

Modelos de EDO de sistemas mecánicos

Índice general

1 Modelos de sistemas mecánicos	3
1.1 Principios generales de la mecánica	3
1.1.1 Sistemas de partículas	3
1.1.2 Ecuaciones de movimiento I	4
1.1.3 Fuerzas externas	4
1.1.4 Ecuaciones de movimiento II	4
1.1.5 Ley de balance de momentos	5
1.1.6 Ley de balance del momento angular	5
1.1.7 Ley de conservación de la energía	6
1.2 Fuerzas activas y reactivas	6
1.2.1 Coordenadas Lagrangianas	7
1.3 Sistemas de ecuaciones no lineales	8
1.3.1 Ecuaciones autónomas	8
1.3.2 Retrato de fases	9
1.4 El péndulo simple	9
1.4.1 Deducción de la ecuación de movimiento	10
1.4.2 Deducción alternativa.	12
1.4.3 Conservación de la energía	12
1.4.4 Experimentación numérica	12
1.4.5 Análisis cualitativo	14
1.4.6 El periodo de un péndulo	18
1.4.7 Soluciones exactas en términos de funciones elípticas de Jacobi	20
1.5 Fricción	22
1.5.1 Movimiento en plano inclinado con fricción	24
1.6 Soluciones débiles de Carathéodory	25
1.7 Soluciones débiles de la ecuación del plano inclinado con amortiguación seca	27
1.7.1 Experimentos numéricos	27
1.8 Soluciones débiles de Filippov	30
1.9 Método numérico para soluciones de Filippov	31
1.10 Péndulo con amortiguación seca	34
1.11 Elasticidad	37
1.12 Sistema de resorte y guía [Nicola Bellomo, 2000, Capítulo 1, Ejemplo 1.2]	38
1.12.1 Deducción de ecuaciones	38
1.12.2 Conservación de energía	39
1.13 Movimiento en un campo gravitatorio	46
1.14 Péndulo doble	50
1.15 Restricciones que cambian con el tiempo: péndulo rotante [Betounes, 2009, Ejemplo 1.6, p. 9]	56
1.16 El péndulo de Foucault	65
2 Movimiento de un cuerpo rígido	71
2.1 Coordenadas para movimientos rígidos	71
2.2 Velocidad angular	75
2.3 Ecuaciones diferenciales de un cuerpo rígido	77
2.3.1 Conservación momento lineal	77
2.3.2 Conservación momento angular	78
2.4 Energía cinética y momento de inercia	80
2.5 Movimiento de un cuerpo aislado	85
2.5.1 Una simulación numérica	85
2.5.2 Puntos estacionarios.	87
2.5.3 Conservación de la energía cinética rotacional	89
2.5.4 Conservación del momento angular total	91
2.5.5 Solución geométrica	91
2.6 Cuerpo rígido con punto fijo y campo de fuerzas uniforme	94

Apéndices	95
2.A Animación del movimiento de un cuerpo rígido con Numpy-Scipy-Matplotlib	95

1 Modelos de sistemas mecánicos

1.1 Principios generales de la mecánica

Seguimos la exposición de [Nicola Bellomo, 2000, Capítulo 4]. A continuación enumeramos las suposiciones básicas sobre las que fundaremos el proceso de modelización matemática de los fenómenos mecánicos.

sign(8)

- Los objetos de la naturaleza tienen la capacidad de modificar su estado dinámico (posición y velocidad) mutuamente por la acción de fuerzas.
- El estado dinámico de un objeto **aislado** no es modificado por nada. Esto es la definición de aislado.
- **Principio de Inercia.** Hay sistemas de coordenadas cartesianas ortogonales y una escala de tiempos tales que un objeto aislado o está en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme. Estos sistemas se llaman **Inerciales**. Observar que de la definición se infiere que un sistema cartesiano ortogonal que se mueve con movimiento rectilíneo uniforme con respecto a un sistema inercial es en sí mismo inercial.
- Una **fuerza** tiene la capacidad de acelerar objetos. Es una magnitud vectorial.
- **Principio de acción-reacción** Dado dos objetos A y B en un sistema inercial la fuerza que genera A sobre B es opuesta a la que genera B sobre A . No importa cual es la naturaleza de esa fuerza. Ambas van en la dirección de la recta por A y B .
- En un sistema inercial la aceleración que origina una fuerza sobre un objeto es proporcional a la fuerza. La constante de proporcionalidad es la **masa inercial**.
- En un sistema inercial vale **La segunda ley de Newton**

$$\vec{f} = m\vec{a}.$$

donde la fuerza \vec{f} que actúa sobre el objeto es **la suma (vectorial) de todas las fuerzas** que originan otros cuerpos.

1.1.1 Sistemas de partículas

- **Punto masa:** En algunas situaciones la dinámica de un cuerpo se puede estudiar suponiendo que el objeto es un punto, en ese caso se habla de punto masa y se asume que este punto está dotado de una masa igual a la del objeto. Los términos **partícula**, **punto material** son sinónimos de punto masa.
- Estamos interesados en **sistemas de puntos masa** (no confundir con los sistemas de coordenadas).
- Vamos a suponer un sistema de partículas de masas m_1, \dots, m_N con posiciones en un sistema inercial $\vec{X}_1, \dots, \vec{X}_N$ y que está aislado, es decir el resto del universo no influye sobre este sistema.
- Llamemos $F_{ij}^{(i)}$ a la fuerza que ejerce el cuerpo j sobre el i . El superíndice (i) indica que esta fuerza es una **fuerza interna** del sistema, generada por los objetos dentro del sistema, es una fuerza para la cual vale el principio de acción-reacción $F_{ij}^{(i)} = -F_{ji}^{(i)}$. También a estas fuerzas se las llama **inerciales**.

- **Principio de determinación de Laplace:** Las posiciones y velocidades $\vec{V}_i = \dot{\vec{X}}_i$ de un sistema de puntos masa determinan todas las fuerzas que actúan sobre ellos

$$F_{ij}^{(i)} = F_{ij}^{(i)}(\vec{X}_1, \dots, \vec{X}_N, \vec{V}_1, \dots, \vec{V}_N, t).$$

A posteriori el Teorema de Existencia y Unicidad de soluciones de EDO implica que todo el movimiento pasado y futuro del sistema de masas está determinado por las posiciones y velocidades en un instante dado.

1.1.2 Ecuaciones de movimiento I

- **Ecuaciones de movimiento de Newton:** tomando en cuenta todos los principios previos para un sistema aislado:

$$m_i \ddot{\vec{X}}_i(t) = \sum_{j \neq i} F_{ij}^{(i)}(\vec{X}_1(t), \dots, \vec{X}_N(t), \dot{\vec{X}}_1(t), \dots, \dot{\vec{X}}_N(t), t), \quad i = 1, \dots, N.$$

1.1.3 Fuerzas externas

- Muchas veces no es práctico agregar todos los objetos a mi sistema de estudio. Esto ocurre en especial cuando hay objetos que son influidos muy poco por la interacción con los del sistema. Por ejemplo esto puede ocurrir cuando hay un objeto de una masa mucho más grande que la del resto. Su estado dinámico no es sustancialmente cambiado por la acción de las partículas en el sistema y respecto a un sistema inercial estará prácticamente en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme. No es práctico agregarlo al sistema, su estado es conocido y de agregarlo lo único que se logra es sumar ecuaciones e incógnitas a mi modelo matemático y hacerlo más complejo. De modo que se adopta el criterio de suponer que este cuerpo genera sobre cada partícula una fuerza

$$F_i^{(e)} = F_i^{(e)}(\vec{X}_i, \vec{V}_i, t).$$

El supraíndice (e) viene de que a la fuerza $F_i^{(e)}$ se la llama **externa**.

- El hecho que supongamos que $F_i^{(e)}$ no es función del estado de la j -ésima partícula cuando $j \neq i$ es consecuencia de la suposición de que el objeto/s que generan la fuerza externa no son influidos por el sistema de partículas.
- Aunque desde un punto de vista formal el principio de acción y reacción sigue siendo cierto aún para fuerzas externas, no tiene sentido aplicarlo porque estamos desestimando la reacción que produzca en el objeto/s exterior las fuerzas asociadas a las masas dentro de nuestro sistema.

1.1.4 Ecuaciones de movimiento II

- **Ecuaciones de movimiento de Newton con fuerzas externas:** Para un sistema no aislado:

$$m_i \ddot{\vec{X}}_i(t) = \sum_{j \neq i} F_{ij}^{(i)}(\vec{X}_1(t), \dots, \vec{X}_N(t), \dot{\vec{X}}_1(t), \dots, \dot{\vec{X}}_N(t), t) + F_i^{(e)}(\vec{X}_i, \dot{\vec{X}}_i, t), \quad i = 1, \dots, N. \quad (1.1)$$

1.1.5 Ley de balance de momentos

Definimos el **centro de masas** y el **momento total**

$$\vec{c} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{X}_i, \quad \vec{Q} = M \frac{d}{dt} \vec{c} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{X}'_i, \quad M = \sum_{i=1}^N m_i. \quad (1.2)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \vec{Q}' &= \sum_{i=1}^N m_i \vec{X}''_i \\ &= \sum_{i=1}^N \left\{ \sum_{j \neq i} F_{ij}^{(i)} + F_i^{(e)} \right\} \quad (\text{Ec. Mov. II}) \\ &= \sum_{i=1}^N F_i^{(e)} \quad (F_{ij}^{(i)} = -F_{ji}^{(i)}) \end{aligned}$$

Ley de balance de momentos:

$$\vec{Q}' = \sum_{i=1}^N F_i^{(e)} =: F^{(e)}. \quad (1.3)$$

1.1.6 Ley de balance del momento angular

Dado un punto (**fijo o en movimiento**) \vec{X}_O en el espacio, definimos el **momento angular** sobre \vec{X}_O por

$$\vec{K}_O = \sum_{i=1}^N m_i (\vec{X}_i - \vec{X}_O) \times \vec{X}'_i. \quad (1.4)$$

En la cadena de igualdades que siguen derivamos la expresión anterior, usamos la Ley de Movimiento, las relaciones $\vec{X}'_i \times \vec{X}'_i = 0$, $F_{ij}^{(i)} = -F_{ji}^{(i)}$, $F_{ij}^{(i)} \parallel (\vec{X}_i - \vec{X}_j)$ y por último llamamos $\vec{V}_O = \vec{X}'_O$.

$$\begin{aligned} \vec{K}'_O &= \sum_{i=1}^N (\vec{X}_i - \vec{X}_O) \times m_i \vec{X}''_i + m_i (\vec{X}'_i - \vec{X}'_O) \times \vec{X}'_i \\ &= \sum_{i=1}^N \left\{ \sum_{j \neq i} [(\vec{X}_i - \vec{X}_O) \times F_{ji}^{(i)}] + (\vec{X}_i - \vec{X}_O) \times F_i^{(e)} - m_i \vec{X}'_O \times \vec{X}'_i \right\} \\ &= \sum_{i=1}^N (\vec{X}_i - \vec{X}_O) \times F_i^{(e)} - \vec{V}_O \times \vec{Q} \end{aligned}$$

Si \vec{X}_O está fijo, o coincide con el centro de masas ($\vec{V}_O = M^{-1} \vec{Q}$) entonces $\vec{V}_O \times \vec{Q} = 0$.

Ley balance momento angular : Si \vec{X}_O está fijo, o coincide con el centro de masas

$$\vec{K}'_O = \sum_{i=1}^N (\vec{X}_i - \vec{X}_O) \times F_i^{(e)}. \quad (1.5)$$

1.1.7 Ley de conservación de la energía

Escribamos las ecuaciones de Newton (1.1) de manera más sintética

$$m_i \vec{X}_i''(t) = \vec{F}_i(\vec{X}_1, \dots, \vec{X}_N, \vec{V}_1, \dots, \vec{V}_N, t), \quad i = 1, \dots, N$$

donde \vec{F}_i denota la **fuerza total** que actúa sobre la masa i -ésima

$$\vec{F}_i = \sum_{j \neq i} F_{ij}^{(i)}(\vec{X}_1, \dots, \vec{X}_N, \vec{V}_1, \dots, \vec{V}_N, t) + F^{(e)}(\vec{X}_i, \vec{V}_i, t).$$

Definición 1.1.1 (Sistemas Conservativos) Diremos que el sistema mecánico es *conservativo* si existe una función de las posiciones $U(\vec{X}_1, \dots, \vec{X}_n)$ tal que

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \vec{X}_i' = -\frac{d}{dt} U(\vec{X}_1(t), \dots, \vec{X}_n(t)), \quad (1.6)$$

para cualquier solución del sistema.

A la función U la llamamos **potencial**. No toda fuerza tiene un potencial. Usando la relación $\frac{d}{dt} \|\vec{X}_i'(t)\|^2 = 2\vec{X}_i'(t) \cdot \vec{X}_i''(t)$ vemos que cuando hay un potencial

$$\frac{d}{dt} \left\{ \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \|\vec{X}_i'(t)\|^2 + U(\vec{X}_1(t), \dots, \vec{X}_N(t)) \right\} = 0.$$

Esta igualdad implica que existe una constante E que satisface

$$E = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \|\vec{X}_i'(t)\|^2 + U(\vec{X}_1(t), \dots, \vec{X}_N(t)). \quad (1.7)$$

Denominaremos esta igualdad **Principio de Conservación de la Energía**. La constante de movimiento E se llama **Energía Total**, el término $\sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \|\vec{V}_i\|^2$ es la **Energía Cinética** y el término $U(\vec{X}_1, \dots, \vec{X}_N)$ la **Energía Potencial**.

1.2 Fuerzas activas y reactivas

A la vez de haber introducido las fuerzas internas o inerciales y externas clasificaremos a las fuerzas en **activas y reactivas**.

Hay dispositivos que restringen los movimientos (por ejemplo una vía o guía). La restricción se consigue porque el dispositivo ejerce una fuerza **necesaria para satisfacer la restricción**. Estas fuerzas se denominan **reactivas**. Las fuerzas que no provienen de restricciones se llaman **activas**.

Las restricciones se clasifican en

- **Posicionales** Se imponen restricciones sólo a la posición de los objetos, tienen el aspecto

$$g_k(\vec{X}_1, \dots, \vec{X}_N, t) = 0, \quad k = 1, \dots, m.$$

En el caso de que las funciones g_k sean independientes de t llamaremos a estas restricciones **fijas**, de lo contrario serán **móviles**.

- **De movimiento** Hay restricciones sobre las velocidades.

$$g_k(\vec{X}_1, \dots, \vec{X}_N, \vec{V}_1, \dots, \vec{V}_N, t) = 0, \quad k = 1, \dots, m.$$

Hay todavía cierta ambigüedad de la manera que hemos descrito las fuerzas originadas por restricciones. Por ejemplo, supongamos una partícula de masa m sometida a una fuerza \vec{F} y confinada a moverse en una superficie de \mathbb{R}^3 dada por la restricción posicional $g(\vec{X}) = g(x, y, z) = 0$. Si denotamos \vec{R} la fuerza que mantiene a la partícula sobre la restricción, tendremos el sistema de ecuaciones

$$m\vec{X}''(t) = \vec{F} + \vec{R}. \quad (1.8)$$

Tenemos entonces dos ecuaciones, que en realidad forman un sistema de cuatro ecuaciones diferencial-algebraicas

$$\begin{cases} mx''(t) = f_1 + r_1, \\ my''(t) = f_2 + r_2, \\ mz''(t) = f_3 + r_3, \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases},$$

donde $\vec{F} = (f_1, f_2, f_3)$ y $\vec{R} = (r_1, r_2, r_3)$. Suponemos que la fuerza \vec{F} es una función conocida de las posiciones y velocidades de la partícula. La fuerza de la restricción \vec{R} , hay que tratarla como una incógnita más del problema. Tenemos así 6 incógnitas x, y, z, r_1, r_2, r_3 y tan sólo 4 ecuaciones. Necesitamos introducir alguna otra suposición adicional a los efectos de tener un problema bien planteado.

Podemos ser más precisos en cuanto a la fuerza generada por la restricción. Lo único que hemos establecido para ella es el principio de que es una fuerza que mantiene a la partícula moviéndose bajo la restricción. Ocurre que hay muchas fuerzas que logran este objetivo, pues dada una de tales fuerzas, digamos \vec{R}_1 sumando cualquier campo vectorial \vec{T} tangente a la superficie determinada por la restricción originamos otra fuerza $\vec{R}_2 = \vec{R}_1 + \vec{T}$ que mantiene a la partícula moviéndose en la restricción. La nueva fuerza ocasiona un cambio de la aceleración tangencial a la superficie, pero no actúa en la dirección necesaria para alejar la partícula de, o mantenerla en, la restricción. Veremos más adelante que estas fuerzas tangentes son necesarias para dar cuenta del efecto de la **fricción**. Por este motivo haremos la siguiente suposición sobre las fuerzas reactivas en el caso sin fricción. **Para una partícula moviéndose sin fricción las fuerzas de restricción actúan en la dirección normal a la restricción.** Hecha esta suposición, tenemos

$$\vec{R} = \Phi \vec{n}, \quad (1.9)$$

donde $\Phi \in \mathbb{R}$ es desconocido y el vector \vec{n} es normal a la restricción y por tanto una función conocida de la posición. Quedan así cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas: x, y, z y Φ .

1.2.1 Coordenadas Lagrangianas

Supuesta una restricción posicional

$$g_k(\vec{X}_1, \dots, \vec{X}_N) = 0, \quad k = 1, \dots, m.$$

Tenemos m ecuaciones y $3N$ incógnitas relacionadas por estas ecuaciones. Para que el sistema conserve algún grado de libertad debemos tener $m < 3N$, de lo contrario las restricciones por sí solas determinarían las variables. Por el Teorema de la Función Implícita, asumiendo ∇g_k , $k = 1, \dots, m$ linealmente independientes, existen m cantidades que son función de las $3N - m$ restantes. El movimiento del sistema tiene $3N - m$ **grados de libertad**.

Es frecuente que las coordenadas cartesianas de los vectores \vec{X}_i no sean apropiadas para describir el movimiento de un sistema restringido. En ese caso se consideran otras variables q_1, \dots, q_l , con $l = 3N - m$. Estas variables se llaman **Lagrangianas**. Cuando las posiciones satisfacen la restricción podemos expresarlas en función de las variables Lagrangianas:

$$\begin{aligned}\vec{X}_1 &= \vec{X}_1(q_1, \dots, q_l) \\ &\vdots \\ \vec{X}_N &= \vec{X}_N(q_1, \dots, q_l)\end{aligned}$$

A la variable combinada $\vec{U} = (\vec{X}_1, \dots, \vec{X}_N, \vec{V}_1, \dots, \vec{V}_N)$ la denominaremos **variable de estado**. Según el Principio de Determinación de Lagrange, conocida la variable de estado en algún momento se conoce el estado pasado y futuro del sistema en cualquier momento.

1.3 Sistemas de ecuaciones no lineales

Esta materia trata de modelos matemáticos donde intervienen sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales. Poco hemos estudiado sobre estos sistemas. Sólo hemos demostrado el Teorema de Existencia y Unicidad. Sin embargo a partir de este teorema se puede inferir mucho sobre el comportamiento de las soluciones sin encontrar expresiones explícitas para ellas.

En esta sección introduciremos algunos conceptos muy básicos sobre sistemas de ecuaciones no lineales, posteriormente usaremos los conceptos introducidos aquí para el estudio de modelos matemáticos.

1.3.1 Ecuaciones autónomas

Una ecuación

$$x'(t) = f(x(t)), \quad (1.10)$$

donde Ω es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, se denomina *ecuación autónoma*. Vale decir, una ecuación autónoma es una ecuación donde f es independiente de t . De ahora en más asumiremos que f es de clase C^1 en Ω , de modo que para cada $(t_0, x^0) \in \mathbb{R} \times \Omega$ existe una solución $\varphi(t)$ que pasa por (t_0, x^0) . Cuando invoquemos esta solución supondremos que es una solución **máxima**, esto es que el dominio de la solución, que es un intervalo al que llamaremos $I_\varphi = (a_\varphi, b_\varphi)$, es el mayor intervalo posible para la solución. Que queda determinado tal intervalo es una cuestión que debería justificarse, pero no abordaremos este problema aquí.

Tampoco abordaremos la justificación del siguiente resultado.

Teorema 1.3.1 (Soluciones máximas) Sea ϕ una solución de (1.10) y (a_φ, b_φ) el intervalo máximo donde está definida φ . Sea $t_0 \in (a_\varphi, b_\varphi)$ y supongamos que existe un conjunto compacto $K \subset \Omega$ tal que $\varphi([t_0, b_\varphi)) \subset K$. Entonces $b_\varphi = \infty$. De manera análoga, si $\varphi((a_\varphi, t_0]) \subset K$ entonces $a_\varphi = -\infty$.

No demostraremos tampoco el resultado anterior.

Las soluciones a ecuaciones autónomas tienen la siguiente propiedad.

Teorema 1.3.2 (Invariancia por traslaciones) Si φ es solución de (1.10) entonces $\psi(t) = \varphi(t + c)$ es también solución e $I_\psi = I_\varphi - c$.

Demostración. Por la regla de la cadena y (1.10)

$$\psi'(t) = \varphi'(t + c) = f(\varphi'(t + c)) = f(\psi'(t)).$$

Vemos así que toda trasladada, sobre el eje t , de una solución es también solución. El teorema anterior tiene la siguiente consecuencia. □

Teorema 1.3.3 Si φ y ψ son soluciones de (1.10) y $\varphi(t_0) = \psi(t_1)$ entonces existe un $c \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi(t) = \psi(t + c)$.

Demostración. Por el Teorema 1.3.2, la función $\varphi_1(t) := \psi(t + t_1 - t_0)$ es solución y, por hipótesis, $\varphi_1(t_0) = \varphi(t_0)$, así, por unicidad, $\varphi(t) = \varphi_1(t)$ para todo t . □

Corolario 1.3.1 Si φ es solución de (1.10) y $\varphi(t_0) = \varphi(t_1)$ para ciertos $t_0 \neq t_1$ entonces φ es periódica.

Demostración. Por el teorema anterior aplicado a $\psi = \varphi$ obtenemos $\varphi(t) = \varphi(t + c)$, luego φ es periódica. □

Definición 1.3.2 (Punto de equilibrio) Supongamos que $x^0 \in \Omega$ satisface que $f(x^0) = 0$. Entonces $\varphi(t) \equiv x^0$ es una solución. Dado que esta solución no experimenta cambios con el tiempo, x^0 se denomina *punto de equilibrio* del sistema (1.10).

Ejercicio 1.3.1 Sea ϕ una solución de (1.10) y (a_ϕ, b_ϕ) el intervalo máximo donde está definida ϕ . Supongamos que existe el límite

$$x^0 = \lim_{t \rightarrow b_\phi} \phi(t).$$

Entonces $b_\phi = +\infty$ y x^0 es un punto de equilibrio.

1.3.2 Retrato de fases

Para estudiar un sistema autónomo es útil graficar las imágenes de las soluciones en \mathbb{R}^n , es decir los conjuntos $\varphi((a_\varphi, b_\varphi)) = \{\varphi(t) | t \in (a_\varphi, b_\varphi)\}$. Estos conjuntos son curvas de \mathbb{R}^n y nos referiremos a ellos como *trayectorias* u *órbitas* de la ecuación. Al gráfico de todas las órbitas lo denominaremos *retrato de fases*. Obviamente en la práctica sólo es posible graficar un conjunto limitado de órbitas.

Los Teoremas 1.3.2 y 1.3.3 y el Corolario 1.3.1 tienen implicancias sobre los retratos de fases. El Teorema 1.3.2 implica que si φ es una solución y $c \in \mathbb{R}$ entonces $\psi(t) = \varphi(t + c)$ lo es también. No obstante estas dos soluciones tienen la misma imagen: $\varphi((a_\varphi, b_\varphi)) = \psi((a_\psi, b_\psi))$. Esta observación y el Teorema 1.3.3 tienen por consecuencia que dos soluciones tienen el mismo conjunto imagen o ellos son disjuntos.

1.4 El péndulo simple

1.4.1 Deducción de la ecuación de movimiento

Consiste de un punto masa sobre el que actúa la fuerza de la gravedad, que se asume constante y de magnitud mg , donde g es la aceleración debida a la gravedad al nivel del mar sobre el paralelo 45° , esto es aproximadamente $9,81m/seg^2$. Además de esta fuerza, sobre la masa actúa una fuerza reactiva que mantiene a la masa en un círculo de radio r . Observar que no hay un único dispositivo que logra ejercer esta fuerza reactiva. Por ejemplo, puede ser una barra de radio r con un extremo fijo al techo y en el otro la masa m , o puede ser un tobogán de forma circular. Ambas fuerzas son fuerzas externas, recordar que las fuerzas internas surgen de la interacción entre partículas. Nuestro sistema actual tiene sólo una partícula, es evidente que para que aparezcan fuerzas internas debemos tener al menos dos partículas.

El movimiento se asume que se realiza sobre un plano, de modo que en este ejemplo vamos a asumir que la dimensión del espacio es 2 en lugar de 3, como hemos asumido en la discusión precedente.

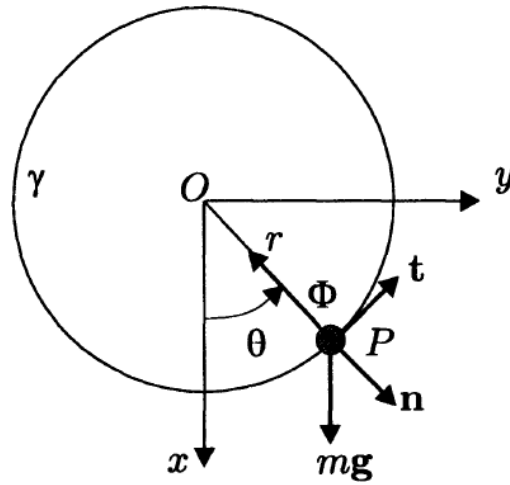


Figura 1.1: Péndulo simple

El primer paso para construir el modelo matemático de un sistema físico es describir el sistema de de coordenadas que utilizaremos y las variables, posiblemente Lagrangianas, que usaremos.

En este caso usaremos un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales con origen en el centro de la circunferencia donde se mueve la masa. El eje x positivo apunta hacia el centro de la tierra, vale decir tiene la misma dirección y sentido que la fuerza de gravedad. El eje y positivo forma 90° con respecto al eje x . Denotamos por \vec{P} el vector posición de la partícula. Ver figura 1.1.

Notar que tenemos $N = 1$ masa, dos coordenadas cartesianas, debido a la suposición que el movimiento se realiza en un plano, y una restricción $k = 1$. De modo que tenemos $2N - k = 1$ **grados de libertad**. Requeriríamos una variable Lagrangiana. Claramente, el ángulo θ que forma el vector posición de la masa con el eje x positivo determina la posición de la partícula. Usaremos este ángulo pues como variable Lagrangiana. Para dejar precisamente definidas nuestras variables, tenemos que indicar con claridad cual es la dirección positiva como se mide este ángulo. La dirección positiva de este ángulo será elegida de modo que el eje y corresponda a $\theta = +\pi/2$.

Como se muestra en la figura 1.1, en el punto \vec{P} consideramos el versor que es normal al movimiento \vec{n} y apunta en la dirección contraria hacia donde esta el origen y el versor tangente al movimiento \vec{t} , elegido de modo que apunte en la dirección que θ crece.

La gravedad ejerce una fuerza \vec{F}_g que por las suposiciones que hemos hecho sobre la magnitud de ella y la manera que hemos definido los ejes de coordenadas será igual a

$$\vec{F}_g = (mg, 0).$$

La fuerza reactiva \vec{F}_{reac} que mantiene a la masa moviéndose en el círculo debe apuntar hacia el origen. Las expresaremos entonces como

$$\vec{F}_{reac} = -\Phi \vec{n}.$$

La magnitud Φ es un escalar que tiene unidades de fuerza y un significado físico, es la **tensión** que ejerce el dispositivo que mantiene a la masa en la restricción. El signo menos es solo para que Φ resulte positiva. La cantidad Φ es variable y su determinación es importante para saber a que fuerzas estará sometido el dispositivo, digamos una barra de metal, durante el movimiento. El valor de Φ nos indicará con que resistencia debemos diseñar la barra.

Sobre la fuerza reactiva usamos el "axioma" de que es la fuerza justa y necesaria para que el movimiento se mantenga en la restricción.

Ahora usamos la Segunda Ley de Newton tenemos

$$m\vec{P}''(t) = \vec{F}_g + \vec{F}_{reac} = (mg, 0) - \Phi \vec{n}. \quad (1.11)$$

Hemos arribado a un sistema de dos ecuaciones diferenciales con tres incógnitas, las dos componentes de \vec{P} y Φ . Sin embargo no estamos tomando en consideración la restricción, las componentes de \vec{P} están confinadas a una curva que tiene un grado de libertad. El vector \vec{n} queda determinado con sólo una variable, la variable Lagrangiana $\theta(t)$. Usando esta variable

$$\vec{n} = (\cos(\theta), \sin(\theta)), \quad \vec{t} = (-\sin(\theta), \cos(\theta)).$$

Tener presente que θ es función de t , por tanto

$$\frac{d}{dt}\vec{n} = \theta' \vec{t}, \quad \text{y} \quad \frac{d^2}{dt^2}\vec{n} = \theta'' \vec{t} - (\theta')^2 \vec{n}.$$

Además $\vec{P} = r\vec{n}$. Por lo tanto (1.11) se escribe

$$mr\theta'' \vec{t} - mr(\theta')^2 \vec{n} = (mg, 0) - \Phi \vec{n}. \quad (1.12)$$

Tenemos dos ecuaciones y dos incógnitas θ y Φ . Una manera frecuente de eliminar una de las ecuaciones es hacer el producto interno en ambos miembros de (1.12) con \vec{t} , teniendo en cuenta que $\vec{n} \perp \vec{t}$ y $\|\vec{t}\| = 1$ obtenemos, luego de dividir por m y r la **ecuación del péndulo**

$$\theta'' = -\frac{g}{r} \sin \theta. \quad (1.13)$$

Insistimos en que es importante determinar Φ . Esta variable no aparece derivada, de modo que una vez que encontramos θ sólo resta resolver las ecuaciones resultantes para Φ . La manera rápida de hacerlo es tomar el producto interno en ambos miembros de (1.12) con \vec{n} . Resulta, luego de algunas operaciones

$$\Phi = mr(\theta')^2 + mg \cos(\theta) \quad (1.14)$$

Observemos que la tensión está compuesta de dos términos. El término $mg \cos(\theta)$ representa la proyección de la fuerza gravitatoria sobre la normal \vec{n} , esta componente de la tensión es pues necesaria para compensar la componente de la gravedad que actúa apartando a la masa de su movimiento circular. La componente $mr(\theta')^2$ se denomina componente **centrípeta** es la magnitud de la fuerza que atrae a la masa hacia el centro de rotación y compensa a la denominada fuerza **centrífuga**.

A los efectos de resolver numéricamente la ecuación del péndulo debemos expresarla primero como un sistema de ecuaciones de primer orden.

$$\begin{cases} \theta'(t) = v(t) \\ v'(t) = -\frac{g}{r} \sin \theta(t) \end{cases} \quad (1.15)$$

1.4.2 Deducción alternativa.

Otra forma de deducir la ecuación del péndulo es usar la Ley de balance del momento angular.

Tomamos \vec{X}_O como el origen. Recordando que la posición $\vec{P} = r\vec{n}$ y $\vec{P}' = r\vec{n}' = r\theta'\vec{t}$ y sustituyendo en (2.14) deducimos que el momento angular es

$$\vec{K}_O = mr^2\theta'\vec{n} \times \vec{t} = mr^2\theta'\vec{k},$$

Donde $\vec{k} = (0, 0, 1)$, notar que $\vec{n} \times \vec{t} = \vec{k}$.

La fuerzas externas que tenemos son la gravedad y la reactiva de la restricción

$$F^{(e)} = (mg, 0) - \Phi\vec{n}.$$

Entonces

$$\vec{P} \times F^{(e)} = r\vec{n} \times (mg, 0) - r\Phi\vec{n} \times \vec{n} = -mgr \sin \theta \vec{k}.$$

La última igualdad sigue de que $\vec{n} \times \vec{n} = 0$ y de un simple cálculo del producto vectorial. Usando la Ley del balance angular $K'_O = \vec{P} \times F^{(e)}$ obtenemos (1.13).

1.4.3 Conservación de la energía

La fuerza total que actúa sobre la masa suspendida en el péndulo es

$$\vec{F} = (mg, 0) + \Phi\vec{n}.$$

A los efectos de chequear la Definición 1.1.1, recordemos que $P' = r\theta'\vec{t} = r\theta'(-\sin(\theta), \cos(\theta))$, entonces

$$\vec{F} \cdot P' = -r\theta' mg \sin(\theta).$$

Vemos que

$$U(x, y) = U(\theta) = -rmg \cos(\theta) = -mgx.$$

es un potencial. Deducimos pues que en el movimiento de un péndulo con posición $P(t) = (x(t), y(t))$ la cantidad

$$E = \frac{m}{2} ((x'(t))^2 + (y'(t))^2) - mgx(t) \quad (1.16)$$

se mantienen constante. Es más frecuente usar la coordenada Lagrangiana θ , con ella E se expresa

$$E = \frac{1}{2} mr^2 (\theta'(t))^2 - mgr \cos(\theta). \quad (1.17)$$

1.4.4 Experimentación numérica

Ahora vamos a utilizar numpy+scipy para resolver numéricamente la ecuación y llevar adelante algunos experimentos.

Para resolver numéricamente las ecuaciones utilizaremos las librerías: 1. numpy, que incorpora como tipos de datos los arreglos multidimensionales y algunos métodos y operaciones que sobre ellos actúan. La importaremos con prefijo np. 2. scipy, librería de algoritmos matemáticos, en particular importaremos sólo la sub-librería de solución numérica de EDO. 3. matplotlib, para graficar.

```
[1]: import numpy as np
      from scipy.integrate import odeint
      import matplotlib.pyplot as plt
```

Los integradores funcionan con sistemas de ecuaciones de primer orden. Programamos pues la función, el campo vectorial asociado al sistema de ecuaciones de primer orden del péndulo. Procuramos usar las mismas letras en el programa que las utilizadas en las deducciones matemáticas, así g, m, r representan las mismas cantidades que de costumbre. La variable y denota el vector (θ, θ') .

```
[2]: def pendulo_friccion(y,t,g,m,r):
      dydt = [y[1], -g/r*np.sin(y[0])]
      return dydt
```

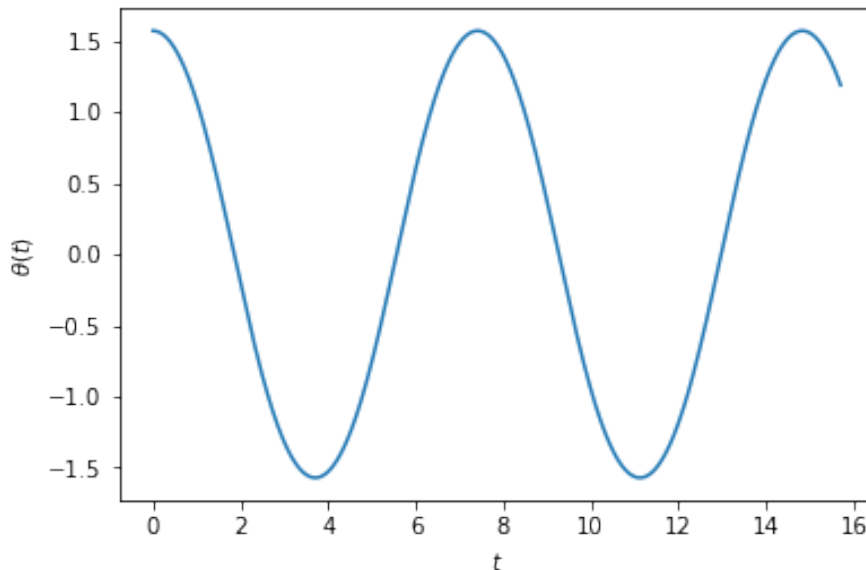
Hacemos una primera integración en el intervalo de tiempos $[0, 5\pi]$ con condición inicial $\theta(0) = \frac{\pi}{2}$ y $\theta'(0) = 0$. Por simplicidad asumimos $g = m = r = 1$. Esto no entraña pérdida de generalidad dado que nuestro modelo físico utiliza tres sistemas de unidades distintos: longitud, masa y tiempo y podemos elegir las unidades apropiadas de modo que $g = m = r = 1$.

```
[3]: y0=[np.pi*.5,0]
      t = np.linspace(0, 5*np.pi, 1000)
      sol = odeint(pendulo_friccion, y0, t, args=(1,1,1))
      theta=sol[:,0]
```

Graficamos

```
[4]: plt.plot(t,theta)
      plt.xlabel('$t$')
      plt.ylabel(r'$\theta(t)$')
```

```
[4]: Text(0,0.5, '$\theta(t)$')
```

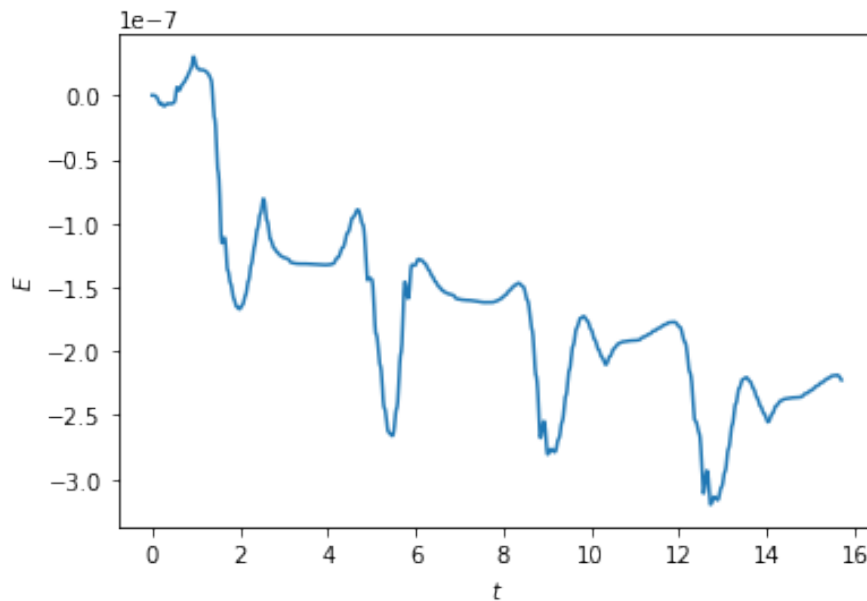


La curva aparenta ser una función periódica.

Verifiquemos experimentalmente la conservación de la energía

```
[5]: theta_p=sol[:,1]
      m,g,r=1,1,1
      E=.5*m*r**2*theta_p**2-m*g*r*np.cos(theta)
      plt.plot(t,E)
      plt.xlabel('$t$')
      plt.ylabel(r'$E$')
```

```
[5]: Text(0,0.5, '$E$')
```



Notar que la variación de la energía es de menos de 3×10^{-7} . No es exactamente constante, pero ello se explica porque el método numérico tiene errores de truncamiento y redondeo.

Es muy útil el gráfico de las curvas de nivel de la energía E . Por la Ley de conservación sabemos que el par $\theta(t), \theta'(t)$ debe moverse dentro de estas curvas. Para realizar este gráfico con matplotlib tenemos que pensar a la energía como una función de dos variables

$$E(\theta, v) = \frac{1}{2}mr^2v^2 - mgr \cos(\theta)$$

y graficar las curvas de nivel de E , en matplotlib este trabajo es hecho por la función `contour`.

```
[6]: theta = np.arange(-4.0*np.pi, 4.0*np.pi, 0.01)
v = np.arange(-3.0, 3.0, 0.01)
Theta, V = np.meshgrid(theta, v)
E = 0.5*m*g*r**2*V**2 - m*g*r*np.cos(Theta)
niveles = [-.999, -.6, -.3, 0, .3, .6, 1, 2, 3]
plt.contour(Theta, V, E, niveles)
plt.xlabel(r'$\theta$')
plt.ylabel(r'$\theta^{\prime}$')
```

```
[6]: Text(0, 0.5, r'$\theta^{\prime}$')
```

1.4.5 Análisis cualitativo

En esta subsección haremos un análisis analítico de (1.17) que refuerce y justifique lo que observamos en los experimentos. Seguimos asumiendo $g = m = r = 1$. Se pueden inferir muchas propiedades de las soluciones de la ecuación del péndulo sin resolver la misma, sólo apelaremos a los resultados de la sección y al hecho que la energía E es constante a lo largo de las soluciones.

Ejercicio 1.4.2 (Equilibrios del péndulo) Demostrar que los puntos de equilibrio de (1.15) son los puntos $(k\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$.

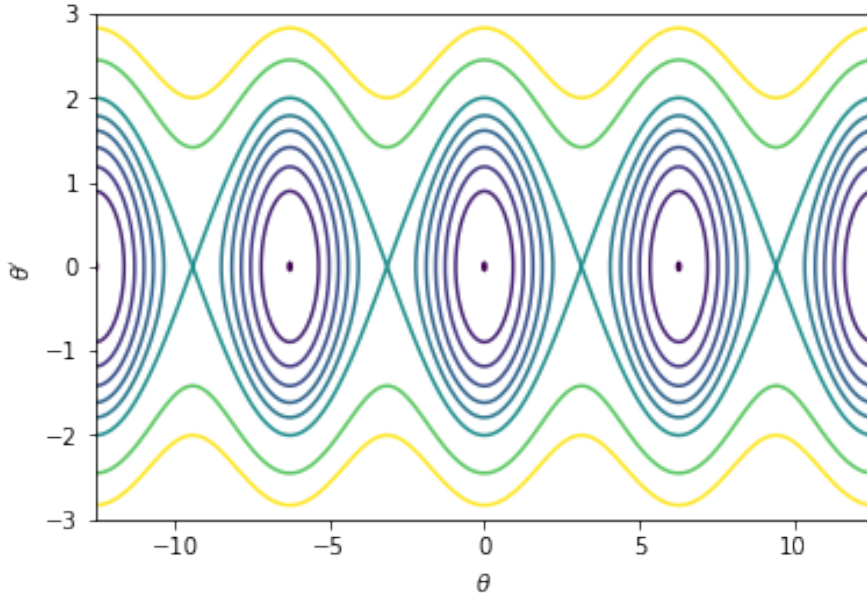


Figura 1.2: Retrato de fases de la ecuación del péndulo

Definición 1.4.3 (Equilibrios estables) Supongamos que x_0 es un equilibrio del sistema autónomo $x' = f(x)$, con $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Diremos que x_0 es un equilibrio estable si dado cualquier entorno V de x_0 existe un entorno U de x_0 tal que si $x_1 \in U$ y $x(t)$ es una solución con $x'(0) = x_1$ entonces $x(t)$ está definida al menos en $[0, +\infty)$ y $x(t) \in V$. En otras palabras, un equilibrio es estable cuando una solución que inicialmente está cerca del equilibrio permanece por siempre cerca de él. Un equilibrio que no es estable se denomina *inestable*.

Ejercicio 1.4.3 Supongamos que el sistema mecánico

$$m_i \ddot{\vec{X}}_i'' = \vec{F}_i(\vec{X}_1, \dots, \vec{X}_N, \vec{X}_1', \dots, \vec{X}_N', t), \quad i = 1, \dots, n$$

es conservativo con potencial U . Demostrar que si $(\vec{X}_1^0, \dots, \vec{X}_N^0)$ es un mínimo local aislado, entonces $(\vec{X}_1^0, \dots, \vec{X}_N^0, 0, \dots, 0)$ es un equilibrio estable del sistema

$$\begin{cases} \vec{X}_i' = \vec{V}_i \\ \vec{V}_i' = \vec{F}_i(\vec{X}_1, \dots, \vec{X}_N, \vec{X}_1', \dots, \vec{X}_N', t), \quad i = 1, \dots, n. \end{cases}$$

El retrato de fases parece indicar que los puntos $(2k\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$, son equilibrios estables del péndulo y los puntos $((2k+1)\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$, equilibrios inestables. Basta sólo pensar un momento en cual es el estado dinámico del péndulo en esos equilibrios para darse cuenta del sentido del concepto de estabilidad.

Ejercicio 1.4.4 Justificar los siguientes hechos sobre la energía E y sus curvas de nivel.

1. $E \in [-1, +\infty)$.
2. $\{(\theta, v) | E(\theta, v) = -1\} = \{(2k\pi, 0) | k \in \mathbb{Z}\}$. Vale decir es el conjunto de

equilibrios etables.

3. Si $E_0 \in (-1, 1)$ entonces $\{(\theta, v) | E(\theta, v) = E_0\}$ es una colección numerable de curvas cerradas cada una de ellas rodea un equilibrio estable.
4. $\{(\theta, v) | E(\theta, v) = 1\}$ esta formada por dos curvas no acotadas que se cruzan en los equilibrios inestables.
5. Si $E_0 > 1$, $\{(\theta, v) | E(\theta, v) = E_0\}$ esta formada por dos curvas no acotadas que no se cruzan.

Sabemos que las soluciones tienen que estar en curvas definidas implícitamente por $E = \text{cte}$. Más concretamente, si definimos $\varphi(t) = (\theta(t), \theta'(t))$ entonces la órbita de φ , esto es $\{\varphi(t) | t \in I_\varphi\} = \varphi(I_\varphi)$, debe estar contenida en un conjunto de nivel de E .

Otro rasgo importante de las soluciones que podemos analizar es si el intervalo máximo de definición puede extenderse a todo \mathbb{R} . Para ello es sumamente útil el Teorema 1.3.1.

Teorema 1.4.4 Sea $E_0 \in [-1, 1)$ y $\varphi(t) = (\theta(t), \theta'(t))$ una solución con energía E_0 , entonces $I_\varphi = \mathbb{R}$.

Demostración. Partimos del hecho que $\varphi(I_\varphi) \subset \{(\theta, v) | E(\theta, v) = E_0\}$. Pero según el Ejercicio 1.4.4, $\{(\theta, v) | E(\theta, v) = E_0\}$ está compuesta por una colección de curvas cerradas (o puntos cuando $E_0 = -1$) mutuamente disjuntos. Ahora la topología acude en nuestro auxilio, pues sabemos que al ser I_φ conexo y φ continua, debe ocurrir que $\varphi(I_\varphi)$ es conexo. De modo que $\varphi(I_\varphi)$ estará completamente contenido en alguna componente conexa de $\{(\theta, v) | E(\theta, v) = E_0\}$. Ahora todas estas componentes conexas son conjuntos compactos, por consiguiente el Teorema 1.3.1 implica que toda solución con $E \in [-1, 1)$ está definida en todo tiempo. \square

El razonamiento anterior falla si $E_0 \geq 1$ pues en ese caso $\{(\theta, v) | E(\theta, v) = E_0\}$ esta formado por una o más componentes conexas no acotadas. Sin embargo, otros razonamiento nos conducen a la misma conclusión.

Teorema 1.4.5 Sea $\varphi(t) = (\theta(t), \theta'(t))$ una solución con energía $E = 1$, entonces $I_\varphi = \mathbb{R}$.

Demostración. Recordemos que $\{(\theta, v) | E(\theta, v) = 1\}$ son dos curvas no acotadas que se cruzan en los equilibrios inestables $((2k+1)\pi, 0)$. Ahora bien, por ser equilibrios, las funciones constantes $\varphi_k(t) \equiv ((2k+1)\pi, 0)$ son solución. Por otro lado, se señaló en la subsección que las órbitas de soluciones o bien son iguales o bien son disjuntas. Consecuentemente, la órbita de φ es un equilibrio inestable o no contiene ningún equilibrio inestable, vale decir

$$\varphi(I_\varphi) \subset \{(\theta, v) | E(\theta, v) = 1\} - \{((2k+1)\pi, 0) | k \in \mathbb{Z}\}.$$

Se observa que las componentes conexas del conjunto de la derecha son acotadas y que $\varphi(\mathbb{R})$ debe estar contenida en una de estas componentes conexas. Así inferimos que $\varphi(\mathbb{R})$ es acotada y por ende está contenido en un conjunto compacto. Nuevamente del Teorema 1.3.1 inferimos la conclusión. \square

Ejercicio 1.4.5 Demostrar que las conclusiones de los teoremas anteriores siguen valiendo cuando $E > 1$. *Ayuda:* Demostrar que $|v| \leq \sqrt{2(E+1)}$. Este control de la velocidad de θ implica que si I_φ fuese acotado, también lo sería $\varphi(I_\varphi)$

Ahora sabemos que todas las soluciones están definidas para todo tiempo. También sabemos que, cuando $E_0 \in [-1, 1)$, el conjunto $\varphi(\mathbb{R})$ está contenida en una

componente conexa de $\{(\theta, v) | E(\theta, v) = E_0\}$ y, cuando $E_0 = 1$, el conjunto $\varphi(\mathbb{R})$ es un equilibrio o está contenida en una componente conexa de $\{(\theta, v) | E(\theta, v) = E_0\} - \{((2k+1)\pi, 0) | k \in \mathbb{Z}\}$. Vamos a demostrar que $\varphi(\mathbb{R})$ llena las componentes conexas de los conjuntos anteriores.

Teorema 1.4.6 Sea $\varphi(t) = (\theta(t), \theta'(t))$ una solución con energía $E = 1$ que no es un equilibrio. Entonces $\varphi(\mathbb{R})$ es una componente conexa de $\{(\theta, v) | E(\theta, v) = 1\} - \{((2k+1)\pi, 0) | k \in \mathbb{Z}\}$. La trayectoria de φ conecta los equilibrios en un tiempo infinito.

Demostración. Supongamos que $\varphi(0) = (\theta(0), v(0))$ esta en la componente conexa que es el arco sobre el simplano $v > 0$ que une los equilibrios $(-\pi, 0)$ y $(\pi, 0)$, en otras palabras, asumimos $\theta(0) \in (-\pi, \pi)$ y $v(0) > 0$. Como la solución debe permanecer en ese arco siempre, tendremos que, para todo $t \in \mathbb{R}$, $v(t) = \theta'(t) > 0$. Inferimos que θ es monótona y de allí que los límites $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \theta(t)$ existen. Como $v(t) = \sqrt{2E + 2\cos(\theta)}$, también existen los respectivos límites para v en lugar de θ . En consecuencia, existen los límites $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \varphi(t)$. Según el ejercicio 1.3.1 estos límites deben ser equilibrios, no queda más entonces que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = (\pi, 0) \quad y \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t) = (-\pi, 0).$$

Luego, en la curva conexa $\varphi(\mathbb{R})$ hay puntos tan cercanos a $(-\pi, 0)$ y $(\pi, 0)$ como queramos, esto implica que debe llenar el arco de energía que une estos dos equilibrios. \square

Definición 1.4.4 En un sistema dinámico una trayectoria se llama *heteroclínica* si conecta dos puntos de equilibrio distintos en un tiempo infinito.

Ejercicio 1.4.6 Sea $\varphi(t) = (\theta(t), \theta'(t))$ una solución con energía $E_0 \in (-1, 1)$. Entonces $\varphi(\mathbb{R})$ es una componente conexa de $\{(\theta, v) | E(\theta, v) = E_0\}$ y la solución es T -periódica para cierto valor de T .

Ejercicio 1.4.7 Demostrar que la ecuación del péndulo tiene las siguientes simetrías.

1. Si $\theta(t), v(t)$ es solución, entonces $\theta(-t), -v(-t)$ y $-\theta(t), -v(t)$ lo son.
2. Si $\theta(t), v(t)$ es solución, entonces para todo $a \in \mathbb{R}$, $\theta(t+a), v(t+a)$ lo es.

Ejercicio 1.4.8 Sea $\varphi(t) = (\theta(t), v(t))$ una solución del PVI

$$\begin{cases} \theta'(t) &= v(t) \\ v'(t) &= -\sin(\theta(t)) \\ \theta(0) &= -\theta_0, \quad \theta'(0) = 0, \end{cases} \quad (1.18)$$

donde $\theta_0 \in (0, \pi)$. Observar que la energía de esta solución satisface que $E \in (-1, 1)$ y en consecuencia la solución es T -periódica para algún $T > 0$.

1. Deducir que θ es par y $v(t)$ impar.
2. Demostrar que existe $T > \tilde{T} > 0$ tal que $\theta'(\tilde{T}) = 0$ y $\theta(\tilde{T}) = \theta_0$.
3. Demostrar que $\tilde{T} = T/2$.

4. Usando el Teorema de Existencia y Unicidad demostrar las siguientes relaciones $\theta(t + \frac{T}{2}) = -\theta(t)$, $\theta(\frac{T}{4}) = 0$.
5. Reflexionar sobre que dicen todas las relaciones y propiedades de los incisos anteriores sobre el movimiento del péndulo.

1.4.6 El periodo de un péndulo

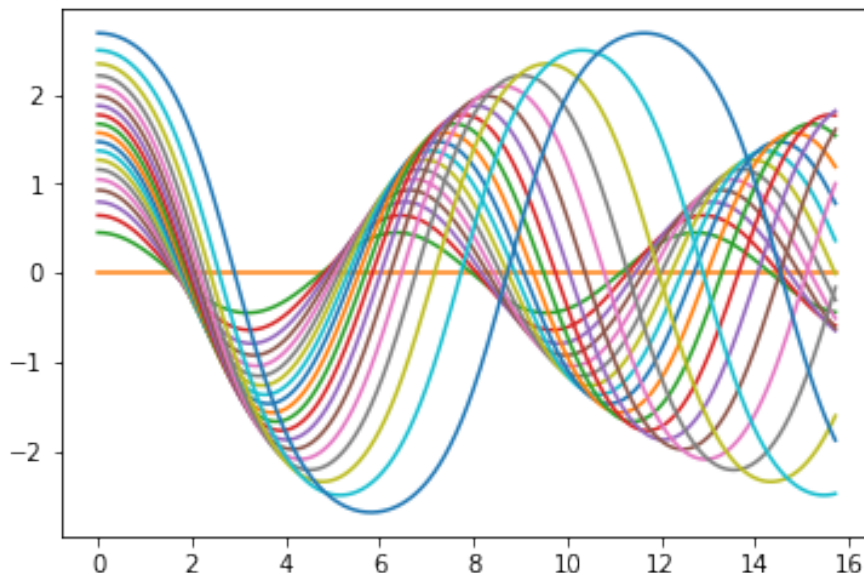
1.4.6.1 Aproximación numérica

Vamos ahora a investigar numéricamente como cambian las soluciones, en particular su periodo, a medida que nos movemos con E de -1 a 1 . Vamos a generar un vector de energías con valores uniformemente distribuidos en el intervalo $[-1, 1]$. Para cada valor de estas energías resolvemos la ecuación con condición inicial $\theta'(0) = 0$ y $\theta(0)$ elegido de modo que la energía de la solución sea E , es decir podemos tomar por ejemplo

$$\theta(0) = \arccos\left(-\frac{E}{mgr}\right).$$

La energías $E > 1$ son lo suficientemente grandes para que la masa complete una vuelta y de allí en más permanecerá girando permanentemente. En el semiplano $\theta' > 0$ lo hace en sentido antihorario y en $\theta' < 0$ lo hace en sentido horario.

```
[7]: E=np.arange(-1,1,.1)
grafico=plt.plot(0,0)
t = np.linspace(0, 5*np.pi, 1000)
for e in E:
    y0=[np.arccos(-e/(m*g*r)),0]
    sol = odeint(pendulo_friccion, y0, t, args=(1,1,1))
    theta=sol[:,0]
    grafico.append(plt.plot(t,theta)[0])
```



Se observa que los periodos se van haciendo cada vez más grandes a medida que $\theta(0)$ es más grande, que corresponde a valores cada vez más grandes de E .

1.4.6.2 Aproximación analítica

Recordemos que estamos asumiendo que $m = g = r = 1$. Nos proponemos ahora deducir una fórmula para el periodo en función de $E \in (-1, 1)$. Vamos a trabajar con una solución del PVI (1.18), después veremos como extender nuestros resultados a cualquier solución con $E \in (-1, 1)$. Denominemos $T(E)$ al periodo asociado a la solución, la cual satisface que $\theta(0) = -\theta_0$ donde

$$\theta_0 = \arccos\left(-\frac{E}{mgr}\right) \in (0, \pi)$$

y $\theta'(0) = 0$. Por el ejercicio 1.4.8, si $T_1 = T(E)/2$ entonces $\theta(T_1) = \theta_0$, $\theta'(T_1) = 0$ y en el intervalo $(0, T_1)$, $\theta'(t) > 0$.

Despejando de la Ley de Conservación de la Energía obtenemos

$$\frac{\theta'(t)}{\sqrt{2E + 2\cos(\theta)}} = 1$$

Integrando para $t \in [0, T_1] = [0, T(E)/2]$, llamando $s = \theta(t)$ y recordando que $E = -\cos(\theta_0)$

$$\frac{T(E)}{2} = \int_0^{T(E)/2} \frac{\theta'(t)dt}{\sqrt{2E + 2\cos(\theta(t))}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{ds}{\sqrt{\cos(s) - \cos(\theta_0)}}$$

Usando la identidad $\cos(s) = 1 - 2\sin^2(s/2)$

$$T(E) = \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{ds}{\sqrt{\sin^2(\theta_0/2) - \sin^2(s/2)}} = \frac{1}{\sin(\theta_0/2)} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{ds}{\sqrt{1 - \left[\frac{\sin(s/2)}{\sin(\theta_0/2)}\right]^2}}$$

Llamando $k = \sin(\theta_0/2)$ y $kz = \sin(s/2)$. Entonces

$$T(E) = 2 \int_{-1}^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-k^2z^2}} = 4 \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-k^2z^2}} = 4K(k^2),$$

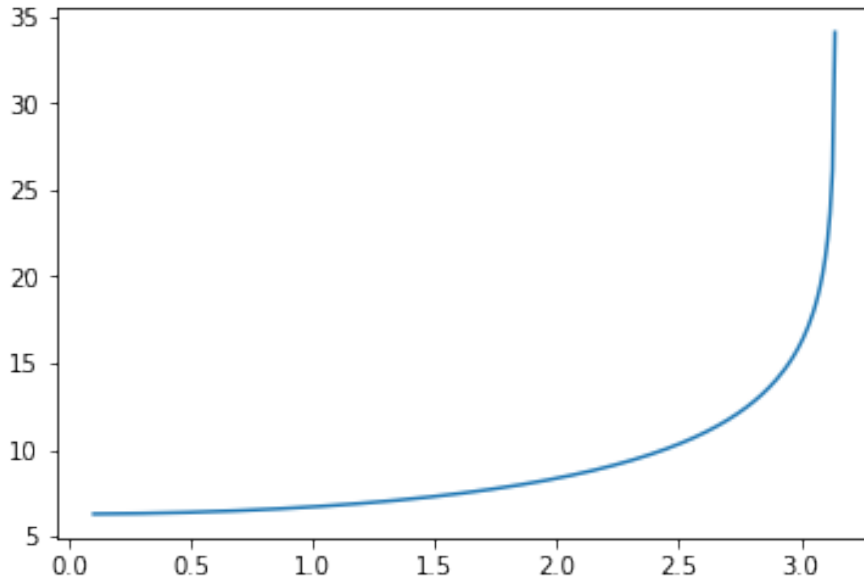
donde $K(m)$ es una función especial muy conocida, se denomina de **integral elíptica completa de primera clase**. Recomendamos profundizar sobre estas funciones, en [Abramowitz and Stegun, 1965] o en la [wikipedia](#). Haciendo el cambio de variables $z = \sin(u)$ podemos expresar la integral elíptica de manera alternativa como

$$K(m) = \int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1 - m \sin^2(u)}}.$$

Toda librería matemática, simbólica o numérica tiene rutinas para el cálculo de estas integrales. En el caso de `scipy` hay que importar `scipy.special.ellip`

```
[8]: from scipy.special import ellipk
theta0=np.arange(0.1,np.pi,.01)
k=np.sin(theta0/2)
T=4*ellipk(k**2)
plt.plot(theta0,T)
```

```
[8]: [<matplotlib.lines.Line2D at 0x7f338c58f090>]
```



[9]: T[0:10]

[9]: array([6.28711455, 6.28794026, 6.28884484, 6.28982835, 6.
↪29089086,
6.29203244, 6.29325317, 6.29455314, 6.29593243, 6.
↪29739113])

Ejercicio 1.4.9 Demostrar que

$$\lim_{\theta_0 \rightarrow 0} T = 2\pi, \quad \lim_{\theta_0 \rightarrow \pi} T = +\infty.$$

1.4.7 Soluciones exactas en términos de funciones elípticas de Jacobi

Usando algunas funciones especiales de la matemática podemos resolver de manera exacta la ecuación del péndulo, en el sentido de expresar θ en función del tiempo.

Definimos la *integral elíptica incompleta de primera especie* por

$$K(\varphi, m) = \int_0^\varphi \frac{du}{\sqrt{1 - m \sin^2(u)}}. \quad (1.19)$$

La referencia habitual para esta función, y otras funciones especiales de la matemática, es [Abramowitz and Stegun, 1965]. Ver también el [artículo en la wikipedia](#). Observar que $K(\pi/2, m)$ es la integral elíptica completa de primera especie. La integral elíptica (1.21) tiene un cierto tipo de inversa $\text{sn}(u, m)$, como función de u . Esto es

$$u = K(\varphi, m) \Rightarrow \text{sn}(u, m) = \sin(\varphi). \quad (1.20)$$

Notar que la inversa de $K(\varphi, m)$ es entonces $\arcsin(\text{sn}(u, m))$. No obstante es costumbre considerar la definición de la función sn dada arriba. La función sn se denomina *Función Elíptica de Jacobi*, ver [Abramowitz and Stegun, 1965] o [wikipedia](#). Desde el plano puramente matemático, las funciones elípticas tienen propiedades relevantes, por ejemplo que cuando las extendemos al plano complejo son doblemente periódicas. Si no tuviesen ninguna aplicación a la física, igual sería interesante estudiar estas funciones.

De todas maneras, estamos interesados en estas funciones porque nos permiten expresar la solución de la ecuación del péndulo. Algunas propiedades importantes de estas funciones son enumeradas en el siguiente ejercicio.

Ejercicio 1.4.10 Definimos la *integral elíptica incompleta de primera especie* por

$$K(\varphi, m) = \int_0^\varphi \frac{du}{\sqrt{1 - m \sin^2(u)}}. \quad (1.21)$$

1. Demostrar que para $m \in [0, 1)$ la integral es finita y es una función monótona creciente y continua de φ

A la luz del resultado anterior, $K(\varphi, m)$ tiene una inversa para m fijo. Definimos la *Función Elíptica de Jacobi* como la composición de esa inversa con la función $\text{sen}(x)$, vale decir

$$u = K(\varphi, m) \Rightarrow \text{sn}(u, m) = \text{sen}(\varphi). \quad (1.22)$$

2. Sea $T = 4K(\pi/2, m)$. Demostrar que $\text{sn}(T/2) = 0$.
3. $\text{sn}(u, m) = \text{sn}(T/2 - u, m)$.
4. sn es impar.
5. $\text{sn}(u + T/2, m) = -\text{sn}(u, m)$.
6. sn es T -periódica.
7. sn resuelve la ecuación diferencial

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = (1 - y^2)(1 - my^2).$$

El paquete Scipy implementa la integrales elípticas y las funciones elípticas: `ellipkinc` y `ellipj` respectivamente. La siguiente porción de código explica su funcionamiento.

```
[3]: #Sentencias de importación
import numpy as np
from scipy.special import ellipkinc, ellipj
```

La función `ellipkinc` (integral elíptica) funciona de la misma manera que describimos arriba. La función `ellipj` retorna un tuple con 4 componentes, que son varias funciones elípticas. La que nos interesa aquí es la primera componente, que es la función $\text{sn}(u, m)$ que describimos arriba. La cuarta componente sería la inversa exacta de la integral elíptica es decir si $u = K(\varphi, m)$, entonces `ellipj(u, m)` nos retorna φ .

```
[6]: phi=np.pi/7.0
m=.34
u=ellipkinc(phi,m)
ellipj(u,m)[0], np.sin(phi)
```

```
[6]: (0.43388373911755806, 0.4338837391175581)
```

```
[7]: ellipj(u,m)[3], phi
```

```
[7]: (0.44879895051282753, 0.4487989505128276)
```

Nos proponemos escribir la solución de la ecuación del PVI (1.18) usando las funciones anteriores.

Como consecuencia del ejercicio 1.4.8 vemos que si T es el periodo de la solución, para cualquier $s \in \mathbb{R}$ podemos relacionar $\theta(s)$ con $\theta(t)$ para algún $t \in [0, T/4]$. Podemos suponer entonces que $t \in [0, T/4]$.

Recordar la conservación de la energía, esto es que la siguiente expresión es cons-

tante

$$E = \frac{v^2}{2} - \cos(\theta).$$

Como $\theta'(t) > 0$ en $[0, T/4]$ podemos despejar

$$1 = \frac{\theta'(t)}{\sqrt{2E + 2\cos(\theta_0)}}. \quad (1.23)$$

Ejercicio 1.4.11 (Solución ecuación péndulo)

1. Integrar (1.23) entre 0 y t y, siguiendo pasos similares a la deducción de la fórmula del periodo del péndulo demostrar que

$$t = K\left(\frac{\pi}{2}, k^2\right) - K\left(\arcsen(-\varphi), k^2\right), \quad (1.24)$$

donde

$$\varphi = \frac{\sen(\theta/2)}{\sen(\theta_0/2)}, \quad \text{y} \quad k = \sen(\theta_0/2).$$

2. Para expresar θ explícitamente en función de t , usar la función elíptica de Jacobi sn para despejar θ de la expresión (1.24). Obtener la fórmula

$$\theta(t) = -2 \arcsen\left(k \operatorname{sn}\left(\frac{T}{4} - t, k^2\right)\right), \quad (1.25)$$

con $k = \sen(\theta_0/2)$.

3. Usando Numpy y Scipy resolver numéricamente la ecuación y comparar la solución numérica con la función dada arriba.
4. En la anterior fórmula supusimos que la solución cumplía $\theta(0) = -\theta_0 < 0$ y $\theta'(0) = 0$. No obstante podemos a partir de ella obtener una expresión para cualquier solución con $E \in (-1, 1)$. Para ello completar los siguientes pasos:
 - a) Demostrar que si $(\theta(t), v(t))$ es una solución del sistema de ecuaciones del péndulo con una energía $E \in (-1, 1)$ entonces existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $v(t_0) = 0$.
 - b) Demostrar que si $(\theta(t), v(t))$ es solución entonces $(\theta(t) + 2k\pi, v(t))$, $k \in \mathbb{Z}$, es solución.
 - c) Usar los incisos anteriores y la invariancia por traslaciones para relacionar una solución con $E \in (-1, 1)$ y $\theta'(t_0) = 0$ con una solución con $\theta'(0) = 0$ y $\theta(0) \in (-\pi, 0)$.
 - d) Finalmente usar los hechos anteriores para extender la fórmula (1.25) a soluciones cualesquiera con $E \in (-1, 1)$.

1.5 Fricción

La fricción se origina cuando un objeto en movimiento interactúa con otros objetos o partículas. Por ejemplo cuando pretendemos movernos dentro de un fluido, como ser agua o aire, se genera cierta resistencia al movimiento. La fricción de este tipo se denomina **amortiguación viscosa**. Esta resistencia, como otras, se puede explicar a nivel atómico, no obstante vamos a resignar aquí indagar sobre el origen de estas resistencias, simplemente nos contentaremos con constatar que existen y con modelizarlas matemáticamente, es decir cuantificarlas. En materias anteriores ya hemos modelizado la

resistencia al desplazamiento dentro de un fluido. En general se asume que, como toda fricción, la resistencia es **opuesta al movimiento** (de lo contrario no sería una resistencia) y proporcional a la velocidad (o también se usa la velocidad al cuadrado). Hay otro tipo de fuerzas de fricción, son las originadas por la interacción de, por ejemplo, una rueda y el camino o el roce entre las partes internas de un auto o bicicleta. En el ciclismo se suele llamar esta fuerza *resistencia a la rodadura*. Claro está que hablar de “rodadura” presume que el móvil tiene ruedas. Cuando un niño cae por un tobogán se produce un roce entre la ropa y las manos del niño con el material del que está compuesto el tobogán. A este tipo de fricción se le suele denominar **amortiguación seca**. Esta fricción es útil, de hecho muchos mecanismos de frenos apelan a ella para detener un móvil. Suele verificarse que los materiales sujetos a fricción se calientan, las manos en el tobogán o los frenos por ejemplo. Esto indica que parte de la energía cinética se transforma en energía calorífica. Este hecho fue utilizado por J.P. Joule para establecer el equivalente mecánico del calor.

Como vemos hay muchos tipos de fricción cualitativamente diferentes, vamos a estudiar sólo al tipo similar a la ejercida en la caída de un tobogán. Esta fuerza se origina por la resistencia al movimiento ejercida por la restricción misma. Por lo tanto lo vamos a considerar parte de la fuerza reactiva generada por la restricción. Vamos a escribir entonces la fuerza reactiva de la siguiente forma:

$$\vec{R} = \vec{R}_\perp + \vec{R}_\parallel. \quad (1.26)$$

La componente \vec{R}_\perp es la componente perpendicular a la restricción que estudiamos anteriormente, es decir es la fuerza que mantiene al móvil dentro de la restricción. Es igual a $\vec{R}_\perp = \Phi \vec{n}$.

En este caso, la velocidad del móvil sólo importa a los efectos de determinar la dirección de la fuerza, pero no su intensidad (módulo). Vale decir el hecho que el móvil se desplace con más o menos rapidez no influye en la magnitud de la fuerza. Para la fricción ejercida por la restricción adoptaremos la siguiente suposición

$$\vec{R}_\parallel = -\mu_r |\Phi| \frac{\vec{v}_r}{\|\vec{v}_r\|}, \quad (1.27)$$

donde μ_r es una constante de proporcionalidad que se relaciona con las características del objeto en movimiento y de la superficie donde se mueve y \vec{v}_r es la velocidad de la partícula relativa a la restricción. Notar que no importa el movimiento de la partícula respecto a un sistema inercial, la partícula incluso puede estar quieta respecto a él, pero si la restricción se mueve igual se genera fricción.

Un piso aspero, digamos de papel de lija, tendrá una constante μ_r grande en comparación con una superficie hecha de hielo.

La propuesta de ley de rozamiento tiene la siguiente explicación. Supongamos que queremos mover una caja sobre un piso aspero que me impide su desplazamiento. Es más o menos intuitivo que cuanto más pesada es la caja más resistencia tendremos al desplazamiento. Es fácil proponer entonces que el módulo de la fricción es proporcional al módulo del peso, de allí la constante μ_r . Pero el peso de la caja es una fuerza perpendicular al suelo. El suelo, en este ejemplo, es la restricción donde está confinado el móvil. Para que la partícula se mantenga en el suelo, su peso tiene que compensarse con la fuerza reactiva \vec{R}_\perp . Por lo tanto el módulo de la fuerza peso tiene que ser igual a $|\Phi|$. Por último, la dirección de la fricción coincide con la velocidad relativa y es opuesta al movimiento, de allí que aparezca el versor $\vec{v}_r / \|\vec{v}_r\|$.

La ley de fricción que proponemos no introduce incógnitas nuevas, si conocemos el movimiento de la restricción, si es que no está quieta, y la velocidad de la partícula respecto a un sistema inercial, conoceremos \vec{v}_r . La constante μ_r se supone conocida también, generalmente se debe recurrir a experimentos y luego ajustar μ_r de modo que el modelo teórico produzca resultados aproximados a los experimentos. Mientras que si bien Φ es una incógnita, no es nueva, ya estaba presente cuando modelizamos \vec{R}_\perp ($\vec{R}_\perp = \Phi \vec{n}$).

Una importante observación para hacer aquí es que **la fuerza de fricción propuesta es discontinua en $\vec{v}_r = 0$** . Sería lógico asumir que estando el cuerpo en reposo respecto a la restricción ($\vec{v}_r = 0$) no hay fuerza de fricción. Sino se daría el hecho paradójico que

el cuerpo podría empezar a moverse por efecto de la fricción. Pero aún haciendo esta suposición la fuerza resultante es discontinua, porque pequeños valores de $\|\vec{v}_r\|$ puede producir valores grandes de $\|\vec{R}_\parallel\|$. Esto es consecuencia de que $\vec{v}_r/\|\vec{v}_r\|$ tiene módulo 1. Lo hace que las soluciones se comporten de una manera un poco especial para valores pequeños de la rapidez relativa. Esto hay que tenerlo en cuenta al momento de hacer simulaciones numéricas.

1.5.1 Movimiento en plano inclinado con fricción

Una masa m se desliza por un plano inclinado que se supone que se extiende indefinidamente, ver figura 1.3. Sobre la masa actúa la fuerza de la gravedad, que se asume constante, la fuerzas reactivas necesarias para mantener el movimiento dentro de la restricción que impone el plano inclinado y se supone que también tenemos rozamiento que modelizaremos con la Ley de Coulomb.

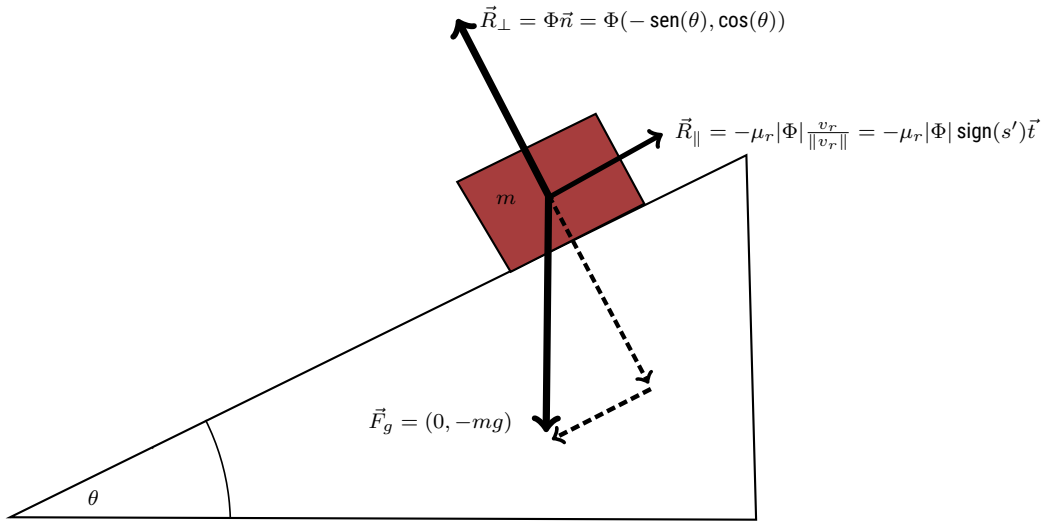


Figura 1.3: Plano inclinado

Vamos a suponer que el movimiento se realiza en el plano, de allí la dimensión es 2. De no existir restricción y como hay una partícula habría dos grados de libertad. Tenemos una restricción de modo que los grados de libertad se reducen en 1. Como sistema de coordenadas inercial consideraremos un sistema cartesiano ortogonal con origen en el vértice del ángulo marcado como θ , el semi-eje positivo x hacia la derecha en la dirección del piso y el semi-eje positivo hacia arriba formando 90° con el semi-eje positivo x .

Sea $\vec{t} = (\cos(\theta), \sin(\theta))$. Como la masa se mueve sobre el plano inclinado, podemos determinar su posición como $P = (x, y) = s\vec{t}$. La variable s será nuestra variable Lagrangiana. La fuerza de reeacción de vínculo viene dada por $\vec{R}_\perp = \Phi\vec{n}$, donde \vec{n} es normal al plano inclinado, de allí lo podemos expresar $\vec{n} = (-\sin(\theta), \cos(\theta))$. El versor $v_r/\|v_r\|$ viene dado por $s'\vec{t}/|s'| = \text{sign}(s')\vec{t}$, donde

$$\text{sign}(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

La ecuación de movimiento es

$$\begin{aligned} mP'' &= ms''(\cos(\theta), \sin(\theta)) \\ &= \vec{F}_g + \vec{R}_\perp + \vec{R}_\parallel \\ &= (0, -mg) + \Phi(-\sin(\theta), \cos(\theta)) - \mu_r|\Phi|\text{sign}(s')(\cos(\theta), \sin(\theta)). \end{aligned}$$

Como es usual, hacemos producto escalar ambos miembros con $\vec{n} = (-\sin(\theta), \cos(\theta))$ y con $\vec{t} = (\cos(\theta), \sin(\theta))$, obtenemos:

$$\Phi = mg \cos(\theta), \quad ms'' = -mg \sin(\theta) - \mu_r |\Phi| \text{sign}(s').$$

Eliminando Φ dividiendo por m y llamando $v := s'$

$$v' = -g \sin(\theta) - \mu_r g \cos(\theta) \text{sign}(s'),$$

donde hemos asumido que $0 \leq \theta < \pi/2$. A los efectos de simplificar más la ecuación, escribamos $a = g \sin(\theta)$ y $b = \mu_r g \cos(\theta)$.

$$v' = -a - b \text{sign}(v). \quad (1.28)$$

Ejercicio 1.5.12 Demostrar que el sistema hallado es no conservativo, a menos que $\theta = \pi/2$. Notar que en este caso la fuerza de la restricción y la fricción desaparecen. *Ayuda:* Suponer que hay un potencial $U(x, y)$. Demostrar que para cualquier solución $x = s \cos(\theta)$ y $y = s \sin(\theta)$ se debe cumplir que

$$mg (\sin(\theta)s' - \mu_r \cos(\theta)|s'|) = U_x s' \cos(\theta) + U_y s' \sin(\theta).$$

Dado cualquier punto del plano inclinado $(x_0, y_0) = s_0(\cos(\theta), \sin(\theta))$ demostrar que hay dos soluciones s_1 y s_2 , con posiciones respectivas P_1 y P_2 con la propiedad que $P_1(0) = P_2(0) = (x_0, y_0)$ y $s'_1(0) < 0 < s'_2(0)$. Inferir de todo esto que $\theta = \pi/2$.

1.6 Soluciones débiles de Carathéodory

En esta sección seguiremos a [Cortes, 2009]. El modelado físico del plano inclinado con fricción nos ha llevado a una ecuación diferencial $v' = f(v)$ donde f es una función discontinua en $v = 0$. Observar que $v(t_0) = 0$ corresponde a la situación física que la masa está en reposo en t_0 . El hecho que este en reposo en un instante no implica que se mantenga en reposo, dado que la gravedad sigue actuando (término $-a$) y esto puede provocar que se mueva. Es claro que el teorema de existencia y unicidad ya no se aplica en $v = 0$ y por consiguiente no hay ninguna garantía que existan soluciones que pasen por $v = 0$ en algún momento t_0 . No obstante pueden ocurrir que a pesar de la discontinuidad, sigan existiendo soluciones. Introduciremos una denominación para estas soluciones, para distinguirlas de otras que consideraremos en breve.

Definición 1.6.5 (Solución clásica) Sea el sistema de ecuaciones diferenciales $y'(x) = f(x, y(x))$ donde $f : (a, b) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función posiblemente discontinua. Diremos que $y : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una **solución clásica** si y es diferenciable y satisface la ecuación en todo $x \in (a, b)$.

El lector se preguntará para que hacemos esta definición, sino es más que el concepto de solución a secas que venimos considerando hasta el momento. El adjetivo “clásica” hace alusión justamente al hecho de que es el concepto tradicional de solución. Pero ocurre que los procesos físicos que modelizamos en algunas ocasiones no se corresponden con funciones diferenciables y a veces ni siquiera continuas. Debemos pues introducir un concepto matemático (en este caso el de solución) que de cuenta de estos procesos físicos. En matemática en principio es posible definir y estudiar cualquier concepto. En la modelización matemática esto ya no es tan así. Puesto que la modelización matemática representa fenómenos reales, tenemos la posibilidad de **validar** los resultados, esto es comparar las predicciones de un modelo con la realidad.

Muchas veces no es necesario recurrir a experimentos controlados de laboratorio para realizar esta validación. Por ejemplo, volviendo a la ecuación (1.28), todos experimentamos a diario el movimiento por planos inclinados, por ejemplo al subir por una rampa. Supongamos que inicialmente la masa está en el origen ($s = 0$) y tiene una velocidad inicial $v_0 > 0$. Notar que la velocidad positiva se corresponde con el movimiento de la masa subiendo por el plano inclinado. De modo que en el instante $t = 0$ la masa se encuentra en $s = 0$ en la dirección que trepa el plano. Claro que tanto la gravedad como el rozamiento son contrarios a esa dirección de movimiento, lo que nos dice que en algún momento debe ocurrir que $v = 0$. Ahora bien, dependiendo de la inclinación del plano y de su rugosidad, puede darse el caso que una vez detenida la masa empiece a caer por acción de la gravedad. Esto se daría, por ejemplo, si la masa estuviese sobre ruedas. Pero nuestra experiencia nos indica que también puede ocurrir que el rozamiento venza a la gravedad y la masa se mantenga quieta aunque este sobre un plano inclinado. Esto ocurriría si por ejemplo deslizamos una caja pesada sobre una rampa con una pequeña inclinación. Es por este motivo que podemos mantenernos parados sobre una rampa inclinada sin rodar hacia abajo.

Nuestras soluciones al modelo matemático deben dar cuenta de todos los comportamientos observados mediante la experiencia. Veamos que las soluciones clásicas de la ecuación (1.28) fallan en este propósito. Supongamos que $v_0 > 0$ en $t = 0$. Observar que la expresión $v(t) = -(a+b)t + v_0$ es una solución clásica de la ecuación en el intervalo $(-\infty, v_0/(a+b))$. Sin embargo en $t_1 = v_0/(a+b)$ ya no es solución, dado que $v'(t_1) = -(a+b)$, mientras que $-a - b \operatorname{sign}(v(t_1)) = -a$. De la misma manera $v(t) = (-a+b)t - v_0(b-a)/(a+b)$ es una solución clásica de la ecuación en el intervalo $(v_0/(a+b), +\infty)$. Ambas soluciones coinciden en $t = v_0/(a+b)$, en el sentido que unidas forman el gráfico de una función continua (ver figura 1.4), sin embargo, la función resultante ya no es diferenciable y por consiguiente ya no es una solución clásica.

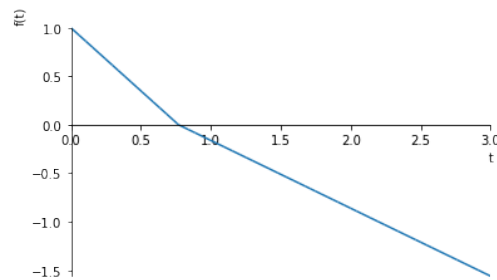


Figura 1.4: Soluciones (1.28) con $a = 1$ y $b = 0,3$.

Vemos así que el concepto de solución clásica no da cuenta del comportamiento del sistema físico para todo valor del tiempo, sólo lo hace mientras la solución no atraviese la discontinuidad en $v = 0$. El primer intento de sortear este inconveniente lo elaboramos en las siguientes definiciones.

Recordemos.

Definición 1.6.6 (Función absolutamente continua) Diremos que $y : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ es absolutamente continua si es diferenciable en casi todo punto y

$$y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^x y'(t) dt.$$

Vale decir y satisface el Teorema Fundamental del Cálculo

La absoluta continuidad implica la continuidad de la función y , y satisface la ecuación en todo $x \in (a, b)$.

Definición 1.6.7 (Solución de Carathéodory) Sea el sistema de ecuaciones diferenciales $y'(x) = f(x, y(x))$ donde $f : (a, b) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función posiblemente discontinua. Diremos que $y : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una **solución de Carathéodory** si y es absolutamente continua y satisface la ecuación en casi todo punto.

Una solución de Carathéodory no necesariamente satisface la ecuación en todo $x \in (a, b)$ basta que el conjunto de puntos donde no se satisface tenga medida cero.

1.7 Soluciones débiles de la ecuación del plano inclinado con amortiguación seca

Para el análisis debemos considerar dos casos: $a > b$ y $a \leq b$, o, lo que es lo mismo, $\mu_r < \tan(\theta)$ y $\mu_r \geq \tan(\theta)$.

1.7.0.1 Rozamiento débil $\mu_r < \tan(\theta)$.

La función

$$v(t) = \begin{cases} -(a+b)t + v_0 & t \leq v_0/(a+b) \\ (b-a)t - \frac{(b-a)v_0}{a+b} & t > v_0/(a+b) \end{cases}$$

Es solución de Carathéodory en $[0, +\infty)$. Dejamos como ejercicio verificar que la función es absolutamente continua y verifica la ecuación en todo punto excepto en $t = v_0/(a+b)$.

De modo que en este caso el concepto de solución de Carathéodory parece funcionar. Incluso la solución da cuenta de lo que intuitivamente suponemos que debe ocurrir. Notar que $a > b$ implica que $\mu_r < \tan(\theta)$ lo que indica que el coeficiente de fricción es bajo en relación a la pendiente. El movimiento de la masa es el siguiente: sube hasta $t = v_0/(a+b)$ en ese momento se detiene, para luego empezar a caer. Todo de acuerdo a nuestra intuición de lo que debería ocurrir con poca fricción o mucha inclinación.

1.7.0.2 Rozamiento fuerte $\mu_r \geq \tan(\theta)$.

En este caso veamos que no existe una solución en el sentido de Carathéodory. Supongamos que $v(t)$ sea un tal solución. Supongamos que exista un t_1 con $v(t_1) < 0$. Como v debe ser continua, tendremos que $v(t) < 0$ en al menos un entorno de t_1 . Sea t un punto dentro de este entorno. Usando la absoluta continuidad y (1.28)

$$v(t) = v(t_1) + \int_{t_1}^t v'(s) ds = v(t_1) + \int_{t_1}^t (-a+b) ds = v(t_1) + (b-a)(t-t_1).$$

Notar que en el entorno propuesto v es creciente. Observar que en particular hemos probado que v es creciente en cualquier intervalo donde $v < 0$. Ahora bien, como $v(0) > 0$ y $v(t_1) < 0$, debe existir un $t_2 < t_1$ tal que $v(t_2) = 0$ y $v(t) < 0$ en (t_2, t_1) . Como v es creciente en (t_2, t_1) y continua en \mathbb{R} tendremos $v(t_2) < v(t_1) < 0$ que contradice que $v(t_2) = 0$.

Con todo lo anterior probamos que $v(t) \geq 0$ para todo t . Por un razonamiento análogo al párrafo anterior podemos probar que $v(t) = v_0 - (a+b)t$ en todo intervalo donde $v > 0$. De allí v es decreciente en tales intervalos. Otra vez repitiendo argumento anteriores, probamos que existe un t_2 tal que $v(t_2) = 0$. Dejamos como ejercicio demostrar que, como v es decreciente cuando $v > 0$ y creciente cuando $v < 0$, tendremos que una vez que no queda otra opción más que $v(t) = 0$ para todo $t > t_2$. Pero esta función no satisface la ecuación en un conjunto de medida infinito.

La conclusión final es que el concepto de solución de Carathéodory funciona bien mientras la fricción es más débil que la gravedad.

1.7.1 Experimentos numéricos

Los métodos numéricos tradicionales en líneas generales fallan con funciones con discontinuidades. Sin embargo pueden arrojar la solución adecuada en ciertas circunstancias. Probemos con el integrador de scipy.

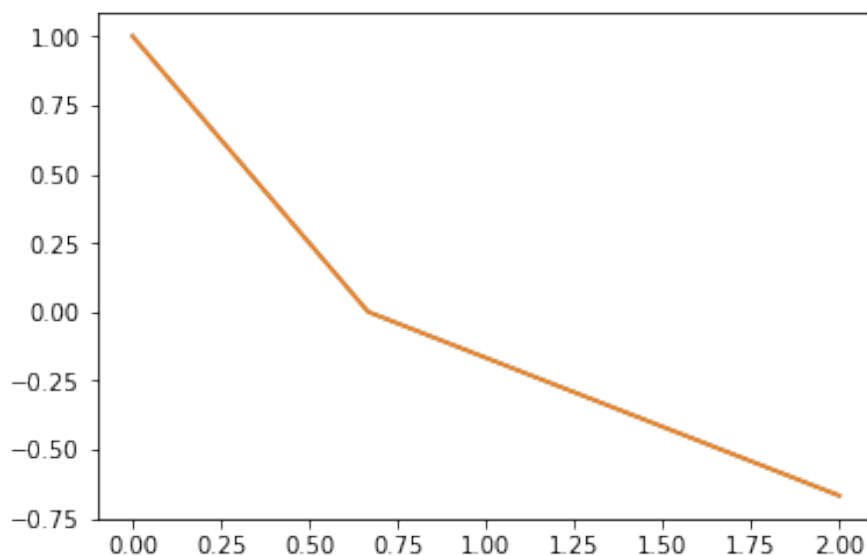
```
[1]: import numpy as np
from scipy.integrate import odeint
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
[2]: def plano_inclinado(y,t,a,b):
      dydt = -a-b*np.sign(y)
      return dydt
```

Resolvamos la ecuación con $a = 1$ y $b = 0,5$ y comparemos con la solución de Carathéodory

```
[3]: v0=1
t = np.linspace(0, 2, 100)
a,b=1,.5
y = odeint(plano_inclinado, v0, t, args=(a,b))
I=np.where(t<=v0/(a+b))
z=(b-a)*t-v0*(b-a)/(a+b)
z[I]=-(a+b)*t[I]+v0
plt.plot(t,y,t,z)
```

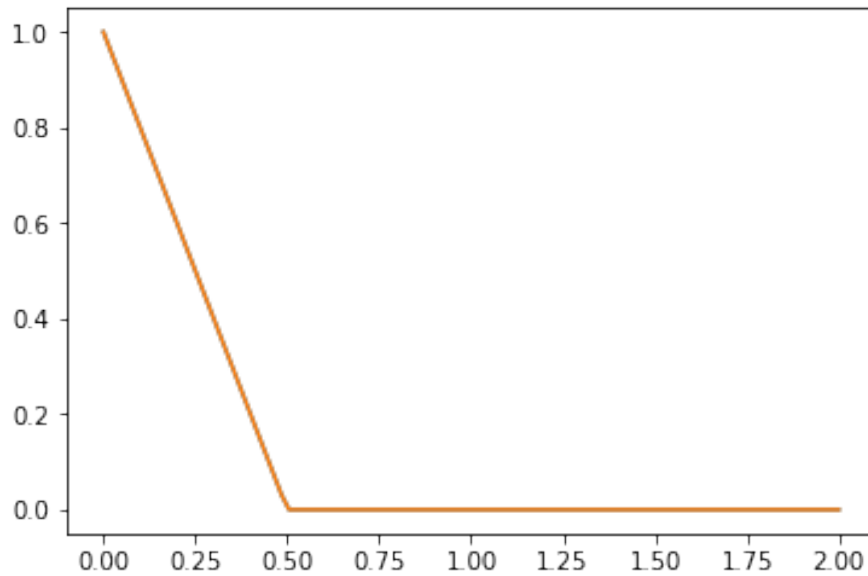
```
[3]: [<matplotlib.lines.Line2D at 0x7fb5becf8d90>,
      <matplotlib.lines.Line2D at 0x7fb5becf8ed0>]
```



En esta situación parece funcionar. La solución numérica coincide casi a la perfección con la solución de Carathéodory. Aún en el caso $a = b$.

```
[4]: a,b=1.0,1.0
y = odeint(plano_inclinado, v0, t, args=(a,b))
I=np.where(t<=v0/(a+b))
z=(b-a)*t-v0*(b-a)/(a+b)
z[I]=-(a+b)*t[I]+v0
plt.plot(t,y,t,z)
```

```
[4]: [<matplotlib.lines.Line2D at 0x7fb5bec44250>,
      <matplotlib.lines.Line2D at 0x7fb5bec44310>]
```

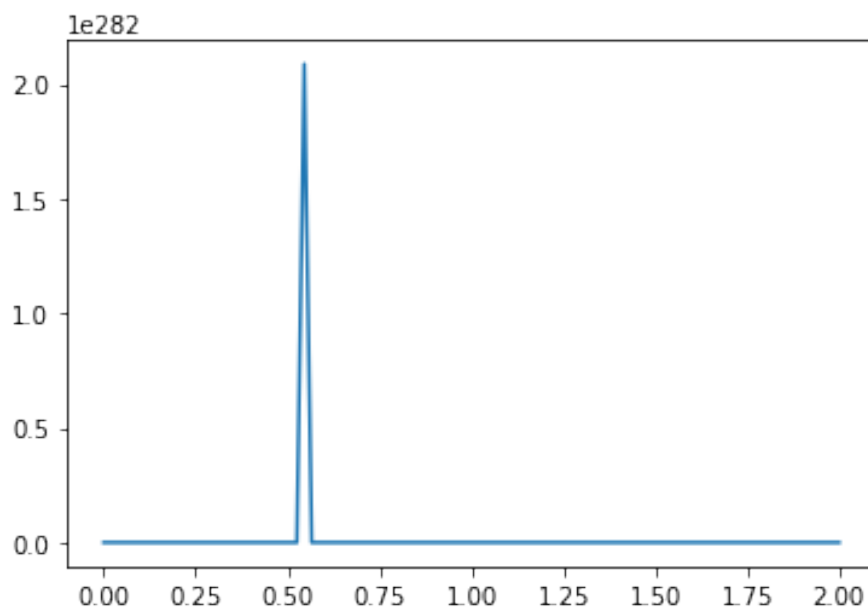


Las cosas cambian cuando $\mu_r \geq \tan(\theta)$. Recordemos que en este caso no existía la solución de Carathéodory.

```
[5]: a,b=1.0,2.0
y = odeint(plano_inclinado, v0, t, args=(a,b))
plt.plot(t,y)
```

```
/home/fernando/anaconda2/lib/python2.7/site-
packages/scipy/integrate/odepack.py:236: ODEintWarning: Excess
work done on this
call (perhaps wrong Dfun type). Run with full_output = 1 to get
quantitative
information.
warnings.warn(warning_msg, ODEintWarning)
```

```
[5]: [<matplotlib.lines.Line2D at 0x7fb5bebc9310>]
```



1.8 Soluciones débiles de Filippov

Vamos a introducir otro concepto de solución debido a Filippov. El concepto de solución de Filippov se formula para sistemas de ecuaciones en general, pero a los fines de evitar tecnicismos vamos a considerar ecuaciones del tipo $y' = f(y)$, donde $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, vale decir ecuaciones escaleras con una incógnita. A la vez asumiremos que f sólo posee discontinuidades a salto finito, esto es que en todo $y_0 \in \mathbb{R}$ existen

$$\lim_{y \rightarrow y_0^+} f(y) \quad \text{y} \quad \lim_{y \rightarrow y_0^-} f(y). \quad (1.29)$$

Como es sabido, si f es continua en y_0 entonces los límites laterales y $f(y_0)$ coinciden. Pero no asumiremos que los límites laterales sean iguales, ni tampoco que exista alguna relación entre ellos y $f(y_0)$.

La estrategia muy original de Filippov consiste en definir una función $\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$, es decir la nueva función tiene por imágenes conjuntos. Concretamente definimos

$$\hat{f}(y) = I_y, \quad I_y \text{ es el intervalo cerrado de extremos } \lim_{y \rightarrow y_0^+} f(y), \lim_{y \rightarrow y_0^-} f(y). \quad (1.30)$$

Ejemplo 1.8.1 Para el caso de la función asociada al plano inclinado $f(v) = -a - b \operatorname{sign}(v)$ tenemos

$$\hat{f}(v) = \begin{cases} -(a+b) & \text{si } v > 0 \\ b-a & \text{si } v < 0 \\ [-(a+b), b-a] & \text{si } v = 0 \end{cases} \quad (1.31)$$

En los puntos donde f es continua, $\hat{f}(y)$ se reduce al conjunto unitario $\{f(y)\}$, donde f es discontinua $\hat{f}(y)$ es un intervalo cerrado con más de un elemento. Si uno representara gráficamente $\hat{f}(y)$ en el plano \mathbb{R}^2 , en el sentido de marcar los puntos del conjunto $\{z | \exists y : z \in \hat{f}(y)\}$, el gráfico será un conjunto conexo. Sin embargo no corresponde al gráfico de ninguna función $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, a menos que f sea continua.

Definición 1.8.8 (Solución de Filippov) Diremos que $y = y(x)$ es solución de Filippov de $y'(x) = f(y(x))$ en el conjunto $I \subset \mathbb{R}$, si y es absolutamente continua y

$$y'(x) \in \hat{f}(y(x)), \quad \text{para casi todo } x \in I. \quad (1.32)$$

Ejemplo 1.8.2 Tendrá el PVI $v' = f(v) = -a - b \operatorname{sign}(v)$, $v(0) = v_0 > 0$ soluciones de Filippov? Cuando $a > b$ la ecuación tenía una solución de Carathéodory $v(t)$ que satisface $v(t) = 0$ solo en $t = v_0/(a+b)$. A la vez este es el único punto donde v es no diferenciable. En el resto de los puntos v satisface la ecuación $v'(t) = -a - b \operatorname{sign}(v(t))$. Como $\hat{f}(v) = \{f(v)\}$ cuando $v \neq 0$ tendremos que la solución de Carathéodory es solución de Filippov.

Veamos que para $a \leq b$ la función

$$v(t) = \begin{cases} -(a+b)t + v_0 & \text{si } t \leq v_0/(a+b) \\ 0 & \text{si } t > v_0/(a+b) \end{cases}$$

es solución de Filippov de $v'(t) = -a - b \operatorname{sign}(v(t))$. Dejamos como ejercicio verificar que $v(t)$ es absolutamente continua. Si $t \in [0, v_0/(a+b))$, entonces $v'(t) = -a -$

$b \operatorname{sign}(v(t)) = f(v(t)) \in \{f(v(t))\} = \hat{f}(v(t))$. Cuando $t > v_0/(a + b)$, tenemos $v(t) = 0$ y consecuentemente $v'(t) = 0 \in [-(a + b), b - a] = \hat{f}(0)$.

Hemos logrado introducir un concepto que da cuenta del comportamiento que se observa en el sistema físico real. Esto es cuando la fricción es suficientemente grande, o la inclinación suficientemente moderada, concretamente cuando $\mu_r > \tan(\theta)$, la masa que inicialmente está subiendo por el plano inclinado a velocidad v_0 se detiene y se mantiene detenida de ahí en más.

La experiencia también nos indica que si la fricción es suficientemente grande, o la inclinación suficientemente moderada, una masa que inicialmente este bajando por el plano inclinado ($v_0 < 0$), también se detendrá. Esto a pesar del hecho de que la velocidad inicial de la masa es a la vez potenciada por la gravedad. ¿Reflejará nuestro modelo este hecho que verificamos empíricamente? ¿Sigue siendo la relación $\mu_r \geq \tan(\theta)$ la condición necesaria para observar el fenómeno? Respondamos estas preguntas en el siguiente ejercicio.

Ejercicio 1.8.13 Supongamos $v_0 < 0$. Demostrar que:

1. Si $b < a$ entonces la masa cae permanentemente con un movimiento acelerado, con aceleración $g(\mu_r \cos(\theta) - \sin(\theta))$. En este caso la solución de (1.28) es clásica.
2. Si $a = b$ entonces la masa cae permanentemente con velocidad constante v_0 . En este caso la solución de (1.28) es clásica.
3. Si $a < b$ la ecuación tiene una solución de Filippov que muestra que la masa cae por el plano hasta $t = v_0/(b - a)$ con una aceleración igual a $b - a > 0$. Una vez detenida la masa permanece en ese estado para siempre.
4. En el caso $a < b$ demostrar cuando tarda la masa en detenerse tanto como para $v_0 > 0$, como para $v_0 < 0$.
5. Demostrar que el plano inclinado con fricción Coulomb tiene soluciones, en el sentido de Filippov, estacionarias, es decir soluciones donde $v(t)$ es constante.

1.9 Método numérico para soluciones de Filippov

Como hemos mostrado los métodos numéricos que dispone Scipy para resolver ecuaciones suelen no encontrar las soluciones débiles de Filippov. El objetivo de la presente sección es discutir un método de solución numérica. Lo vamos a ilustrar con el problema del plano inclinado con fricción seca y con el péndulo con fricción seca.

El método consiste en aproximar la función discontinua que está involucrada en el problema, esto es la función signo, por una función que aproxime a la función signo pero que sea continua. Si somos afortunados la solución numérica para esta función debería aproximar a las soluciones de Filippov.

Con la idea anterior en mente, definimos para $\varepsilon > 0$

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} -1 & x < -\varepsilon \\ x/\varepsilon & x \in [-\varepsilon, \varepsilon] \\ 1 & x > \varepsilon \end{cases}.$$

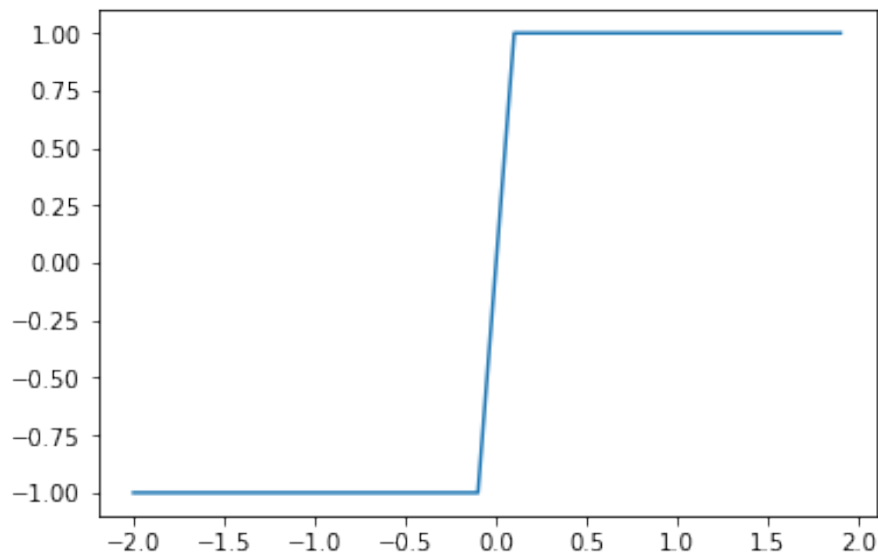
En el caso del plano inclinado usaremos Scipy+Numpy para resolver numéricamente la ecuación $v' - a - b f_\varepsilon(v)$ para distintos valores de los parámetros a y b y compararemos con las soluciones de Filippov de la ecuación $v' - a - b \operatorname{sign}(v)$ de manera de constatar empíricamente si tomando ε cada vez más pequeño podemos obtener un método de aproximación de las soluciones de Filippov.

```
[2]: import numpy as np
from scipy.integrate import odeint
import matplotlib.pyplot as plt
```



```
[3]: def sign_aprox(x,epsi):
      return np.piecewise(x, [ x<-epsi, (x>=-epsi)*(x<=epsi),
      ↪ x>epsi], [-1, lambda x: x/epsi , 1 ])
      x=np.arange(-2,2,.1)
      plt.plot(x,sign_aprox(x,.1))
```

```
[3]: [<matplotlib.lines.Line2D at 0x7f9e4fddf550>]
```

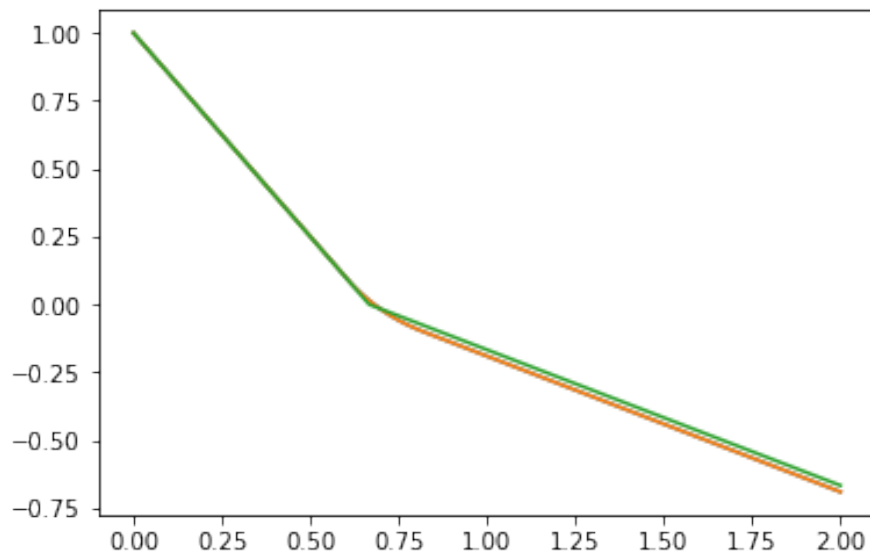


```
[8]: def plano_inclinado_aprox(y,t,a,b,epsi):
      dydt = -a-b*sign_aprox(y,epsi)
      return dydt
```

1.9.0.1 Caso subamortiguado

```
[14]: v0=1
      t = np.linspace(0, 2, 1000)
      a,b=1,.5
      epsi=.1
      y = odeint(plano_inclinado_aprox, v0, t, args=(a,b,epsi))
      plt.plot(t,y)
      z=np.piecewise(t,[t<=v0/(a+b), t>v0/(a+b)], [lambda t :
      ↪ -(a+b)*t+v0, lambda t : (-a+b)*t-v0*(b-a)/(a+b)])
      plt.plot(t,y,t,z)
```

```
[14]: [<matplotlib.lines.Line2D at 0x7f9e4fa78d90>,
      <matplotlib.lines.Line2D at 0x7f9e4fa032d0>]
```

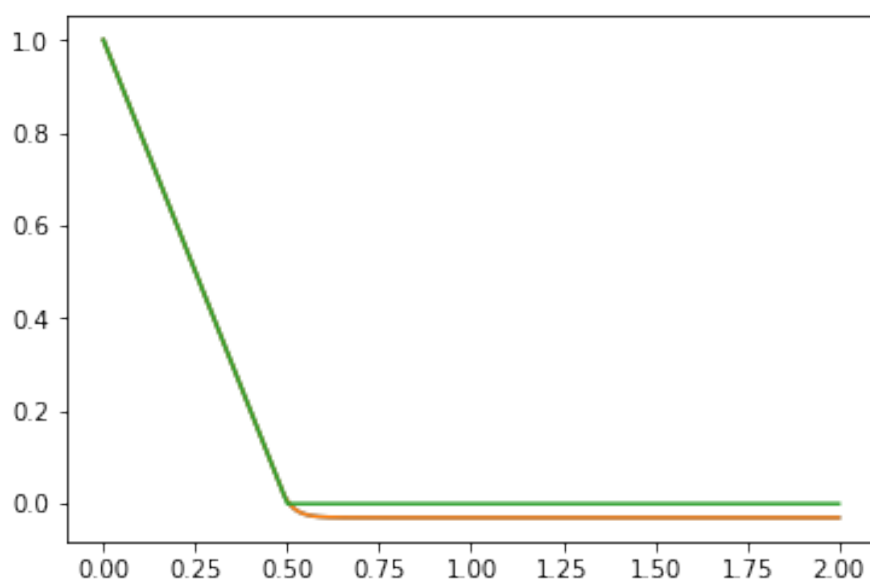


Visualmente luce muy buena aproximación. Obviamente, con un valor más pequeño de ε se logra una aproximación todavía mejor.

1.9.0.2 Amortiguación crítica

```
[19]: a,b=1.0,1.0
      epsi=.03
      y = odeint(plano_inclinado_aprox, v0, t, args=(a,b,epsi))
      plt.plot(t,y)
      z=np.piecewise(t,[t<=v0/(a+b), t>v0/(a+b)], [lambda t :
      ↪ -(a+b)*t+v0, 0])
      plt.plot(t,y,t,z)
```

```
[19]: [<matplotlib.lines.Line2D at 0x7f9e4f895750>,
      <matplotlib.lines.Line2D at 0x7f9e4f78ea10>]
```

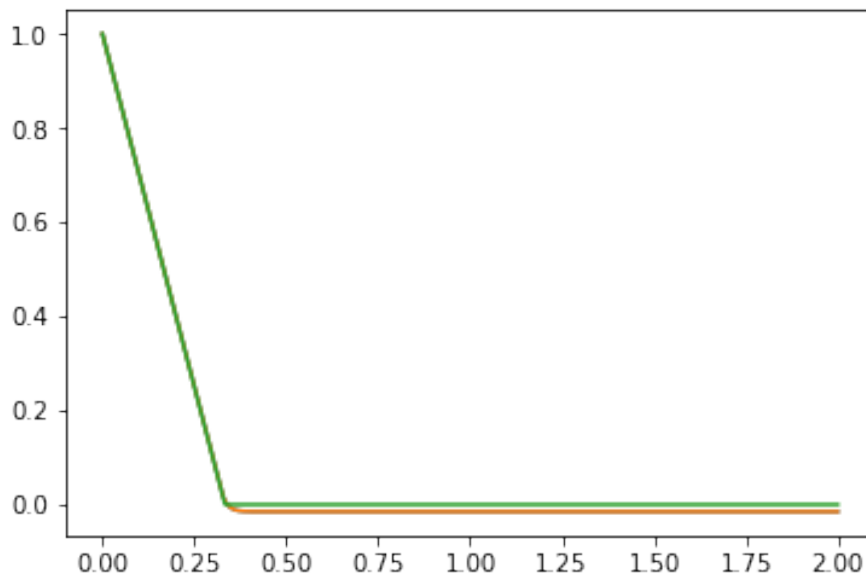


Parce seguir funcionando.

1.9.0.3 Caso sobreamortiguado

```
[20]: a,b=1.0,2.0
      epsi=.03
      y = odeint(plano_inclinado_aprox, v0, t, args=(a,b,epsi))
      plt.plot(t,y)
      z=np.piecewise(t,[t<=v0/(a+b), t>v0/(a+b)], [lambda t :
      ↪ -(a+b)*t+v0,0])
      plt.plot(t,y,t,z)
```

```
[20]: [<matplotlib.lines.Line2D at 0x7f9e4f70bc90>,
      <matplotlib.lines.Line2D at 0x7f9e4f717190>]
```



1.10 Péndulo con amortiguación seca

Se trata de un péndulo simple pero supuesto que el movimiento es afectado por fricción, ver [Nicola Bellomo, 2000, Capítulo 4, subsección 4.5.1]. Esta fricción podría producirse porque el objeto se desplaza por una guía circular, o porque hay rozamiento en el eje de rotación del péndulo. Esto no nos importa mucho. Consideramos los mismos sistemas de ejes y variables Lagrangianas que en la subsección . Hay que modificar la ecuación (1.11) para incluir la fricción. Por todo lo dicho con anterioridad la ecuación quedaría

$$m\vec{P}''(t) = m\vec{F}_g + \vec{F}_{reac} = (mg, 0) - \Phi\vec{n} - \mu_r|\Phi|\frac{\vec{v}_r}{\|\vec{v}_r\|}. \quad (1.33)$$

En este ejemplo la restricción está quieta, de modo que la velocidad relativa \vec{v}_r es igual a la velocidad inercial. Calculando

$$\vec{v}_r = \frac{d}{dt}(r\vec{n}) = r\theta'\vec{t}.$$

Luego, como $\|\vec{t}\| = 1$

$$mr\theta''\vec{t} - mr(\theta')^2\vec{n} = m\vec{P}''(t) = \vec{F}_g + \vec{F}_{reac} = (mg, 0) - \Phi\vec{n} - \mu_r|\Phi|\text{sign}(\theta')\vec{t}. \quad (1.34)$$

Tomando el producto interno con \vec{t} obtenemos

$$mr\theta'' = -mg \sin \theta - \mu_r |\Phi| \operatorname{sign}(\theta') \quad (1.35)$$

La tensión Φ se determina haciendo el producto interno con \vec{n} , resulta igual al caso sin fricción, ver ecuación (1.14). Si convertimos las ecuaciones (1.14) y (1.35) a un sistema de ecuaciones de primer orden, llamando $v = \theta'$, obtenemos:

$$\begin{cases} \theta' &= v \\ v'(t) &= -g \sin \theta - \mu_r |rv^2 + g \cos(\theta)| \operatorname{sign}(v) \end{cases} \quad (1.36)$$

```
[3]: import numpy as np
from scipy.integrate import odeint
import matplotlib.pyplot as plt
```

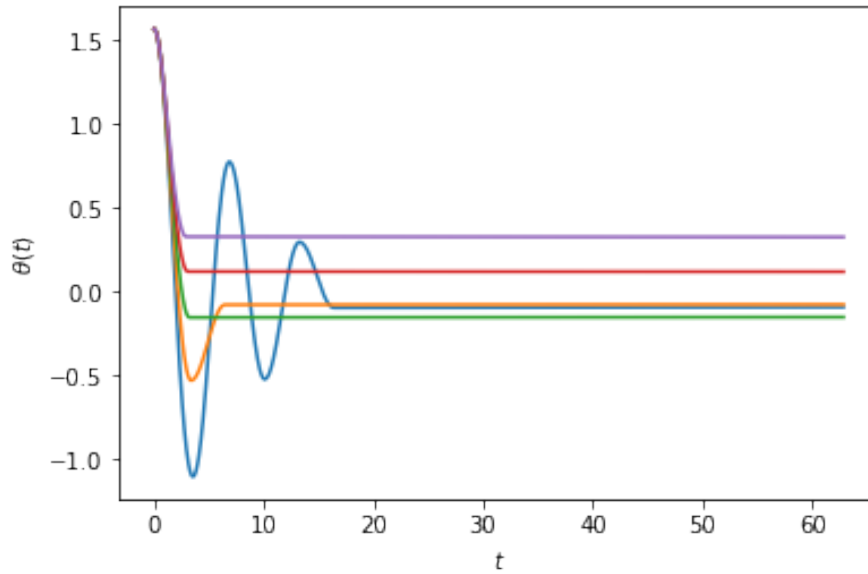
Programamos una función usando Numpy. Nuestra función acepta como parámetros las constantes g, m, r y μ_r . El valor $\mu_r = 0$ corresponde al movimiento del péndulo sin fricción. Vamos a utilizar el método de aproximación ideado en la sección anterior, para ellos introducimos nuestra aproximación continua de la función signo.

```
[4]: def sign_aprox(x, epsilon):
    return np.piecewise(x, [ x<-epsilon, (x>=-epsilon)*(x<=epsilon),
    ↪ x>epsilon], [-1, lambda x: x/epsilon, 1])
```

```
[10]: def pendulo_friccion(y,t,g,m,r,mu_r,epsilon):
    Phi=m*r*y[1]**2+m*g*np.cos(y[0])
    dydt = [y[1], -g/r*np.sin(y[0])-mu_r*np.
    ↪ abs(Phi)*sign_aprox(y[1],epsilon)]
    return dydt
```

Hagamos un primer experimento, integremos las ecuaciones de movimiento con las condiciones iniciales $\theta(0) = \pi/2$ y $\theta'(0) = 0$ y con los valor $\mu_r = 0,1$.

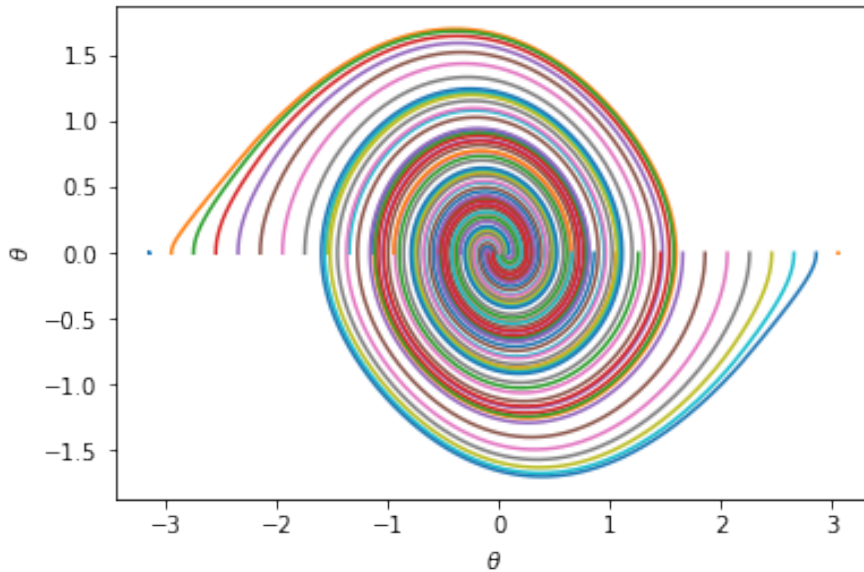
```
[35]: y0=np.array([np.pi*.5,0])
t = np.linspace(0, 20*np.pi, 1000)
m=1.0
r=1.0
g=1.0
epsilon=.0001
from matplotlib inline
fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(1, 1, 1)
for mu_r in np.arange(0.1,1,.2):
    sol = odeint(pendulo_friccion, y0, t, args=(g,m,r,mu_r,epsilon))
    theta=sol[:,0]
    ax.plot(t,theta)
    ax.set_xlabel(r'$t$')
    ax.set_ylabel(r'$\theta(t)$')
```



Se verifica numéricamente que el movimiento se va amortiguando y de hecho parece detenerse. Obviamente se detiene más rápido cuanto más grande es el coeficiente μ_r .

Agamos un retrato de fases del sistema. Como no tenemos una energía que se conserve para graficar las curvas de nivel, debemos resolver la ecuación para varias condiciones iniciales. Usemos $\mu_r = .1$

```
[45]: t = np.linspace(0, 20*np.pi, 100000)
m=1.0
r=1.0
g=1.0
epsi=.0001
mu_r=.1
%matplotlib inline
#qt
fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(1, 1, 1)
for y0_1 in np.arange(-np.pi,np.pi,.2):
    y0=np.array([y0_1,0])
    sol = odeint(pendulo_friccion, y0, t, args=(g,m,r,mu_r,epsi))
    theta=sol[:,0]
    theta1=sol[:,1]
    ax.plot(theta,theta1)
    ax.set_xlabel(r'$\theta$')
    ax.set_ylabel(r'$\dot{\theta}$')
```



Dejamos como ejercicio interpretar en términos físicos el gráfico. Naturalmente podemos definir una solución de Filippov del sistema como un par (θ, v) de funciones absolutamente continuas que satisface para casi todo t que

$$\begin{cases} \theta' = v \\ v'(t) \in \begin{cases} \{-g \sin \theta - \mu_r |rv^2 + g \cos(\theta)|\} & v > 0 \\ \{-g \sin \theta + \mu_r |rv^2 + g \cos(\theta)|\} & v < 0 \\ -g \sin \theta - \mu_r |rv^2 + g \cos(\theta)|[-1, 1] & v = 0 \end{cases} \end{cases} \quad (1.37)$$

Ejercicio 1.10.14 Demostrar que existen infinitas soluciones de Filippov estacionarias del péndulo con fricción de Coulomb. Más concretamente, hay todo un continuo de puntos de equilibrio de la forma $(\theta_0, 0)$. Encontrar el rango del ángulo θ_0 para que la afirmación sea verdad. Interpretar los resultados en el sistema físico.

Una consulta a Google Scholar muestra que el estudio de la dinámica del péndulo con distintos tipos de fricción es un sujeto de estudio y han aparecido artículos recientes reportando distintos resultados o experiencias educativas, tanto en aspectos teóricos como experimentales. Ver por ejemplo [Butikov, 2015, Squire, 1986, Simbach, 2005].

1.11 Elasticidad

La *elasticidad* es una fuerza que se origina por la resistencia de algunos objetos a ser deformados. Los objetos elásticos suelen tener un *estado de equilibrio*, en ese estado no aparece ninguna fuerza, pero apartado de él aparece una fuerza que intenta restablecer el estado de equilibrio. Uno de los objetos elásticos más simples es el *resorte*. Nos vamos a centrar en este tipo de objetos elásticos.

La fuerza que aparece en un resorte, cuando este es desplazado del equilibrio, depende del resorte y encuentra su explicación en las fuerzas que aparecen entre los átomos y moléculas que constituyen la materia. No obstante, no buscaremos ahondar en este aspecto. Como en el caso de la fricción, sólo propondremos leyes que nos sirvan para construir modelos.

A propósito de estas leyes, digamos que son de un carácter diferente de otras leyes que establecimos previamente, como ser las Leyes de Movimiento de Newton, la conservación del momento lineal, el momento angular y la energía. Estas leyes son principios naturales de aplicación universal. La ley de Fricción de Coulomb no es de aplicación universal, obtiene buenos resultados en algunos casos, en el sentido que la predicción que produce el modelo se ajusta a las observaciones. Pero en otras ocasiones es mejor utilizar variantes de esta ley. Con la elasticidad también recurriremos a leyes del mismo carácter. Para distinguirlas de los *Principios generales*, denominaremos este tipo de leyes *Relaciones Constitutivas*.

Como dijimos, modelizaremos matemáticamente un resorte. La simplicidad de este objeto radica en que podemos suponer que el fenómeno de elasticidad se manifiesta sólo en una dirección. Supongamos dos puntos masas de posiciones \vec{x}_1 y \vec{x}_2 están unidos por medio de un resorte. Como es usual denotemos \vec{F}_{ij} a la fuerza que el objeto j ejerce sobre el i . Una alternativa, la más simple, para modelizar las fuerzas elástica \vec{F}_{ij} es:

$$\vec{F}_{12} = k(\|\vec{x}_2 - \vec{x}_1\|)(\vec{x}_2 - \vec{x}_1) \quad \text{y} \quad \vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}. \quad (1.38)$$

La segunda igualdad es consecuencia del Principio de acción y reacción. La función $k > 0$ se denomina la rigidez del resorte y, como está expresado en la fórmula, es función de la distancia entre las masas. Denominaremos a la identidad (1.38) *Ley de Hooke*. Algunas elecciones posibles de la función k son:

k1. k constante positiva. En esta situación el equilibrio se da cuando idealmente las dos masas están superpuestas. La fuerza del resorte sobre cualquiera de las masas siempre va dirigida hacia la otra. En otras palabras la fuerza elástica siempre actúa atrayendo las masas.

k2. Para un cierto $l > 0$ y $c > 0$

$$k(\|\vec{x}_2 - \vec{x}_1\|) = c \left(1 - \frac{l}{\|\vec{x}_2 - \vec{x}_1\|} \right). \quad (1.39)$$

Con esta elección la fuerza del resorte es atractiva entre cuando $\|\vec{x}_2 - \vec{x}_1\| > l$ y repulsiva cuando $\|\vec{x}_2 - \vec{x}_1\| < l$. Cuando $\|\vec{x}_2 - \vec{x}_1\| = l$ el resorte está en equilibrio.

k3. Para un cierto $l > 0$ y $c > 0$, $k = 0$ si $\|\vec{x}_2 - \vec{x}_1\| \leq l$ y $k = c(1 - l/\|\vec{x}_2 - \vec{x}_1\|)$ para $\|\vec{x}_2 - \vec{x}_1\| > l$. La fuerza, cuando no es cero, es atractiva. Esta elección de k es apropiada por ejemplo a una goma elástica.

1.12 Sistema de resorte y guía [Nicola Bellomo, 2000, Capítulo 1, Ejemplo 1.2]

1.12.1 Deducción de ecuaciones

Una masa m sobre una línea recta L sin fricción. Esta conectada por medio de un resorte a un punto A fuera de la recta. Este resorte satisface la Ley de Hooke y la suposición **k2**.

El movimiento y las fuerzas que actúan sobre la partícula están confinadas al plano que contiene a la recta L y al punto A . En este plano introduzcamos un sistema de coordenadas cartesiano ortogonal. El eje x está sobre la recta L y el eje y es perpendicular a x y contiene al punto A en su parte positiva. Sea $(a, 0)$ con $a > 0$ las coordenadas del punto A .

Sobre la masa m actúan dos fuerzas. La del resorte, que debido a que un extremos está conectado a un punto exterior, debemos considerarla fuerza externo (no inercial). La otra fuerza que actúa sobre m es la fuerza reactiva que la mantiene en movimiento sobre

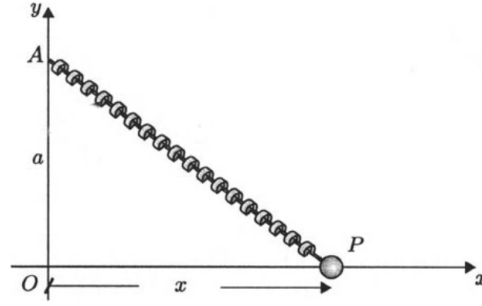


Figura 1.5: Resorte y masa sobre una guía

L , es decir bajo la restricción $y = 0$. Tenemos una partícula en el plano y una restricción, esto son $2 \times 1 - 1 = 1$ grados de libertad. Claramente la coordenada x es conveniente como coordenada Lagrangiana. La normal a la restricción es evidentemente el vector \vec{n} de coordenadas $(0, 1)$. Usando (1.1), (1.9), la Ley de Hooke y la suposición **k2** tenemos:

$$(mx'', 0) = mP''(t) = \vec{R}_\perp + \vec{F}_r = \Phi(0, 1) + c \left(1 - \frac{l}{\sqrt{a^2 + x^2}} \right) (-x, a).$$

Mirando la primera coordenada de esta identidad vectorial

$$mx'' = -c \left(1 - \frac{l}{\sqrt{a^2 + x^2}} \right) x.$$

En este ejemplo la tensión Φ es una función conocida de la posición

$$\Phi = -c \left(1 - \frac{l}{\sqrt{a^2 + x^2}} \right) a$$

Equivalentemente tenemos el sistema

$$\begin{cases} x' = v \\ v' = -\frac{c}{m} \left(1 - \frac{l}{\sqrt{a^2 + x^2}} \right) x. \end{cases} \quad (1.40)$$

1.12.1.1 Puntos de equilibrio

En un punto de equilibrio $v = 0$ y $-\frac{c}{m} \left(1 - \frac{l}{\sqrt{a^2 + x^2}} \right) x = 0$. La última ecuación tiene como soluciones $x = 0$ y si $l > a$ aparecen dos nuevas soluciones $x = \pm \sqrt{l^2 - a^2}$. Así puede haber un equilibrio $(0, 0)$ o cuando $l > a$ hay tres $(0, 0)$ y $(\pm \sqrt{l^2 - a^2}, 0)$. En el equilibrio la fuerza del resorte y de reacción de vínculo se cancelan mutuamente. En los equilibrios $(\pm \sqrt{l^2 - a^2}, 0)$ la fuerza del resorte se anula, pues alcanzo su longitud de equilibrio y consecuentemente la reacción de vínculo desaparece pues no hay fuerza que actúe en la dirección de desplazar a la masa de su guía.

1.12.2 Conservación de energía

Sea \vec{F} la fuerza total que actúa sobre la partícula, la cual es igual a $\vec{R}_\perp + \vec{F}_r$, con \vec{R}_\perp la fuerza reactiva y \vec{F}_r la fuerza del resorte

$$\vec{F}_r = \left(-c \left(1 - \frac{l}{\sqrt{a^2 + x^2}} \right) x, a \right).$$

Siguiendo la Definición 1.1.1 calculamos

$$\vec{F} \cdot \vec{X}' = (\vec{R}_\perp + \vec{F}_r) \cdot (x', 0) = -c \left(1 - \frac{l}{\sqrt{a^2 + x^2}} \right) x x'.$$

Queremos que la expresión anterior sea igual a $-dU/dt$ para cierta U . Podemos hallar el potencial U integrando el segundo miembro por t . Hay muchos potenciales, pues si le sumamos una constante a un potencial obtenemos otro.

$$-U = \int -c \left(1 - \frac{l}{\sqrt{a^2 + x^2}} \right) x x' dt$$

Haciendo el cambio de $s = x(t)$ e integrando obtenemos el potencial

$$U(s) = c \int \left(1 - \frac{l}{\sqrt{a^2 + s^2}} \right) s ds = c \frac{s^2}{2} - cl \sqrt{a^2 + s^2}.$$

Dejamos como ejercicio la justificación de la última igualdad. La energía total es

$$E = m \frac{(x')^2}{2} + c \frac{x^2}{2} - cl \sqrt{a^2 + x^2}. \quad (1.41)$$

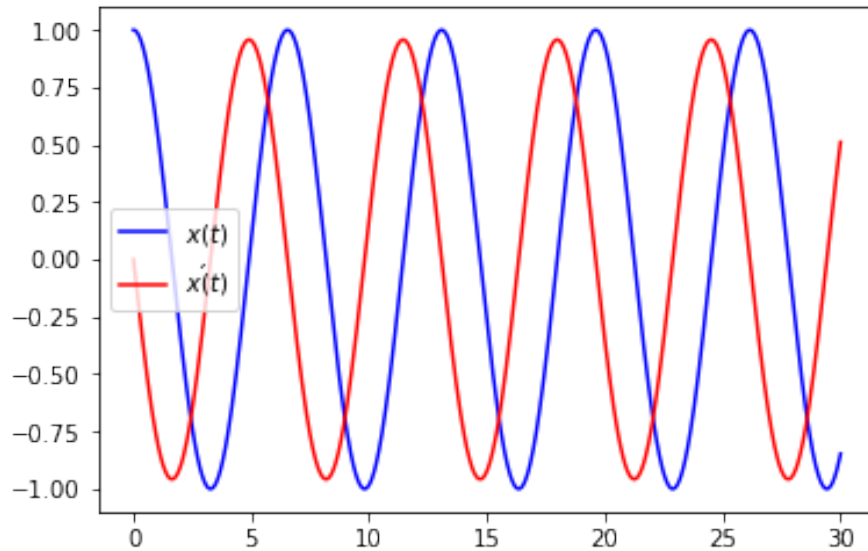
se mantiene constante.

```
[1]: import numpy as np
import scipy as sp
from scipy.integrate import odeint
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d.axes3d import Axes3D
import sympy as sym
sym.init_printing()
```

Introducimos el campo vectorial de la ecuación. Lo probamos integrando las condiciones iniciales $x(0) = 1, x'(0) = 0$. Luego chequeamos la conservación de la energía.

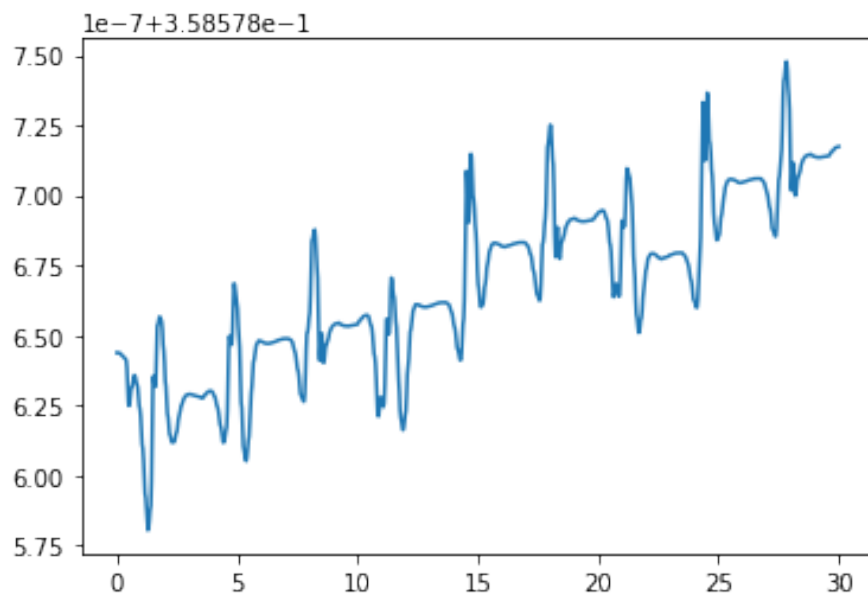
```
[2]: def Cable(y, t, a, l, c, m):
    dydt = [y[1], -c/m*y[0]*(1-l/sp.sqrt(a**2+y[0]**2))]
    return dydt
```

```
[3]: y0=[1,0]
t = np.linspace(0, 30, 1000)
a,l,c,m=1,.1,1,1
sol = odeint(Cable, y0, t, args=(a,l,c,m))
p=plt.plot(t, sol[:, 0], 'b', label=r'$x(t)$')
p=plt.plot(t, sol[:, 1], 'r', label=r'$x'(t)$')
plt.legend(loc='best')
plt.show(p)
```



```
[4]: x,v=sol[:,0], sol[:, 1]
      E=m*v**2/2+c*x**2/2-c*l*np.sqrt(a**2+x**2)
      plt.plot(t,E)
```

```
[4]: [<matplotlib.lines.Line2D at 0x7f5d1f1fdf90>]
```



Un recurso importante para el análisis de un sistema dinámico unidimensional (un grado de libertad) es graficar el retrato de fases. Esto es representar la curva $t \mapsto (x(t), x'(t))$ en \mathbb{R}^2 para distintas condiciones iniciales. A continuación hacemos eso con el integrador con parámetros $a = c = m = 1$ y $l = 0,1$.

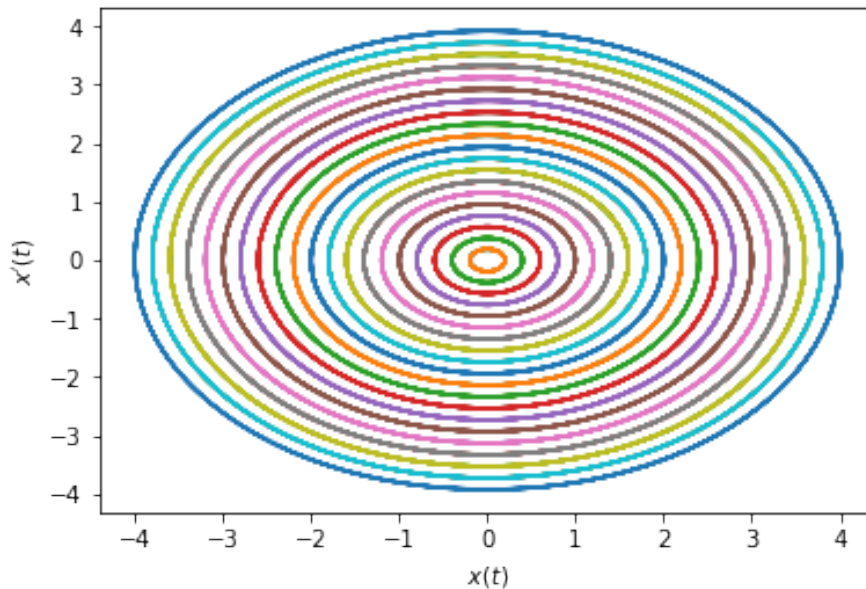
```
[5]: X0=np.arange(-4,4,.2)
      t = np.linspace(0, 30, 1000)
      a,l,c,m=1,.1,1,1
      fig = plt.figure()
      ax=fig.add_subplot(1, 1, 1)
      for x0 in X0:
```

```

y0=[x0,0]
sol = odeint(Cable, y0, t, args=(a,l,c,m))
ax.plot(sol[:,0],sol[:,1])
ax.set_xlabel(r'$x(t)$')
ax.set_ylabel(r'$x^{\prime}(t)$')

```

[5]: `Text(0,0.5,'$x^{\prime}(t)$')`



El gráfico nos reafirma que hay un único punto de equilibrio en $(0, 0)$ e indica que este equilibrio es estable. Notar que como las trayectorias son compactas las soluciones están definidas para todo tiempo. El sentido de recorrido de las trayectorias es horario, puesto que en el semiplano superior $x' = v > 0$, por ende la trayectoria va de izquierda a derecha y en el semiplano inferior pasa lo contrario. Como hay un único equilibrio, repitiendo la argumentación que hicimos para el péndulo, las soluciones deben llenar las trayectorias y por lo tanto terminan cruzándose a sí misma en dos momentos diferentes y consecuentemente son periódicas. Recordemos que el argumento que muestra que una trayectoria asociada a una solución φ llena la curva de nivel de la energía que le corresponde, consiste en suponer que no lo hace, de lo que se infiere que $x_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t)$ existe, de lo que se infiere que x_0 es un equilibrio. Pero el único equilibrio es el $(0, 0)$.

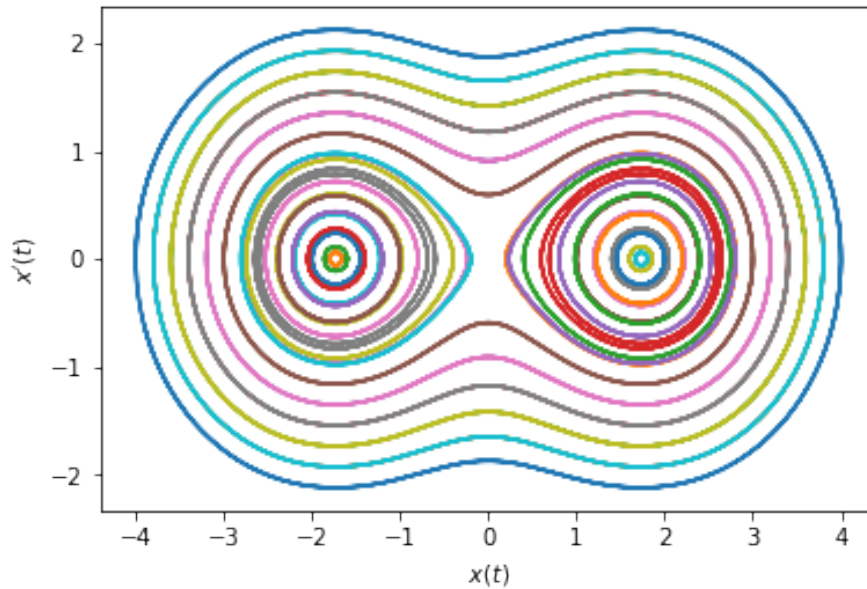
Sin embargo veamos que si cambiamos el parámetro l el comportamiento cualitativo cambia mucho. Recordemos que l representa la longitud en la que el resorte está en equilibrio, esto es no ejerce fuerza. Hagamos un retrato de fases con parámetros $a = c = m = 1$ y $l = 2$.

```

[6]: a,l,c,m=1,2,1,1
fig = plt.figure()
ax=fig.add_subplot(1, 1, 1)
for x0 in X0:
    y0=[x0,0]
    sol = odeint(Cable, y0, t, args=(a,l,c,m))
    ax.plot(sol[:,0],sol[:,1])
ax.set_xlabel(r'$x(t)$')
ax.set_ylabel(r'$x^{\prime}(t)$')

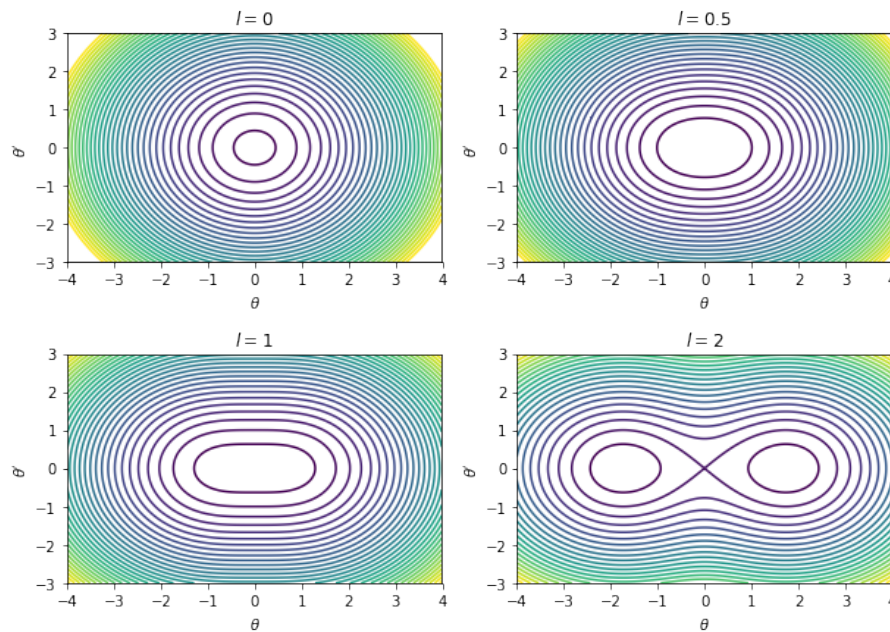
```

[6]: `Text(0,0.5,'$x^{\prime}(t)$')`



Tratándose de un sistema con un grado de libertad y conservativo el retrato de fases se construye con más facilidad, puesto que la conservación de la energía nos da una relación entre $x(t)$ y $x'(t)$ que define implícitamente una curva. En consecuencia, el retrato de fases coincide con el gráfico de curvas de nivel de la energía. La función `contour` de `matplotlib` se usa para hacer gráficos de curvas de nivel. Debajo hallamos los cuatro retratos de fases correspondientes a $a = c = m = 1$ y $l = 0, .5, 1, 2$.

```
[7]: a,c,m=1,1,1
l=[0,.5,1,2]
x = np.arange(-4.0, 4.0, 0.01)
v = np.arange(-3.0, 3.0, 0.01)
X, V = np.meshgrid(x, v)
dim=list(np.shape(X))
dim.append(4)
E=np.zeros(dim)
for j in range(4):
    E[:, :, j]=m*V**2/2+c*X**2/2-c*l[j]*np.sqrt(a**2+X**2)
niveles=np.arange(-5,10,.3)
fig = plt.figure()
plt.subplots_adjust(left=0, bottom=0, right=1.3, top=1.3,
    ↳wspace=.2, hspace=.4)
for j in range(4):
    ax = fig.add_subplot(2, 2, j+1)
    ax.contour(X, V, E[:, :, j],niveles)
    ax.set_xlabel(r'\theta$')
    ax.set_ylabel(r'\theta^\prime$')
    ax.set_title(r'$l=$'+ str(l[j]))
```



Se observa que a medida que el parámetro l crece, pasamos de tener un equilibrio, entorno al cual todas las soluciones oscilan a tres equilibrios (el $(0, 0)$ es equilibrio siempre). Nuevamente del retrato de fases se infiere que las soluciones están definidas para todo tiempo.

En el caso cuando $l > a$, aparecen dos nuevos equilibrios estables. El $(0, 0)$ pasa ahora a ser un equilibrio inestable, las soluciones que empiezan cerca de él parecen propagarse lejos. Del gráfico también se adivina una trayectoria de ocho que rodea cada uno de los equilibrios estables y se cruza en $(0, 0)$. Como $\{(0, 0)\}$ en sí mismo es una trayectoria y dos trayectorias o son disjuntas o son iguales, la figura de ocho debe estar compuesta por tres trayectorias una el equilibrio otras dos por cada "lóbulo" del ocho. Estas trayectorias conectan un equilibrio inestable con el mismo.

Definición 1.12.9 (Trayectoria homoclínica) En un sistema dinámico una trayectoria que conecta un punto de equilibrio inestable con el mismo en un tiempo infinito se llama *homoclínica*.

Las apreciaciones anteriores fueron fundadas en la gráfica que obtuvimos recurriendo al software. Dejamos como ejercicio las demostraciones analíticas, como las que hicimos en el caso del péndulo simple.

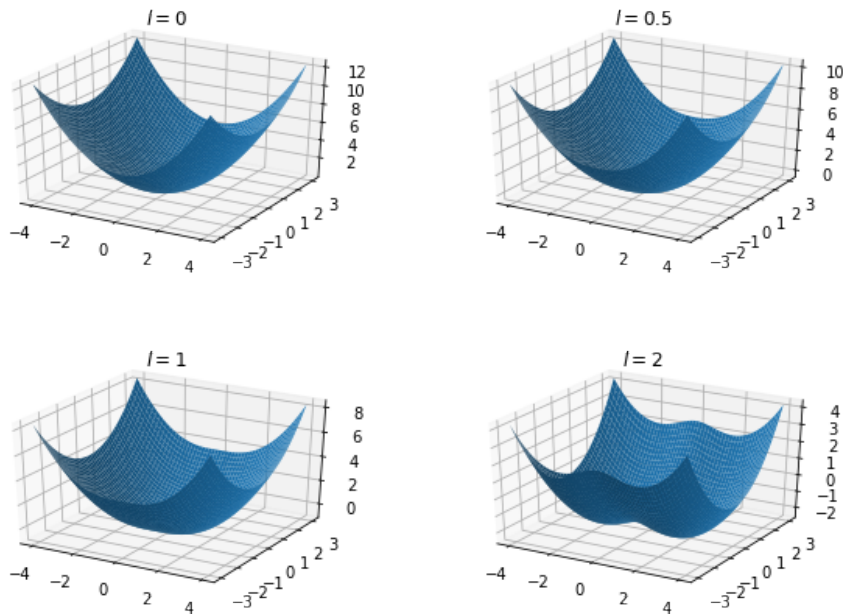
Ejercicio 1.12.15 Analizar analíticamente las soluciones del sistema (1.40), completando los siguientes ítems tanto para $l \leq a$ como $l > a$.

1. Graficar el retrato de fases.
2. Completar el argumento formulado más arriba para justificar que parte de los niveles de energía llenan las soluciones.
3. ¿Qué energía se corresponde con la figura de ocho?
4. Justificar las afirmaciones sobre la heteroclinidad o la homoclinidad de los equilibrios.

Es interesante ver la gráfica de la energía, que es una superficie en \mathbb{R}^3 .

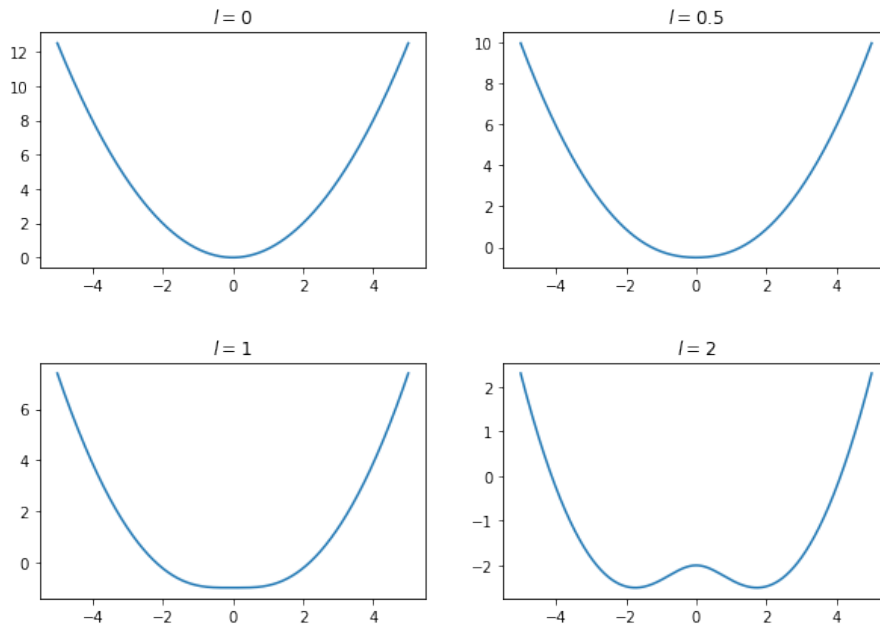
```
[8]: fig = plt.figure()
```

```
plt.subplots_adjust(left=0, bottom=0, right=1.3, top=1.3,
    ↳wspace=.2, hspace=.4)
for j in range(4):
    ax = fig.add_subplot(2, 2, j+1, projection='3d')
    ax.plot_surface(X,V,E[:, :, j])
    ax.set_title(r'$l=$'+ str(l[j]))
```



En un sistema conservativo la suma total neta de las fuerzas que actúan sobre cada masa es el gradiente de cierta función $-U$. Como, por otro lado, en los puntos de equilibrio las sumas de las fuerzas se anulan, vemos que los puntos de equilibrio se presentan siempre en puntos críticos del potencial. Chequeemos esto en el ejemplo que venimos tratando

```
[9]: a,c,m=1.0,1.0,1.0
    l=[0,.5,1,2]
    x=np.linspace(-5,5,1000)
    fig = plt.figure()
    plt.subplots_adjust(left=0, bottom=0, right=1.3, top=1.3,
    ↳wspace=.2, hspace=.4)
    for j in range(4):
        U=c*x**2/2-c*l[j]*np.sqrt(a**2+x**2)
        ax = fig.add_subplot(2, 2, j+1)
        ax.plot(x,U)
        ax.set_title(r'$l=$'+ str(l[j]))
```



```
[10]: x,v=sym.symbols('x,v')
      a,l,c,m=sym.symbols('a,l,c,m',positive=True)
      U=c*x**2/2-c*l*sym.sqrt(a**2+x**2)
      U
```

[10]:

$$-cl\sqrt{a^2 + x^2} + \frac{cx^2}{2}$$

```
[11]: ptos_crit=sym.solve(U.diff(x),x)
      ptos_crit
```

[11]:

$$\left[0, -\sqrt{-a^2 + l^2}, \sqrt{-a^2 + l^2}\right]$$

Los puntos críticos son candidatos a puntos extremos, o más precisamente abscisas de puntos extremos, la ordenada es siempre $v = 0$. Dejamos como ejercicio justificar rigurosamente que en nuestro ejemplo.

- Cuando $l \leq a$ hay un único punto crítico en $(0, 0)$ (el equilibrio en este caso) y se corresponde a un mínimo de U .
- Cuando $l > a$ hay tres puntos críticos, el $(0, 0)$ que corresponde a un máximo local de U , y $(\pm\sqrt{l^2 - a^2}, 0)$ que se corresponden a mínimos.

1.13 Movimiento en un campo gravitatorio

Vamos a considerar ahora el problema del movimiento de los planetas, digamos dos planetas de masas m_1 y m_2 . Supongamos un sistema de coordenadas cartesianas inercial y llamemos \vec{r}_1 y \vec{r}_2 las posiciones de los planetas.

A los fines de poder utilizar los conceptos que hemos formulado, debemos suponer que las masas son puntos. Es evidente para nosotros que caminamos sobre la superficie de la Tierra, que esta no es un punto. Sin embargo, a ciertas escalas astronómicas, por ejemplo relativo a la distancia Sol-Tierra, el radio de la Tierra es tan pequeño que suponer que la Tierra es un punto, si bien implica un recorte de la realidad, sigue produciendo un modelo con buenos resultados. Todo tiene que ver con el grado de exactitud que pretendemos en nuestro modelo.

En nuestro sistema hay dos partículas que se mueven en el espacio que tiene tres dimensiones sin ninguna restricción de su movimiento. Por consiguiente nuestro sistema tiene 6 grados de libertad. Por el momento no se ve provecho en usar otras coordenadas que no sean las cartesianas.

Para poder formular nuestro modelo, necesitamos precisar que fuerza interviene y como se cuantifica. Hace muchos años, Newton llamó a esta fuerza *gravedad*, y postuló que dadas entre dos masas cualesquiera actúa una misteriosa fuerza inercial a la distancia, sin mediar en apariencia ningún medio que las conecte. En la actualidad hay teorías que tratan de explicar la gravedad, a través de medios que pueden ser partículas o ondas. Pero Newton desistió en tratar de explicar el origen de esa fuerza. El hecho es que postular su existencia justifica una infinidad de fenómenos, entre otros: por que los objetos caen al piso o las Leyes de Kepler que habían sido formuladas unos años antes que Newton. Además de producir predicciones sobre el movimiento de astros con una precisión y simplicidad nunca antes alcanzada.

Nosotros adheriremos a este enfoque metodológico, postulando la existencia de esta fuerza según la siguiente ley.

Ley de Gravitación Universal Dadas dos masas m_1 y m_2 en el espacio, entre ellas hay una fuerza inercial que actúa en el sentido que las masas se atraen y cuya magnitud es proporcional a $\frac{m_1 m_2}{d^2}$, donde d es la distancia entre las masas. A la constante de proporcionalidad es costumbre denotarla G y se llama *constante de gravitación universal* y su determinación es empírica.

Es decir, si \vec{r}_1 y \vec{r}_2 son las posiciones de las masas, la dirección de la fuerza de gravedad viene dada por el versor $(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)/r$, donde $r = \|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|$. Luego se debe satisfacer que

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} &= -\frac{G m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{r} = -G m_1 m_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{r^3} \\ m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} &= \frac{G m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{r} = G m_1 m_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{r^3} \end{aligned} \quad (1.42)$$

Llamando $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ y $\mu = G m_1 m_2$ y restando la segunda ecuación de la primera obtenemos

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3}, \quad (1.43)$$

donde $\mu := G(m_1 + m_2)$.

Esta ecuación se conoce como la **ecuación de los dos cuerpos**.

Definición 1.13.10 (Centro de Masas) El vector

$$\vec{c} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}_2 \quad (1.44)$$

se denomina *centro de masas*

Ejercicio 1.13.16 Mostrar como la Ley de balance de momentos justifica que $\vec{c}''(t) = 0$. Esto implica que \vec{c} presenta un movimiento rectilíneo uniforme.

Por definición un sistema de coordenadas cartesiano es inercial cuando se mueve respecto a un sistema inercial con movimiento rectilíneo uniforme. Como las leyes que hemos formulado valen en cualquier sistema inercial, podemos suponer que nuestro sistema acompaña el movimiento de \vec{c} , en el sentido que nuestro sistema de coordenadas

tiene origen en el centro de masas en todo momento. Así podemos suponer que $\vec{c} = 0$ en todo momento. Entoces tendremos que

$$\vec{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}, \quad \text{y} \quad \vec{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}. \quad (1.45)$$

Estas relaciones muestran que si podemos hallar \vec{r} encontraremos las posiciones de las masas. Hemos reducido el sistema de 6 ecuaciones de segundo orden (1.42), al sistema de tres ecuaciones de segundo orden (1.43).

Ejercicio 1.13.17 (Conservación del momento angular) Usar la conservación del momento angular para deducir que el vector

$$\vec{h} = m_1 \vec{r}_1 \times \vec{r}_1' + m_2 \vec{r}_2 \times \vec{r}_2' = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \times \vec{r}',$$

es constante. Inferir de esto que \vec{r}_1 , \vec{r}_2 y \vec{r} están sobre el mismo plano.

Supuesto ahora que el movimiento se hace en un plano y como un sistema de coordenadas que está rotado respecto a uno inercial es inercial también, podemos rotar el sistema de coordenadas de modo que el plano de movimiento sea el plano $z = 0$. Eliminamos así otra incognita más y podemos suponer que $\vec{r} \in \mathbb{R}^2$.

Vamos a usar coordenadas polares (r, θ) y los versores $\vec{u}_r := (\cos \theta, \sin \theta)$ y $\vec{u}_\theta := (-\sin \theta, \cos \theta)$. Notar que $\vec{u}_r \perp \vec{u}_\theta$ y por consiguiente $\mathcal{B} := \{\vec{u}_r, \vec{u}_\theta\}$ forma una base del espacio euclideo 2-dimensional. Usaremos este hecho para representar distintos vectores como combinación lineal de vectores de la base. Los cálculos, los llevaremos adelante con SymPy,

Primero declaramos las variables y asignamos los vectores \vec{u}_r , \vec{u}_θ y el vector \vec{r} al que llamamos pos.

```
In [1]: from sympy import *
t,mu=symbols('t,mu')
x=Function('x')(t)
y=Function('y')(t)
r=Function('r')(t)
theta=Function('theta')(t)
u_r=Matrix([cos(theta),sin(theta)])
init_printing()
u_r
```

Out [1]:

$$\begin{bmatrix} 2 \cos(\theta(t)) \\ 2 \sin(\theta(t)) \end{bmatrix}$$

```
In [4]: u_theta=Matrix([-sin(theta),cos(theta)])
u_theta
```

Out [4]:

$$\begin{bmatrix} -\sin(\theta(t)) \\ \cos(\theta(t)) \end{bmatrix}$$

Vamos a representar el vector aceleración $\vec{a} = \frac{d^2 \vec{u}}{dt^2}$

```
In [6]: pos=r*u_r
a1,a2=symbols('a1,a2')
sol=solve(a1*u_r+a2*u_theta-pos.diff(t,2),[a1,a2])
sol
```

Out [6]:

$$\left\{ a_1 : -r(t) \left(\frac{d}{dt} \theta(t) \right)^2 + \frac{d^2}{dt^2} r(t), \quad a_2 : r(t) \frac{d^2}{dt^2} \theta(t) + 2 \frac{d}{dt} r(t) \frac{d}{dt} \theta(t) \right\}$$

In [7]: sol[a1]

Out [7]:

$$-r(t) \left(\frac{d}{dt} \theta(t) \right)^2 + \frac{d^2}{dt^2} r(t)$$

In [8]: sol[a2]

Out [8]:

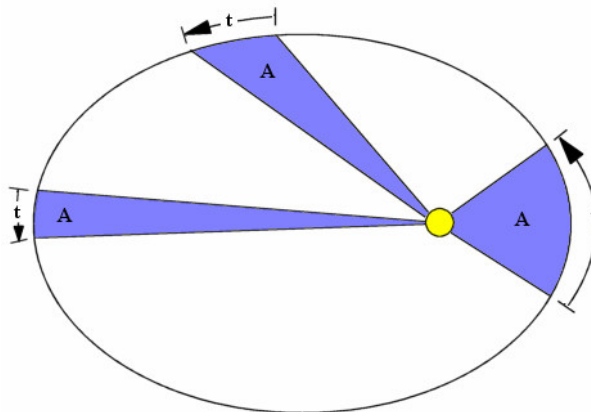
$$r(t) \frac{d^2}{dt^2} \theta(t) + 2 \frac{d}{dt} r(t) \frac{d}{dt} \theta(t)$$

El vector aceleración debe ser igual a la fuerza por unidad de masa $-\mu \vec{r}/r^3$. Notemos que esta fuerza es central, es decir tiene componente nula respecto al vector \vec{u}_θ . Por consiguiente se debe satisfacer que

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) = 0 \iff \exists h \in \mathbb{R} : \boxed{r^2 \dot{\theta} = h}.$$

Hemos deducido

Segunda Ley de Kepler El radio vector barre áreas iguales en tiempos iguales.



En la dirección radial \vec{u}_r la componente de la fuerza es $-\mu/r^2$. Es decir se satisface la ecuación

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{\mu}{r^2}$$

Notar que esta ecuación entraña dos incógnitas r y θ , pero $\dot{\theta}$ puede ser remplazado por h/r^2 por la segunda Ley de Kepler. Declaremos la variable h que juega un rol importante y reemplacemos $\dot{\theta}$ en la ecuación

```
In [9]: h=symbols('h')
ed=(sol[a1]).subs(theta.diff(t),h/r**2)
ed
```

Out [9]:

$$-\frac{h^2}{r^3(t)} + \frac{d^2}{dt^2} r(t)$$

Conseguimos una ecuación no lineal de segundo orden para r . De los métodos que hemos visto, ninguno se aplica a esta ecuación. El truco mágico consiste en considerar la nueva variable dependiente $z = 1/r$ y la nueva variable independiente θ .

```
In [10]: z=Function('z')(theta)
         r=1/z
         ed2=r.diff(t,2)+mu/r**2-h**2/r**3
```

En la ecuación resultante, nuevamente aparece $\dot{\theta}$ y además ahora aparece $\ddot{\theta}$. Tenemos que reemplazar $\dot{\theta}$ por hz^2 y $\ddot{\theta}$ por $\frac{d}{dt}hz^2$.

```
In [11]: theta2diff=(h*z**2).diff(t).subs(theta.diff(t),h*z**2)
         ed3=ed2.subs(theta.diff(t,2),theta2diff)
         ed3=ed3.subs(theta.diff(t),h*z**2)
         ed3
```

Out [11]:

$$-h^2 z^3(\theta(t)) - h^2 z^2(\theta(t)) \left. \frac{d^2}{d\xi_1^2} z(\xi_1) \right|_{\xi_1=\theta(t)} + \mu z^2(\theta(t))$$

```
In [12]: (ed3/h**2/z**2).expand()
```

Out [12]:

$$-z(\theta(t)) - \left. \frac{d^2}{d\xi_1^2} z(\xi_1) \right|_{\xi_1=\theta(t)} + \frac{\mu}{h^2}$$

In []:

Llegamos a la ecuación del oscilador armónico!

$$z(\theta) = C_1 \sin(\theta) + C_2 \cos(\theta) + \frac{\mu}{h^2}.$$

Ahora si escribimos $C_1 = \rho \cos \omega$, $C_2 = -\rho \sin \omega$, recordamos que $z = 1/r$ y llamamos $p = \frac{h^2}{\mu}$ y $e = \frac{\rho h^2}{\mu}$, deducimos

$$r = \frac{p}{1 + e \sin(\theta - \omega)} \quad (1.46)$$

Ejercicio 1.13.18 La ecuación (1.46) es la ecuación de una cónica con foco en el origen y excentricidad e .

Hemos logrado encontrar r como función de θ . No obstante no hemos logrado resolver aún el problema de los dos cuerpos (1.43), para ello deberíamos encontrar $\vec{r}(t)$, es decir poner a \vec{r} como función de t . Esto nos serviría para decir que punto de la órbita ocupa el planeta en un dado momento.

1.14 Péndulo doble

Hallar las ecuaciones del péndulo doble es un más desafiante. No obstante, ateniéndose fielmente a la metodología, describiendo con precisión las variables, los grados de libertad, las restricciones y contabilizando las fuerzas la deduciremos. Los cálculos son muy tediosos y los haremos con Sympy, luego usaremos NumPy y SciPy para resolver numéricamente esas ecuaciones y por último usamos Matplotlib para graficar las soluciones.

```
In [1]: from sympy import *
         init_printing()
```

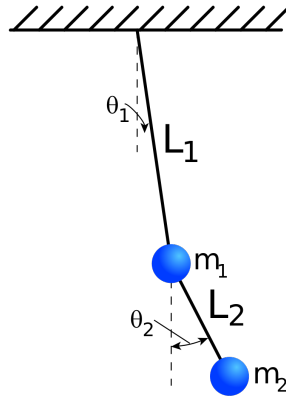


Figura 1.6: Péndulo doble

Suponemos el movimiento confinado a un plano, tenemos dos coordenadas cartesianas por cada masa. En principio estas coordenadas están en ⁴, hay 4 grados de libertad. Pero tenemos dos restricciones, la distancia de la masa m_1 al origen y de las dos masas entre si están fijadas. Por tanto quedan $4-2=2$ grados de libertad. Podemos utilizar los dos ángulos marcados en la figura como coordenadas Lagrangianas

La fuerza de la tensión que mantiene a la masa m_1 a una distancia fija del origen la debemos considerar una fuerza externa, puesto que nuestro sistema tiene dos puntos materiales, las masas m_1 y m_2 , el origen nio es un punto material de nuestro sistema. La fuerza de la restricción que actua manteniendo a m_1 y m_2 a una distancia fija es inercial, por consiguiente satisface el principio de acción y reacción.

Las coordenadas Lagrangianas y cartesianas estan relacionadas por las fórmulas debajo.

```
In [2]:  $\rightarrow$ t,l1,l2,m1,m2,Phi1,Phi2,g=symbols('t,l_1,l_2,m_1,m_2,Phi_1,Phi_2,g')
        theta1=Function('theta_1')(t)
        theta2=Function('theta_2')(t)
        x1=l1*sin(theta1)
        y1=-l1*cos(theta1)
        x2=x1+l2*sin(theta2)
        y2=y1-l2*cos(theta2)
```

Introducimos vectores posicion

```
In [3]: X1=Matrix([x1,y1])
        X2=Matrix([x2,y2])
        X1,X2
```

Out [3]:

$$\left(\begin{bmatrix} l_1 \sin(\theta_1(t)) \\ -l_1 \cos(\theta_1(t)) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} l_1 \sin(\theta_1(t)) + l_2 \sin(\theta_2(t)) \\ -l_1 \cos(\theta_1(t)) - l_2 \cos(\theta_2(t)) \end{bmatrix} \right)$$

Vectores perpendiculares y normales al movimiento de cada uno de ellos

```
In [4]: t1=Matrix([cos(theta1), sin(theta1)])
        t2=Matrix([cos(theta2), sin(theta2)])
        n1=Matrix([ sin(theta1), -cos(theta1)])
        n2=Matrix([ sin(theta2), -cos(theta2)])
        n2
```

Out [4]:

$$\begin{bmatrix} \sin(\theta_2(t)) \\ -\cos(\theta_2(t)) \end{bmatrix}$$

La ecuación de movimiento para la masa m_1 . Todos los términos los pasamos al miembro de la izquierda y así evitamos escribir la ecuación igualada a 0. Sobre la masa m_1 actúa la gravedad y la tensión de las barras l_1 y l_2 cuya magnitud denotamos por Φ_1 y Φ_2 respectivamente. Por similitud con la ecuación del péndulo, hacemos el producto interno de la ecuación con los vectores \vec{t}_1 y \vec{n}_1 .

```
In [5]: Eq1=m1*X1.diff(t,2)+m1*g*Matrix([0,1])+Phi1*n1-Phi2*n2
eq1=Eq1.dot(t1).expand().simplify()
eq1
```

Out [5]:

$$\Phi_2 \sin(\theta_1(t) - \theta_2(t)) + gm_1 \sin(\theta_1(t)) + l_1 m_1 \frac{d^2}{dt^2} \theta_1(t)$$

```
In [6]: eq2=Eq1.dot(n1).expand().simplify()
eq2
```

Out [6]:

$$\Phi_1 - \Phi_2 \cos(\theta_1(t) - \theta_2(t)) - gm_1 \cos(\theta_1(t)) - l_1 m_1 \left(\frac{d}{dt} \theta_1(t) \right)^2$$

Repetimos lo anterior con la masa m_2

```
In [7]: Eq2=m2*X2.diff(t,2)+m2*g*Matrix([0,1])+Phi2*n2
eq3=Eq2.dot(t2).expand().simplify()
eq3
```

Nos aparecerá fórmulas bastante largas, así pasamos a escribir apaisado.

Out [7] :

$$m_2 \left(g \sin(\theta_2(t)) - l_1 \sin(\theta_1(t) - \theta_2(t)) \left(\frac{d}{dt} \theta_1(t) \right)^2 + l_1 \cos(\theta_1(t) - \theta_2(t)) \frac{d^2}{dt^2} \theta_1(t) + l_2 \frac{d^2}{dt^2} \theta_2(t) \right)$$

In [8]: eq4=Eq2.dot(n2).expand().simplify()
eq4

Out [8] :

$$\Phi_2 - g m_2 \cos(\theta_2(t)) - l_1 m_2 \sin(\theta_1(t) - \theta_2(t)) \frac{d^2}{dt^2} \theta_1(t) - l_1 m_2 \cos(\theta_1(t) - \theta_2(t)) \left(\frac{d}{dt} \theta_1(t) \right)^2 - l_2 m_2 \left(\frac{d}{dt} \theta_2(t) \right)^2$$

Deberíamos llegar a dos ecuaciones para θ_1 y θ_2 donde no aparezcan Φ_1 y Φ_2 . Debemos eliminar Φ_1 y Φ_2 de las ecuaciones eq1, eq2, eq3, eq5. La ecuación eq3 ya no tiene las tensiones. Para hallar una más despejamos Φ_2 de eq4 y lo sustituimos en eq5

In [9]: subs_Phi=solve(eq4,Phi2)
subs_Phi

Out [9] :

$$\left[m_2 \left(g \cos(\theta_2(t)) + l_1 \sin(\theta_1(t) - \theta_2(t)) \frac{d^2}{dt^2} \theta_1(t) + l_1 \cos(\theta_1(t) - \theta_2(t)) \left(\frac{d}{dt} \theta_1(t) \right)^2 + l_2 \left(\frac{d}{dt} \theta_2(t) \right)^2 \right) \right]$$

In [10]: eq5=eq1.subs(PHI2,subs_Phi[0]).expand().simplify()
eq5

Out [10] : $g m_1 \sin(\theta_1(t)) + g m_2 \sin(\theta_1(t) - \theta_2(t)) \cos(\theta_2(t))$
 $+ l_1 m_1 \frac{d^2}{dt^2} \theta_1(t) + l_1 m_2 \sin^2(\theta_1(t) - \theta_2(t)) \frac{d^2}{dt^2} \theta_1(t) + \frac{l_1 m_2 \sin(2\theta_1(t) - 2\theta_2(t)) \left(\frac{d}{dt} \theta_1(t) \right)^2}{2} + l_2 m_2 \sin(\theta_1(t) - \theta_2(t)) \left(\frac{d}{dt} \theta_2(t) \right)^2$

Despejamos $\theta_1''(t)$.

In [11]: Ecuacion_theta1=solve(eq5,theta1.diff(t,2))[0]
Ecuacion_theta1

Out [11]:

$$\frac{gm_1 \sin(\theta_1(t)) + \frac{gm_2 \sin(\theta_1(t) - 2\theta_2(t))}{2} + \frac{gm_2 \sin(\theta_1(t))}{2} + \frac{l_1 m_2 \sin(2\theta_1(t) - 2\theta_2(t)) \left(\frac{d}{dt}\theta_1(t)\right)^2}{2} + l_2 m_2 \sin(\theta_1(t) - \theta_2(t)) \left(\frac{d}{dt}\theta_2(t)\right)^2}{l_1(m_1 + m_2 \sin^2(\theta_1(t) - \theta_2(t)))}$$

Si bien la ecuación eq3 no tiene las tensiones si tiene θ_1'' y θ_2'' simultaneamente. Queremos relacionar $\theta''(t)$ con derivadas de menor orden. Por ello sustituimos θ_1'' por su igual almacenado en la variable Ecuacion_theta1. Luego despejamos θ'' .

In [12]: eq6=eq3.subs(theta1.diff(t,2),Ecuacion_theta1)
Ecuacion_theta2=solve(eq6,theta2.diff(t,2))[0]
Ecuacion_theta2

Out [12]:

$$\begin{aligned} & \frac{gm_1 \sin(\theta_1(t)) \cos(\theta_1(t) - \theta_2(t)) - gm_1 \sin(\theta_2(t)) + 0.5gm_2 \sin(\theta_1(t) - 2\theta_2(t)) \cos(\theta_1(t) - \theta_2(t))}{l_2(m_1 + m_2 \sin^2(\theta_1(t) - \theta_2(t)))} \\ & + \frac{-gm_2 \sin^2(\theta_1(t) - \theta_2(t)) \sin(\theta_2(t)) + 0.5gm_2 \sin(\theta_1(t)) \cos(\theta_1(t) - \theta_2(t)) + l_1 m_1 \sin(\theta_1(t) - \theta_2(t)) \left(\frac{d}{dt}\theta_1(t)\right)^2 + l_1 m_2 \sin^3(\theta_1(t) - \theta_2(t)) \left(\frac{d}{dt}\theta_1(t)\right)^2}{l_2(m_1 + m_2 \sin^2(\theta_1(t) - \theta_2(t)))} \\ & + \frac{l_1 m_2 \sin(2\theta_1(t) - 2\theta_2(t)) \cos(\theta_1(t) - \theta_2(t)) \left(\frac{d}{dt}\theta_1(t)\right)^2 + l_2 m_2 \sin(2\theta_1(t) - 2\theta_2(t)) \left(\frac{d}{dt}\theta_2(t)\right)^2}{2l_2(m_1 + m_2 \sin^2(\theta_1(t) - \theta_2(t)))} \end{aligned}$$

Simplificación a mano

La ecuación para θ_1'' ya esta en su forma final. La ecuación para θ_2'' se puede simplificar más. SymPy no se da cuenta como, o quien escribe no se da cuenta de como hacer que SymPy se de cuenta.

Hay que usar las relaciones

$$\sin^3(\theta_1 - \theta_2) + \frac{1}{2} \sin 2(\theta_1 - \theta_2) \cos(\theta_1 - \theta_2) = \sin(\theta_1 - \theta_2)$$

$$\sin(\theta_1) \cos(\theta_1 - \theta_2) - \sin \theta_2 = \cos \theta_1 \sin(\theta_1 - \theta_2)$$

$$\frac{1}{2} \sin \theta_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \frac{1}{2} \sin(\theta_1 - 2\theta_2) \cos(\theta_1 - \theta_2) - \sin^2(\theta_1 - \theta_2) \sin \theta_2 = \sin(\theta_1 - \theta_2) \cos \theta_1$$

Ecuaciones del péndulo doble

$$\begin{aligned} \theta_1'' &= \frac{gm_1 \sin \theta_1 + \frac{gm_2}{2} \sin(\theta_1 - 2\theta_2) + \frac{gm_2}{2} \sin \theta_1 + \frac{l_1 m_2}{2} \sin(2\theta_1 - 2\theta_2)(\theta_1')^2 + l_2 m_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)(\theta_2')^2}{l_1(m_1 + m_2) \sin^2(\theta_1 - \theta_2)} \\ \theta_2'' &= \frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)(g(m_1 + m_2) \cos \theta_1 + l_1(m_1 + m_2)(\theta_1')^2 + l_2 m_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)(\theta_2')^2)}{l_2(m_1 + m_2) \sin^2(\theta_1 - \theta_2)} \end{aligned} \quad (1.47)$$

Ahora usamos NumPy y SciPy para resolver numéricamente las ecuaciones.

```
In [1]: import numpy as np
        from scipy.integrate import odeint

In [2]: def PendDoble(y, t, g, l1, l2, m1, m2):
    theta1, theta2, d_theta1, d_theta2 = y
    dydt1 = d_theta1
    dydt2 = d_theta2
    D = (m1 + m2) * np.sin(theta1 - theta2)**2
    dydt3 = -(g * m1 * np.sin(theta1) + g * m2 * np.sin(theta1 - 2 * theta2) / 2 + g * m2 * np.sin(theta1) / 2 \
              + l1 * m2 * np.sin(2 * theta1 - 2 * theta2) * d_theta1**2 / 2 \
              + l2 * m2 * np.sin(theta1 - theta2) * d_theta2**2) / (l1 * D)
    dydt4 = np.sin(theta1 - theta2) * (g * (m1 + m2) * np.cos(theta1) \
              + l1 * (m1 + m2) * d_theta1**2 + l2 * m2 * np.cos(theta1 - theta2) * d_theta2**2) / (l2 * D)
    dydt = [dydt1, dydt2, dydt3, dydt4]
    return dydt
```



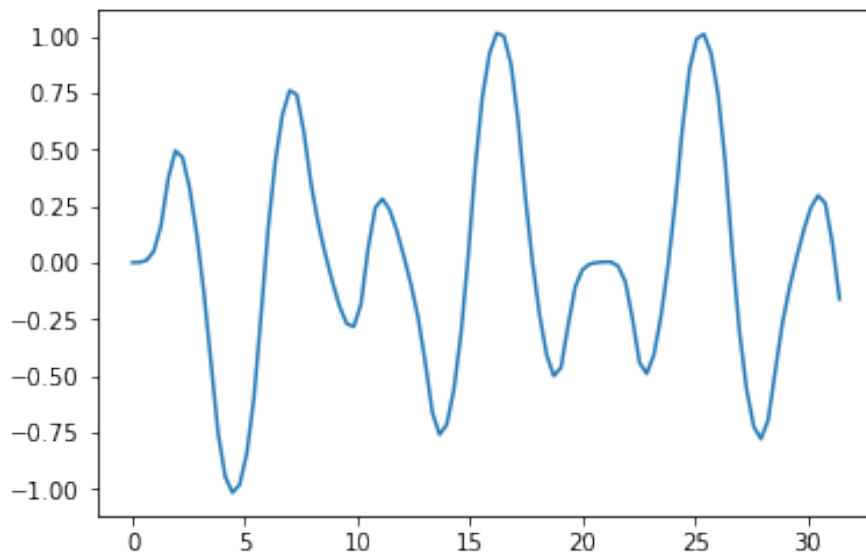
```

In [3]: g,l1,l2,m1,m2=1,1,1,1,1
        y0=[0,np.pi/2,0,0]
        t = np.linspace(0, 10*np.pi, 100)
        sol = odeint(PendDoble, y0, t, args=(g,l1,l2,m1,m2))

In [4]: import matplotlib.pyplot as plt
        %matplotlib qt

In [10]: plt.plot(t,sol[:,0])
         plt.show()

```



1.15 Restricciones que cambian con el tiempo: péndulo rotante [Betounes, 2009, Ejemplo 1.6, p. 9]

Una partícula rueda sin fricción en un aro circular de radio l colocado verticalmente como indica la figura 1.7. Si el aro estuviese quieto el sistema equivale a un péndulo simple. Supongamos que ahora hacemos rotar el aro sobre el eje z un ángulo variable $\omega(t)$. Por el momento asumimos ω una función arbitraria pero conocida de t .

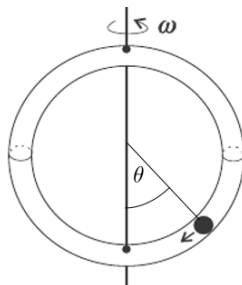


Figura 1.7: Péndulo rotante

Observaciones:

1. Tenemos una restricción que cambia con el tiempo
2. Hay un grado de libertad

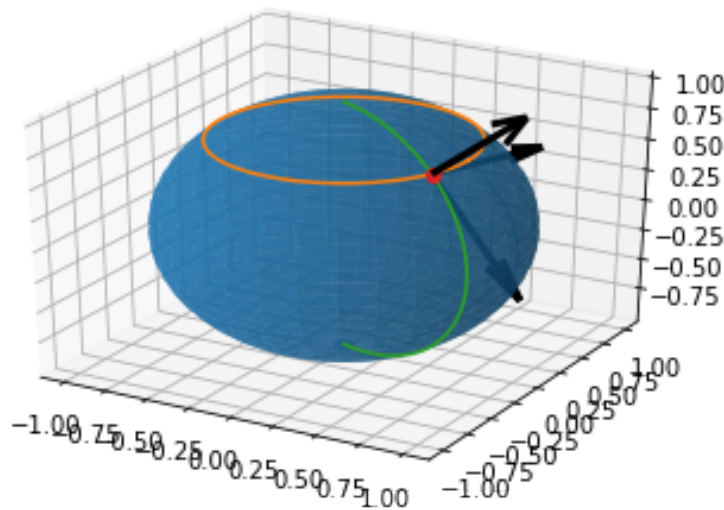
3. La partícula se mueve en una circunsferencia movil, pero la posición de esa circunsferencia es una función conocida del tiempo.
4. El ángulo con el eje z es suficiente para determinar la posición de la partícula.
5. Usamos que el ángulo que la proyección del radio vector sobre el plano x, y es igual a $\omega(t)$ y es conocido.
6. Usamos coordenadas esféricas con origen en el centro del aro y con la dirección positiva del eje z apunta hacia abajo. Entonces las coordenadas cartesianas se relacionan con θ y ω por

$$x = l \sin(\theta) \cos(\omega)$$

$$y = l \sin(\theta) \sin(\omega)$$

$$z = l \cos(\theta)$$

7. En cada punto de la esfera construimos tres versores unitarios mutuamente ortogonales. Uno es perpendicular a la esfera \vec{n} los otros dos \vec{t}_1 y \vec{t}_2 son tangentes y se obtienen como los vectores tangentes a curvas $\theta = \text{cte}$ y $\omega = \text{cte}$ respectivamente.



8. La fuerza de reacción de vínculo tiene que actuar en la dirección de \vec{n} y \vec{t}_1 . Por qué?

```
[3]: from sympy import *
      init_printing()
```

```
[4]: #m, g, l=1, 1, 1

t, g, m, l = symbols('t, g, m, l')
theta = Function('theta')(t)
omega = Function('omega')(t)

#Coordenadas
x = sin(theta) * cos(omega)
y = sin(theta) * sin(omega)
z = cos(theta)

#Versores
n = Matrix([x, y, z])
t1 = n.diff(omega)
t2 = n.diff(theta)
```

```
#Posiones, velocidades y aceleraciones
X=l*n
V=X.diff(t,1)
A=X.diff(t,2)

# Tensiones (magnitudes) van en la dirección de n y t1
Phi1,Phi2=symbols('Phi1,Phi2')

Fg=g*m*Matrix([0,0,1])

Eq1=m*A-Fg+Phi1*n+Phi2*t1
Eq1
```

[4]:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = \Phi_1 \sin(\theta(t)) \cos(\omega(t)) - \Phi_2 \sin(\omega(t)) \sin(\theta(t)) \\ \quad + lm \left(-\sin(\omega(t)) \sin(\theta(t)) \frac{d^2}{dt^2} \omega(t) - 2 \sin(\omega(t)) \cos(\theta(t)) \frac{d}{dt} \omega(t) \frac{d}{dt} \theta(t) - \sin(\theta(t)) \cos(\omega(t)) \left(\frac{d}{dt} \omega(t) \right)^2 \right. \\ \quad \left. - \sin(\theta(t)) \cos(\omega(t)) \left(\frac{d}{dt} \theta(t) \right)^2 + \cos(\omega(t)) \cos(\theta(t)) \frac{d^2}{dt^2} \theta(t) \right) \\ 0 = \Phi_1 \sin(\omega(t)) \sin(\theta(t)) + \Phi_2 \sin(\theta(t)) \cos(\omega(t)) \\ \quad + lm \left(-\sin(\omega(t)) \sin(\theta(t)) \left(\frac{d}{dt} \omega(t) \right)^2 - \sin(\omega(t)) \sin(\theta(t)) \left(\frac{d}{dt} \theta(t) \right)^2 + \sin(\omega(t)) \cos(\theta(t)) \frac{d^2}{dt^2} \theta(t) \right. \\ \quad \left. + \sin(\theta(t)) \cos(\omega(t)) \frac{d^2}{dt^2} \omega(t) + 2 \cos(\omega(t)) \cos(\theta(t)) \frac{d}{dt} \omega(t) \frac{d}{dt} \theta(t) \right) \\ 0 = \Phi_1 \cos(\theta(t)) - gm - lm \left(\sin(\theta(t)) \frac{d^2}{dt^2} \theta(t) + \cos(\theta(t)) \left(\frac{d}{dt} \theta(t) \right)^2 \right) \end{array} \right.$$

Hay tres ecuaciones, lo cual está bien pues necesitaríamos encontrar las incógnitas θ , Φ_1 y Φ_2 . Ahora hacemos el producto interno en la dirección de \vec{t}_2 .

[5]: `Eq1.dot(t2).simplify()`

[5]:

$$m \left(g \sin(\theta(t)) - \frac{l \sin(2\theta(t)) \left(\frac{d}{dt} \omega(t) \right)^2}{2} + l \frac{d^2}{dt^2} \theta(t) \right)$$

La ecuación del péndulo rotante termina siendo

$$\theta'' = -\frac{g}{l} \sin(\theta) + \frac{1}{2} \omega^2 \sin(2\theta). \quad (1.48)$$

Por ejemplo elijamos $\omega(t) = a \cos(bt)$, con $a, b > 0$. Tenemos

$$\theta'' = -\frac{g}{l} \sin(\theta) + \frac{a^2 b^2}{2} \sin^2(bt) \sin(2\theta)$$

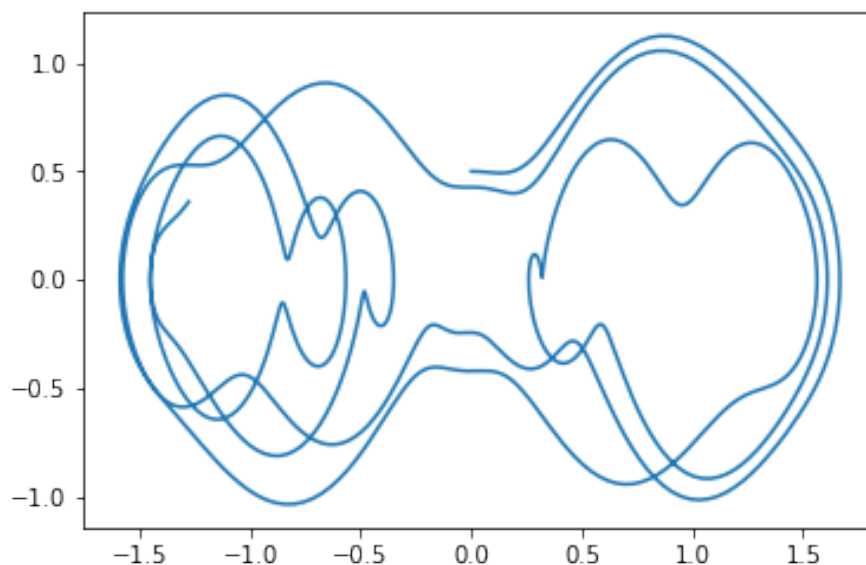
Hagamos algunos experimentos con $g = l = a = 1$ y $b = 2$

[6]: `from scipy.integrate import odeint`

[7]: `def PendRot(y,t,g,l,a,b):
 theta,theta_prima=y
 dydt1=theta_prima
 dydt2=-g/l*np.sin(theta)+a**2*b**2/2*np.sin(b*t)**2*np.
 ↪ sin(2*theta)
 return dydt1,dydt2`

[8]: `y0=[0,0.5]
t = np.linspace(0,40.5, 1000)
sol = odeint(PendRot,y0 ,t, args=(1,1,1,2))
theta,theta_prima=sol[:,0],sol[:,1]`

[9]: `plt.plot(theta,theta_prima)
plt.show()`



[]:

Vemos que la trayectoria se cruza a si misma y no es una curva cerrada. Esto es posible porque la ecuación diferencial es no autónoma. Tiene la forma $x'(t) = f(t, x(t))$, donde

$$x(t) = \begin{pmatrix} \theta \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta \\ v \end{pmatrix}, \quad f(t, x) = \begin{pmatrix} -\frac{g}{l} \sin(\theta) + \frac{a^2 b^2}{2} \sin^2(bt) \sin(2\theta) \\ v \end{pmatrix}$$

Si $\varphi(t)$ es solución ya no es cierto que una traslación $\varphi(t+a)$ lo sea. De este hecho dependía una serie de propiedades que deducimos. Sin embargo, la función $f(t, x)$ es π/b -periódica, esto nos permite deducir el siguiente hecho.

Ejercicio 1.15.19 Si $\varphi(t)$ es solución entonces $\varphi(t + k\pi/b)$, con $k \in \mathbb{Z}$, también lo es. De este hecho se deduce que si existe un $k \in \mathbb{Z}$ y $t \in \mathbb{R}$ tales que $\varphi(t) = \varphi(t + k\pi/b)$ entonces φ es π/b -periódica.

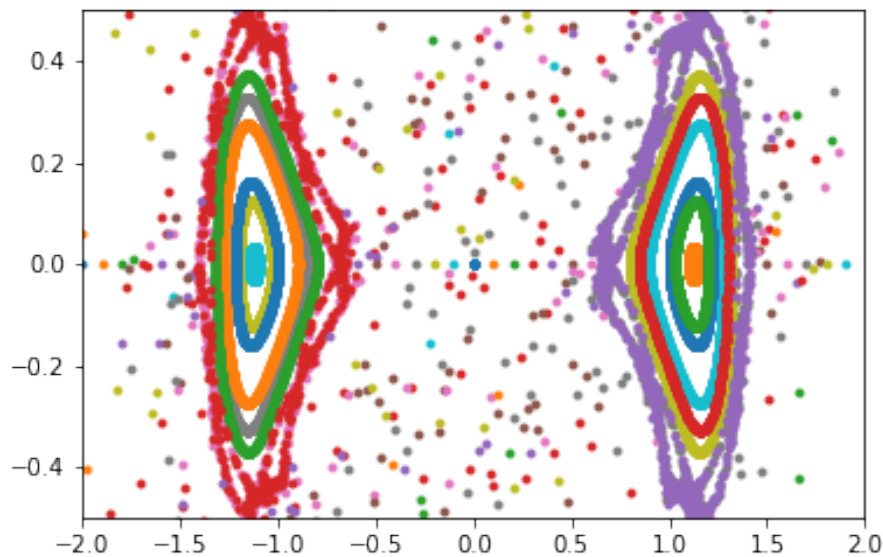
Ejercicio 1.15.20 Si $\varphi(t)$ es solución T periódica, para algún $T > 0$ entonces $T = k\pi/b$ para algún $k \in \mathbb{Z}$.

Es un problema típico encontrar soluciones periódicas de sistemas dinámicos. En un sistema autónomo es suficiente para ellos encontrar una solución que se cruce a si misma en dos momentos diferentes $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$. Según el ejercicio para un sistema no-autónomo y π/b -periódico es suficiente verificar para una solución la condición $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$ donde $t_2 = t_1 + k\pi/b$.

Vamos a proponer un método experimental para hallar soluciones periódicas. Integramos la ecuación diferencial para todas las condiciones iniciales de la forma $(x_0, 0)$ con $x_0 = -2 + 0,1j$, $j = 0, \dots, 40$. Encontramos las soluciones aproximadas en tiempos multiples de π/b . Concretamente en tiempos $\{ \frac{k\pi}{b} | k = 1, \dots, 1000 \}$. Luego graficamos los puntos obtenidos y recortamos el gráfico en una zona de interes.

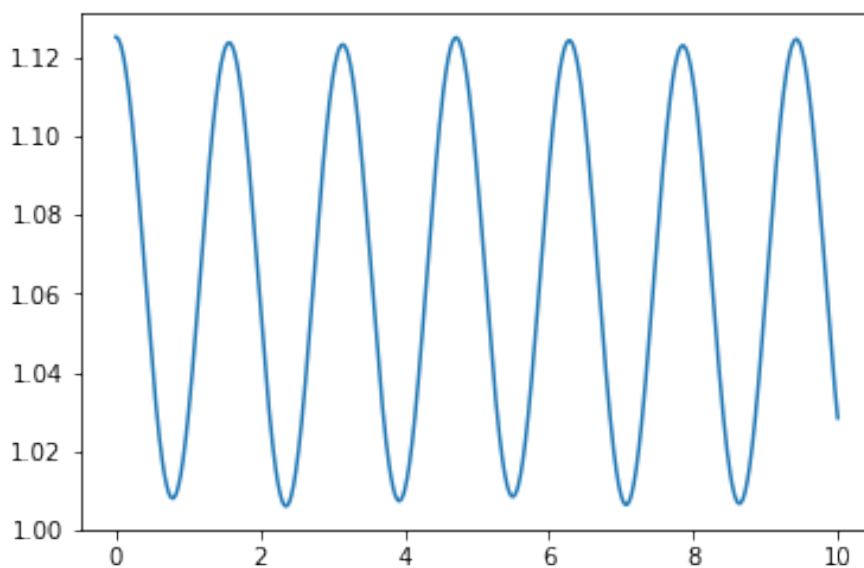
```
In [9]: t = np.arange(0, 1000*np.pi/b, np.pi/b)
        fig = plt.figure()
        ax=fig.add_subplot(1, 1, 1)
        for y0_1 in np.arange(-2, 2, .1):
            y0=[y0_1, 0]
            sol = odeint(PendRot, y0, t, args=(g, l, a, b))
            theta, theta_prima=sol[:, 0], sol[:, 1]
            plt.plot(theta, theta_prima, '.r')
        ax.set_xlim([-2, 2])
        ax.set_ylim([-0.5, 0.5])
```

Out [9]:



Notar que cada solución se grafica de colores distintos y esto nos ayuda, pues el objetivo es encontrar dos puntos del mismo color que se superpongan. En la gráfica se nota que aparecen curvas del mismo color que forman lazos cada vez más chicos. Hay un conjunto de lazos alrededor de los puntos $(\pm 1.125, 0)$. Esta afirmación la estimamos desde el gráfico mismo. Se suelen denominar estos conjuntos de lazos *islas*. Uno adivina que estos lazos terminan reduciéndose a un punto, en ese punto cabría esperar que tenemos superpuestos muchos puntos del mismo color. Todas estas observaciones nos permiten conjeturar que la condición inicial $\theta(0) = \pm 1.125$ y $\theta'(0) = 0$ nos lleva a una solución periódica. Chequeemos esta aseveración empíricamente.

```
In [10]: y0=[1.125,0]
         t = np.linspace(0,10, 1000)
         g,l,a,b=1,1,1,2
         sol = odeint(PendRot,y0 ,t, args=(g,l,a,b))
         theta,theta_prima=sol[:,0],sol[:,1]
         plt.plot(t,theta)
         plt.show()
```



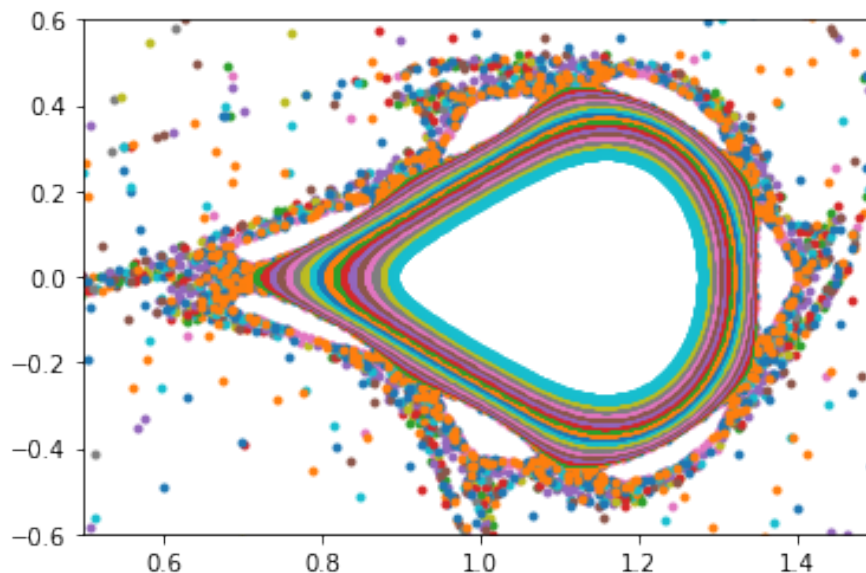
Hemos hallado aproximadamente una solución $\pi/2$ -periódica.

Las islas están rodeadas de un espacio donde los puntos no parecen formar patrón alguno. Hagamos el mismo gráfico anterior pero centrado en la región de transición entre la isla y la parte que luce más caótica. Usamos una mejor resolución: $x_0 = 0,5 + k0,01$, $k = 0, \dots, 40$.

```
In [11]: t = np.arange(0,2000, np.pi/b)
fig = plt.figure()
ax=fig.add_subplot(1, 1, 1)
for y0_1 in np.arange(.5,.9,.01):
    y0=[y0_1,0]
    sol = odeint(PendRot,y0 ,t, args=(g,l,a,b))
    theta,theta_prima=sol[:,0],sol[:,1]
    plt.plot(theta,theta_prima,'.')
ax.set_xlim([.5, 1.5])
ax.set_ylim([-0.6, .6])
```

Out [11]:

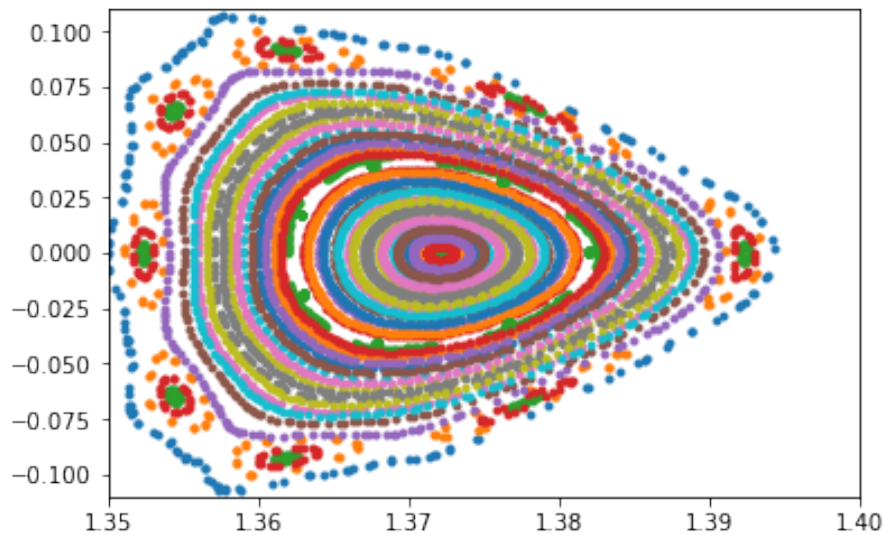
(-0,6, 0,6)



Ahora vemos que esta región está a su vez compuesta de otras islas. Cada una de las cuales podría encerrar más soluciones periódicas. Miremos más en detalle una de estas islas más pequeñas.

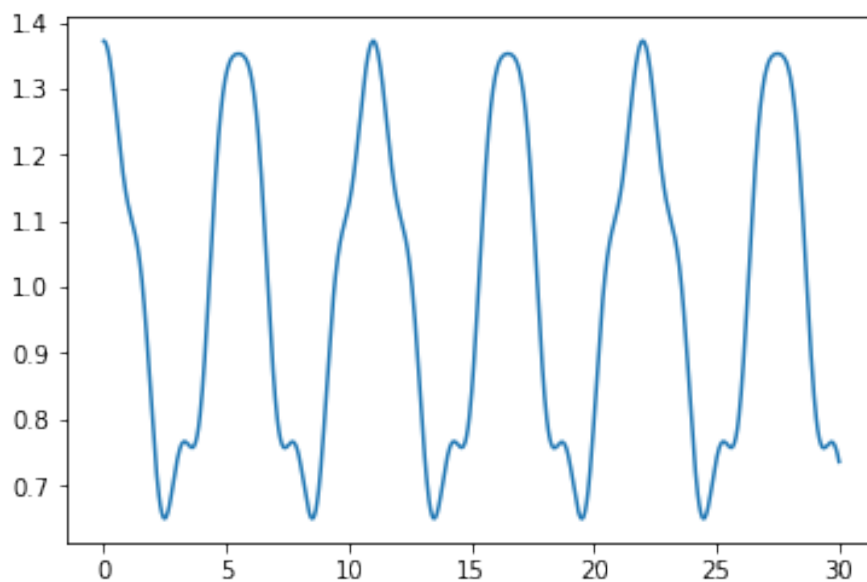
```
In [12]: #!/matplotlib inline
fig = plt.figure()
ax=fig.add_subplot(1, 1, 1)
for y0_1 in np.arange(1.35,1.39,.001):
    y0=[y0_1,0]
    sol = odeint(PendRot,y0 ,t, args=(g,l,a,b))
    theta,theta_prima=sol[:,0],sol[:,1]
    plt.plot(theta,theta_prima,'.')
ax.set_xlim([1.35, 1.4])
ax.set_ylim([-0.11, .11])
```

Out [12]:



En efecto, aparecen un conjunto de lazos con un centro aparente en $(1.372, 0)$.

```
In [14]: y0=[1.372,0]
         t = np.linspace(0,30, 1000)
         g,l,a,b=1,1,1,2
         sol = odeint(PendRot,y0 ,t, args=(g,l,a,b))
         theta,theta_prima=sol[:,0],sol[:,1]
         plt.plot(t,theta)
         plt.show()
```



Que es una función periódica de período $7\pi/2$.

Ejercicio 1.15.21 Hallar una solución periódica distinta de las anteriores.

In []:

1.16 El péndulo de Foucault

Se recomienda leer https://es.wikipedia.org/wiki/P%C3%A9ndulo_de_Foucault



Sistemas Rotantes

Los sistemas inerciales son útiles a la física, en estos sistemas valen las leyes fundamentales que hemos estudiado. No obstante muchas veces es útil introducir sistemas de coordenadas no inerciales.

Cuando un sistema es inercial, otro en movimiento rectilíneo respecto a él también lo es. Por el contrario, si el segundo sistema presenta un movimiento acelerado respecto al inercial, ya no resulta inercial. Esta es una manera de introducir sistemas no inerciales, si bien parecen inconvenientes porque no satisfacen las leyes de la física, hay ocasiones en que se estudia el movimiento de partículas y se introducen sistemas que acompañan en cierta medida el movimiento de las mismas de modo tal que en estos sistemas el movimiento es más simple. Por supuesto hay que ser cuidadoso al convertir las ecuaciones. No podemos plantear las leyes que hemos introducido en estos sistemas, es más conveniente metodológicamente plantear las ecuaciones de movimiento en un sistema inercial para luego cambiar variables al sistema no inercial.

Si un sistema es inercial otro que rota respecto al primero alrededor de un eje fijo ya no es inercial puesto que su movimiento no es rectilíneo uniforme. Vamos a estudiar como convertir ecuaciones en estos sistemas.

Figura 1.8:

El sistema inercial x, y, z . El no inercial ξ, η, ζ . El sistema rota alrededor del eje z con frecuencia Ω .

$$Q(\theta) := \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nuevo sistema

$$\hat{i} = Q(\Omega t)\vec{i} \quad \hat{j} = Q(\Omega t)\vec{j} \quad \hat{k} = Q(\Omega t)\vec{k}$$

$$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \xi\hat{i} + \eta\hat{j} + \zeta\hat{k} = Q(\Omega t)(\xi\vec{i} + \eta\vec{j} + \zeta\vec{k})$$

Vale decir

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = Q(\Omega t) \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$$

Definamos

$$J := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1 Demostrar las relaciones

1. $J^2 = -I$
2. $J^t = -J$
3. $\frac{d}{dt}Q(\Omega t) = \Omega J Q(\Omega t) = \Omega Q(\Omega t) J$

El vector $\omega = (0, 0, \Omega)$ se llama velocidad angular. Se define independiente de las coordenadas. Para un movimiento de rotación uniforme alrededor de un eje fijo es siempre un vector de magnitud igual a la frecuencia del movimiento de rotación, dirección dada por el eje de rotación y sentido de modo tal que el vector apunta hacia donde iría un tornillo que rotase como el sistema.

Supongamos una partícula en movimiento y denotemos las posiciones, velocidades y aceleraciones en ambos sistemas en el momento t por

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \hat{X} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \hat{V} = \begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \\ \zeta' \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}, \hat{A} = \begin{pmatrix} \xi'' \\ \eta'' \\ \zeta'' \end{pmatrix}$$

Ejercicio Omitimos los argumentos de las funciones de t . 1. $V = Q(\omega \wedge \hat{X} + \hat{V})$. (Recordar que Q es función de t). 2. $A = Q[\omega \wedge (\omega \wedge \hat{X}) + 2\omega \wedge \hat{V} + \hat{A}]$

Al término

$$A_{cent} = \omega \wedge (\omega \wedge \hat{X})$$

Lo llamaremos aceleración centrípeta. Al término

$$A_{cor} = 2\omega \wedge \hat{V}$$

aceleración de Coriolis.

Si una partícula esta fija o en movimiento rectilíneo uniforme respecto al sistema inercial, es decir $A = 0$, entonces no está en el mismo estado respecto al sistema no inercial. Allí tenemos que

$$\hat{A} = -A_{cor} - A_{cent}$$

Así, si la partícula estuviera aislada y sobre ella no actuase ninguna fuerza, en el sistema inercial se debe presentar (por definición de sistema inercial) un movimiento rectilíneo uniforme y en el sistema no inercial no lo estaría. Observamos que en el sistema no inercial no vale la ley de inercia, es decir no satisface la definición de sistema inercial.

La aceleración centrípeta depende de la posición del punto y actúa en la dirección perpendicular al eje de rotación que pasa por el punto y tiene sentido hacia el eje de rotación. La aceleración de Coriolis depende sólo de la velocidad, de modo que un punto quieto respecto al sistema no inercial no experimenta esta aceleración. La dirección de la aceleración de Coriolis es perpendicular al movimiento y al eje de rotación. Luego una punto que viaje en la dirección $S - N$ experimentará una aceleración de Coriolis con dirección $E - O$.

Péndulo de Foucault

Vamos ahora aplicar lo anterior para deducir las ecuaciones que gobiernan un péndulo esférico sobre la superficie de la Tierra, esto es el péndulo de Foucault un famoso mecanismo con que se puede demostrar la rotación de la Tierra aunque las nubes hubiesen tapado los cielos permanentemente.

Supongamos que un péndulo esférico de longitud l y masa m está situado en un punto X_0 sobre la superficie terrestre de latitud λ . A la Tierra se la supone perfectamente esférica de radio $R_0 \approx 6371 km$. Supondremos que la posición de equilibrio estable del péndulo está situada justo sobre la superficie terrestre y por consiguiente el sostén está l unidades por encima sobre la dirección de la plomada. Sobre la masa actúan solo la fuerza de la gravedad y la tensión T de la cuerda.

En un sistema inercial, con origen en el centro de la Tierra eje z en la dirección Sur-Norte y que permanece fijo, las ecuaciones de movimiento serían

$$\frac{d^2}{dt^2} X = -mgX/\|X\| + T$$

Vamos a obtener las ecuaciones de movimiento introduciendo algunas suposiciones. Por ejemplo, como el movimiento de la masa se efectúa en las proximidades de X_0 vamos a tener que $X(t)/\|X(t)\| \approx X_0(t)/\|X_0(t)\|$. De modo que supondremos que la fuerza de gravedad es constante sobre la masa e igual a

$$Fg = -mgX_0/R_0$$

La tierra gira en torno a su eje cada 0,99726968 días o $0,99726968 \times 24 \times 3600$ segundos, de modo que en el sistema MKS

$$\Omega = 2,32115230337176 \times 10^{-5} \pi$$

Supongamos un sistema rotante con la Tierra con ejes ξ, η, ζ . Para ζ tenemos que $\zeta = z$ y los ejes ξ, η rotan con frecuencia Ω de modo tal que un punto fijo sobre la superficie terrestre tiene coordenada constante. El eje η pasa por la intersección del meridiano correspondiente al punto X_0 y el ecuador, el eje ξ está sobre el ecuador formando un ángulo de 90° con η . Vamos añadir un sombrerito a las vectores cuando estos esten expresados en las coordenadas del sistema no inercial, por ejemplo $\hat{X}(t)$ es la posición de la masa en el sistema rotante.

Ejercicio Justificar las identidades $\hat{\omega} = \omega$ y $\hat{X}_0 = (\cos(\lambda), 0, \sin(\lambda))$.

Ejercicio Demostrar que las ecuaciones de movimiento en el sistema rotante son

$$m\hat{X}'' = \hat{F}_g + \hat{T} - m\omega \wedge (\omega \wedge \hat{X}) - 2m\omega \wedge \hat{V}$$

Aunque la manera de escribir la ecuación es compacta, es muy complicada tratarla de la manera en que está escrita, además presenta términos que son muy chicos, como por ejemplo la aceleración centrípeta. Se puede omitir estos términos sin perder los comportamientos cualitativos de las soluciones. Usemos SymPy para estimar el valor de esta aceleración centrípeta. En SymPy omitiremos los sombreritos en las cantidades expresadas en ξ, η, ζ

```
In [1]: from sympy import *
        init_printing()

In [2]: t,g,m,l,R0,lamb,Omega=symbols('t,g,m,l,R0,lamb,Omega')

        omega=Matrix([0,0,Omega])

        ## Valor de la frecuencia de rotación en el sistema MKS
        OmegaMKS=2*pi/(0.99726968*24*3600)

        ##Versor en la dirección de la posición de X0
        N=Matrix([cos(lamb),0,sin(lamb)])

        ##Posición del equilibrio estable
        X0=N*R0

        ###Gravedad
        Fg=-m*g*N

        #Radio de la Tierra en MKS
        ROMKS=6371000

        ###Aceleración centrípeta de X0 en MKS
        Acen=omega.cross(omega.cross(X0)).subs({Omega:OmegaMKS,R0:
        ROMKS})
        Acen
```

Out [2] :

$$\begin{bmatrix} -0,00343253426064193\pi^2 \cos(\lambda) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La aceleración centrípeta tiene componetes no nula sólo en el eje ξ . En el sistema no inercial, teniamos que la contribución de A_{cen} viene cambiada de sentido, en este caso se llama aceleración centrífuga . Cuando es sumada a la gravedad la aceleración

centrífuga logra modificar un poco la dirección de la aceleración de la gravedad. Para un punto quieto $\hat{V} = 0$ no tenemos aceleración de Coriolis. El péndulo estaría en reposo y la cuerda l apuntaría en la dirección de la plomada de albañil en la dirección $m^{-1}\hat{F}_g - A_{cent}$. Este vector se suele denominar aceleración de la gravedad efectiva \hat{A}_{g_effect} .

Ejercicio Justificar la siguiente afirmación. Con los valores de Ω reales de la Tierra, el vector \hat{A}_{g_effect} apunta ligeramente al sur en el hemisferio norte y al norte en el hemisferio sur. Para comparar la aceleración de la gravedad real $\hat{A}_g = -gN$ con la efectiva graficar respecto a la latitud del lugar el cociente $\|\hat{A}_g\|/\|\hat{A}_{g_effect}\|$ y el ángulo entre las dos aceleraciones.

Como conclusión de este ejercicio vamos a hacer la simplificación $A_g = A_{g_effect}$. Con lo que desaparece la aceleración centrípeta de nuestras consideraciones. Nos queda

$$m\hat{X}'' = \hat{F}_g + \hat{T} - 2m\omega \wedge \hat{V} \quad (1)$$

Ahora vamos a introducir un nuevo sistemas de coordenadas $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ obtenido de ξ, η, ζ por rotar el plano ξ, ζ un ángulo de $\pi/2 - \lambda$ respecto al eje η y luego trasladar el origen a la posición de equilibrio estable del péndulo. Pongamos barras para las expresiones en el nuevo sistema, de modo que $\bar{X}_0 = 0$. En el nuevo $\eta = \bar{y}$.

Ejercicio Demostrar que en el nuevo sistema las ecuaciones (1) se transforman en

$$m\bar{X}'' = -mg\vec{k} + \bar{T} - 2m\bar{\omega} \wedge \bar{V} \quad (2)$$

Hallar $\bar{\omega}$.

In [3]: *#Rotacion de u respecto al eje eta*

```
Qy=lambdax u:u
Matrix([[cos(u),0,-sin(u)],[0,1,0],[sin(u),0,cos(u)]]))
omega_=Qy(pi/2-lamb)*omega
omega_
```

Out [3]:

$$\begin{bmatrix} -\Omega \cos(\lambda) \\ 0 \\ \Omega \sin(\lambda) \end{bmatrix}$$

Supongamos que el cable que sostiene la masa en el péndulo forma un ángulo de θ con el eje \bar{z} . Denotemos por $\bar{r} = (\bar{x}, \bar{y})$ la proyección del vector posición sobre el plano \bar{x}, \bar{y} . Se tiene que

$$\|\bar{r}\| = \sin(\theta)l, \quad \bar{z} = l(1 - \cos(\theta))$$

Supongamos que L es muy largo en relación al máximo desplazamiento horizontal \bar{r} , entonces el ángulo θ es muy pequeño y aproximando $\sin(\theta)$ y $\cos(\theta)$ por su polinomio de Taylor de orden 1,

$$\|\bar{r}\| = \theta l, \quad \bar{z} = l \frac{\theta^2}{2}$$

Vemos que \bar{z} es mucho más pequeño que \bar{r} , por tanto supondremos (ya con un poco de vergüenza) que $\bar{z} = 0$. Así estamos suponiendo que el movimiento se realiza en una recta y la componente vertical de la tensión \vec{T} tienen que compensar la gravedad $-mg\vec{k}$ ($\vec{k} = (0, 0, 1)$). Sólo supondremos que la gravedad intenta apartar la masa de su trayectoria. Notar que estamos desestimando la componente centrípeta de la tensión, esto es coherente con la suposición que el movimiento es rectilíneo. Luego de la suma entre la tensión y la gravedad sobrevive la componente horizontal de la tensión que es igual a:

$$\vec{T}_{hor} = -\sin(\theta)\|\vec{T}\|\frac{\bar{r}}{\|\bar{r}\|} = -\|\vec{T}\|\frac{\bar{r}}{l} = -\|\vec{T}\|\left(\frac{\bar{x}}{l}, \frac{\bar{y}}{l}\right)$$

La componente vertical es $\vec{T}_{ver} = \|\vec{T}\| \cos(\theta) \vec{k} \approx \|\vec{T}\| \vec{k}$

Figura 1.9:

Hagamos los reemplazos en la ecuación con SymPy

```
In [4]: x=Function('x')(t)
        y=Function('y')(t)
        z=Function('z')(t)
        Phi=Function('Phi')(t)

        T=Phi*Matrix([-x/l,-y/l,1])

        X=Matrix([x,y,z])

        Eq=X.diff(t,2)+g*Matrix([0,0,1])+2*omega_.cross(X.
↪diff(t))-T/m
        Eq
```

Out [4]:

$$\begin{bmatrix} -2\Omega \sin(\lambda) \frac{d}{dt} y(t) + \frac{d^2}{dt^2} x(t) + \frac{\Phi(t)}{lm} x(t) \\ 2\Omega \sin(\lambda) \frac{d}{dt} x(t) + 2\Omega \cos(\lambda) \frac{d}{dt} z(t) + \frac{d^2}{dt^2} y(t) + \frac{\Phi(t)}{lm} y(t) \\ -2\Omega \cos(\lambda) \frac{d}{dt} y(t) + g + \frac{d^2}{dt^2} z(t) - \frac{1}{m} \Phi(t) \end{bmatrix}$$

Sustituamos z por cero y Ω por su valor en el sistema MKS

```
In [5]: Eq.subs({Omega:OmegaMKS,z:0}).doit()
```

Out [5]:

$$\begin{bmatrix} -4,64230460674351 \cdot 10^{-5} \pi \sin(\lambda) \frac{d}{dt} y(t) + \frac{d^2}{dt^2} x(t) + \frac{\Phi(t)}{lm} x(t) \\ 4,64230460674351 \cdot 10^{-5} \pi \sin(\lambda) \frac{d}{dt} x(t) + \frac{d^2}{dt^2} y(t) + \frac{\Phi(t)}{lm} y(t) \\ g - 4,64230460674351 \cdot 10^{-5} \pi \cos(\lambda) \frac{d}{dt} y(t) - \frac{1}{m} \Phi(t) \end{bmatrix}$$

De la tercera componente vemos que $\Phi(t) \approx mg$. Sustituimos ese valor en la ecuación

```
In [6]: Eq1=Eq.subs({Phi:m*g,z:0}).doit()
        Eq1
```

Out [6]:

$$\begin{bmatrix} -2\Omega \sin(\lambda) \frac{d}{dt} y(t) + \frac{g}{l} x(t) + \frac{d^2}{dt^2} x(t) \\ 2\Omega \sin(\lambda) \frac{d}{dt} x(t) + \frac{g}{l} y(t) + \frac{d^2}{dt^2} y(t) \\ -2\Omega \cos(\lambda) \frac{d}{dt} y(t) \end{bmatrix}$$

```
In [7]: Eq1[0], Eq1[1]
```

Out [7]:

$$\left(-2\Omega \sin(\lambda) \frac{d}{dt} y(t) + \frac{g}{l} x(t) + \frac{d^2}{dt^2} x(t), \quad 2\Omega \sin(\lambda) \frac{d}{dt} x(t) + \frac{g}{l} y(t) + \frac{d^2}{dt^2} y(t) \right)$$

Ecuaciones Péndulo Foucault

$$\frac{d^2}{dt^2} x(t) = 2\Omega \sin(\lambda) \frac{d}{dt} y(t) - \frac{g}{l} x(t) \quad (3)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) = -2\Omega \sin(\lambda) \frac{d}{dt}x(t) - \frac{g}{l}y(t) \quad (4)$$

Ejercicio Resolver numéricamente el sistema de ecuaciones. A partir de los resultados obtenidos inferir el periodo de precesión y compararlo con el resultado chequeado a partir de experimentos, esto es que el plano de movimiento del péndulo completa una vuelta cada

$$\frac{2\pi}{\Omega \sin(\lambda)}.$$

Ejercicio Las ecuaciones (3) y (4) forman un sistema de ecuaciones de orden 2, lineales a coeficientes constantes con dos incógnitas. Podríamos llevarlo a una ecuación lineal con coeficientes constantes de orden 4 y resolverla por los medios que hemos estudiado en Ecuaciones Diferenciales. Si embargo se realiza el siguiente truco que es más eficiente y que te proponemos explorar como ejercicio. Multiplicar la ecuación (4) por la unidad imaginaria i y luego se suman la ecuación que resulta de esta operación a la ecuación (3). Llamar $\zeta = x + iy$. Demostrar que ζ , que ahora es una función con valores complejos, satisface una ecuación lineal con coeficientes constantes de segundo orden. Resolver esta ecuación y de allí obtener x e y . Hay que desestimar términos de orden Ω^2 que son muy pequeños.

In []:

2 Movimiento de un cuerpo rígido

En el presente capítulo consideramos un sistema de partículas que es sometido a un tipo especial de movimiento conocido como *movimiento de un cuerpo rígido*. Entendemos por *cuerpo rígido* a un objeto material que puede moverse sin deformación. Podemos pensar a este objeto material como un conjunto constituido por una gran cantidad de puntos masa. Este movimiento conserva la distancia entre cualquier par de partículas en el sistema.

2.1 Coordenadas para movimientos rígidos

Como dijimos, vamos a tratar de elaborar el concepto de cuerpo rígido por medio del concepto de punto masa.

Definición 2.1.1 (Cuerpo rígido) Es un sistema de N puntos masa de posiciones $\vec{X}_1, \dots, \vec{X}_N$ y masas m_1, \dots, m_N donde actúa una fuerza reactiva que obliga a a satisfacer la restricción

$$\|\vec{X}_i(t) - \vec{X}_j(t)\| = \|\vec{X}_i(0) - \vec{X}_j(0)\|, \quad (2.1)$$

para todo $i, j = 1, \dots, N$ y para todo $t \in \mathbb{R}$.

Típicamente los puntos masa que componen un cuerpo rígido son partículas microscópicas como átomos o moléculas y las fuerzas reactivas que actúan entre ellos son las fuerzas electromagnéticas que los enlazan.

¿Cuánto grados de libertad tiene el movimiento de un cuerpo rígido? ¿Cuántas variables se requiere para representar matemáticamente este movimiento? Este tipo de preguntas responderemos a continuación.

El siguiente Teorema nos dice que para describir el movimiento de un cuerpo rígido es suficiente introducir como coordenadas una matriz del *grupo especial ortogonal* $SO(3, \mathbb{R})$ y un vector dependiente de t que representa el centro de masas. Recordemos que

$$SO(3, \mathbb{R}) = \{O \in \mathbb{R}^{3 \times 3} | OO^t = O^t O = I, \det O = 1\}.$$

Teorema 2.1.1 (Caracterización movimiento cuerpo rígido) Sea $\vec{X}_1, \dots, \vec{X}_N : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ el movimiento de un cuerpo rígido, $(a, b) \subset \mathbb{R}$. Entonces existe una función $Q : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow SO(3, \mathbb{R})$ con $Q(0) = I$ y N -vectores $\vec{U}_i \in \mathbb{R}^3$ $i = 1, \dots, N$ que satisfacen $\sum_{i=1}^N m_i \vec{U}_i = 0$, tales que

$$\vec{X}_i(t) = Q(t)\vec{U}_i + \vec{R}(t), \quad (2.2)$$

para cada $i = 1, \dots, N$ y para todo $t \in I$. El vector $\vec{R}(t)$ es la posición del centro de masa en el tiempo t .

El teorema dice que, en un movimiento de cuerpo rígido, cada partícula del cuerpo sigue el movimiento del centro de masa, mientras que gira alrededor de este centro de masa. Este es el contenido de las ecuaciones (2.2), que expresan los vectores posición de las partículas en términos del vector posición $\vec{R} = \vec{R}(t)$ del centro de masa, la matriz de rotación $Q = Q(t)$, y los vectores \vec{U}_i (constantes), que son las posiciones iniciales de los cuerpos en relación con el centro de la masa inicial ($\vec{X}_i(0) = \vec{U}_i + \vec{R}(0)$).

Demostración. Definamos

$$\vec{Y}_i(t) = \vec{X}_{i+1}(t) - \vec{X}_1(t), \quad i = 1, \dots, N-1.$$

Estos vectores satisfacen

$$\begin{aligned} |\vec{Y}_i(t) - \vec{Y}_j(t)| &= |\vec{Y}_i(0) - \vec{Y}_j(0)| \\ |\vec{Y}_i(t)| &= |\vec{Y}_i(0)| \end{aligned}$$

Tomando la norma y elevando al cuadrado la primera ecuación y usando la segunda.

$$|\vec{Y}_i(t)|^2 - 2\vec{Y}_i(t) \cdot \vec{Y}_j(t) + |\vec{Y}_j(t)|^2 = |\vec{Y}_i(0)|^2 - 2\vec{Y}_i(0) \cdot \vec{Y}_j(0) + |\vec{Y}_j(0)|^2 \quad (2.3)$$

De lo que terminamos infiriendo que

$$\vec{Y}_i(t) \cdot \vec{Y}_j(t) = \vec{Y}_i(0) \cdot \vec{Y}_j(0), \quad t \in (a, b), i, j = 1, \dots, n$$

Ejercicio 2.1.1 Sean $\{V_i\}_{i=1}^N$ vectores en un espacio con producto interno \mathcal{H} . Entonces $\{V_i\}$ son linealmente independientes si y sólo si la matriz cuadrada $A_{ij} = V_i \cdot V_j$ es no singular.

Sea \mathcal{H} el subespacio generado por los vectores $\{\vec{Y}_i(0)\}$ y sea $k = \dim \mathcal{H}$ (notar que $k \leq 3$). Podemos suponer que $\vec{Y}_1(0), \dots, \vec{Y}_k(0)$ son linealmente independientes y un sistema de generadores de \mathcal{H} .

Ejercicio 2.1.2 Demostrar que si $j > k$ existen $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ independientes de t tal que

$$\vec{Y}_j(t) = \alpha_1 \vec{Y}_1(t) + \dots + \alpha_k \vec{Y}_k(t).$$

Consideremos las siguientes matrices.

$$\begin{aligned} B_1(t) &= \vec{Y}_1 \cdot \vec{Y}_1 \\ B_2(t) &= \begin{bmatrix} \vec{Y}_1 \cdot \vec{Y}_1 & \vec{Y}_1 \cdot \vec{Y}_2 \\ \vec{Y}_2 \cdot \vec{Y}_1 & \vec{Y}_2 \cdot \vec{Y}_2 \end{bmatrix} \\ B_3(t) &= \begin{bmatrix} \vec{Y}_1 \cdot \vec{Y}_1 & \vec{Y}_1 \cdot \vec{Y}_2 & \vec{Y}_1 \cdot \vec{Y}_3 \\ \vec{Y}_2 \cdot \vec{Y}_1 & \vec{Y}_2 \cdot \vec{Y}_2 & \vec{Y}_2 \cdot \vec{Y}_3 \\ \vec{Y}_3 \cdot \vec{Y}_1 & \vec{Y}_3 \cdot \vec{Y}_2 & \vec{Y}_3 \cdot \vec{Y}_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Entonces

$$B_i(t) = B_i(0), \quad i = 1, 2, 3.$$

Por la ecuación (2.3) y el ejercicio 2.1.1, $\vec{Y}_1(t), \dots, \vec{Y}_k(t)$ son linealmente independientes y k es la cantidad máxima de vectores linealmente independientes en $\{\vec{Y}_i(t)\}$.

Ahora aplicamos el método de ortogonalización de Gram-Schmidt a $\vec{Y}_j(t), j = 1, 2, 3$. Consecuentemente definimos

$$\begin{aligned} \vec{E}_1^*(t) &= \vec{Y}_1(t) \\ \vec{E}_2^*(t) &= -(\vec{Y}_1(t) \cdot \vec{Y}_2(t)) \vec{Y}_1(t) + (\vec{Y}_1(t) \cdot \vec{Y}_1(t)) \vec{Y}_2, \\ \vec{E}_3^*(t) &= a_1 \vec{Y}_1(t) - a_2 \vec{Y}_2(t) + a_3 \vec{Y}_3(t) \end{aligned} \quad (2.5)$$

donde

$$a_1 = \begin{vmatrix} \vec{Y}_1 \cdot \vec{Y}_2 & \vec{Y}_1 \cdot \vec{Y}_3 \\ \vec{Y}_2 \cdot \vec{Y}_2 & \vec{Y}_2 \cdot \vec{Y}_3 \end{vmatrix}$$

$$a_2 = \begin{vmatrix} \vec{Y}_1 \cdot \vec{Y}_1 & \vec{Y}_1 \cdot \vec{Y}_3 \\ \vec{Y}_2 \cdot \vec{Y}_1 & \vec{Y}_2 \cdot \vec{Y}_3 \end{vmatrix}$$

$$a_3 = \begin{vmatrix} \vec{Y}_1 \cdot \vec{Y}_1 & \vec{Y}_1 \cdot \vec{Y}_2 \\ \vec{Y}_2 \cdot \vec{Y}_1 & \vec{Y}_2 \cdot \vec{Y}_2 \end{vmatrix}.$$

Notar que los coeficientes $a_i, i = 1, 2, 3$ son independientes de t .

Ejercicio 2.1.3 Demostrar que para todo vector $\vec{V} \in \mathbb{R}^3$

$$\vec{E}_2^* \cdot \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{Y}_1 \cdot \vec{Y}_1 & \vec{Y}_1 \cdot \vec{Y}_2 \\ \vec{Y}_1 \cdot \vec{V} & \vec{Y}_2 \cdot \vec{V} \end{vmatrix}$$

$$\vec{E}_3^* \cdot \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{Y}_1 \cdot \vec{Y}_1 & \vec{Y}_1 \cdot \vec{Y}_2 & \vec{Y}_1 \cdot \vec{Y}_3 \\ \vec{Y}_2 \cdot \vec{Y}_1 & \vec{Y}_2 \cdot \vec{Y}_2 & \vec{Y}_2 \cdot \vec{Y}_3 \\ \vec{Y}_1 \cdot \vec{V} & \vec{Y}_2 \cdot \vec{V} & \vec{Y}_3 \cdot \vec{V} \end{vmatrix}$$

Este ejercicio implica que

$$\vec{E}_2^* \cdot \vec{Y}_1 = 0, \quad \vec{E}_3^* \cdot \vec{Y}_1 = 0, \quad \vec{E}_3^* \cdot \vec{Y}_2 = 0$$

Ahora atendiendo a (2.5) deducimos

$$\vec{E}_2^* \cdot \vec{E}_1^* = 0, \quad \vec{E}_3^* \cdot \vec{E}_1^* = 0, \quad \vec{E}_3^* \cdot \vec{E}_2^* = 0.$$

Es decir los vectores $\{\vec{E}_i^*(t)\}_{i=1,2,3}$ son mutuamente ortogonales. Observar que si $k \leq 2$ entonces eventualmente alguno/s de esos vectores puede ser nulo.

Usando nuevamente el ejercicio

$$\vec{E}_2^* \cdot \vec{E}_2^* = (\vec{Y}_1 \cdot \vec{Y}_1) \det(B_2), \quad \vec{E}_3^* \cdot \vec{E}_3^* = \det(B_2) \det(B_3)$$

Ejercicio 2.1.4 Demostrar que $\{\vec{E}_i^*\}_{i=1}^3$ generan el mismo subespacio que $\{\vec{Y}_i\}_{i=1}^3$. De modo que también hay a los sumo k vectores linealmente independientes en $\{\vec{E}_i^*\}_{i=1}^3$.

Ahora debemos considerar distintos casos.

Caso 1. ($k = 3$) En esta situación $\vec{E}_i^*(t) \neq 0, i = 1, 2, 3$ y podemos normalizar estos vectores

$$\vec{E}_i(t) \equiv \vec{E}_i^*(t) / \|\vec{E}_i^*(t)\|, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.6)$$

Sean E e Y las matrices cuadradas obtenidas por colocar respectivamente los vectores $\{\vec{E}_i\}_{i=1}^3$ e $\{\vec{Y}_i\}_{i=1}^3$ en columnas, i.e. $E = [\vec{E}_1 | \vec{E}_2 | \vec{E}_3]$ e $Y = [\vec{Y}_1 | \vec{Y}_2 | \vec{Y}_3]$. Entonces $E(t)$ es una matriz ortogonal ($E \in O(3, \mathbb{R})$) ¿Por qué? Definimos

$$Q(t) \equiv E(t)E(0)^T$$

Ejercicio 2.1.5 $Q(t) \in SO(3, \mathbb{R})$.

Podemos hallar $P \in GL(3, \mathbb{R})$

$$Y(t) = E(t)P$$

$GL(3, \mathbb{R})$ es el grupo general lineal, i.e. el conjunto de matrices de 3×3 reales y no singulares

Ejercicio 2.1.6 La matriz P es independiente de t .

Con las notaciones introducidas y escribiendo $A = P^{-1}$ tenemos que para $i = 1, 2, 3$:

$$E(t)^T \vec{Y}_i(t) = A^T Y(t)^T \vec{Y}_i(t) = A^T Y(0)^T \vec{Y}_i(0) = E(0)^T \vec{Y}_i(0)$$

Finalmente

$$\vec{Y}_i(t) = E(t)E(t)^T \vec{Y}_i(t) = Q(t)\vec{Y}_i(0), \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.7)$$

Continuamos con el caso siguiente y luego completaremos todos simultaneamente.

Caso 2. ($k = 2$) En esta situación $\vec{Y}_1(t), \vec{Y}_2(t)$ son linealmente independientes, $\vec{Y}_1(t), \vec{Y}_2(t), \vec{Y}_3(t)$ linealmente dependientes y $\vec{E}_3(t) = 0$. Ahora escribimos $Y(t) = [\vec{Y}_1(t)|\vec{Y}_2(t)] \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ y $E(t) = [\vec{E}_1(t)|\vec{E}_2(t)|\vec{E}_1(t) \times \vec{E}_2(t)]$. Usando (2.5) y (2.6)

$$[\vec{E}_1(t)|\vec{E}_2(t)] = Y \begin{pmatrix} \frac{1}{\|\vec{E}_1^*\|} & -\frac{\vec{Y}_1 \cdot \vec{Y}_2}{\|\vec{E}_2^*\|} \\ 0 & \frac{\vec{Y}_1 \cdot \vec{Y}_1}{\|\vec{E}_2^*\|} \end{pmatrix} = YP.$$

Observar que P es independiente de t . Ahora pongamos

$$A = \begin{pmatrix} P^{-1} \\ 0_{1 \times 2} \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$E(t)A = [\vec{E}_1|\vec{E}_2]P^{-1} + 0_{1 \times 2}\vec{E}_1 \times \vec{E}_2 = Y.$$

Deducimos

$$P = E(t)^T Y(t) = E(0)^T Y(0).$$

y consecuentemente

$$Y = E(t)P = E(t)E(0)^T Y(0) = Q(t)Y(0),$$

donde $Q(t) = E(t)E(0)^T \in \text{SO}(3, \mathbb{R})$. Esta identidad matricial expresa que

$$\vec{Y}_j(t) = Q(t)\vec{Y}_j(0), \quad \text{para } j = 1, 2.$$

Caso 3. ($k = 1$) En esta situación $\vec{E}_2^*(t) = \vec{E}_3^*(t) = 0$ y $\vec{E}_1(t) = \vec{Y}_1(t)/\|\vec{Y}_1(0)\|$ genera \mathcal{H} .

Supongamos que $\vec{E}_1(t) = (\vec{E}_1(t), \vec{E}_2(t), \vec{E}_3(t))$. Entonces pongamos $\vec{E}_2(t) = (-\vec{E}_2(t), \vec{E}_1(t), \vec{E}_3(t))$ y $\vec{E}_3(t) = \vec{E}_1(t) \times \vec{E}_2(t)$. Nuevamente consideramos las matrices $E = [\vec{E}_1|\vec{E}_2|\vec{E}_3] \in \text{SO}(3, \mathbb{R})$ y $Y = [\vec{Y}_1(t)]$. Entonces

$$Y = EP, \quad \text{donde } P = \begin{pmatrix} \|\vec{Y}_1(0)\| \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ independiente de } t.$$

Notar que $P = E^T(0)Y(0)$ (justamente por que P es independiente de t). Luego

$$Y(t) = E(t)E^T(0)Y(0) = Q(t)Y(0), \quad \text{donde } Q(t) = E(t)E^T(0) \in \text{SO}(3, \mathbb{R}).$$

En todos los casos $\vec{Y}_i(t) = Q(t)\vec{Y}_i(0)$ con $Q(t) \in \text{SO}(3, \mathbb{R})$ y donde $\vec{Y}_i(t)$, $i = 1, \dots, k$ generan \mathcal{H} .

Ejercicio 2.1.7 Demostrar que en los tres casos $\vec{Y}_j(t) = Q(t)\vec{Y}_j(0)$ para todo $j = 1, 2, \dots, N$.

Ahora definamos

$$\vec{U}_i^* = \begin{cases} 0 & \text{si } i = 1 \\ \vec{Y}_{i-1}(0) & \text{si } i = 2, \dots, N \end{cases}.$$

Entonces

$$\vec{X}_j(t) = Q(t)\vec{U}_j^* + \vec{X}_1(t), \quad j = 1, \dots, N. \quad (2.8)$$

La anterior parece una de las conclusiones del Teorema, pero hay que hacer una última transformación para que se satisfaga la condición sobre el centro de masas. con ese propósito escribimos

$$\vec{U}_i = \vec{U}_i^* - \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{M} \vec{U}_j^*$$

y

$$\vec{R}(t) = Q(t) \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{M} \vec{U}_i^* + \vec{X}_1(t).$$

Entonces

$$\vec{X}_j(t) = Q(t)\vec{U}_j + \vec{R}(t), \quad j = 1, \dots, N, \quad (2.9)$$

y como

$$\sum_{j=1}^N m_j \vec{U}_j = 0,$$

deducimos

$$\sum_{j=1}^N m_j \vec{X}_j(t) = Q(t) \sum_{j=1}^N m_j \vec{U}_j + \vec{R}(t) = \vec{R}(t).$$

□

Hemos comprobado que para representar el movimiento de un cuerpo rígido es necesario dar la matriz $Q(t)$ y el vector $\vec{R}(t)$ ¿Cuántos grados de libertad tiene un cuerpo rígido sobre cuyo movimiento no actúa ninguna restricción? Uno se sentiría tentado a decir 12, 9 por la matriz $Q(t)$ y 3 por $\vec{R}(t)$. Pero en realidad $Q(t) \in \text{SO}(3, \mathbb{R})$ y esto es una restricción sobre $Q(t)$, de hecho podemos escribir esta restricción por medio de las ecuaciones

$$Q(t)Q^T(t) = I, \quad \det(Q) = 1,$$

Aquí hay 13 ecuaciones, pero son redundantes. en la sección siguiente estableceremos entre otras cosas con exactitud los grados de libertad del movimiento de un cuerpo rígido.

2.2 Velocidad angular

En la dinámica del movimiento de una partícula introdujimos el vector velocidad. Este vector es una característica dinámica importante del movimiento, de hecho por el principio de determinación de Laplace, las posiciones y velocidades determinaban el movimiento. En el caso de un cuerpo rígido hay dos conceptos de velocidad, uno es la velocidad lineal que viene expresada por la velocidad del centro de masas $\vec{R}'(t)$. La otra es la velocidad angular, que mide el cambio de la orientación del objeto por efecto de rotaciones respecto a cierto eje. En esta sección vamos a dar, entre otras cosas, la definición matemática precisa de la *velocidad angular*.

Definición 2.2.2 (Álgebra matrices antisimétricas) El conjunto de todas las matrices antisimétricas reales de orden n es denotado por $\mathfrak{so}(n, \mathbb{R})$.

Definición 2.2.3 (Corchete de Lie) Para dos matrices $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definimos su corchete de Lie por

$$[A, B] = AB - BA.$$

Ejercicio 2.2.8 Demostrar que $\mathfrak{so}(n, \mathbb{R})$ es un espacio vectorial y que $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{so}(n, \mathbb{R}) \times \mathfrak{so}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathfrak{so}(n, \mathbb{R})$. Además el corchete satisface las siguientes propiedades

Involución $[\Omega_1, \Omega_1] = 0$

Bilinealidad Para todos $a, b \in \mathbb{R}$

$$[a\Omega_1 + b\Omega_2, \Omega_3] = a[\Omega_1, \Omega_3] + b[\Omega_2, \Omega_3]$$

Antisimetría $[\Omega_1, \Omega_2] = -[\Omega_2, \Omega_1]$

Identidad de Jacobi

$$[[\Omega_1, \Omega_2], \Omega_3] + [[\Omega_3, \Omega_1], \Omega_2] + [[\Omega_2, \Omega_3], \Omega_1] = 0$$

El espacio vectorial $\mathfrak{so}(n, \mathbb{R})$ está relacionado con $\mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$. Esta relación es encontrada en la siguiente proposición. Hay una teoría matemática abstracta que contiene la construcción que hemos desarrollado aquí, ella es la Teoría de los *Grupos de Lie* y la de las *Álgebras de Lie*. En nuestro caso $\mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$ juega el rol de Grupo de Lie y $\mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$ de álgebra de Lie.

Proposición 2.2.1 Sea $Q : (a, b) \rightarrow \mathrm{O}(n)$ diferenciable. Entonces, existe una función diferenciable $\Omega : (a, b) \rightarrow \mathfrak{so}(n, \mathbb{R})$ tal que Q satisface la ecuación diferencial

$$Q' = Q\Omega.$$

Además, si $Q(0) = I$, entonces $\det(Q(t)) = 1$, es decir $Q(t) \in \mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$.

Recíprocamente, si $\Omega : J \rightarrow \mathfrak{so}(n, \mathbb{R})$ es dada, entonces una solución Q del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} Q'(t) = Q(t)\Omega(t) \\ Q(0) = I \end{cases}$$

satisface que $Q : (a, b) \rightarrow \mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$.

Demostración. Derivanda la identidad

$$Q(t)Q^T(t) = I$$

obtenemos

$$Q'(t)Q^T(t) + Q(t)Q'^T(t) = 0.$$

Entonces

$$Q'(t) = -Q(t)Q'^T(t)Q(t)$$

Escribamos $\Omega(t) = -Q'^T(t)Q(t)$ y veamos que $\Omega(t) \in \mathfrak{so}(n)$. En efecto

$$\Omega^T(t) = -Q^T(t)Q'(t) = Q^T(t)Q(t)Q'^T(t)Q(t) = Q'^T(t)Q(t) = -\Omega(t).$$

Como $Q \in O(3, \mathbb{R})$ tenemos que $\det(Q(t)) = \pm 1$. Pero como $\det(Q(t))$ es continua, su imagen debe ser un conjunto conexo. De allí $\det(Q(t))$ debe ser 1 para todo t o -1 para todo t . Si $Q(0) = I$ entonces $\det(Q(0)) = 1$ y luego $Q \in SO(3, \mathbb{R})$ para todo t .

Para el recíproco, llamemos $A(t) = Q^T(t)Q(t)$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \{Q^T(t)Q(t)\} &= Q'^T(t)Q(t) + Q^T(t)Q'(t) \\ &= -\Omega^T(t)Q^T(t)Q(t) + Q^T(t)Q(t)\Omega(t) \\ &= [A(t), \Omega(t)]. \end{aligned}$$

Vemos que la matriz $A(t)$ resuelve el siguiente PVI.

$$\begin{cases} \Phi'(t) = [\Phi(t), \Omega(t)] \\ \Phi(0) = I \end{cases}.$$

El mismo PVI es resuelto por la función que toma el valor constante I . Por la unicidad de la solución $A(t) = Q^T(t)Q(t) = I$. Es decir $Q(t) \in SO(3, \mathbb{R})$. Nuevamente un argumento basado en la continuidad de $\det(Q(t))$ demostramos que $Q(t) \in SO(3, \mathbb{R})$. \square

Observamos que el resultado anterior nos permite considerar a Q y Ω como intercambiables en términos de determinar el movimiento, ya que conociendo uno conocemos el otro. Por otro lado, debido a la condición de antisimetría, Ω está completamente determinada por tres funciones: $\omega_1, \omega_2, \omega_3 : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. Es decir, Ω tiene la forma

$$\Omega(t) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3(t) & \omega_2(t) \\ \omega_3(t) & 0 & -\omega_1(t) \\ -\omega_2(t) & \omega_1(t) & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$

Esta observación nos termina por responder la pregunta sobre los grados de libertad de un cuerpo rígido sobre el que no actúa ninguna restricción. Estos son 6, las tres componentes de \vec{R} y $\omega_1, \omega_2, \omega_3$. Debemos encontrar ecuaciones que determinen estas 6 cantidades, con ellas determinados la posición de todas las partículas componentes del cuerpo rígido. Claro está que en el proceso debemos determinar la matriz $Q(t)$ para lo cual hay que resolver el sistema de ecuaciones $Q' = Q\Omega$.

Si definimos

$$\vec{\omega} \equiv (\omega_1, \omega_2, \omega_3), \quad (2.11)$$

entonces para cualquier vector $\vec{V} = (v_1, v_2, v_3)$, tenemos $\Omega\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{V}$. Por lo tanto, la acción de la matriz antisimétrica Ω sobre los vectores \vec{V} es la misma que la acción del producto vectorial de $\vec{\omega}$ en \vec{V} .

Definición 2.2.4 (Velocidad angular) Para el movimiento de un cuerpo rígido, el vector $\vec{\omega}$ se denomina *velocidad angular* y la matriz antisimétrica Ω se denomina *operador de velocidad angular*.

2.3 Ecuaciones diferenciales de un cuerpo rígido

2.3.1 Conservación momento lineal

Recordemos que la fuerza total que actúa sobre la partícula i -ésima viene dada por

$$\vec{F}_i = \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij}^{(i)}(\vec{X}_1(t), \dots, \vec{X}_N(t), \vec{X}'_1(t), \dots, \vec{X}'_N(t), t) + \vec{F}_i^{(e)}(\vec{X}_i, \vec{X}'_i, t).$$

Aquí $\vec{F}_{ij}^{(i)}$ denota las fuerzas internas o inerciales que se aplican los puntos masa del cuerpo rígido entre si. Son las responsables justamente de satisfacer las restricciones (2.1). Escribamos las posiciones en términos de \vec{R} y Q

$$\vec{X}_i(t) = Q(t)\vec{U}_i + \vec{R}(t),$$

De las ecuaciones (1.2) y (1.3) obtenemos que

$$M\vec{R}'' = \sum_{i=1}^N F_i^{(e)} =: F^{(e)}, \quad \text{con } M = \sum_{i=1}^N m_i. \quad (2.12)$$

2.3.2 Conservación momento angular

El vector $\vec{\omega}$ es una de las incógnitas fundamentales en el movimiento de un cuerpo rígido y buscamos la ecuación diferencial que la determina. Con la determinación de $\vec{\omega}$, obtenemos Ω y de esto tenemos las rotaciones Q .

Podemos escribir fácilmente la velocidad de la i -ésima partícula en términos de la velocidad angular de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \vec{X}'_i(t) &= Q'(t)\vec{U}_i + \vec{R}'(t) \\ &= Q(t)\Omega(t)\vec{U}_i + \vec{R}'(t) \\ &= Q(t)(\vec{\omega}(t) \times \vec{U}_i) + \vec{R}'(t) \end{aligned}$$

Esto expresa la velocidad de la i -ésima partícula del cuerpo como la suma de una velocidad de traslación \vec{R}' y una velocidad de rotación $Q(\vec{\omega} \times \vec{U}_i) = Q\vec{\omega} \times Q\vec{U}_i$. El primero es visto como una traslación instantánea, en la dirección \vec{R}' , de todas las partículas del sistema, mientras que el último es visto como una rotación instantánea de todas las partículas del sistema sobre el eje a través de $Q\vec{\omega}$.

Usando las expresiones anteriores, también podemos reescribir el momento angular total respecto al origen K_0 del sistema.

$$\begin{aligned} K_0(t) &= \sum_{i=1}^N m_i \vec{X}_i(t) \times \vec{X}'_i(t) \\ &= \sum_{i=1}^N m_i [Q(t)\vec{U}_i + \vec{R}(t)] \times [Q(t)(\vec{\omega}(t) \times \vec{U}_i) + \vec{R}'(t)] \\ &= Q(t) \left(\sum_{i=1}^N m_i \vec{U}_i \times (\vec{\omega}(t) \times \vec{U}_i) \right) + M\vec{R}(t) \times \vec{R}'(t) \end{aligned}$$

Aquí hemos utilizado el hecho de que las matrices de rotación se pueden distribuir en el producto vectorial: $Q(\vec{V} \times \vec{W}) = Q\vec{V} \times Q\vec{W}$.

Definición 2.3.5 (Operador de inercia A .) Sean m_1, \dots, m_N números positivos y $\vec{U}_1, \dots, \vec{U}_N$ vectores con $\sum_{i=1}^N m_i \vec{U}_i = 0$. Definimos el operador lineal $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ por

$$A\vec{V} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{U}_i \times (\vec{V} \times \vec{U}_i). \quad (2.13)$$

Este operador se conoce como *operador de inercia* o *tensor de inercia*.

El operador A es independiente de t y captura las características geométricas del cuerpo rígido que son importantes para la naturaleza de su movimiento. Observemos que A no depende del tiempo, pero si lo hace de las posiciones iniciales $\vec{U}_1, \dots, \vec{U}_N$ y de las masas de las partículas. Usando el operador de inercia obtenemos la siguiente expresión para el momento angular total del sistema:

Momento angular de un cuerpo rígido:

$$K_0(t) = Q(t)A\vec{\omega} + M\vec{R} \times \vec{R}'(t) \quad (2.14)$$

La ecuación diferencial central para $\vec{\omega}$ proviene de reescribir la ecuación del momento angular (1.5) del capítulo . Recordemos la ecuación

$$\vec{K}'_0(t) = \sum_{i=1}^N \vec{X}_i(t) \times \vec{F}_i^{(e)} =: \vec{T}. \quad (2.15)$$

El vector \vec{T} se denomina *torque*. Diferenciando ambos lados de la ecuación (2.14) obtenemos

$$\begin{aligned} K'_0(t) &= Q(t)A\vec{\omega}'(t) + Q'(t)A\vec{\omega}(t) + M\vec{R}(t) \times \vec{R}''(t) \\ &= Q(t)(A\vec{\omega}'(t) + \vec{\omega}(t) \times A\vec{\omega}(t)) + M\vec{R}(t) \times \vec{R}''(t), \end{aligned}$$

Para el torque total obtenemos

$$\begin{aligned} \vec{T}(t) &= \sum_{i=1}^N \vec{X}_i(t) \times \vec{F}_i^{(e)} \\ &= \sum_{i=1}^N (Q(t)\vec{U}_i + \vec{R}(t)) \times \vec{F}_i^{(e)} \\ &= \left(\sum_{i=1}^N Q(t)\vec{U}_i \times \vec{F}_i^{(e)} \right) + \vec{R} \times \vec{F}^{(e)}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

donde $\vec{F}^{(e)} = \sum_i \vec{F}_i^{(e)}$. Sustituyendo estas expresiones en $K'_0 = \vec{T}$ y reduciendo cada lado usando que $M\vec{R}'' = \vec{F}^{(e)}$:

$$Q(t)(A\vec{\omega}'(t) + \vec{\omega}(t) \times A\vec{\omega}(t)) = \sum_{i=1}^N Q(t)\vec{U}_i \times \vec{F}_i^{(e)},$$

i.e.,

$$A\vec{\omega}'(t) + \vec{\omega}(t) \times A\vec{\omega}(t) = \sum_{i=1}^N \vec{U}_i \times Q(t)^T \vec{F}_i.$$

Poniendo junto todo lo último llegamos a lo siguiente:

Las ecuaciones de movimiento de un cuerpo rígido:

$$M\vec{R}''(t) = \vec{F}^{(e)}, \quad (2.17)$$

$$A\vec{\omega}'(t) + \vec{\omega}(t) \times A\vec{\omega}(t) = \sum_{i=1}^N \vec{U}_i \times Q^T(t) \vec{F}_i, \quad (2.18)$$

$$Q'(t) = Q(t)\Omega(t). \quad (2.19)$$

Las incógnitas aquí son $\vec{R}(t)$, $\vec{\omega}(t)$ y $Q(t)$ (recordar que $\Omega(t)$ en su expresión involucra a $\vec{\omega}(t)$). Hemos decidido incorporar la ecuación para $Q(t)$ en el conjunto de ecuaciones, es por ello que no hay sólo 6.

Por lo tanto, lo anterior es un sistema de ecuaciones diferenciales con 15 ecuaciones y 15 incógnitas $R_i, \vec{\omega}_i, Q_{ij}, i, j = 1, 2, 3$. Las *condiciones iniciales* son (en término de las incógnitas originales)

$$\vec{R}(0) = \sum_{i=0}^N \frac{m_i}{M} \vec{X}_i(0)$$

$$\vec{R}'(0) = \sum_{i=0}^N \frac{m_i}{M} \vec{X}'_i(0)$$

$$Q(0) = I$$

$$A\vec{\omega}(0) = \vec{K}_0(0) - M\vec{R}(0) \times \vec{R}'(0).$$

La última condición inicial sólo determina el valor inicial de $\vec{\omega}$ cuando el operador de inercia A es invertible. El caso en que A no es invertible se produce sólo cuando todos los cuerpos se encuentran inicialmente en una línea recta. Esto se llama el caso degenerado.

Suponiendo conocidas las fuerzas externas $F^{(e)}$, la primera ecuación diferencial (2.17) determina el movimiento del centro de masa, mientras que la ecuación diferencial (08) determina el vector de velocidad angular $\vec{\omega}$, que a su vez da Ω y por lo tanto, a través de la última ecuación diferencial (09), obtenemos la rotación Q de las partículas sobre el centro de masa.

2.4 Energía cinética y momento de inercia

El movimiento general del cuerpo rígido que consideramos se caracteriza por la configuración inicial de las partículas que comprenden el sistema, es decir, por el de posiciones iniciales $\vec{U}_1, \dots, \vec{U}_N$ (con respecto al centro de masa inicial $\vec{R}(0)$) y por las masas m_1, \dots, m_N , tal que $\sum_{i=1}^N m_i \vec{U}_i = 0$ y $\sum_{i=1}^N m_i = M$. Este sistema es el del "cuerpo rígido" y se mueve como una unidad tras el centro de masa, mientras que gira alrededor de él. Si bien el sistema es un sistema discreto, de un número finito de partículas (aunque posiblemente un gran número), la discusión y los conceptos se extienden al caso continuo, con un número infinito de partículas, que es lo que normalmente consideramos como un cuerpo rígido.

La influencia de la "forma" del cuerpo rígido en el movimiento se codifica en el operador de inercia A y la siguiente proposición describe la naturaleza de A y muestra cómo entra en la expresión para la energía cinética del sistema.

Proposición 2.4.2 Sea A un operador de inercia definido por

$$A\vec{V} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{U}_i \times (\vec{V} \times \vec{U}_i),$$

para $\vec{V} \in \mathbb{R}^3$. Entonces

1. Para todos $\vec{V}, \vec{W} \in \mathbb{R}^3$

$$A\vec{V} \cdot \vec{W} = \sum_{i=1}^N m_i (\vec{W} \times \vec{U}_i) \cdot (\vec{V} \times \vec{U}_i), \quad (2.20)$$

2. En particular para todo $\vec{V} \in \mathbb{R}^3$

$$A\vec{V} \cdot \vec{V} = \sum_{i=1}^N m_i |\vec{V} \times \vec{U}_i|^2 \geq 0, \quad (2.21)$$

3. A es una matriz simétrica, semidefinida positiva. Es diagonalizable y tiene tres autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ no negativos:

$$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$$

y los tres autovectores correspondientes

$$A\vec{E}_i = \lambda_i \vec{E}_i, \quad i = 1, 2, 3$$

pueden ser elegidos de modo que sean ortogonales $\vec{E}_i \cdot \vec{E}_j = 0, i \neq j$.

4. Si $K = \sum_{i=1}^N m_i |\vec{X}'|^2$ es la *energía cinética total del sistema*, entonces

$$K = \frac{1}{2} A\vec{\omega} \cdot \vec{\omega} + \frac{1}{2} M |\vec{R}'|^2. \quad (2.22)$$

Demostración. La ecuación (2.20) es consecuencia de la identidad $(\vec{U} \times \vec{V}) \cdot \vec{W} = (\vec{W} \times \vec{U}) \cdot \vec{V}$. La ecuación (2.21) es un caso particular de (2.20).

Como consecuencia de (2.20) $A\vec{V} \cdot \vec{W} = \vec{V} \cdot A\vec{W}$. Esto prueba que A es simétrica. Que A es semidefinida positiva es consecuencia de (2.21). Todas las aseveraciones sobre autovalores y autovectores son propiedades conocidas de las matrices simétricas semidefinidas positivas.

Para el último inciso probar como ejercicio que $|\vec{U} \times \vec{V}|^2 = (\vec{U} \times \vec{V}) \cdot (\vec{U} \times \vec{V}) = [\vec{V} \times (\vec{U} \times \vec{V})] \cdot \vec{U}$. Ahora usando esta identidad

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i |Q'(t)\vec{U}_i + \vec{R}'(t)|^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i |Q(t)(\vec{\omega}(t) \times \vec{U}_i) + \vec{R}'(t)|^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left[|\vec{\omega}(t) \times \vec{U}_i|^2 + 2Q(t)(\vec{\omega}(t) \times \vec{U}_i) \cdot \vec{R}'(t) + |\vec{R}'(t)|^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} A\vec{\omega}(t) \cdot \vec{\omega}(t) + \frac{1}{2} M |\vec{R}'(t)|^2. \end{aligned}$$

□

Por lo tanto, la energía cinética se divide en dos partes. La primera parte, llamada *energía cinética rotacional*, es debida a la rotación instantánea, o giro, alrededor del eje determinado por el vector velocidad angular $\vec{\omega}$. La segunda parte es llamada *energía cinética traslacional*.

Al igual que en la proposición, siempre vamos a etiquetar y ordenar los autovalores de A como $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ y seleccionaremos los tres autovectores correspondientes $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3$, que son ortogonales, de longitud uno, $|\vec{E}_i| = 1, i = 1, 2, 3$, y tal que $\{\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3\}$ está orientado positivamente. Cuando todos los autovalores son distintos esta selección tiene un número finito de posibilidades. Cuando sólo hay dos autovalores distintos, digamos $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$, la selección de dos vectores ortonormales \vec{E}_1, \vec{E}_2

desde el espacio característico E_{λ_1} puede hacerse en un número infinito de formas, pero habiendo hecho una elección, entonces \vec{E}_3 se determina de forma única. Cuando todos los autovalores son los mismos el espacio característico E_{λ_1} es igual a \mathbb{R}^3 y así puede tomarse cualquier base ortonormal $\{\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3\}$ para \mathbb{R}^3 orientada positivamente.

Como es habitual, identificamos la base estándar de \mathbb{R}^3 por $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ donde

$$\vec{e}_1 = (1, 0, 0), \quad \vec{e}_2 = (0, 1, 0), \quad \vec{e}_3 = (0, 0, 1).$$

Por lo tanto, el operador de inercia $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ se identifica con la matriz 3×3 $A = \{A_{ij}\}_{i,j=1,2,3}$, donde

$$A_{ij} = A\vec{e}_j \cdot \vec{e}_i.$$

Proposición 2.4.3 El operador inercia $A = \{A_{ij}\}_{i,j=1,2,3}$ tiene entradas

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^N m_k [|\vec{U}_k|^2 \delta_{ij} - u_{ki} u_{kj}], \quad (2.23)$$

donde δ_{ij} es la delta Kronecker (es decir, $\delta_{ij} = 0$, para $i \neq j$, $\delta_{ii} = 1$), y

$$\vec{U}_k = (u_{k1}, u_{k2}, u_{k3}),$$

para $k = 1, \dots, N$. Alternativamente, sin el uso la delta de Kronecker esto puede escribirse como

$$A_{ii} = \sum_{k=1}^N m_k [|\vec{U}_k|^2 - u_{ki}^2], \quad (2.24)$$

$$A_{ij} = - \sum_{k=1}^N m_k u_{ki} u_{kj} \quad i \neq j. \quad (2.25)$$

Demostración. Tratándose de un cálculo podemos usar SymPy. No demos respresentar una suma de una cantidad arbitraria de términos, por eso supondremos que hay tres cuerpos, una pequeña concesión al rigor en aras de hacer este cálculo más divertido.

```
from sympy import *

N=3
m=symbols(['m%s' %i for i in range(1,N+1)])
U=[]
for i in range(N):
    Uk=[symbols(['u_%s%s' %(i,j) for j in range(1,4)])]
    U.append(Matrix(Uk))
Id=eye(3)
A=zeros(3)
for i in range(3):
    for j in range(3):
        for k in range(N):
            P1= Id[j,:].cross(U[k])
            P2= Id[i,:].cross(U[k])
            A[i,j] += m[k]*P1.dot(P2)
```

Desplegamos cada columna de la matriz por separado

$$A_{*,1} = \begin{bmatrix} m_1 (u_{02}^2 + u_{03}^2) + m_2 (u_{12}^2 + u_{13}^2) + m_3 (u_{22}^2 + u_{23}^2) \\ -m_1 u_{01} u_{02} - m_2 u_{11} u_{12} - m_3 u_{21} u_{22} \\ -m_1 u_{01} u_{03} - m_2 u_{11} u_{13} - m_3 u_{21} u_{23} \end{bmatrix}$$

$$A_{*,2} = \begin{bmatrix} -m_1 u_{01} u_{02} - m_2 u_{11} u_{12} - m_3 u_{21} u_{22} \\ m_1 (u_{01}^2 + u_{03}^2) + m_2 (u_{11}^2 + u_{13}^2) + m_3 (u_{21}^2 + u_{23}^2) \\ -m_1 u_{02} u_{03} - m_2 u_{12} u_{13} - m_3 u_{22} u_{23} \end{bmatrix}$$

$$A_{*,3} = \begin{bmatrix} -m_1 u_{01} u_{03} - m_2 u_{11} u_{13} - m_3 u_{21} u_{23} \\ -m_1 u_{02} u_{03} - m_2 u_{12} u_{13} - m_3 u_{22} u_{23} \\ m_1 (u_{01}^2 + u_{02}^2) + m_2 (u_{11}^2 + u_{12}^2) + m_3 (u_{21}^2 + u_{22}^2) \end{bmatrix}$$

Estas identidades verifican (2.24) y (2.25). \square

Ejemplo 2.4.1 Supongamos que hay tres partículas de igual masa, digamos $m_k = 1$, $k = 1, 2, 3$, que componen el cuerpo rígido, y las posiciones iniciales de esas partículas son

$$\vec{X}_1(0) = (0, 0, 0)$$

$$\vec{X}_2(0) = (1, 0, 0)$$

$$\vec{X}_3(0) = (0, 1, 0)$$

Para obtener el tensor de inercia usaremos SymPy.

```
m1,m2,m3=1,1,1
M=m1+m2+m3
X1,X2,X3=Matrix([0,0,0]),Matrix([1,0,0]),Matrix([0,1,0])
c=(m1*X1+m2*X2+m3*X3)/M
U0=X1-c,X2-c,X3-c
```

$$\vec{U}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{U}_2 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{U}_3 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Sólo debemos sustituir estos valores en la matriz de inercia abstracta que tenemos creada.

```
sustm={m[0]:m1,m[1]:m2,m[2]:m3}
A0=A.subs(sustm)
for j in range(3):
    for i in range(3):
        A0=A0.subs(U[j][i],U0[j][i])
```

$$A = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix}.$$

Los autovalores y autovectores

```
AutEsp=A0.eigenvecs()
```

$$\lambda_1 = \frac{1}{3} \rightarrow \vec{E}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda_2 = 1 \rightarrow \vec{E}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda_3 = \frac{4}{3} \rightarrow \vec{E}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Los autovectores son ortonormales, restaría normalizarlos.

Cada matriz simétrica B da lugar a una función $f(\vec{V}) = (B\vec{v} \cdot \vec{v}) / (\vec{v} \cdot \vec{v})$ cuyos valores son, respectivamente, autovalores máximos y mínimos de B .

Definición 2.4.6 (Momento de inercia) La función $I : \mathbb{R}^3 - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$I(\vec{V}) = \frac{\vec{V} \cdot A\vec{V}}{\vec{V} \cdot \vec{V}},$$

se llama *función momento de inercia*. El número $I(\vec{V})$ se llama *momento de inercia del sistema a través del centro de masa en la dirección de \vec{V}* , o cuando no haya lugar a confusión simplemente *momento de inercia*. Observar que si λ y \vec{E} son un autovalor y autovector respectivamente de A entonces λ es momento de inercia del sistema a través del centro de masa en la dirección de \vec{E} . Tomando en cuenta la observación, llamamos a los autovalores $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ de A *momentos principales de inercia*.

Observar que la función momento de inercia es homogénea de grado 0.

$$I(c\vec{V}) = I(\vec{V}), \quad \text{para todo } 0 \neq c \in \mathbb{R}. \quad (2.26)$$

Proposición 2.4.4 Sea A una matriz de inercia con autovalores $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$. Entonces λ_1 y λ_3 son los momentos de inercia más chico y más grandes respectivamente.

Demostración. A partir de (2.26) podemos escribir

$$\inf \{I(\vec{V}) | \vec{V} \in \mathbb{R}^3 - \{0\}\} = \min \{I(\vec{V}) | \|\vec{V}\| = 1\}.$$

Así podemos pensar el problema de minimización como un problema con restricciones y así usar multiplicadores de Lagrange. Los posibles puntos extremos son puntos críticos de

$$F(\vec{V}) = \vec{V} \cdot A\vec{V} - \lambda \|\vec{V}\|^2.$$

Estos puntos críticos ocurren cuando

$$0 = \nabla F = 2A\vec{V} - 2\lambda\vec{V}.$$

Vale decir si λ y \vec{V} son un autovalor y autovector respectivamente de A . Ahora el enunciado de la proposición sigue de que cuando evaluamos la función de inercia en un autovector obtenemos el autovalor respectivo. \square

Retornando la configuración elemental en el ejemplo anterior. Rotar alrededor del eje determinado por \vec{E}_1 da el menor momento de inercia $\lambda_1 = \frac{1}{3}$, mientras que un giro alrededor del eje dado por \vec{E}_2 da como resultado un mayor momento de inercia $\lambda_2 = 1$. Esto corresponde al hecho de que los cuerpos están más cerca del eje de revolución en el primer caso que en el segundo (y todas las masas son iguales). El mayor momento de inercia $\lambda_3 = \frac{4}{3}$ se produce para una revolución alrededor del eje a través de \vec{E}_3 , donde los cuerpos se separan del eje de revolución.

Una expresión alternativa para el momento de inercia $I(\vec{V})$ ayuda a clarificar la idea que se alude en el último párrafo. Esta expresión surge de observar que $|\vec{V} \times \vec{U}_i|$ es el área del paralelogramo determinado por \vec{V} y \vec{U}_i . Este área, por otro lado es $|\vec{V}|d_i(\vec{V})$, donde $d_i(\vec{V})$ denota la distancia desde la punta de \vec{U}_i al eje determinado por \vec{V} .

Así, encontramos

$$A\vec{V} \cdot \vec{V} = \sum_{i=1}^N m_i |\vec{V} \times \vec{U}_i|^2 = |\vec{V}|^2 \sum_{i=1}^N m_i d_i(\vec{V})^2.$$

Esto nos dice que el momento de inercia de la función también se puede calcular como

$$I(\vec{V}) = \sum_{i=1}^N m_i d_i (\vec{V})^2 \quad (2.27)$$

Esta es la definición tradicional del momento de inercia del sistema alrededor del eje \vec{V} .

El nombre para el momento de inercia surge de la forma en que esta cantidad entra en la expresión para la energía cinética del sistema. Reescribiendo la energía cinética K de la ecuación (2.22), en términos de I da la siguiente

Energía cinética del cuerpo rígido:

$$K = \frac{1}{2} I(\vec{\omega}) \|\vec{\omega}\|^2 + \frac{1}{2} M |\vec{R}'|^2. \quad (2.28)$$

Por lo tanto, con respecto a la velocidad angular $\vec{\omega}$ del cuerpo, $I(\vec{\omega})$ desempeña el mismo papel que la masa con respecto a la velocidad lineal. Cuanto mayor es el valor de $I(\vec{\omega})$, más difícil es detener el giro del cuerpo alrededor del eje por $\vec{\omega}$.

Hasta aquí hemos tratado de desarrollar una comprensión intuitiva de la velocidad angular $\vec{\omega}$ y su papel en el movimiento de un cuerpo rígido. Una comprensión más precisa vendrá de la solución de las ecuaciones de movimiento en un número de casos especiales.

2.5 Movimiento de un cuerpo aislado

Vamos a considerar un cuerpo rígido aislado, esto es sobre el no actúa ninguna fuerza externa. ¿Qué movimiento puede presentar este cuerpo?

Las ecuaciones de movimiento de un cuerpo rígido (2.17) se reducen a

$$M \vec{R}''(t) = 0, \quad (2.29)$$

$$A \vec{\omega}'(t) + \vec{\omega}(t) \times A \vec{\omega}(t) = 0, \quad (2.30)$$

$$Q'(t) = Q(t) \Omega(t). \quad (2.31)$$

Como era de esperar la primera ecuación da $\vec{R}(t) = \vec{R}'(0)t + \vec{R}(0)$, por lo que el centro de masa se mueve en una línea recta con velocidad constante. La ecuación (2.30) se conoce como *ecuación de Euler*. Esta es un sistema no lineal de ecuaciones de primer orden de orden 3.

2.5.1 Una simulación numérica

2.5.1.1 Resolviendo la ecuación de Euler con Scipy-Numpy

Vamos a usar Numpy-Scipy para resolver numéricamente las soluciones. El movimiento traslacional dado por $\vec{R}(t)$ está completamente resuelto y en este caso las ecuaciones están desacopladas, vale decir no necesito conocer $\vec{R}(t)$ para determinar $\vec{\omega}(t)$. De modo que podemos suponer que $\vec{R}(t) \equiv 0$. Esencialmente hay que resolver la ecuación de Euler (2.31) y luego hallar $Q(t)$ resolviendo (2.31).

```
import numpy as np
from numpy import linalg as LA
from scipy.integrate import odeint
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
from scipy.interpolate import interp1d
```

Generamos un sólido que representa una caja de lados $a = 1$, $b = 2$ y $c = 3$.

```
a=1.0 #lado1
b=2.0 #lado2
c=3.0 #lado3
M=1.0; #masa total
L=np.linspace(0,1,10)
X=[ np.array([a*i,b*j,c*k]) for i in L for j in L for k in L]
#X=posiciones de las partículas respecto a un origen.
```

Grafiquemos el sólido

```
x=np.array([u[0] for u in X])
y=np.array([u[1] for u in X])
z=np.array([u[2] for u in X])
fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
ax.scatter(x, y, z)
```

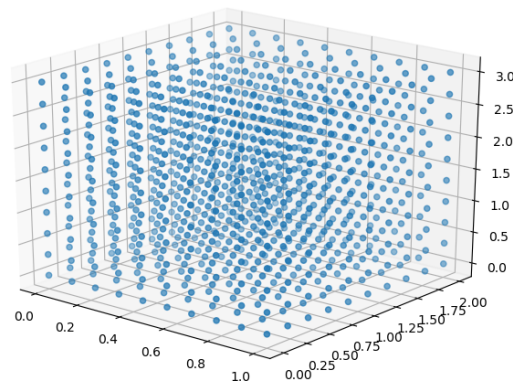


Figura 2.1: Sólido

Calculamos la matriz de inercia

```
N=len(X) #cantidad de partículas
m=M/N
CentroMasa=sum([m*h/M for h in X]) #calculamos el centro de masa.
U=[h-CentroMasa for h in X] #posiciones relativas al centro de masa.
A=np.zeros([3,3])
I=np.identity(3)
for i in range(3):
    for j in range(3):
        A[i,j]=m*sum(LA.norm(u)**2*I[i,j]-u[i]*u[j] for u in U)
```

Definimos la función en la ecuación de Euler

```
Ainv=LA.inv(A)
def EcuacionEuler(omega,t):
    domega=-np.matmul(Ainv,np.cross(omega, np.matmul(A,omega)))
    return domega
```

Tenemos todos los ingredientes para realizar algunos experimentos. Por empezar resolvamos la ecuación de Euler en un par de casos.

2.5.1.2 Condición inicial $\omega(0) = (1, 0, 0)$

Resolvemos la ecuación con condición inicial $\vec{\omega}(0) = (1, 0, 0)$ y constatamos que esa condición inicial aparenta ser un punto fijo dado que la solución $\omega(t)$ se aparta de $\vec{\omega}_0$ una longitud que es del orden de los errores propios de una solución numérica. La solución es obtenida por el siguiente código, además a fin de fundamentar nuestra observación graficamos la función $f(t) = \|\vec{\omega}(t) - \vec{\omega}_0\|$.

```

d=[LA.norm(u-omega0) for u in omega]
fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(111)
ax.plot(t,d)
ax.set_xlabel("t")
ax.set_ylabel("distancia a $\omega_0$")
plt.show()

```

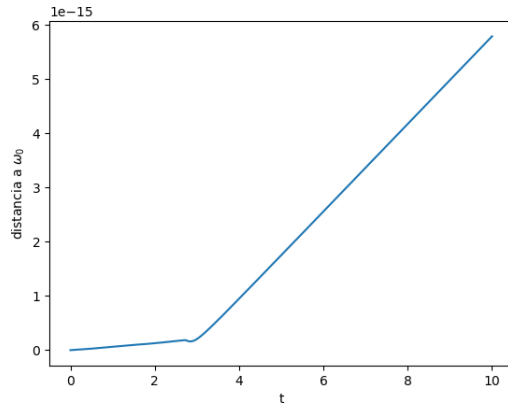


Figura 2.2: Solución $\vec{\omega}(0) = (1, 0, 0)$

2.5.1.3 Condición inicial $\vec{\omega}(0) = (1, 1, 1)$

Resolvamos la ecuación con condición inicial $\vec{\omega}(0) = (1, 1, 1)$ vamos a constatar que la solución no es estacionaria. Grafiquemos la trayectoria de $\omega(t)$ en \mathbb{R}^3 .

```

omega0=np.array([1,1,1])
t = np.linspace(0, 20, 10000)
omega = odeint(EcuacionEuler, omega0, t, args=())
d=[LA.norm(u-omega0) for u in omega]
fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(111,projection='3d')
x=[u[0] for u in omega]
y=[u[1] for u in omega]
z=[u[2] for u in omega]
ax.plot(x,y,z)
ax.set_xlabel("x")
ax.set_ylabel("y")
ax.set_zlabel("z")
plt.show()

```

En apariencia $\omega(t)$, ver figura 2.3, describe una curva cerrada y por tanto periódica. El resto del capítulo lo dedicaremos a entender desde un punto matemático riguroso lo que hemos apreciado numéricamente.

2.5.2 Puntos estacionarios.

Los puntos fijos de la ecuación de Euler son vectores constantes de velocidad angular $\vec{\omega}$ y deben satisfacer la ecuación algebraica:

$$\vec{\omega} \times A\vec{\omega} = 0.$$

Esto es equivalente a decir que $\vec{\omega}$ y $A\vec{\omega}$ se encuentran en la misma línea, es decir, que $\vec{\omega}$ es un autovector del operador inercia A :

$$A\vec{\omega} = \lambda\vec{\omega},$$

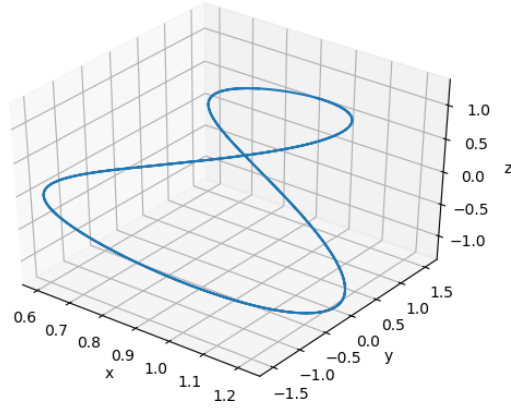


Figura 2.3: Solución $\vec{\omega}(0) = (1, 0, 0)$

donde $\lambda = \lambda_1, \lambda_2$ o λ_3 . Por lo tanto, si los momentos principales de inercia $\lambda_i, i = 1, 2, 3$ son todos distintos, entonces los puntos fijos de la ecuación de Euler son precisamente los puntos en los tres ejes principales: $\text{gen}\{\vec{E}_i\}, i = 1, 2, 3$. Si dos de los momentos de inercia son los mismos, por ejemplo $\lambda_1 = \lambda_2$, entonces el espacio característico correspondiente $E_{\lambda_1} = \text{gen}\{\vec{E}_1, \vec{E}_2\}$ constituye un plano de puntos fijos y el eje principal restante $E_{\lambda_3} = \text{gen}\{\vec{E}_3\}$ es una línea de puntos fijos perpendicular a este plano. Del mismo modo, si $\lambda_2 = \lambda_3$. Si todos los momentos de inercia son iguales, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, entonces el cuerpo se llama *perfectamente simétrico*. En este caso todos los puntos de \mathbb{R}^3 son puntos fijos de la ecuación de Euler y de este modo los puntos fijos son los únicos tipos de soluciones.

Vamos a determinar la estabilidad de los puntos fijos más adelante, pero primero debemos examinar qué tipo de movimiento de un cuerpo rígido corresponde a un punto fijo de la ecuación de Euler. Cuando $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ es un punto fijo de las ecuaciones de Euler, el correspondiente movimiento del cuerpo rígido es particularmente simple. Para ver esto, observemos que al ser $\vec{\omega}$ constante, la matriz de velocidad angular

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.32)$$

es constante también.

Utilizando técnicas de análisis matricial, podemos demostrar que, para cada $t, Q(t)$ es una rotación alrededor del eje determinado por $\vec{\omega}$ y que la rapidez de rotación (rapidez angular) es $\|\vec{\omega}\|$. Los detalles de esto quedan en el siguiente ejercicio. La discusión es válida para cualquier matriz antisimétrica $\Omega \in \mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$.

Ejercicio 2.5.9 Sea Ω la matriz constante dada en (2.32).

1. Demostrar que el polinomio característico es

$$\det(\Omega - \lambda I) = \lambda(\lambda^2 + \|\vec{\omega}\|^2),$$

y por consiguiente los autovalores son $\lambda = 0, \pm\|\vec{\omega}\|i$.

2. Demostrar que $\vec{\omega}$ es un autovector correspondiente al autovalor 0.
3. Existe una matriz $P \in O(3, \mathbb{R})$ tal que

$$P^{-1}\Omega P = J = \begin{bmatrix} 0 & -\|\vec{\omega}\| & 0 \\ \|\vec{\omega}\| & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La tercera columna de P puede tomarse igual a $\vec{\omega}$.

4. Demostrar que la matriz

$$\hat{Q}(t) = \begin{bmatrix} \cos(\|\vec{\omega}\|t) & -\sin(\|\vec{\omega}\|t) & 0 \\ \sin(\|\vec{\omega}\|t) & \cos(\|\vec{\omega}\|t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

resuelve

$$\hat{Q}'(t) = \hat{Q}J, \quad \hat{Q}(0) = I.$$

5. Interpretar geoméricamente la acción de $\hat{Q}(t)$ sobre un vector fijo $\vec{X} \in \mathbb{R}^3$. Observar que $\hat{Q}\vec{X}$ es una rotación de un ángulo $\|\omega\|t$ alrededor del eje z .

6. Demostrar que $Q(t) = P\hat{Q}(t)P^{-1}$ resuelve (2.31) y $Q(0) = I$.

7. Interpretar geoméricamente la acción de Q como una rotación de un ángulo $\|\omega\|t$ alrededor del eje determinado por ω .

La conclusión es que en un regimen estacionario corresponde a un autovector de la matriz de inercia A . En este regimen el movimiento del sólido (que venía dado por las ecuaciones $\vec{X}_i(t) = Q(t)\vec{U}_i + R(t)$) está compuesto por un movimiento de traslación rectilíneo uniforme de su centro de masa y una rotación con velocidad angular constante $\|\omega\|$ a lo largo de un eje fijo en el espacio, a saber el eje determinado por ω . Queda así explicado el comportamiento de la solución numérica encontrada en la subsección del sólido caja con condición inicial $\vec{\omega}(0) = (1, 0, 0)$.

2.5.3 Conservación de la energía cinética rotacional

2.5.3.1 Deducción

Seguiremos asumiendo que no actúan fuerzas externas sobre el sólido y podemos suponer por simplicidad que el centro de masas esta fijo en el origen

$$\vec{R}(t) = 0. \quad (2.33)$$

El hecho de que no perdemos generalidad se debe a que de no permanecer el centro de masas en el origen, podríamos usar como sistema de referencia un sistema de coordenadas con origen en él. Como este nuevo sistema de referencia se mueve con movimiento rectilíneo uniforme respecto a un sistema inercial, es en si mismo inercial. De allí podríamos haber usado este sistema desde un principio.

Recordemos que $\vec{X}_i \in \mathbb{R}^3$ denotaban las posiciones de las partículas que componían el sólido en un sistema inercial de referencia dado. Sobre estas partículas estamos suponiendo que no actúa ninguna fuerza externa. Solo están presentes las fuerzas internas inerciales $F_{ij}^{(i)}$ que son las responsables de que las partículas conserven su posición relativa. Como toda fuerza inercial satisface $\vec{F}_{ij}^{(i)} = -\vec{F}_{ji}^{(i)}$. Por la conservación de las distancias relativas

$$0 = \frac{d}{dt} \|\vec{X}_i(t) - \vec{X}_j(t)\| = (\vec{X}_i(t) - \vec{X}_j(t)) \cdot (\vec{X}_i'(t) - \vec{X}_j'(t)).$$

Concluimos que $(\vec{X}_i(t) - \vec{X}_j(t)) \perp (\vec{X}_i'(t) - \vec{X}_j'(t))$. Como las fuerzas inerciales actúan en la dirección que determinan las posiciones de los puntos, vemos que $\vec{F}_{ij}^{(i)} \perp (\vec{X}_i'(t) - \vec{X}_j'(t))$. Sea

$$\vec{F}_i = \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij}^{(i)}$$

la fuerza total que actúan sobre la partícula i -ésima. Usando los hechos anteriores vemos

que

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \vec{X}'_i(t) &= \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij}^{(i)} \cdot \vec{X}'_i(t) \\
 &= \sum_{i=1}^N \sum_{j < i} \vec{F}_{ij}^{(i)} \cdot \vec{X}'_i(t) + \sum_{i=1}^N \sum_{j > i} \vec{F}_{ij}^{(i)} \cdot \vec{X}'_i(t) \\
 &= \sum_{i=1}^N \sum_{j < i} \vec{F}_{ij}^{(i)} \cdot \vec{X}'_i(t) - \sum_{i=1}^N \sum_{j > i} \vec{F}_{ji}^{(i)} \cdot \vec{X}'_i(t) \\
 &= \sum_{i=1}^N \sum_{j < i} \vec{F}_{ij}^{(i)} \cdot (\vec{X}'_i(t) - \vec{X}'_j(t)) = 0
 \end{aligned}$$

La conclusión es que el sistema es conservativo y el potencial es cualquier función constante, que por conveniencia la tomamos como $U = 0$. Ahora invocando la Ley de conservación de la energía (1.7), la expresión de la energía cinética (2.28) y la suposición (2.33) obtenemos que existe una constante k tal que

$$\frac{1}{2} I(\vec{\omega}) \|\vec{\omega}\|^2 = k$$

En lo que sigue usamos como sistema de referencia determinado por los ejes de los momentos principales de inercia. Como estos ejes son independientes del tiempo constituyen un sistema inercial y ello nos permite asegurar que todas las ecuaciones hasta aquí obtenidas son válidas en este sistema de referencia. Así pondremos $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ para denotar las componentes de $\vec{\omega}$ relativas a la base propia para A

$$\vec{\omega}(t) = \omega_1(t) \vec{E}_1 + \omega_2(t) \vec{E}_2 + \omega_3(t) \vec{E}_3. \quad (2.34)$$

Esperemos que esto no cause confusión, en el sentido que seguimos denotando con la misma letra las componentes de $\vec{\omega}$ a pesar del hecho que posiblemente nos vimos obligados a cambiar el sistema de referencia.

Ejercicio 2.5.10 (Conservación energía cinética rotacional) Demostrar que en el sistema de referencia determinado por los momentos principales de inercia vale que existe $k \geq 0$ tal que

$$\lambda_1 \omega_1^2 + \lambda_2 \omega_2^2 + \lambda_3 \omega_3^2 = 2k, \quad (2.35)$$

para todo $t \in I$.

2.5.3.2 Comprobación numérica

```
lam,E=LA.eig(A)
```

Los autovalores son

$$\lambda_1 = 0,50926, \quad \lambda_2 = 1,0185, \quad \lambda_3 = 1,324.$$

Generamos una muestra de condiciones iniciales dentro del elipsoide correspondiente a $k = 0,5$. Comprobamos que las soluciones permanecen dentro del elipsoide.

```
import numpy as np
from numpy import linalg as LA
theta=np.linspace(0,2*np.pi,10)
phi=np.linspace(0,np.pi,10)
```

```

fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(111,projection='3d')
for th in theta:
    for ph in phi:
        omega01=lam[0]**(-.5)*np.sin(ph)*np.cos(th)
        omega02=lam[1]**(-.5)*np.sin(ph)*np.sin(th)
        omega03=lam[2]**(-.5)*np.cos(ph)
        omega0=np.array([omega01,omega02,omega03])
        omega = odeint(EcuacionEuler, omega0, t, args=())
        x=[u[0] for u in omega]
        y=[u[1] for u in omega]
        z=[u[2] for u in omega]
        ax.plot(x,y,z)

```

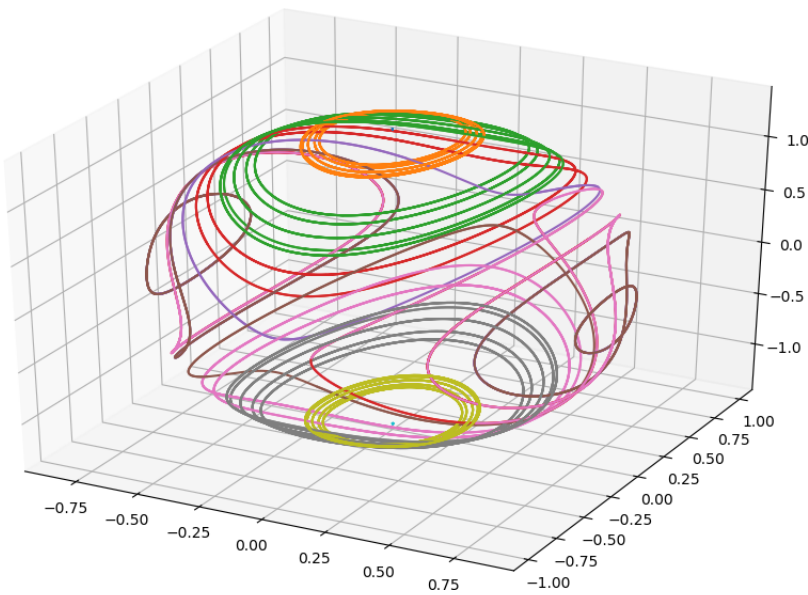


Figura 2.4: Elipsoide de energía 1/2

2.5.4 Conservación del momento angular total

Ejercicio 2.5.11 (Conservación del momento angular) Usando la expresión (2.14), el hecho que el torque \vec{T} es cero y que la posición del centro de masa es 0 deducir que la conservación del momento angular (2.15) se deduce que existe $a > 0$

$$\lambda_1^2 \omega_1^2 + \lambda_2^2 \omega_2^2 + \lambda_3^2 \omega_3^2 = a^2, \quad (2.36)$$

para todo $t \in I$.

Las ecuaciones (2.35) y (2.36) pueden ser consideradas como las ecuaciones para dos elipsoides en \mathbb{R}^3 con respecto a los ejes principales $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3$. Estos dos elipsoides son llamados *elipsoide de energía cinética* y *elipsoide de momento angular*. Históricamente, el elipsoide de energía cinética es también llamado *elipsoide Poinsot*.

Como consecuencia de las dos leyes de conservación, cualquier curva integral $\vec{\omega} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ de la ecuación de Euler debe yacer sobre la superficie de cada elipsoide y por lo tanto en la curva de intersección de estas dos superficies.

2.5.5 Solución geométrica

La visualización de las curvas de intersección de los elipsoides descriptos previamente tiene algunas complicaciones. Hay varias maneras de reescribir las leyes de conservación que favorecen una visualización. Una manera es restar la ecuación (2.36) a la (2.35) para conseguir

$$\lambda_1 \left(\frac{a^2}{2k} - \lambda_1 \right) \omega_1^2 + \lambda_2 \left(\frac{a^2}{2k} - \lambda_2 \right) \omega_2^2 + \lambda_3 \left(\frac{a^2}{2k} - \lambda_3 \right) \omega_3^2 = 0. \quad (2.37)$$

Si denotamos por $b_i = \lambda_i \left(\frac{a^2}{2k} - \lambda_i \right)$, para $i = 1, 2, 3$, entonces cada uno de estos números es negativo cuando $\frac{a^2}{2k} < \lambda_1$ y cada uno es positivo cuando $\frac{a^2}{2k} > \lambda_3$. Por lo tanto la ecuación

$$b_1 \omega_1^2 + b_2 \omega_2^2 + b_3 \omega_3^2 = 0$$

no tiene solución en cualquiera de estos casos. Otra forma de decir esto es la siguiente: las magnitudes del momento angular y la energía cinética rotacional, a, k de cualquier movimiento correspondiente a una solución de la ecuación de Euler debe satisfacer

$$\lambda_1 \leq \frac{a^2}{2k} \leq \lambda_3. \quad (2.38)$$

Así, con k fijo, el valor de a debe ser tomado de modo que $\frac{a^2}{2k}$ se encuentre en el intervalo $[\lambda_1, \lambda_3]$. Denominamos $\mathcal{C} = \mathcal{C}_a$ el conjunto de soluciones de la ecuación (2.37), en general debería ser una superficie de \mathbb{R}^3 , aunque veremos que en algunos casos se convierte en una línea, y llamaremos $\mathcal{E} = \mathcal{E}_k$ al elipsoide definido por (2.35). Vamos a dividir en casos.

2.5.5.1 Tres momentos de inercia distintos

Supongamos que $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$. Cuando a es mínimo, $b_1 = 0$, es decir, $\frac{a^2}{2k} = \lambda_1$. Entonces la ecuación (2.37) se reduce a

$$b_2 \omega_2^2 + b_3 \omega_3^2 = 0,$$

con $b_2 > 0, b_3 > 0$ y esto significa que $\omega_2 = 0, \omega_3 = 0$ y el conjunto \mathcal{C} se reduce a una línea a lo largo de \vec{E}_1 . Por lo tanto, \mathcal{C} es el primer eje principal y consecuentemente $\mathcal{C} \cap \mathcal{E} = \left\{ \left(\pm \sqrt{\frac{2k}{\lambda_1}}, 0, 0 \right) \right\}$ es un par de puntos, que son puntos estacionarios de la ecuación de Euler. Corresponden a soluciones donde la caja rota alrededor del primer eje principal $\text{gen}\{\vec{E}_1\}$ con velocidad angular constante $\sqrt{2k/\lambda_1}$.

A continuación, para a tal que $\lambda_1 < \frac{a^2}{2k} < \lambda_2$, tenemos $b_1 > 0$, mientras que $b_2 < 0, b_3 < 0$, y por lo tanto la ecuación para \mathcal{C} puede ser escrita como

$$\omega_1^2 = \frac{-b_2}{b_1} \omega_2^2 + \frac{-b_3}{b_1} \omega_3^2.$$

Por lo tanto, \mathcal{C} es un cono elíptico con su eje coincidiendo con el primer eje principal. La intersección $\mathcal{C} \cap \mathcal{E}$ consiste en un par de curvas circulares centradas sobre el primer eje principal, ver figura 2.5.

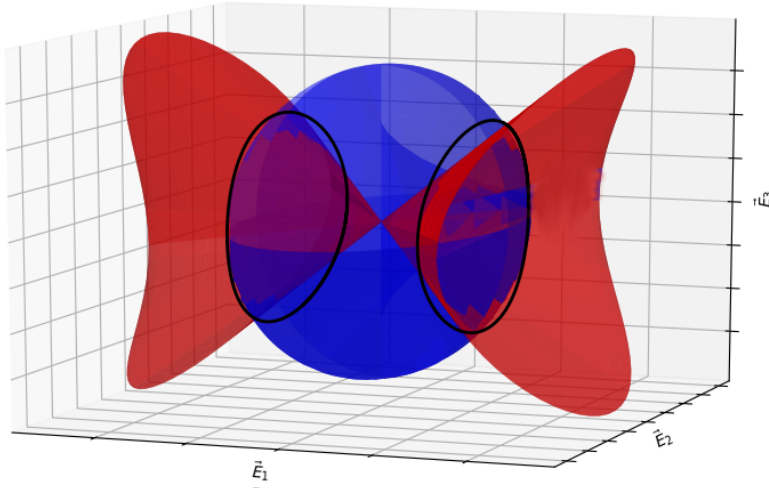


Figura 2.5: Intersección elipsoide y cono

Este par de curvas incrementa su tamaño a medida que a aumenta, pero cuando $\frac{a^2}{2k} = \lambda_2$ la intersección $\mathcal{C} \cap \mathcal{E}$ cambia. Para este valor de a se cumple que $b_1 > 0$, $b_2 = 0$, $b_3 < 0$ y por lo que la ecuación para \mathcal{C} puede escribirse como

$$\omega_1 = \pm \sqrt{\frac{-b_3}{b_1}} \omega_3.$$

Por lo tanto, \mathcal{C} es un par de planos, cada uno de los cuales es perpendicular al plano $\text{gen}\{\vec{E}_1, \vec{E}_3\}$. La intersección de este par de planos con el elipsoide \mathcal{E} es un par de curvas cruzadas. El par realmente se compone de cuatro curvas solución, cada uno de los cuales va desde uno de los puntos fijos en el eje \vec{E}_2 al otro punto fijo en este eje (ver figura 2.6).

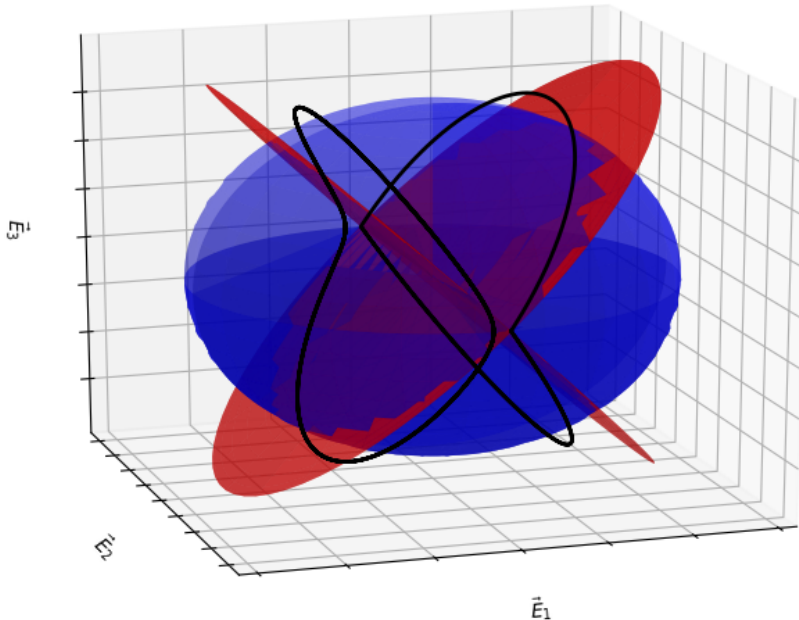


Figura 2.6: Intersección elipsoide con planos

Para un valor ligeramente mayor de a , de modo que $\lambda_2 < \frac{a^2}{2k} < \lambda_3$, tendremos $b_1 > 0$,

$b_2 > 0$, mientras que $b_3 < 0$. Así la ecuación para el cono se puede escribir como

$$\omega_3^2 = \frac{b_1}{b_3}\omega_1^2 + \frac{b_2}{b_3}\omega_2^2.$$

Por lo tanto, el cono \mathcal{C} es un cono elíptico con su eje a lo largo del tercer eje director. Como antes, la intersección de $\mathcal{C} \cap \mathcal{E}$ es un par de curvas cerradas circulares, pero ahora centrado alrededor del tercer eje principal.

Finalmente, cuando a es lo más grande posible, $\frac{a^2}{2k} = \lambda_3$ y el cono C degenera en una línea recta correspondiente al tercer eje principal. Entonces $\mathcal{C} \cap \mathcal{E}$ es un par de puntos fijos para la ecuación de Euler.

2.5.5.2 Dos momentos distintos de inercia.

Supongamos que $\lambda_1 = \lambda_2 < \lambda_3$. La otra posibilidad, $\lambda_1 < \lambda_2 = \lambda_3$, tiene un análisis similar. Primero notemos que el elipsoide es una superficie de revolución obtenida girando una elipse en el plano $\text{gen}\{\vec{E}_2, \vec{E}_3\}$ alrededor del eje \vec{E}_3 . El análisis de cómo el cono \mathcal{C}_a intersecta este elipsoide es como sigue.

Para a mínimo, tenemos $\frac{a^2}{2k} = \lambda_1 = \lambda_2$, por lo que el cono \mathcal{C} degenera en plano $z = 0$. De hecho, para este valor de a ,

$$\mathcal{C} = \text{gen}\{\vec{E}_1, \vec{E}_2\} = E_{\lambda_1}$$

es el espacio característico bidimensional correspondiente al autovalor $\lambda_1 = \lambda_2$. Por lo tanto la intersección $\mathcal{C} \cap \mathcal{E}$ es un círculo y cada punto de este círculo es un punto fijo de la ecuación de Euler.

Cuando a tiene un valor un poco más grande de modo que $\lambda_2 < \frac{a^2}{2k} < \lambda_3$, el cono C es un cono circular cuyo eje coincide con el tercer eje principal. Por lo tanto, la intersección $C \cap E$ es un par de curvas circulares cerradas centradas en el tercer eje principal.

Finalmente, cuando a es tal que $\frac{a^2}{2k} = \lambda_3$, el cono C_a se degenera en una línea recta que coincide con el tercer eje principal. De ahí $C \cap E$ es un par de puntos y estos puntos son puntos fijos de la ecuación de Euler.

Cada punto fijo desde el plano $E_{\lambda_1} = \text{gen}\{\vec{E}_1, \vec{E}_2\}$ de puntos fijos es inestable, mientras que cada punto fijo de la línea $E_{\lambda_1} = \text{gen}\{\vec{E}_3\}$ de puntos fijos es estable.

- (3) **Sólo un momento de inercia:** En el caso en el que los tres momentos de inercia coinciden: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, está claro que sólo hay un valor de a para el cual C no está vacío, es decir, para $a = \sqrt{2k\lambda_3}$, y que para este valor, $C = \mathbb{R}^3$. En este caso todo el espacio \mathbb{R}^3 consta de puntos fijos (estables) de la ecuación de Euler. Entonces también, $C \cap E = E$ es una esfera de puntos fijos. Esto es de esperar, ya que, como hemos mencionado, el cuerpo rígido se llama perfectamente simétrico cuando todos sus momentos principales de inercia son los mismos. Los momentos de inercia alrededor de cualquier eje son los mismos y los únicos movimientos posibles del cuerpo (con fuerza total y torque igual a cero) son giros alrededor de dichos ejes con velocidad angular uniforme.

2.6 Cuerpo rígido con punto fijo y campo de fuerzas uniforme

Ejercicio 2.6.12 Supongamos un cuerpo rígido con puntos masa de posiciones $\vec{X}_i(t)$ y masas m_i , $i = 1, \dots, N$. Las posiciones vienen dadas por la fórmula (2.2). Vamos a suponer que un punto del cuerpo está fijo en determinada posición. Supongamos que este punto es el \vec{X}_0 . Conviene poner el sistema de coordenadas con origen en ese punto, de modo que $\vec{X}_0(t) = 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Suponemos

además que sobre el cuerpo actúa un campo de fuerzas uniforme, para fijar ideas digamos que este campo de fuerzas es el campo gravitatorio en las cercanías de la superficie terrestre. Elegir el sistema de coordenadas de modo que la fuerza que actúa sobre el puntomasa m_i es igual a $(0, 0, -m_i g)$. Sobre el punto masa \vec{X}_0 actúa una fuerza reactiva en principio de magnitud y dirección desconocida \vec{F}_{rec}^0 que es la responsable del que punto masa quede fijo en el origen. Las coordenadas que elegimos hacen desaparecer esta fuerza del resultado final. Introduzcamos los vectores $\vec{V}_i = \vec{U}_i - \vec{U}_0$, donde los \vec{U}_i son los vectores en la fórmula (2.2).

1. Demostrar que $\vec{X}_i = Q\vec{V}_i$. Observar que encontrando la matriz Q resolvemos la posición del cuerpo rígido, no necesitamos hallar $\vec{R}(t)$.
2. Demostrar que el momento angular en el origen $\vec{K}_O(t)$ se escribe

$$\vec{K}_O(t) = QA\vec{\omega},$$

donde A es la matriz de inercia asociada a los vectores \vec{V}_i , $Q \in SO(3, \mathbb{R})$ es la matriz de rotación y $\vec{\omega}$ es el vector velocidad angular.

3. Demostrar que la Ley de balance de momento angular (1.5) se traduce en la ecuación

$$\vec{\omega} \times (A\vec{\omega}) + A\vec{\omega}' = -gMR(0) \times Q^t \vec{e}_3,$$

donde M es la masa total y $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$.

4. Demostrar que la función $\varphi = Q^t(t)\vec{e}_3$ resuelve la ecuación $\varphi'(t) = \varphi(t) \times \vec{\omega}(t)$.
5. Finalmente, conocida la velocidad angular inicial $\vec{\omega}_0$ el movimiento del cuerpo rígido es determinado por el PVI

$$\begin{cases} \vec{\omega}\vec{\omega} + A\vec{\omega}' = -gMR(0) \times \varphi(t), \\ \varphi'(t) = \varphi(t) \times \vec{\omega}(t) \\ \vec{\omega}(0) = \vec{\omega}_0, \quad \varphi(0) = \vec{e}_3. \end{cases}$$

6. Deducir que el sistema es conservativo que la energía total dada por

$$E = A\vec{\omega}(t) \cdot \vec{\omega}(t) + MgR(0) \cdot \varphi(t)$$

permanece constante a lo largo del movimiento.

7. Demostrar que la proyección del vector momento angular sobre el eje z es constante.

Apéndices

2.A Animación del movimiento de un cuerpo rígido con Numpy-Scipy-Matplotlib

Suponiendo que continuamos con el código de la sección , vale decir suponemos que hemos encontrado un array de Numpy `omega` resolviendo la ecuación de Euler numéricamente. El código que sigue compone una animación del movimiento del cuerpo rígido.

```
import matplotlib.animation as animation
```



```
%matplotliblib qt
```

Primero importamos el submódulo animation y el modo interactivo para desplegar las figuras.

```
#Interpolamos omega a fin de tener una función
#que podamos evaluar en valores de $t$ arbitrarios
omega_int = interp1d(t, omega.transpose())
def Omega(t):
    return np.array([[0, -omega_int(t)[2], omega_int(t)[1]],\
                    [omega_int(t)[2], 0, -omega_int(t)[0]],\
                    [-omega_int(t)[1], omega_int(t)[0], 0]])
#Función para resolver Q'*=Omega
def funcionQ(Q,t):
    Q1=np.reshape(Q, [3,3])
    Qprima=np.matmul(Q1,Omega(t)).reshape([1,9]).squeeze()
    return Qprima
#Resolvemos Q'*=Omega
Q0=np.eye(3).reshape([1,9]).squeeze()
t0=np.linspace(0,8,100)
Qsol = odeint(funcionQ, Q0, t0, args=())
X=[np.array([a*i,b*j,c*k])-CentroMasa for i in [0,1]\
for j in [0,1] for k in [0,1]]
L=[np.array([np.matmul(Qsol[h].reshape([3,3]),x) for x in X])\
for h in range(len(t0))]

fig = plt.figure()
ax = Axes3D(fig)

ax.set_xlim(-4, 4)
ax.set_ylim(-4, 4)
ax.set_zlim(-4, 4)
ax.set_xlabel("x")
ax.set_ylabel("y")
ax.set_zlabel("z")

lns = []
for i in range(len(t0)):
    x1 = [f[0] for f in L[i]]
    y1 = [f[1] for f in L[i]]
    z1 = [f[2] for f in L[i]]
    ln1, = ax.plot(x1, y1, z1, 'o-', color='steelblue')
    lns.append([ln1])

line_anı = animation.ArtistAnimation(fig, lns, interval=100, blit=True)
```

Bibliografía

- [Abramowitz and Stegun, 1965] Abramowitz, M. and Stegun, I. (1965). *Handbook of Mathematical Functions: With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Applied mathematics series. Dover Publications.
- [Betounes, 2009] Betounes, D. (2009). *Differential Equations: Theory and Applications*. Springer Science & Business Media.
- [Butikov, 2015] Butikov, E. I. (2015). Spring pendulum with dry and viscous damping. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 20(1):298–315.
- [Cortes, 2009] Cortes, J. (2009). Discontinuous Dynamical Systems: A tutorial on solutions, nonsmooth analysis, and stability. *arXiv e-prints*, page arXiv:0901.3583.
- [Nicola Bellomo, 2000] Nicola Bellomo, Luigi Preziosi, A. R. (2000). *Mechanics and Dynamical Systems with Mathematica®*. Modeling and Simulation in Science, Engineering and Technology. Birkhäuser Basel, 1 edition.
- [Simbach, 2005] Simbach, John C.; Priest, J. (2005). Another look at a damped physical pendulum. *American Journal of Physics*, 73:1079.
- [Squire, 1986] Squire, P. T. (1986). Pendulum damping. *American Journal of Physics*, 54(11):984–991.