



---

FACULTAD DE CS. EXACTAS, FÍSICO-QUÍMICAS Y NATURALES  
DEPTO DE MATEMÁTICA.  
SEGUNDO CUATRIMESTRE DE 2015  
CÁLCULO VARIACIONES  
PRÁCTICA 3: ESPACIOS DE SOBOLEV.

---

**Ejercicio 1** Sea  $I = (-1, 1)$  y sea  $u(x) = \frac{1}{2}(|x| + x)$ . Verificar que  $u \in W^{1,p}(I)$  para todo  $1 \leq p \leq \infty$  con  $u' = H$  siendo

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si } -1 < x < 0 \end{cases}$$

Justificar que  $H \notin W^{1,p}$  para  $1 \leq p \leq \infty$ .

**Ejercicio 2** Considerar la función  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$u(x) = \frac{1}{(1+x^2)^{\alpha/2} \ln(2+x^2)}.$$

Demostrar que  $u \in W^{1,p}(\mathbb{R})$  si  $p \geq 1/\alpha$  y que  $u \notin L^p(\mathbb{R})$  si  $1 \leq p < 1/\alpha$ .

**Ejercicio 3 (Espacios de Lebesgue y Sobolev de funciones con valores vectoriales)**  
Sea  $I$  un intervalo abierto de  $\mathbb{R}$ .

a. Denotamos los espacios de Lebesgue de funciones con valores en  $\mathbb{R}^n$  por

$$L^p(I, \mathbb{R}^n) := \{u : I \rightarrow \mathbb{R}^n \mid |u(t)| \in L^p(I)\},$$

donde  $L^p(I)$  denota el espacio de Lebesgue escalar usual y  $|\cdot| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$  la norma euclídea sobre  $\mathbb{R}^n$ . Demostrar que  $L^p(I, \mathbb{R}^n)$  es un espacio de Banach con norma

$$\|u\|_{L^p(I, \mathbb{R}^n)} = \| |u| \|_{L^p(I)}.$$

- b. Si  $u : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  pongamos  $u = (u_1, \dots, u_n)$  con  $u_i : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Demostrar que  $u \in L^p(I, \mathbb{R}^n) \Leftrightarrow u_i \in L^p(I)$ ,  $i = 1, \dots, n$ .
- c.  $L^p(I, \mathbb{R}^n) \cong L^p(I) \times \dots \times L^p(I)$ , donde  $\cong$  significa que existe un isomorfismo homeomorfo entre los espacios.
- d.  $L^p(I, \mathbb{R}^n)$  es reflexivo cuando  $1 < p < \infty$ .
- e. Denotamos por  $C_c^1(I, \mathbb{R}^n)$  al conjunto (espacio vectorial) de todas las funciones test  $\varphi$  continuamente diferenciables y de soporte compacto en  $I$ . Para  $1 \leq p \leq \infty$ , vamos a definir el espacio de Sobolev de funciones con valores en  $\mathbb{R}^n$ , denotado por  $W^{1,p}(I, \mathbb{R}^n)$  por analogía con el caso escalar, es decir

$$W^{1,p}(I, \mathbb{R}^n) := \left\{ u \in L^p(I, \mathbb{R}^n) \mid \exists v \in L^p(I, \mathbb{R}^n) \forall \varphi \in C_c^1(I, \mathbb{R}^n) : \int_I u \cdot \varphi' dt = - \int_I v \cdot \varphi dt \right\},$$

donde  $a \cdot b$  denota el producto escalar entre vectores  $a, b \in \mathbb{R}^n$ . El espacio  $W^{1,p}(I, \mathbb{R}^n)$  es Banach. Justificar esta afirmación.

**Ejercicio 4 (Espacios de Sobolev de Funciones Periódicas)** Sea  $T > 0$  y  $C_T^1$  el espacio de las funciones continuas y con derivada continua sobre  $[0, T]$  que además son  $T$ -periódicas, esto es  $\varphi(0) = \varphi(T) = 0$ . Definimos el espacio de Sobolev de funciones  $T$  periódicas como

$$W_T^{1,p}(I) := \left\{ u \in L^p(I) \mid \exists v \in L^p(I) \forall \varphi \in C_T^1(I) : \int_I u \cdot \varphi' dt = - \int_I v \cdot \varphi dt \right\},$$

Demostrar que

$$W_T^{1,p}(I) = \left\{ u \in L^p(I) \mid u \text{ es absolutamente continua, } u' \in L^p(I), u(0) = u(T) \right\}.$$

Generalizar a funciones con valores vectoriales.

**Ejercicio 5 (Desigualdad de Poincaré-Wirtinger)** Sea  $I$  el intervalo acotado  $(a, b)$ . Para  $u : I \rightarrow \mathbb{R}$  definimos el promedio

$$\bar{u} := \frac{1}{b-a} \int_a^b u(t) dt.$$

Demostrar la desigualdad de Wirtinger, esto es que existe una constante  $C > 0$  tal que para toda  $u \in W^{1,p}(I)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$  se satisface que

$$\|u - \bar{u}\|_{L^\infty} \leq C \|u'\|_{L^p}.$$

Generalizar a funciones con valores vectoriales. *Ayuda:* Notar que por el teorema del valor medio para integrales debe existir  $x_0 \in I$  tal que  $\bar{u} = u(x_0)$ .

**Ejercicio 6** Sea  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión acotada de  $W^{1,p}(I)$  con  $1 < p \leq \infty$ .

- Utilizar el Teorema de Arzela-Ascoli para demostrar que existe una subsucesión  $\{u_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  y  $u \in W^{1,p}(I)$  tal que  $\|u_{n_k} - u\|_{L^\infty} \rightarrow 0$ .
- Si  $1 < p < \infty$  podemos asumir además que  $u'_{n_k} \rightharpoonup u'$  debilmente en  $L^p(I)$
- Si, en cambio,  $p = \infty$  podemos asumir que  $u'_{n_k} \xrightarrow{*} u'$  en  $\sigma(L^\infty, L^1)$ .

**Ejercicio 7** Demostrar que si  $u_n \rightharpoonup u$  debilmente en  $W^{1,p}(I)$ , entonces  $u_n \rightarrow u$  uniformemente.

**Ejercicio 8** Sea  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$  con  $\varphi \not\equiv 0$ . Definimos  $u_n(x) = \varphi(x+n)$ . Supongamos  $1 \leq p \leq \infty$ . Demostrar que

- a.  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es acotada en  $W^{1,p}(\mathbb{R})$ .
- b. No existe subsucesión que converge en la topología fuerte en  $L^q(\mathbb{R})$  para ningun  $1 \leq q \leq \infty$ .
- c.  $u'_n \rightharpoonup 0$  debilmente en  $W^{1,p}(\mathbb{R})$ .

**Ejercicio 9** Sea  $1 \leq p < \infty$  y  $u \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ . Escribamos

$$D_h u(x) = \frac{u(x+h) - u(x)}{h}, \quad \text{para } h \neq 0, x \in \mathbb{R}.$$

Usar el hecho que  $C_c^1(\mathbb{R})$  es denso en  $W^{1,p}(\mathbb{R})$  para demostrar que  $D_h u \rightarrow u'$  en  $L^p(\mathbb{R})$  cuando  $h \rightarrow 0$ .