

# CAMBIOS DE VARIABLES, TEORÍA DE LIE Y EDO

Fernando Mazzone

Depto de Matemática  
Facultad de Ciencias Exactas Físico-Químicas y Naturales  
Universidad Nacional de Río Cuarto

16 de diciembre de 2014



## DISTINTAS FORMAS PARA UNA ECUACIÓN

Consideremos la ecuación diferencial general de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (1)$$

O su equivalente como forma diferencial

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (2)$$

La expresión  $\frac{dy}{dx}$  implica una asimetría entre las variables  $x$  e  $y$ , una de ellas es independiente ( $x$ ) y la otra ( $y$ ) dependiente. La expresión  $M(x, y)dx + N(x, y)dy$  es más simétrica, las dos variables tienen el mismo estatus en la expresión. Además las expresiones del tipo (2) representan un ente matemático importante llamado **forma diferencial**

## FORMAS DIFERENCIALES, IDEA SOMERA

- 1 Como los polinomios, las formas diferenciales tienen grado.
- 2 Dadas dos (pueden ser mas) variables  $x, y$  una 0-forma diferencial es una función  $g(x, y)$  de  $x, y$ .
- 3 La expresión (2) es una 1-forma diferencial.
- 4 Hay un operador llamado diferencial y denotado por  $d$ . Si  $\omega$  es una  $k$ -forma diferencial  $d\omega$  es una  $k + 1$  forma diferencial.
- 5 En el caso de 0-forma (función)  $g(x, y)$  el diferencial se define

$$dg = \frac{\partial M}{\partial x} dx + \frac{\partial N}{\partial y} dy.$$

Una  $k$ -forma diferencial se llama exacta cuando es el diferencial de una  $k - 1$ -forma.

# CAMBIOS DE VARIABLES

## IDEA BÁSICA

Supongamos la ecuación (1) o (2) en las variables  $x, y$ . La idea es encontrar nuevas variables  $\xi = \xi(x, y)$  y  $\eta = \eta(x, y)$  tales que la ecuación se transforme en una más sencilla de resolver.

## CÓMPUTOS DE CAMBIAMOS VARIABLES

**Cambio de la variable dependiente  $y = h(x, z)$  manteniendo la independiente**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial z} \frac{dz}{dx}.$$

La ecuación se convierte

$$\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial z} \frac{dz}{dx} = f(x, h(x, z)).$$

Que es una expresión sólo en  $z$  y  $x$ . Parece más complicada, pero en un ejemplo concreto puede ser más simple.

## CÓMPUTOS DE CAMBIOS DE VARIABLES, EJEMPLO

**Ejemplo 1** Hacer el cambio de variable en la ecuación

$$y = \frac{e^z}{x} \quad \text{en} \quad y' = [\ln(xy)]^2 xy - \frac{y}{x}.$$

1) Expresemos  $dy/dx$  sólo con  $x$  y  $z$  y  $dz/dx$ .

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{e^z}{x^2} + \frac{e^z}{x} \frac{dz}{dx}.$$

2) Remplacemos  $y'$  e  $y$  en la ecuación

$$-\frac{e^z}{x^2} + \frac{e^z}{x} \frac{dz}{dx} = \left[ \ln \left( x \frac{e^z}{x} \right) \right]^2 x \frac{e^z}{x} - \frac{e^z}{x}.$$

3) Simplifiquemos

$$\frac{dz}{dx} = z^2 x.$$

Que es una ecuación muy facil de resolver.

# CÓMPUTOS DE CAMBIOS DE VARIABLES, EJEMPLO

Lo podemos hacer con SymPy

```
from sympy import *  
x, y, z = symbols('x, y, z')  
y = Function('y')(x)  
z = Function('z')(x)  
y = exp(z) / x  
eq = Eq(y.diff(x) - (ln(x*y))**2*x*y + y/x, 0)  
simplify(eq)
```

Obtenemos la ecuación

$$\frac{1}{x} \left( -x \log^2 \left( e^{z(x)} \right) + \frac{d}{dx} z(x) \right) e^{z(x)} = 0$$

que SymPy no simplifica a nuestro gusto

# CÓMPUTOS DE CAMBIOS DE VARIABLES

**Cambio de la variable independiente  $t = h(x)$  manteniendo la dependiente**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dh}{dx} = \frac{dy}{dt} h'(x).$$

Suponiendo  $h$  biyectiva, la ecuación se convierte

$$\frac{dy}{dt} h'(h^{-1}(t)) = f(h^{-1}(t), y).$$

Que es una expresión sólo en  $t$  e  $y$ .



## CÓMPUTOS DE CAMBIOS DE VARIABLES, EJEMPLO

**Ejemplo 2** Hacer el cambio de variable en la ecuación

$$x = \cos t \quad \text{en} \quad -\frac{dy}{dx} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}y = 0.$$

1)  $h(x) = \arcsen x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} h'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{dy}{dt}.$$

2) Reemplacemos  $x$  e  $y'$  en la ecuación

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{dy}{dt} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} y = 0$$

3) Simplificando

$$\frac{dy}{dt} + y = 0$$

Que es una ecuación lineal a coeficientes constantes.

# CÓMPUTOS DE CAMBIOS DE VARIABLES, EJEMPLO

Lo podemos hacer con SymPy

```
from sympy import *  
x,t=symbols('x,t')  
t=acos(x)  
y=Function('y')(t)  
Ecuacion=-y.diff()+1/(sqrt(1-x**2))*y
```

Obtenemos la ecuación

$$\frac{1}{\sqrt{-x^2+1}} \left( y(\operatorname{acos}(x)) + \frac{d}{d\xi_1} y(\xi_1) \Big|_{\xi_1=\operatorname{acos}(x)} \right) = 0$$

Nuevamente SymPy no simplifica a nuestro gusto

# CAMBIOS DE VARIABLES

**Cambio de variable general**  $\xi = \xi(x, y)$ ,  $\eta = \eta(x, y)$

1) Calculamos  $d\eta/d\xi$  en las variables  $x, y$

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\frac{d\eta}{dx}}{\frac{d\xi}{dx}} = \frac{\frac{\partial\eta}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y}y'}{\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\xi}{\partial y}y'} = \frac{\frac{d\eta}{dx}}{\frac{d\xi}{dx}} = \frac{\frac{\partial\eta}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y}f(x, y)}{\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\xi}{\partial y}f(x, y)}. \quad (3)$$

2) En la expresión resultante sustituir  $x, y$  por las transformaciones inversas  $x = x(\xi, \eta)$  y  $y = y(\xi, \eta)$

## CAMBIOS DE VARIABLES

**Ejemplo 3. Transformar a polares:**  $\frac{dy}{dx} = \frac{y^3+x^2y-x-y}{x^3+xy^2-x+y}$ .

Dado que el cálculo es extenso lo haremos sólo con SymPy

```
from sympy import *
x=symbols('x')
y=Function('y')(x)
r=sqrt(x**2+y**2)
theta=atan(y/x)
Expr2=r.diff(x)/theta.diff(x)
Expr3=Expr2.subs(y.diff(x), \
(y**3+x**2*y-x-y)/(x**3+x*y**2-x+y))
r,theta=symbols('r,theta',positive=True)
Expr4=Expr3.subs([(y,r*sin(theta)), \
(x,r*cos(theta))])
Expr5=simplify(Expr4)
```

## CAMBIOS DE VARIABLES

Encontramos que en polares la ecuación es mucho más simple

$$\frac{dr}{d\theta} = -r^3 + r.$$

# CAMBIOS DE VARIABLES CON SAGE Y FORMAS DIFERENCIALES

SAGE puede operar con formas diferenciales

```
sage: r,theta=var('r,theta') 1
sage: U = CoordinatePatch((r,theta)) 2
sage: F = DifferentialForms(U) 3
sage: x= DifferentialForm(F, 0, r*cos(theta)) 4
sage: y= DifferentialForm(F, 0, r*sin(theta)) 5
sage: w=(x^3+x*y^2-x+y)*y.diff()-(y^3+x^2*y-x- 6
      y)*x.diff()
sage: w[0].simplify_full() 7
r 8
sage: w[1].simplify_full() 9
r^4 - r^2 10
```

La forma obtenida es  $rdr + (r^4 - r^2)d\theta$ .

# GRUPOS, REPASO

## GRUPOS

Sean  $G$  un conjunto y  $\alpha$  una función tal que  $\alpha : G \times G \rightarrow G$ . En el contexto de grupos es más usual la notación  $\alpha(g_1, g_2) = g_1 g_2$ . El par  $(G, \alpha)$  se llama un grupo si se satisface

- ❶  $(g_1 g_2) g_3 = g_1 (g_2 g_3)$ , para todos  $g_1, g_2, g_3 \in G$ ,
- ❷ Existe  $e \in G$  tal que  $eg = ge = g$ , para todo  $g \in G$ .
- ❸ Para todo  $g \in G$  existe  $h \in G$  tal que  $gh = hg = e$ . Se acostumbra denotar  $h = g^{-1}$ .

## EJEMPLOS DE GRUPOS

**Ejemplo 1** Sea  $\Pi$  un plano euclideo y  $G$  el conjunto de todas las transformaciones rígidas de  $\Pi$  en si mismo. Entonces  $G$  es un grupo con la operación de composición. Se llama el **grupo de transformaciones rígidas**

**Ejemplo 2** Sea  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  un conjunto de  $n$  elementos y  $S_n$  definido por

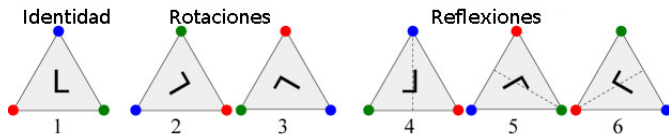
$$S_n = \{\sigma | \sigma : X \rightarrow X \text{ y } \sigma \text{ es biyectiva} \}$$

Entonces  $S_n$  es un grupo con la operación de composición. Se denomina **grupo simétrico**



# EJEMPLOS DE GRUPOS

**Ejemplo 3** Sea  $\Delta$  un polígono regular de  $n$  lados en un plano euclideo  $\Pi$  y  $D_{2n}$  el conjunto de todas las transformaciones rígidas de  $\Pi$  en si mismo que llevan  $\Delta$  en si mismo.  $D_{2n}$  se llama el **grupo diedral** de orden  $2n$ . Para un triángulo equilatero **grupo diedral**



# TEORÍA DE GRUPOS COMPUTACIONAL: SAGE Y GAP

**GAP - Groups, Algorithms, Programming** Lenguaje de programación para álgebra discreta

**SAGE:** es un sistema de software de matemáticas libre de código abierto bajo la licencia GPL. Se basa en muchos paquetes de código abierto existentes: NumPy, SciPy, matplotlib, SymPy, Maxima, GAP, FLINT, R y muchos más. Acceda a su poder combinado a través de un lenguaje común, basado en Python  
Misión: Creación de una alternativa libre de código abierto viable a Magma, Maple, Mathematica y Matlab.

# TEORÍA DE GRUPOS COMPUTACIONAL: SAGE Y GAP

<b>sage:</b> <code>G=SymmetricGroup(5)</code>	11
<b>sage:</b> <code>sigma=G([(1,2,3),(4,5)])</code>	12
<b>sage:</b> <code>sigma^2</code>	13
<code>(1,3,2)</code>	14
<b>sage:</b> <code>sigma^3</code>	15
<code>(4,5)</code>	16
<b>sage:</b> <code>sigma^6</code>	17
<code>()</code>	18
<b>sage:</b> <code>G.order()</code>	19
<code>120</code>	20
<b>sage:</b> <code>H=G.subgroup([sigma])</code>	21
<b>sage:</b> <code>H.order()</code>	22
<code>6</code>	23

# TEORÍA DE GRUPOS COMPUTACIONAL: SAGE Y GAP

<b>sage:</b> <code>H.list()</code>	24
<code>[(), (4,5), (1,2,3), (1,2,3)(4,5), (1,3,2),</code>	25
<code>(1,3,2)(4,5)]</code>	
<b>sage:</b> <code>H.is_normal()</code>	26
<code>False</code>	27
<b>sage:</b> <code>G1=DihedralGroup(3)</code>	28
<b>sage:</b> <code>G1[-2]</code>	29
<code>(1,3,2)</code>	30
<b>sage:</b> <code>H1=G1.subgroup(G1[-2])</code>	31
<b>sage:</b> <code>H1.is_normal()</code>	32
<code>True</code>	33
<b>sage:</b> <code>G1.quotient(H1)</code>	34
<code>Permutation Group with generators [(1,2)]</code>	35

# GRUPOS DE SIMETRÍAS

## GRUPOS DE SIMETRÍAS

Los cambios de variables de un conjunto de dos variables, digamos  $x$  e  $y$ , son funciones  $\varphi$ , invertibles, de clase  $C^\infty$ , donde  $\varphi : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ , con  $\Omega_1, \Omega_2$  abiertos de  $\mathbb{R}^2$ .

Acostumbraremos escribir  $(\xi, \eta) = \varphi(x, y)$  y diremos que  $(\xi, \eta)$  son la variables nuevas e  $(x, y)$  las viejas.

Llamaremos  $\mathcal{T}$  al conjunto de todas los cambios de variables  $\varphi$ . El conjunto  $\mathcal{T}$  tiene una estructura de grupo con la operación de composición.

## GRUPOS DE SIMETRÍAS, EJEMPLOS

**Ejemplo, polares:** Es más fácil describir la transformación que lleva coordenadas polares en cartesianas. En este caso

$(x, y) = \varphi(r, \theta)$  y

$$\varphi(r, \theta) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta)),$$

$$\Omega_1 = (0, \infty) \times (-\pi, \pi),$$

$$\Omega_2 = \mathbb{R}^2 - \{(x, y) | y = 0, x \leq 0\}$$

# GRUPOS DE LIE UNIPARAMÉTRICOS

## GRUPOS UNIPARAMÉTRICOS DE SIMETRÍAS

Sea  $\mathcal{T}$  el grupo de cambios de variables. Supongamos dado un homomorfismo de grupos  $P : (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathcal{T}, \circ)$ .

### Notación:

- ❶ Para  $\lambda \in \mathbb{R}$  escribiremos  $P_\lambda = P(\lambda)$
- ❷ Si  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  escribimos  $(\xi, \eta) = f(x, y, \lambda) := P_\lambda(x, y)$ .

Si  $f(x, y, \lambda)$  es diferenciable respecto a  $(x, y)$  y analítica respecto a  $\lambda$  diremos que  $\{P_\lambda | \lambda \in \mathbb{R}\}$  es un **grupo de Lie uniparamétrico de simetrías**.

# GRUPOS DE LIE UNIPARAMÉTRICOS

## PROPIEDADES DE $P_\lambda$

- 1  $P_\lambda$  es biyectiva y diferenciable sobre su dominio de definición en su imagen.
- 2  $P_{\lambda_1} \circ P_{\lambda_2} = P_{\lambda_1 + \lambda_2}$ , equivalentemente  $f(f(x, y, \lambda_1), \lambda_2) = f(x, y, \lambda_1 + \lambda_2)$ .
- 3  $P_0 = I$ , o  $f(x, y, 0) = (x, y)$ .
- 4  $(P_\lambda)^{-1} = P_{-\lambda}$
- 5 Si  $P_\lambda(x, y) = (\xi, \eta)$ , entonces  $\xi(x, y, \lambda)$  y  $\eta(x, y, \lambda)$  son diferenciables respecto  $(x, y)$  y se desarrollan en serie de potencias respecto a  $\lambda$ . Es decir para todo  $\lambda_0 \in \mathbb{R}$

$$\xi(x, y, \lambda) = a_0(x, y) + a_1(x, y)(\lambda - \lambda_0) + \dots$$

$$\eta(x, y, \lambda) = b_0(x, y) + b_1(x, y)(\lambda - \lambda_0) + \dots$$



## EJEMPLOS GRUPOS DE LIE UNIPARAMÉTRICOS

**Ejercicio:** Demostrar que las siguientes aplicaciones inducen grupos de Lie uniparamétricos

①  $P_\lambda(x, y) = (x + \lambda, y)$  y  $P_\lambda(x, y) = (x, y + \lambda)$ .

②  $P_\lambda(x, y) = (e^\lambda x, y)$

③  $P_\lambda(x, y) = \left( \frac{x}{1-\lambda x}, \frac{y}{1-\lambda x} \right)$

④  $P_\lambda(x, y) = \begin{pmatrix} \cos(\lambda) & -\sin(\lambda) \\ \sin(\lambda) & \cos(\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

# GRUPO DE SIMETRÍAS DE UNA ECUACIÓN

## DEFINICIÓN

Consideremos una ecuación

$$y' = f(x, y).$$

Una transformación  $P \in \mathcal{T}$  se denomina una simetría de la ecuación si el cambio de variables dado por  $(\xi, \eta) = P(x, y)$  deja invariante la ecuación.

**Ejercicio:** el conjunto de todas las simetría de una ecuación es un subgrupo de  $(\mathcal{T}, \circ)$ . Lo llamaremos **grupo de simetrías** de la ecuación.

# ENCONTRAR SIMETRÍAS

**Ejemplo: hallar simetrías de**

$$\frac{dy}{dx} = f(x).$$

De acuerdo con (3) se debe cumplir que

$$\frac{\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} f(x)}{\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y} f(x)} = f(\xi)$$

Parece que debemos hacer las elecciones

$$\boxed{\xi = x}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial \xi}{\partial x}.$$

Luego

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = 1 \Rightarrow \boxed{\eta = y + \lambda}$$

con  $\lambda$  constante arbitraria.

## ENCONTRAR SIMETRÍAS

Hallamos que el

$$P_\lambda(x, y) = (x, y + \lambda)$$

es un grupo uniparamétrico de simetrías. De manera similar

$$P_\lambda(x, y) = (x + \lambda, y)$$

es un grupo uniparamétrico de simetrías para

$$\frac{dy}{dx} = f(y).$$

## ENCONTRAR SIMETRÍAS

**Demostrar que las rotaciones alrededor del origen es un grupo uniparamétrico de simetrías de**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^3 + x^2y - x - y}{x^3 + xy^2 - x + y}.$$

Sea  $P_\lambda$  la transformación que rota un ángulo  $\lambda$  alrededor del origen. Era un ejercicio demostrar que  $\{P_\lambda | \lambda \in \mathbb{R}\}$  es un grupo uniparamétrico de simetrías. Se tiene la representación matricial

$$P_\lambda(x, y) = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\lambda) & -\operatorname{sen}(\lambda) \\ \operatorname{sen}(\lambda) & \cos(\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$P_\lambda^{-1}(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\lambda) & \operatorname{sen}(\lambda) \\ -\operatorname{sen}(\lambda) & \cos(\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

# ENCONTRAR SIMETRÍAS

Para el cálculo recurrimos a SymPy

```
from sympy import *
x, theta = symbols('x, theta')
y = Function('y')(x)
xi = cos(theta) * x - sin(theta) * y
eta = sin(theta) * x + cos(theta) * y
Expr2 = eta.diff(x) / xi.diff(x)
Expr3 = Expr2.subs(y.diff(), \
    (y**3 + x**2 * y - x - y) / (x**3 + x * y**2 - x + y))
xi, eta = symbols('xi, eta')
Expr4 = Expr3.subs([(y, -sin(theta) * xi + cos(theta) * eta),
    (x, cos(theta) * xi + sin(theta) * eta)])
Expr5 = simplify(Expr4)
Expr6 = simplify(Expr5)
Expr7 = Expr6.subs([(sin(2 * theta) + pi / 4), sin(2 * the
```

## ENCONTRAR SIMETRÍAS

Tiene problemas para simplificar, lo tenemos que ayudar

```
Expr5=simplify(Expr4)
Expr6=Expr5.subs(sin(2*theta + pi/4), \
sin(2*theta)*sqrt(2)+cos(2*theta)*sqrt(2))
Expr7=Expr6.subs(cos(2*theta), \
1+(cos(theta))**2)
Expr8=Expr7.subs(cos(2*theta), \
1+(cos(theta))**2)
Expr9=Expr8.subs(sin(2*theta), \
1-(cos(theta))**2)
```

La ecuación resultante es **la misma**

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\eta^3 + \eta\xi^2 - \eta - \xi}{\eta^2\xi + \eta + \xi^3 - \xi}. \quad (4)$$

## ENCONTRAR SIMETRÍAS

A la misma conclusión arribábamos si observamos que en polares la ecuación se escribe

$$\frac{dr}{d\theta} = r - r^3,$$

y que esta ecuación tiene las simetrías  $P_\lambda : (r, \theta) \mapsto (r, \theta + \lambda)$ .