python, sobresale emacs. Esta herramienta de software libre puede extenderse, ampliarse y permite la edición de código fuente de muchos lenguajes de programación, incluídos los que más populares dentro de la matemática, python, LaTeX, Octave (lenguaje m). Claro está que provee la comunicación con los respectivos interpretes o compiladores y en el caso de lenguajes intepretados que pueden ser ejecutados desde una consola de manera interactiva, provee una consola.

1.3 Forma de trabajo: por medio de scripts e interactiva

Se puede trabajar de dos formas

A. Interactivamente, ingresando sentencias, de a una por vez, en la línea de comandos y obteniendo respuestas.

B. Haciendo un script (programa) donde se guardan todas las sentencias que se desea ejecutar. Posteriormente este script se puede ejecutar, ya sea desde la línea de comandos o desde un IDE (spyder) oprimiendo un botón de ejecución.

1.4 Características sobresalientes del lenguaje

Seguiremos en esta exposición a Wikipedia (2016) de manera cercana. Las principales características del lenguaje son:

- Interpretado. Es necesario un conjunto de programas, el interprete, que entienda el código python y ejecute las acciones contenidas en él.
- Implementa tipos dinámicos.
- Multiparadigma, ya que soporta orientación a objetos, programación imperativa y, en menor medida, programación funcional.
- Multiplataforma.
- Es comprendido con facilidad. Usa palabras donde otros lenguajes utilizarían símbolos. Por ejemplo, los operadores lógicos `!, || y \&\&` en Python se escriben not, or y and, respectivamente.
- El contenido de los bloques de código (bucles, funciones, clases, etc.) es delimitado mediante espacios o tabuladores.
- Empieza a contar desde cero (elementos en listas, vectores, etc).

1.5 Elementos del Lenguaje

1.5.1. Comentarios

Hay dos formas de producir comentarios, texto que el interprete no ejecuta y que sirve para entender un programa.

Para comentarios largos se utilizan las tildes: `''' comentario '''`.

La segunda notación utiliza el símbolo #, no necesita símbolo de finalización pues se extiende hasta el final de la línea.

```
'''
Comentario largo en un script de Python
'''
print "Hola mundo" # Comentario corto
```

El intérprete no tiene en cuenta los comentarios, lo cual es útil si deseamos poner información adicional en nuestro código como, por ejemplo, una explicación sobre el comportamiento de una sección del programa.

1.5.2. Variables

Las variables se definen de forma dinámica, lo que significa que no se tiene que especificar cuál es su tipo de antemano y que una variable puede tomar distintos valores en distintos momentos de un programa, incluso puede tomar un tipo diferente al que tenía previamente. *Se usa el símbolo = para asignar valores a variables.* Es importante distinguir este = (de asignación) con el igual que es utilizado para definir igualdades en sympy, para ecuaciones por ejemplo.

```
x = 1
x = "texto" # Esto es posible porque los tipos son asignados \
dinamicamente
```

1.5.3. Tipo de datos

Python implementa diferentes tipos de datos. Para la noción de *tipos de datos* en general ver Wikipedia (2017) . A continuación describimos sumariamente algunos de los tipos más comunes presentes en Python. Cuando se utilizan módulos específicos (p. ej. sympy) la diversidad de tipos de datos se expande, con la incorporación de tipos con significación matemática, p.ej. matrices, expresiones algebraicas, etc.

Tipo	Clase	Notas	Ejemplo
`str`	Cadena	Inmutable	`'Cadena'`
`list`	Secuencia	Mutable, puede contener objetos de diversos tipos	`[4.0, 'Cadena', True]`
`tuple`	Secuencia	Inmutable, puede contener objetos de diversos tipos	`(4.0, 'Cadena', True)`
`dict`	Mapping	Grupo de pares clave:valor	`{'key1': 1.0, 'key2': False}`
`int`	Número entero	Precisión fija, convertido en *long* en caso de overflow.	`42`
`long`	Número entero	Precisión arbitraria	`42L` ó `456966786151987643L`
`float`	Número decimal	Coma flotante de doble precisión	`3.1415927`
`complex`	Número complejo	Parte real y parte imaginaria *j*.	`(4.5 + 3j)`
`bool`	Booleano	Valor booleano verdadero o falso	`True` o `False`

Se clasifican en:

Mutable si su contenido puede cambiarse.

Inmutable si su contenido no puede cambiarse.

Se usa el comando \type para averiguar que tipo de dato contiene una variable

```
>>> x=1
>>> type(x)
<type 'int'>
>>> x='Ecuaciones'
>>> type(x)
<type 'str'>
```

1.5.4. Listas y tuplas

- Es una estructura de dato, que contiene, como su nombre lo indica, listas de otros datos en cierto orden. Listas y tuplas son muy similares.
- Para declarar una lista se usan los corchetes [], en cambio, para declarar una tupla se usan los paréntesis (). En ambos casos los elementos se separan por comas, y en el caso de las tuplas es necesario que tengan como mínimo una coma.
- Tanto las listas como las tuplas pueden contener elementos de diferentes tipos. No obstante las listas suelen usarse para elementos del mismo tipo en cantidad variable mientras que las tuplas se reservan para elementos distintos en cantidad fija.
- Para acceder a los elementos de una lista o tupla se utiliza un índice entero (empezando por "0", no por "1"). Se pueden utilizar índices negativos para acceder elementos a partir del final.
- Las listas se caracterizan por ser mutables, mientras que las tuplas son inmutables.

```
>>> lista = ["abc", 42, 3.1415]
>>> lista[0] # Acceder a un elemento por su indice
'abc'
>>> lista[-1] # Acceder a un elemento usando un indice negativo
3.1415
>>> lista.append(True) # Agregar un elemento al final de la lista
```

```
>>> lista
['abc', 42, 3.1415, True]
>>> del lista[3] # Borra un elemento de la lista usando un indice
>>> lista[0] = "xyz" # Re-asignar el valor del primer elemento
>>> lista[0:2] # elementos del indice "0" al "2" (sin incluir ultimo)
['xyz', 42]
>>> lista_anidada = [lista, [True, 42L]] # Es posible anidar listas
>>> lista_anidada
[['xyz', 42, 3.1415], [True, 42L]]
>>> lista_anidada[1][0] # Acceder a un elemento de una lista dentro de otra lista
True
```

```
>>> tupla = ("abc", 42, 3.1415)
>>> tupla[0] # Acceder a un elemento por su indice
'abc'
>>> del tupla[0] # No es posible borrar ni agregar
( Excepcion )
>>> tupla[0] = "xyz" # Tampoco es posible re-asignar
( Excepcion )
>>> tupla[0:2] # elementos del indice "0" al "2" sin incluir
('abc', 42)
>>> tupla_anidada = (tupla, (True, 3.1415)) # es posible anidar
>>> 1, 2, 3, "abc" # Esto tambien es una tupla
(1, 2, 3, 'abc')
>>> (1) #  no es una tupla, ya que no posee al menos una coma
1
>>> (1,) # si es una tupla
(1,)
>>> (1, 2) # Con mas de un elemento no es necesaria la coma final
(1, 2)
>>> (1, 2,) # Aunque agregarla no modifica el resultado
(1, 2)
```

1.5.5. Diccionarios

- Para declarar un diccionario se usan las llaves {}. Contienen elementos separados por comas, donde cada elemento está formado por un par clave:valor (el símbolo : separa la clave de su valor correspondiente).
- Los diccionarios son mutables, es decir, se puede cambiar el contenido de un valor en tiempo de ejecución.
- En cambio, las claves de un diccionario deben ser inmutables. Esto quiere decir, por ejemplo, que no podremos usar ni listas ni diccionarios como claves.
- El valor asociado a una clave puede ser de cualquier tipo de dato, incluso un diccionario.

```
>>> dicci = {"cadena": "abc", "numero": 42, "lista": [True, 42L]}
>>> dicci["cadena"] # Usando una clave, se accede a su valor
'abc'
>>> dicci["lista"][0]
True
>>> dicci["cadena"] = "xyz" # Re-asignar el valor de una clave
>>> dicci["cadena"]
'xyz'
>>> dicci["decimal"] = 3.1415927 # nuevo elemento clave:valor
>>> dicci["decimal"]
3.1415927
>>> dicci_mixto = {"tupla": (True, 3.1415), "diccionario": dicci}
>>> dicci_mixto["diccionario"]["lista"][1]
42L
>>> dicci = {("abc",): 42} # tupla puede ser clave pues es inmutable
```

```
>>> dicci = {["abc"]: 42} # No es posible que una clave sea una lista
( Excepcion )
```

1.5.6. Listas por comprensión

Una lista por comprensión es una expresión compacta para definir listas. Al igual que el operador lambda, aparece en lenguajes funcionales. Ejemplos:

```
>>> range(5) #  "range" devuelve una lista , empezando en 0 \
y terminando con el numero indicado menos uno
[0, 1, 2, 3, 4]
>>> [i*i for i in range(5)]
[0, 1, 4, 9, 16]
>>> lista = [(i, i + 2) for i in range(5)]
>>> lista
[(0, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 6)]
```

1.5.7. Funciones

- Las funciones se definen con la palabra clave `def`, seguida del nombre de la función y sus parámetros. Otra forma de escribir funciones, aunque menos utilizada, es con la palabra clave `lambda` (que aparece en lenguajes funcionales como Lisp). Generalemente esta forma es apropiada para funciones que es posible definir en una sola línea.
- El valor devuelto en las funciones con `def` será el dado con la instrucción `return`.

```
>>> def suma(x, y = 2): # el argumento y tiene un valor por defecto
...     return x + y # Retornar la suma
...
>>> suma(4) # La variable "y" no se modifica , siendo su valor: 2
6
>>> suma(4, 10) # La variable "y" si se modifica
14
```

```
>>> suma = lambda x, y = 2: x + y
>>> suma(4) # La variable "y" no se modifica
6
>>> suma(4, 10) # La variable "y" si se modifica
14
```

1.5.8. Condicionales

Una sentencia condicional (`if condicion`) ejecuta su bloque de código interno sólo si `condicion` tiene el valor booleano `True`. Condiciones adicionales, si las hay, se introducen usando `elif` seguida de la condición y su bloque de código. Todas las condiciones se evalúan secuencialmente hasta encontrar la primera que sea verdadera, y su bloque de código asociado es el único que se ejecuta. Opcionalmente, puede haber un bloque final (la palabra clave `else` seguida de un bloque de código) que se ejecuta sólo cuando todas las condiciones fueron falsas.

```
>>> verdadero = True
>>> if verdadero: # No es necesario poner "verdadero == True"
...     print "Verdadero"
... else:
...     print "Falso"
...
Verdadero
>>> lenguaje = "Python"
>>> if lenguaje == "C":
...     print "Lenguaje de programacion: C"
... elif lenguaje == "Python": # Se pueden agregar "elif" como se quiera
...     print "Lenguaje de programacion: Python"
... else:
...     print "Lenguaje de programacion: indefinido"
...
Lenguaje de programacion: Python
>>> if verdadero and lenguaje == "Python":
...     print "Verdadero y Lenguaje de programacion: Python"
...
Verdadero y Lenguaje de programacion: Python
```

1.5.9. Bucles

El bucle `for` es similar a otros lenguajes. Recorre un objeto *iterable*, esto es una lista o una tupla, y por cada elemento del iterable ejecuta el bloque de código interno. Se define con la palabra clave `for` seguida de un nombre de variable, seguido de `in`, seguido del iterable, y finalmente el bloque de código interno. En cada iteración, el elemento siguiente del iterable se asigna al nombre de variable especificado:

```
>>> lista = ["a", "b", "c"]
>>> for i in lista: # Iteramos sobre una lista, que es iterable
...     print i
...
a
b
c
>>> cadena = "abcdef"
>>> for i in cadena: # Iteramos sobre una cadena, que es iterable
...     print i, # una coma al final evita un salto de linea
...
a b c d e f
```

El bucle `while` evalúa una condición y, si es verdadera, ejecuta el bloque de código interno. Continúa evaluando y ejecutando mientras la condición sea verdadera. Se define con la palabra clave `while` seguida de la condición, y a continuación el bloque de código interno:

```
>>> numero = 0
>>> while numero < 10:
...     print numero
...     numero += 1, #un buen programador modificara las variables de
    control al finalizar el ciclo while
...
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
```

Bibliografía

Wikipedia (2016). Python. Available from: `https://es.wikipedia.org/wiki/Python`.

Wikipedia (2017). Tipo de dato --- wikipedia, la enciclopedia libre. [Internet; descargado 25-febrero-2017]. Available from: `https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Tipo_de_dato&oldid=97149088`.

Capítulo 2

Generalidades y ecuaciones de primer orden

2.1 ¿Que son las ecuaciones diferenciales?

Definición 1 (Ecuación diferencial, definición informal)**.**

Es una o varias relaciones entre una o varias variables dependientes y sus tasas de cambio respecto a ciertas variables independientes.

El problema básico asociado a las ecuaciones diferenciales es hallar las variables dependientes que las resuelven.

Las ecuaciones diferenciales son usadas muy a menudo en matemática aplicada, puesto que muchas leyes (de la física por ejemplo) se expresan atraves de este tipo de ecuaciones.

Ejemplo 2.0. [Caída libre] Modelizar matemáticamente el movimiento de un cuerpo de masa m en las proximidades de la superficie terrestre, asumiendo que su movimiento es sobre la vertical y que las fuerzas que sobre él actúan son la gravedad y el rozamiento con el aire.

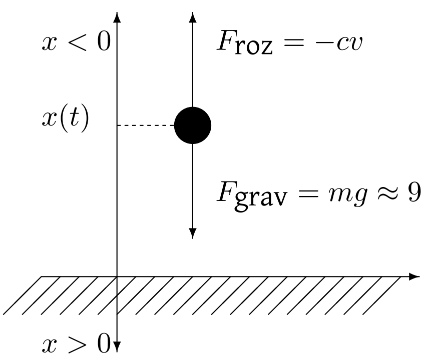


Figura 2.1: Caída libre

$x(t) =$ posición a lo largo de la vertical, relativo a un eje de coordenadas
$v(t) = \frac{dx}{dt} =$ velocidad
$F_{grav} =$ fuerza debida a la gravedad $= mg$ donde $g = 9{,}8m/s^2$ $F_{roz} =$ fuerza de rozamiento, proporcional a la velocidad y de sentido contrario $= -cv$, $c > 0$.

Usamos la Segunda Ley de Newton, esto es la suma de las fuerzas totales que actuan sobre un cuerpo de masa m es igual al producto de la masa m y la aceleración $a(t)$. Recordemos que la aceleración es la tasa de cambio de la velocidad, es decir la derivada segunda de la posición.

Usando todas las relaciones mencionadas

$$\begin{aligned} ma(t) = mv'(t) &= F_{\text{total}} \\ &= F_{\text{grav}} + F_{\text{roz}} \\ &= mg - cv \end{aligned}$$

vale decir

$$\boxed{x''(t) + \frac{c}{m}x'(t) = g.} \tag{2.1}$$

$$\boxed{v'(t) + \frac{c}{m}v = g.} \tag{2.2}$$

2.2 Algunos conceptos relacionados con ecuaciones diferenciales

Definición 1 (Orden)**.**

El índice de la mayor derivada interviniente en la ecuación.

Por ejemplo la ecuación (2.1) es de orden 2 y la ecuación (2.2), si bien está estrechamente relacionada con la anterior, es de orden 1. Como regla casi general, cuanto menor es el orden, más fáciles de estudiar y/o resolver las ecuaciones son.

Definición 2 (Solución)**.**

Una función que satisface la relación que indica la ecuación.

Por ejemplo

$$v(t) = \frac{m}{c}g + ke^{-\frac{c}{m}t}, \tag{2.3}$$

resuelve (2.2), para todo $C \in \mathbb{R}$. No deberíamos perder tiempo en chequear una cuestión tan sencilla, pero aprovechemos la ocasión para usar SymPy.

```
>>>from sympy import *
>>>m,g,c,k,t=symbols('m,g,c,k,t')
>>>v=m/c*g+k*exp(-c/m*t)
>>>simplify(v.diff(t)+c/m*v)
g
```

Notar que las líneas que comienzan con el signo del prompt >>> indican entradas por línea de comandos y las que comienzan sin este signo son las respuestas del interprete.

Rara vez utilizaremos las siguientes funcionalidades de sympy, pero es oportuno decir que SymPy puede encontrar la solución a una ecuación diferencial

```
>>>v=symbols('v',cls=Function)
>>>EqCaida=Eq(v(t).diff(t)+c/m*v(t),g)
>>>Vel=dsolve(EqCaida,v(t))
>>> Vel
v(t) == (g*m + exp(c*(C1 - t/m)))/c
```

La solución obtenida es la ya conocida. Es instructivo averiguar que tipo de dato tiene la variable `Vel`

```
>>> type(Vel)
<class 'sympy.core.relational.Equality'>
```

A este tipo de cuestiones hay que prestar atención cuando se trabaja con sympy, pues existe la tendencia a confudir los conceptos matemáticos con los propios del lenguaje. Por ejemplo, matemáticamente una solución es una función. Sin embargo, en este caso, cuando le solicitamos una solución a sympy nos entrega un objeto de tipo ``relación de igualdad''.

Definición 3 (Ecuación diferencial ordinaria (EDO))**.**

Es una ecuación donde las variables dependientes sólo dependen de una única variable independiente.

Las ecuaciones (2.1) y (2.2) son ejemplo de ello, la variable independiente es el tiempo.

Definición 4 (Ecuación en derivadas parciales (EDP))**.**

Es una ecuación donde las variables dependientes dependen de más de una variable independiente.

Ejemplo de este tipo de ecuación es la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Puede ocurrir también que dispongamos de varias ecuaciones diferenciales que se deben satisfacer simultaneamente. En estos casos, el conjuntos de ecuaciones se suele escribir como una única ecuación vectorial. Por este motivo, en algunas ocasiones cuando dispongamos de una única ecuación diremos que tenemos una *ecuación escalar*.

Definición 5 (Sistema de ecuaciones)**.**

Es un conjunto de ecuaciones diferenciales que se deben satisfacer simultaneamente.

En ese caso es de esperar que tengamos varias incognitas en nuestro problema. En general una ecuación escalar determina sólo una incognita. De hecho aquí ocurre, a semejanza con ecuaciones algebraicas, que es frecuente necesitar tantas ecuaciones como incognitas.

Ejemplo 2.1. [Ecuación del péndulo] El sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{ll} x' & = y \\ y' & = -\operatorname{sen}(x) \end{array} \right.$$

es muy conocido pues modeliza el movimiento de un péndulo.

Muy a menudo hablaremos de resolver una ecuación, pero es oportuno discutir que queremos significar con esto.

Definición 6 (Resolver una ecuación)**.**

Es expresar la solución como combinaciones algebraicas y composiciones de funciones que consideramos elementales.

Esta definición contiene una vaga apelación a ciertas ``funciones elementales''. El universo de funciones que se considera elemental es una cuestión política, no matemática. En principio, consideraremos elementales a las potencias, exponenciales, logarítmos, trigonométricas y trigonométricas inversas. No obstante esta lista se puede expandir con muchas funciones especiales. Las operaciones permitidas para combinar estas funciones también están sujetas a convenciones. Por ejemplo, admitiremos como válida una expresión que contenga una integral, al menos en el caso que no sea claro como resolver esta integral.

Casi todo este curso trata con la discusión de métodos para resolver ecuaciones. Sin embargo resolver ecuaciones no es quizás el problema principal relacionado con las ecuaciones diferenciales. No importa tanto lograr una expresión formal de la solución, como, por ejemplo, conocer las propiedades que poseen las soluciones. Al fin y al cabo, uno conoce una función a través de sus propiedades.

Definición 7 (Solución general)**.**

Usualmente una ecuación presenta infinitas soluciones. Una solución general es una expresión que representa todas estas soluciones. Es habitual que una solución general contenga parámetros. Cada elección de estos parámetros determina una solución distinta.

Por ejemplo (2.3) es la solución general de (2.2). La afirmación anterior requiere una demostración puesto que sólo hemos mostrado que (2.3) es solución, pero no que toda solución se expresa con (2.3). Para demostrar la afirmación, hay que multiplicar ambos miembros de (2.2) por $e^{\frac{c}{m}t}$ y luego integrar respecto a t

$$\frac{mg}{c}e^{\frac{c}{m}t} = \int ge^{\frac{c}{m}t}dt = \int v'(t)e^{\frac{c}{m}t} + \frac{c}{m}e^{\frac{c}{m}t}vdt = e^{\frac{c}{m}t}v + C.$$

Despejando v del primer y último miembro obtenemos (2.3) con $k = -C$.

Ejemplo 2.2. En algunas ocasiones sólo podemos dejar una relación implícita entre las variable dependientes e independientes. Por ejemplo

$$x = e^y + y + C \qquad \text{para } C \in \mathbb{R} \tag{2.4}$$

es solución general de

$$y'(e^y + 1) = 1.$$

Vamos a chequear sólo que (2.4) es solución, dejando la justificación que toda solución tiene esa forma para más adelante. Derivando (2.4)

$$1 = e^y y' + y'$$

Luego $y' = 1/(1 + e^y)$. Reemplazando esta relación en la ecuación diferencial corroboramos que es solución.

2.3 Definición formal

Definición 1 (Ecuación diferencial)**.**

Una ecuación diferencial ordinaria de orden n es una relación de la forma

$$\boxed{F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0}.$$

donde $F : (a, b) \times \Omega \to \mathbb{R}$, Ω es abierto de $\mathbb{R}^{n+1}$ y (a, b) un intervalo de $\mathbb{R}$.

Ejemplo 2.3. El problema de hallar una primitiva de una función es una ecuación diferencial que, como ya se ha visto en cursos iniciales de análisis, se relaciona con el concepto de integral. Supongamos $f : (a,b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua. Consideremos la ecuación diferencial

$$y'(x) = f(x).$$

Sea $x_0 \in (a,b)$, integrando respecto a x entre x_0 y x

$$y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(t)dt$$

Que es una solución general. Quedaría determinada una única solución si, por ejemplo, conociecemos $y(x_0)$.
Ejemplo 2.4. Supongamos $f : (a,b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como antes. Consideremos la ecuación diferencial

$$y''(x) = f(x).$$

Tomemos una integral indefinida respecto a x

$$y'(x) = C_1 + \int f(t)dt$$

Ahora deberemos tomar una integral indefinida más

$$y(x) = C_2 + C_1 t + \int \left(\int f(x)dx \right) dx.$$

Ahora quedan dos constantes C_1 y C_2.

En el caso de un sistema de ecuaciones diferenciales, la forma de describirlo es esencialmente igual a la de la Definición 1. La nueva definición contiene a la Definición 1 como caso particular.

Definición 2 (Sistema de ecuación diferenciales)**.**

Una sistema de k-ecuaciones diferenciales ordinarias de orden n es una relación de la forma

$$\boxed{F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0}.$$

donde $F : (a,b) \times \Omega \to \mathbb{R}^k$,

$$\Omega \subset \underbrace{\mathbb{R}^k \times \cdots \times \mathbb{R}^k}_{n+1-\text{veces}}$$

es abierto y (a,b) un intervalo de $\mathbb{R}$. Notar que el $=$ en la derecha de la ecuación está en $\mathbb{R}^k$ y que tenemos k ecuaciones e incognitas, las k componentes de $y = (y_1, \ldots y_k)$.

Ejemplo 2.5. En el caso del péndulo $k = 2, n = 1$, mientras que $(a,b) = \mathbb{R}$, $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ y $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ viene dada por

$$F\left(\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \xi - v \\ \eta + \operatorname{sen}(x) \end{pmatrix}$$

Más adelante veremos que toda ecuación, o sistemas de ecuaciones, ordinaria de orden n se puede reducir a un sistema de orden 1. De modo tal que es más frecuente considerar este tipo de sistemas. También es común considerar, se trate ya de ecuaciones escalares o sistemas, ecuaciones donde es posible despejar de manera explícita la derivada de mayor orden. A esta forma la denominaremos *forma explícita* de la ecuación

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)). \tag{2.5}$$

2.4 Problemas bien planteados, condiciones iniciales

La siguiente definición expresa lo que entenderemos cuando digamos que un problema está bien planteado.

Definición 1 (Principio de Hadamard).

Un problema se dice bien planteado segun Hadamard si satisface que

A. El problema admite solución

B. La solución es única

C. La solución depende de manera continua de los datos numéricos del problema.


Jacques Hadamard (1865-1963)

Como hemos visto, una ecuación diferencial no determina una única solución, por consiguiente no sería un problema bien planteado. Debemos agregar relaciones a nuestro problema para que sea bien planteado. Es así que aparecen condiciones iniciales, problemas de contorno, etc.

Definición 2 (Problemas de valores iniciales (PVI)).

Sea $x_0 \in (a, b)$, $F : (a, b) \times \Omega \to \mathbb{R}$ e $y_0, y_0^1, \ldots, y_0^{n-1} \in \mathbb{R}$. Las siguientes relaciones se denominan problema de valores iniciales

$$\begin{cases} F(x, y, y', & \ldots, y^{(n)}) = 0 \quad x \in (a, b) \\ y(x_0) & = y_0 \\ y'(x_0) & = y_0^1 \\ & \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) & = y_0^{n-1} \end{cases} \tag{2.6}$$

Más delante demostraremos el teorema de existencia y unicidad para ecuaciones y sistemas de ecuaciones. Este teorema nos dice que, para ciertas F, el problema (2.6) tiene una única solución alrededor de un entorno de x_0.

Es común en las aplicaciones físicas de las EDO, que la variable x represente el tiempo e $y = y(x)$ represente alguna cantidad física (posición, velocidad, temperatura, etc) caracterizando a cierto sistema físico. Es muy frecuente que aparezcan ecuaciones de orden 2 ($n = 2$). En esta situación, al par (y, y') se lo denomina *estado* del sistema y las condiciones A y B en la Definición 1 se leen como que el estado del sistema en un momento x_0 dado determina el estado del mismo en cualquier otro momento. Este es el postulado principal de la corriente filosófica conocida por determinismo .

Es común que una ecuación que modela un sistema físico dependa de parámetros. Pensar por ejemplo del papel de la masa en la ecuación (2.1). Estos parámetros o incluso los valores iniciales del problema (2.6) dependen muchas veces de resultados de mediciones y sólo es posible tener de ellos un valor aproximado. Por consiguiente,casi nunca se resuelve el PVI que se debería resolver, sino otro, con parámetros y valores iniciales aproximadamente iguales a los correctos[1]. La condición C en la Definición 1 expresa el hecho de que la soluciones a PVIs aproximadamente iguales son aproximadamente iguales entre si.

Vamos a destacar la siguiente instancia particular de la Definición 2.6.

Definición 3 (PVI para ecuaciones de primer orden)**.**

La ecuación general de primer orden tiene la forma

$$F(x, y(x), y'(x)) = 0,$$

donde $F : (a,b) \times \Omega \to \mathbb{R}$ y Ω abierto de $\mathbb{R}^2$. Con frecuencia asumiremos que y' se despeja de la relación anterior, es decir que existe $f : \Omega' \to \mathbb{R}$, Ω' abierto de $\mathbb{R}^2$, tal que

$$y' = f(x, y).$$

Bajo esta suposición, si $(x_0, y_0) \in \Omega'$ el problema de valores iniciales se escribe

$$\begin{cases} y' & = f(x,y) \\ y(x_0) & = y_0 \end{cases}$$

2.5 Familias paramétricas de funciones

Hemos dicho que en el común de los casos es de esperar que una ecuación tenga asociado un conjunto de soluciones. En esta sección vamos a preguntarnos sobre el problema inverso, dao un conjunto de funciones encontrar una ecuación que lo tenga por solución.

Problema 1.

Dada una familia paramétrica de funciones

$$y = y(x, c), \tag{2.7}$$

dependiente del parámetro $c \in \mathbb{R}$, ¿Será posible hallar una ecuación para la cual la familia sea la solución general?

En líneas generales la respuesta es si. Nos conviene expresar (2.7) como una ecuación implícita

$$f(x, y, c) = 0. \tag{2.8}$$

Derivando esta ecuación respecto a x

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y'(x, c) = 0. \tag{2.9}$$

Ahora es posible eliminar c de (2.8) y (2.9) al costo de quedarnos con una sola ecuación.

Ejemplo 2.6. Encontrar la ecuación que satisface la familia paramétrica

$$x^2 + y^2 = c^2.$$

[1]Estamos usando una noción bastante ingenua de corrección

Derivamos

$$2x + 2yy' = 0.$$

Ya está!!!

Ejemplo 2.7. Idem $x^2 + y^2 = 2cx$. Derivando

$$2x + 2yy' = 2c.$$

Eliminamos c de las dos relaciones

$$\frac{x^2 + y^2}{x} = 2x + 2yy' \Rightarrow \boxed{y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy}}.$$

Problema 2.

Dada una familia paramétrica

$$f(x, y, c) = 0,$$

encontrar otra

$$g(x, y, d) = 0$$

tal que los ángulos que forman los gráficos entre las funciones de una y de otra familia sean rectos en cada punto de corte entre ellos.

Para resolver este problema se completan estos pasos

- Se encuentra la ecuación diferencial que satisface la familia dada, digamos

$$y' = h(x, y).$$

- Se resuelve

$$y' = -\frac{1}{h(x, y)}.$$

Ejemplo 2.8. Encontrar la familia de curvas ortogonales a la flia de circunferencias

$$x^2 + y^2 = c^2$$

Hallamos antes que la ecuación que satisfacen estas curvas es

$$y' = -\frac{x}{y}.$$

Luego deberíamos resolver

$$y' = \frac{y}{x}.$$

Que aún no sabemos resolver, pero SymPy si!!!

Función SymPy (`dsolve`).

Sintaxis (ampliar en la documentación SymPy)
`dsolve(eq, f(x), hint)`
`eq`: Ecuación (posicional)
`f(x)`: función incognita (posicional)
`hint`: Método a emplear. Argumento con nombre `hint='cadena'`.

Ejemplo 2.9.

```
x=symbols('x')
y=Function('y')(x)
MiEcua=Eq(y.diff(x),y/x)
f=dsolve(MiEcua,y)
```

Resultado: Flía rectas por el origen.
La instrucción
`f=dsolve(MiEcua,y,hint='separable')`
produce el mismo resultado.

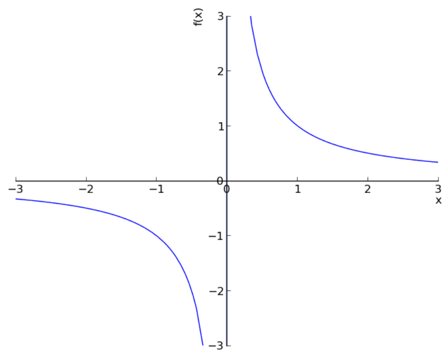
Función SymPy (`plot`).

Sintaxis (Ampliar en la documentación SymPy)
Para un gráfico simple
`plot(expr,rango,opcionales(claves))`
`expr`: Expresión a graficar
`rango`: Conjunto donde varia la variable independiente
`opcionales` Argumentos que modifican la apariencia del gráfico. Generalemente de la forma de clave=valor

Ejemplo 2.10.

```
x=symbols('x')
f=plot(1/x,(x,-3,3),ylim=(-3,3))
```

Resultado:



Ejemplo 2.11. Grafiquemos un familias paramétrica de funciones.

```
from sympy import *
x,y=symbols('x,y')
Rango=range(21)
L=[tan(pi*k/21.0) for k in Rango]
p=plot(L[0]*x,(x,-2,2),show=False ,xlim=(-2,2),\
ylim=(-2,2),aspect_ratio=(1,1))
for pend in L[1:]:
    p1=plot(pend*x,(x,-2,2),show=False,\
xlim=(-2,2),ylim=(-2,2),aspect_ratio=(1,1))
    p.append(p1[0])
for r in range(1,10):
    p1=plot_implicit(Eq(x**2 + y**2, 0.2*r),\
show=False,aspect_ratio=(1,1),xlim=(-2,2),ylim=(-2,2))
    p.append(p1[0])
p.show()
```

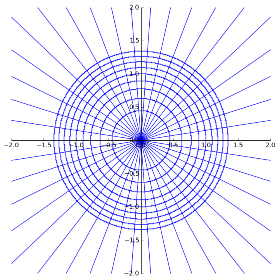


Figura 2.2: Familia curvas ortogonales

Resultado:

Problema 3 (Familias paramétricas de funciones en coordenadas polares)**.**

En ocasiones la ecuación de la familia de curvas esta dada en otras coordenadas. Por ejemplo supongamos que tenemos la flia de curvas dadas por una EDO en coordenadas polares

$$\frac{dr}{d\theta} = f(r, \theta),$$

y queremos hallar su flia ortogonal.

Solución: Calculemos dy/dx para las curvas en la familia dada.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{r_\theta \operatorname{sen}\theta + r\cos\theta}{r_\theta\cos\theta - r\operatorname{sen}\theta} = \frac{f\operatorname{sen}\theta + r\cos\theta}{f\cos\theta - r\operatorname{sen}\theta},$$

donde $r_\theta = dr/d\theta$. La flia ortogonal tiene que satisfacer

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f\cos\theta - r\operatorname{sen}\theta}{f\operatorname{sen}\theta + r\cos\theta}$$

Luego

$$\frac{r_\theta \operatorname{sen}\theta + r\cos\theta}{r_\theta\cos\theta - r\operatorname{sen}\theta} = -\frac{f\cos\theta - r\operatorname{sen}\theta}{f\operatorname{sen}\theta + r\cos\theta}.$$

Si despejamos r_θ llegamos a la ecuación de la flia de curvas ortogonales en coordenadas polares

$$\boxed{\frac{dr}{d\theta} = -\frac{r^2}{f}.} \tag{2.10}$$

Aconsejamos ampliar este tema de Simmons (1991).

2.6 Separación de variables

En esta unidad presentaremos algunos métodos de solución para ecuaciones de primer orden. Empezaremos con el, quizás, más popular de todos, el método de *separación de variables*.

Definición 1 (Ecuaciones en variables separadas)**.**

Se dice que en una ecuación de primer orden

$$y' = f(x, y)$$

separan las variables, si es posible la factorización $f(x, y) = g(x)h(y)$.

Una ecuación en la que se separan variables se puede resolver siguiendo los siguientes pasos. Asumamos $h(y) \neq 0$. En la práctica hay que chequear cuando $h(y) = 0$, es frecuente que así encontremos una solución adicional.

$$\frac{y'}{h(y)} = g(x),$$

Si H y G son primitivas de $1/h$ y g respectivamente por la regla de la cadena tenemos

$$\frac{d}{dx}H(y) = \frac{d}{dx}G(x)$$

Luego

$$H(y) = G(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Por último, si podemos encontrar la inversa de H

$$\boxed{y(x) = H^{-1}\left(G(x) + C\right).} \tag{2.11}$$

será candidata a solución general. No podemos estar seguros de esta afirmación, sobre todo porque la deducción de esta fórmula estuvo sujeta a suposiciones, como $h(y) \neq 0$.

Ejemplo 2.12. Resolver

$$y' = \frac{y}{x}.$$

Como queremos agrupar todos los factores que contienen la variable y en uno de los miembros, debemos ``pasar dividiendo'' y. Esto es imposible si $y = 0$. Reemplazando $y \equiv 0$ en la ecuación vemos que la resuelve. Así hemos encontrado nuestra primera solución $y \equiv 0$. El resto del método, es común llevarlo adelante de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \Longrightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \Longrightarrow & \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \\
\Longrightarrow & \ln|y| = \ln|x| + C \Longrightarrow |y| = k|x|, \text{ con } k > 0 \\
\Longrightarrow & \, y = kx, \text{ con } k \neq 0
\end{aligned}$$

Notar que, al fin y al cabo, la solución general es $y = kx$ con $k \in \mathbb{R}$. La solución ``díscola'' $y \equiv 0$ también se escribe $y = kx$, cuando $k = 0$.

Función SymPy (`classify_ode`: clasificación de ecuaciones)**.**

Sintaxis
`classify_ode(eq, f(x))`

Ejemplo 2.13.

Sympy contiene un comando que nos dice que metodo es posible aplicar a una ecuaqción dada.

```
x=symbols('x')
y=Function('y')(x)
MiEcua=Eq(y.diff(x),y/x)
tipo=classify_ode(MiEcua,y)
```

Resultado:

```
('separable', '1st_exact', '1st_linear',
'almost_linear', 'lie_group',  etc)
```

2.7 Aplicaciones

Vamos a describir algunos ejemplos. Algunos de ellos llevan a problemas matemáticos muy simples. No obstante es oportuno discutirlos por dos motivos, habituarnos a la utilización de la matemática para resolver problemas de otras ciencias y sentar las bases para discutir problemas más relevantes desde una óptica matemática.

2.7.1. Ley de reproducción normal

En muchos ejemplos de biología, química-física, etc, hay magnitudes que crecen(decrecen) siguiendo una ley que denominaremos Ley de reproducción normal . Según esta ley la cantidad de individuos, sustancia, materia, energía, etc, que se agrega o elimina de una población, cuerpo, etc por unidad de tiempo es proporcional a la cantidad de individuos, sustancia, etc que hay presente. Una población de seres vivos puede reproducirse de esta manera bajo algunas circunstancias especiales, por ejemplo si cuenta con fuente ilimitada de alimentos.

Si $P(t)$ es la cantidad de individuos en el momento t, la ley de reproducción normal establece en este caso la siguiente ecuación diferencial de primer orden

$$P'(t) = kP(t), \quad \text{con } k > 0.$$

La solución es hallada con suma facilidad, por ejemplo usando separación de variables, siendo ella

$$\boxed{P(t) = Ce^{kt}, \quad C \in \mathbb{R}.}$$

La constante C se puede determinar si tenemos un problema a valores iniciales (pvi), por ejemplo $P(0) = P_0$, siendo $P_0 \in \mathbb{R}$ dado. En ese caso $C = P_0$.

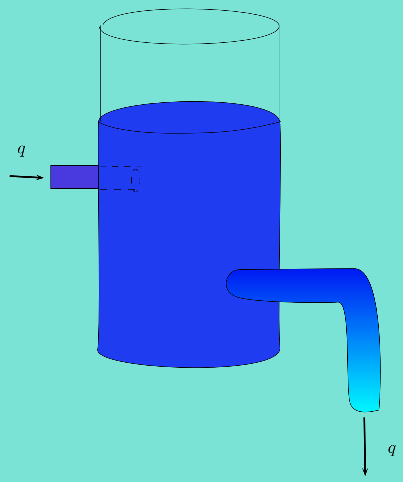
Otro ejemplo de comportamiento similar es la desintegración radiactiva . Algunos átomos de ciertas sustancias, pueden ``desarmarse'' en átomos de otras sustancias. En el proceso suelen emitir radiaciones. La velocidad de desintegración sigue una ley de reproducción normal pero hay que tener en cuenta que la materia radiactiva, es decir la ``población'' en este caso, se pierde. Si $x(t)$ es la masa de materia radiactiva en el momento t, evolucionará acorde a la ley

$$\boxed{x'(t) = -kx(t), \quad \text{con } k > 0.}$$

2.7.2. Soluciones

Problema 1.

Un tanque contiene inicialmente N m^3 de H_2O entre los cuales hay disueltos C kg de sal común $NaCl$. A través de una boca de entrada y una de salida empieza circular la solución, entrando y saliendo con el mismo caudal $q\frac{\text{m}^3}{s}$. Se supone que la solución entrante tiene una concentración conocida r. Encontrar la cantidad de sal en el momento t.



Sea $x(t)$ la cantidad de $NaCl$ en el tanque en el momento t. entonces

$$\begin{aligned} x'(t) &= \text{cantidad que entra } - \text{cantidad que sale} \\ &= qr - q\frac{x(t)}{N} \end{aligned}$$

2.7.3. Dinámica del punto

Discusión Teórica

Vamos a recordar algunas temas de la asignatura física. En particular, el tema del movimiento de un cuerpo de masa m, al que podemos suponer puntual, dentro del espacio euclideano tridimensional. A un cuerpo de estas características lo llamaremos punto masa. Denotamos por $x(t) \in \mathbb{R}^3$ su posición en algún marco de referencia cartesiano ortogonal e inercial . Suponemos que sobre él actúa una fuerza F. Recordemos que $x'(t)$ es la velocidad $v(t)$ y que $x''(t)$ es la aceleración $a(t)$. La segunda ley de Newton implica que

En mecánica newtoniana, un sistema de referencia inercial es un sistema de referencia en el que las leyes del movimiento cumplen las leyes de Newton

$$\boxed{mx''(t) = F} \tag{2.12}$$

Supongamos que el movimiento del punto masa se realiza entre los momentos t_0 y t_1. Como has visto en Cálculo III la lóngitud de la curva recorrida $s(t)$ se puede calcular por

$$s = \int_{t_0}^{t_1} |x'(t)|dt = \int_{t_0}^{t_1} |v(t)|dt. \tag{2.13}$$

A s se lo suele denominar elemento de arco . Es comun querer utilizar a s como variable independiente en lugar de t, puesto que algunas fórmulas se simplifican de esta forma. Por ejemplo

$$F \cdot v(t)dt = F \cdot \frac{v(t)}{|v(t)|}|v(t)|dt = F_t ds, \tag{2.14}$$

donde F_t denota la proyección de la fuerza F sobre la dirección tangente a la trayectoria.

Si integramos (2.14) entre t_0 y t_1 y usamos (2.12) obtenemos

$$\begin{aligned} W := \int_{s_0}^{s_1} F_t(x(s))ds &= \int_{t_0}^{t_1} F(x(t)) \cdot v(t)dt \\ &= m \int_{t_0}^{t_1} v'(t) \cdot v(t)dt \\ &= \frac{m}{2} \int_{t_0}^{t_1} \frac{d|v|^2}{dt} dt \\ &= \frac{m}{2}|v(t_1)|^2 - \frac{m}{2}|v(t_0)|^2. \end{aligned} \tag{2.15}$$

A la cantidad $\frac{m}{2}|v|^2$ se la denomina *energía cinética* E_c y a W se lo denomina *trabajo*. Las relaciones obtenidas dicen que la variación de la energía cinética es igual al trabajo realizado $W = \Delta E_c$ por la fuerza F. El trabajo realizado depende de la proyección tangencial de la fuerza F_t. Llamaremos a esta relación Principio de Conservación de la Energía Mecánica.

Vamos a referirnos por *rapidez* al módulo de la velocidad. Si uno quiere incrementar o reducir la rapidez final $|v(t_1)|$ entonces deberá tener fuerzas con una componente tangencial no nula. Dicho de otra forma, si la fuerza es perpendicilar al movimiento, no hay cambio de rapidéz.

Hay fuerzas que siempre actuan en la dirección del movimiento. El ejemplo más conocido son las fuerzas de fricción, resistencia del aire, resistencia a la rodadura, etc. Estás fuerzas, actúan sólo en la dirección del movimiento y se oponen a él.

Por el contrario hay otras que actúan perpendiculares al movimiento $F_t = 0$. Ejemplo de ello son las fuerzas que mantienen a un cuerpo moviéndosé a lo largo de una guía. Por ejemplo un niño cayendo por un tobogán. Que el niño no se despegue de la guía (tobogán) se explica por la aparición de una fuerza que se denomina reacción de vínculo que actúa en la dirección perpendicular al movimiento esto es decir a la guía. Está fuerza debe compensar a toda otra fuerza que trata de apartar al cuerpo de la guía. En el caso del tobogán la gravedad trata de apartar al niño de aquel.

Cuerpos cayendo por guías

Analicemos más en detalle el movimiento de un cuerpo cayendo a lo largo de una guía estando además influído por la acción de la gravedad. Supondremos el movimiento en las proximidades de la superficie de la Tierra y por ello, supondremos que la magnitud de la fuerza de la gravedad es la constante mg.

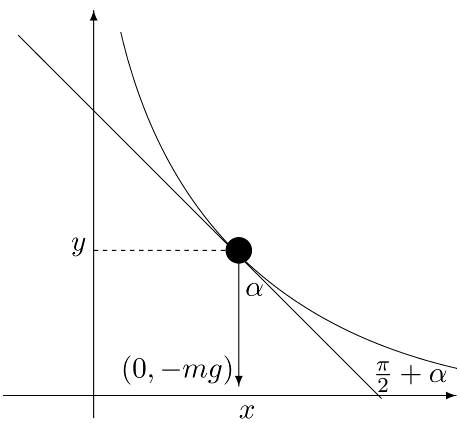


Figura 2.3: Caída por una guía

Supongamos que la guía esta confinada a un plano. Introducimos un sistema de coordenadas ortogonales en dicho plano, con el suelo paralelo al eje x

El elemento longitud de arco s de una curva que es el gráfico de una función $y(x)$ para x en $[x_0, x_1]$ viene dado por

$$s = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'(x)^2}dx$$

La fuerza de vínculo de la guía tiene componente tangencial nula, la gravedad tiene una componente tangencial no nula. Su magnitud es $mg\cos\alpha$ (ver dibujo). Vamos a tratar de expresar $\cos\alpha$ en términos de $y'(x)$. Supongamos $\cos\alpha > 0$ e $y'(x) < 0$. Los demás casos quedan como **ejercicio**.

$$\tan^2\alpha = \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha} - 1$$

e

$$y'(x) = \tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\frac{1}{\tan\alpha}$$

Podemos usar las relaciones anteriores para escribir $\cos\alpha$ en función de $y'(x)$

$$\cos\alpha = -\frac{y'(x)}{\sqrt{1+y'(x)^2}} \tag{2.16}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\frac{m}{2}|v(t_1)|^2 - \frac{m}{2}|v(t_0)|^2 &= \int_{s_0}^{s_1} F_t ds = \int_{x_0}^{x_1} F_t \frac{ds}{dx} dx \\
&= -mg \int_{x_0}^{x_1} \frac{y'(x)}{\sqrt{1+y'(x)^2}} \sqrt{1+y'(x)^2} dx \\
&= -mg\,(y_1 - y_0)
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Esto nos permite escribir la rapidez en función de la altura repecto al piso.

2.7.4. El péndulo

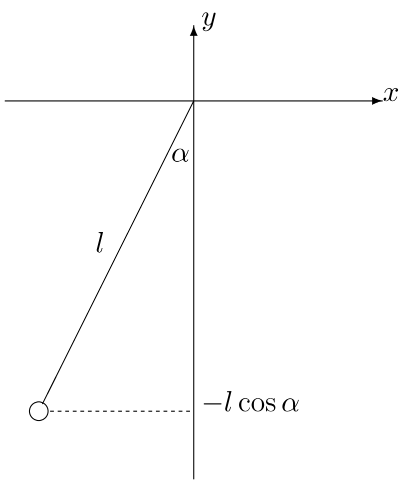


Figura 2.4: Péndulo

Se trata de una masa puntual m suspendida de un punto por medio de una barra de longitud l a la que suponemos sin masa. Equivale al movimiento sobre una guía circular. Usaremos el ángulo α marcado en la figura, como variable dependiente.

Supondremos que el origen del sistema de de coordenadas está sobre el punto de amarre de la barra. Entonces de (2.17) con $t_1 = t$ deducimos

$$\begin{aligned}
&\frac{m|v(t)|^2}{2} - \frac{m|v(t_0)|^2}{2} \\
&\qquad = -mg\,(y(t) - y(t_0)) \\
&\qquad = mg\cos\alpha(t) - mg\cos\alpha(t_0).
\end{aligned}$$

Ahora la posición de la masa es $x(t) = l(\operatorname{sen}\alpha, -\cos\alpha)$ luego

$$v(t) = l\alpha'(t)(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha).$$

Tomando módulo

$$|v(t)|^2 = l^2\alpha'(t)^2.$$

Entonces

$$\frac{ml^2\alpha'(t)^2}{2} = mgl\cos\alpha(t) - mgl\cos\alpha(t_0) + \frac{mv(t_0)^2}{2}.$$

Derivando esta relación

$$ml^2\alpha'(t)\alpha''(t) = -mgl\alpha'(t)\operatorname{sen}\alpha(t).$$

De esto deducimos la ecuación del péndulo

$$\boxed{\alpha''(t) = -\frac{g}{l}\operatorname{sen}\alpha(t)}.$$

2.8 Ecuaciones homogéneas

Volvemos al problema de resolver ecuaciones de primer orden. Abordamos un nuevo método.

Definición 1 (Funciones homogéneas).

Una función $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice homogénea de grado α si

$$f(rx, ry) = r^{\alpha} f(x, y).$$

Ejemplo 2.14.

- $f(x, y) = \frac{y}{x}$ es homogénea de grado 0.
- Más generalmente, cualquier función $f(x, y)$ que dependa sólo de x/y, esto es que se escriba de la forma $f(x, y) = g(y/x)$ es homogénea de grado 0. Así $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$ es homogénea de grado 0 pues $\frac{x-y}{x+y} = \frac{1-x/y}{1+x/y}$
- $f(x, y) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k y^{n-k}$ es homogénea de grado n.

Definición 2 (Ecuaciones homogéneas).

Una ecuación

$$y' = f(x, y) \tag{2.18}$$

tal que f es homogénea de grado 0 se llamará ecuación homogénea.

Si una ecuación del tipo (2.18) es homogénea entonces se transforma en una ecuación separable mediante el cambio de variable dependiente $\boxed{z = y/x}$. En efecto, para $x \neq 0$

$$f(x, y) = x^0 f\left(1, \frac{y}{x}\right) = f(1, z)$$

y

$$y' = z'x + z$$

Como $y' = f(x, y)$ tenemos

$$z'x + z = f(1, z) \Longrightarrow \frac{dz}{f(1, z) - z} = \frac{dx}{x}. \tag{2.19}$$

Ejemplo 2.15. Resolver $y' = \frac{x+y}{x-y}$.

La ecuación (2.19) queda

$$\begin{array}{c} \frac{dx}{x} = \frac{dz}{\frac{1+z}{1-z} - z} = \frac{(1-z)dz}{1+z^2} \\ \Downarrow \\ \ln|x| + C = \arctan(z) - \frac{1}{2}\ln|1 + z^2| \end{array}.$$

2.9 Ecuaciones exactas

Definición 1 (Diferencial).

Dada una función f de n variables independientes $x_1, \ldots, x_n$ definimos su diferencial por

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n. \tag{2.20}$$

Esta definición obviamente carece de rigor pues el miembro de la derecha en (2.20) contiene las expresiones indefinidas dx_j. La diferencial puede ser definida con toda corrección, es un ejemplo de forma diferencial , en particular es una 1-forma. En la unidad que sigue hablaremos un poco más del concepto de forma diferencial. El uso que haremos de las formas diferenciales es muy elemental, podríamos evitar por completo su uso al costo de usar una notación ligeramente menos compacta y simétrica.

Es costumbre escribir una ecuación diferencial como la 1-forma diferencial

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{2.21}$$

Que corresponde a la ecuación, escrita de manera tradicional, $y' = -M(x,y)/N(x,y)$.

Dada $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, satisfaciendo las condiciones del Teorema de la Función Implícita , la expresión

$$f(x,y) = c \tag{2.22}$$

define una familia paramétrica de curvas, con parámetro c. Derivanda la expresión podemos representar esta familia como soluciones de la EDO

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = 0 \Longleftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0 \Longleftrightarrow df = 0.$$

Esto nos sugiere la idea de que, dada una ecuación diferencial cualquiera, indaguemos si se puede escribir o puede ser transformada de alguna manera en una ecuación de la forma $df = 0$. Para que la ecuación (2.21), se pueda expresar como $df = 0$ se debe cumplir que $M = \partial f/\partial x$ y $N = \partial f/\partial y$. Vale decir el campo vectorial $(x,y) \mapsto (M(x,y), N(x,y))$ es un campo gradiente o conservativo , con potencial f.

Si una fuerza F está dada por $(M,N) = \nabla f$ (campo coservativo) reemplazando en (2.15) y llamando $U = -f$ obtenemos que $E := m|v(t)|^2/2 + U(x(t))$ es constante. Se dice que E es una magnitud conservada y se la denomina en este caso energía.

No todo campo es un campo gradiente, recordemos el siguiente teorema del análisis vectorial.

Teorema 1 (Caracterización de campos conservativos).

Sea $\mathcal{O}$ un conjunto abierto y simplemente conexo de $\mathbb{R}^n$. Son equivalentes

A. El campo $F : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^n$ es un gradiente.

B. Si C es cualquier camino cerrado entonces

$$\oint_C F \cdot dx = 0.$$

C.

$$\frac{\partial F^i}{\partial x_j} = \frac{\partial F^j}{\partial x_i}, \quad \text{para } i,j = 1, \ldots, n$$

Pensando al campo F como un campo de fuerzas sobre el espacio euclideo tridimensional, el ítem B expresa que el trabajo realizado por la fuerza a lo largo de un camino cerrado es cero. El ítem C afirma que $\nabla \times F = 0$, la fuerza es irrotacional.

El item C es simple de chequear. Una vez establecido que un campo es conservativo tendremos el problema de hallar el potencial f. Ilustremos esto con el campo $(x, y) \mapsto (M(x, y), N(x, y))$. Supongamos que $\mathcal{O}$ es abierto de $\mathbb{R}^2$ y

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}, \qquad \text{para } (x, y) \in \mathcal{O}.$$

En primer lugar debemos tener un campo escalar f tal que

$$M = \frac{\partial f}{\partial x} \Rightarrow f = \int M dx + C(y).$$

Ahora como $f_y = N$

$$N = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int M dx + C'(y) \Rightarrow C'(y) = N - \frac{\partial}{\partial y} \int M dx.$$

Para que esta ecuación tenga solución $N - \frac{\partial}{\partial y} \int M dx$ debe ser sólo función de y. Pero la condición necesaria y suficiente para ello es

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial x} \left(N - \frac{\partial}{\partial y} \int M dx \right) \\ &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \int M dx \\ &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \int M dx \\ &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}. \end{aligned}$$

Pero estamos bajo ese supuesto, entonces

$$\boxed{f = \int M dx + \int \left(N - \frac{\partial}{\partial y} \int M dx \right) dy.} \tag{2.23}$$

Ejemplo 2.16. Resolver $e^y dx + (xe^y + 2y)dy = 0$.
Solución: Aquí

$$M = e^y \quad \text{y} \quad N = xe^y + 2y.$$

Así

$$\frac{\partial M}{\partial y} = e^y = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

La ecuación es exacta. El potencial f debe cumplir

$$f = \int e^y dx = xe^y + C(y).$$

Luego

$$C(y) = \int \left(xe^y + 2y - \frac{\partial}{\partial y} xe^y \right) dy = y^2$$

Tener en cuenta que la función potencial f no es única, queda deerminada hasta una constante aditiva de integración que podemos elegir a gusto ya que debemos encontrar sólo un potencial. Entonces podemos tomar

$$f = xe^y + y^2.$$

La solución general de la ecuación estará dada por

$$xe^y + y^2 = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Como no sabemos despejar $\boxed{y}$ de aquí dejamos indicada de esta manera la solución.

2.10 Factores integrantes

Las ecuaciones exactas son raras, no obstante tenemos un recurso para llevar algunas ecuaciones no exactas a una equivalente y exacta.

Supongamos que la ecuación (2.21) no es exacta. La idea es encontrar una función $\mu(x, y)$ llamada factor integrante que haga exacta la ecuación

$$\mu\,(Mdx + Ndy) = 0.$$

Para ello se debe cumplir que

$$\frac{\partial \mu M}{\partial y} = \frac{\partial \mu N}{\partial x} \iff \boxed{\mu\frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial \mu}{\partial y}M = \frac{\partial N}{\partial x}\mu + N\frac{\partial \mu}{\partial x}}. \tag{2.24}$$

Proposición 1 (Existencia de factores integrantes)**.**

Toda ecuación de primer orden (2.21), con $N \neq 0$, que tiene una solución general que se escribe como en (2.22), con $\partial f/\partial y \neq 0$ tiene un factor integrante.

Comentario: La suposición $N \neq 0 \neq \frac{\partial f}{\partial y}$, es razonable pues $N = 0$ imlpicaría que no podemos despejar y' de (2.21) y $\partial f/\partial y$ contradice las hipótesis del Teorema de la Función Implícita, herramienta necesaria para suponer que y es función de x

Dem. Si derivamos (2.22) conseguimos

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0.$$

De esta ecuación y (2.21) vemos que

$$-\frac{M}{N} = y' = -\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y} \Longrightarrow \frac{\partial f/\partial x}{M} = \frac{\partial f/\partial y}{N} =: \mu(x, y)$$

De la igualdad de arrriba se deduce que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \mu M \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \mu N.$$

Es decir μ es factor integrante. □

La proposición anterior nos dice que, mientras la ecuación sea resoluble, siempre existe un factor integrante. Pero no ayuda a hallarlo dado que parte de la solución que es lo que queremos hallar. Otra alternativa es resolver la ecuación (2.24) que es una ecuación en derivadas parciales para μ, que normalmente es más dificil que resolver la original. Así, mientras que el método es siempre aplicable, en la práctica es útil en situaciones específicas.

Hay que señalar que sólo necesitamos una solución de (2.24) y no su solución general. En la práctica se suele hacer alguna suposición sobre μ que simplifique la expresión. Es decir proponer alguna forma específica para μ que haga la ecuación (2.24) más sencilla de resolver. Por supuesto, a priori el factor integrante, si bien existe, no tiene ninguna forma predeterminada. Lo que hacemos es lo que en lenguaje culto se conoce como ansatz , y en lenguaje coloquial, que aquí es más significativo, estamos haciendo un lance o tratando de adivinar μ, sin mucho más criterio que buscarlo entre equellas funciones con una forma (simple) predeterminada. Por ejemplo, es común suponer que μ es sólo función de una de las variables. Si por ejemplo asumimos que $\mu = \mu(x)$ las ecuación (2.24) se escribe

$$\mu\frac{\partial M}{\partial y} = \mu\frac{\partial N}{\partial x} + N\mu'(x) \Longrightarrow \boxed{\frac{\mu'}{\mu} = \frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N}}$$

Este ansatz no siempre funcionará, para que lo haga, la función en el segundo miembro $(\partial M/\partial y - \partial N \partial x)/N$ debe depender sólo de x. Si eso ocurre

$$\mu(x) = e^{\int \frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N} dx}. \tag{2.25}$$

es un factor integrante. Recordar que sólo necesitamos hallar uno, por ese motivo omitivos constantes de integración.

De manera similar, si la función

$$\frac{\partial N/\partial x - \partial M/\partial y}{M}$$

depende sólo de y tenemos que

$$\mu(y) = e^{\int \frac{\partial N/\partial x - \partial M/\partial y}{M} dy}$$

es un factor integrante que, en este caso, sólo depende de y.

Ejemplo 2.17. $ydx + (x^2y - x)dy = 0$.

Primero chequeemos la posible exactitud.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 \text{ y } \frac{\partial N}{\partial x} = 2xy - 1 \Longrightarrow \text{no exacta.}$$

Ahora

$$\frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N} = \frac{2 - 2xy}{x(xy-1)} = -\frac{2}{x}.$$

El factor integrante es

$$\mu(x) = e^{-2\ln|x|} = \frac{1}{x^2}.$$

2.11 Aplicación: antenas y espejos parabólicos

Ejemplo 2.18. *Espejos, antenas parabólicos.* Hallar la forma del espejo curvo tal que el reflejo de todo haz de luz que viaja paralelo al eje x con dirección negativa repecto a este eje pasa por el $(0, 0)$.

Antena parabólica

Ejercicio. Dejamos como ejercicio demostrar que un haz de luz que se refleja sobre un espejo lo hace de tal manera que los ángulos que se forman con los rayos de incidencia y refracción y la tangente al espejo en el punto de incidencia son iguales ($\beta = \alpha$ en el dibujo). Para resolver esto hay que usar el principio de mínimo tiempo de Fermat.

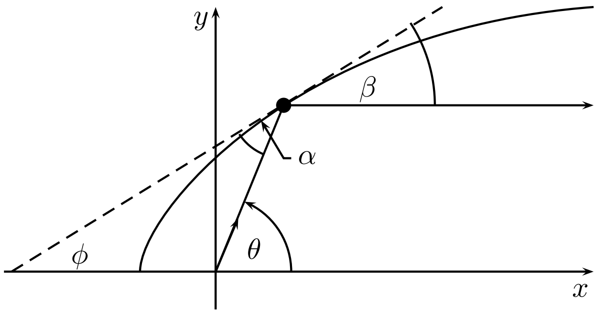


Figura 2.5: Reflejo en un espejo curvo

Solución. Sea (x, y) el punto de incidencia. Apelando a la geometría elemental, $\phi = \beta$ y $\theta = \alpha + \phi = 2\beta$. Como $\tan\theta = \frac{y}{x}$ y como

$$\tan\theta = \tan 2\beta = \frac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta},$$

deducimos que

$$\frac{y}{x} = \frac{2dy/dx}{1-(dy/dx)^2}.$$

Despejando

$$(\pm\sqrt{x^2+y^2}+x)dx + ydy = 0 \tag{2.26}$$

La expresión sugiere introducir coordenadas polares

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\operatorname{sen}\theta.$$

Atendiendo a (2.20) tenemos:

$$dx = \cos\theta dr - r\operatorname{sen}\theta d\theta, \quad dy = \operatorname{sen}\theta dr + r\cos\theta d\theta.$$

Sustituyendo en (2.26)

$$\mp r^2\sin(\theta)d\theta + (\pm r\cos(\theta) + r)\, dr = 0.$$

Notar que

$$\frac{N_\theta - M_r}{M} = -\frac{1}{r}$$

es independiente de θ. Tenemos que $\mu(r) = r^{-1}$ es factor integrante. Multiplicando por μ llegamos a la ecuación exacta

$$\mp r\operatorname{sen}\theta d\theta + (\pm\cos\theta + 1)dr = 0.$$

Siguiendo las técnicas expuestas llegamos a la función potencial

$$\Phi(\theta, r) = \pm r\cos\theta + r.$$

Convirtiendo nuevamente a coordenadas cartesianas, encontramos que la solución general es

$$\pm x + \sqrt{x^2+y^2} = c.$$

Despejando

$$y^2 = \mp 2xc + c^2 = 2c\left(\mp x + \frac{c}{2}\right)$$

Que es la familia de todas las parábolas con eje de simetría x y con foco en $(0, 0)$. El signo $\mp$ refleja el hecho que el espejo podría mirar hacia un lado u otro.

2.12 Ecuaciones Lineales

Definición 1 (Ecuación lineal).

Se llama ecuación diferencial lineal a una ecuación que es lineal respecto a la/s variables dependientes. La siguiente es la ecuación diferencial lineal general de primer orden

$$y' + p(x)y = q(x) \tag{2.27}$$

y la de segundo orden

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x). \tag{2.28}$$

Aquí p, q y r son funciones de x usualmente definidas sobre un intervalo abierto de $\mathbb{R}$.

La ecuación puede ser no lineal repecto a la variable independiente.

Es costumbre introducir los operadores diferenciales $L_1[y] = y' + py$ y $L_2[y] = y'' + py' + qy$. Para una ecuación lineal, los operadores L_1 y L_2 son lineales. Es decir, $L_1[y_1 + y_2] = L_1[y_1] + L_1[y_2]$.

Vamos a resolver la ecuación lineal de primer orden (2.27). Esto es sencillo pues la forma diferencial asociada

$$dy + (p(x)y - q(x))dx = 0 \tag{2.29}$$

tiene un factor integrante que depende sólo de x. En efecto como $M = p(x)y - q(x)$ y $N = 1$.

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N} = p(x).$$

Entonces $\mu(x) = e^{\int pdx}$ es factor integrante. Luego si multiplicamos por μ en (2.29), la expresión es exacta.

$$e^{\int pdx}dy + p(x)e^{\int pdx}ydx = q(x)e^{\int pdx}dx.$$

Podemos identificar rápidamente, sin necesidad de hacer cálculos, el correspondiente potencial.

$$d\left(e^{\int pdx}y\right) = d\left(\int q(x)e^{\int p}dx\right).$$

Integrando

$$e^{\int pdx}y = \int e^{\int pdx}q(x)dx + C.$$

Entonces

$$\boxed{y = e^{-\int pdx}\left\{\int e^{\int pdx}q(x)dx + C\right\}} \tag{2.30}$$

Ejemplo 2.19. Resolver $y' + y/x = 3x$.
Solución. En la práctica, para evitar recordar fórmulas, se suele repetir el procedimiento que llevo a la fórmula (2.30), ahora, dado la cercanía de su derivación, vamos a usarla de manera directa. La solución general es

$$
\begin{aligned}
y(x) &= e^{-\int \frac{1}{x}dx}\left\{\int e^{\int \frac{1}{x}dx} 3x dx + C\right\} \\
&= \frac{1}{|x|}\left\{\int |x| 3x dx + C\right\} \\
&= x^2 + \frac{C}{|x|} \\
&= x^2 + \frac{C}{x}
\end{aligned}
$$

2.13 Reducción de orden

Algunas ecuaciones de segundo orden

$$F(x, y, y', y'') = 0 \tag{2.31}$$

se pueden reducir a una de primer orden. Por ejemplo si F no depende de y. Es decir la ecuación es

$$F(x, y', y'') = 0 \tag{2.32}$$

Aquí introducimos la nueva variable dependiente $\boxed{p = y'}$, que resuelve

$$F(x, p, p') = 0.$$

Que es una ecuación de primer orden. Supuesto que la podemos resolver y encontrar una solución general para p, tendremos

$$y = \int p dx + C \tag{2.33}$$

Es la solución general de la ecuación de segundo orden.

Si la ecuación general de segundo orden (2.31) no depende de x, es decir tenemos

$$F(y, y', y'') = 0 \tag{2.34}$$

entonces nuevamente usaremos $\boxed{p = y'}$ como nueva variable depeniente pero también $\boxed{y}$ como nueva variable independiente. Como

$$y'' = p' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}p$$

La ecuación se reduce a la siguiente ecuación de primer orden

$$F\left(y, p, \frac{dp}{dy}p\right) = 0 \tag{2.35}$$

2.14 Aplicaciones

2.14.1. Velocidad de escape

Problema 1 (Velocidad de escape)**.**

Que velocidad hay que imprimirle a un proyectil que es lanzado verticalmente desde la superficie de la Tierra si nuestra pretensión es que el proyectil se escape al infinito. La velocidad más chica con esta cualidad se llama velocidad de escape.

Solución. Para resolver este problema hay que tomar en consideración la Ley de gravitación universal de Newton. En la parte que nos interesa, esta Ley afirma que el módulo de la fuerza de gravedad que se ejercen entre si dos cuerpos de masa m_1 y m_2 separados una distancia r es proporcional al producto de las masas e inversamente proporcional al cuadrado de las distancia que los separa. Vale decir

$$|F| = G\frac{m_1 m_2}{r^2},$$

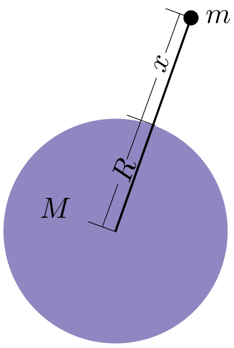


Figura 2.6: Velocidad de Escape

donde G es la constante de proporcionalidad. Cuando los cuerpos no son puntos masa, sino esferas de dendsidad uniforme la distancia de separación hay que medirla entre los centros de masa de los cuerpos.

Hay que aclarar que usando el Principio conservación energía mecánica podemos resolver el problema de una manera más simple. Incluso podemos ver que la suposición de que el tiro es vertical no es necesaria, es decir la velocidad de escape es la misma aunque el tiro sea oblicuo. Discutiremos esa solución durante la clase. Lamentablemente, esta solución no usa ecuaciones diferenciales. Vamos a dar una solución, quizás un poco más complicada, pero que invoca las técnicas discutidas.

Supondremos a la Tierra una esfera de radio R, masa M y su centro de masa en el centro de la esfera. Al proyectil lo supondremos un punto masa con masa m y su posición en el momento t, denotada $x = x(t)$, la mediremos sobre un eje vertical con origen en la superficie de la Tierra. Todo como está indicado en la figura 2.6. Luego la distancia Tierra-proyectil será igual a $R + x$ donde x es la posición del proyectil. Utilizando la Segunda ley de Newton, $F = ma$, obtenemos

$$mx''(t) = -\frac{GMm}{(R+x)^2}.$$

Es una ecuación de la forma

$$F(x, x', x'') = 0.$$

Con variable dependiente x e independiente t. Pero F no depende de t y por consiguiente, como vimos, se puede convertir en una ecuación de primer orden tomando como nuevas variables: 1) independiente x 2) dependiente $v = x'$. En estas variables

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}.$$

La ecuación se convierte en

$$v\frac{dv}{dx} = -\frac{GM}{(R+x)^2} \Longrightarrow vdv + \frac{GM}{(R+x)^2}dx = 0.$$

Que es una ecuación en variables separables y también es exacta. Usaremos la técnica discutida para ecuaciones exactas , los que nos indica que la solución general se expresa de la siguiente forma

$$\frac{v^2}{2} - \frac{GM}{(R+x)} = E = \text{cte}. \tag{2.36}$$

Siempre las ecuaciones en variables separables son exactas pues se escriben de la forma

$$M(x)dx+N(y)dy=0,$$

por consiguiente tienen potencial

$$f=\int M(x)dx+\int N(y)dy$$

La igualdad anterior es precisamente consecuencia directa del Principio conservación energía mecánica, La hemos deducido como consecuencia de que la ecuación era exacta. Sea v_0 la velocidad inicial para $t = 0$. Como E es constante y $x = 0$ en $t = 0$ debemos tener

$$E = \frac{v_0^2}{2} - GM/R \tag{2.37}$$

Como $v^2 \geq 0$ y por (2.36) y (2.37).

$$-\frac{GM}{(R+x)} \leq \frac{v^2}{2} - \frac{GM}{(R+x)} = \frac{v_0}{2} - \frac{GM}{R}$$

Queremos encontrar v_0 tal que $x \to \infty$. Si tomamos límite cuando $x \to \infty$ en la expresión anterior obtenemos

$$0 \leq \frac{v_0^2}{2} - GM/R$$

De aquí deducimos que el valor mínimo de velocidad de escape es $\sqrt{(}2{*}GM/R)$.

2.14.2. Curvas de persecución

Problema 2 (Curvas de persecución).

Supongamos que un conejo se mueve sobre una línea recta con rapidez uniforme a y de un punto por fuera de la recta parte un perro que lo persigue con rapidez uniforme b. Encontrar la trayectoria del perrro.

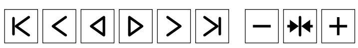


Figura 2.7: Persecución en un pentágono estrellado. Art of Pursuit, Ivars Peterson

Supongamos que el perro parte del punto $(c, 0)$, el conejo de $(0, 0)$ y se mueve en línea recta en la dirección positiva del eje y. Vamos a suponer que el perro sigue la trayectoria donde la tangente a su movimiento, en un momento dado, intersecta a la posición del conejo correspondiente a ese momento.

Pasado un tiempo t, el conejo estará en el punto $(0, at)$ y el perro en un punto de su trayectoria que forma un arco de longitud $s = bt$ hasta el punto $(c, 0)$. Ese punto, donde está el perro, lo denotaremos (x, y). Como hemos supuesto que la tangente a la trayectoria del perro en (x, y) pasa por la posición del conejo $(0, at)$ se debe cumplir que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - at}{x} \Longrightarrow xy' - y = -at. \quad (2.38)$$

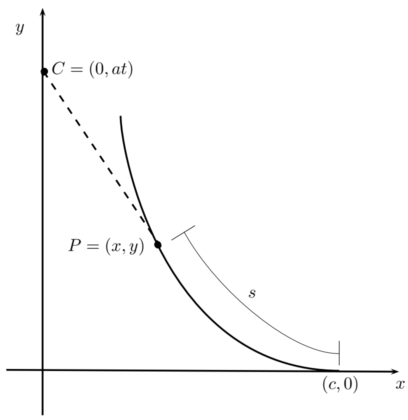


Figura 2.8: Curva persecución

En esta ecuación hay tres variables, t , x e y. No hemos definido cuales son independiente y cuales depenientes. Generalmente el tiempo t se considera variable indepeniente, pero en la expresión de arriba aparece la derivada de y respecto a x. Claramente deberíamos eliminar una de las variables. Conviene eliminar t, dado que al no aparecer en la derivación no tendremos que hacer un cambio de variables allí, donde siempre es un poco más engorroso. Por otra parte, la intuición del problema, nos dice que a cada t corresponde uno, y sólo un, x[2], lo que indica que t es función de x y por consiguiente es de esperar poder escribir la ecuación (2.38) en términos de x e y. Tener en cuenta que no es razonable en matemática, como en la política, pensar que lograremos tener un beneficio (menos variables) sin pagar algún precio, pues, como dice el dicho, ``Cuando la limosna es grande hasta el santo desconfía'' . En este caso, el costo que pagaremos es incrementar el orden de la ecuación. Como hemos dado algunas técnicas de resolver ecuaciones de orden dos, quizás estemos en condiciones de pagar este precio.

Para eliminar t de la ecuación (2.38), derivamos (2.38) respecto a x, para obtener

$$xy'' = -a\frac{dt}{dx}.$$

Como $ds/dt = b$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{dt}{ds}\frac{ds}{dx} = -\frac{\sqrt{1 + y'(x)^2}}{b}.$$

Hemos usado la relación $s = \int_x^c \sqrt{1 + y'^2}dx$. Entonces

$$\boxed{xy'' = \frac{a\sqrt{1 + y'(x)^2}}{b}.} \quad (2.39)$$

Que es una ecuación que no contiene y. De modo que usando $p = y'$ como variable dependiente reducimos el orden de la ecuación. Nos queda

$$\frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = \frac{a}{b}\frac{dx}{x}.$$

Que es una ecuación en variable separables. Tomando la integral definida entre c y x, y considerando que si $x = c$ entonces $p = 0$, tenemos

$$\ln\left(p + \sqrt{1 + p^2}\right) = \ln\left(\frac{x}{c}\right)^{\frac{a}{b}}.$$

Si despejamos p conseguimos

$$\boxed{p = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{c}\right)^{a/b} - \left(\frac{c}{x}\right)^{a/b}\right].} \quad (2.40)$$

[2]De lo contrario el perro no se hubiera movido en la dirección horizontal entre dos momentos, lo que es absurdo

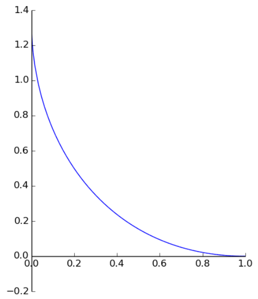
Para hallar y hay que recordar que $y' = p$ e $y(1) = 0$.

Usemos SymPy para completar este cálculo y hacer los gráficos. El siguiente código evalúa la integral, halla la constante de integración para que $y(1) = 0$ y grafica.

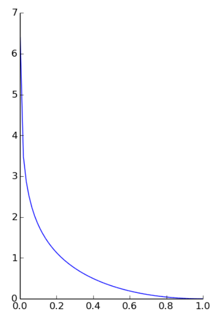
```
from sympy import *
x=symbols('x',real=True)
a=Rational(2)
b=Rational(1)
c=Rational(1)
y=integrate((x/c)**(a/b)-(c/x)**(a/b),x)
C=symbols('C')
C=solve(y.subs(x,1)+C,C)[0]
plot(y+C,(x,0.001,1))
```

scripts/persecucion.py

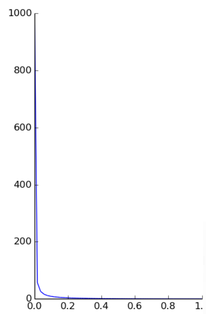
Los resultados son:



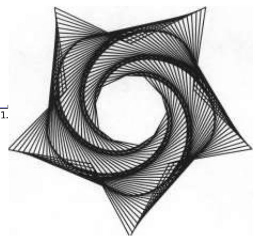
$a < b$



$a = b$



$a > b$



Persecución en un pentágono estrellado. Ex-

Lo anterior constituye un ejemplo de lo que se conoce como curva de persecución. Este es un tema muy interesante que tiene varias generalizaciones, por ejemplo el problema de los ratones donde se colocan en cada vértice de un polígono ratones cada uno de los cuales persigue al vecino en sentido antihorario (u horario, da lo mismo). Se consiguen patrones geométricos myu bellos

2.15 Oscilador armónico

Robert Hooke

Un oscilador armónico es el más simple de los sistemas físicos vibratorios. Podemos definirlo como un sistema elástico que obedece a la Ley de elasticidad de Hooke , en honor a su descubridor Robert Hooke (1635-1703) .

Suele citarse al resorte como un ejemplo familiar de oscilador armónico. Esto debido a que, cuando las oscilaciones de un resorte son pequeñas, se satisface aproximadamente la Ley de elasticidad de Hooke. Esta ley afirma que la fuerza que ejerce un resorte sobre una masa m conectada a él por uno de sus extremos es proporcional en magnitud al desplazamiento del resorte desde la posición de equilibrio. Además la fuerza de elasticidad actúa en sentido opuesto al desplazamiento.

Figura 2.9: Resorte

Supongamos que tenemos un resorte, en unos de sus extremos fijado en una pared y unido a una masa m por el otro extremo. Supongamos que no actúa otra fuerza sobre la masa mas que la del resorte. Ver la animación de la figura 2.9. Pongamos un eje de coordenadas en la dirección del movimiento, con origen en la posición de equilibrio del resorte. Esta posición es el punto donde el resorte no ejerce fuerza. Supongamos que la dirección positiva es la dirección donde el resorte se expande. Denotemos por $x(t)$ la posición de la masa en el momento t. Entonces según la Segunda Ley de Newton y la Ley de Elasticidad de Hooke, tenemos que

$$mx''(t) = -kx(t). \tag{2.41}$$

La constante de proporcionalidad k se llama constante elástica . La ecuación (2.41) se denomina la ecuación del oscilador armónico o ecuación del resorte.

La ecuación del oscilador armónico se escribe $0 = f(t, x, x', x'')$, donde $f(t, x, y, z) = kx + mz$ es independiente de t. Podemos intentar usar x como variable independiente y $z = x'$ como dependiente. Como vimos $x''(t) = dz/dt = dz/dxz$. Así la ecuación queda

$$\begin{aligned} m\frac{dz}{dx}z = -kx \implies mzdz = -kxdx \implies m\frac{z^2}{2} &= -k\frac{x^2}{2} + C_1 \\ \implies z = \pm\sqrt{-\frac{k}{m}x^2 + C_1} \\ \implies x'(t) = \pm\sqrt{-\frac{k}{m}x^2 + C_1}. \end{aligned}$$

Debe ser $C_1 \geq 0$ de lo contrario el dominio de la función sería vacío. Nos queda una nueva ecuación para x'. Esta ecuación es en variables separables

$$\frac{dx}{\sqrt{-\frac{k}{m}x^2 + C_1}} = dt.$$

Integrando

$$\begin{aligned} t + C_2 &= \int \frac{dx}{\sqrt{-\frac{k}{m}x^2 + C_1}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{C_1}} \int \frac{dx}{\sqrt{-\frac{k}{C_1 m}x^2 + 1}} \\ &= \sqrt{\frac{m}{k}} \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \qquad \left(\text{haciendo } u = \sqrt{\frac{k}{C_1 m}}x\right) \\ &= \sqrt{\frac{m}{k}} \operatorname{arc\,sen} u. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} x = \frac{C_1 m}{k}u &= \frac{C_1 m}{k} \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}(t + C_2)\right) \\ &= \boxed{C_3 \operatorname{sen}\sqrt{\frac{k}{m}}t + C_4 \cos\sqrt{\frac{k}{m}}t}. \end{aligned}$$

Que es la solución general[3] de la ecuación del oscilador armónico. Como vemos

[3] Esta afirmación se justificará en el capítulo 3

el movimiento es oscilatorio con frecuencia

$$\boxed{f = \sqrt{\frac{k}{m}}}.$$

En particular, no importan las condiciones iniciales, la frecuencia es siempre la misma.

2.16 EDP, método características

Saber resolver ecuaciones ordinarias de primer orden nos permite resolver algunas ecuaciones en derivadas parciales de primer orden. Vamos a exponer este punto a través del método de características .

Para tener un problema bien planteado con ecuaciones en derivadas parciales no es suficiente conocer el valor de la función en un punto (como en una EDO de primer orden). Una condición típica extra, para lograr este propósito, es consignar el valor de la función a lo largo de una curva, que por simplicidad asumiremos que es una recta .

Ejemplo 2.20. Resolver

$$\left.\begin{array}{l} a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = c(x,y,u) \\ u(x,0) = f(x) \end{array}\right\} \tag{2.42}$$

Aquí x, y son variables independientes y u dependiente. La primera línea es la ecuación diferencial, que incluye derivadas parciales de la incognita y la segunda línea podemos denominarla condición inicial (pensando que la variable y representa tiempo).

El método de características consiste en encotrar u a lo largo de las soluciones de la EDO

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b(x,y)}{a(x,y)} \tag{2.43}$$

Una solución de esta ecuación es normalmente una curva en el plano x, y. La idea es que las soluciones de (2.43) forman un flia uniparamétrica de curvas que llena una parte Ω del plano x, y. Así terminamos conociendo el valor de u sobre este conjunto Ω. Para que (2.43) tenga sentido debemos tener $a \neq 0$. De todas formas si $a = 0$ podemos invertir los roles de x e y.

Supongamos $y(x)$ solución de (2.43), entonces pongamos por abuso de notación $u(x) = u(x, y(x))$. Se tiene que

$$\frac{du}{dx} = u_x + u_y y' = u_x + u_y \frac{b}{a} = \frac{c(x, y(x), u(x))}{a(x,y)} \tag{2.44}$$

Que es otra ecuación ordinaria. Podemos escribir (2.43) y (2.44) en una ecuación más simétrica

$$\frac{du}{c} = \frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} \tag{2.45}$$

Estas ecuaciones se llaman *ecuaciones características*. Las soluciones de estas ecuaciones son un familia de curvas que suele llenar un conjunto abierto de $\mathbb{R}^3$. La gráfica de la solución se obtiene eligiendo entre estas curvas las que pasan por los puntos de la gráfica de u especificados en la condición inicial, es decir $(x, 0, f(x))$. Esto, en los casos favorables, forma una superficie que es la gráfica de la solución. La proyección de estas curvas en el plano x, y se denominan *caracterísitcas*. Son la familia de soluciones de $y' = b/a$.

Ejemplo 2.21. Resolver

$$\left.\begin{array}{l} u_x + u_y = yu \\ u(x,0) = f(x) \end{array}\right\} \tag{2.46}$$

En este caso

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} \Rightarrow y' = 1 \Rightarrow y(x) = x + \mu, \quad \mu = \text{cte.}$$

Entonces

$$\frac{du}{dx} = \frac{c}{a} \Rightarrow u' = yu = (x+\mu)u \Rightarrow \ln|u| = \frac{x^2}{2} + \mu x + C(\mu).$$

Notar que la nueva constante de integración $C(\mu)$ debe depender de la primera μ. Entonces

$$u = \pm e^{\frac{x^2}{2}} e^{(y-x)x} e^{C(y-x)}.$$

Ahora

$$u(x,0) = f(x) \Rightarrow f(x) = \pm e^{\frac{x^2}{2}} e^{-x^2} e^{C(-x)} \Rightarrow C(\mu) = \frac{\mu^2}{2} + \ln|f(-\mu)|.$$

Entonces

$$u(x,y) = \pm e^{\frac{x^2}{2}} e^{(y-x)x} e^{\frac{(y-x)^2}{2} + \ln|f(x-y)|} = e^{\frac{y^2}{2}} f(x-y).$$

Apéndices

2.A La braquistócrona

Problema 1.

Dados dos puntos A y B en las proximidades de la superficie terrestre, uno mas abajo respecto al suelo que el otro, queremos diseñar el tobogán óptimo entre los dos, esto es el tobogán que nos lleve de A hasta B en el menor tiempo. La curva solución a este problema se llama curva braquistócrona (braquistos - el más corto, cronos - tiempo).

Johann Bernoulli (1667-1748)

Este problema fue resuelto por primera vez por Johann Bernoulli y es unos de los problemas precursores de la rama de las matemáticas que se denomina cálculo de variaciones . Vamos a dar la solución del problema encontrada por Johann Bernoulli que es muy elegante y está basada en un resultado de óptica llamado el Principio de Mínimo Tiempo de Fermat .

Pierre de Fermat (1601-1665)

Principio de Mínimo Tiempo de Fermat

La luz sigue para ir de un punto a otro el recorrido que minimiza el tiempo.

La primera impresión es que ese reccorrido debería ser la línea recta. Si embargo esto no es así debido a que la velocidad de la luz cambia de acuerdo al medio que atraviesa . La velocidad de la luz en el vacío es 299.792,458km/h y en el diamante 124.034,943 km/h. La velocidad de la luz cambia no sólo con la sustancia sino con sus cualidades, como la densidad.

Si la luz se mueve dentro de un medio homogéneo, el camino que sigue es la línea recta. Esto ya no es más así cuando la luz cambia de medio de propagación. Por ejemplo cuando pasa del aire al vidrio.

Supongamos que la luz une los puntos A y B del plano y en el camino atravieza de un medio a otro, siendo la velocidad de la luz en cada uno de ellos v_1 y v_2. Supongamos que $A = (a, 0)$ y $B = (c, b)$ y el eje x es la frontera entre los medios.

Como sabemos que mientras se mueva en un medio homogéneo la luz sigue en línea recta, el tiempo que emplea la luz para ir A a B es

$$t = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(c-x)^2+b^2}}{v_2}$$

Para determinar la trayectoria es suficiente encontrar x, el punto donde la luz choca con la interfaz entre los medios. El principio de Fermat afirma que el tiempo es mínimo de modo que hallaremos un punto crítico de t respecto a x.

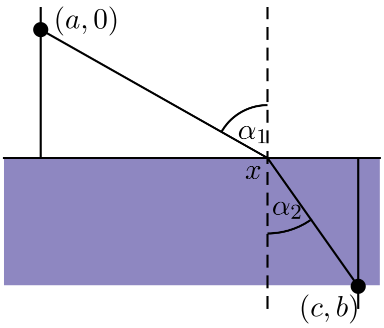


Figura 2.A.1: Refracción de la luz

$$\frac{dt}{dx} = -\frac{c-x}{\sqrt{(c-x)^2+b^2}v_2} + \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}v_1} = \frac{\operatorname{sen}\alpha_1}{v_1} - \frac{\operatorname{sen}\alpha_2}{v_2}$$

Deducimos que en un punto crítico

$$\boxed{\frac{\operatorname{sen}\alpha_1}{v_1} = \frac{\operatorname{sen}\alpha_2}{v_2}} \tag{2.47}$$

que se denomina Ley de Snell . El punto crítico es mínimo pues $\frac{dt}{dx}\big|_{x=0} = -\frac{c}{bv_2} < 0$ y $\frac{dt}{dx}\big|_{x=c} = \frac{c}{\sqrt{c^2+a^2}v_1} > 0$.

A la razón entre la velocidad de la luz dentro de un determinado medio y la velocidad de la luz en el vacio se lo denomina índice de refracción y se lo denota con la letra n. La Ley de Snell se la suele escribir

$$\boxed{n_1 \operatorname{sen}\alpha_1 = n_2 \operatorname{sen}\alpha_2}.$$

Que pasa si la luz atraviesa un medio que va cambiando de manera continua de índice de refracción. Por ejemplo, el índice de refracción en la atmósfera va cambiando de manera continua con la altitud respecto a la superficie terrestre, ya que la densidad del aire va cambiando con la altitud. La Ley de Snell en este caso es

$$\boxed{\frac{\operatorname{sen}\alpha}{v} = \text{cte}}$$

Aquí el ángulo α y la velocidad v cambian respecto a alguna variable/s real/es, por ejemplo la altitud.

¿Que tienen en común el recorrido de la luz y la braquistócrona? Bernoulli se dió cuenta que la situación en los dos casos es la misma, ya que en los dos casos se trata de minimizar el tiempo del recorrido. De modo que la braquistócrona también tiene que satisfacer la Ley de Snell. Ahora supongamos un sistema de coordenadas con origen en el punto A, inicial del recorrido. Además supongamos que el movil parte del reposo. Con estas suposiciones $x(t_0) = 0$ y $v(t_0) = 0$. Por la conservación de la energía

$$\frac{m}{2}|v(t)|^2 = -mgy(t) = mg|y(t)|.$$

Así por la ley de Snell

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{|v(t)|} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\sqrt{2g|y|}} = c = \text{ cte}.$$

En (2.16) habíamos expresado el $\cos\alpha$ (en realidad del ángulo opuesto por el vértice, pero es igual) mediante la derivada. Luego

$$\operatorname{sen}\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \frac{1}{\sqrt{1+y'(x)^2}}.$$

Entonces tenemos

$$\sqrt{2g|y|}\sqrt{1+y'(x)^2} = c = \text{ cte}$$

Despejando llegamos a la ecuación diferencial

$$\boxed{\sqrt{\frac{y}{c-y}}y' = 1}.$$

Es una ecuación con variables separables. La constante c no tiene el mismo valor que en la ecuación anterior.

La solución se obtiene resolviendo la integral

$$x = \int dx = \int \sqrt{\frac{y}{c-y}}dy.$$

lo que no es tan sencillo. Hacemos el cambio de variables

$$\sqrt{\frac{y}{c-y}} = \tan\phi \Longrightarrow y = c\operatorname{sen}^2\phi \Longrightarrow dy = 2c\operatorname{sen}\phi\cos\phi d\phi.$$

Luego

$$x = 2c\int \operatorname{sen}^2\phi d\phi = \frac{c}{2}\left(2\phi - \operatorname{sen}2\phi\right) + C_1.$$

Como tiene que pasar por $x = 0$ e $y = 0$ debe ser $C_1 = 0$. Tenemos que

$$\begin{cases} y &= c\operatorname{sen}^2\phi \quad\quad = \frac{c}{2}(1-\cos 2\phi) \\ x &= \frac{c}{2}(2\phi - \operatorname{sen}2\phi) \end{cases}$$

Conviene llamar $2\phi = \theta$ y $a = c/2$

$$\begin{cases} y &= a(1-\cos\theta) \\ x &= a(\theta - \operatorname{sen}\theta) \end{cases}$$

Que son la ecuaciones paramétricas de una curva conocida con el nombre de cicloide . Podemos usar SymPy para graficar esta curva

```
theta=symbols('theta')
from sympy.plotting import *
plot_parametric(theta-sin(theta),1-cos(theta),(theta,0,10*pi))
```

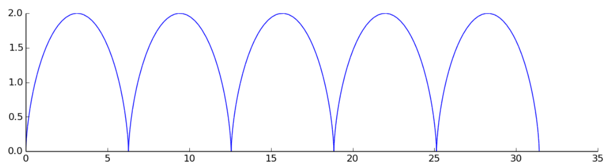


Figura 2.A.2: Cicloide

Si in tentamos resolver las ecuaciones con SymPy el resultado no es muy alentador.

```
x,c=symbols('x,c')
y=Function('y')(x)
MiEcua=Eq(y.diff(x),sqrt((c-y)/y))
f=dsolve(MiEcua,y,hint='separable')
```

Resultado:

$$\begin{cases} -i\sqrt{c}\sqrt{-1+\frac{1}{c}y(x)}\sqrt{y(x)} - ic\operatorname{acosh}\left(\frac{1}{\sqrt{c}}\sqrt{y(x)}\right) & \text{for } \left|\frac{1}{c}y(x)\right| > 1 \\ \frac{\sqrt{c}\sqrt{y(x)}}{\sqrt{1-\frac{1}{c}y(x)}} + c\operatorname{asin}\left(\frac{1}{\sqrt{c}}\sqrt{y(x)}\right) + \frac{y^{\frac{3}{2}}(x)}{\sqrt{c}\sqrt{1-\frac{1}{c}y(x)}} & \text{otherwise} \end{cases} = C_1 + x$$

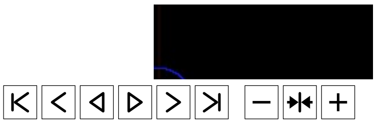


Figura 2.A.3: Cicloide

2.B La tautócrona

Vamos a ver otra propiedad notable de la ciclode. Supongamos que dejamos caer el cuerpo del reposo desde un punto intermedio, digamos en (x_0, y_0). Sea θ_0 el valor del parámetro θ correpondiente a este punto. ¿Cuánto tardara en llegar el cuerpo al punto mínimo de la curva que ocurre cuando $\theta = \pi$?

Tenemos

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\theta} &= a(1-\cos\theta) \\ \frac{dy}{d\theta} &= a \operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

Como el cuerpo ahora no parte de $(0,0)$ tendremos

$$|v| = \sqrt{2g(y_0 - y)}.$$

Por (2.13) $ds/dt = |v|$. Si llamamos T al tiempo que demanda en llegar a $\theta = \pi$, y llamamos s_0 y s_1 a los arcos correspondientes al punto inicial y final. Tenemos

$$T = \int_0^T dt = \int_{s_0}^{s_1} \frac{dt}{ds} ds = \int_{s_0}^{s_1} \frac{1}{\sqrt{2g(y_0 - y)}} ds.$$

Cambiando la variable de integración a θ. Como

$$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} = \sqrt{2}a\sqrt{1 - cos\theta}.$$

Tenemos

$$T = \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{\theta_0}^{\pi} \frac{\sqrt{1-\cos\theta}}{\cos\theta_0 - \cos\theta} d\theta = \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{\theta_0}^{\pi} \frac{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta_0}{2} - \cos^2\frac{\theta}{2}} d\theta.$$

Ahora hacemos la sustitución

$$u = \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta_0}{2}} \Longrightarrow du = -\frac{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}{2\cos\frac{\theta_0}{2}} d\theta.$$

Vemos que

$$T = 2\sqrt{\frac{a}{g}} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du.$$

Que es una expresión independiente de θ_0. En consecuencia el tiempo T que demanda el cuerpo para llegar $\theta = \pi$ es siempre el mismo no importa desde donde se deje caer.

2.C Solución al problema del espejo con Sympy

En este apéndice resolvemos el problema usando formas diferenciales El submódulo diffgeom de Sympy implementa formas diferenciales. Del sub-submodulo sympy.diffgeom.rn importamos el objeto R2. Para comprender el funcionamiento del código remitimos a la documentación de Sympy .

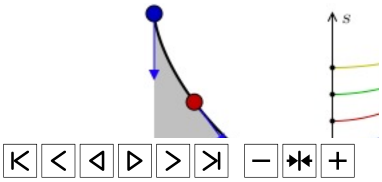


Figura 2.B.1: Tautócrona

```python
"""
Solución problema espejo
"""

from sympy import *
from sympy.diffgeom.rn import R2
eq=(-sqrt(R2.x**2+R2.y**2)+R2.x)*R2.dx+R2.y*R2.dy
M=eq.rcall(R2.e_theta)
N=eq.rcall(R2.e_r)
x,y,theta=symbols('x,y,theta')
r=symbols('r',positive=True)
subst={R2.x:r*cos(theta),R2.y:r*sin(theta),R2.theta:theta,R2.r:r}
M=M.subs(subst).simplify()
N=N.subs(subst).simplify()
mu=(N.diff(theta)-M.diff(r))/M
FactInt=exp(Integral(mu,r).doit())
phi=(M/r).integrate(theta)
g=Function('g')(r)
phi=phi+g
dsolve(phi.diff(r)-N/r,g)
phi=(M/r).integrate(theta)+r
phi
```

scripts/espejo.py

Bibliografía

Simmons, G. (1991). *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones y Notas Históricas*. McGraw-Hill, Madrid.

Capítulo 3

Teoría de Lie y ecuaciones diferenciales

3.1 Introducción histórica

«Marius Sophus Lie fue un matemático noruego (17 de diciembre de 1842-18 de febrero de 1899) que creó en gran parte la teoría de la simetría continua, y la aplicó al estudio de la geometría y las ecuaciones diferenciales. La herramienta principal de Lie, y uno de sus logros más grandes fue el descubrimiento de que los grupos continuos de transformación (ahora llamados grupos de Lie), podían ser entendidos mejor "linealizándolos", y estudiando los correspondientes campos vectoriales generadores (los, así llamados, generadores infinitesimales). Los generadores obedecen una versión linealizada de la ley del grupo llamada el corchete o conmutador, y tienen la estructura de lo que hoy, en honor suyo, llamamos un álgebra de Lie.»

Wikipedia

« La historia del análisis de simetrías comenzó a mediados del siglo XIX cuando S. Lie Y F. Klein se reunieron en Berlín. Ambos matemáticos contribuyeron mucho a la teoría de las simetrías. S. Lie presentó su famosa obra para examinar las simetrías en relación con ecuaciones algebraicas y diferenciales. En su programa de Erlangen, Klein desarrolló las contrapartes discreta y algebraica de la aplicación de las simetrías a las funciones. S. Lie creo un gran campo de las ecuaciones diferenciales, que fue muy útil para clasificar las ecuaciones diferenciales de una forma nueva. La teoría desarrollada por Lie es muy laboriosa, si se hace a mano. Esta es una de las razones por las que la aplicación de esta teoría desapareció en la práctica de resolver problemas. Muy pocas personas usaron los procedimientos de Lie para examinar ecuaciones diferenciales. Uno de ellos fue Birkhoff, quien en la década de 1950 aplicó la teoría a problemas hidrodinámicos. En los últimos años, se prestó más atención a la teoría de Lie como uno de los métodos raros para obtener soluciones, especialmente para ecuaciones diferenciales no lineales. Hoy el procedimiento de Lie es accesible para su aplicación, si es usado el poder computacional del álgebra computacional. Los cálculos algebraicos muy extendidos hoy en día se llevan a cabo por computadoras. En los últimos 20 años, ha habido un enorme aumento de la potencia de las computadoras y del desarrollo de lenguajes simbólicos, permitiendo abordar problemas en una manera más sencilla.»

Symmetry Analysis of Differential Equations with Mathematica®
Baumann (2013)

3.2 Cambios de Variables

Vamos a seguir estudiando ecuaciones no lineales de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \tag{3.1}$$

o, utilizando la escritura en *forma diferencial*

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0. \tag{3.2}$$

En el apéndice 3.A discutimos muy sumariamente el concepto de forma diferencial.

Problema 1 (Cambio de variables).

Dada la ecuación (3.1) o (3.2) en las variables x, y. Queremos encontrar nuevas variables

$$\begin{cases} \hat{x} &= \hat{x}(x,y) \\ \hat{y} &= \hat{y}(x,y) \end{cases} . \tag{3.3}$$

tales que la ecuación se transforme en una que podamos resolver.

Para no correr riesgos de perder información en la ecuación transformada, es conveniente que x e y también se expresan en función de $\hat{x}$ e $\hat{y}$, vale decir que la transformación pueda invertirse:

$$\begin{cases} x &= x(\hat{x},\hat{y}) \\ y &= y(\hat{x},\hat{y}) \end{cases} . \tag{3.4}$$

3.2.1. Cómputos de cambios de variables

Vamos a estudiar en primer lugar como computar cambios de variables. Empezaremos por casos más sencillos hasta ir a la situación más general.

Cambio de la variable dependiente manteniendo la independiente

Supongamos que el conjunto de variables se relacionan por las identidades $x = \hat{x}$ e $y = y(x,\hat{y})$. Notar que en este caso usamos la relación inversa. Entoces, derivando y respecto a x y usando la regla de la cadena (que sería más apropiado llamarla regla de cambio de variables para la derivada)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \hat{y}}\frac{d\hat{y}}{dx}.$$

La ecuación se convierte

$$\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \hat{y}}\frac{d\hat{y}}{dx} = f(x, y(x,\hat{y})).$$

Que es una expresión sólo en $\hat{y}$ y x. Parece más complicada, pero en un ejemplo concreto puede ser más simple.
Ejemplo 3.0. Hacer el cambio de variable propuesto en la ecuación indicada

$$y = \frac{e^{\hat{y}}}{x} \quad \text{en} \quad y' = [\ln(xy)]^2\, xy - \frac{y}{x}.$$

Es costumbre recurrir a un abuso de notación que suele producir confusión al estudiante. Nos referimos a distinguir las derivadas $\partial y/\partial x$ y dy/dx. Tratándose y en el caso que nos ocupa, de una función de x e $\hat{y}$, la derivada $\partial y/\partial x$ representa la derivada parcial de y respecto a su primera variable. Como $\hat{y}$ es a su vez función de x, por dy/dx denotamos la derivada de y atendiendo a que la segunda variable también depende de x.

1) Expresemos dy/dx sólo con x, $\hat{y}$ y $d\hat{y}/dx$.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{e^{\hat{y}}}{x^2} + \frac{e^{\hat{y}}}{x}\frac{d\hat{y}}{dx}.$$

2) Remplacemos y' e y en la ecuación

$$-\frac{e^{\hat{y}}}{x^2} + \frac{e^{\hat{y}}}{x}\frac{d\hat{y}}{dx} = \left[\ln\left(x\frac{e^{\hat{y}}}{x}\right)\right]^2 x\frac{e^{\hat{y}}}{x} - \frac{\frac{e^{\hat{y}}}{x}}{x}.$$

3) Simplifiquemos

$$\boxed{\frac{d\hat{y}}{dx} = \hat{y}^2 x.} \tag{3.5}$$

Importante: Observar que en un cambio de variable, ya se cambie la variable dependiente, independiente o ambas, las derivadas (tratándose de la velocidad de cambio de unas variables repecto a otras) también hay que cambiarlas.

Podemos resolver los cambios de variables con SymPy, lo cual es muy útil por dos motivos. El primero porque nos permite hacer cambios de variables en expresiones muy grandes, resolviendo operaciones que a mano son sumamente tediosas. El segundo, y no menos importante para nosotros, es que es muy rico explorar un procedimiento enmarcándolo en un contexto muy distinto. En este caso, el procedimiento es relizar un cambio de variables y estamos explorando el mismo a través de un breve código que lo implementa en un lenguaje de programación.

```
from sympy import *
x=symbols('x') #unico simbolo primitivo
y_n=Function('y_n')(x) #declaro las varaibles nuevas, funciones de las
    viejas
y=exp(y_n)/x #relacion entre y, y_n
eq=Eq(y.diff(x)-(ln(x*y))**2*x*y+y/x,0) #la ecuacion
simplify(eq) # simplifica expresiones
```

scripts/sust1.py

Obtenemos la ecuación

$$\frac{1}{x}\left(-x\log^2\left(e^{\mathrm{y\_n}(x)}\right) + \frac{d}{dx}\mathrm{y\_n}(x)\right)e^{\mathrm{y\_n}(x)} = 0$$

que SymPy no simplifica a nuestro gusto

Cambio de la variable independiente manteniendo la dependiente

Supongamos $\hat{x} = \hat{x}(x)$. Usamos la relación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\hat{x}}\frac{d\hat{x}}{dx}.$$

Suponiendo que la relación $\hat{x} = \hat{x}(x)$ se invierte en $x = x(\hat{x})$, todo lo que resta es sustituir x por su igual en términos de $\hat{x}$

$$\frac{dy}{d\hat{x}} = f(x(\hat{x}), y)\left[\left.\frac{d\hat{x}}{dx}\right|_{x=x(\hat{x})}\right]^{-1}.$$

Que es una expresión sólo en $\hat{x}$ e y. Describir el procedimiento en general puede hacer parecer que es más dificil de lo que en realidad es en un caso concreto.

Ejemplo 3.1. Hacer el cambio de variable en la ecuación indicados

$$x = \cos\hat{x} \quad \text{en} \quad -\frac{dy}{dx} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}y = 0.$$

1) $\hat{x} = \operatorname{arc\,sen} x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\hat{x}}\frac{d\hat{x}}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\frac{dy}{d\hat{x}}.$$

2) Remplacemos x e y' en la ecuación

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\frac{dy}{d\hat{x}} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}y = 0$$

3) Reemplazando x por $\cos(\hat{x})$ y simplificando

$$\frac{dy}{d\hat{x}} + \cos(\hat{x})y = 0.$$

Para hacer esto con SymPy (de ahora en más omitiremos la sentencia de importanción del módulo, esta operación se hace sólo una vez por sesion).

```
x,x_n=symbols('x,x_n')
x_n=acos(x)
y=Function('y')(x_n)
Ecuacion=-y.diff()+1/(sqrt(1-x**2))*y
xn=symbols('xn')
Ecuacion.subs(x,cos(xn))
```

scripts/sust2.py

Obtenemos la ecuación

$$\frac{y(\operatorname{acos}(\cos(xn)))\cos(xn)}{\sqrt{-\cos^2(xn)+1}} + \frac{1}{\sqrt{-\cos^2(xn)+1}}\left.\frac{d}{d\xi_1}y(\xi_1)\right|_{\xi_1=\operatorname{acos}(\cos(xn))}$$

Nuevamente SymPy no simplifica a nuestro gusto, esto ocurre aún con aquellas expresiones que parece muy evidente como se simplifican. El caso es que la operación de simplificación es por un lado subjetiva, depende de un supuesto tácito de a que expresión se quiere arribar y por otro algunas expresiones, por ejemplo $\ln\exp(z)$, se simplifican en determinados campos numéricos y en otros no. En el caso del ejemplo $\ln\exp(z)$, la expresión es simplificable si $z \in \mathbb{R}$, pero no lo es si por ejemplo $z \in \mathbb{C}$. De modo que no puede esperarse que Sympy efectúe esta simplificación a menos que conozca que se trabaja en el campo numérico indicado. Hay que distinguir que supuestos tácitos está haciendo uno y hay que indicarselos a Sympy. El lector debe tener en cuenta que en ningún momento uno le dijo a SymPy que tipo de ente estaba manipulando en expresiones del tipo `x_n=acos(x)`. Puede parecer natural que se trata de números reales, no obstante esta información nunca fue comunicada al interprete de SymPy. ¿Porqué el habría de entender que x es real? Si al fin y al cabo `x_n=acos(x)` tiene sentido si x es complejo y aún si es una matríz. Muchas veces las operaciones que se simplifican en un campo no lo pueden hacer en otro. El comando `symbols` tiene la opción de informar a SymPy que tipo de ente representa x de la siguiente forma `x=symbols('x',real=True)`. De esta forma se consiguen mejores resultados en las simplificaciones.

Cambio de variable general $\hat{x} = \hat{x}(x,y)$, $\hat{y} = \hat{y}(x,y)$

A. Calculamos $d\hat{y}/d\hat{x}$ en las variables x, y

$$\frac{d\hat{y}}{d\hat{x}} = \frac{\frac{d\hat{y}}{dx}}{\frac{d\hat{x}}{dx}} = \frac{\frac{\partial\hat{y}}{\partial x} + \frac{\partial\hat{y}}{\partial y}y'}{\frac{\partial\hat{x}}{\partial x} + \frac{\partial\hat{x}}{\partial y}y'} = \frac{\frac{\partial\hat{y}}{\partial x} + \frac{\partial\hat{y}}{\partial y}f(x,y)}{\frac{\partial\hat{x}}{\partial x} + \frac{\partial\hat{x}}{\partial y}f(x,y)}. \tag{3.6}$$

B. En la expresión resultante sustituímos x, y por las tansformaciones inversas $x = x(\hat{x}, \hat{y})$ y $y = y(\hat{x}, \hat{y})$

Ejemplo 3.2. Transformar a polares

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^3+x^2y-x-y}{x^3+xy^2-x+y}.$$

Dado que el cálculo es extenso lo haremos con SymPy, el procedimiento seguido ilustra como hacerlo a mano. Es ilustrativo hacer esto último para apreciar la utilidad de usar un sistema de álgebra computacional (SAC) como SymPy.

```
x=symbols('x')
y=Function('y')(x)
r=sqrt(x**2+y**2)
theta=atan(y/x)
Expr2=r.diff(x)/theta.diff(x)
```

scripts/sust3.py

Obtenemos la siguiente expresión

$$\frac{dr}{d\theta}=\frac{\frac{dr}{dx}}{\frac{d\theta}{dx}}=\frac{\left(1+\frac{1}{x^2}y^2(x)\right)\left(x+y(x)\frac{d}{dx}y(x)\right)}{\sqrt{x^2+y^2(x)}\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}y(x)-\frac{1}{x^2}y(x)\right)}.$$

Ahora sustituímos $y'(x)$ usando la ecuación diferencial, redefinimos r,θ fundamentalmente para limpiar el valor que tenían asignado en el código previo, que era una expresión de x,y, y finalmente sustituímos x e y por su expresión en polares.

```
Expr3=Expr2.subs(y.diff(x),(y**3+x**2*y-x-y)/(x**3+x*y**2-x+y))
r,theta=symbols('r,theta',positive=True)
Expr4=Expr3.subs([(y,r*sin(theta)),(x,r*cos(theta))])
Expr5=simplify(Expr4)
```

scripts/sust4.py

Encontramos que en polares la ecuación es mucho más simple

$$\frac{dr}{d\theta}=-r^3+r.$$

Quizás usar la notación como forma diferencial sea más efectivo. Como r y θ son funciones de x e y, ellas son 0-formas. Usando las reglas de la diferencial, hay que reemplazar

$$\begin{aligned} x&=r\cos\theta; & dx&=\cos\theta dr-\operatorname{sen}\theta r d\theta\\ y&=r\operatorname{sen}\theta; & dy&=\operatorname{sen}\theta dr+\cos\theta r d\theta\end{aligned}$$

en la 1-forma:

$$(y^3+x^2y-x-y)dx-(x^3+xy^2-x+y)dy.$$

Sympy posee un módulo para operar con formas diferenciales, en un apéndice describimos como utilizarlo para resolver este ejemplo.

3.3 Grupos

3.3.1. Definición y ejemplos

Definición 1 (Grupo).

Un grupo es un par $(G, \cdot)$ donde G es un conjunto y $\cdot : G \times G \to G$ una operación binaria interna que satisface

A. $(g_1 \cdot g_2) \cdot g_3 = g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3)$, para todos $g_1, g_2, g_3 \in G$,

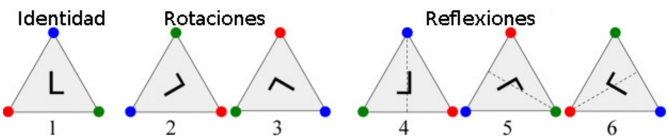
B. Existe $e \in G$ tal que $e \cdot g = g \cdot e = g$, para todo $g \in G$.

C. Para todo $g \in G$ existe $h \in G$ tal que $g \cdot h = h \cdot g = e$. Esta función h se denota g^{-1}.

Es usual omitir el punto para indicar la operación, i.e. escribimos $g \cdot h = gh$.
Ejemplo 3.3. Sea Π un plano euclideano y G el conjunto de todas las transformaciones rígidas de Π en si mismo. Entonces G es un grupo con la operación de composición. Se llama el *grupo de transformaciones rígidas*.
Ejemplo 3.4. Sea $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ un conjunto de n elementos y S_n definido por

$$S_n = \{\sigma | \sigma : X \to X \text{ y } \sigma \text{ es biyectiva } \}$$

Entonces S_n es un grupo con la operación de composición. Se denomina *grupo simétrico*.
Ejemplo 3.5. Sea Δ un polígono regular de n lados en un plano euclideano Π y D_{2n} el conjunto de todas las transformaciones rígidas de Π en si mismo que llevan Δ en si mismo. D_{2n} se llama el *grupo diedral* de orden $2n$. Para un triángulo equilatero:



Recordemos el siguiente concepto.

Definición 2 (Acción de un grupo sobre un conjunto).

Diremos que un grupo G actúa sobre el conjunto X si existe una operación binaria externa $\star : G \times X \to G$ que satisface:

A. Si e es el neutro de G, $e \star x = x$, para todo $x \in X$.

B. Para todos $g, h \in G$ y $x \in X$, $g \star (h \star x) = (gh) \star x$.

Como en el caso de grupos suele nos escribirse el símbolo de la operación binaria, i.e. se escribe $g \star x = gx$.

Las raíces históricas de la teoría de grupos son la teoría de las ecuaciones algebraicas, la teoría de números y la geometría. Euler, Gauss, Lagrange, Abel y Galois fueron los creadores que ponen los cimientos de esta rama del álgebra abstracta. Otros importantes matemáticos que contribuyen son Cayley, Emil Artin, Emmy Noether, Peter Ludwig Mejdell Sylow, A.G. Kurosch, Iwasawa entre muchos otros. (Wikipedia)

3.4 Grupos continuos de simetrías

3.4.1. Grupos y cambios de variables

Los cambios de variables de un conjunto de dos variables, digamos x e y, son funciones Γ, invertibles, de clase C^1, donde $\Gamma : \Omega_1 \to \Omega_2$, con Ω_1, Ω_2 abiertos de $\mathbb{R}^2$. Acostumbraremos escribir $(\hat{x}, \hat{y}) = \Gamma(x, y)$ y diremos que $(\hat{x}, \hat{y})$ son la variables nuevas y (x, y) las viejas.

Ejemplo 3.6. Coordenadas polares. Es más facil describir la transformación que lleva coordenadas polares en cartesianas. En este caso $(x, y) = \Gamma(r, \theta)$ y

$$\begin{aligned} \Gamma(r, \theta) &= (r\cos(\theta), r\,\mathrm{sen}(\theta)), \\ \Omega_1 &= (0, \infty) \times (-\pi, \pi), \\ \Omega_2 &= \mathbb{R}^2 - \{(x, y) | y = 0, x \leq 0\} \end{aligned}$$

3.4.2. Grupos de Lie uniparamétricos

Definición 1 (Grupos de Lie uniparamétricos)**.**

Supongamos dada una acción del grupo $(\mathbb{R}, +)$ en $\mathbb{R}^2$. En este caso vamos a adoptar una notación funcional, i.e. en lugar de escribir $\varepsilon \star (x, y)$, con $\varepsilon \in \mathbb{R}$ y $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ pondremos $\Gamma_\varepsilon(x, y)$. Denotaremos por $\{\Gamma_\varepsilon\}$ a la acción introducida. Notar que $\{\Gamma_\varepsilon\}$ satisface que

A. $\forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R} : \Gamma_{\varepsilon_1} \circ \Gamma_{\varepsilon_2} = \Gamma_{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}$.

B. $\Gamma_0 = I$.

C. Γ_ε es invertible y $(\Gamma_\varepsilon)^{-1} = \Gamma_{-\varepsilon}$

La acción Γ_ε se denomina un *grupo de Lie uniparamétrico* si además:

4. $\forall \varepsilon \in \mathbb{R} : \Gamma_\varepsilon$ es un difeomorfismo sobre $\mathbb{R}^2$.

5. Si $\Gamma_\varepsilon(x, y) = (\hat{x}(x, y, \varepsilon), \hat{y}(x, y, \varepsilon))$ entonces las funciones $\hat{x}(x, y, \varepsilon)$ y $\hat{y}(x, y, \varepsilon)$ se desarrollan en serie de potencias respecto a ε. Es decir para todo $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}$ existen coeficientes a_j y b_j, $j = 0, 1, \ldots$, y $r > 0$ tales que

$$\begin{aligned} \hat{x}(x, y, \varepsilon) &= a_0(x, y) + a_1(x, y)(\varepsilon - \varepsilon_0) + \cdots \\ \hat{y}(x, y, \varepsilon) &= b_0(x, y) + b_1(x, y)(\varepsilon - \varepsilon_0) + \cdots \end{aligned} \tag{3.7}$$

para $|\varepsilon - \varepsilon_0| < r$.

Ejemplo 3.7. Demostrar que las siguientes aplicaciones inducen grupos de Lie uniparamétricos

A. $\Gamma_\varepsilon(x, y) = (x + \varepsilon, y)$ y $\Gamma_\varepsilon(x, y) = (x, y + \varepsilon)$.

B. $\Gamma_\varepsilon(x, y) = (e^\varepsilon x, y)$

C. $\Gamma_\varepsilon(x, y) = \left(\frac{x}{1 - \varepsilon x}, \frac{y}{1 - \varepsilon x}\right)$

D. $\Gamma_\varepsilon(x, y) = \begin{pmatrix} \cos(\varepsilon) & -\mathrm{sen}(\varepsilon) \\ \mathrm{sen}(\varepsilon) & \cos(\varepsilon) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Vamos a desarrollar sólo el ejemplo de $\Gamma_\varepsilon(x, y) = (x + \varepsilon, y)$. La propiedad 1 en la definición la chequearemos con SymPy.

```
from sympy import *
x,y,epsilon,epsilon1,epsilon2=symbols('x,y,epsilon,epsilon1,epsilon2')
T=Matrix([x+epsilon,y])
x_copete=T.subs(epsilon,epsilon1)[0]
y_copete=T.subs(epsilon,epsilon1)[1]
PropGrupo=T.subs([(x,x_copete),(y,y_copete),(epsilon,epsilon2)])-T.subs(
    epsilon,epsilon1+epsilon2)
```

PropGrupo

scripts/prop_grupo.py

La propiedad 2 en la definición es evidente y la propiedad 3 es siempre consecuencia de 1. y 2. Se incluyó en la lista sólo para resaltar su cumplimiento, pero no es necesario chequearla. La propiedad 4. es clara la 5. también lo es, notar que el desarrollo en serie (3.7) es válido en este caso con $a_0(x,y) = x$, $a_1(x,y) = 1$, $a_j(x,y) = 0$, $j \geq 2$, $b_0(x,y) = y$ y $b_j(x,y) = 0$, $j \geq 1$. La justificaciones correspondientes al resto de los ejemplos queda como ejercicio.

Las reflexiones en el plano, por ejemplo $\Gamma(x,y) = (-x,y)$, no pueden pertenecer a un grupo de Lie uniparamétrico. Más generalmente:

Teorema 1.

Una transformación $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que el determinante de la matriz Jacobiana $\det(DT)$ sea negativo en algún punto no puede pertenecer a un grupo de Lie uniparamerico. Dicho de otro modo, debe ocurrir que $\det(D\Gamma_\varepsilon) > 0$ para todo ε y todo grupo $\{\Gamma_\varepsilon\}$.

Demostración. Si Γ_ε es un grupo y supongamos por ejemplo que existe $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}$ y $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tal que:

$$J(x_0, y_0, \varepsilon_0) := \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} & \frac{\partial \hat{x}}{\partial y} \\ \frac{\partial \hat{y}}{\partial x} & \frac{\partial \hat{y}}{\partial y} \end{pmatrix} < 0,$$

donde las derivadas son tomadas en $\varepsilon = \varepsilon_0, x = x_0$ y $y = y_0$. Por otro lado tenemos que $J(x_0, y_0, 0) = 1$. Como $J(x_0, y_0, \varepsilon)$ es continua respecto a ε debería existir ε' con $J(x_0, y_0, \varepsilon') = 0$. Esto implica que la matriz jacobiana $D\Gamma_\varepsilon$ es singular y esto contradice que $\Gamma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es difeomorfismo ($D\Gamma D\Gamma^{-1} = I$). □

En el caso de la reflexión $\Gamma(x,y) = (x,-y)$, se genera un grupo discreto, ya que $\Gamma^2 = \Gamma \circ \Gamma = I$. Luego Γ genera el grupo finito $G = \{I, \Gamma\}$ que es isomorfo a $\mathbb{Z}_2$. En este caso diremos que $\{I, \Gamma\}$ es un *grupo discreto*.

3.4.3. Grupos de simetrías de EDO

Definición 2 (Grupo de simetrías de una ecuación)**.**

Consideremos una ecuación

$$y' = f(x,y). \tag{3.8}$$

Una transformación o cambio de variables Γ se denomina una *simetría* de la ecuación si el cambio de variables dado por $(\hat{x}, \hat{y}) = \Gamma(x,y)$ deja invariante la ecuación. Diremos que un grupo de Lie uniparamétrico $\{\Gamma_\varepsilon\}$ es un grupo uniparamétrico de simetrías de (3.8) si Γ_ε es simetría de la ecuación para cada ε.

De acuerdo con (3.6) para que $(\hat{x}, \hat{y}) = \Gamma(x,y)$ sea una simetría de (3.8) se debe cumplir que

$$\frac{\frac{\partial \hat{y}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{y}}{\partial y} f(x,y)}{\frac{\partial \hat{x}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{x}}{\partial y} f(x,y)} = f(\hat{x}, \hat{y}) \tag{3.9}$$

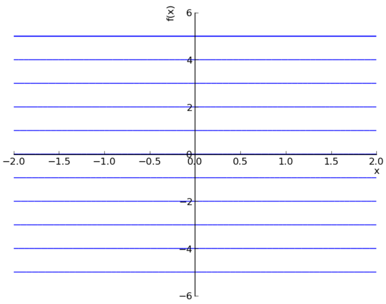
Esta ecuación se llama *condición de simetría*. Es una ecuación en derivadas parciales, en principio más compleja que la ecuación original. Tiene varios grados de libertad, por lo que suele haber muchas simetrías. Es común que encontremos soluciones a traves de un ansatz.

Ejemplo 3.8. Consideremos la ecuación

$$y' = 0. \tag{3.10}$$

La condición de simetría se reduce a

$$\frac{\frac{\partial \hat{y}}{\partial x}}{\frac{\partial \hat{x}}{\partial x}} = 0$$



Debemos tener que $\frac{\partial \hat{y}}{\partial x} = 0$. Vale decir $\hat{y}$ es independiente de x. De allí la forma general de una simetría es

$$\hat{x} = \hat{x}(x, y) \quad \hat{y} = \hat{y}(y).$$

Hay muchas simetrías. Las traslaciones en cualquier dirección $(x, y) \mapsto (x + \alpha, y + \beta)$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$. Cambios de escala en ambos ejes $(x, y) \mapsto (e^{\varepsilon} x, y)$, $(x, y) \mapsto (x, e^{\varepsilon} y)$. Reflexiones respecto ambos ejes $(x, y) \mapsto (-x, y)$, $(x, y) \mapsto (x, -y)$. Observar que el gráfico de las soluciones posee las mismas simetrías, pues en general *las simetrías de una ecuación llevan soluciones en soluciones.*

De todas las simetrías encontradas $\Gamma_\varepsilon(x, y) = (e^{\varepsilon} x, y)$, $\Gamma_\varepsilon(x, y) = (x + \varepsilon, y)$ y $\Gamma_\varepsilon(x, y) = (x + \varepsilon, y)$ se llaman *triviales* pues llevan una curva solución en si misma. Cualquier cambio de la forma $\hat{x} = \hat{x}(x, y) \quad \hat{y} = y$ es trivial. *Estamos interesados en hallar grupos de Lie uniparamétricos de simetrías no triviales.*

Ejemplo 3.9. Hallar simetrías de

$$\frac{dy}{dx} = f(x).$$

De acuerdo con (3.6) se debe cumplir que

$$\frac{\frac{\partial \hat{y}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{y}}{\partial y} f(x)}{\frac{\partial \hat{x}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{x}}{\partial y} f(x)} = f(\hat{x})$$

La forma de la ecuación sugiere el ansatz

$$\boxed{\hat{x} = x}, \quad \frac{\partial \hat{y}}{\partial x} = \frac{\partial \hat{x}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \hat{y}}{\partial y} = \frac{\partial \hat{x}}{\partial x}.$$

Luego

$$\frac{\partial \hat{y}}{\partial y} = 1 \Rightarrow \boxed{\hat{y} = y + \varepsilon}$$

con ε constante arbitraria. Hallamos que

$$\Gamma_\varepsilon(x, y) = (x, y + \varepsilon)$$

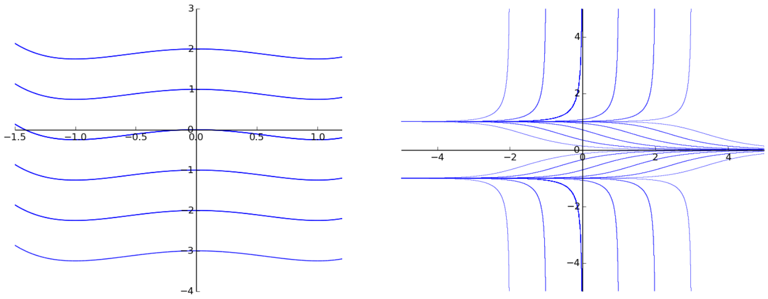
es un grupo de Lie uniparamétrico de simetrías. De manera similar

$$\Gamma_\varepsilon(x, y) = (x + \varepsilon, y)$$

es un grupo uniparamétrico de simetrías para

$$\frac{dy}{dx} = f(y).$$

Geométricamente en el primer caso todas las soluciones se obtienen trasladando una cualquiera verticalmente y en el segundo caso horizontalmente.



Soluciones de $y' = x^3 - x$ Soluciones de $y' = y^3 - y$

Ejemplo 3.10. Demostrar que las rotaciones alrededor del origen es un grupo de Lie uniparamétrico de simetrías de

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^3 + x^2y - x - y}{x^3 + xy^2 - x + y}.$$

Sea Γ_ε la transformación que rota un ángulo ε alrededor del origen. Es un ejercicio demostrar que $\{\Gamma_\varepsilon | \varepsilon \in \mathbb{R}\}$ es un grupo uniparamétrico de simetrías. Se tiene la representación matricial

$$\Gamma_\varepsilon(x,y) = \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varepsilon) & -\operatorname{sen}(\varepsilon) \\ \operatorname{sen}(\varepsilon) & \cos(\varepsilon) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Gamma_\varepsilon^{-1}(\hat{x},\hat{y}) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varepsilon) & \operatorname{sen}(\varepsilon) \\ -sen(\varepsilon) & \cos(\varepsilon) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix}$$

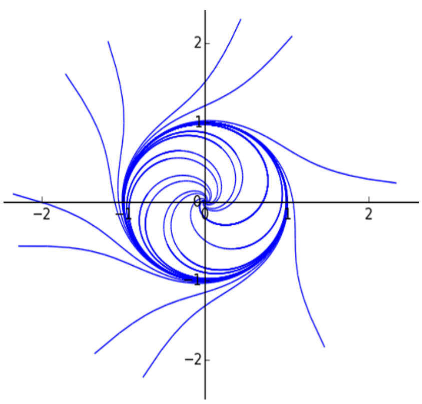
Para el cálculo recurrimos a SymPy (usamos `x_n` en lugar de $\hat{x}$) e

```
from sympy import *
x,theta=symbols('x,theta')
y=Function('y')(x)
x_n=cos(theta)*x-sin(theta)*y
y_n=sin(theta)*x+cos(theta)*y
Expr2=y_n.diff(x)/x_n.diff(x)
Expr3=Expr2.subs(y.diff(),\
(y**3+x**2*y-x-y)/(x**3+x*y**2-x+y))
x_n,y_n=symbols('x_n,y_n')
Expr4=Expr3.subs([(y, -sin(theta)*x_n+cos(theta)*y_n),\
(x,cos(theta)*x_n+sin(theta)*y_n)])
Expr5=simplify(Expr4)
```

scripts/sim_ecua1.py

La ecuación resultante es *la misma*

$$\frac{dy_n}{dx_n} = \frac{x_n^2 y_n - x_n + y_n^3 - y_n}{x_n^3 + x_n y_n^2 - x_n + y_n}.$$



A la misma conclusión arribábamos si recordabamos que en en coordenadas polares la ecuación se escribe

$$\frac{dr}{d\theta} = r - r^3,$$

y que esta ecuación tiene las simetrías $\Gamma_\varepsilon : (r,\theta) \mapsto (r, \theta + \varepsilon)$. Si rotamos un ángulo fijo el gráfico de una solución obtenemos el gráfico de otra solución.

Ejemplo 3.11. Supongamos que $y' = f(x,y)$ tiene el grupo de Lie uniparamétrico de simetrías

$$(\hat{x},\hat{y}) = \Gamma_\varepsilon(x,y) = (x, y+\varepsilon) \tag{3.11}$$

Usando la condición de simetrías (3.9) tenemos

$$f(x,y) = f(\hat{x},\hat{y}) = f(x,y+\varepsilon).$$

La igualdad vale para todo ε, luego poniendo $\varepsilon = -y$ vemos que $f(x,y) = f(x,0) := f(x)$. Vale decir que f es independiente de y y la ecuación

$$y' = f(x),$$

se resuelve simplemente integrando.

3.5 Órbitas, tangentes y curvas invariantes

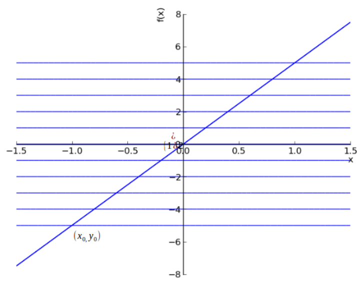
Definición 1 (Órbitas)**.**

Dado un grupo uniparamétrico de simetrías $G = \{\Gamma_\varepsilon | \varepsilon \in \mathbb{R}\}$, y $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ llamamos *órbita* (x_0,y_0) *bajo la acción de* G (simplemente órbita si es claro quien es G) a la curva

$$\{\Gamma_\varepsilon(x_0,y_0) | \varepsilon \in \mathbb{R}\}$$

Si G es un grupo de simetrías no trivial, entonces es de esperar que la órbita de (x_0,y_0) cruce transversalmente las curvas solución. La órbita se usará como una nueva coordenada. La órbita atraves de (x,y) es el conjunto de puntos de coordenadas

$$(\hat{x}(x,y,\varepsilon), \hat{y}(x,y,\varepsilon)) = \Gamma_\varepsilon(x,y), \tag{3.12}$$



donde

$$(\hat{x}(x,y,0), \hat{y}(x,y,0)) = (x,y).$$

Las ecuaciones (3.12) son ecuaciones paramétricas (parámetro ε) de una curva en el plano.

Definición 2 (Puntos invariantes)**.**

Un punto (x,y) se llama invariante si su órbita se reduce a $\{(x,y)\}$, vale decir

$$(x,y) = \Gamma_\varepsilon(x,y), \quad \forall \varepsilon > 0$$

Ejemplo 3.12. La órbita de (x,y) bajo la acción del grupo de Lie uniparamétrico

$$\Gamma_\varepsilon(x,y) = \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varepsilon) & -\operatorname{sen}(\varepsilon) \\ \operatorname{sen}(\varepsilon) & \cos(\varepsilon) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Son circunferencias con centro en el origen. El punto $(0,0)$ es invariante.

Definición 3 (Campo vectorial de tangentes)**.**

Dado un grupo de Lie uniparamétrico $(\hat{x}(x,y,\varepsilon),\hat{y}(x,y,\varepsilon)) = \Gamma_\varepsilon(x,y)$ definimos el campo vectorial

$$(\xi(x,y),\eta(x,y)) = \left(\left.\frac{d\hat{x}}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}, \left.\frac{d\hat{y}}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \right).$$

ξ y η se llaman *símbolos infinitesimales.*
Como $\hat{x},\hat{y}$ eran analíticas respecto a ε tenemos las fórmulas.

$$\begin{aligned} \hat{x} &= x + \varepsilon\xi(x,y) + O(\varepsilon^2) \\ \hat{y} &= y + \varepsilon\eta(x,y) + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \tag{3.13}$$

En un punto invariante $\boxed{\xi(x,y) = \eta(x,y) = 0}$.

Ejemplo 3.13. Campo vectorial de infitesimales para las rotaciones.

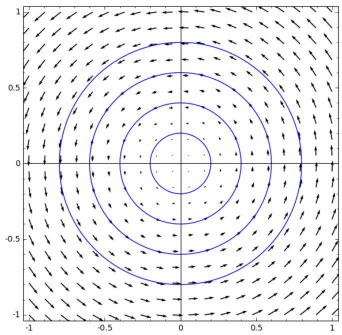


Figura 3.1: Campo vectorial de infinitesimales (ξ,η)

Definición 4.

Más generalmente, un conjunto $C \subset \mathbb{R}^2$ se dice *invariante* por un grupo uniparamétrico de simetrías de Lie Γ_ε si y sólo si $\forall\varepsilon : \Gamma_\varepsilon(C) \subset C$, i.e. las órbitas de puntos en C permanecen en C.

Observaciones

A. El conjunto unitario $\{(x,y)\}$ es invariante si y sólo si el punto (x,y) es invariante.

B. Se C es una curva plana suave, supongamos que C viene dada por la ecuación implícita $g(x,y) = 0$, con $\nabla g \neq 0$. Supongamos que $(\xi,\eta) \neq (0,0)$ sobre C. Entonces C es invariante si y sólo si la tangente a C en cada punto (x,y) es paralela a $(\xi(x,y),\eta(x,y))$. La demostración de este hecho se propone como ejercicio.

C. Si en particular C es una curva que viene descripta como el gráfico de una función $y = h(x)$, entonces C es invariante si y sólo si

$$Q(x,y,y') = \eta(x,y) - h'\xi(x,y) \equiv 0. \tag{3.14}$$

En efecto, en este caso $g(x, y) = y - h(x)$ (notar que $\nabla g = (-h'(x), 1) \neq 0$). Como ∇g es perpendicular a C tenemos la ecuación (3.14). La ecuación (3.14) se llama *ecuación característica*.

D. Si además de lo anterior, Γ_ε es un grupo de Lie de simetrías de $y' = f(x, y)$ e $y(x)$ es una curva invariante y solución de la ecuación entonces:

$$\boxed{\overline{Q}(x, y) = \eta(x, y) - f(x, y)\xi(x, y) \equiv 0.} \tag{3.15}$$

A esta ecuación la llamamos *ecuación característica reducida*.

El recíproco también es cierto.

Teorema 1.

Supongamos que $y(x)$ es solución de la ecuación característica y que

$$\left.\frac{\partial \overline{Q}}{\partial y}\right|_{y=y(x)} \neq 0.$$

Entonces $y(x)$ es una solución invariante de la ecuación.

Demostración. Será completada más adelante. □

Ejemplo 3.14. La EDO

$$y' = y \tag{3.16}$$

tiene simetrías de escala

$$(\hat{x}, \hat{y}) = \Gamma_\varepsilon(x, y) = (x, e^\varepsilon y).$$

Luego

$$(\xi, \eta) = \left(\left.\frac{d\hat{x}}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}, \left.\frac{d\hat{y}}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \right) = (0, y)$$

Cualquier punto en el conjunto $\{(x, 0) | x \in \mathbb{R}\}$ es invariante. La ecuación característica reducida es.

$$\overline{Q}(x, y) = 0 \Rightarrow y = 0$$

Esta formada enteramente por puntos invariantes.

Ejemplo 3.15. Demostrar que la siguiente expresión es un grupo de Lie uniparamétrico de simetrías

$$(\hat{x}, \hat{y}) = \Gamma_\varepsilon(x, y) = (e^\varepsilon x, e^{(e^\varepsilon - 1)x} y),$$

para la ecuación (3.16). Para este grupo tenemos

$$(\xi, \eta) = (x, xy)$$

Todo punto en $x = 0$ es invariante. La ecuación característica reducida es

$$\overline{Q}(x, y) = 0 \Rightarrow xy - xy = 0$$

De modo que estas simetrías actuan trivialmente sobre las soluciones. Llevan una solución en si misma. Chequeemos esta afirmación de manera directa.

Buscamos el cambio de variables inverso

$$\left.\begin{array}{ll} \hat{x} & = e^\varepsilon x \\ \hat{y} & = e^{(e^\varepsilon - 1)x} y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{ll} x & = e^{-\varepsilon} \hat{x} \\ y & = e^{(e^{-\varepsilon} - 1)\hat{x}} \hat{y} \end{array}\right\}$$

Las soluciones son $y = ke^x$, sustituímos en esta expresión, luego de unas operaciones, llegamos a $\hat{y} = ke^{\hat{x}}$.
Ejemplo 3.16. La ecuación de Riccati

$$y' = xy^2 - \frac{2y}{x} - \frac{1}{x^3}, \quad x \neq 0$$

Tiene el grupo de Lie de simetrías

$$(\hat{x}, \hat{y}) = \Gamma_\varepsilon(x, y) = (e^\varepsilon x, e^{-2\varepsilon} y).$$

Tenemos

$$(\xi, \eta) = (x, -2y).$$

La característica reducida

$$\overline{Q}(x, y) = \frac{1}{x^2} - x^2 y^2 = 0.$$

Tenemos dos soluciones invariantes

$$y = \pm\frac{1}{x^2}.$$

3.6 Simetrías a partir de Infinitesimales

La mayoría de los métodos de simetría usan (ξ, η) en lugar de las simetrías en si mismas. Por otra parte $(\xi(\hat{x}, \hat{y}), \eta(\hat{x}, \hat{y}))$ determinan las simetrías a traves de las ecuaciones

$$\begin{cases} \frac{d\hat{x}}{d\varepsilon} & = \xi(\hat{x}, \hat{y}) \\ \frac{d\hat{y}}{d\varepsilon} & = \eta(\hat{x}, \hat{y}) \\ \hat{x}(x, y, 0) & = x \\ \hat{y}(x, y, 0) & = y \end{cases} \tag{3.17}$$

Justificación de las ecuaciones. De la propiedad de grupo $\Gamma_{\varepsilon_1} \circ \Gamma_\varepsilon = \Gamma_{\varepsilon+\varepsilon_1}$, deducimos

$$\hat{x}(x, y, \varepsilon + \varepsilon_1) = \hat{x}(\hat{x}(x, y, \varepsilon), \hat{y}(x, y, \varepsilon), \varepsilon_1).$$

Derivando respecto a ε_1 y evaluando en $\varepsilon_1 = 0$ justificamos las EDO en (3.17).

El *sistema de ecuaciones* (3.17) puede ser difícil de resolver. Pero en algunos casos puede ser posible.
Ejemplo 3.17. Encontrar el grupo de simetrías para los infinitesimales $\xi(x, y), \eta(x, y)) = (x^2, xy)$.

$$\frac{d\hat{x}}{d\varepsilon} = \xi(\hat{x}, \hat{y}) = \hat{x}^2 \text{ y } \hat{x}(x, y, 0) = x \Rightarrow \hat{x} = \frac{x}{1 - \varepsilon x}$$

y

$$\frac{d\hat{y}}{d\varepsilon} = \eta(\hat{x}, \hat{y}) = \hat{x}\hat{y} \text{ y } \hat{y}(x, y, 0) = y \Rightarrow \hat{y} = \frac{y}{1 - \varepsilon x}$$

3.7 Condición de Simetría Linealizada

En esta sección discutiremos una técnica para encontrar simetrías de ecuaciones.

Desarrollando en serie de Taylor las funciones $\hat{x}$ e $\hat{y}$ en ε alrededror de $\varepsilon = 0$

$$\hat{x} = x + \varepsilon\xi + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$
$$\hat{y} = y + \varepsilon\eta + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

Reemplazando en la condición de simetría, que recordemos es

$$\frac{\frac{\partial \hat{y}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{y}}{\partial y} f(x,y)}{\frac{\partial \hat{x}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{x}}{\partial y} f(x,y)} = f(\hat{x}, \hat{y}),$$

obtenemos

$$\frac{f + \varepsilon\{\eta_x + f\eta_y\} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)}{1 + \varepsilon\{\xi_x + f\xi_y\} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)} = f(x + \varepsilon\xi + \mathcal{O}(\varepsilon^2), y + \varepsilon\eta + \mathcal{O}(\varepsilon^2))$$

Desarrollando en serie de Taylor para x e y el segundo miembro y luego de algunas operaciones

$$f + \varepsilon\{\eta_x + (\eta_y - \xi_x)f - \xi_y f^2\} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = f + \varepsilon\{\xi f_x + \eta f_y\} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

Cancelando f dividiendo por ε y haciendo $\varepsilon \to 0$ llegamos a la *Condición de Simetría Linealizada*

$$\boxed{\eta_x + (\eta_y - \xi_x)f - \xi_y f^2 = \xi f_x + \eta f_y} \tag{3.18}$$

Recordando la característica reducida $\overline{Q} = \eta - f\xi$, la fórmula anterior se escribe más sintéticamente

$$\boxed{\overline{Q}_x + f\overline{Q}_y = f_y\overline{Q}} \tag{3.19}$$

Cada solución de (3.19) conlleva una infinita cantidad de grupos de Lie de simetrías, porque si $\overline{Q}$ resueleve (3.19) entonces para toda función ξ el par $(\xi, \overline{Q} + f\xi)$ son infinitesimales para un grupo de Lie de simetrías de la ecuación. La solución trivial $\overline{Q} \equiv 0$ de (3.19) se corresponde con simetrías triviales. En principio podríamos utilizar el método de características, que hemos visto en la unidad anterior, para resolver la ecuación lineal en derivadas parciales de primer orden (3.19) que, recordando lo visto, se puede escribir

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{f} = \frac{d\overline{Q}}{f_y\overline{Q}}.$$

La primera igualdad en la ecuación anterior equivales a $dy/dx = f$, que es al fin y al cabo, la ecuación que queremos resolver. Así estas consideraciones parecen habernos llevado al origen de nuestro problema. No obstante, algunas veces es posible encontrar una solución de (3.18) recurriendo a un ansatz.

Ejemplo 3.18. Encontrar un grupo de Lie de simetrías no trivial de $y' = \frac{y}{x} + x$.

La condición de simetría linealizada es

$$\eta_x + (\eta_y - \xi_x)\left(\frac{y}{x} + x\right) - \xi_y\left(\frac{y}{x} + x\right)^2 = \xi\left(1 - \frac{y}{x^2}\right) + \frac{\eta}{x},$$

que luce intimidante. Hagamos el ansatz $\xi = 0$ y $\eta = \eta(x)$. Conseguimos

$$\eta_x - \frac{\eta}{x} = 0$$

Cuya solucion general es $\boxed{\eta = cx}$. Ahora podemos encontrar simetrías de la ecuación. Recordando (3.17), tenemos

$$\left\{\begin{array}{ll} \frac{d\hat{x}}{d\varepsilon} & = 0 \\ \frac{d\hat{y}}{d\varepsilon} & = c\hat{x} \\ \hat{x}(x,y,0) & = x \\ \hat{y}(x,y,0) & = y \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} \hat{x} & = x \\ \hat{y} & = c\varepsilon x + y \end{array}\right.$$

Podemos constatar de manera directa que $\hat{x} = x$ e $\hat{y} = c\varepsilon x + y$ constituyen un grupo de Lie uniparamétrico de simetrías de la ecuación, para el cual $\overline{Q} \neq 0$.

Completación de la demostración del Teorema 1. Restaba demostrar que si $y(x)$ resuelve la ecuación $\overline{Q}(x, y(x)) = 0$ y $\overline{Q}_y \neq 0$ en los puntos a lo largo de la curva $(x, y(x))$ entonces $y(x)$ es solución invariante de la ecuación $y' = f$.

Por el Teorema de la función implícita, la condición de simetría linealizada (3.19) y $\overline{Q} = 0$

$$y'(x) = -\frac{\overline{Q}_x}{\overline{Q}_y} = f - f_y \frac{\overline{Q}}{\overline{Q}_y} = f$$

Luego y es solución de la ecuación. El hecho de que es invariante es simplemente la igualdad $\overline{Q} = 0$.

3.8 Coordenadas canónicas

3.8.1. Definición y ejemplos

Definición 1 (Coordenadas canónicas)**.**

Diremos que las coordenadas (r, s) son canónicas respecto a el grupo de Lie de simetrías Γ_ε si en las coordenadas (r, s) la acción de grupo es la traslación

$$(\hat{r}, \hat{s}) := (r(\hat{x}, \hat{y}), s(\hat{x}, \hat{y})) = (r(x, y), s(x, y) + \varepsilon). \tag{3.20}$$

Ejemplo 3.19. Las coordenadas polares son canónicas respecto al grupo de Lie de rotaciones. Las rotaciones en coordenadas cartesianas y polares se escriben

$$\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varepsilon) & -\operatorname{sen}(\varepsilon) \\ \operatorname{sen}(\varepsilon) & \cos(\varepsilon) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} \hat{r} &= r \\ \hat{\theta} &= \theta + \varepsilon \end{aligned}$$

Derivando las ecuaciones (3.20) respecto a ε obtenemos

$$\begin{aligned} \xi(x, y)\frac{\partial r}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial r}{\partial y} &= 0 \\ \xi(x, y)\frac{\partial s}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial s}{\partial y} &= 1 \end{aligned} \tag{3.21}$$

Los cambios de coordenadas deben ser invertibles, de modo que pediremos la condición de no degeneración

$$\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial s}{\partial y} - \frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial s}{\partial x} \neq 0 \tag{3.22}$$

Observaciones:

A. El vector tangente en cualquier punto no invariante es paralelo a la curva $r =$ cte que pasa por ese punto. Luego esa curva continene las órbitas de cada punto en ella. Las órbitas son invariantes, así r se llama la *coordenada invariante*. Las curvas $s =$ cte son transversales a las órbitas.

B. Las coordenadas canónicas no estan definidas en un punto (x, y) invariante pues en esos puntos $\xi(x, y) = \eta(x, y) = 0$.

C. Las coordenadas canónicas estan definidas en un entorno de cualquier punto no invariante. Esta afirmación requiere una demostración que utiliza métodos y conceptos que estan fuera de los objetivos de este curso.

D. Las coordenadas canónicas no son únicas. De hecho si (r, s) son canónicas $(\tilde{r}, \tilde{s}) = (F(r), G(r) + s)$ lo son para cualquier F y G con $F'(r) \neq 0$ (para la no degeneración).

3.9 Encontrando coordenadas canónicas

3.9.1. Integrales primeras

Definición 1 (Integrales primera)**.**

Una integral primera de la EDO $y' = f(x, y)$ es una función $\phi(x, y)$ que es constante a lo largo de cualquier curva solución de la EDO. Se la denomina también *magnitud conservada.*

Teorema 1 (Propiedad de conservación de coordenadas canónicas)**.**

Si (r, s) son coordenadas canónicas de una grupo de Lie de simetrías entonces r es una integral primera de la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\eta(x, y)}{\xi(x, y)}. \tag{3.23}$$

Dem. La afirmación del teorema es consecuencia de que el campo (ξ, η) es tangente a las curvas $r = c$, con c constante. Justifiquemos el teorema del siguiente modo. Supongamos $y(x)$ solución de la EDO, es suficiente demostrar que $\frac{d}{dx} r(x, y(x)) = 0$. Pero, en efecto

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dx} r(x, y(x)) &= \tfrac{\partial r}{\partial x} + \tfrac{\partial s}{\partial y} y' && \text{(regla cadena)} \\ &= \tfrac{\partial r}{\partial x} + \tfrac{\partial s}{\partial y} \tfrac{\eta(x,y)}{\xi(x,y)} && \text{(Ec. (3.23))} \\ &= 0 && \text{(Ec. (3.21))} \end{aligned}$$

□

Ejemplo 3.20. Ya conocemos las coordenadas canónicas de las rotaciones,

$$\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varepsilon) & -\operatorname{sen}(\varepsilon) \\ \operatorname{sen}(\varepsilon) & \cos(\varepsilon) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

hallemosla por el método propuesto. Hay que resolver

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \Rightarrow y dy = -x dx \Rightarrow y^2 + x^2 = C$$

Luego $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ es una integral primera.

La coordenada r es constante sobre los puntos en la gráfica de una solución de (3.23). Sobre esos puntos $(x, y(x))$, la coordenada s satisface:

$$\begin{aligned} \tfrac{ds}{dx} &= \tfrac{\partial s}{\partial x} + \tfrac{\partial s}{\partial y} y'(x) && \text{(Regla cadena)} \\ &= \tfrac{\partial s}{\partial x} + \tfrac{\partial s}{\partial y} \tfrac{\eta}{\xi} && \text{(3.23)} \\ &= \tfrac{1}{\xi} && \text{(3.21).} \end{aligned} \tag{3.24}$$

Ahora podemos aprovechar que ya conocemos r y expresar y como función de r, x. Luego

Teorema 2 (Expresión para s)**.**

$$s = \int \frac{ds}{dx} dx = \int \frac{dx}{\xi(x, y(r, x))}. \tag{3.25}$$

En la igualdad resultante reemplazamos r por su expresión en las variables x, y.

Si ocurriese que $\xi = 0$ y $\eta \neq 0$. Entonces por (3.23) $r_y = 0$, de modo que r es sólo función de x. Se puede asumir $r = x$. Además $\eta s_y = 1$, entonces

$$\boxed{s = \int \frac{dy}{\eta(r, y)}.} \tag{3.26}$$

Ejemplo 3.21. Retornando al ejemplo de las rotaciones, donde hallamos que $r = \sqrt{(x^2 + y^2)}$, vemos que

$$s = \int \frac{dx}{-y} = -\int \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \arccos\left(\frac{x}{r}\right).$$

Por consiguiente s es el ángulo polar.
Ejemplo 3.22. Encontrar coordenadas canónicas para el grupo de Lie de simetrías

$$(\hat{x}, \hat{y}) = (e^{\varepsilon} x, e^{k\varepsilon} y) \quad k > 0.$$

El vector tangente es

$$(\xi, \eta) = \left(\left.\frac{d\hat{x}}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}, \left.\frac{d\hat{y}}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \right) = (x, ky).$$

Resolvamos la ecuación (3.23)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ky}{x} \Rightarrow y = Cx^k.$$

Luego $\Phi = y/x^k$ es integral primera. Entonces podemos tomar $r = y/x^k$. Para s

$$s = \int \frac{dx}{\xi} = \frac{dx}{x} = \ln|x|.$$

Entonces $(r, s) = (yx^{-k}, \ln|x|)$ son coordenadas canónicas. No estan definidas en $x = 0$. Podemos encontrar coordenadas canónicas definidas en $x = 0$ del siguiente modo. Recordamos que para todas F y G

$$(\tilde{r}, \tilde{s}) = (F(r), G(r) + s) = (F(x^{-k}y), G(x^{-k}y) + \ln|x|).$$

Son canónicas también. Si tomamos $F(r) = 1/r$ y $G(r) = \frac{1}{k}\ln|r|$, evitamos la singularidad. Luego

$$(\tilde{r}, \tilde{s}) = (x^k y^{-1}, \frac{1}{k}\ln|y|).$$

Son canónicas, están definidas en $x = 0$ pero no en $y = 0$.
Ejemplo 3.23. Encontrar coordenadas canónicas para

$$(\hat{x}, \hat{y}) = \left(\frac{x}{1 - \varepsilon x}, \frac{y}{1 - \varepsilon x}\right).$$

$$(\xi, \eta) = \left(\left.\frac{d\hat{x}}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}, \left.\frac{d\hat{y}}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \right) = (x^2, xy).$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\eta}{\xi} = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{y}{x} = \text{cte}.$$

Podemos tomar $r = y/x$. Para s

$$s = \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}.$$

Luego $(r, s) = (\frac{y}{x}, -\frac{1}{x})$ son canónicas.

En este caso los puntos sobre $x = 0$ son invariantes, no podemos definir coordenadas canónicas allí.

Lo podemos desarrollar con SymPy.

```
>>> from sympy import *
>>> x,y,epsilon=symbols('x,y,epsilon')
>>> T=Matrix([x/(1-epsilon*x),y/(1-epsilon*x)])
>>> xi=T[0].diff(epsilon).subs(epsilon,0)
>>> xi
x**2
>>> eta=T[1].diff(epsilon).subs(epsilon,0)
>>> eta/xi
y/x
>>> y=Function('y')(x)
>>> dsolve(y.diff(x)-y/x,y)
y(x) == C1*x
>>> Integral(1/xi,x).doit()
-1/x
```

scripts/coor_canon.py

3.9.2. Infinitesimales→Simetrías (Revisitado)

Las coordenadas canónicas nos dan otra manera de encontrar simetrías a partir de los infinitesimales siguiendo el procedimiento:

A. Determinar las coordenadas canónicas (sólo necesitamos conocer los infinitesimales).

B. Expresamos las relaciones $\hat{r} = r$ y $\hat{s} = s + \varepsilon$ en las coordenadas x, y.

Ejemplo 3.24. Hallar el grupo de simetrías asociado a los infinitesimales $\xi = x^2$ y $\eta = xy$.

A. En la sección 3.9.1 hallamos las coordenadas canónicas $(r, s) = \left(\frac{y}{x}, -\frac{1}{x}\right)$ asociadas a los infinitesimales dados.

B. Entonces

$$(\hat{r}, \hat{s}) = (r, s + \varepsilon) \Rightarrow \frac{\hat{y}}{\hat{x}} = \frac{y}{x}, -\frac{1}{\hat{x}} = -\frac{1}{x} + \varepsilon$$
$$\Rightarrow \hat{x} = \frac{x}{1 - \varepsilon x}, \hat{y} = \frac{y}{1 - \varepsilon x}.$$

3.10 Resolviendo EDO con grupos de Lie de simetrías

3.10.1. Método de solución

Finalmente, toda la teoría expuesta nos permite elaborar un método que puede resolver una ecuación dada supuesto que conocemos un grupo de Lie de simetrías de ella. Supongamos dado un grupo de Lie de simetrías $(\hat{x}, \hat{y})$ de la ecuación

$$\boxed{y' = f(x, y)} \tag{3.27}$$

Supongamos que las simetrías son no triviales. Según (3.15) debemos tener

$$\eta(x,y) \not\equiv f(x,y)\xi(x,y)$$

La razón de esta condición es que si fuese falsa entonces la ecuación (3.23) es la misma que la ecuación (3.27) y el método es inútil.

Supongamos (r,s) coordenadas canónicas. La ecuación en las coordenadas (r,s), según (3.6), se escribirá

$$\frac{ds}{dr} = \hat{f}(r,s) := \frac{s_x + f(x,y)s_y}{r_x + f(x,y)r_y}. \tag{3.28}$$

Las coordenadas canónicas se definen por (3.20) de modo que el grupo de simetrías actúe por traslación $(\hat{r},\hat{s}) = (r, s+\varepsilon)$. Cómo se justifica en el Ejemplo 3.4.3, $\hat{f}$ es independiente de s, por consiguiente la ecuación se reduce a

$$\frac{ds}{dr} = \hat{f}(r) \tag{3.29}$$

que se resuelve integrando.

Ejemplo 3.25. Resolver

$$y' = xy^2 - \frac{2y}{x} - \frac{1}{x^3}, \quad x \neq 0,$$

sabiendo que la ecuación es invariante para el grupo de simetrías

$$(\hat{x},\hat{y}) = (e^{\varepsilon}x, e^{-2\varepsilon}y).$$

Por los resultados de la sección 3.9.1:

$$(r,s) = (x^2y, \ln|x|)$$

son canónicas. Según (3.28) la ecuación en (r,s) es:

$$\frac{dr}{ds} = \frac{\frac{1}{x}}{2xy + x^2\left(xy^2 - \frac{2y}{x} - \frac{1}{x^3}\right)} = \frac{1}{x^4y^2 - 1} = \frac{1}{r^2-1}$$

Como sabíamos que debía suceder el resultado del segundo miembro no depende sólo de r. Integrando

$$s = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{r-1}{r+1}\right) + C.$$

Sustituyendo

$$\ln|x| = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2y-1}{x^2y+1}\right) + C.$$

Despejando

$$y = -\frac{x^2+C}{x^2(x^2-C)} \tag{3.30}$$

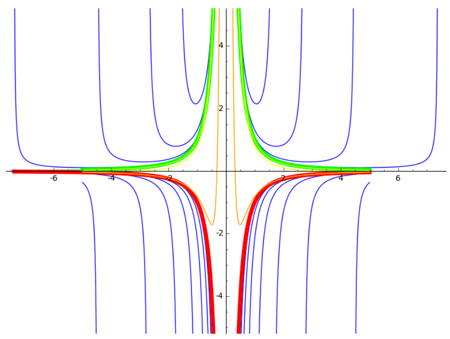


Figura 3.1: Soluciones de $y' = xy^2 - \frac{2y}{x} - \frac{1}{x^3}$

La ecuación característica reducida (3.15) es para la ecuación de este ejemplo:

$$0 = \overline{Q} = -2y - \left(xy^2 - \frac{2y}{x} - \frac{1}{x^3}\right)x = -x^2y^2 + \frac{1}{x^2}$$

Cuyas soluciones son

$$y = \pm\frac{1}{x^2}.$$

Que además son solución de la ecuación diferencial. La curva $y = -1/x^2$ se obtiene de (3.30) con $C = 0$. La curva $y = -1/x^2$. En la figura 3.1 graficamos las distintas soluciones.Las curvas azules y naranjas se corresponden con las gráficas de (3.30) con $c > 0$ y $c < 0$ respectivamente. La verde es la de $y = 1/x^2$ y la roja de $y = -1/x^2$.

Ejemplo 3.26. Resolver

$$y' = \frac{y+1}{x} + \frac{y^2}{x^3}, \quad x \neq 0,$$

sabiendo que la ecuación es invariante para el grupo de simetrías

$$(\hat{x}, \hat{y}) = \left(\frac{x}{1-\varepsilon x}, \frac{y}{1-\varepsilon x}\right).$$

Ya hemos computado las coordenadas canónicas en la subsección 3.9.1:

$$(r, s) = \left(\frac{y}{x}, \frac{1}{x}\right).$$

Por (3.28) la ecuación se escribe

$$\frac{dr}{ds} = \frac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{y}{x^2} + \frac{1}{x}\left(\frac{y+1}{x} + \frac{y^2}{x^3}\right)} = \frac{1}{1+r^2},$$

cuya solución es

$$s = \arctan(r) + C \Rightarrow y = -x\tan\left(\frac{1}{x} + C\right).$$

3.10.2. Ecuaciones homogéneas

Ejemplo 3.27. En este ejemplo deduciremos nuevamente el método de solución de ecuaciones homogéneas apelando a las simetrías. Es decir, queremos resolver la ecuación

$$\boxed{y' = F\left(\frac{y}{x}\right).} \tag{3.31}$$

Aquí tenemos el Grupo de Lie de simetrías de cambio de escalas

$$(\hat{x}, \hat{y}) = (e^{\varepsilon}x, e^{\varepsilon}y).$$

Por los resultados de la subsección 3.9.1, $(r, s) = (y/x, \ln|x|)$ son canónicas y la ecuación se escribe

$$\frac{ds}{dr} = \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{y}{x^2} + \frac{F(\frac{y}{x})}{x}} = \frac{1}{F(r) - r}.$$

La solución general es

$$\ln|x| = \int^{y/x} \frac{dr}{F(r) - r} + c.$$

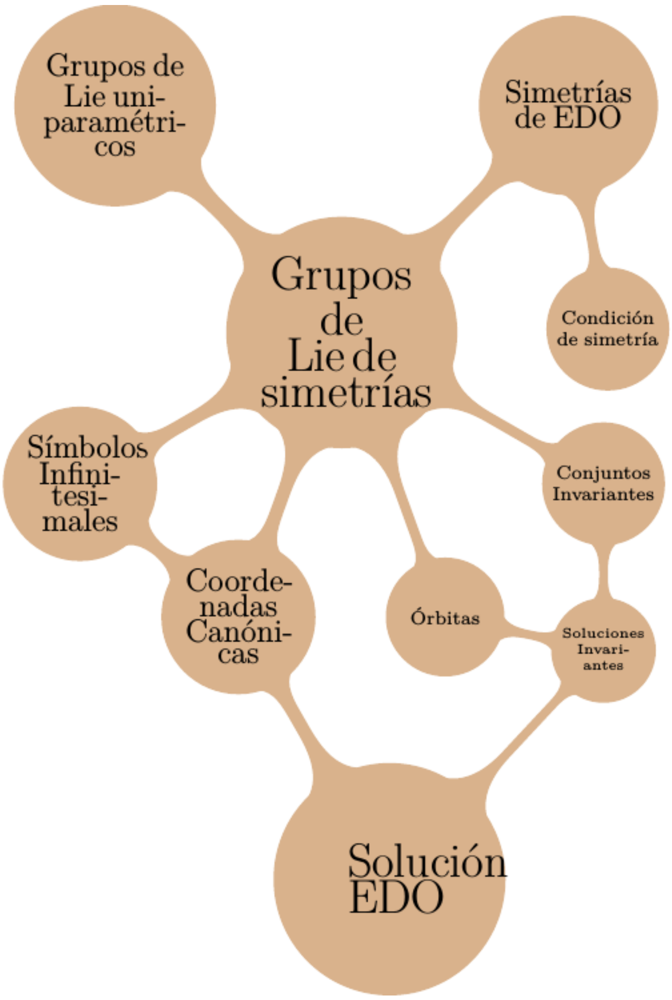
3.10.3. Método de Lie y SymPy

SymPy Incorpora distintas estrategías para resolver ecuaciones por el método de Lie. Hay mucho por indagar al respecto, pero sólo vamos a mencionar una función para calcular los infinitesimales (ξ, η). Aprovechamos para mostrar como luce una consola de ipython, otra manera de usar Python y SymPy.

```
In [1]: from sympy import *
In [2]: init_printing()
In [3]: x=symbols('x')
In [4]: y=Function('y')(x)
In [5]: from sympy.solvers.ode import infinitesimals
In [6]: infinitesimals((y+1)/x+y**2/x**3-y.diff(x))
Out[6]:
```

$$\left[\left\{\eta(x, y(x)) : xy(x), \quad \xi(x, y(x)) : x^2\right\}\right]$$

3.11 Diagrama conceptual



Apéndices

3.A Formas Diferenciales, una introducción ingenua

La expresión (3.1) es más asimétrica, entre las variables x e y una de ellas es independiente (x) y la otra independiente (y). La expresión (3.2) es más simétrica, las dos variables tienen el mismo estatus.

Las expresiones del tipo (3.2) representan un ente matemático importante llamado forma diferencial . No disponemos del tiempo necesario para dotar con entidad matemática el concepto de forma diferencial. Tampoco resulta de vital importancia. Pero las reglas que rigen la combinación de las formas diferenciales son muy simples y nos gustaría describir este aspecto de las formas diferenciales brevemente; como motivación para un estudio posterior más profundo y para que el lector gane en confianza en su manipulación. Daremos así una pintura de las formas diferenciales incompleta, por cuanto sólo diremos como ellas se combinan pero no contestaremos la pregunta de que son. Sólo digamos, para advertir al lector sobre los requisítos teóricos que se requieren, que las formas diferenciales se encuentran asociados al concepto de variedad diferencial, concepto este que generaliza al de curva y superficie. Más concretamente, las formas diferenciales son funciones que toman valores en los duales de los espacios tangentes a las variedades diferenciales. En particular hay formas diferenciales asociadas a los espacios euclideo, que podemos identificar con $\mathbb{R}^n$.

Aqui vamos a pensar a las formas diferenciales como objetos puramente formales sobre los que actúa un operador d, leyes de composición internas y externas. Se construyen formas diferenciales invocando un sistema de coordenadas $x_1, \ldots, x_n$. Estas coordenadas, deben ser coordenadas de alguna variedad diferencial, pero, por simplicidad, supondremos que son coordenadas cartesianas ortogonales de un espacio euclideo. Las formas diferenciales forman un espacio vectorial con una operación de suma $+$ y producto por un escalar. Además tienen definido un producto $\wedge$, llamado producto exterior , que posee algunas particularidades. Como los polinomios, las formas diferenciales tienen grado. Por eso se dice que forman un álgebra graduada. A diferencia de los polinomios, este grado no supera la dimensión n del espacio ($\mathbb{R}^n$ o más generalmente una variedad) a la que están asociadas. Para ser más exactas, la única forma de grado $k > n$ es la trivial, esto es la nula. Denotamos Λ_k las formas de grado k, siendo $\Lambda = \bigoplus_{k=0}^{n} \Lambda_k$ el espacio vectorial de todas ellas. Luego $d : \Lambda \to \Lambda$ y $\wedge : \Lambda \times \Lambda \to \Lambda$. Ahora describimos unas simples reglas de las formas, d y $\wedge$.

A. Una 0-forma diferencial es una función $g(x_1, \ldots, x_n)$.

B. Si $\alpha \in \Lambda_k$ y $\beta \in \Lambda_p$ entonces $\alpha \wedge \beta \in \Lambda_{k+p}$.

C. El producto $\wedge$ es asociativo, distributivo y satisface una especia de anticonmutatividad, especídficamente si $\alpha \in \Lambda_k$ y $\beta \in \Lambda_p$ entonces $\alpha \wedge \beta = (-1)^{kp} \beta \wedge \alpha$. En particular $\alpha \wedge \alpha = 0$ cuando α es un k-forma con k impar.

D. El diferencial satisface

   D.1) Si ω es una k-forma diferencial $d\omega$ es una $k+1$ forma diferencial.

   D.2) $d^2\omega = d(d\omega) = 0$, para toda $\omega \in \Lambda$.

D.3) Si $\alpha \in \Lambda_k$ entonces $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta$.

D.4) En el caso de 0-forma (función) $g(x_1, \ldots, x_n)$ el diferencial se define

$$dg = \frac{\partial g}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial g}{\partial x_n} dx_n$$

E. Las expresiones dx_i, $i = 1, \ldots, n$ forman una especie de base del espacio de las formas Λ, en el sentido que cualquier k forma α se expresa de la siguiente manera:

$$\alpha = \sum_{1 \le i_1 < \cdots i_k \le n} g_{i_1 \ldots i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_n},$$

para ciertas funciones $g_{i_1 \ldots i_k}$. Observar que la suma se extiende sobre todos los subconjuntos ordenados de $\{1, \ldots, n\}$.

Una k-forma diferencial α se llama exacta cuando es el diferencial de una $k-1$-forma y se dice cerrada cuando $d\alpha = 0$. Las propiedades de las formas implican que toda forma exacta es cerrda. Un famoso Lema de Poincare trata con el recíproco de esta afirmación.

Las reglas anteriores permiten computar cualquiera de las operaciones. **Ejemplo 3.28.** Si $\alpha = M(x,y)dx + N(x,y)dy$ es una 1-forma de $\mathbb{R}^2$, entonces

$$\begin{aligned} d\alpha &= dM \wedge dx - M d^2 x + dN \wedge dy - N d^2 y \\ &= \left(\frac{\partial M}{\partial x} dx + \frac{\partial M}{\partial y} dy \right) \wedge dx + \left(\frac{\partial N}{\partial x} dx + \frac{\partial N}{\partial y} dy \right) \wedge dy \\ &= \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx \wedge dy \end{aligned}$$

Recordemos el famoso Teorema de Green , que afirmaba que si $D \subset \mathbb{R}^2$ era una región cuyo borde $C = \partial D$ era una curva cerrada simple, entonces

$$\oint_{\partial D} M dx + N dy = \iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy.$$

Utilizando formas diferenciales este resultado se escribe de la manera, mucho más compacta y sugerente

$$\oint_{\partial D} \alpha = \iint_D d\alpha,$$

donde $\alpha = M(x,y)dx + N(x,y)dy$. Esto es una relación clave de las formas diferenciales que se generaliza en un teorema fundamental de la matemática llamado Teorema de Stokes .

Ejemplo 3.29. Computemos $d^2 g$, cuando g es una función (0-forma).

$$\begin{aligned} d^2 g &= d\left(\frac{\partial g}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial g}{\partial x_n} dx_n \right) \\ &= d\left(\frac{\partial g}{\partial x_1} \right) \wedge dx_1 + \cdots + d\left(\frac{\partial g}{\partial x_n} \right) \wedge dx_n - \frac{\partial g}{\partial x_1} \wedge d^2 x_1 - \cdots - \frac{\partial g}{\partial x_n} \wedge d^2 x_n \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_1} dx_i \right) \wedge dx_1 + \cdots + \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_n} dx_i \right) \wedge dx_n \\ &= \sum_{i \ne 1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_1} dx_i \wedge dx_1 + \cdots \sum_{i \ne n}^n \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_n} dx_i \wedge dx_n \\ &= \sum_{1 \le i < j \le n}^n \left\{ \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 g}{\partial x_j \partial x_i} \right\} dx_i \wedge dx_j = 0. \end{aligned}$$

Que es lo que tenía que ser.

3.B Formas diferenciales en Sympy

En este apéndice resolveremos el problema planteado en el ejemplo 3.2.1 usando formas diferenciales y Sympy. Usaremos el módulo de geometría diferencial, donde se pueden definir formas diferenciales y otros entes propios de la geometría diferencial: campos escalares y vectoriales. No es posible entender completamente este módulo sin introducir conceptos básicos de geometría diferencial, cosa que no haremos pues nos alejaría del propósito del curso. De modo que vamos a discutir superficialmente la solución de este problema. Es suficiente importar del módulo de geometría diferencial el submodulo R2, que ya nos crea las formas diferenciales dx, dy (se accede por `R2.dx`, `R2.dy`), como así también las formas dr y $d\theta$ (`R2.dr`, `R2.dtheta`). Tecnicamente hablando R2 es una variedad diferencial --en este caso el espacio euclideano bidimensional-- con toda la estructura algebraica que lleva consigo.

En el siguiente código, luego de las sentencias de importanción, cada línea efectúa lo siguiente: 4-define la forma diferencial en coordenadas cartesianas, 5 y 6-calcula el valor de M y N en coordenadas polares --$Md\theta + Ndr$--. Sin embargo el resultado, todavía tiene apelaciones a las coordenadas x e y. Por este motivo en las líneas 7 y 8 introducimos los símbolos r y $theta$ y en las líneas 9 a 11 sustituímos x e y por $r\cos\theta$ y $r \operatorname{sen}\theta$ respectivamente. Hay que notar que los simbolos que introdujimos r y θ son diferentes de `R2.theta` y `R2.r`, a los que sympy despliega en negritas en la consola de ipython. Por ese motivo, también sustituímos `R2.theta` y `R2.r` por θ y r respectivamente.

```
1  from sympy import *
2  from sympy.diffgeom.rn import R2
3  init_printing()
4  forma=(R2.y**3+R2.x**2*R2.y-R2.x-R2.y)*R2.dx-(R2.x**3+R2.x*R2.y**2-R2.x+R2
       .y)*R2.dy
5  M=forma.rcall(R2.e_theta)
6  N=forma.rcall(R2.e_r)
7  r=symbols('r',positive=True)
8  theta=symbols('theta')
9  sust={R2.x:r*cos(theta),R2.y:r*sin(theta),R2.theta:theta,R2.r:r}
10 Mpol=M.subs(sust).simplify()
11 Npol=N.subs(sust).simplify()
12 forma_pol=Mpol*R2.dtheta+Npol*R2.dr
```

scripts/sust_formas.py

La forma obtenida es $-rdr + (-r^4 + r^2)d\theta$.

3.C Teoría de grupos computacional: GAP

> « GAP (Groups, Algorithms, Programming) es un sistema de álgebra discreta computacional, con especial énfasis en la teoría de grupos computacional. GAP proporciona un lenguaje de programación, una biblioteca de miles de funciones implementando algoritmos algebraicos escritos en el lenguaje GAP, así como bibliotecas de datos de objetos algebraicos de gran tamaño [...] GAP se utiliza en la investigación y la enseñanza para estudiar grupos y sus representaciones, anillos, espacios vectoriales, álgebras, estructuras combinatorias, y más. El sistema, incluida la fuente, se distribuye libremente.»

(Página Oficial de GAP)

Hasta donde sabemos Sympy no implementa objetos de teoría de grupos. Sin embargo existe software libre para estudiar grupos. El más conocido de ellos es GAP. Este sistema provee un lenguaje muy sencillo y transparente. Lamentablemente el estudio de esta herramienta está más allá de los alcances de este documento. Desarrollemos un simple ejemplo.

Ejemplo 3.30. En el siguiente ejemplo de sesión con línea de comandos de GAP introducimos sentencias que quedan indicadas en cada línea iniciada con el símbolo de sistema (prompt) >`gap`. Las líneas que no inician con el símbolo de sistema indican la salida correspondiente a la sentencia que antecede dichas líneas. En línea 1 introducimos el grupo simétrico de orden 3 y lo llamamos `G`. En línea 3 pedimos que nos enumere los elementos de `G`. En línea 5, introducimos el elemento de `G` que en notación cíclica se escribe $(1,3,2)$. En líneas 7 y 9 calculamos potencias de `r`. En 11 definimos como `H` el subgrupo generado por `r` y en 13 enumeramos los elementos de `H`. En 15 averiguamos si `H` es normal. Siendo este el caso, podemos calcular el grupo cociente en 17 y lo llamos `K`. Por último averiguamos el orden de `K` en 19.

```
   gap> G:=SymmetricGroup(3);
 2 Sym( [ 1 .. 3 ] )
   gap> Elements(G);
 4 [ (), (2,3), (1,2), (1,2,3), (1,3,2), (1,3) ]
   gap> r:=(1,3,2);
 6 (1,3,2)
   gap> r^2;
 8 (1,2,3)
   gap> r^3;
10 ()
   gap> H:=Subgroup(G,[r]);
12 Group([ (1,3,2) ])
   gap> Elements(H);
14 [ (), (1,2,3), (1,3,2) ]
   gap> IsNormal(G,H);
16 true
   gap> K:=FactorGroup(G,H);
18 Group([ f1 ])
   gap> Size(K);
20 2
```

scripts/gap_basico.g

Bibliografía

Baumann, G. (2013). *Symmetry Analysis of Differential Equations With Mathematica®*. Springer Science & Business Media.

Bluman, G. and Anco, S. C. (2002). *Symmetry and Integration Methods for Differential Equations*. Springer Science & Business Media.

Bluman, G. and Kumei, S. (2013). *Symmetries and Differential Equations*. Springer Science & Business Media.

Blázquez-Sanz, D., Ruiz, J. J. M., and Lombardero, J. R. (2011). *Symmetries and Related Topics in Differential and Difference Equations: Jairo Charris Seminar 2009, Escuela De Matemáticas, Universidad Sergio Arboleda, Bogotá, Colombia*. American Mathematical Soc.

Dresner, L. (1999). *Applications of Lie's Theory of Ordinary and Partial Differential Equations*. Institute of Physics Pub.

Gilmore, R. (2008). *Lie Groups, Physics, and Geometry: An Introduction for Physicists, Engineers and Chemists*. Cambridge University Press.

Hydon, P. E. (2000). *Symmetry Methods for Differential Equations: A Beginner's Guide*. Cambridge University Press.

Olver, P. J. (2012). *Applications of Lie Groups to Differential Equations*. Springer Science & Business Media.

Page, J. M. (1897). *Ordinary Differential Equations: An Elementary Text Book With an Introduction to Lie's Theory of the Group of One Parameter*. Macmillan.

S. V. Duzhin, B. D. C. (2002). *Transformation Groups for Beginners*. American Mathematical Soc.

Schwarz, F. (2007). *Algorithmic Lie Theory for Solving Ordinary Differential Equations*. CRC Press.

Steeb, W.-H. (1996). *Continuous Symmetries, Lie Algebras, Differential Equations, and Computer Algebra*. World Scientific.

Stephani, H. (1989). *Differential Equations: Their Solution Using Symmetries*. Cambridge University Press.

Capítulo 4

Teoremas de Existencia y Unicidad

4.0.1. Introducción

« El determinismo es una doctrina filosófica que sostiene que todo acontecimiento físico, incluyendo el pensamiento y acciones humanas, está causalmente determinado por la irrompible cadena causa-consecuencia, y por tanto, el estado actual "determina" en algún sentido el futuro...En física, el determinismo sobre las leyes físicas fue dominante durante siglos, siendo algunos de sus principales defensores Pierre Simon Laplace y Albert Einstein». Wikipedia (2017).

«Podemos mirar el estado presente del universo como el efecto del pasado y la causa de su futuro. Se podría condensar un intelecto que en cualquier momento dado sabría todas las fuerzas que animan la naturaleza y las posiciones de los seres que la componen. Si este intelecto fuera lo suficientemente vasto para someter los datos al análisis, podría condensarse en una simple fórmula de movimiento de los grandes cuerpos del universo y del átomo más ligero; para tal intelecto nada podría ser incierto y el futuro, así como el pasado, estaría frente sus ojos». Laplace, citado en Wikipedia (2017).

La ciencia se vale de estructuras matemáticas para describir a traves de modelos la evolución de sistemas reales. Usualmente esas estructuras son ecuaciones (diferenciales) donde el tiempo es una de sus variables. Conocer el «estado actual» de un sistema (las «posiciones» que menciona Laplace) es conocer las condiciones iniciales. Mientras que las ecuaciones en si mismas se derivan de «las fuerzas que animan la naturaleza». Así, para que la matemática colabore con la filosofía determinista, debería ella misma plantear problemas deterministas. En ese sentido, hablando específicamente de ecuaciones diferenciales, para que podamos decir que un PVI sea determinista, el problema debería tener solución (existencia de soluciones), caso contrario este PVI no produciría ninguna predicción del futuro. Pero también esta solución debería ser única (unicidad de soluciones), porque de no ser así, el problema produciría múltiples predicciones y por tanto el estado actual no determinaría el futuro. Un problema que satisfaga estas condiciones lo denominaremos *bien planteado*[1] .

Por lo expuesto, es de trascendencia para la ciencia en general que se pueda establecer que los problemas matemáticos que modelizan problemas de estas ciencias sean bien planteados. Este es el propósito de este capítulo.

Para nuestra sorpresa, PVIs sin ningun problema aparente a la vista no son problemas bien planteados.

Ejemplo 4.0. Considerar el siguiente PVI:

$$\begin{cases} y'(x) &= y(x)^{2/3} \\ y(0) &= 0 \end{cases}$$

[1] Es común en la literatura requerir, además de la existencia y unicidad, la estabilidad para hablar de problema bien planteado

La ecuacion s en varialbles separables. Deberíamos dividir por $y(x)$, pero notar antes de hacer ello que $y \equiv 0$ es solución. Supongamos $y(x) \neq 0$, una vez dividido

$$\frac{dy}{y^{2/3}} = dx \Rightarrow 3y^{1/3} = x + C \Rightarrow y(x) = \left(\frac{x}{3} + C\right)^3.$$

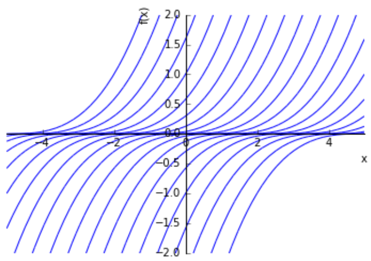
A pesar de la limitación original de que $y(x) \neq 0$, la expresión para $y(x)$ que hemos hallado es solución para todo $x \in \mathbb{R}$. Notar que $y(x) = 0$ cuando $x = -C/3$. Sin embargo, el valor problemático $y = 0$ nos trae aparejado un inesperado problema. Ocure que la función $y_C(x) := \left(\frac{x}{3} + C\right)^3$ tiene derivada igual a cero en $x = -C/3$. Esto implica que si $C_1 < C_2$ entonces la función

$$y_{C_1,C_2}(x) := \begin{cases} y_{C_1}(x) & \text{si } x \leq -C_2 \\ 0 & \text{si } x \in [C_1, C_2] \\ y_{C_2}(x) & \text{si } x \geq -C_1 \end{cases}$$

está bien definida y es diferenciable en $\mathbb{R}$. Además de ello, cualquiera de estas funciones con $C_1 \leq 0 \leq C_2$ resuelven el PVI. De esta manera hemos encontrado un PVI con infinitas soluciones.

```
from sympy import *
x,y=symbols('x,y')
Rango=range(-10,11)
C=[k/6.0 for k in Rango]
p=plot((x/3+C[0])**3,(x,-5,5),show=
     False,xlim=(-5,5),\
ylim=(-2,2),aspect_ratio=(1,1))
for pend in C[1:]:
     p1=plot((x/3+pend)**3,(x,-5,5),
     show=False,xlim=(-5,5),\
ylim=(-2,2),aspect_ratio=(1,1))
     p.append(p1[0])
p.show()
```

scripts/no-unicidad.py



4.1 Sistemas de Ecuaciones Diferenciales

4.1.1. Definición y ejemplos

Un *sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden* es un conjunto de ecuaciones que relacionan una variable independiente, digamos x, un conjunto de variables dependientes, digamos $y_1(x), \ldots, y_n(x)$, y sus derivadas respecto a x. A las ecuaciones diferenciales con una incognita y una ecuación las denominaremos *ecuaciones escalares*.

Definición 1.

Un sistema de ecuaciones diferenciales es una conjunto de ecuaciones de la forma

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx}(x) = f_1(x, y_1(x), \ldots, y_n(x)) \\ \dfrac{dy_2}{dx}(x) = f_2(x, y_1(x), \ldots, y_n(x)) \\ \qquad\vdots \\ \dfrac{dy_n}{dx}(x) = f_n(x, y_1(x), \ldots, y_n(x)) \end{cases}, \tag{4.1}$$

donde $f_j : [a, b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, n$, son funciones.
Una manera alternativa y compacta de denotar un sistema se logra introduciendo las funciones $y = (y_1, \ldots, y_n)$ y $f = (f_1, \ldots, f_n)$. Entonces $y : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ es una función con valores en $\mathbb{R}^n$ y $f : [a, b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es un campo vectorial dependiente de x. Con estas notaciones el sistema se escribe:

$$y'(x) = f(x, y(x)). \tag{4.2}$$

Ejemplo 4.1. Ecuación del péndulo. Si $x(t)$ es el ángulo que forma un péndulo, de longitud l, con la vertical en el tiempo t y $v(t) = x'(t)$, entonces $x(t)$ y$v(t)$ deben satisfacer el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x'(t) = v(t) \\ v'(t) = -\dfrac{g}{l}\operatorname{sen}(x(t)). \end{cases} \tag{4.3}$$


Vito Volterra (1860-1940)

Ejemplo 4.2. Sistemas de ecuaciones de Lotka-Volterra En 1925 y 1926, Alfred J. Lotka y Vito Volterra respectivamente, introdujeron las ecuaciones de Lotka-Volterra . Se trata de un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden que se usan para describir dinámicas de sistemas biológicos en el que dos especies interactúan, una como presa y otra como depredador. Se definen como:

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)(\alpha - \beta y(t)) \\ y'(t) = -y(t)(\gamma - \delta x(t)) \end{cases} \tag{4.4}$$

La variable y representa el número de individuos de algún predador (por ejemplo, un lobo) y x es el número de sus presas (por ejemplo, conejos), t representa el tiempo; y α, β, γ y δ son parámetros (positivos)

4.1.2. Sistemas de ecuaciones y ecuaciones de orden superior

Es posible convertir el sistema (4.1) *de n-ecuaciones diferenciales de primer orden en una ecuación escalar de orden n*

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}). \tag{4.5}$$

y viceverza.

Para justificar la aseveración anterior supongamos que $y = y(x)$ resuelven (4.5) y escribamos:

$$y_1 = y,\ y_2 = y',\ y_3 = y'', \ldots, y_n = y^{(n-1)}.$$

Entonces notar que

$$\begin{cases} y_1'(x) & = y_2(x) \\ y_2'(x) & = y_3(x) \\ & \vdots \\ y_{n-1}'(x) & = y_n(x) \\ y_n'(x) & = f(x, y_1(x), \dots, y_n(x)) \end{cases}, \tag{4.6}$$

Reciprocamente, supongamos que $y_1, \dots, y_n$ resuelven (4.1). Por simplicidad vamos a suponer que las f_j son independientes de x, el procedimiento general sigue las mismas líneas que el caso que discutimos aquí. Se toma $y = y_n$ (podríamos usar cualquier y_j, $j = 1, \dots, n$). Ahora derivamos sucesivamente n-veces respecto a x la ecuación para y_n, y reemplazamos cada derivada y_j' por f_j (vamos a omitir los argumentos de f_j que son en todos los casos $(y_1, \dots, y_n)$):

$$\begin{array}{rcl} y_n'(x) = & f_n(y_1, \dots, y_n) & =: g_1(y_1, \dots, y_n) \\ y_n''(x) = & \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_n}{\partial y_j} f_j + & =: g_2(y_1, \dots, y_n) \\ y_n'''(x) = & \sum_{k,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f_n}{\partial y_k \partial y_j} f_k f_j + \sum_{k,j=1}^{n} \frac{\partial f_n}{\partial y_j} \frac{\partial f_j}{\partial y_k} f_k & =: g_k(y_1, \dots, y_n) \\ & \vdots & \vdots \\ y_n^{(n)}(x) = & \cdots & =: g_n(y_1, \dots, y_n) \end{array}$$

Las igualdades anteriores tienen la estructura $z = G(y)$, donde $y = (y_1, \dots, y_n)$, $z = (y_n', y_n'', \dots, y_n^{(n)})$ y $G = (y_1, \dots, y_n)$. Si la función $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es invertible y escribimos $H = G^{-1}$ entonces

$$y_n = H_n(z) = H_n(y_n', y_n'', \dots, y_n^{(n)}).$$

La anterior es una ecuación escalar de orden n para y_n. Por consiguiente hemos logrado reducir el sistema de n-ecuaciones a una ecuación de orden n. Observar que si resolvemos esta ecuación, encontrando y_n, podemos hallar el resto de las incognitas y_j, $j = 1, \dots, n-1$, usando que $y_j = H_j(y_n', y_n'', \dots, y_n^{(n)})$.

Ejemplo 4.3. Ecuaciones de Lotka-Volterra. Reduzcamos las ecuaciones de Lotka-Volterra a una ecuación de orden 2 y luego revirtamos el camino.

La primera parte la resolvemos con Sympy:

```
t=symbols('t')
y=Function('y')(t)
x=Function('x')(t)
alpha,beta,gamma,delta=symbols('alpha,beta,gamma,delta',positive=True)
ec=y.diff()+gamma*y-delta*x*y
ec1=alpha*x-beta*x*y
ec2=ec.diff(t)
ec3=ec2.subs(x.diff(),ec1)
ec4=(y+gamma*y)/delta/y #Esto es x
ec5=ec3.subs(x,ec4)
ec6=ec5.simplify()
ec6
```

scripts/Sist-Ecua.py

Resulta en

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) - \frac{d}{dt}y(t) + (-\alpha\gamma - \alpha)\, y(t) + (\beta\gamma + \beta)\, y^2(t) = 0 \tag{4.7}$$

El camino inverso es más sencillo. Llamamos $z = y'$. Usando las variables y, z la ecuación (4.7) se escribe

$$\begin{cases} y'(t) & = v(t) \\ v'(t) & = v + (\alpha\gamma + \alpha)\, y(t) - (\beta\gamma + \beta)\, y^2(t) \end{cases}$$

No llegamos a la ecuación de partida. Hay que tener presente que una ecuación tiene diferentes representaciones en diferentes variables y que las variables que hemos elegido para el camino de vuelta y, v, no son las originales del problema y, x.

Émile Picard (1856-1941)

4.2 Método de iteraciones de Picard

En esta sección vamos a describir la estrategia que emplearemos para la demostración de la existencia de soluciones. El método que seguiremos fue ideado por Émile Picard

Introducimos previamente algunas definiciones elementales.

Definición 1.

Sea α una función definida en un intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ con valores en $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, tal que cada componete es una función integrable. Entonces, como es usual, escribimos

$$\int_a^b \alpha(s)ds = \left(\int_a^b \alpha_1(s)ds, \ldots, \int_a^b \alpha_n(s)ds\right)$$

Es un ejercicio muy sencillo demostrar que vales las propiedades elementales de las integrales, para esta extensión del concepto de integral a funciones con valores vectoriales. En particular vale el Teorema Fundamental del Cálculo: *Si α es continuamente diferenciable entonces*

$$\int_a^b \alpha'(s)ds = \alpha(b) - \alpha(a).$$

Además vale la *desigualdad triangular:*si $a < b$

$$\left\|\int_a^b \alpha(s)ds\right\| \leq \int_a^b \|\alpha(s)\|\, ds.$$

Nuestra intención es demostrar la existencia de soluciones de un PVI para el sistema de EDOs

$$\left\{\begin{array}{ll} y'(x) & = f(x, y) \\ y(x_0) & = y_0 \end{array}\right. , \tag{4.8}$$

donde $f : \Omega \subset (a, b) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, Ω abierto, $y : (a, b) \to \mathbb{R}^n$ (se debe satisfacer que $(x, y(x)) \in \Omega$, para $x \in [a, b]$), $x_0 \in (a, b)$ e $y_0 \in \mathbb{R}^n$ son dados con $(x_0, y_0) \in \Omega$.

Integremos la ecuación diferencial en un intervalo de extremos x_0 y x y tomando en consideeración las condiciones iniciales obtenemos una nueva ecuación para $y(x)$, en este caso una ecuación integral :

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t))dt. \tag{4.9}$$

Esta ecuación presenta una estructura muy particular. Podemos pensar el miembro derecho de (4.9) como una trasformación (función) T que lleva la función $y = y(x)$ en la función

$$T(y)(x) := y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t))dt.$$

Pensando de esta manera (4.9) se escribe sencillamente

$$T(y) = y.$$

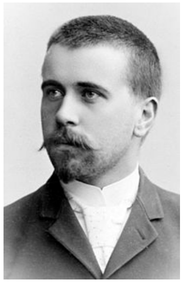
Vale decir, la ecuación integral expresa el hecho que T lleva a la función y en si misma. Esto en matemática es conocido como un punto fijo . En análisis numérico los puntos fijos son utilizados para resolver ecuaciones algebraicas del tipo $h(x) = x$, donde $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. En aquel copntexto se ve que un procedimiento para aproximar soluciones es interar la función h, i.e. dado un x_0 cualquiera considerar la sucesión de *aproximaciones sucesivas*

$$x_n = h(x_{n-1}), \quad n = 1, 2, \ldots.$$

El fundamento de proceder así es que si la sucesión x_n converge a algún valor x^* y si h es continua entonces x^* resuelve $h(x) = x$ pues

$$h(x^*) = h\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} h(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x^*. \tag{4.10}$$

Vamos a proceder por analogía y proponer el siguiente proceso iterativo que genera las funciones φ_k, $k = 0, 1, \ldots$:



Ernst L. Lindelöf (1870—1946)

$$\begin{cases} \varphi_0 & = y_0 \\ \varphi_{k+1}(x) & = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi_k(t))dt. \end{cases} \tag{4.11}$$

Este proceso se denomina *método de las aproximaciones sucesivas de Picard* y fué propuesto por E. Picard en Picard (1893) y luego generalizado por Ernest Lindelöf en Lindelöf (1894).

Deberemos indagar por condiciones que nos aseguren que la sucesión φ_k converja a una función φ y que esta función φ es solución del PVI. Antes de adentrarnos en los detalles de las demostraciones, constatemos que la idea funciona en algunos ejemplos sencillos.

Ejemplo 4.4. Resolver

$$\begin{cases} y'(x) & = y(x) \\ y(0) & = y_0 \end{cases},$$

donde $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e y_0 es un punto arbitrario de $\mathbb{R}$.

Aplicando el método de picard:

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= y_0 \\ \varphi_1(x) &= y_0 + \int_0^x \varphi_0(t)dt &&= y_0(1 + x) \\ \varphi_2(x) &= y_0 + \int_0^x \varphi_1(t)dt &&= y_0(1 + x + \tfrac{x^2}{2}) \\ &\vdots &&\vdots \\ \varphi_k(x) &= y_0 + \int_0^x \varphi_k(t)dt &&= y_0(1 + x + \cdots + \tfrac{x^k}{k!}) \end{aligned}$$

Se aprecia que en φ_k aparecen las sumas parciales del desarrollo en serie de Taylor alrededor de 0 de la función exponencial. Luego tenemos que φ_k converge a $y_0 e^x$ que es justamente la solución delm PVI propuesto.

Más ejemplos será tratados en la actividad práctica.

4.3 Teorema de punto fijo Banach

Definición 1.

Sea (X, d) un espacio métrico completo. Una función $K : X \to X$ se denominará una contracción si existe un $\theta \in [0, 1)$ tal que

$$d(K(x), K(y)) \leq \theta d(x, y), \quad x, y \in X.$$

Dada una función $K : X \to X$ escribiremos

$$K^n(x) = \underbrace{K\left(K\left(K \cdots K(x)\cdots\right)\right)}_{n-\text{veces}}.$$

Cuando $n = 0$ ponemos $K^0(x) = x$.

Teorema 1 (Principio de contracción de Banach)**.**

Sea (X, d) un espacio métrico completo y $K : X \to X$ una contracción. Entonces K tiene un único punto fijo x^*. Además para todo x

$$d(K^n(x), x^*) \leq \frac{\theta^n}{1-\theta} d(K(x), x).$$

Stefan Banach (1892—1945)

Demostración. Sea $x \in X$ un punto arbitrario y definimos $x_n := K^n(x)$. Entonces si $m < n$

$$\begin{aligned} d(K^n(x), K^m(x)) &\leq d(K^n(x), K^{n-1}(x)) + \cdots + d(K^{m+1}(x), K^m(x)) \\ &\leq \theta^{n-1} d(K(x), x) + \cdots + \theta^m d(K(x), x) \\ &\leq \frac{\theta^m}{1-\theta} d(K(x), x) \end{aligned}$$

Como $\theta < 1$ vemos que si m, n son suficientemente grandes podemos hacer que $d(K^n(x), K^m(x))$ sea arbitrariamente chico. Hemos probado que la sucesión $K^n(x)$ es de Cauchy, de allí tiene límite, al que llamaremos x^*. Que x^* es punto fijo se justifica como en (4.10) (notar que una contracción es continua).

Que el punto fijo es único, se deduce de suponer que existe otro z^* y aplicar lque K es contracción

$$d(x^*, z^*) = d(K(x^*), K(z^*)) \leq \theta d(x^*, z^*) < d(x^*, z^*).$$

Lo que es una contradicción. $\square$

Corolario 1.

Sea (X, d) un espacio métrico completo y $K : X \to X$ continua y K^m contracción para algún $m \in \mathbb{N}$. Entonces K tiene un único punto fijo x^* y para todo $x \in X$ se tiene

$$\lim_{n\to\infty} K^n(x) = x^*.$$

Demostración. Sea x^* el único punto fijo de K^m dado por el principio de contracción de Banach aplicado a K^m. Sean $x \in X$ y $0 \leq r < m$. Consideremos las sucesiones $\{K^{km+r}(x)\}_{k\in\mathbb{N}}$. Tenemos m de estas sucesiones, una para cada valor de $r = 0, \ldots, m-1$. Todas ellas son subsucesiones de $\{K^n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$. Además

$$\bigcup_{r=0}^{m-1} \{K^{km+r}(x)\}_{k\in\mathbb{N}} = \{K^n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}.$$

Vamos a demostrar que estas m subsucesiones convergen todas a x^*. Esto es facil consecuencia de que K^m es contracción. Pues de ello obtenemos que $(K^m)^n(y) \to x^*$, cuando $n \to \infty$ para todo $y \in X$. Luego

$$\lim_{k\to\infty} K^{km+r}(x) = \lim_{k\to\infty} (K^m)^k (K^r(x)) = x^*.$$

Esto establece que $\lim_{n\to\infty} K^n(x) = x^*$.

Veamos que x^* es punto fijo de K.

$$K(x^*) = K\left(\lim_{n\to\infty} K^n(x)\right) = \lim_{n\to\infty} K\left(K^n(x)\right) = \lim_{n\to\infty} K^{n+1}(x) = x^*.$$

Para la unicidad, observar que un punto fijo de K lo es de K^m. Cómo K^m tiene un único punto fijo, lo mismo podemos afirmar de K.

□

Definición 2.

Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Diremos que f es *lipschitziana* (o que es una función Lipschitz) si existe una constante $K \geq 0$ tal que

$$\|f(x) - f(y)\| \leq K\|x - y\|, \quad \forall x, y \in \Omega.$$

Si $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, diremos que $f = f(t, x)$ es lipschitziana respecto a la segunda variable si existe $K \geq 0$ tal que

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq K\|x - y\|, \quad \forall (t, x), (t, y) \in \Omega.$$

Teorema 2 (Picard- Lindelöf)**.**

Sean $x_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$ y $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ continua y lipschitziana respecto a la segunda variable, donde $\Omega = I_a \times B_b$, $I_a = [x_0 - a, x_0 + a]$ y $B_b = \{y \in \mathbb{R}^n | \|y - y_0\| \leq b\}$. Como Ω es compacto y f es continua, existe $M \geq 0$ tal que $\|f\| \leq M$. Entonces existe una única solución del PVI:

$$\begin{cases} y'(x) &= f(x, y(x)), \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases},$$

en $I_\delta = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ con $\delta := \min\{a, b/M\}$.

Demostración. Definamos

$$X = C(I_a, B_b) := \{\varphi | \varphi : I_a \to B_b \text{ continua }\}.$$

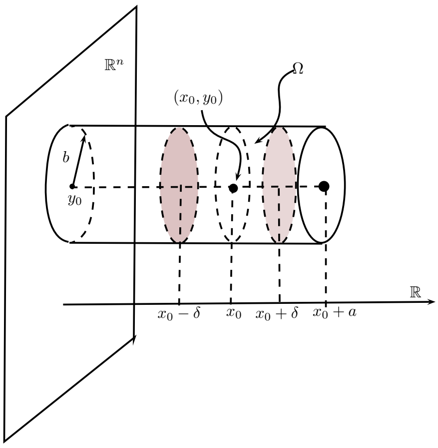


Figura 4.1: Caída libre

Ejercicio.

La función

$$d(\varphi_1, \varphi_2) := \text{máx}\left\{\|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)\| \,\middle|\, x \in I_a\right\}$$

define una métrica sobre el conjunto X y con esta métrica (X, d) es completo.

Para $\varphi \in X$, definamos una nueva función $K(\phi)$ por:

$$K(\varphi)(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))dt.$$

Afirmación 1: $K : X \to X$.

En efecto, si $x \geq x_0$ y $x \in I_a$ (si $x \leq x_0$ queda como ejercicio)

$$\|K(\varphi)(x) - y_0\| \leq \int_{x_0}^{x} \|f(t, \varphi(t))\|dt \leq M|x - x_0| \leq b.$$

Esto muestra que $K(\varphi) : I_a \to B_b$.

La continuad se establece del siguiente modo. Si $x_1 < x_2$

$$\|K(\varphi)(x_1) - K(\varphi)(x_2)\| \leq \int_{x_1}^{x_2} \|f(t, \varphi(t))\|dt \leq M|x_1 - x_2|.$$

Lo que implica la continuidad. Entonces $K(\varphi) \in X$.

Afirmación 2: K^m es contracción para m suficientemente grande.

La afirmación es consecuencia de la siguiente desigualdad, para $\varphi_1, \varphi_2 \in X$ y $x \in I_a$

$$\|K^m(\varphi_1)(x) - K^m(\varphi)(x)\| \leq \frac{K^m|x - x_0|^m}{m!} d(\varphi_1, \varphi_2).$$

La prueba procede por inducción sobre m. Cuando $m = 0$ es inmediata. Supuesta válida la desigualdad para m vemos que (otra vez asumimos $x_0 \leq x$)

$$\begin{aligned}
\|K^{m+1}(\varphi_1)(x) - K^{m+1}(\varphi)(x)\| &= \|K\left(K^m(\varphi_1)\right)(x) - K\left(K^m(\varphi)\right)(x)\| \\
&= \left\|\int_{x_0}^{x} f(t, K^m(\varphi_1)(t)) - f(t, K^m(\varphi_2)(t))dt\right\| \\
&\leq \int_{x_0}^{x} \|f(t, K^m(\varphi_1)(t)) - f(t, K^m(\varphi_2)(t))\|\, dt \\
&\leq K \int_{x_0}^{x} \|K^m(\varphi_1)(t) - K^m(\varphi_2)(t))\|\, dt \\
&\leq \frac{K^{m+1}}{m!} d(\varphi_1, \varphi_2) \int_{x_0}^{x} |t - x_0|^m dt \\
&= \frac{K^{m+1}|x - x_0|^{m+1}}{(m+1)!} d(\varphi_1, \varphi_2)
\end{aligned}$$

Notar que $K^m|x - x_0|^m/m!$ es el valor absoluto del término general de la serie de Taylor de e^{Kx} alrededor de x_0.Como esta serie tiene radio de convergencia infinito, el término general tiende a cero. Por consiguiente existe m suficientemente grande para que $K^m|x - x_0|^m/m! < 1$. Para este m, K^m será contracción. Luego, por el Corolario 1, deducimos que K tiene un único punto fijo. Vale decir que existe $y \in X$ con

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt.$$

Notar que $y(x_0) = y_0$, i.e. y satisface la condición inicial. Por el teorema fundamental del cálculo $y'(x) = f(x, y(x))$, i.e. y satisface la ecuación y por tanto, finalmente, es solución del PVI. □

Corolario 2.

Sea Ω abierto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ y $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ continua con $\partial f_j/\partial y_k)$ tambien continuas $j, k = 1, \ldots, n$. Entonces para todo $(x_0, y_0) \in \Omega$ existe un entorno $V = [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times B_b(y_0)$ tal que el PVI

$$\begin{cases} y'(x) & = f(x, y(x)), \\ y(x_0) & = y_0 \end{cases},$$

tiene solución única en $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. Además el gráfico de esta solución está contenido en V..

Demostración. Sea $(x_0, y_0) \in \Omega$ arbitrario. Como Ω es abierto, existen $a, b > 0$ tal que $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times B_b(y_0) \subset \Omega$. Como $\partial f_j/\partial y_k)$ son continuas y V es compacto, tenemos que existe $M > 0$ con $|\partial f_j/\partial y_k)| \leq M$ en V, $j, k = 1, \ldots, n$. El Teorema del valor medio para funciones en varias variables implica que existe una constante $C > 0$ tal que si $(t, x), (t, z) \in V$

$$\|f(t, x) - f(t, z)\| \leq CM\|x - z\|.$$

i.e. f es Lipschitziana respecto a la segunda variable en V. La conclusión del Corolario sigue del Teorema de Picard- Lindelöf. □

.

Bibliografía

Lindelöf, E. (1894). Sur l'application des méthodes d'approximations successives à l'étude des intégrales réelles des équations différentielles ordinaires. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 10:117--128. Available from: `http://eudml.org/doc/235150`.

Picard, E. (1893). Sur l'application des méthodes d'approximations successives à l'étude de certaines équations différentielles ordinaires. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 9:217--272. Available from: `http://eudml.org/doc/234079`.

Sotomayor, J. (1979). *Li,cões de equa,cões diferenciais ordinárias*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq.

Wikipedia (2017). Determinismo --- wikipedia, la enciclopedia libre. [Internet; descargado 2-mayo-2017]. Available from: `https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Determinismo&oldid=98219046`.