Teoría de Lie y ODE

Fernando Mazzone

Depto de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas Físico-Químicas y Naturales
Universidad Nacional de Río Cuarto

11 de diciembre de 2014

Grupos, Repaso

Grupos

Sean G un conjunto y α una función tal que $\alpha : G \times G \to G$. En el contexto de grupos es más usual la notación $\alpha(g_1, g_2) = g_1 g_2$. El par (G, α) se llama un grupo si se satisface

1. $(g_1 g_2) g_3 = g_1 (g_2 g_3)$, para todos $g_1, g_2, g_3 \in G$,
2. Existe $e \in G$ tal que $eg = ge = g$, para todo $g \in G$.
3. Para todo $g \in G$ existe $h \in G$ tal que $gh = hg = e$. Se acostumbra denotar $h = g^{-1}$.

EJEMPLOS DE GRUPOS

Ejemplo 1 Sea Π un plano euclideano y G el conjunto de todas las transformaciones rígidas de Π en si mismo. Entonces G es un grupo con la operación de composición. Se llama el grupo de transformaciones rígidas

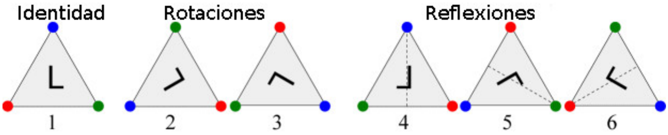
Ejemplo 2 Sea $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ un conjunto de n elementos y S_n definido por

$$S_n = \{\sigma | \sigma : X \to X \text{ y } \sigma \text{ es biyectiva } \}$$

Entonces S_n es un grupo con la operación de composición. Se denomina grupo simétrico

EJEMPLOS DE GRUPOS

Ejemplo 3 Sea Δ un polígono regular de n lados en un plano euclideano Π y D_{2n} el conjunto de todas las transformaciones rígidas de Π en si mismo que llevan Δ en si mismo. D_{2n} se llama el grupo diedral de orden $2n$. Para un triángulo equilatero grupo diedral



Teoría de grupos computacional: SAGE y GAP

GAP - Groups, Algorithms, Programming Lenguaje de programación para algebra discreta
SAGE: es un sistema de software de matemáticas libre de código abierto bajo la licencia GPL. Se basa en muchos paquetes de código abierto existentes: NumPy, SciPy, matplotlib, SymPy, Maxima, GAP, FLINT, R y muchos más. Acceda a su poder combinado a través de un lenguaje común, basado en Python Misión: Creación de una alternativa libre de código abierto viable a Magma, Maple, Mathematica y Matlab.

Teoría de grupos computacional: SAGE y GAP

```
sage: G=SymmetricGroup(5)
sage: sigma=G([(1,2,3),(4,5)])
sage: sigma^2
(1,3,2)
sage: sigma^3
(4,5)
sage: sigma^6
()
sage: G.order()
120
sage: H=G.subgroup([sigma])
sage: H.order()
6
```

TEORÍA DE GRUPOS COMPUTACIONAL: SAGE Y GAP

```
sage: H.list()
[(), (4,5), (1,2,3), (1,2,3)(4,5), (1,3,2),
   (1,3,2)(4,5)]
sage: H.is_normal()
False
sage: G1=DihedralGroup(3)
sage: G1[-2]
(1,3,2)
sage: H1=G1.subgroup(G1[-2])
sage: H1.is_normal()
True
sage: G1.quotient(H1)
Permutation Group with generators [(1,2)]
```

Grupos de simetrías

Grupos de simetrías

Los cambios de variables de un conjunto de dos variables, digamos x e y, son funciones φ, invertibles, de clase C^∞, donde $\varphi : \Omega_1 \to \Omega_2$, con Ω_1, Ω_2 abiertos de $\mathbb{R}^2$.
Acostumbraremos escribir $(\xi, \eta) = \varphi(x, y)$ y diremos que (ξ, η) son la variables nuevas e (x, y) las viejas.
Llamaremos $\mathscr{T}$ al conjunto de todas los cambios de variables φ. El conjunto $\mathscr{T}$ tiene una estructura de grupo con la operación de composición.

Ejemplo, polares: Es más facil describir la transformación que lleva coordenadas polares en cartesinas. En este caso $(x, y) = \varphi(r, \theta)$ y

$$\begin{aligned} \varphi(r,\theta) &= (r\cos(\theta), r\,\mathrm{sen}(\theta)), \\ \Omega_1 &= (0,\infty)\times(-\pi,\pi), \\ \Omega_2 &= \mathbb{R}^2 - \{(x,y)|y=0, x\le 0\} \end{aligned}$$

GRUPOS UNIPARAMÉTRICOS DE SIMETRÍAS

Sea $\mathscr{T}$ el grupo de cambios de variables. Supongamos dado un homomorfismo de grupos $P : (\mathbb{R}, +) \to (\mathscr{T}, \circ)$.

Notación:

1. Para $\lambda \in \mathbb{R}$ escribiremos $P_\lambda = P(\lambda)$
2. Si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ escribimos $(\xi, \eta) = f(x, y, \lambda) := P_\lambda(x, y)$.

Si $f(x, y, \lambda)$ es diferenciable respecto a (x, y) y analítica respecto a λ diremos que $\{P_\lambda | \lambda \in \mathbb{R}\}$ es un grupo de Lie uniparamétrico de simetrías.

Grupos de Lie uniparamétricos

Propiedades de P_λ

1. P_λ es biyectiva y diferenciable sobre su domio de definición en su imagen.
2. $P_{\lambda_1} \circ P_{\lambda_2} = P_{\lambda_1+\lambda_2}$, equivalentemente $f(f(x,y,\lambda_1),\lambda_2) = f(x,y,\lambda_1+\lambda_2)$.
3. $P_0 = I$, o $f(x,y,0) = (x,y)$.
4. $(P_\lambda)^{-1} = P_{-\lambda}$
5. Si $P_\lambda(x,y) = (\xi,\eta)$, entonces $\xi(x,y,\lambda)$ y $\eta(x,y,\lambda)$ son diferenciables respecto (x,y) y se desarrollan en serie de potencias respecto a λ. Es decir para todo $\lambda_0 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\xi(x,y,\lambda) &= a_0(x,y) + a_1(x,y)(\lambda-\lambda_0) + \cdots \\
\eta(x,y,\lambda) &= b_0(x,y) + b_1(x,y)(\lambda-\lambda_0) + \cdots
\end{aligned}$$

Ejemplos grupos de Lie uniparamétricos

Ejercicio: Demostrar que las siguientes aplicaciones induce grupos de Lie uniparamétricos

1. $P_\lambda(x,y) = (x+\lambda, y)$ y $P_\lambda(x,y) = (x, y+\lambda)$.
2. $P_\lambda(x,y) = (e^\lambda x, y)$
3. $P_\lambda(x,y) = \left(\frac{x}{1-\lambda x}, \frac{y}{1-\lambda x}\right)$
4. $P_\lambda(x,y) = \begin{pmatrix} \cos(\lambda) & -\operatorname{sen}(\lambda) \\ \operatorname{sen}(\lambda) & \cos(\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Cambios de variables con SymPy

Procedimiento

1. Declarar variables independientes vieja y nueva,
2. Introducir relación entre ellas
3. Declarar variable dependiente nueva, como función de variable independiente nueva.
4. Introducir relación variables dependientes
5. Introducir ecuación.