

CAMBIOS DE VARIABLES, TEORÍA DE LIE Y EDO

Fernando Mazzone

Depto de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas Físico-Químicas y Naturales
Universidad Nacional de Río Cuarto

3 de marzo de 2015



DISTINTAS FORMAS PARA UNA ECUACIÓN

ECUACIÓN DIFERENCIAL GENERAL DE PRIMER ORDEN

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (1)$$

FORMA DIFERENCIAL

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (2)$$

La primera expresión es más asimétrica, entre las variables x e y una de ellas es independiente (x) y la otra independiente (y). La segunda expresión es más simétrica, las dos variables tienen el mismo estatus.

Las expresiones del tipo (2) representan un ente matemático importante llamado **forma diferencial**

FORMAS DIFERENCIALES, IDEA SOMERA

- 1 Como los polinomios, las formas diferenciales tienen grado.
- 2 Dadas dos (pueden ser mas) variables x, y una 0-forma diferencial es una función $g(x, y)$ de x, y .
- 3 La expresión (2) es una 1-forma diferencial.
- 4 Hay un operador llamado diferencial y denotado por d . Si ω es una k -forma diferencial $d\omega$ es una $k + 1$ forma diferencial.
- 5 En el caso de 0-forma (función) $g(x, y)$ el diferencial se define

$$dg = \frac{\partial M}{\partial x} dx + \frac{\partial N}{\partial y} dy.$$

Una k -forma diferencial se llama exacta cuando es el diferencial de una $k - 1$ -forma.

CAMBIOS DE VARIABLES

IDEA BÁSICA

Supongamos la ecuación (1) o (2) en las variables x, y . La idea es encontrar nuevas variables $\hat{x} = \hat{x}(x, y)$ y $\hat{y} = \hat{y}(x, y)$ tales que la ecuación se transforme en una más sencilla de resolver.

CÓMPUTOS DE CAMBIAMOS VARIABLES

Cambio de la variable dependiente $y = h(x, \hat{y})$ manteniendo la independiente

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial \hat{y}} \frac{d\hat{y}}{dx}. \quad (3)$$

La ecuación se convierte

$$\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial \hat{y}} \frac{d\hat{y}}{dx} = f(x, h(x, \hat{y})).$$

Que es una expresión sólo en \hat{y} y x . Parece más complicada, pero en un ejemplo concreto puede ser más simple.

CÓMPUTOS DE CAMBIOS DE VARIABLES, EJEMPLO

Ejemplo 1 Hacer el cambio de variable en la ecuación

$$y = \frac{e^{\hat{y}}}{x} \quad \text{en} \quad y' = [\ln(xy)]^2 xy - \frac{y}{x}. \quad (4)$$

1) Expresemos dy/dx sólo con x , \hat{y} y $d\hat{y}/dx$.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{e^{\hat{y}}}{x^2} + \frac{e^{\hat{y}}}{x} \frac{d\hat{y}}{dx}.$$

2) Remplacemos y' e y en la ecuación

$$-\frac{e^{\hat{y}}}{x^2} + \frac{e^{\hat{y}}}{x} \frac{d\hat{y}}{dx} = \left[\ln \left(x \frac{e^{\hat{y}}}{x} \right) \right]^2 x \frac{e^{\hat{y}}}{x} - \frac{e^{\hat{y}}}{x}.$$

3) Simplifiquemos

$$\frac{d\hat{y}}{dx} = \hat{y}^2 x. \quad (5)$$

CÓMPUTOS DE CAMBIOS DE VARIABLES, EJEMPLO

Lo podemos hacer con SymPy

```
from sympy import *  
x, y, y_n=symbols('x, y, y_n')  
y=Function('y')(x)  
y_n=Function('y_n')(x)  
y=exp(y_n)/x  
eq=Eq(y.diff(x)-(ln(x*y))**2*x*y+y/x, 0)  
simplify(eq)
```

Obtenemos la ecuación

$$\frac{1}{x} \left(-x \log^2 \left(e^{y_n(x)} \right) + \frac{d}{dx} y_n(x) \right) e^{y_n(x)} = 0$$

que SymPy no simplifica a nuestro gusto

CÓMPUTOS DE CAMBIOS DE VARIABLES

Cambio de la variable independiente $\hat{x} = h(x)$ manteniendo la dependiente

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\hat{x}} \frac{d\hat{x}}{dx} = \frac{dy}{d\hat{x}} h'(x). \quad (6)$$

Suponiendo h biyectiva, la ecuación se convierte

$$\frac{dy}{d\hat{x}} h'(h^{-1}(\hat{x})) = f(h^{-1}(\hat{x}), y).$$

Que es una expresión sólo en \hat{x} e y .

CÓMPUTOS DE CAMBIOS DE VARIABLES, EJEMPLO

Ejemplo 2 Hacer el cambio de variable en la ecuación

$$x = \cos \hat{x} \quad \text{en} \quad -\frac{dy}{dx} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}y = 0. \quad (7)$$

1) $h(x) = \arcsen x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\hat{x}} h'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{dy}{d\hat{x}}.$$

2) Remplacemos x e y' en la ecuación

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{dy}{d\hat{x}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} y = 0$$

3) Simplificando

$$\frac{dy}{d\hat{x}} + y = 0. \quad (8)$$

CÓMPUTOS DE CAMBIOS DE VARIABLES, EJEMPLO

Lo podemos hacer con SymPy

```
from sympy import *  
x, x_n=symbols('x, x_n')  
x_n=acos(x)  
y=Function('y')(x_n)  
Ecuacion=-y.diff()+1/(sqrt(1-x**2))*y
```

Obtenemos la ecuación

$$\frac{1}{\sqrt{-x^2 + 1}} \left(y(\operatorname{acos}(x)) + \frac{d}{d\xi_1} y(\xi_1) \Big|_{\xi_1=\operatorname{acos}(x)} \right) = 0$$

Nuevamente SymPy no simplifica a nuestro gusto

CAMBIOS DE VARIABLES

Cambio de variable general $\hat{x} = \hat{x}(x, y)$, $\hat{y} = \hat{y}(x, y)$

1) Calculamos $d\hat{y}/d\hat{x}$ en las variables x, y

$$\frac{d\hat{y}}{d\hat{x}} = \frac{\frac{d\hat{y}}{dx}}{\frac{d\hat{x}}{dx}} = \frac{\frac{\partial \hat{y}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{y}}{\partial y} y'}{\frac{\partial \hat{x}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{x}}{\partial y} y'} = \frac{\frac{\partial \hat{y}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{y}}{\partial y} f(x, y)}{\frac{\partial \hat{x}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{x}}{\partial y} f(x, y)}. \quad (9)$$

2) En la expresión resultante sustituir x, y por las transformaciones inversas $x = x(\hat{x}, \hat{y})$ y $y = y(\hat{x}, \hat{y})$

CAMBIOS DE VARIABLES

Ejemplo 3. Transformar a polares: $\frac{dy}{dx} = \frac{y^3+x^2y-x-y}{x^3+xy^2-x+y}$.

Dado que el cálculo es extenso lo haremos sólo con SymPy

```
from sympy import *
x=symbols('x')
y=Function('y')(x)
r=sqrt(x**2+y**2)
theta=atan(y/x)
Expr2=r.diff(x)/theta.diff(x)
Expr3=Expr2.subs(y.diff(x), \
(y**3+x**2*y-x-y)/(x**3+x*y**2-x+y))
r,theta=symbols('r,theta',positive=True)
Expr4=Expr3.subs([(y,r*sin(theta)), \
(x,r*cos(theta))])
Expr5=simplify(Expr4)
```

CAMBIOS DE VARIABLES

Encontramos que en polares la ecuación es mucho más simple

$$\frac{dr}{d\theta} = -r^3 + r. \quad (10)$$

Quizás usar la notación como forma diferencial sea más efectivo. Como r y θ son funciones de x e y , ellas son 0-formas. Usando las reglas de la diferencial, hay que reemplazar

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta; & dx &= \cos \theta dr - \sin \theta r d\theta \\ y &= r \sin \theta; & dy &= \sin \theta dr + \cos \theta r d\theta \end{aligned} \quad (11)$$

en la 1-forma:

$$(y^3 + x^2y - x - y)dx - (x^3 + xy^2 - x + y)dy \quad (12)$$

SAGE Y FORMAS DIFERENCIALES

Encontramos a SAGE más cómodo para operar con formas diferenciales que SymPy

```
sage: r,theta=var('r,theta') 1
sage: U = CoordinatePatch((r,theta)) 2
sage: F = DifferentialForms(U) 3
sage: x= DifferentialForm(F, 0, r*cos(theta)) 4
sage: y= DifferentialForm(F, 0, r*sin(theta)) 5
sage: w=(x^3+x*y^2-x+y)*y.diff()-(y^3+x^2*y-x- 6
      y)*x.diff()
sage: w[0].simplify_full() 7
r 8
sage: w[1].simplify_full() 9
r^4 - r^2 10
```

La forma obtenida es $rdr + (r^4 - r^2)d\theta$.

GRUPOS, REPASO

GRUPOS

Sean G un conjunto y α una función tal que $\alpha : G \times G \rightarrow G$. En el contexto de grupos es más usual la notación $\alpha(g_1, g_2) = g_1 g_2$. El par (G, α) se llama un grupo si se satisface

- 1 $(g_1 g_2) g_3 = g_1 (g_2 g_3)$, para todos $g_1, g_2, g_3 \in G$,
- 2 Existe $e \in G$ tal que $eg = ge = g$, para todo $g \in G$.
- 3 Para todo $g \in G$ existe $h \in G$ tal que $gh = hg = e$. Se acostumbra denotar $h = g^{-1}$.

EJEMPLOS DE GRUPOS

Ejemplo 1 Sea Π un plano euclideo y G el conjunto de todas las transformaciones rígidas de Π en si mismo. Entonces G es un grupo con la operación de composición. Se llama el **grupo de transformaciones rígidas**

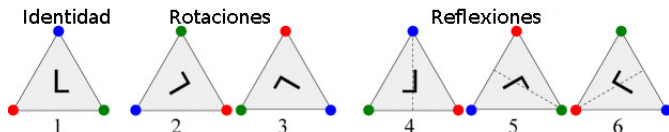
Ejemplo 2 Sea $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ un conjunto de n elementos y S_n definido por

$$S_n = \{\sigma | \sigma : X \rightarrow X \text{ y } \sigma \text{ es biyectiva} \}$$

Entonces S_n es un grupo con la operación de composición. Se denomina **grupo simétrico**

EJEMPLOS DE GRUPOS

Ejemplo 3 Sea Δ un polígono regular de n lados en un plano euclideo Π y D_{2n} el conjunto de todas las transformaciones rígidas de Π en si mismo que llevan Δ en si mismo. D_{2n} se llama el **grupo diedral** de orden $2n$. Para un triángulo equilátero:



TEORÍA DE GRUPOS COMPUTACIONAL: SAGE Y GAP

GAP - Groups, Algorithms, Programming Lenguaje de programación para álgebra discreta

SAGE: es un sistema de software de matemáticas libre de código abierto bajo la licencia GPL. Se basa en muchos paquetes de código abierto existentes: NumPy, SciPy, matplotlib, SymPy, Maxima, GAP, FLINT, R y muchos más. Acceda a su poder combinado a través de un lenguaje común, basado en Python. Misión: Creación de una alternativa libre de código abierto viable a Magma, Maple, Mathematica y Matlab.

TEORÍA DE GRUPOS COMPUTACIONAL: SAGE Y GAP

sage: <code>G=SymmetricGroup(5)</code>	11
sage: <code>sigma=G([(1,2,3),(4,5)])</code>	12
sage: <code>sigma^2</code>	13
<code>(1,3,2)</code>	14
sage: <code>sigma^3</code>	15
<code>(4,5)</code>	16
sage: <code>sigma^6</code>	17
<code>()</code>	18
sage: <code>G.order()</code>	19
<code>120</code>	20
sage: <code>H=G.subgroup([sigma])</code>	21
sage: <code>H.order()</code>	22
<code>6</code>	23

TEORÍA DE GRUPOS COMPUTACIONAL: SAGE Y GAP

sage: <code>H.list()</code>	24
<code>[(), (4,5), (1,2,3), (1,2,3)(4,5), (1,3,2),</code>	25
<code>(1,3,2)(4,5)]</code>	
sage: <code>H.is_normal()</code>	26
<code>False</code>	27
sage: <code>G1=DihedralGroup(3)</code>	28
sage: <code>G1[-2]</code>	29
<code>(1,3,2)</code>	30
sage: <code>H1=G1.subgroup(G1[-2])</code>	31
sage: <code>H1.is_normal()</code>	32
<code>True</code>	33
sage: <code>G1.quotient(H1)</code>	34
<code>Permutation Group with generators [(1,2)]</code>	35

GRUPOS DE SIMETRÍAS

GRUPOS DE SIMETRÍAS

Los cambios de variables de un conjunto de dos variables, digamos x e y , son funciones Γ , invertibles, de clase C^∞ , donde $\Gamma : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$, con Ω_1, Ω_2 abiertos de \mathbb{R}^2 .

Acostumbraremos escribir $(\hat{x}, \hat{y}) = \Gamma(x, y)$ y diremos que (\hat{x}, \hat{y}) son las variables nuevas e (x, y) las viejas.

Llamaremos \mathcal{T} al conjunto de todos los cambios de variables Γ . El conjunto \mathcal{T} tiene una estructura de grupo con la operación de composición.

El grupo de las transformaciones rígidas, los grupos diedrales D_{2n} , el grupo de todas las rotaciones alrededor del origen son subgrupos de \mathcal{T} .

GRUPOS DE SIMETRÍAS, EJEMPLOS

Ejemplo, polares: Es más fácil describir la transformación que lleva coordenadas polares en cartesianas. En este caso $(x, y) = \Gamma(r, \theta)$ y

$$\begin{aligned}\Gamma(r, \theta) &= (r \cos(\theta), r \sin(\theta)), \\ \Omega_1 &= (0, \infty) \times (-\pi, \pi), \\ \Omega_2 &= \mathbb{R}^2 - \{(x, y) | y = 0, x \leq 0\}\end{aligned}$$

GRUPOS DE LIE UNIPARAMÉTRICOS

GRUPOS UNIPARAMÉTRICOS DE SIMETRÍAS

Sea \mathcal{T} el grupo de cambios de variables. Supongamos dado un homomorfismo de grupos $\Gamma : (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathcal{T}, \circ)$.

Notación:

- 1 Para $\varepsilon \in \mathbb{R}$ escribiremos $\Gamma_\varepsilon = \Gamma(\varepsilon)$
- 2 Si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ escribimos $(\hat{x}, \hat{y}) = \Gamma_\varepsilon(x, y)$. Notar que \hat{x} , \hat{y} son funciones de x , y y ε .

Si $\Gamma_\varepsilon(x, y)$ es diferenciable, con inversa diferenciable, respecto a (x, y) y analítica respecto a ε diremos que $\{\Gamma_\varepsilon | \varepsilon \in \mathbb{R}\}$ es un grupo de Lie uniparamétrico de simetrías.

GRUPOS DE LIE UNIPARAMÉTRICOS

PROPIEDADES DE Γ_ε

- 1 Γ_ε es biyectiva y diferenciable sobre su dominio de definición.
- 2 $\Gamma_{\varepsilon_1} \circ \Gamma_{\varepsilon_2} = \Gamma_{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}$.
- 3 $\Gamma_0 = I$.
- 4 $(\Gamma_\varepsilon)^{-1} = \Gamma_{-\varepsilon}$
- 5 Si $\Gamma_\varepsilon(x, y) = (\hat{x}, \hat{y})$, entonces $\hat{x}(x, y, \varepsilon)$ y $\hat{y}(x, y, \varepsilon)$ son diferenciables respecto (x, y) y se desarrollan en serie de potencias respecto a ε . Es decir para todo $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\hat{x}(x, y, \varepsilon) &= a_0(x, y) + a_1(x, y)(\varepsilon - \varepsilon_0) + \cdots \\ \hat{y}(x, y, \varepsilon) &= b_0(x, y) + b_1(x, y)(\varepsilon - \varepsilon_0) + \cdots\end{aligned}$$

EJEMPLOS GRUPOS DE LIE UNIPARAMÉTRICOS

Ejercicio: Demostrar que las siguientes aplicaciones inducen grupos de Lie uniparamétricos

❶ $\Gamma_\varepsilon(x, y) = (x + \varepsilon, y)$ y $\Gamma_\varepsilon(x, y) = (x, y + \varepsilon)$.

❷ $\Gamma_\varepsilon(x, y) = (e^\varepsilon x, y)$

❸ $\Gamma_\varepsilon(x, y) = \left(\frac{x}{1-\varepsilon x}, \frac{y}{1-\varepsilon x} \right)$

❹ $\Gamma_\varepsilon(x, y) = \begin{pmatrix} \cos(\varepsilon) & -\sin(\varepsilon) \\ \sin(\varepsilon) & \cos(\varepsilon) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

GRUPO DE SIMETRÍAS DE UNA ECUACIÓN

DEFINICIÓN

Consideremos una ecuación

$$y' = f(x, y). \quad (13)$$

Una transformación $\Gamma \in \mathcal{T}$ se denomina una simetría de la ecuación si el cambio de variables dado por $(\hat{x}, \hat{y}) = \Gamma(x, y)$ deja invariante la ecuación.

El conjunto de todas las simetrías de una ecuación es un subgrupo de (\mathcal{T}, \circ) . Lo llamaremos **grupo de simetrías** de la ecuación.

GRUPO DE SIMETRÍAS DE UNA ECUACIÓN

De acuerdo con (9) para que $(\hat{x}, \hat{y}) = \Gamma(x, y)$ sea una simetría de (13) se debe cumplir que

$$\frac{\frac{\partial \hat{y}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{y}}{\partial y} f(x, y)}{\frac{\partial \hat{x}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{x}}{\partial y} f(x, y)} = f(\hat{x}, \hat{y}) \quad (14)$$

Esta ecuación se llama **condición de simetría**. Es una ecuación en derivadas parciales, en principio más compleja que la ecuación original. Tiene varios grados de libertad, por lo que suele haber muchas simetrías. Es común que encontremos soluciones a través de un **ansatz**.

EJEMPLOS SIMETRÍAS ECUACIONES

Consideremos la ecuación

$$y' = 0 \quad (15)$$

La condición de simetría se reduce a

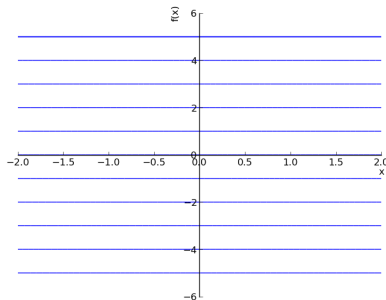
$$\frac{\frac{\partial \hat{y}}{\partial x}}{\frac{\partial \hat{x}}{\partial x}} = 0$$

Debemos tener que $\frac{\partial \hat{y}}{\partial x} = 0$. Vale decir \hat{y} es independiente de x . La forma general de una simetría es

$$\hat{x} = \hat{x}(x, y) \quad \hat{y} = \hat{y}(y). \quad (16)$$

EJEMPLOS SIMETRÍAS ECUACIONES

Hay muchas simetrías. Las traslaciones en cualquier dirección $(x, y) \mapsto (x + \alpha, y + \beta)$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$). Cambios de escala en ambos ejes $(x, y) \mapsto (e^\varepsilon x, y)$, $(x, y) \mapsto (x, e^\varepsilon y)$. Reflexiones respecto ambos ejes $(x, y) \mapsto (-x, y)$, $(x, y) \mapsto (x, -y)$. Observar que el gráfico de las soluciones posee las mismas simetrías, pues en general las simetrías de una ecuación llevan soluciones en soluciones.



SIMETRÍAS TRIVIALES

De todas las simetrías encontradas $\Gamma_\varepsilon(x, y) = (e^\varepsilon x, y)$, $\Gamma_\varepsilon(x, y) = (x + \varepsilon, y)$ y $\Gamma_\varepsilon(x, y) = (x, y + \varepsilon)$ se llaman **triviales** pues llevan una curva solución en si misma. Cualquier cambio de la forma $\hat{x} = \hat{x}(x, y)$ $\hat{y} = y$ es trivial.

Estamos interesados en hallar grupos de Lie uniparamétricos de simetrías no triviales.

SIMETRÍAS TRIVIALES

Las reflexiones $\Gamma(x, y) = (-x, y)$ no pertenecen a tal tipo de grupo. Para demostrar esto supongamos que Γ es alguna instancia de un tal grupo Γ_ε , supongamos por ejemplo que $\Gamma = \Gamma_{\varepsilon_0}$. Consideramos el jacobiano de la transformación:

$$J(\varepsilon) := \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} & \frac{\partial \hat{x}}{\partial y} \\ \frac{\partial \hat{y}}{\partial x} & \frac{\partial \hat{y}}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Tenemos que $J(0) = 1$ y $J(\varepsilon_0) = -1$. Y $J(\varepsilon)$ es continua respecto a ε . Por ende existiría ε' con $J(\varepsilon') = 0$. Esto implica que la matriz jacobiana $D\Gamma$ es singular y esto contradice que $\Gamma : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es difeomorfismo ($D\Gamma D\Gamma^{-1} = I$).

Γ genera un grupo discreto, ya que $\Gamma^2 = \Gamma \circ \Gamma = I$. Luego Γ genera el grupo $G = \{I, \Gamma\}$ que es isomorfo a \mathbb{Z}_2 . En este caso diremos que $\{I, \Gamma\}$ es un **grupo discreto** de simetrías.

EJEMPLO DE SIMETRÍAS

Ejemplo: hallar simetrías de

$$\frac{dy}{dx} = f(x).$$

De acuerdo con (9) se debe cumplir que

$$\frac{\frac{\partial \hat{y}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{y}}{\partial y} f(x)}{\frac{\partial \hat{x}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{x}}{\partial y} f(x)} = f(\hat{x})$$

La forma de la ecuación sugiere el **ansatz**

$$\boxed{\hat{x} = x}, \quad \frac{\partial \hat{y}}{\partial x} = \frac{\partial \hat{x}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \hat{y}}{\partial y} = \frac{\partial \hat{x}}{\partial x}.$$

Luego

$$\frac{\partial \hat{y}}{\partial y} = 1 \Rightarrow \boxed{\hat{y} = y + \varepsilon}$$

con ε constante arbitraria.

EJEMPLO DE SIMETRÍAS

Hallamos que

$$\Gamma_{\varepsilon}(x, y) = (x, y + \varepsilon)$$

es un grupo de Lie uniparamétrico de simetrías. De manera similar

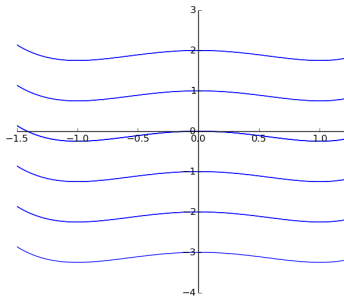
$$\Gamma_{\varepsilon}(x, y) = (x + \varepsilon, y)$$

es un grupo uniparamétrico de simetrías para

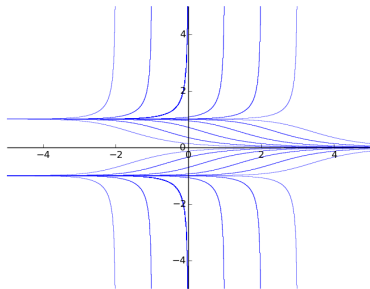
$$\frac{dy}{dx} = f(y).$$

Geoméricamente en el primer caso todas las soluciones se obtienen trasladando una cualquiera verticalmente y en el segundo caso horizontalmente.

EJEMPLO DE SIMETRÍAS



Soluciones de $y' = x^3 - x$



Soluciones de $y' = y^3 - y$

EJEMPLO DE SIMETRÍAS

Demostrar que las rotaciones alrededor del origen es un grupo de Lie uniparamétrico de simetrías de

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^3 + x^2y - x - y}{x^3 + xy^2 - x + y}.$$

Sea Γ_ε la transformación que rota un ángulo ε alrededor del origen. Era un ejercicio demostrar que $\{\Gamma_\varepsilon | \varepsilon \in \mathbb{R}\}$ es un grupo uniparamétrico de simetrías. Se tiene la representación matricial

$$\Gamma_\varepsilon(x, y) = \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varepsilon) & -\operatorname{sen}(\varepsilon) \\ \operatorname{sen}(\varepsilon) & \cos(\varepsilon) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Gamma_\varepsilon^{-1}(\hat{x}, \hat{y}) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varepsilon) & \operatorname{sen}(\varepsilon) \\ -\operatorname{sen}(\varepsilon) & \cos(\varepsilon) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix}$$

EJEMPLO DE SIMETRÍAS

Para el cálculo recurrimos a SymPy (usamos x_n en lugar de \hat{x})

```
from sympy import *
x, theta = symbols('x, theta')
y = Function('y')(x)
x_n = cos(theta) * x - sin(theta) * y
y_n = sin(theta) * x + cos(theta) * y
Expr2 = y_n.diff(x) / x_n.diff(x)
Expr3 = Expr2.subs(y.diff(), \
    (y**3 + x**2 * y - x - y) / (x**3 + x * y**2 - x + y))
x_n, y_n = symbols('x_n, y_n')
Expr4 = Expr3.subs([(y, -sin(theta) * x_n + cos(theta) * y_n),
    (x, cos(theta) * x_n + sin(theta) * y_n)])
Expr5 = simplify(Expr4)
```

EJEMPLO DE SIMETRÍAS

Tiene problemas para simplificar, lo tenemos que ayudar

```
Expr6=Expr5.subs(sin(2*theta + pi/4),\  
sin(2*theta)*sqrt(2)+cos(2*theta)*sqrt(2))  
Expr7=Expr6.subs(cos(2*theta),\  
1+(cos(theta))**2)  
Expr8=Expr7.subs(cos(2*theta),\  
1+(cos(theta))**2)  
Expr9=Expr8.subs(sin(2*theta),\  
1-(cos(theta))**2)
```

La ecuación resultante es **la misma**

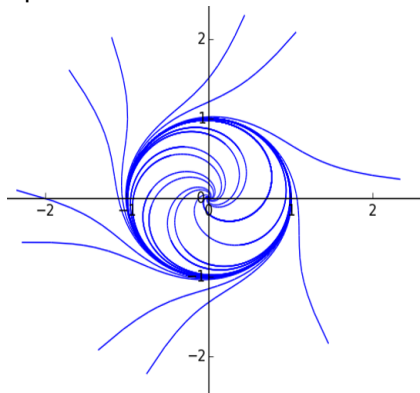
$$\frac{dy_n}{dx_n} = \frac{x_n^2 y_n - x_n + y_n^3 - y_n}{x_n^3 + x_n y_n^2 - x_n + y_n}. \quad (17)$$

EJEMPLO DE SIMETRÍAS

A la misma conclusión arribábamos si recordábamos que en coordenadas polares la ecuación se escribe

$$\frac{dr}{d\theta} = r - r^3,$$

y que esta ecuación tiene las simetrías $\Gamma_\varepsilon : (r, \theta) \mapsto (r, \theta + \varepsilon)$.



Si rotamos un ángulo fijo el gráfico de una solución obtenemos el gráfico de otra solución.

SIMETRÍAS RESUELVEN ECUACIONES

Ejemplo: Supongamos que $y' = f(x, y)$ tiene el grupo de Lie uniparamétrico de simetrías

$$(\hat{x}, \hat{y}) = \Gamma_\varepsilon(x, y) = (x, y + \varepsilon) \quad (18)$$

Usando la condición de simetrías (14) tenemos

$$f(x, y) = f(\hat{x}, \hat{y}) = f(x, y + \varepsilon).$$

Luego

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \varepsilon) - f(x, y)}{\varepsilon} = 0$$

Así f es independiente de y : $f(x, y) = f(x)$ y la ecuación

$$y' = f(x),$$

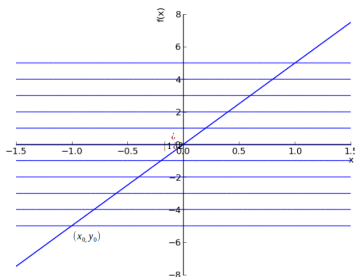
se resuelve simplemente integrando.

ÓRBITAS

DEFINICIÓN

Dado un grupo uniparamétrico de simetrías $G = \{\Gamma_\varepsilon | \varepsilon \in \mathbb{R}\}$, y $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ llamamos **órbita (x_0, y_0) bajo la acción de G** (simplemente órbita si es claro quien es G) a la curva

$$\{\Gamma_\varepsilon(x_0, y_0) | \varepsilon \in \mathbb{R}\}$$



Si G es un grupo de simetrías no trivial, entonces es de esperar que la órbita de (x_0, y_0) cruce transversalmente las curvas solución. La órbita se usará como una nueva coordenada.

ÓRBITAS

La órbita a través de (x, y) es el conjunto de puntos de coordenadas

$$(\hat{x}(x, y, \varepsilon), \hat{y}(x, y, \varepsilon)) = \Gamma_\varepsilon(x, y), \quad (19)$$

donde

$$(\hat{x}(x, y, 0), \hat{y}(x, y, 0)) = (x, y).$$

(19) son ecuaciones paramétricas (parámetro ε) de una curva en el plano.

PUNTOS INVARIANTES

Un punto (x, y) se llama invariante si su órbita se reduce a $\{(x, y)\}$, vale decir

$$(x, y) = \Gamma_\varepsilon(x, y), \quad \forall \varepsilon > 0$$

Ejemplo: La órbita de (x, y) bajo la acción del grupo de Lie uniparamétrico

$$\Gamma_{\varepsilon}(x, y) = \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varepsilon) & -\operatorname{sen}(\varepsilon) \\ \operatorname{sen}(\varepsilon) & \cos(\varepsilon) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Son circunsferencias con centro en el origen. El punto $(0, 0)$ es invariante.

CAMPO VECTORIAL DE TANGENTES

DEFINICIÓN

Dado un grupo de Lie uniparamétrico $(\hat{x}(x, y, \varepsilon), \hat{y}(x, y, \varepsilon)) = \Gamma_\varepsilon(x, y)$ definimos el campo vectorial

$$(\xi(\hat{x}, \hat{y}), \eta(\hat{x}, \hat{y})) = \left(\left. \frac{d\hat{x}}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}, \left. \frac{d\hat{y}}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \right)$$

ξ y η se llaman **símbolos infinitesimales**.

Como \hat{x}, \hat{y} eran analíticas respecto a ε :

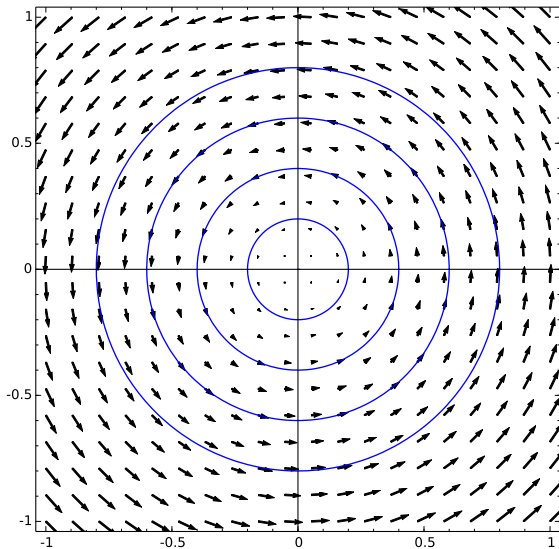
$$\begin{aligned}\hat{x} &= x + \varepsilon \xi(x, y) + O(\varepsilon^2) \\ \hat{y} &= y + \varepsilon \eta(x, y) + O(\varepsilon^2)\end{aligned}$$

En un punto invariante $\xi(x, y) = \eta(x, y) = 0$.

CAMPO VECTORIAL DE TANGENTES

```
x,y,epsilon = var('x,y,epsilon')
x_n=cos(epsilon)*x-sin(epsilon)*y
y_n=sin(epsilon)*x+cos(epsilon)*y
xi=x_n.diff(epsilon)(epsilon=0)
eta=y_n.diff(epsilon)(epsilon=0)
p=plot([])
for x_abs in srange(0,1,.2):
    p+=parametric_plot([x_n(x=x_abs,y=0),\
y_n(x=x_abs,y=0)], (epsilon,0,2*pi))
p+= plot_vector_field((xi,eta),(x,-1,1),\
(y,-1,1))
```

CAMPO VECTORIAL DE TANGENTES



CURVAS INVARIANTES

DEFINICIÓN

Una curva plana C se dice invariante por un grupo uniparamétrico de simetrías de Lie si y sólo si la tangente a C en cada punto (x, y) es paralela a $(\xi(x, y), \eta(x, y))$. Si C es el gráfico de una función $x \mapsto y(x)$, como $(1, y'(x))$ es un vector tangente a la gráfica, la condición que C es invariante se escribe

$$Q(x, y, y') \stackrel{\text{def}}{=} \eta(x, y) - y'\xi(x, y) \equiv 0 \quad (20)$$

Esta se llama **ecuación característica**.

CURVAS INVARIANTES

SOLUCIONES INVARIANTES

Si Γ_ε es un grupo de Lie de simetrías de $y' = f(x, y)$ entonces una solución $y(x)$ es una curva invariante si y sólo si

$$\overline{Q}(x, y) = \eta(x, y) - f(x, y)\xi(x, y) \equiv 0 \quad (21)$$

Se llaman **ecuación característica reducida**.

Nos conviene tener soluciones no invariantes

EJEMPLOS

Ejemplo: La EDO

$$y' = y$$

Tiene simetrías de escala

$$(\hat{x}, \hat{y}) = \Gamma_{\varepsilon}(x, y) = (x, e^{\varepsilon}y).$$

Luego

$$(\xi, \eta) = \left(\left. \frac{d\hat{x}}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}, \left. \frac{d\hat{y}}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \right) = (0, y)$$

Cualquier punto en el conjunto $\{(x, 0) | x \in \mathbb{R}\}$ es invariante. La ecuación característica reducida es.

$$\overline{Q}(x, y) = 0 \Rightarrow y = 0$$

Esta formada enteramente por puntos invariantes.

EJEMPLOS

Ejercicio: demostrar que la siguiente expresión es un grupo de Lie uniparamétrico de simetrías

$$(\hat{x}, \hat{y}) = \Gamma_\varepsilon(x, y) = (e^\varepsilon x, e^{(e^\varepsilon - 1)x} y).$$

Para este grupo tenemos

$$(\xi, \eta) = (x, xy)$$

Todo punto en $x = 0$ es invariante. La ecuación característica reducida es

$$\overline{Q}(x, y) = 0 \Rightarrow xy - xy = 0$$

De modo que estas simetrías actúan trivialmente sobre las soluciones. Llevan una solución en sí misma. Chequeemos esta afirmación de manera directa.

EJEMPLOS

Buscamos el cambio de variables inverso

$$\left. \begin{aligned} \hat{x} &= e^{\varepsilon} x \\ \hat{y} &= e^{(e^{\varepsilon}-1)x} y \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} x &= e^{-\varepsilon} \hat{x} \\ y &= e^{(e^{-\varepsilon}-1)\hat{x}} \hat{y} \end{aligned} \right\}$$

Las soluciones son $y = ke^x$, sustituímos en esta expresión, luego de unas operaciones, llegamos a $\hat{y} = ke^{\hat{x}}$.

EJEMPLOS

Ejemplo. La ecuación de Riccati

$$y' = xy^2 - \frac{2y}{x} - \frac{1}{x^3}, \quad x \neq 0$$

Tiene el grupo de Lie de simetrías

$$(\hat{x}, \hat{y}) = \Gamma_\varepsilon(x, y) = (e^\varepsilon x, e^{-2\varepsilon} y).$$

Tenemos

$$(\xi, \eta) = (x, -2y).$$

La característica reducida

$$\overline{Q}(x, y) = \frac{1}{x^2} - x^2 y^2 = 0.$$

Tenemos dos soluciones invariantes

$$y = \pm \frac{1}{x^2}.$$

UNA OBSERVACIÓN

La mayoría de los métodos de simetría usan los infinitesimales (ξ, η) en lugar de las simetrías en si mismas. No obstante $(\xi(\hat{x}, \hat{y}), \eta(\hat{x}, \hat{y}))$ determinan las simetrías a través de las ecuaciones

$$\begin{cases} \frac{d\hat{x}}{d\varepsilon} &= \xi(\hat{x}, \hat{y}) \\ \frac{d\hat{y}}{d\varepsilon} &= \eta(\hat{x}, \hat{y}) \\ \hat{x}(x, y, 0) &= x \\ \hat{y}(x, y, 0) &= y \end{cases}$$

Ejemplo: Estas ecuaciones pueden ser difíciles de resolver. Pero en algunos casos sencillos puede ser fácil. Supongamos dado $(\xi, \eta) = (0, \hat{y})$. Las ecuaciones implican \hat{x} independiente de ε . Luego por la condición inicial $\hat{x} = x_0$ es función de x, y solo. Además para \hat{y} tenemos $\hat{y} = B(x, y)e^\varepsilon$. Las condiciones iniciales implican $A(x, y) = x$ y $B(x, y) = y$.

COORDENADAS CANÓNICAS

DEFINICIÓN

Diremos que las coordenadas (r, s) son canónicas respecto a el grupo de Lie de simetrías Γ_ε si en las coordenadas (r, s) la acción de grupo es la traslación

$$(\hat{r}, \hat{s}) \stackrel{\text{def}}{=} (r(\hat{x}, \hat{y}), s(\hat{x}, \hat{y})) = (r(x, y), s(x, y) + \varepsilon). \quad (22)$$

Ejemplo: Las coordenadas polares son canónicas respecto al grupo de Lie de rotaciones. Las rotaciones en coordenadas cartesianas y polares se escriben

$$\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varepsilon) & -\sin(\varepsilon) \\ \sin(\varepsilon) & \cos(\varepsilon) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} \hat{r} &= r \\ \hat{\theta} &= \theta + \varepsilon \end{aligned}$$

COORDENADAS CANÓNICAS

Derivando las ecuaciones (22) respecto a ε obtenemos

$$\begin{aligned}\xi(x, y) \frac{\partial r}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial r}{\partial y} &= 0 \\ \xi(x, y) \frac{\partial s}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial s}{\partial y} &= 1\end{aligned}\tag{23}$$

Los cambios de coordenadas deben ser invertibles, de modo que pediremos la condición de no degeneración

$$\frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial y} - \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial s}{\partial x} \neq 0\tag{24}$$

EXTENSIÓN DEFINICIÓN

Cualquier par de coordenadas que satisfacen (23) y (24) se llaman canónicas.

COORDENADAS CANÓNICAS

OBSERVACIONES

- 1 El vector tangente en cualquier punto no invariante es paralelo a la curva $r = \text{cte}$ que pasa por ese punto. Luego esa curva es una órbita. Las órbitas son invariantes, así r se llama la **coordenada invariante**. Las curvas $s = \text{cte}$ son transversales a las órbitas.
- 2 Las coordenadas canónicas no están definidas en un punto (x, y) invariante pues en esos puntos $\xi(x, y) = \eta(x, y) = 0$.
- 3 Las coordenadas canónicas están definidas en un entorno de cualquier punto no invariante.
- 4 Las coordenadas canónicas no son únicas. De hecho si (r, s) son canónicas $(\tilde{r}, \tilde{s}) = (F(r), G(r) + s)$ lo son para cualquier F y G con $F'(r) \neq 0$ para la no degeneración.

ENCONTRANDO COORDENADAS CANÓNICAS

INTEGRALES PRIMERAS

Una integral primera de la EDO $y' = f(x, y)$ es una función $\phi(x, y)$ que es constante a lo largo de una curva solución de la EDO.

TEOREMA

Si (r, s) son coordenadas canónicas de una grupo de Lie de simetrías entonces r es una integral primera de la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\eta(x, y)}{\xi(x, y)}. \quad (25)$$

ENCONTRANDO COORDENADAS CANÓNICAS

Dem. Supongamos $y(x)$ solución de la EDO, es suficiente demostrar que $\frac{d}{dx}r(x, y(x)) = 0$. En efecto

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}r(x, y(x)) &= \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial s}{\partial y}y' && \text{(regla cadena)} \\ &= \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial s}{\partial y} \frac{\eta(x,y)}{\xi(x,y)} && \text{(Ec. (25))} \\ &= 0 && \text{(Ec. (23))}\end{aligned}$$

ENCONTRANDO COORDENADAS CANÓNICAS

Hallar una integral primera implica resolver la ecuación.

Ejemplo Ya conocemos las coordenadas canónicas de las rotaciones,

$$\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varepsilon) & -\sin(\varepsilon) \\ \sin(\varepsilon) & \cos(\varepsilon) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

hallemosla por el método propuesto. Hay que resolver

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \Rightarrow ydy = -xdx \Rightarrow y^2 + x^2 = C$$

Luego $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ es una integral primera.

ENCONTRANDO COORDENADAS CANÓNICAS

La coordenada r es constante sobre los puntos en la gráfica de una solución de (25). Sobre esos puntos $(x, y(x))$, la coordenada s satisface:

$$\begin{aligned}\frac{ds}{dx} &= \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial s}{\partial y} y'(x) \quad (\text{Regla cadena}) \\ &= \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial s}{\partial y} \eta \quad (25) \\ &= \frac{1}{\xi} \quad (23).\end{aligned}\tag{26}$$

Ahora podemos aprovechar que ya conocemos r y expresar y como función de r, x . Luego

TEOREMA: EXPRESIÓN PARA s

$$s = \int \frac{ds}{dx} dx = \int \frac{dx}{\xi(x, y(r, x))}.\tag{27}$$

ENCONTRANDO COORDENADAS CANÓNICAS

En la igualdad resultante puede ser necesario reemplazar r por su expresión en las variables x, y .

Si ocurriese que $\xi = 0$ y $\eta \neq 0$. Entonces por (25) $r_y = 0$, de modo que r es sólo función de x . Se puede asumir $r = x$.

Además $\eta s_y = 1$, entonces

$$s = \int \frac{dy}{\eta(r, y)}. \quad (28)$$

Ejemplo Retornando al ejemplo de las rotaciones, donde hallamos que $r = \sqrt{(x^2 + y^2)}$, vemos que

$$s = \int \frac{dx}{-y} = - \int \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \arccos \left(\frac{x}{r} \right).$$

Por consiguiente s es el ángulo polar.

ENCONTRANDO COORDENADAS CANÓNICAS

Ejemplo Encontrar coordenadas canónicas para el grupo de Lie de simetrías

$$(\hat{x}, \hat{y}) = (e^\varepsilon x, e^{k\varepsilon} y) \quad k > 0.$$

El vector tangente es

$$(\xi, \eta) = \left(\left. \frac{d\hat{x}}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}, \left. \frac{d\hat{y}}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \right) = (x, ky).$$

Resolvamos la ecuación (25)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ky}{x} \Rightarrow y = Cx^k.$$

Luego $\Phi = y/x^k$ es integral primera. Entonces podemos tomar $r = y/x^k$.

ENCONTRANDO COORDENADAS CANÓNICAS

Para s

$$s = \int \frac{dx}{\xi} = \frac{dx}{x} = \ln |x|.$$

Entonces $(r, s) = (yx^{-k}, \ln |x|)$ son coordenadas canónicas. No están definidas en $x = 0$. Podemos encontrar coordenadas canónicas definidas en $x = 0$ del siguiente modo. Recordamos que para todas F y G

$$(\tilde{r}, \tilde{s}) = (F(r), G(r) + s) = (F(x^{-k}y), G(x^{-k}y) + \ln |x|).$$

So canónicas también. Si tomamos $F(r) = 1/r$ y $G(r) = \frac{1}{k} \ln |x|$, evitamos la singularidad. Luego

$$(\tilde{r}, \tilde{s}) = (x^k y^{-1}, \frac{1}{k} \ln |y|).$$

Son canónicas, están definidas en $x = 0$ pero no en $y = 0$.

ENCONTRANDO COORDENADAS CANÓNICAS

Ejemplo Encontrar coordenadas canónicas para

$$(\hat{x}, \hat{y}) = \left(\frac{x}{1 - \varepsilon x}, \frac{y}{1 - \varepsilon x} \right).$$

$$(\xi, \eta) = \left(\left. \frac{d\hat{x}}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}, \left. \frac{d\hat{y}}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \right) = (x^2, xy).$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\eta}{\xi} = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{y}{x} = \text{cte.}$$

Podemos tomar $r = y/x$. Para s

$$s = \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}.$$

Luego $(r, s) = (\frac{y}{x}, \frac{1}{x})$ son canónicas.

En este caso los puntos sobre $x = 0$ son invariantes, no podemos definir coordenadas canónicas allí.