

# Ecuaciones lineales de segundo orden

Fernando Mazzone

Depto de Matemática  
Facultad de Ciencias Exactas Físico-Químicas y Naturales  
Universidad Nacional de Río Cuarto

10 de abril de 2014



# Introducción

## Ecuación lineal general de segundo orden

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = r(x), \quad (1)$$

donde  $p, q, r$  son funciones definidas en un intervalo  $I = (a, b)$  de  $\mathbb{R}$  con valores en  $\mathbb{R}$ .

# Introducción

## Teorema de existencia y unicidad de soluciones

Supongamos  $p, q, r$  continuas sobre  $I$ . Sean  $x_0 \in I$  e  $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$  dados. Entonces existe una única solución del PVI

$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = r(x), & x \in I \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0^1 \end{cases}$$

**Demostración.** Más adelante.

# Introducción

Si  $r \equiv 0$  se llama homogénea

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = 0, \quad (2)$$

# Ecuaciones homogéneas

## Teorema

Si  $y_1$  e  $y_2$  son soluciones de (2) y  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  entonces  $c_1 y_1 + c_2 y_2$  es solución. Vale decir, el conjunto de soluciones es un espacio vectorial. En particular  $y \equiv 0$  es una solución, a la que llamaremos **trivial**.

**Demostración** El operador

$$L[y] := y'' + py' + qy$$

es lineal, por consiguiente  $L[c_1 y_1 + c_2 y_2] = c_1 L[y_1] + c_2 L[y_2] = 0$ . □

# Ecuaciones no homogéneas

## Teorema

Supongamos que  $y_p$  es una solución particular de (1) y que  $y_g = y_g(x, c_1, c_2)$  es una solución general de (2). Entonces  $y = y_p + y_g$  es solución general de (1).

**Demostración** El operador

$$L[y] := y'' + py' + qy$$

es lineal, por consiguiente  $L[y_g + y_p] = L[y_g] + L[y_p] = 0 + r = r$ . Recíprocamente supongamos  $y$  solución de  $L[y] = r$ , entonces  $L[y - y_p] = L[y] - L[y_p] = r - r = 0$ . Luego debe haber  $c_1$  y  $c_2$  con  $y(x) - y_p(x) = y_g(x, c_1, c_2)$ . □

# Ecuaciones homogéneas

Volviendo a las ecuaciones homogénea. Supongamos que tenemos dos soluciones de (2)  $y_1$  e  $y_2$ . Entonces la expresión

$$c_1 y_1 + c_2 y_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \quad (3)$$

es solución también. Notar que en la expresión aparecen dos constantes y habíamos dicho que era de esperar que la solución general de una ecuación de orden 2 contuviese precisamente dos constantes de integración. De modo que podemos conjeturar que (3) es solución general de (2).

Hay una situación especial, si, por ejemplo,  $y_1 = k y_2$ ,  $k \in \mathbb{R}$ , entonces  $c_1 y_1 + c_2 y_2 = (c_1 k + c_2) y_2 = c y_2$ . Vale decir la combinación lineal (3) termina siendo sólo combinación lineal de la función  $y_2$  y apareciendo esencialmente una expresión uniparamétrica.

# Independencia lineal

## Definición de independencia lineal

Un conjunto finito de funciones  $\{y_1, \dots, y_n\}$  se dirá linealmente independiente sobre un conjunto  $I$ , si la única solución de  $c_1 y_1(t) + \dots + c_n y_n(t) = 0$ , para  $t \in I$ , es  $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ .



# Independencia lineal

## Definición wronskiano

Dadas  $n$  funciones  $\{y_1, \dots, y_n\}$  con dominio  $I$  el wronskiano  $W(x) = W(y_1, y_2, \dots, y_n)(x)$  de estas funciones en un punto  $x \in I$  se define por

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \cdots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \cdots & y_n'(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix} \quad (4)$$

# Independencia lineal

## Lema. Propiedades Wronskiano I

Sea  $\{y_1, \dots, y_n\}$  un conjunto de  $n$  funciones. Si existe un  $x_0 \in I$  con  $W(x_0) \neq 0$  entonces  $\{y_1, \dots, y_n\}$  son linealmente independientes

**Demostración.** Supongamos que  $c_1 y_1 + \dots + c_n y_n \equiv 0$ . Derivando  $n - 1$  veces esta igualdad y evaluando el resultado en  $x_0$  obtenemos

$$c_1 y_1(x_0) + \dots + c_n y_n(x_0) = 0$$

$$c_1 y_1'(x_0) + \dots + c_n y_n'(x_0) = 0$$

$$\vdots \quad \quad \vdots$$

$$c_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \dots + c_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0$$

# Independencia lineal

Las igualdades anteriores dicen que el vector  $(c_1, \dots, c_n)^t$  pertenece al nucleo de la matriz

$$\begin{pmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \cdots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \cdots & y_n'(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix}$$

Como por hipótesis la matriz es no singular, debe ocurrir que  $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ .



# Fórmula de Abel

## Teorema. Propiedades wronskiano II

Supongamos que  $y_1$  e  $y_2$  son solución de

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + p(x) \frac{dy}{dx} + q(x)y = 0, \quad x \in I = (a, b) \quad (5)$$

Entonces existe  $c \in \mathbb{R}$  que satisface

$$W(y_1, y_2)(x) = ce^{-\int p dx}. \quad (6)$$

Esta expresión se denomina **fórmula de Abel**. En particular vale que

$$\exists x_0 \in I : W(x_0) \neq 0 \iff \forall x \in I : W(x) \neq 0.$$

# Demostración fórmula Abel

**Demostración.** Tenemos que

$$W(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x).$$

Derivando y usando (5)

$$\begin{aligned} W'(x) &= y_1 y_2'' - y_1' y_2' \\ &= y_1(-py_2' - qy_2) - y_2(-py_1' - qy_1) \\ &= -pW. \end{aligned}$$

Vale decir  $W$  resuelve la ecuación  $W' = -pW$  la cual es facilmente resoluble, mostrando su solución que se satisface (6) □

# Independencia y wronskiano

## Propiedades wronskiano III

Sean  $y_1$  e  $y_2$  soluciones de (5). Entonces son equivalentes

- ①  $y_1$  e  $y_2$  son linealmente independientes en  $I$ .
- ②  $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$  para todo  $x \in I$ .

**Demostración.** Que 1 implica 2 es consecuencia de las propiedades del wronskiano I y II. Veamos que 2 implica 1. Si  $y_1$  e  $y_2$  fueran linealmente dependientes, una función sería un múltiplo escalar de la otra, digamos  $y_1 = ky_2$  con  $k \in \mathbb{R}$ . Luego  $W = y_1 y_2' - y_1' y_2 = ky_2 y_2' - ky_2' y_2 = 0$  lo que contradice 2.

# Estructura soluciones ecuaciones homogéneas

## Teorema, estructura del conjunto de soluciones ecuación lineal de segundo orden homogénea

Si  $y_1$  e  $y_2$  son soluciones linealmente independientes de

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = 0, \quad x \in I = (a, b)$$

entonces

$$y(x, c_1, c_2) = c_1 y_1 + c_2 y_2 \tag{7}$$

es solución general.

# Estructura soluciones ecuaciones homogéneas

**Demostración.** Que la expresión (7) es solución ya lo hemos dicho. Restaría ver que cualquier solución se escribe como en (7). Sea  $y$  cualquier solución y  $x_0 \in I$ . La matriz wronskiana

$$\begin{pmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{pmatrix}$$

Es no singular dado que el determinante es no nulo. Por este motivo el sistema

$$c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) = y(x_0)$$

$$c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) = y'(x_0)$$

tiene solución para  $c_1$  y  $c_2$ .



# Estructura soluciones ecuaciones homogéneas

De este modo vemos que la función  $c_1 y_1 + c_2 y_2$  resuelve el PVI

$$\begin{cases} \frac{d^2 z}{dx^2} + p(x) \frac{dz}{dx} + q(x)z = 0, & x \in I \\ z(x_0) = y(x_0) \\ z'(x_0) = y'(x_0) \end{cases} .$$

Evidentemente  $y$  es solución también, por el Teorema de Existencia y Unicidad vemos que  $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$  □

# Reducción de orden

Como conclusión de lo anterior, si queremos resolver (5) que conseguir dos soluciones linealmente independientes.

Suponiendo que ya contamos con una solución no trivial vamos a describir un método que posibilita encontrar otra solución  $y_2$  linealmente independiente de  $y_1$ .

El método consiste en proponer que  $y_2$  se escribe

$$y_2(x) = v(x)y_1(x).$$

# Reducción de orden

Luego

$$\begin{aligned}0 &= y_2'' + py_2' + qy_2 \\&= y_1 v'' + 2v' y_1' + v y_1'' + p v' y_1 + p v y_1' + q v y_1 \\&= y_1 v'' + (2y_1' + p y_1) v' + v(y_1'' + p y_1' + q y_1) \\&= y_1 v'' + (2y_1' + p y_1) v'\end{aligned}$$

La fórmula anterior es nuevamente una ecuación de segundo orden para  $v$ , pero en este caso afortunadamente contamos con herramientas para resolverla puesto que se trata de una ecuación donde la variable dependiente  $v$  no aparece explícitamente, sino que aparecen sus derivadas  $v'$  y  $v''$ . Hay que intentar la sustitución  $w = v'$

## Reducción de orden

Luego

$$w'' + (2y_1' + py_1)w = 0$$

Recordar que  $y_1$  la asumimos conocida y que  $p$  es obviamente conocida, así  $2y_1' + py_1$  es una función conocida. La ecuación es una ecuación lineal homogénea de primer orden. Usando la fórmula para resolver este tipo de ecuación dada en nuestra [presentación anterior](#), obtenemos

$$w(x) = Ce^{-\int \frac{y_1'}{y_1} + p dx} = Ce^{-2 \ln |y_1|} e^{-\int p dx} = C \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p dx}$$

Es suficiente encontrar sólo una función  $v$ , de allí podemos tomar  $C = 1$ .

$$w(x) = \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p dx} \implies v(x) = \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p dx} dx \quad (8)$$

# Reducción de orden

Otra manera de testear la independencia lineal de dos funciones  $y_1$  e  $y_2$  es notar por ejemplo que si fueran linealmente dependientes e  $y_1 \neq 0$  en un conjunto  $J \subset I$  entonces  $y_2/y_1$  sería constante. Luego uno chequea independencia si comprueba que  $y_2/y_1$  no es constante en un subdominio  $J \subset I$ .

En el caso anterior  $y_2/y_1 = v$ , luego deberíamos tener  $v$  no constante sobre algún subconjunto  $J$ . Pero  $v$  constante implicaría  $y_1^{-2} e^{-\int p dx} = 0$  y esto claramente no ocurre. De modo que por el método anterior encontramos dos soluciones independientes.

# Ecuaciones homogéneas con coeficientes constantes

Consideramos la ecuación

$$y'' + py' + qy = 0, \quad p, q \in \mathbb{R} \quad (9)$$

Propongamos una solución de la forma

$$y(x) = e^{\lambda x}, \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

Reemplazando en la ecuación

$$(\lambda^2 + \lambda p + q)e^{\lambda x} = 0.$$

Se debe satisfacer la llamada **ecuación característica**

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0 \quad (10)$$

# Ecuaciones homogéneas con coeficientes constantes

Tenemos tres casos acorde al valor de  $\Delta = p^2 - 4c > 0$

1)  $\Delta = p^2 - 4c > 0$ , **raíces reales distintas**  $\lambda_1, \lambda_2$ . Este es el caso más sencillo de todos, obtenemos las soluciones

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x} \quad y \quad y_2(x) = e^{\lambda_2 x}.$$

Para chequear la independencia

$$\frac{y_2}{y_1} = e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x} \neq \text{cte.}$$

Luego

$$y(x, c_2, c_2) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}. \quad (11)$$

es solución general

# Ecuaciones homogéneas con coeficientes constantes

2)  $\Delta = p^2 - 4c < 0$ , **raíces complejas conjugadas**  $\lambda_1 = \mu + i\nu$ ,  
 $\lambda_2 = \mu - i\nu$ ,  $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ .

Proponemos una solución de la forma

$$y(x) = e^{\mu x} v(x)$$

Hagamos los cálculos con SAGE



# Ecuaciones homogéneas con coeficientes constantes

```
sage: x,p,q=var('x,p,q')
sage: y=function('y',x)
sage: v=function('v',x)
sage: y=exp(-p/2*x)*v
sage: ecua=y.diff(x,2)+p*y.diff(x)+q*y==0
sage: ecuav=(ecua/exp(-p/2*x)).simplify_full()
sage: ecuav
-1/4*(p^2 - 4*q)*v(x) + D[0, 0](v)(x) == 0
```

Vale decir que  $v$  resuelve

$$-\frac{1}{4}(p^2 - 4q)v(x) + v''(x) = 0.$$

Como  $-\frac{1}{4}(p^2 - 4q) > 0$ , estamos en presencia de la ecuación del oscilador armónico.

# Ecuaciones homogéneas con coeficientes constantes

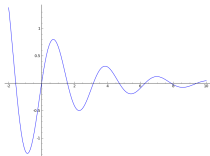
Recordar que si  $\nu = \sqrt{\frac{|p^2 - 4q|}{4}}$ , la solución general para  $v$  es

$$v(x) = C_1 \cos \nu x + C_2 \operatorname{sen} \nu x,$$

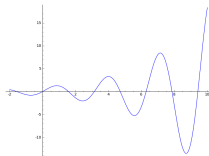
y de allí

$$y(x) = e^{\mu x} \{ C_1 \cos \nu x + C_2 \operatorname{sen} \nu x \} \quad (12)$$

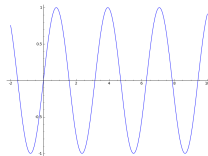
# Ecuaciones homogéneas con coeficientes constantes



$$\mu < 0$$



$$\mu > 0$$



$$\mu = 0$$

# Ecuaciones homogéneas con coeficientes constantes

3)  $\Delta = p^2 - 4c = 0$ , **raíces iguales** . Conocemos una solución

$y_1 = e^{-\frac{p}{2}x}$  . Podemos hallar otra por el método de reducción de orden. Esto consiste en proponer otra solución de la forma  $y_2(x) = y_1(x)v(x)$  Dejemos que SAGE nos realice los cálculos (ver `uni4b.sage` ). Podemos ver que el método mencionado proporciona la solución extra

$$y_2(x) = xe^{-\frac{p}{2}x}.$$

# Ecuaciones no homogéneas. Método coeficientes indeterminados

## Ecuación no homogénea

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = r(x), \quad (13)$$

donde  $p, q, r \in C(I)$  y  $r \neq 0$ .

## Método coeficientes indeterminados

Consiste en buscar soluciones en la misma clase de funciones a la que pertenece  $r(x)$ . Funciona de manera metódica sólo para algunos tipos de funciones  $r(x)$ . Concretamente para  $r(x)$  combinación lineal de funciones polinómicas, exponenciales  $e^{\alpha x}$  o trigonométricas  $\cos \alpha x$  y  $\sin \alpha x$ . Lo vamos a ilustrar con ejemplos para cada caso.

## Método coeficientes indeterminados. Caso $r(x) = e^{ax}$ y $a^2 + pa + q \neq 0$ .

En esta situación se propone como solución una función de la forma

$y(x) = Ae^{ax}$ . Usamos SAGE para el cálculos

```
sage: x,p,q,a,A=var('x,p,q,a,A')
sage: y=function('y',x)
sage: y=A*exp(a*x)
sage: ecua=y.diff(x,2)+p*y.diff(x)+q*y==exp(a*x)
sage: ecua=(ecua/exp(a*x)).simplify_full()
sage: ecua
(a^2 + a*p + q)*A == 1
sage: solve(ecua,A)
[A == (1/(a^2 + a*p + q))]
```

Si  $a^2 + pa + q \neq 0$ , encontramos la solución particular

$$y(x) = \frac{1}{(a^2 + pa + q)} e^{ax}.$$

## Método coeficientes indeterminados. Caso $r(x) = e^{ax}$ y $a^2 + pa + q = 0$

En esta situación diremos que la ecuación está en **resonancia**. Más generalmente, diremos que se presenta resonancia cuando  $r(x)$  es solución del problema homogéneo.

Propongamos como solución  $y(x) = Axe^{ax}$ . Hagamos los cálculos con SAGE.

```
sage: x,p,q,a,A=var('x,p,q,a,A')
sage: y=A*x*exp(a*x)
sage: ecua=y.diff(x,2)+p*y.diff(x)+q*y==exp(a*x)
sage: ecua=(ecua/exp(a*x)).simplify_full()
sage: ecua
((a^2 + a*p + q)*x + 2*a + p)*A == 1
sage: ecua.subs_expr(a^2 + a*p + q==0)
(2*a + p)*A == 1
```

Luego, si  $2a + p \neq 0$ ,  $y(x) = \frac{1}{2a + p} xe^{ax}$  resuelve el problema.

## Método coeficientes indeterminados. Caso $r(x) = e^{ax}$ y $a^2 + pa + q = 0$

Si  $2a + p = 0$ , como también  $a^2 + pa + q = 0$ , tenemos que  $a$  es una raíz doble de la ecuación  $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ . En este caso, proponemos como solución  $y(x) = Ax^2 e^{ax}$ .

```
sage: x,p,q,a,A=var('x,p,q,a,A')
sage: y=function('y',x)
sage: y=A*x**2*exp(a*x)
sage: ecua=y.diff(x,2)+p*y.diff(x)+q*y==exp(a*x)
sage: ecua=(ecua/exp(a*x)).simplify_full()
sage: ecua
((a^2 + a*p + q)*x^2 + 2*(2*a + p)*x + 2)*A == 1
sage: ecua.subs_expr(2*a+p==0,a^2 + a*p + q==0)
2*A == 1
```

Hay que tomar  $y(x) = \frac{1}{2}x^2 e^{ax}$



# Método coeficientes indeterminados. Caso

$$r(x) = \sin bx$$

Proponemos

$$y(x) = A \cos x + B \sin x,$$

como candidato a solución.

```
sage: x,p,q,b,A,B=var('x,p,q,b,A,B')
sage: y=function('y',x)
sage: y=A*cos(b*x)+B*sin(b*x)
sage: ecua=y.diff(x,2)+p*y.diff(x)+q*y==sin(b*x)
sage: ecua.simplify_full()
(b*p*cos(b*x) - (b^2 - q)*sin(b*x))*B - (b*p*sin(b*x)
... + (b^2 - q)*cos(b*x))*A == sin(b*x)
sage: ecua=ecua-sin(b*x)
sage: ecua
-A*b^2*cos(b*x) - B*b^2*sin(b*x) + (A*cos(b*x) + B*sin(b*x))*q
... - (A*b*sin(b*x) - B*b*cos(b*x))*p - sin(b*x) == 0
```

# Método coeficientes indeterminados. Caso

$$r(x) = \sin bx$$

La expresión en el miembro de la izquierda es una combinación lineal de las funciones  $\cos bx$  y  $\sin bx$ . Como estas funciones son linealmente independientes debemos tener que los coeficientes en la combinación lineal deben ser cero

```
sage: ecua.lhs().coefficient(sin(b*x)).simplify_full()==0  
-A*b*p - (b^2 - q)*B - 1 == 0
```

```
sage: ecua.lhs().coefficient(cos(b*x)).simplify_full()==0  
B*b*p - (b^2 - q)*A == 0
```

Obtenemos un sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} -Abp - (b^2 - q)B = 1 \\ Bbp - (b^2 - q)A = 0 \end{cases} \quad (14)$$

## Método coeficientes indeterminados. Caso

$$r(x) = \operatorname{sen} bx$$

Para que el sistema tenga solución la matriz de coeficientes debe ser no singular

$$0 \neq \det \begin{pmatrix} -bp & -(b^2 - q) \\ -(b^2 - q) & bp \end{pmatrix} = -(b^2 p^2 + (b^2 - q)^2)$$

Podemos suponer  $b \neq 0$ , de lo contrario la ecuación hubiese sido homogénea. entonces la coondición de arriba ocurre si y sólo si  $p \neq 0$  o  $b^2 \neq q$ . En esa situación encontramos una solución de la forma

$$y(x) = A \cos bx + B \operatorname{sen} bx,$$

donde  $A$  y  $B$  resuelven (14).

## Método coeficientes indeterminados. Caso $r(x) = \sin bx$ con resonancia

Cuando  $p = 0$  y  $b^2 = q$  el sistema (14) puede no tener solución. Notar que en este caso la ecuación queda

$$y'' + b^2 y = \sin bx$$

Es una ecuación de un oscilador armónico no homogénea. Habíamos visto que justamente  $r(x) = \sin bx$  es una solución del problema homogéneo. Nuevamente estamos en una situación de resonancia, es decir  $r(x)$  es solución el homogéneo. Como en casos anteriores hay que proponer como solución

$$y(x) = x (A \cos x + B \sin x),$$

# Método coeficientes indeterminados. Caso $r(x) = \sin bx$ con resonancia

```
sage: x,b,A,B=var('x,b,A,B')
sage: y=function('y',x)
sage: y=x*(A*cos(b*x)+B*sin(b*x))
sage: ecua=y.diff(x,2)+b^2*y==sin(b*x)
sage: ecua=ecua-sin(b*x)
sage: eql1=ecua.lhs().coefficient(sin(b*x))==0
sage: eql2=ecua.lhs().coefficient(cos(b*x))==0
sage: solve([eql1,eql2],[A,B])
[[A == -1/2/b, B == 0]]
```

Encontramos la solución general

$$y(x) = -\frac{x}{2b} \cos x.$$

El caso donde  $r(x) = \cos bx$  se trata de manera completamente similar.

# Disgresión: anillos de polinomios en SAGE.

## Definiendo un anillo de polinomios sobre $\mathbb{Q}$

```
sage: PoliQX=QQ['X']
sage: print(PoliQX)
Univariate Polynomial Ring in X over Rational Field
sage: PoliRX=RR['X']
sage: print(PoliRX)
Univariate Polynomial Ring in X over Real Field with 53 bits of
...precision
sage: PoliZ3X=Integers(3)['X']
sage: print(PoliZ3X)
Univariate Polynomial Ring in X over Ring of integers modulo 3
sage: p=PoliZ3X([1,1,1])
sage: p
X^2 + X + 1
sage: p+p
2*X^2 + 2*X + 2
sage: p+p+p
0
sage: PoliZ3Xb = PolynomialRing(Integers(3), "X")
sage: PoliZ3X is PoliZ3Xb
True
sage: X+X
NameError: name 'X' is not defined
sage: PoliZ3Xc.<X> = Integers(3)["X"]
sage: PoliZ3Xc([1,2,1])+X
X^2 + 1
```

# Anillo de polinomios en varias variables

```
sage: P.<X,Y>=QQ["X,Y"]
sage: 1+X+X^2+Y^3 in P
True
sage: p=sum([j*X^j*Y^(3-j) for j in range(4)] )
sage: p in P
True
sage: p
3*X^3 + 2*X^2*Y + X*Y^2
sage: P=QQ[['a'+str(j) for j in range(8)]]
sage: P
Multivariate Power Series Ring in a0, a1, a2, a3, a4,
...a5, a6, a7 over Rational Field
sage: a0 in P
NameError: name 'a0' is not defined
sage: a=P.gens()
sage: a
(a0, a1, a2, a3, a4, a5, a6, a7)
sage: a[0] in P
True
sage: type(a[0])
<class 'sage.rings.multi_power_series_ring_element.
...MPowerSeriesRing_generic_with_category.element_class'>
sage: sum([a[j]*j for j in range(8)])
a1 + 2*a2 + 3*a3 + 4*a4 + 5*a5 + 6*a6 + 7*a7
sage: sum([a[j]*j for j in range(8)]) in P
True
```

# Anillo de polinomios sobre anillo de polinomios

```
sage: A=QQ[['a'+str(j) for j in range(5)]]
sage: A
Multivariate Power Series Ring in a0, a1, a2, a3, a4
....over Rational Field
sage: a=A.gens()
sage: a
(a0, a1, a2, a3, a4)
sage: a[0]*X+a[1]*X^2 in P
True
sage: a[0]*X+a[1]*X^2
a1*X^2 + a0*X
sage: (a[0]*X+a[1]*X^2)^2
a1^2*X^4 + 2*a0*a1*X^3 + a0^2*X^2
sage: p=sum([a[j]*X^j for j in range(5)])
sage: p
a4*X^4 + a3*X^3 + a2*X^2 + a1*X + a0
```



# Método coeficientes indeterminados. Caso $r(x)$ polinomio

Hay que proponer como solución un polinomio, en primera instancia, del mismo grado. Invocando SAGE.

```
sage: grado=4
sage: lista_var=['a'+str(j) for j in range(grado)]
sage: lista_var+=['b'+str(j) for j in range(grado)]
sage: lista_var+=['p', 'q']
sage: A = PolynomialRing(QQ, lista_var)
sage: P=A['X']
sage: r=P([A.gen(i) for i in range(grado)])
sage: r
a3*X^3 + a2*X^2 + a1*X + a0
sage: y=P([A.gen(i) for i in range(grado, 2*grado)])
sage: y
b3*X^3 + b2*X^2 + b1*X + b0
sage: eq=y.derivative(2)+y.derivative()*A.gen(2*grado)+y*A.gen(2*grado+1)-
sage: ecuaciones=[SR(l)==0 for l in eq.coefficients()]
sage: parametros=[SR(A.gen(j)) for j in range(2*grado+2)]
sage: Sol=solve(ecuaciones,parametros[grado:2*grado])
sage: show(Sol[0])
```

# Método coeficientes indeterminados. Caso $r(x)$ polinomio

Encontramos las soluciones

$$b_0 = \frac{a_0 q^3 - 6 a_3 p^3 - (a_1 p + 2 a_2) q^2 + 2 (a_2 p^2 + 6 a_3 p) q}{q^4},$$

$$b_1 = \frac{a_1 q^2 + 6 a_3 p^2 - 2 (a_2 p + 3 a_3) q}{q^3},$$

$$b_2 = \frac{a_2 q - 3 a_3 p}{q^2},$$

$$b_3 = \frac{a_3}{q}$$

que tienen sentido solo cuando  $q \neq 0$ .

## Método coeficientes indeterminados. Caso $r(x)$ polinomio y resonancia

El caso  $q = 0$  es una forma de resonancia. Puede ser tratado como las anteriores resonancias, pero notando que la ecuación se reduce a  $y'' + py' = r$  conviene tomar  $v = y'$  como nueva variable dependiente y reducir la ecuación a una de primer orden.

Por último señalemos que si deseamos resolver un problema de la forma

$$L[y] \equiv y'' + py' + qy = r_1(x) + \cdots + r_n(x),$$

donde las funciones  $r_i$  son de alguna de las formas descriptas en los casos previos, entonces la linealidad de  $L$  implica que, si  $y_i$  resuelve  $L[y_i] = r_i$ ,  $y = y_1 + \cdots + y_n$  resuelve la ecuación deseada.

# Método variación de los parámetros

Queremos resolver la ecuación

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = r(x). \quad (15)$$

Supongamos que contamos con un par de soluciones  $y_1, y_2$  linealmente independientes de la ecuación homogénea asociada

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0. \quad (16)$$

El método de **variación de los parámetros** consiste en proponer una solución de la forma

$$y(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x). \quad (17)$$

## Método variación de los parámetros

Hay dos funciones incógnitas  $c_1$  y  $c_2$ , pero sólo una ecuación. Tendremos por esto libertad de introducir otra condición que consideremos conveniente.

Tenemos

$$y' = c_1' y_1 + c_1 y_1' + c_2' y_2 + c_2 y_2'.$$

Pidamos que

$$c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0. \quad (18)$$

Supuesta esta igualdad

$$y' = c_1 y_1' + c_2 y_2'.$$

Derivando

$$y'' = c_1' y_1' + c_2' y_2' + c_1 y_1'' + c_2 y_2''.$$

# Método variación de los parámetros

Entonces

$$\begin{aligned}r(x) &= y'' + py' + qy \\&= c_1' y_1' + c_2' y_2' + c_1 y_1'' + c_2 y_2'' + p(c_1 y_1' + c_2 y_2') + q(c_1 y_1 + c_2 y_2) \\&= c_1 (y_1'' + p y_1' + q y_1) + c_2 (y_2'' + p y_2' + q y_2) + c_1' y_1' + c_2' y_2' \\&= c_1' y_1' + c_2' y_2'\end{aligned}$$

Esta ecuación junto a (18) nos dan el sistema

$$\begin{cases} c_1' y_1 + c_2' y_2 &= 0 \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' &= r \end{cases} \quad (19)$$

Las incógnitas son  $c_1'$  y  $c_2'$ . El determinante de la matriz de coeficientes es precisamente el Wronskiano  $W$  de las soluciones  $y_1$  e  $y_2$ , por la suposición de independencia  $W \neq 0$  y por lo tanto el sistema tiene solución única.

# Método variación de los parámetros

Se tiene

$$c_1' = -\frac{\det \begin{pmatrix} 0 & y_2 \\ r & y_2' \end{pmatrix}}{W} = -\frac{ry_2}{W}$$

y

$$c_2' = -\frac{\det \begin{pmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & r \end{pmatrix}}{W} = \frac{ry_1}{W}$$

# Método variación de los parámetros

En consecuencia

$$c_1 = - \int \frac{ry_2}{W} dx \quad (20)$$

y

$$c_2 = \int \frac{ry_1}{W} \quad (21)$$

Usando estas fórmulas y (17) obtenemos una solución particular del sistema. La solución general es la suma de la particular más una solución general del homogéneo. Esta última solución general se escribe como una combinación lineal genérica entre  $y_1$  e  $y_2$ .



# Método variación de los parámetros

**Ejemplo** Resolver el siguiente pvi  $y'' + y = \csc x$ ,  $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$  y  $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ .

```
sage: x=var('x')
sage: y1=sin(x)
sage: y2=cos(x)
sage: W=y1*y2.diff()-y1.diff()*y2
sage: W.simplify_full() #chequeamos independencia
-1
sage: r=csc(x)
sage: y=(r*y1/W).integral(x)*y2-(r*y2/W).integral(x)*y1 #formula
sage: y
-x*cos(x) + log(sin(x))*sin(x)
sage: c1,c2=var('c1,c2')
sage: z=y+c1*y1+c2*y2 #solucion general
sage: (z.diff(x,2)+z-r).simplify_trig()
0
sage: #resolvemos pvi
sage: C=solve([z(x=pi/2)==0,z.diff(x).subs(x=pi/2)==1],[c1,c2])
sage: C
[[c1 == 0, c2 == 1/2*pi - 1]]
sage: A,B=C[0]
sage: y=z.subs_expr(A,B)
sage: y
1/2*(pi - 2)*cos(x) - x*cos(x) + log(sin(x))*sin(x)
sage: y(x=pi/2)
0
sage: y.diff()(x=pi/2)
1
```

# Conclusiones

- 1 Si podemos encontrar dos soluciones linealmente independientes de una ecuación lineal homogénea de segundo orden, tenemos la solución general a través de combinaciones lineales.
- 2 Si tenemos una solución no trivial de una ecuación lineal homogénea de segundo orden podemos hallar otra por el método de reducción de orden.
- 3 Podemos resolver completamente una ecuación lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes.
- 4 Podemos resolver algunos problemas no homogéneos por el método de coeficientes indeterminados.
- 5 Si conocemos las soluciones del problema homogéneo podemos resolver, en teoría, el no homogéneo para cualquier  $r(x)$  por el método de variación de los parámetros

## Aplicaciones. Vibraciones mecánicas

**Problema:** Estudiar el movimiento de un resorte (cómo el de la unidad anterior) pero suponer que además de actuar sobre la masa la fuerza elástica del resorte, tenemos una fuerza de fricción debida ala resistencia del medio. Por la acción de esta fuerza, se dice que es un sistema resorte-masa amortiguado. Además suponemos que hay otra fuerza  $F$  externa y que sólo depende de  $t$ . Por ejemplo si el resorte se colocase verticalmente y se dejase suspendida la masa,  $F$  sería la fuerza de gravedad. Si la masa estuviese hecha de metal,  $F$  podría ser una fuerza provista por un imán. Por la acción de esta fuerza el sistema se dice forzado. Por consiguiente el sistema completo, con la acción de las tres fuerzas, se denomina un sistema resorte-masa, amortiguado y forzado.

## Aplicaciones. Vibraciones mecánicas

La fuerza elástica del resorte se modeliza con la Ley de Hooke. Para la amortiguación, supongamos que su módulo es proporcional a la velocidad de la masa. La constante de proporcionalidad  $c$  se llama coeficiente de **viscosidad**. La dirección y sentido de la fuerza amortiguadora es siempre contraria al movimiento. Por el principio de conservación de la energía, vemos que la fuerza de amortiguación siempre realiza un trabajo  $W$  negativo, por consiguiente hace perder energía cinética. De la fuerza externa  $F$  no sabemos nada en principio. Por todo lo expuesto, si ponemos un sistema de coordenadas con origen en la posición de equilibrio del sistema masa-resorte y si  $x(t)$  es la posición de la masa en el momento  $t$ , la ecuación que gobierna el sistema masa-resorte con amortiguación y forzamiento es

$$mx''(t) \underbrace{=}_{\text{2º Ley Newton}} \underbrace{-kx(t)}_{\text{Hooke}} \underbrace{-cx'(t)}_{\text{Amortiguación}} + \underbrace{F(t)}_{\text{Fuerza externa}} \quad (22)$$

## Vibraciones amortiguadas no forzadas ( $c > 0$ , $F = 0$ )

Escribamos la ecuación (22) de la siguiente forma

$$\boxed{x''(t) + 2\mu x'(t) + \omega^2 x = 0} \quad \mu := \frac{c}{2m}, \omega := \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (23)$$

Las raíces de la ecuación característica son

$$\boxed{\lambda_{1,2} = -\mu \pm \sqrt{\Delta}, \quad \Delta := \mu^2 - \omega^2}$$

**Caso  $\Delta > 0$ .** Aquí la viscosidad es “grande” relativa a la rigidez  $k$ . Se dice que el sistema está sobreamortiguado. En este caso tenemos dos soluciones linealmente independientes y la solución general es de la forma

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

Notar que  $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ .

# Vibraciones amortiguadas no forzadas ( $c > 0, F = 0$ )

De ahora en más supondremos que el sistema parte del reposo  $x'(0) = 0$  y de una posición indeterminada  $x_0$ .

```
sage: lambda1, lambda2=var('lambda1, lambda2')
sage: t=var('t')
sage: x=c1*e^(lambda1*t)+c2*e^(lambda2*t)
sage: x0=var('x0')
sage: C=solve([x(t=0)==x0, x.diff(t).subs(t=0)==0],
....[c1, c2], solution_dict=True)
sage: C
[{c2: lambda1*x0/(lambda1 - lambda2), c1: -lambda2*x0/(lambda1 - lambda2)}]
sage: x=x.subs(C[0])
sage: x.show()
sage: latex(x)
-\frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} x_0 e^{\left(\lambda_1 t\right)} + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} x_0 e^{\left(\lambda_2 t\right)}
```

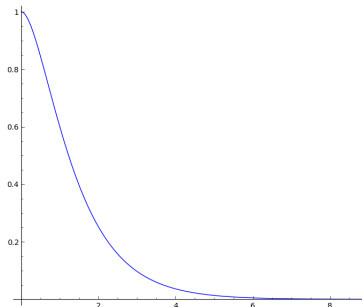
$$x(t) = x_0 \left\{ \frac{\lambda_1 e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2} - \frac{\lambda_2 e^{\lambda_1 t}}{\lambda_1 - \lambda_2} \right\} \quad (24)$$

# Vibraciones amortiguadas no forzadas ( $c > 0$ , $F = 0$ )

La masa podría haber pasado por la posición de equilibrio sólo en el pasado puesto que  $x(t) = 0$  cuando

$$t = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_2} < 0$$

```
sage: x=x.subs({lambda1:-1,lambda2:-2,x0:1})  
sage: x.plot((x,0,10))
```



# Vibraciones amortiguadas no forzadas ( $c > 0$ , $F = 0$ )

Masa-resorte sobreamortiguado

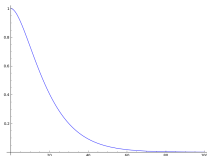


## Vibraciones amortiguadas no forzadas ( $c > 0, F = 0$ )

**Caso  $\Delta = 0$ .** En esta situación se dice que hay amortiguación crítica. Las raíces son iguales  $\lambda_1 = \lambda_2 = -\mu$ . Sabemos que

$$x_1(t) = c_1 e^{-\mu t} + c_2 t e^{-\mu t} = e^{-\mu t} \{c_1 + c_2 t\} \quad (25)$$

```
sage: c1,c2=var('c1,c2')
sage: mu=var('mu')
sage: t=var('t')
sage: x=e^(-mu*t)*(c1+c2*t)
sage: x0=var('x0')
sage: C=solve([x(t=0)==x0,x.diff(t).subs(t=0)==0],[c1,c2],solution_dict=True)
sage: C
[{c2: mu*x0, c1: x0}]
sage: x=x.subs(C[0]).subs({mu:.1,x0:1})
sage: x.plot((x,0,100))
```



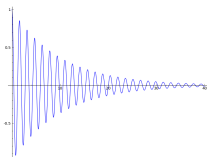
## Vibraciones amortiguadas no forzadas ( $c > 0, F = 0$ )

**Caso  $\Delta < 0$ .** Caso subamortiguado,  $\lambda_{1,2} = -\mu \pm \nu i$  con

$\nu = \sqrt{|\Delta|} = \sqrt{|\omega^2 - \mu^2|}$ . La solución general viene dada por

$$x(t) = e^{-\mu t} \{c_1 \cos \nu t + c_2 \sin \nu t\} \quad (26)$$

```
sage: c1,c2=var('c1,c2')
sage: mu=var('mu')
sage: nu=var('nu')
sage: x0=var('x0')
sage: x=e^(-mu*t)*(c1*cos(nu*t)+c2*sin(nu*t))
sage: t=var('t')
sage: C=solve([x(t=0)==x0,x.diff(t).subs(t=0)==0],[c1,c2],solution_dict=True)
sage: x=x.subs(C[0]).subs({mu:.1,nu:4,x0:1})
sage: x.plot((x,0,100))
```



# Vibraciones amortiguadas no forzadas ( $c > 0$ , $F = 0$ )

Masa-resorte subamortiguado

## Vibraciones amortiguadas no forzadas ( $c > 0$ , $F = 0$ )

Se suele escribir la ecuación (26) de otra forma. Expresemos el vector  $(c_1, c_2)$  en coordenadas polares.

$$c_1 = \rho \cos \alpha, \quad c_2 = \rho \sin \alpha.$$

Entonces

$$x(t) = e^{-\mu t} \{c_1 \cos \nu t + c_2 \sin \nu t\} = \boxed{\rho e^{-\mu t} \cos(\nu t - \alpha)}.$$

Movimiento cuasi-oscilatorio. En realidad ejecuta vibraciones, que se van amortiguando, de **frecuencia**

$$f = \frac{1}{\text{periodo}} = \frac{\nu}{2\pi}, \quad \nu = \sqrt{\omega^2 - \mu^2} = \sqrt{\left(\frac{k}{m}\right)^2 - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}.$$

En lugar de la frecuencia se suele considerar la **frecuencia angular** que se define como  $2\pi f$ . La ventaja de esta definición es que la frecuencia angular de la función de arriba es  $\nu$ .

## Vibraciones amortiguadas no forzadas ( $c > 0$ , $F = 0$ )

**Ejercicio:** En cualquiera de las situaciones descritas,  $x(t) \rightarrow 0$  y  $x'(t) \rightarrow 0$ , cuando  $t \rightarrow \infty$ . Es decir, la masa se va deteniendo.

## Vibraciones no amortiguadas y forzadas ( $c = 0$ , $F \neq 0$ )

Vamos a considerar una fuerza externa oscilatoria de frecuencia  $\omega_0$  y amplitud  $F_0$ . Tenemos que resolver

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = F_0 \cos(\omega_0 t). \quad (27)$$

Usaremos el método de coeficientes indeterminados y SAGE. Antes, recordar que si  $\omega = \omega_0$  estamos en resonancia. Tendremos que considerar ese caso por separado. Supongamos pues  $\omega \neq \omega_0$ .

## Vibraciones no amortiguadas y forzadas ( $c = 0$ , $F \neq 0$ )

```
t, omega, omega0, F0=var('t, omega, omega0, F0')
A, B=var('A, B')
x=A*cos(omega0*t)+B*sin(omega0*t)
eq=x.diff(t, 2)+omega^2*x-F0*cos(omega0*t)
eqL1=eq.coefficient(sin(omega0*t))
eqL2=eq.coefficient(cos(omega0*t))
matrix([[eqL1.coefficient(A), eqL1.coefficient(B)], [eqL2.coefficient(A), eqL2.coefficient(B)]])
SolAB=solve([eqL1, eqL2], [A, B], solution_dict=True)
x=x.subs(SolAB[0])
show(x)
print(latex(x))
```

Notar que el determinante del sistema de ecuaciones algebraicas es  $-(\omega - \omega_0)^2$ . Luego la matriz es no singular sólo en no resonancia. La solución general del problema es la solución particular que acabamos de obtener más una solución general del homogéneo que sabemos es una combinación lineal generica entre  $\cos \omega t$  y  $\sin \omega t$ .

$$x(t) = \frac{F_0 \cos(\omega_0 t)}{\omega^2 - \omega_0^2} + c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t). \quad (28)$$

## Vibraciones no amortiguadas y forzadas ( $c = 0$ , $F \neq 0$ )

Como ya hemos visto, considerando las coordenadas polares  $\rho$  y  $\alpha$  de  $c_1, c_2$ ) podemos reescribir la solución

$$x(t) = \frac{F_0 \cos(\omega_0 t)}{\omega^2 - \omega_0^2} + \rho \cos(\omega t - \alpha)$$

Vemos que el movimiento es la superposición de dos movimientos oscilatorios de frecuencias  $\omega$ , que se denomina la **frecuencia natural** del resorte, y  $\omega_0$  que se denomina **frecuencia impresa**.



# Vibraciones no amortiguadas y forzadas ( $c = 0$ , $F \neq 0$ )

Resolvamos el pvi

$$\begin{cases} x''(t) + \omega^2 x(t) = F_0 \cos(\omega_0 t), \\ x'(0) = x(0) = 0 \end{cases}$$

```
sage: t, omega, omega0, F0, rho, alpha = var('t, omega, omega0, F0, rho, alpha')
sage: x = F0 / (omega^2 - omega0^2) * cos(omega0*t) + rho * cos(omega*t - alpha)
sage: assume(-pi < alpha, alpha < 2*pi)
sage: solve([x(t=0) == 0, x.diff(t).subs(t=0) == 0], [rho, alpha])
[omega*rho*sin(alpha) == 0, rho*cos(alpha) + F0/(omega^2 - omega0^2) == 0]
sage: x0 = x(alpha=0)
sage: sol = solve([x0(t=0) == 0, x0.diff(t).subs(t=0) == 0], rho, solution_dict=True)
sage: x0 = x0.subs(sol[0])
sage: x0.factor().show()
```

$$x(t) = -\frac{F_0 \cos(\omega t)}{\omega^2 - \omega_0^2} + \frac{F_0 \cos(\omega_0 t)}{\omega^2 - \omega_0^2}$$

## Vibraciones no amortiguadas y forzadas ( $c = 0$ , $F \neq 0$ )

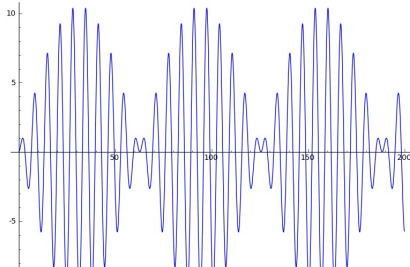
Ahora usemos la identidad  $\cos(a - b) - \cos(a + b) = 2 \sin a \sin b$ , con  $a = \frac{1}{2}(\omega + \omega_0)$  y  $b = \frac{1}{2}(\omega - \omega_0)$ . Deducimos

$$x(t) = \frac{2F_0}{\omega^2 - \omega_0^2} \sin(\omega - \omega_0)t \sin(\omega + \omega_0)t.$$

Esta expresión la podemos ver como una onda de frecuencia grande  $\omega + \omega_0$  modulada por una de frecuencia chica  $\omega - \omega_0$ .

```
sage: x1=x0.subs({F0:1,omega:1,omega0:.9})
```

```
sage: x1.plot(x,0,200)
```



## Vibraciones amortiguadas y forzadas ( $c > 0$ , $F \neq 0$ )

Vamos a considerar una fuerza externa oscilatoria de frecuencia  $\omega_0$  y amplitud  $F_0$ . Tenemos que resolver

$$x''(t) + 2\mu x'(t) + \omega^2 x(t) = F_0 \cos(\omega_0 t). \quad (29)$$

```
sage: t,mu,omega,omega0,F0=var('t,mu,omega,omega0,F0')
sage: A,B=var('A,B')
sage: x=A*cos(omega0*t)+B*sin(omega0*t)
sage: eq=x.diff(t,2)+2*mu*x.diff(t)+omega^2*x-F0*cos(omega0*t)
sage: eq=eq.simplify_full()
sage: show(eq)
sage: eq.coefficient(cos(omega0*t))
B*mu*omega0 + (omega^2 - omega0^2)*A - F0
sage: show(eq.coefficient(cos(omega0*t)))
sage: show(eq.coefficient(sin(omega0*t)))
sage: eqL1=eq.coefficient(sin(omega0*t))
sage: eqL2=eq.coefficient(cos(omega0*t))
sage: show([eqL1,eqL2])
CoefSis=matrix([[eqL1.coefficient(A),eqL1.coefficient(B)],[eqL2.coefficient(A),eqL2.coefficient(B)]])
sage: show(CoefSis.det())
sage: SolAB=solve([eqL1,eqL2],[A,B],solution_dict=True)
sage: show(SolAB)
sage: show(x.subs(SolAB[0]))
sage: x=x.subs(SolAB[0][0])
```

## Vibraciones amortiguadas y forzadas ( $c > 0, F \neq 0$ )

$$x(t) = \frac{2 F_0 \mu \omega_0 \sin(\omega_0 t)}{\omega^4 + \omega_0^4 + 2(2\mu^2 - \omega^2)\omega_0^2} + \frac{(F_0 \omega^2 - F_0 \omega_0^2) \cos(\omega_0 t)}{\omega^4 + \omega_0^4 + 2(2\mu^2 - \omega^2)\omega_0^2}$$

(30)

Es un movimiento oscilatorio de frecuencia angular  $\omega_0$ . Podemos escribir  $x(t) = \rho \cos(\omega_0 t - \alpha)$ , donde  $(\rho, \alpha)$  son las coordenadas polares de  $(A, B)$ . En particular  $\rho = \sqrt{A^2 + B^2}$  Recurrirnos nuevamente a SAGE

```
sage: latex(sqrt(A**2+B**2).subs(SolAB[0]).simplify_full())  
\frac{F_{0}}{\sqrt{\omega^{4} + \omega_{0}^{4} + 2 \,  
\left(2 \, \mu^{2} - \omega^{2}\right) \omega_{0}^{2}}}
```

$$\rho(\omega_0) = \frac{F_0}{\sqrt{\omega^4 + \omega_0^4 + 2(2\mu^2 - \omega^2)\omega_0^2}}$$