FACULTAD DE CS. EXACTAS Y NATURALES
DEPTO DE MATEMÁTICA.
SEGUNDO CUATRIMESTRE DE 2015
CÁLCULO VARIACIONES
PRÁCTICA 4: FUNCIONALES SOBRE ESPACIOS DE BANACH .

Ejercicio 1 Sea X un espacio de Banach e $I : X \to (-\infty, \infty]$ una función convexa y acotada por superiormente en un entorno del punto $a \in X$. Entonces I es continua en a.

Ejercicio 2 Sea X un espacio de Banach. Una funcional $I : X \to (-\infty, \infty]$ se llama *estrictamente convexa* si

$$I(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda I(x) + (1-\lambda)I(y), \quad \forall \lambda \in (0,1) \forall x, y \in X.$$

Demostrar que una función extrictamente convexa alcanza a lo sumo un punto mínimo.

Ejercicio 3 Sea X un espacio de Banach e $I : X \to (-\infty, \infty]$ una función convexa y semicontinua inferiormente en la topología fuerte. Entonces I es coercitiva ($I(u) \to \infty$ cuando $\|u\| \to \infty$) si y sólo si existen $\alpha > 0$ y $\beta \geq 0$ tales que

$$I(u) \geq \alpha \|u\| - \beta.$$

Ejercicio 4 Sea X un espacio de topológico.

a. Si $I_1, I_2 : X \to (-\infty, \infty]$ son convexas, o s.c.i., o s.s.c.i. y $\alpha \geq 0$ entonces $I_1 + I_2$ y αI_1 son convexas, o s.c.i., o s.s.c.i. respectivamente.

b. Si $\{I_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ es un familía, posiblemente infinita, de funciones convexas, o s.c.i, o s.s.c.i. entonces
$$\sup_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda,$$
es convexa, o s.c.i., o s.s.c.i. respectivamente.

Ejercicio 5 Sea X un espacio topológico. Una función $I : X \to (-\infty, \infty]$ es s.c.i si y sólo si $\{u \in X | I(u) \leq \alpha\}$ es cerrado para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 6 Si $I : X \to (-\infty, \infty]$ es convexa, entonces $\{u \in X | I(u) \leq \alpha\}$ es convexo para todo $\alpha \in \mathbb{R}$. Demostrar con un ejemplo que el recíproco no es en general cierto.

Ejercicio 7 Si $I : X \to (-\infty, \infty]$ es convexa, o si es s.c.i., entonces el conjunto donde I alcanza un mínimo es convexo, respectivamente cerrado, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 8 Si $I : X \to (-\infty, \infty]$ es convexa, entonces un mínimo local es mínimo global.

Ejercicio 9 Sean X, Y espacios de Banach y $F : X \to Y$ una función. Se dice que F es *diferenciable según Fréchet* en $u \in X$ si existe un operador lineal acotado $dF(u) : X \to Y$ tal que

$$\lim_{\|v\|_X \to 0} \frac{\|F(u+v) - F(u) - dF(u)(v)\|_Y}{\|v\|_X} = 0.$$

Demostrar que si $F : X \to \mathbb{R}$ es diferenciable Fréchet entonces es diferenciable Gâteaux. Demostrar, con un ejemplo de una $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, que el recíproco no es cierto.