FACULTAD DE CS. EXACTAS, FÍSICO-QUÍMICAS Y NATURALES
DEPTO DE MATEMÁTICA.
SEGUNDO CUATRIMESTRE DE 2015
CÁLCULO VARIACIONES
PRÁCTICA 5: TEOREMAS DE EXISTENCIA

Ejercicio 1 Sea $F : [a, b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función tal que $F(\cdot, z)$ es medible para todo $z \in \mathbb{R}^n$ y que $F(x, \cdot)$ es continuamente diferenciable para casi todo $x \in [a, b]$. Además supongamos que existe $a : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ continua y $0 \leq b \in L^1([a, b], \mathbb{R})$ tal que

$$|F(x, z)| + |D_z F(x, z)| \leq a(|z|)b(x).$$

Demostrar que para $1 < p < \infty$ la integral de acción

$$I(u) = \int_a^b \frac{|u'(x)|^p}{p} + F(x, u(x))dx$$

satisface:

a. I es d.s.s.c.i. *Ayuda:* la intregral es suma de una funcional convexa y continua en la norma, y en el otro sumando se puede usar que $u_n \rightharpoonup u$ en $W^{1,p}((a, b), \mathbb{R}^n)$ implica $u_n \to u$ uniformemente cuando $1 < p$.

b. Demostrar que I es diferenciable Gâteaux y expresar la diferencial de I.

c. Supongamos que I tiene un punto crítico u sobre

$$\{u \in W^{1,p}((a, b), \mathbb{R}^n) | u(a) = \alpha, u(b) = \beta\},$$

con $1 < p$. Demostrar que u satisface las ecuaciones de Euler-Lagrange, que en este caso son

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}\left(|u(x)|^{p-2}u(x)\right) = D_z F(x, u(t)) \quad \text{a.e. } x \in (a, b) \\ u(a) = \alpha \text{ y } u(b) = \beta \end{cases} \tag{1}$$

Ejercicio 2 Supongamos que $L : (a, b) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ satisface

a. $L(x, u, p)$, $L_p(x, u, p)$ son continuas.

b. $L(x, u, p)$ convexa respecto a p.

c. $$L(x, u, p) \geq \theta(p) + a(x),$$

donde $a \in L^1([a, b], \mathbb{R})$ y θ es superlineal.

Demostrar que existe un mínimo de la integral de acción sobre el conjunto $\{u \in W^{1,1}((a, b), \mathbb{R}^n) | u(a) = \alpha, u(b) = \beta\}$

Ejercicio 3 Encontrar condiciones suficientes sobre $V : (a,b) \to \mathbb{R}$ para que

$$I(u) = \int_a^b \frac{|p|^2}{2} + V(x)dx$$

satisfaga el Teorema de existencia de Tonelli de modo que el problema

$$\text{mín}\left\{ I(u) \middle| u \in W^{1,1}((a,b),\mathbb{R}), u(a) = \alpha, u(b) = \beta \right\}$$

tenga solución. Encontrar condiciones sobre V que garanticen que I es diferenciable Gâteaux y hallar las ecuaciones de Euler-Lagrange que satisface un mínimo.

Ejercicio 4 Demostrar la siguiente afirmación. $L : (a,b) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es cuasiconvexa si y solo si para $(x_0, u_0) \in [a,b] \times \mathbb{R}^n$ fijos la funcional

$$\int_a^b L(t_0, u_0, \phi'(x))dx,$$

alcanza un mínimo en u sobre el conjunto

$$\left\{ \phi \in W^{1,\infty}((a,b),\mathbb{R}^n) | \phi(a) = \alpha, \phi(b) = \beta \right\},$$

si y solo si u es la recta que une α con β. Una de las implicaciones fue demostrada durante las clases teóricas.

Ejercicio 5 Generalizar, una vez más el teorema de existencia de Tonelli, de la siguiente forma. Supongamos que $L : (a,b) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ satisface las hipótesis del ejercicio 2, excepto el item c) que es modificado como sigue

c')
$$L(x,u,p) \geq \theta(p) + b|u| + a(x),$$

donde $a \in L^1([a,b],\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}$ y θ es superlineal.

Demostrar que bajo la suposiciones anteriores, aún existe un mínimo de la integral de acción sobre el conjunto $\{u \in W^{1,1}((a,b),\mathbb{R}^n) | u(a) = \alpha, u(b) = \beta\}$

Ejercicio 6 Sea $1 < p < \infty$ y $\alpha : [0,1] \to (0,+\infty)$ una función en $L^{infty}([0,1])$ tal que existe $s < 1/(1-p)$ tal que $\alpha^s \in L^1([0,1])$. Demostrar que el problema

$$\text{mín}\left\{ \int_0^1 \alpha(x)|u'|^p dx \middle| u \in W^{1,p}([0,1],\mathbb{R}), u(0) = a, u(1) = b \right\}.$$

tiene una única solución. Demostrar que se satisfacen las ecuaciones de Euler-Lagrange, resolverlas para expresar las soluciones del problema como

$$u(x) = a + (b-a)\left(\int_0^1 \alpha^{\frac{1}{1-p}}(t)dt\right)^{-1}\left(\int_0^x \alpha^{\frac{1}{1-p}}(t)dt\right)$$

Ejercicio 7 Demostrar que el problema

$$\text{mín}\left\{\int_0^1 (1-|u'(x)|^2)^2 + u dx \middle| u \in W^{1,1}([0,1],\mathbb{R}), u(0)=a, u(1)=b\right\}.$$

tiene solución única.