



FACULTAD DE CS. EXACTAS, FÍSICO-QUÍMICAS Y NATURALES
DEPTO DE MATEMÁTICA.
PRIMER CUATRIMESTRE DE 2018
ECUACIONES DIFERENCIALES (1913)
PRÁCTICA 1: GENERALIDADES Y ECUACIONES DE PRIMER ORDEN.

Los ejercicios marcados con * deben ser resueltos manualmente y con SymPy.

Ejercicio 1 [1, Pag. 16-17, Ejercicios 1,2,5]. Graficar los resultados con SymPy.

Ejercicio 2 Se denomina isótopos a los átomos de un mismo elemento cuyos núcleos tienen distintos número de neutrones. Algunos materiales tienen isótopos que son inestables, esto implica que cada cierta unidad de tiempo cierta cantidad de ellos se convierten en otros isótopos, del mismo o de diferente elemento químico. Esto ocurre con el Uranio, y en general con los elementos radioactivos. Llamamos a este proceso *decaimiento radioactivo*. Si $N(t)$ es la cantidad de isótopos inestables presentes en una muestra, la ley que sigue el decaimiento radioactivo es

$$\frac{dN}{dt} = -kN(t). \quad (1)$$

La constante k se estima experimentalmente. El carbono tiene un isótopo inestable, llamado Carbono 14 (C_{14}). Este es usado para datar muestras arqueológicas. La cantidad de C_{14} en un ser vivo se mantiene constante en el tiempo y en la especie. Esto es así, pues los seres vivos extraen el C_{14} de la atmósfera donde este isótopo es creado por el bombardeo por rayos cósmicos sobre átomos de nitrógeno ordinarios. De esta manera la cantidad de C_{14} se mantiene constante en la atmósfera. Una vez muerto la cantidad de C_{14} decae. La constante de decaimiento del C_{14} es $k = 0,0001216$ cuando el tiempo se mide en años.

Supongamos que cierto espécimen fósil tiene el 55 % de isótopos C_{14} respecto a un ser vivo en la actualidad y de la misma especie. ¿Cuál es la edad del fósil?

Ejercicio 3 En muchas ocasiones, en lugar de especificar la constante k en la ecuación (1) se especifica la *vida media* de un isótopo. La vida media τ es el tiempo necesario para que la cantidad de isótopo se reduzca a la mitad.

- Hallar una relación entre k y τ .
- Acorde a una teoría cosmológica hubo igual cantidad de dos isótopos de uranio (U_{235} y U_{238}) en el comienzo del universo. en la actualidad hay 137.7 isótopos de U_{238} por cada átomo de U_{235} . Usando que las vidas medias de estos isótopos son $4,51 \times 10^9$, para U_{235} , y $7,10 \times 10^8$, para U_{238} ; hallar la edad del universo.

Ejercicio 4 En la actualidad hay aproximadamente 3300 “familias de lenguajes” en toda la humanidad. Se cree que todos estos lenguajes derivan de uno sólo. Suponer que cada familia de lenguajes deriva en 1.5 nuevas familias cada 6000 años. ¿Cuándo el hombre aprendió a hablar?

Ejercicio 5 Hace miles de años los ancestros de los pueblos originarios de América cruzaron el Estrecho de Bering desde Asia. Desde entonces estos pueblos se desperdigaron por toda América y su lenguaje original se dividió en muchas “familias de lenguajes” diferentes. Si, estimativamente, hay en la actualidad 150 familias de lenguajes americanos y si asumimos la misma ley de evolución que en el problema anterior ¿Cuándo llegaron los primeros habitantes a América?

Ejercicio 6 De [1, Pag. 49-51] ejercicios 1(a)*, 1(c)*, 1(h)*, 2*, 3, 4, 5(a) y 8.

Ejercicio 7 De [1, Pag. 54-55,] ejercicios 1*, 3*, 5*, 7*, 22.

Ejercicio 8 De [1, Pag. 61-62] ejercicios 1, 2(a)*, 2(c)*, 2(h)* y 3.

Ejercicio 9 De [1, Pag. 63-65] ejercicios 1, 2(a)*, 2(c)*, 2(h)* y 3.

Ejercicio 10 Considerar dos tanques, dispuestos en “cascada” como en la figura 1: Los

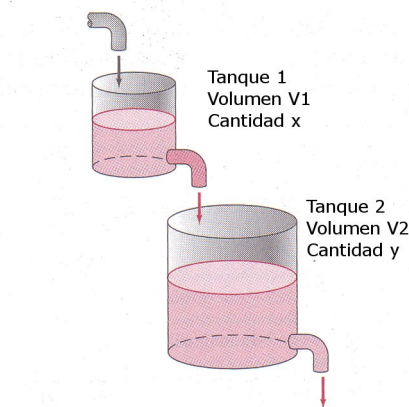


Figura 1: Una cascada de dos tanques

tanques contienen $V_1 = 100l$ y $V_2 = 200l$ de salmuera e inicialmente hay 25kg de sal en cada tanque. Los flujos en cada parte de la cascada son de 5l/min y al primer tanque ingresa agua pura. Hallar la cantidad $x(t)$ de sal en el primer tanque en el momento t . Si $y(t)$ es la cantidad de sal en el segundo tanque, demostrar que

$$\frac{dy}{dt} = \frac{5x}{100} - \frac{5y}{200}$$

Usar el valor encontrado para $x(t)$ para hallar $y(t)$. Comparar la solución obtenida con la que encuentra SymPy.

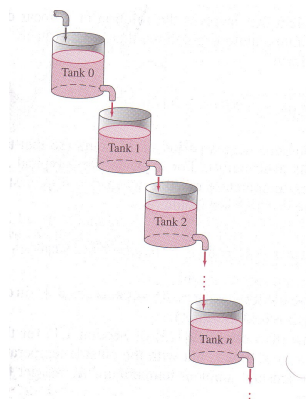


Figura 2: Una cascada de n -tanques

Ejercicio 11 Supongamos ahora que tenemos n tanques, como en la figura 2. El tanque 0 contiene, en $t = 0$, 1l de etano mezclado con 1l de agua. Los restantes contienen 2l de agua pura. Al tanque 0 ingresa agua pura con una rapidéz de 1l/min, y de cada tanque sale agua que ingresa al de abajo a la misma rapidéz. Sea $x_n(t)$ la cantidad de etano en el tanque n . Demostrar por inducción que

$$x_n(t) = \frac{t^n e^{-t/2}}{n! 2^n}.$$

Ejercicio 12 [1, Pag. 34-34, Ejercicios 1,3,4].

Ejercicio 13 De [1, Pag. 68] ejercicios 4 .

Ejercicio 14 De [1, Pag. 74] ejercicio 6.

Ejercicio 15 Resolver los siguientes problemas de valores iniciales asociados a ecuaciones diferenciales en derivadas parciales lineales de primer orden.

$$\left. \begin{array}{l} xu_x + u_y = x^2 \\ u(x, 0) = x \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} yu_x - xu_y = 0 \\ u(0, y) = y^2 \end{array} \right\}$$

Referencias

- [1] G. Simmons. *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones y Notas Históricas*. McGraw-Hill, Madrid, 1991.