

# Ecuaciones Diferenciales

Fernando Mazzone

7 de septiembre de 2020

# Índice general

<b>Prólogo</b>	<b>4</b>
<b>1 Generalidades y ecuaciones de primer orden</b>	<b>7</b>
1.1 ¿Que son las ecuaciones diferenciales? . . . . .	7
1.2 Algunos conceptos relacionados con ecuaciones diferenciales . . . . .	7
1.3 Definición formal . . . . .	10
1.4 Problemas bien planteados, condiciones iniciales . . . . .	11
1.5 Familias paramétricas de funciones . . . . .	12
1.6 Separación de variables . . . . .	15
1.7 Aplicaciones . . . . .	16
1.7.1 Ley de reproducción normal . . . . .	16
1.7.2 Soluciones . . . . .	17
1.7.3 Dinámica del punto . . . . .	17
1.7.4 El péndulo . . . . .	19
1.8 Ecuaciones homogéneas . . . . .	20
1.9 Ecuaciones exactas . . . . .	21
1.10 Factores integrantes . . . . .	23
1.11 Aplicación: antenas y espejos parabólicos . . . . .	24
1.12 Ecuaciones Lineales . . . . .	25
1.13 Reducción de orden . . . . .	27
1.14 Aplicaciones . . . . .	27
1.14.1 Velocidad de escape . . . . .	27
1.14.2 Curvas de persecución . . . . .	29
1.15 Oscilador armónico . . . . .	31
1.16 EDP, método características . . . . .	32
<b>Apéndices</b>	<b>33</b>
1.A La braquistócrona . . . . .	33
1.B La tautócrona . . . . .	36
1.C Solución al problema del espejo con SymPy . . . . .	37
<b>2 Teoría de Lie y ecuaciones diferenciales</b>	<b>39</b>
2.1 Introducción histórica . . . . .	39
2.2 Cambios de Variables . . . . .	39
2.2.1 Cómputos de cambios de variables . . . . .	40
2.3 Grupos . . . . .	43
2.3.1 Definición y ejemplos . . . . .	43
2.4 Grupos continuos de simetrías . . . . .	44
2.4.1 Grupos y cambios de variables . . . . .	44
2.4.2 Grupos de Lie uniparamétricos . . . . .	44
2.4.3 Grupos de simetrías de EDO . . . . .	46
2.5 Órbitas, tangentes y curvas invariantes . . . . .	48
2.6 Simetrías a partir de Infinitesimales . . . . .	51
2.7 Condición de Simetría Linealizada . . . . .	51
2.8 Coordenadas canónicas . . . . .	54
2.8.1 Definición y ejemplos . . . . .	54
2.9 Encontrando coordenadas canónicas . . . . .	55
2.9.1 Integrales primeras . . . . .	55
2.9.2 Infinitesimales→Simetrías (Revisitado) . . . . .	57
2.10 Resolviendo EDO con grupos de Lie de simetrías . . . . .	58
2.10.1 Método de solución . . . . .	58
2.10.2 Ecuaciones homogéneas . . . . .	60
2.10.3 Método de Lie y SymPy . . . . .	60
2.11 Diagrama conceptual . . . . .	60

---

<b>Apéndices</b>	<b>61</b>
2.A Formas Diferenciales, una introducción ingenua . . . . .	61
2.B Formas diferenciales en Sympy . . . . .	63
2.C Teoría de grupos computacional: GAP . . . . .	64
<b>3 Teoremas de Existencia y Unicidad</b>	<b>65</b>
3.0.1 Introducción . . . . .	65
3.1 Sistemas de Ecuaciones Diferenciales . . . . .	66
3.1.1 Definición y ejemplos . . . . .	66
3.1.2 Sistemas de ecuaciones y ecuaciones de orden superior . . . . .	67
3.2 Método de iteraciones de Picard . . . . .	68
3.3 Teorema de punto fijo Banach . . . . .	70
<b>4 Ecuaciones Lineales de Segundo Orden</b>	<b>74</b>
4.1 Introducción . . . . .	74
4.2 Estructura del conjunto de soluciones . . . . .	75
4.3 Reducción de orden . . . . .	77
4.4 Ecuaciones homogéneas con coeficientes constantes . . . . .	78
4.5 Ecuación no homogénea . . . . .	80
4.5.1 Método coeficientes indeterminados . . . . .	80
4.5.2 Método de variación de los parámetros . . . . .	83
4.6 Conclusiones . . . . .	84
4.7 Aplicaciones . . . . .	85
4.7.1 Vibraciones mecánicas . . . . .	85
4.7.2 Un poco de mecánica celeste . . . . .	92
4.8 Ecuaciones lineales de orden superior . . . . .	96
4.8.1 Existencia y unicidad de soluciones . . . . .	96
4.8.2 Estructura del conjunto de soluciones . . . . .	96
4.8.3 Ecuaciones homogéneas con coeficientes constantes . . . . .	97
4.8.4 Aplicación: osciladores armónicos acoplados . . . . .	98
4.9 Métodos Operacionales . . . . .	101
4.9.1 Raíces simples . . . . .	102
4.9.2 Series . . . . .	103
<b>5 Ecuaciones lineales de segundo orden</b>	<b>104</b>
5.1 Teorema de separación de Sturm . . . . .	104
5.1.1 Motivación . . . . .	104
5.1.2 Teorema separación de Sturm . . . . .	105
5.1.3 Reducción a la ecuación normal . . . . .	105
5.1.4 Teorema de Comparación de Sturm . . . . .	106
<b>6 Series de Potencias y de Frobenius</b>	<b>111</b>
6.1 Series de potencias . . . . .	111
6.1.1 Definición . . . . .	111
6.1.2 Límites superior e inferior . . . . .	111
6.1.3 Radio de convergencia . . . . .	112
6.1.4 Funciones analíticas . . . . .	115
6.2 Solución de EDO mediante series de potencias. Método coeficientes indeterminados . . . . .	116
6.2.1 Método coeficientes indeterminados . . . . .	116
6.2.2 Relaciones de recurrencia . . . . .	117
6.2.3 Serie binomial . . . . .	118
6.2.4 Oscilador armónico . . . . .	119
6.2.5 Ecuación de Legendre. Primera aproximación . . . . .	120
6.3 Teorema fundamental sobre puntos ordinarios . . . . .	123
6.4 Puntos singulares, método de Frobenius . . . . .	125
6.4.1 Series de Frobenius . . . . .	125
6.4.2 Ecuación de Bessel, funciones de Bessel de primera especie . . . . .	130
6.4.3 Teorema fundamental sobre puntos singulares regulares . . . . .	135
6.4.4 Funciones de Bessel de segunda especie . . . . .	141

<b>7 Separacion de Variables</b>	<b>143</b>
7.1 Apéndice A: Laplaciano en coordenadas polares . . . . .	148
7.2 Apendice B: Código SAGE para animación de tonos normales . . . . .	149
<b>8 Sistemas autónomos</b>	<b>150</b>
8.1 Ecuaciones autónomas . . . . .	150
8.2 Ecuaciones unidimensionales . . . . .	150
8.3 Sistemas autónomos planos . . . . .	152
8.3.1 Técnicas elementales . . . . .	153
8.3.2 Linearización . . . . .	157
8.4 El flujo de una ecuación diferencial . . . . .	158
8.5 Conjuntos invariantes . . . . .	159
8.6 Linearización: continuación . . . . .	161
8.7 Aplicación a un modelo biológico . . . . .	168
8.8 Teoría global . . . . .	171
8.8.1 Puntos regulares . . . . .	172
8.8.2 $\omega$ -límites . . . . .	172
8.8.3 Teorema de Poincare-Bendixson . . . . .	172
8.9 Estabilidad en el sentido de Lyapunov . . . . .	172
<b>A Breve introducción a Python y SymPy</b>	<b>178</b>
A.1 Descripción . . . . .	178
A.2 Instalación . . . . .	178
A.2.1 Anaconda . . . . .	178
A.2.2 Windows . . . . .	178
A.2.3 linux . . . . .	179
A.2.4 Android . . . . .	179
A.2.5 Computación en la nube . . . . .	179
A.3 Forma de trabajo: por medio de scripts e interactiva . . . . .	179
A.4 Características sobresalientes del lenguaje . . . . .	179
A.5 Elementos del Lenguaje . . . . .	180
A.5.1 Comentarios . . . . .	180
A.5.2 Variables . . . . .	180
A.5.3 Tipo de datos . . . . .	180
A.5.4 Listas y tuplas . . . . .	181
A.5.5 Diccionarios . . . . .	182
A.5.6 Listas por comprensión . . . . .	182
A.5.7 Funciones . . . . .	183
A.5.8 Condicionales . . . . .	183
A.5.9 Bucles . . . . .	184

# Prólogo

**CARRERA:** Lic en Matemática.

**PLAN DE ESTUDIOS:** 2008 versión 1

**ASIGNATURA:** Ecuaciones Diferenciales **CÓDIGO:** 1913

**DOCENTES RESPONSABLES:** Fernando Mazzone

**EQUIPO DOCENTE:** Fernando Mazzone

**AÑO ACADÉMICO:** 2017

**REGIMEN DE LA ASIGNATURA:** Cuatrimestral

**RÉGIMEN DE CORRELATIVIDADES:**

Aprobada	Regular
	Álgebra Lineal Aplicada (2261)
	Topología (1917)

**CARGA HORARIA TOTAL:** 80 hs.

Teóricas: 40 hs., Prácticas: 40 hs..

**CARÁCTER DE LA ASIGNATURA:** Obligatoria

## A. CONTEXTUALIZACIÓN DE LA ASIGNATURA

Primer cuatrimestre de cuarto año

## B. OBJETIVOS PROPUESTOS

- Presentar la teoría de las ecuaciones diferenciales desde un perspectiva rigurosa.
- Poner en evidencia la retroalimentación entre teoría matemática y modelos físicos. En este sentido se desarrollan aplicaciones a la caída de cuerpos a lo largo de guías (y su relación con la óptica), problema de la braquistócrona, vibraciones de sistemas mecánicos, membranas, potencial sobre una esfera, movimiento planetario, etc.
- Integrar la asignatura a otras asignaturas del plan de estudios de la Lic. en Matemática. En este sentido se desarrolla la teoría de Lie de solución de ecuaciones por medios de grupos continuos. No es costumbre que esta teoría se desarrolle en cursos introductorios.
- Incorporar el uso de sistemas algebraicos computacionales en la práctica del alumno. Se utilizaran recursos de código abierto que derivan del lenguaje Python, en particular SymPy y SAGE.

## C. CONTENIDOS BÁSICOS DEL PROGRAMA A DESARROLLAR

Ecuaciones de primer orden, métodos de solución. Métodos de Lie. Teorema de existencia y unicidad. Ecuaciones lineales de orden superior. Osciladores armónicos. Método de desarrollo en serie. Método de Frobenius. Sistemas de Ecuaciones.

## D. FUNDAMENTACIÓN DE LOS CONTENIDOS

La gran parte del curso versa sobre temas que ya son estándar en las ecuaciones diferenciales y se consideran básicos en el desarrollo de esta área. No creemos necesario abundar en fundamentos sobre la incorporación de ellos. Si merece fundamentarse aquellos que no son del todo habituales.

Con frecuencia las leyes de la física o modelos matemáticos de sistemas biológicos, sociales, económicos, etc, se expresan por medio de ecuaciones y particularmente con ecuaciones diferenciales. Con igual frecuencia en nuestras aulas la enseñanza de esta, como de otras ramas de la matemática, omite la consideración de las relaciones entre los conceptos matemáticos y otras ciencias. A lo sumo se suele presentar alguna aplicación de la teoría como medio de justificar la relevancia de ella. Se hace extensivo al quehacer pedagógico el postulado formalista que la matemática se valida por si misma y es independiente de cualquier realidad ajena a ella.

Nuestro punto de vista es que las relaciones de la teoría matemática con su entorno constituye un ingrediente insoslayable en la enseñanza de la teoría. Fundamentalmente este punto de vista, en que es frecuente que el sistema físico que es modelizado por cierta teoría, ilumine el entendimiento de la teoría misma. Por ejemplo, el principio de máximo, que afirma que una solución de la ecuación  $\Delta u = 0$  en un abierto y acotado  $\Omega$  alcanza su máximo en la frontera de  $\Omega$ , no es evidente de la ecuación en si misma, pero si lo es en gran medida de una de las situaciones físicas que modeliza: la temperatura en estado estacionario de un cuerpo sobre el cual el calor fluye por difusión. No puede desaprovecharse el recurso de pensar una solución de la ecuación aludida en estos dos sentidos.

También ocurre el camino inverso, esto es que el desarrollo de la teoría matemática ilumine el entendimiento del sistema físico. Al fin y al cabo, ese es el propósito principal de la modelización matemática. Por ejemplo, para quien escribe no resulta físicamente evidente que un sistema de resortes acoplados tenga esencialmente sólo dos modos normales de vibración, cosa que se demuestra en el actual curso. Por estas consideraciones, entre otras, también estamos convencidos que la demostración matemática rigurosa también constituye un ingrediente insoslayable para el entendimiento de la teoría.

Se incorpora activamente el uso de sistemas algebraicos computacionales SAC. Una causa es contar con asistencia para el desarrollo de cálculos que son engorrosos. Pero la causa fundamental de la introducción de SAC es que ponen al alumno en la situación de hacer un programa que implemente procedimientos de la teoría. Esto suele ser una tarea no trivial para el recién iniciado y obliga a desarrollar aptitudes de programación, pero más importante, obliga a repensar la teoría matemática para adaptarla al nuevo contexto.

En el mismo orden de ideas, esto es poner los conocimientos de la asignatura en diversos contextos, se buscó una integración con otras materias del plan de estudios. Por supuesto que hay algunas de ellas que son absolutamente necesarias para desarrollar la teoría de las ecuaciones diferenciales, pero no es costumbre en los cursos elementales sobre ecuaciones diferenciales recurrir a algunas ramas, por ejemplo teoría de grupos. Sin embargo la teoría de grupos tiene cosas importantes para decir sobre las ecuaciones. Se buscó establecer estas vinculaciones menos tradicionales, por ejemplo se desarrollo una unidad sobre la utilización de grupos de Lie de simetrías para resolver EDO. Utilizamos un concepto particular de grupo de Lie, para evitar las complicaciones técnicas en la definición de este concepto en general. La consideración de simetrías es una técnica matemática básica y las simetrías están indisolublemente ligadas al concepto de grupo.

## E. ACTIVIDADES A DESARROLLAR

**CLASES TEÓRICAS:** Presencial, 4 horas semanales. La metodología que se desarrollará es la exposición por parte del docente de los fundamentos teóricos de los contenidos impartidos. Se incentivará la participación de los alumnos durante la clase, requiriendo que ellos aporten, por ejemplo, demostraciones de determinados hechos o, en general, soluciones a determinadas situaciones problemáticas que plantea el desarrollo teórico de la materia.

**CLASES PRÁCTICAS:** Presencial 4 horas semanales. Se espera que los alumnos trabajen sobre los ejercicios de la práctica en forma independiente fuera de los horarios de la asignatura. Posteriormente estos ejercicios se discutirán durante la clase, el profesor tratará de limitar su participación de modo tal de favorecer que los alumnos autogestionen su aprendizaje.

Internet: Se utilizaron diversos recursos de internet, que están compendiados en una página de la asignatura y en un repositorio de Git Hub. En la red hay excelentes recursos, videos, páginas web, wikis y, en general, distintos materiales multimedia especialmente útiles para visualizar algunos conceptos, métodos, etc.

## F. NÓMINA DE TRABAJOS PRÁCTICOS

Hay un trabajo práctico por cada unidad de la materia.

### G. HORARIOS DE CLASES:

martes y jueves de 14 a 18.

**Horario de clases de consultas:** Se convendrá con los alumnos, durante el desarrollo de la materia, los horarios de consultas.

## H. MODALIDAD DE EVALUACIÓN:

**Evaluaciones Parciales:** Se le presentará al alumno una serie de problemas que deberá resolver.

**Evaluación Final:** Será oral, el alumno deberá desarrollar los ejes conceptuales y fundamentos teóricos de la materia.

**Condiciones de regularidad:** Aprobar los exámenes parciales o sus respectivos recuperatorios.

**Condiciones de promoción:** no se prevé

## I. CONTENIDOS:

*El asterisco al lado de las referencias citadas más abajo indica la bibliografía considerada principal. Las citas sin el asterisco corresponden a bibliografía suplementaria.*

**Unidad 0. Python, SymPy, SAGE.** Panorama de instalación, distribuciones y recursos online. Tipos de datos en Python, programación elemental.

**Unidad 1. Ecuaciones de Primer Orden.** Noción de ecuación diferencial y clasificación. Ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO). Problemas de valores iniciales. Familia de curvas y la familia ortogonal. Método de separación de variables. Aplicaciones: dinámica de mezclas, cuerpos en caída a lo largo de guías, curvas braquistócrona y tautócrona. Ecuaciones homogéneas. Ecuaciones exactas. Factores integrantes. Ecuaciones lineales de primer orden. Métodos de reducción de orden. Curvas de persecución. Velocidad de escape. Problema del resorte. Cambios de variables. Usando SymPy para cambiar variables. Grupos de Lie uniparamétricos. Grupos de simetrías. Generadores infinitesimales. Variables canónicas. Solución de EDO por medio de sus grupos de Lie de simetrías. [?, ?, ?, ?]

**Unidad 2. Teorema de Existencia y Unicidad.** Presentación filosófica: determinismo científico. Funciones Lipschitzianas. Teorema de punto fijo de Banach. Método iterativo de Picard. Teorema de existencia y unicidad para sistemas de EDO de primer orden.[?, ?, ?, ?]

**Unidad 3. Ecuaciones Lineales de Segundo Orden.** Ecuaciones lineales. Reducción de orden. Ecuaciones homogéneas a coeficientes constantes. El problema no homogéneo. Independencia lineal. Bases de soluciones. Polinomio característico. Ecuaciones no homogéneas. Coeficientes indeterminados y variación de los parámetros. Vibraciones mecánicas. Solución del problema Kepleriano de los dos cuerpos. Osciladores armónicos acoplados. [?, ?]

**Unidad 4. Métodos cualitativos.** Teoremas de separación y de comparación de Sturm. Aplicaciones, ceros de las funciones de Bessel.[?, ?]

**Unidad 5. Desarrollo en serie de potencias.** Repaso de series de potencias. Método de coeficientes indeterminados. Resolución de problemas de desarrollo en serie con SymPy. Ecuaciones lineales de segundo orden: puntos regulares. Puntos singulares regulares. Series de Frobenius. Teoremas fundamentales.[?, ?]

**Unidad 6. Sistemas lineales.** Base de soluciones. Matriz fundamental. Sistemas lineales a coeficientes constantes. Solución del problema homogéneo con formas de Jordan. Problema no homogéneo. Sistemas no-lineales. [?, ?]

**J. CÓDIGO QR** Algunos bloques de código Python que expondremos en el texto vienen acompañados de un código QR como note al margen. La finalidad es que el alumno pueda leer este código con algún dispositivo móvil y ejecutar el código dentro del dispositivo

# 1 Generalidades y ecuaciones de primer orden

## 1.1 ¿Qué son las ecuaciones diferenciales?

**Definición 1.1.1 (Ecuación diferencial, definición informal)** Es una o varias relaciones entre una o varias variables dependientes y sus tasas de cambio respecto a ciertas variables independientes.

El problema básico asociado a las ecuaciones diferenciales es hallar las variables dependientes que las resuelven.

Las ecuaciones diferenciales son usadas muy a menudo en matemática aplicada, puesto que muchas leyes (de la física por ejemplo) se expresan a través de este tipo de ecuaciones.

**Ejemplo 1.1.1** Modelizar matemáticamente el movimiento de un cuerpo de masa  $m$  en las proximidades de la superficie terrestre, asumiendo que su movimiento es sobre la vertical y que las fuerzas que sobre él actúan son la gravedad y el rozamiento con el aire.

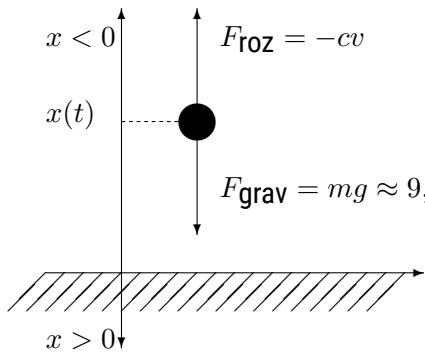


Figura 1.1: Caída libre

$x(t)$  = posición a lo largo de la vertical, relativo a un eje de coordenadas

$v(t) = \frac{dx}{dt}$  = velocidad

$F_{grav} =$  fuerza debida a la gravedad =  $mg$   
donde  $g = 9,8m/s^2$   $F_{froz} =$  fuerza de rozamiento, proporcional a la velocidad y de sentido contrario =  $-cv$ ,  $c > 0$ .

Usamos la Segunda Ley de Newton, esto es la suma de las fuerzas totales que actúan sobre un cuerpo de masa  $m$  es igual al producto de la masa  $m$  y la aceleración  $a(t)$ . Recorremos que la aceleración es la tasa de cambio de la velocidad, es decir la derivada segunda de la posición.

Usando todas las relaciones mencionadas

$$\begin{aligned} ma(t) &= mv'(t) = F_{total} \\ &= F_{grav} + F_{froz} \\ &= mg - cv \end{aligned}$$

vale decir

$$x''(t) + \frac{c}{m}x'(t) = g. \quad (1.1)$$

$$v'(t) + \frac{c}{m}v = g. \quad (1.2)$$

## 1.2 Algunos conceptos relacionados con ecuaciones diferenciales

**Definición 1.2.2 (Orden)** El índice de la mayor derivada interviniente en la ecuación.

Por ejemplo la ecuación (1.1) es de orden 2 y la ecuación (1.2), si bien está estrechamente relacionada con la anterior, es de orden 1. Como regla casi general, cuanto menor es el orden, más fáciles de estudiar y/o resolver las ecuaciones son.

**Definición 1.2.3 (Solución)** Una función que satisface la relación que indica la ecuación.

Por ejemplo

$$v(t) = \frac{m}{c}g + ke^{-\frac{c}{m}t}, \quad (1.3)$$

resuelve (1.2), para todo  $C \in \mathbb{R}$ . No deberíamos perder tiempo en chequear una cuestión tan sencilla, pero aprovechemos la ocasión para usar SymPy.

```
>>>from sympy import *
>>>m,g,c,k,t=symbols('m,g,c,k,t')
>>>v=m/c*g+k*exp(-c/m*t)
>>>simplify(v.diff(t)+c/m*v)
g
```

Notar que las líneas que comienzan con el signo del prompt >>> indican entradas por línea de comandos y las que comienzan sin este signo son las respuestas del interprete.

Rara vez utilizaremos las siguientes funcionalidades de sympy, pero es oportuno decir que SymPy puede encontrar la solución a una ecuación diferencial

```
>>>v=symbols('v',cls=Function)
>>>EqCaida=Eq(v(t).diff(t)+c/m*v(t),g)
>>>Vel=dsolve(EqCaida,v(t))
>>> Vel
v(t) == (g*m + exp(c*(C1 - t/m)))/c
```

La solución obtenida es la ya conocida. Es instructivo averiguar que tipo de dato tiene la variable Vel

```
>>> type(Vel)
<class 'sympy.core.relational.Equality'>
```

A este tipo de cuestiones hay que prestar atención cuando se trabaja con sympy, pues existe la tendencia a confundir los conceptos matemáticos con los propios del lenguaje. Por ejemplo, matemáticamente una solución es una función. Sin embargo, en este caso, cuando le solicitamos una solución a sympy nos entrega un objeto de tipo "relación de igualdad".

**Definición 1.2.4 (Ecuación diferencial ordinaria (EDO))** Es una ecuación donde las variables dependientes sólo dependen de una única variable independiente.

Las ecuaciones (1.1) y (1.2) son ejemplo de ello, la variable independiente es el tiempo.

**Definición 1.2.5 (Ecuación en derivadas parciales (EDP))** Es una ecuación donde las variables dependientes dependen de más de una variable independiente.

Ejemplo de este tipo de ecuación es la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Puede ocurrir también que dispongamos de varias ecuaciones diferenciales que se deben satisfacer simultáneamente. En estos casos, el conjuntos de ecuaciones se suele escribir como una única ecuación vectorial. Por este motivo, en algunas ocasiones cuando dispongamos de una única ecuación diremos que tenemos una *ecuación escalar*.

**Definición 1.2.6 (Sistema de ecuaciones)** Es un conjunto de ecuaciones diferenciales que se deben satisfacer simultáneamente.

En ese caso es de esperar que tengamos varias incógnitas en nuestro problema. En general una ecuación escalar determina sólo una incógnita. De hecho aquí ocurre, a semejanza con ecuaciones algebraicas, que es frecuente necesitar tantas ecuaciones como incógnitas.

**Ejemplo 1.2.2** El sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -\operatorname{sen}(x) \end{cases}$$

es muy conocido pues modeliza el movimiento de un péndulo.

Muy a menudo hablaremos de resolver una ecuación, pero es oportuno discutir qué queremos significar con esto.

**Definición 1.2.7 (Resolver una ecuación)** Es expresar la solución como combinaciones algebraicas y composiciones de funciones que consideramos elementales.

Esta definición contiene una vaga apelación a ciertas "funciones elementales". El universo de funciones que se considera elemental es una cuestión política, no matemática. En principio, consideraremos elementales a las potencias, exponenciales, logarítmos, trigonométricas y trigonométricas inversas. No obstante esta lista se puede expandir con muchas funciones especiales. Las operaciones permitidas para combinar estas funciones también están sujetas a convenciones. Por ejemplo, admitiremos como válida una expresión que contenga una integral, al menos en el caso que no sea claro cómo resolver esta integral.

Casi todo este curso trata con la discusión de métodos para resolver ecuaciones. Sin embargo resolver ecuaciones no es quizás el problema principal relacionado con las ecuaciones diferenciales. No importa tanto lograr una expresión formal de la solución, como, por ejemplo, conocer las propiedades que poseen las soluciones. Al fin y al cabo, uno conoce una función a través de sus propiedades.

**Definición 1.2.8 (Solución general)** Usualmente una ecuación presenta infinitas soluciones. Una solución general es una expresión que representa todas estas soluciones. Es habitual que una solución general contenga parámetros. Cada elección de estos parámetros determina una solución distinta.

Por ejemplo (1.3) es la solución general de (1.2). La afirmación anterior requiere una demostración puesto que sólo hemos mostrado que (1.3) es solución, pero no que toda solución se expresa con (1.3). Para demostrar la afirmación, hay que multiplicar ambos miembros de (1.2) por  $e^{\frac{c}{m}t}$  y luego integrar respecto a  $t$

$$\frac{mg}{c} e^{\frac{c}{m}t} = \int g e^{\frac{c}{m}t} dt = \int v'(t) e^{\frac{c}{m}t} + \frac{c}{m} e^{\frac{c}{m}t} v dt = e^{\frac{c}{m}t} v + C.$$

Despejando  $v$  del primer y último miembro obtenemos (1.3) con  $k = -C$ .

**Ejemplo 1.2.3** En algunas ocasiones sólo podemos dejar una relación implícita entre las variables dependientes e independientes. Por ejemplo

$$x = e^y + y + C \quad \text{para } C \in \mathbb{R} \tag{1.4}$$

es solución general de

$$y'(e^y + 1) = 1.$$

Vamos a chequear sólo que (1.4) es solución, dejando la justificación que toda solución tiene esa forma para más adelante. Derivando (1.4)

$$1 = e^y y' + y'$$

Luego  $y' = 1/(1 + e^y)$ . Reemplazando esta relación en la ecuación diferencial corroboramos que es solución.

### 1.3 Definición formal

**Definición 1.3.9 (Ecuación diferencial)** Una ecuación diferencial ordinaria de orden  $n$  es una relación de la forma

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0.$$

donde  $F : (a, b) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Omega$  es abierto de  $\mathbb{R}^{n+1}$  y  $(a, b)$  un intervalo de  $\mathbb{R}$ .

**Ejemplo 1.3.4** El problema de hallar una primitiva de una función es una ecuación diferencial que, como ya se ha visto en cursos iniciales de análisis, se relaciona con el concepto de integral. Supongamos  $f : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua. Consideremos la ecuación diferencial

$$y'(x) = f(x).$$

Sea  $x_0 \in (a, b)$ , integrando respecto a  $x$  entre  $x_0$  y  $x$

$$y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^x f(t)dt$$

Que es una solución general. Quedaría determinada una única solución si, por ejemplo, conociersemos  $y(x_0)$ .

**Ejemplo 1.3.5** Supongamos  $f : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  como antes. Consideremos la ecuación diferencial

$$y''(x) = f(x).$$

Tomemos una integral indefinida respecto a  $x$

$$y'(x) = C_1 + \int f(t)dt$$

Ahora deberemos tomar una integral indefinida más

$$y(x) = C_2 + C_1 t + \int \left( \int f(x)dx \right) dx.$$

Ahora quedan dos constantes  $C_1$  y  $C_2$ .

En el caso de un sistema de ecuaciones diferenciales, la forma de describirlo es esencialmente igual a la de la Definición 1.3.9. La nueva definición contiene a la Definición 1.3.9 como caso particular.

**Definición 1.3.10 (Sistema de ecuación diferenciales)** Una sistema de  $k$ -ecuaciones diferenciales ordinarias de orden  $n$  es una relación de la forma

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0.$$

donde  $F : (a, b) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$ ,

$$\Omega \subset \underbrace{\mathbb{R}^k \times \cdots \times \mathbb{R}^k}_{n+1-\text{veces}}$$

es abierto y  $(a, b)$  un intervalo de  $\mathbb{R}$ . Notar que el  $=$  en la derecha de la ecuación está en  $\mathbb{R}^k$  y que tenemos  $k$  ecuaciones e incógnitas, las  $k$  componentes de  $y =$

$(y_1, \dots, y_k)$ .

**Ejemplo 1.3.6** En el caso del péndulo  $k = 2, n = 1$ , mientras que  $(a, b) = \mathbb{R}, \Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  y  $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  viene dada por

$$F \left( \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \xi - v \\ \eta + \operatorname{sen}(x) \end{pmatrix}$$

Más adelante veremos que toda ecuación, o sistemas de ecuaciones, ordinaria de orden  $n$  se puede reducir a un sistema de orden 1. De modo tal que es más frecuente considerar este tipo de sistemas. También es común considerar, se trate ya de ecuaciones escalares o sistemas, ecuaciones donde es posible despejar de manera explícita la derivada de mayor orden. A esta forma la denominaremos *forma explícita* de la ecuación

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)). \quad (1.5)$$

## 1.4 Problemas bien planteados, condiciones iniciales

La siguiente definición expresa lo que entenderemos cuando digamos que un problema está bien planteado.

**Definición 1.4.11 (Principio de Hadamard)** Un problema se dice bien planteado según Hadamard si satisface que

- A. El problema admite solución
- B. La solución es única
- C. La solución depende de manera continua de los datos numéricos del problema.



Jacques Hadamard  
(1865-1963)

Como hemos visto, una ecuación diferencial no determina una única solución, por consiguiente no sería un problema bien planteado. Debemos agregar relaciones a nuestro problema para que sea bien planteado. Es así que aparecen condiciones iniciales, problemas de contorno, etc.

**Definición 1.4.12 (Problemas de valores iniciales (PVI))** Sea  $x_0 \in (a, b)$ ,  $F : (a, b) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  e  $y_0, y_0^1, \dots, y_0^{n-1} \in \mathbb{R}$ . Las siguientes relaciones se denominan problema de valores iniciales

$$\begin{cases} F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 & x \in (a, b) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0^1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1} \end{cases} \quad (1.6)$$

Más adelante demostraremos el teorema de existencia y unicidad para ecuaciones y sistemas de ecuaciones. Este teorema nos dice que, para ciertas  $F$ , el problema (1.6) tiene una única solución alrededor de un entorno de  $x_0$ .

Es común en las aplicaciones físicas de las EDO, que la variable  $x$  represente el tiempo e  $y = y(x)$  represente alguna cantidad física (posición, velocidad, temperatura, etc) caracterizando a cierto sistema físico. Es muy frecuente que aparezcan ecuaciones de orden 2 ( $n = 2$ ). En esta situación, al par  $(y, y')$  se lo denomina *estado del sistema* y las

condiciones A y B en la Definición 1.4.11 se leen como que el estado del sistema en un momento  $x_0$  dado determina el estado del mismo en cualquier otro momento. Este es el postulado principal de la corriente filosófica conocida por determinismo.

Es común que una ecuación que modela un sistema físico dependa de parámetros. Pensar por ejemplo del papel de la masa en la ecuación (1.1). Estos parámetros o incluso los valores iniciales del problema (1.6) dependen muchas veces de resultados de mediciones y sólo es posible tener de ellos un valor aproximado. Por consiguiente, casi nunca se resuelve el PVI que se debería resolver, sino otro, con parámetros y valores iniciales aproximadamente iguales a los correctos<sup>1</sup>. La condición C en la Definición 1.4.11 expresa el hecho de que las soluciones a PVIs aproximadamente iguales son aproximadamente iguales entre sí.

Vamos a destacar la siguiente instancia particular de la Definición 1.6.

**Definición 1.4.13 (PVI para ecuaciones de primer orden)** La ecuación general de primer orden tiene la forma

$$F(x, y(x), y'(x)) = 0,$$

donde  $F : (a, b) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  y  $\Omega$  abierto de  $\mathbb{R}^2$ . Con frecuencia asumiremos que  $y'$  se despeja de la relación anterior, es decir que existe  $f : \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Omega'$  abierto de  $\mathbb{R}^2$ , tal que

$$y' = f(x, y).$$

Bajo esta suposición, si  $(x_0, y_0) \in \Omega'$  el problema de valores iniciales se escribe

$$\begin{cases} y' &= f(x, y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases}$$

## 1.5 Familias paramétricas de funciones

Hemos dicho que en el común de los casos es de esperar que una ecuación tenga asociado un conjunto de soluciones. En esta sección vamos a preguntarnos sobre el problema inverso, dado un conjunto de funciones encontrar una ecuación que lo tenga por solución.

**Problema.** Dada una familia paramétrica de funciones

$$y = y(x, c), \quad (1.7)$$

dependiente del parámetro  $c \in \mathbb{R}$ , ¿Será posible hallar una ecuación para la cual la familia sea la solución general?

En líneas generales la respuesta es si. Nos conviene expresar (1.7) como una ecuación implícita

$$f(x, y, c) = 0. \quad (1.8)$$

Derivando esta ecuación respecto a  $x$

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y'(x, c) = 0. \quad (1.9)$$

Ahora es posible eliminar  $c$  de (1.8) y (1.9) al costo de quedarnos con una sola ecuación.

**Ejemplo 1.5.7** Encontrar la ecuación que satisface la familia paramétrica

$$x^2 + y^2 = c^2.$$

<sup>1</sup>Estamos usando una noción bastante ingenua de corrección

Derivamos

$$2x + 2yy' = 0.$$

Ya está!!!

**Ejemplo 1.5.8** Idem  $x^2 + y^2 = 2cx$ . Derivando

$$2x + 2yy' = 2c.$$

Eliminamos  $c$  de las dos relaciones

$$\frac{x^2 + y^2}{x} = 2x + 2yy' \Rightarrow y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy}.$$

Dada una familia paramétrica

$$f(x, y, c) = 0,$$

encontrar otra

$$g(x, y, d) = 0$$

tal que los ángulos que forman los gráficos entre las funciones de una y de otra familia sean rectos en cada punto de corte entre ellos.

Para resolver este problema se completan estos pasos

- Se encuentra la ecuación diferencial que satisface la familia dada, digamos

$$y' = h(x, y).$$

- Se resuelve

$$y' = -\frac{1}{h(x, y)}.$$

**Ejemplo 1.5.9** Encontrar la familia de curvas ortogonales a la flia de circunferencias

$$x^2 + y^2 = c^2$$

Hallamos antes que la ecuación que satisfacen estas curvas es

$$y' = -\frac{x}{y}.$$

Luego deberíamos resolver

$$y' = \frac{y}{x}.$$

Que aún no sabemos resolver, pero SymPy si!!!

```
dsolve
Sintaxis (ampliar en la documentación SymPy)
dsolve(eq, f(x), hint)
eq: Ecuación (posicional)
f(x): función incognita (posicional)
hint: Método a emplear. Argumento con nombre hint='cadena'.
```

```
x=symbols('x')
y=Function('y')(x)
MiEcua=Eq(y.diff(x),y/x)
f=dsolve(MiEcua,y)
```

**Resultado:** Flía rectas por el origen.

La instrucción

```
f=dsolve(MiEcua,y,hint='separable')
```

produce el mismo resultado.

```
plot
```

**Sintaxis** (Ampliar en la documentación SymPy)

Para un gráfico simple

```
plot(expr, rango, opcionales(claves))
```

expr: Expresión a graficar

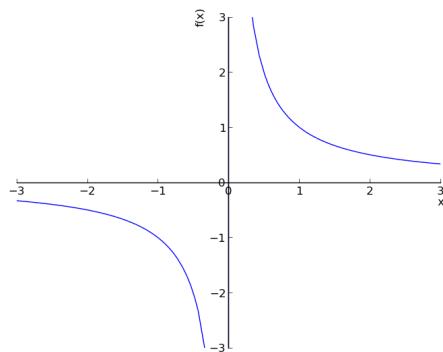
rango: Conjunto donde varia la variable independiente

opcionales Argumentos que modifican la apariencia del gráfico. Generalmente de la forma de clave=valor

### Ejemplo 1.5.10

```
x=symbols('x')
f=plot(1/x,(x,-3,3),ylim=(-3,3))
```

**Resultado:**



### Ejemplo 1.5.11 Grafiquemos una familia paramétrica de funciones.

```
from sympy import *
x,y=symbols('x,y')
Rango=range(21)
L=[tan(pi*k/21.0) for k in Rango]
p=plot(L[0]*x,(x,-2,2),show=False,xlim=(-2,2),\
ylim=(-2,2),aspect_ratio=(1,1))
for pend in L[1:]:
    p1=plot(pend*x,(x,-2,2),show=False,\n
    xlim=(-2,2),ylim=(-2,2),aspect_ratio=(1,1))
    p.append(p1[0])
for r in range(1,10):
    p1=plot_implicit(Eq(x**2 + y**2, 0.2*r),\n
    show=False,aspect_ratio=(1,1),xlim=(-2,2),ylim=(-2,2))
    p.append(p1[0])
p.show()
```

**Resultado:**

**Familias paramétricas de funciones en coordenadas polares.** En ocasiones la ecuación de la familia de curvas está dada en otras coordenadas. Por ejemplo supongamos que tenemos la familia de curvas dadas por una EDO en coordenadas polares

$$\frac{dr}{d\theta} = f(r, \theta),$$

y queremos hallar su familia ortogonal.

**Solución:** Calculemos  $dy/dx$  para las curvas en la familia dada.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{r_\theta \sin \theta + r \cos \theta}{r_\theta \cos \theta - r \sin \theta} = \frac{f \sin \theta + r \cos \theta}{f \cos \theta - r \sin \theta},$$

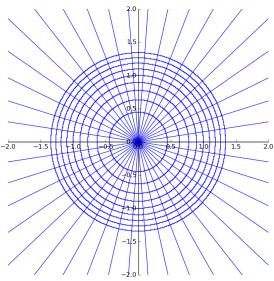


Figura 1.2: Familia curvas ortogonales

donde  $r_\theta = dr/d\theta$ . La f'ia ortogonal tiene que satisfacer

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f \cos \theta - r \sin \theta}{f \sin \theta + r \cos \theta}$$

Luego

$$\frac{r_\theta \sin \theta + r \cos \theta}{r_\theta \cos \theta - r \sin \theta} = -\frac{f \cos \theta - r \sin \theta}{f \sin \theta + r \cos \theta}.$$

Si despejamos  $r_\theta$  llegamos a la ecuación de la f'ia de curvas ortogonales en coordenadas polares

$$\frac{dr}{d\theta} = -\frac{r^2}{f}. \quad (1.10)$$

Aconsejamos ampliar este tema de [?].

## 1.6 Separación de variables

En esta unidad presentaremos algunos métodos de solución para ecuaciones de primer orden. Empezaremos con el, quizás, más popular de todos, el método de *separación de variables*.

**Definición 1.6.14 (Ecuaciones en variables separadas)** Se dice que en una ecuación de primer orden

$$y' = f(x, y)$$

separan las variables, si es posible la factorización  $f(x, y) = g(x)h(y)$ .

Una ecuación en la que se separan variables se puede resolver siguiendo los siguientes pasos. Hallamos los valores  $y_0$  tales que cuando  $h(y_0) = 0$ . Notar que para cualquiera de esos valores la función constante  $y(x) \equiv y_0$  es solución. De esta manera podemos encontrar algunas soluciones por esta consideración.

Para hallar otras, asumamos  $h(y) \neq 0$ .

$$\frac{y'}{h(y)} = g(x),$$

Si  $H$  y  $G$  son primitivas de  $1/h$  y  $g$  respectivamente por la regla de la cadena tenemos

$$\frac{d}{dx} H(y) = \frac{d}{dx} G(x)$$

Luego

$$H(y) = G(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Por último, si podemos encontrar la inversa de  $H$

$$y(x) = H^{-1}(G(x) + C), \quad (1.11)$$

será la solución general junto con aquellas soluciones constantes obtenidas antes.

**Ejemplo 1.6.12** Resolver

$$y' = \frac{y}{x}.$$

Como queremos agrupar todos los factores que contienen la variable  $y$  en uno de los miembros, debemos “pasar dividiendo”  $y$ . Esto es imposible si  $y = 0$ . Reemplazando  $y \equiv 0$  en la ecuación vemos que la resuelve. Así hemos encontrado nuestra primera solución  $y \equiv 0$ . El resto del método, es común llevarlo adelante de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} &\implies \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \implies \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \\ &\implies \ln|y| = \ln|x| + C \implies |y| = k|x|, \text{ con } k > 0 \\ &\implies y = kx, \text{ con } k \neq 0 \end{aligned}$$

Notar que, al fin y al cabo, la solución general es  $y = kx$  con  $k \in \mathbb{R}$ . La solución “díscola”  $y \equiv 0$  también se escribe  $y = kx$ , cuando  $k = 0$ .

```
classify_ode: clasificación de ecuaciones Sintaxis
classify_ode(eq, f(x))
```

Sympy contiene un comando que nos dice que método es posible aplicar a una ecuación dada.

```
x=symbols('x')
y=Function('y')(x)
MiEcua=Eq(y.diff(x),y/x)
tipo=classify_ode(MiEcua,y)
```

**Resultado:**

```
('separable', '1st_exact', '1st_linear',
'almost_linear', 'lie_group', etc)
```

## 1.7 Aplicaciones

Vamos a describir algunos ejemplos. Algunos de ellos llevan a problemas matemáticos muy simples. No obstante es oportuno discutirlos por dos motivos, habituarnos a la utilización de la matemática para resolver problemas de otras ciencias y sentar las bases para discutir problemas más relevantes desde una óptica matemática.

### 1.7.1 Ley de reproducción normal

En muchos ejemplos de biología, química-física, etc, hay magnitudes que crecen(decrecen) siguiendo una ley que denominaremos Ley de reproducción normal. Según esta ley la cantidad de individuos, sustancia, materia, energía, etc, que se agrega o elimina de una población, cuerpo, etc por unidad de tiempo es proporcional a la cantidad de individuos, sustancia, etc que hay presente. Una población de seres vivos puede reproducirse de esta manera bajo algunas circunstancias especiales, por ejemplo si cuenta con fuente ilimitada de alimentos.

Si  $P(t)$  es la cantidad de individuos en el momento  $t$ , la ley de reproducción normal establece en este caso la siguiente ecuación diferencial de primer orden

$$P'(t) = kP(t), \quad \text{con } k > 0.$$

La solución es hallada con suma facilidad, por ejemplo usando separación de variables, siendo ella

$$P(t) = Ce^{kt}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

La constante  $C$  se puede determinar si tenemos un problema a valores iniciales (pvi), por ejemplo  $P(0) = P_0$ , siendo  $P_0 \in \mathbb{R}$  dado. En ese caso  $C = P_0$ .

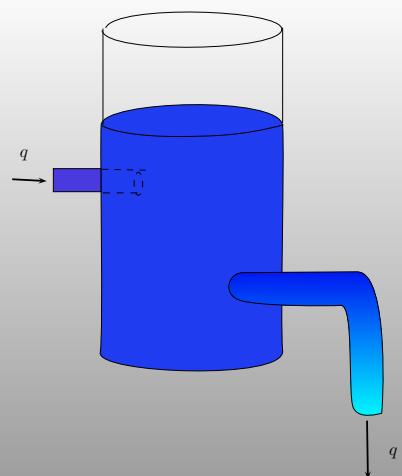
Otro ejemplo de comportamiento similar es la desintegración radiactiva. Algunos átomos de ciertas sustancias, pueden “desarmarse” en átomos de otras sustancias. En el proceso suelen emitir radiaciones. La velocidad de desintegración sigue una ley de reproducción normal pero hay que tener en cuenta que la materia radiactiva, es decir la “población” en este caso, se pierde. Si  $x(t)$  es la masa de materia radiactiva en el momento  $t$ , evolucionará acorde a la ley

$$x'(t) = -kx(t), \quad \text{con } k > 0.$$

## 1.7.2 Soluciones

**Problema**

Un tanque contiene inicialmente  $N \text{ m}^3$  de  $H_2O$  entre los cuales hay disueltos  $C \text{ kg}$  de sal común  $NaCl$ . A través de una boca de entrada y una de salida empieza circular la solución, entrando y saliendo con el mismo caudal  $q \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$ . Se supone que la solución entrante tiene una concentración conocida  $r$ . Encontrar la cantidad de sal en el momento  $t$ .



Sea  $x(t)$  la cantidad de  $NaCl$  en el tanque en el momento  $t$ . entonces

$$\begin{aligned} x'(t) &= \text{cantidad que entra} - \text{cantidad que sale} \\ &= qr - q \frac{x(t)}{N} \end{aligned}$$

## 1.7.3 Dinámica del punto

### 1.7.3.1 Discusión Teórica

Vamos a recordar algunas temáticas de la asignatura física. En particular, el tema del movimiento de un cuerpo de masa  $m$ , al que podemos suponer puntual, dentro del espacio euclídeo tridimensional. A un cuerpo de estas características lo llamaremos punto masa. Denotamos por  $x(t) \in \mathbb{R}^3$  su posición en algún marco de referencia cartesiano

En mecánica newtoniana, un sistema de referencia inercial es un sistema de referencia en el que las leyes del movimiento cumplen las leyes de Newton

ortogonal e inercial. Suponemos que sobre él actúa una fuerza  $F$ . Recordemos que  $x'(t)$  es la velocidad  $v(t)$  y que  $x''(t)$  es la aceleración  $a(t)$ . La segunda ley de Newton implica que

$$mx''(t) = F \quad (1.12)$$

Supongamos que el movimiento del punto masa se realiza entre los momentos  $t_0$  y  $t_1$ . Como has visto en Cálculo III la longitud de la curva recorrida  $s(t)$  se puede calcular por

$$s = \int_{t_0}^{t_1} |x'(t)| dt = \int_{t_0}^{t_1} |v(t)| dt. \quad (1.13)$$

A  $s$  se lo suele denominar elemento de arco. Es común querer utilizar a  $s$  como variable independiente en lugar de  $t$ , puesto que algunas fórmulas se simplifican de esta forma. Por ejemplo

$$F \cdot v(t) dt = F \cdot \frac{v(t)}{|v(t)|} |v(t)| dt = F_t ds, \quad (1.14)$$

donde  $F_t$  denota la proyección de la fuerza  $F$  sobre la dirección tangente a la trayectoria.

Si integramos (1.14) entre  $t_0$  y  $t_1$  y usamos (1.12) obtenemos

$$\begin{aligned} W &:= \int_{s_0}^{s_1} F_t ds = \int_{t_0}^{t_1} F \cdot v(t) dt \\ &= m \int_{t_0}^{t_1} v'(t) \cdot v(t) dt \\ &= \frac{m}{2} \int_{t_0}^{t_1} \frac{d|v|^2}{dt} dt \\ &= \frac{m}{2} |v(t_1)|^2 - \frac{m}{2} |v(t_0)|^2. \end{aligned} \quad (1.15)$$

A la cantidad  $\frac{m}{2}|v|^2$  se la denomina *energía cinética*  $E_c$  y a  $W$  se lo denomina *trabajo*. Las relaciones obtenidas dicen que la variación de la energía cinética es igual al trabajo realizado  $W = \Delta E_c$  por la fuerza  $F$ . El trabajo realizado depende de la proyección tangencial de la fuerza  $F_t$ . Llamaremos a esta relación Principio de Conservación de la Energía Mecánica.

Vamos a referirnos por *rapidez* al módulo de la velocidad. Si uno quiere incrementar o reducir la rapidez final  $|v(t_1)|$  entonces deberá tener fuerzas con una componente tangencial no nula. Dicho de otra forma, si la fuerza es perpendicular al movimiento, no hay cambio de rapidez.

Hay fuerzas que siempre actúan en la dirección del movimiento. El ejemplo más conocido son las fuerzas de fricción, resistencia del aire, resistencia a la rodadura, etc. Estás fuerzas, actúan sólo en la dirección del movimiento y se oponen a él.

Por el contrario hay otras que actúan perpendiculares al movimiento  $F_t = 0$ . Ejemplo de ello son las fuerzas que mantienen a un cuerpo moviéndose a lo largo de una guía. Por ejemplo un niño cayendo por un tobogán. Que el niño no se despegue de la guía (tobogán) se explica por la aparición de una fuerza que se denomina reacción de vínculo que actúa en la dirección perpendicular al movimiento esto es decir a la guía. Esta fuerza debe compensar a toda otra fuerza que trata de apartar al cuerpo de la guía. En el caso del tobogán la gravedad trata de apartar al niño de aquél.

### 1.7.3.2 Cuerpos cayendo por guías

Analicemos más en detalle el movimiento de un cuerpo cayendo a lo largo de una guía estando además influído por la acción de la gravedad. Supondremos el movimiento en las proximidades de la superficie de la Tierra y por ello, supondremos que la magnitud de la fuerza de la gravedad es la constante  $mg$ .

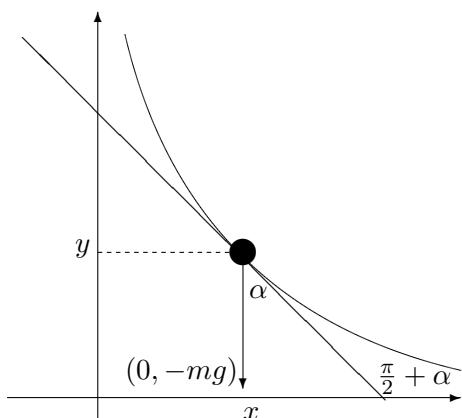


Figura 1.3: Caída por una guía

Supongamos que la guía esta confinada a un plano. Introducimos un sistema de coordenadas ortogonales en dicho plano, con el suelo paralelo al eje  $x$

El elemento longitud de arco  $s$  de una curva que es el gráfico de una función  $y(x)$  para  $x$  en  $[x_0, x_1]$  viene dado por

$$s = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'(x)^2} dx$$

La fuerza de vínculo de la guía tiene componente tangencial nula, la gravedad tiene una componente tangencial no nula. Su magnitud es  $mg \cos \alpha$  (ver dibujo). Vamos a tratar de expresar  $\cos \alpha$  en términos de  $y'(x)$ . Supongamos  $\cos \alpha > 0$  e  $y'(x) < 0$ . Los demás casos quedan como **ejercicio**.

$$\tan^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1$$

e

$$y'(x) = \tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\frac{1}{\tan \alpha}$$

Podemos usar las relaciones anteriores para escribir  $\cos \alpha$  en función de  $y'(x)$

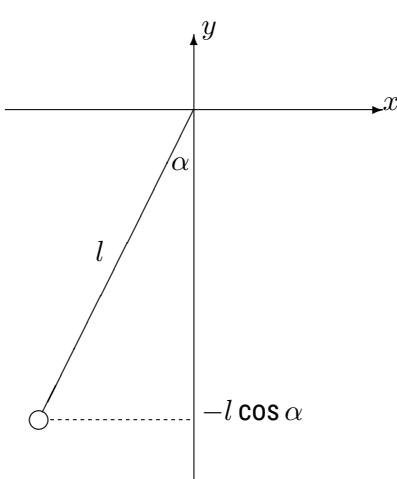
$$\cos \alpha = -\frac{y'(x)}{\sqrt{1 + y'(x)^2}} \quad (1.16)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \frac{m}{2}|v(t_1)|^2 - \frac{m}{2}|v(t_0)|^2 &= \int_{s_0}^{s_1} F_t ds = \int_{x_0}^{x_1} F_t \frac{ds}{dx} dx \\ &= -mg \int_{x_0}^{x_1} \frac{y'(x)}{\sqrt{1 + y'(x)^2}} \sqrt{1 + y'(x)^2} dx \quad (1.17) \\ &= -mg(y_1 - y_0) \end{aligned}$$

Esto nos permite escribir la rapidez en función de la altura respecto al piso.

#### 1.7.4 El péndulo



Se trata de una masa puntual  $m$  suspendida de un punto por medio de una barra de longitud  $l$  a la que suponemos sin masa. Equivale al movimiento sobre una guía circular. Usaremos el ángulo  $\alpha$  marcado en la figura, como variable dependiente.

Supondremos que el origen del sistema de coordenadas está sobre el punto de amarre de la barra. Entonces de (1.17) con  $t_1 = t$  deducimos

$$\begin{aligned} \frac{m|v(t)|^2}{2} - \frac{m|v(t_0)|^2}{2} \\ = -mg(y(t) - y(t_0)) \\ = mg \cos \alpha(t) - mg \cos \alpha(t_0). \end{aligned}$$

Figura 1.4: Péndulo

Ahora la posición de la masa es  $x(t) = l(\cos \alpha, -\sin \alpha)$  luego

$$v(t) = l\alpha'(t)(\cos \alpha, \sin \alpha).$$

Tomando módulo

$$|v(t)|^2 = l^2\alpha'(t)^2.$$

Entonces

$$\frac{ml^2\alpha'(t)^2}{2} = mgl \cos \alpha(t) - mgl \cos \alpha(t_0) + \frac{mv(t_0)^2}{2}.$$

Derivando esta relación

$$ml^2\alpha'(t)\alpha''(t) = -mgl\alpha'(t) \operatorname{sen} \alpha(t).$$

De esto deducimos la ecuación del péndulo

$$\boxed{\alpha''(t) = -\frac{g}{l} \operatorname{sen} \alpha(t)}.$$

## 1.8 Ecuaciones homogéneas

Volvemos al problema de resolver ecuaciones de primer orden. Abordamos un nuevo método.

**Definición 1.8.15 (Funciones homogéneas)** Una función  $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  se dice homogénea de grado  $\alpha$  si

$$f(rx, ry) = r^\alpha f(x, y).$$

### Ejemplo 1.8.13

- $f(x, y) = \frac{y}{x}$  es homogénea de grado 0.
- Más generalmente, cualquier función  $f(x, y)$  que dependa sólo de  $x/y$ , esto es que se escriba de la forma  $f(x, y) = g(y/x)$  es homogénea de grado 0. Así  $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$  es homogénea de grado 0 pues  $\frac{x-y}{x+y} = \frac{1-x/y}{1+x/y}$
- $f(x, y) = \sum_{k=0}^n a_k x^k y^{n-k}$  es homogénea de grado  $n$ .

**Definición 1.8.16 (Ecuaciones homogéneas)** Una ecuación

$$y' = f(x, y) \tag{1.18}$$

tal que  $f$  es homogénea de grado 0 se llamará ecuación homogénea.

Si una ecuación del tipo (1.18) es homogénea entonces se transforma en una ecuación separable mediante el cambio de variable dependiente  $[z = y/x]$ . En efecto, para  $x \neq 0$

$$f(x, y) = x^0 f\left(1, \frac{y}{x}\right) = f(1, z)$$

y

$$y' = z'x + z$$

Como  $y' = f(x, y)$  tenemos

$$z'x + z = f(1, z) \implies \frac{dz}{f(1, z) - z} = \frac{dx}{x}. \quad (1.19)$$

**Ejemplo 1.8.14** Resolver  $y' = \frac{x+y}{x-y}$ .

La ecuación (1.19) queda

$$\begin{aligned} \frac{dx}{x} &= \frac{dz}{\frac{1+z}{1-z}-z} = \frac{(1-z)dz}{1+z^2} \\ &\Downarrow \\ \ln|x| + C &= \arctan(z) - \frac{1}{2}\ln|1+z^2| \end{aligned}$$

## 1.9 Ecuaciones exactas

**Definición 1.9.17 (Diferencial)** Dada una función  $f$  de  $n$  variables independientes  $x_1, \dots, x_n$  definimos su diferencial por

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n. \quad (1.20)$$

Esta definición obviamente carece de rigor pues el miembro de la derecha en (1.20) contiene las expresiones indefinidas  $dx_j$ . La diferencial puede ser definida con toda corrección, es un ejemplo de forma diferencial, en particular es una 1-forma. En la unidad que sigue hablaremos un poco más del concepto de forma diferencial. El uso que faremos de las formas diferenciales es muy elemental, podríamos evitar por completo su uso al costo de usar una notación ligeramente menos compacta y simétrica.

Es costumbre escribir una ecuación diferencial como la 1-forma diferencial

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (1.21)$$

Que corresponde a la ecuación, escrita de manera tradicional,  $y' = -M(x, y)/N(x, y)$ .

Dada  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , satisfaciendo las condiciones del Teorema de la Función Implícita, la expresión

$$f(x, y) = c \quad (1.22)$$

define una familia paramétrica de curvas, con parámetro  $c$ . Derivando la expresión podemos representar esta familia como soluciones de la EDO

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}y' = 0 \iff \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0 \iff df = 0.$$

Esto nos sugiere la idea de que, dada una ecuación diferencial cualquiera, indaguemos si se puede escribir o puede ser transformada de alguna manera en una ecuación de la forma  $df = 0$ . Para que la ecuación (1.21), se pueda expresar como  $df = 0$  se debe cumplir que  $M = \partial f / \partial x$  y  $N = \partial f / \partial y$ . Vale decir el campo vectorial  $(x, y) \mapsto (M(x, y), N(x, y))$  es un campo gradiente o conservativo, con potencial  $f$ .

No todo campo es un campo gradiente, recordemos el siguiente teorema del análisis vectorial.

**Teorema 1.9.1 (Caracterización de campos conservativos)** Sea  $\mathcal{O}$  un conjunto abierto y simplemente conexo de  $\mathbb{R}^n$ . Son equivalentes

- A. El campo  $F : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un gradiente.

Si una fuerza  $F$  está dada por  $(M, N) = \nabla f$  (campo conservativo) reemplazando en (1.15) y llamando  $U = -f$  obtenemos que  $E := m|v(t)|^2/2 + U(x(t))$  es constante. Se dice que  $E$  es una magnitud conservada y se la denomina en este caso energía.

B. Si  $C$  es cualquier camino cerrado entonces

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = 0.$$

C.

$$\frac{\partial F^i}{\partial x_j} = \frac{\partial F^j}{\partial x_i}, \quad \text{para } i, j = 1, \dots, n$$

Pensando al campo  $\mathbf{F}$  como un campo de fuerzas sobre el espacio euclídeo tridimensional, el ítem B expresa que el trabajo realizado por la fuerza a lo largo de un camino cerrado es cero. El ítem C afirma que  $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ , la fuerza es irrotacional.

El ítem C es simple de chequear. Una vez establecido que un campo es conservativo tendremos el problema de hallar el potencial  $f$ . Ilustraremos esto con el campo  $(x, y) \mapsto (M(x, y), N(x, y))$ . Supongamos que  $\mathcal{O}$  es abierto de  $\mathbb{R}^2$  y

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}, \quad \text{para } (x, y) \in \mathcal{O}.$$

En primer lugar debemos tener un campo escalar  $f$  tal que

$$M = \frac{\partial f}{\partial x} \Rightarrow f = \int M dx + C(y).$$

Ahora como  $f_y = N$

$$N = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int M dx + C'(y) \Rightarrow C'(y) = N - \frac{\partial}{\partial y} \int M dx.$$

Para que esta ecuación tenga solución  $N - \frac{\partial}{\partial y} \int M dx$  debe ser sólo función de  $y$ . Pero la condición necesaria y suficiente para ello es

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial x} \left( N - \frac{\partial}{\partial y} \int M dx \right) \\ &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \int M dx \\ &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \int M dx \\ &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}. \end{aligned}$$

Pero estamos bajo ese supuesto, entonces

$$f = \int M dx + \int \left( N - \frac{\partial}{\partial y} \int M dx \right) dy. \quad (1.23)$$

**Ejemplo 1.9.15** Resolver  $e^y dx + (xe^y + 2y)dy = 0$ .

**Solución:** Aquí

$$M = e^y \quad y \quad N = xe^y + 2y.$$

Así

$$\frac{\partial M}{\partial y} = e^y = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

La ecuación es exacta. El potencial  $f$  debe cumplir

$$f = \int e^y dx = xe^y + C(y).$$

Luego

$$C(y) = \int \left( xe^y + 2y - \frac{\partial}{\partial y} xe^y \right) dy = y^2$$

Tener en cuenta que la función potencial  $f$  no es única, queda determinada hasta una constante aditiva de integración que podemos elegir a gusto ya que debemos encontrar sólo un potencial. Entonces podemos tomar

$$f = xe^y + y^2.$$

La solución general de la ecuación estará dada por

$$xe^y + y^2 = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Como no sabemos despejar  $y$  de aquí dejamos indicada de esta manera la solución.

## 1.10 Factores integrantes

Las ecuaciones exactas son raras, no obstante tenemos un recurso para llevar algunas ecuaciones no exactas a una equivalente y exacta.

Supongamos que la ecuación (1.21) no es exacta. La idea es encontrar una función  $\mu(x, y)$  llamada factor integrante que haga exacta la ecuación

$$\mu(Mdx + Ndy) = 0.$$

Para ello se debe cumplir que

$$\frac{\partial \mu M}{\partial y} = \frac{\partial \mu N}{\partial x} \iff \boxed{\mu \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial \mu}{\partial y} M = \frac{\partial N}{\partial x} \mu + N \frac{\partial \mu}{\partial x}}. \quad (1.24)$$

**Proposición 1.10.1( Existencia de factores integrantes)** oda ecuación de primer orden (1.21), con  $N \neq 0$ , que tiene una solución general que se escribe como en (1.22), con  $\partial f / \partial y \neq 0$  tiene un factor integrante.

*Comentario:* La suposición  $N \neq 0 \neq \frac{\partial f}{\partial y}$ , es razonable pues  $N = 0$  implicaría que no podemos despejar  $y'$  de (1.21) y  $\partial f / \partial y$  contradice las hipótesis del Teorema de la Función Implícita, herramienta necesaria para suponer que  $y$  es función de  $x$

*Dem.* Si derivamos (1.22) conseguimos

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0.$$

De esta ecuación y (1.21) vemos que

$$-\frac{M}{N} = y' = -\frac{\partial f / \partial x}{\partial f / \partial y} \implies \frac{\partial f / \partial x}{M} = \frac{\partial f / \partial y}{N} =: \mu(x, y)$$

De la igualdad de arriba se deduce que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \mu M \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \mu N.$$

Es decir  $\mu$  es factor integrante. □

La proposición anterior nos dice que, mientras la ecuación sea resoluble, siempre existe un factor integrante. Pero no ayuda a hallarlo dado que parte de la solución que es lo que queremos hallar. Otra alternativa es resolver la ecuación (1.24) que es una

ecuación en derivadas parciales para  $\mu$ , que normalmente es más difícil que resolver la original. Así, mientras que el método es siempre aplicable, en la práctica es útil en situaciones específicas.

Hay que señalar que sólo necesitamos una solución de (1.24) y no su solución general. En la práctica se suele hacer alguna suposición sobre  $\mu$  que simplifique la expresión. Es decir proponer alguna forma específica para  $\mu$  que haga la ecuación (1.24) más sencilla de resolver. Por supuesto, a priori el factor integrante, si bien existe, no tiene ninguna forma predeterminada. Lo que hacemos es lo que en lenguaje culto se conoce como ansatz, y en lenguaje coloquial, que aquí es más significativo, estamos haciendo un lance o tratando de adivinar  $\mu$ , sin mucho más criterio que buscarlo entre esas funciones con una forma (simple) predeterminada. Por ejemplo, es común suponer que  $\mu$  es sólo función de una de las variables. Si por ejemplo asumimos que  $\mu = \mu(x)$  la ecuación (1.24) se escribe

$$\mu \frac{\partial M}{\partial y} = \mu \frac{\partial N}{\partial x} + N\mu'(x) \implies \boxed{\frac{\mu'}{\mu} = \frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N}}$$

Este ansatz no siempre funcionará, para que lo haga, la función en el segundo miembro  $(\partial M/\partial y - \partial N/\partial x)/N$  debe depender sólo de  $x$ . Si eso ocurre

$$\mu(x) = e^{\int \frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N} dx}. \quad (1.25)$$

es un factor integrante. Recordar que sólo necesitamos hallar uno, por ese motivo omitivos constantes de integración.

De manera similar, si la función

$$\frac{\partial N/\partial x - \partial M/\partial y}{M}$$

depende sólo de  $y$  tenemos que

$$\mu(y) = e^{\int \frac{\partial N/\partial x - \partial M/\partial y}{M} dy}$$

es un factor integrante que, en este caso, sólo depende de  $y$ .

**Ejemplo 1.10.16**  $ydx + (x^2y - x)dy = 0$ .

Primero chequeemos la posible exactitud.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 \text{ y } \frac{\partial N}{\partial x} = 2xy - 1 \implies \text{no exacta.}$$

Ahora

$$\frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N} = \frac{2 - 2xy}{x(xy - 1)} = -\frac{2}{x}.$$

El factor integrante es

$$\mu(x) = e^{-2 \ln|x|} = \frac{1}{x^2}.$$

## 1.11 Aplicación: antenas y espejos parabólicos

**Ejemplo 1.11.17** *Espejos, antenas parabólicos.* Hallar la forma del espejo curvo tal que el reflejo de todo haz de luz que viaja paralelo al eje  $x$  con dirección negativa respecto a este eje pasa por el  $(0, 0)$ .

**Ejercicio 1.11.1** Dejamos como ejercicio demostrar que un haz de luz que se refleja sobre un espejo lo hace de tal manera que los ángulos que se forman con los rayos de incidencia y refracción y la tangente al espejo en el punto de incidencia

son iguales ( $\beta = \alpha$  en el dibujo). Para resolver esto hay que usar el principio de mínimo tiempo de Fermat.

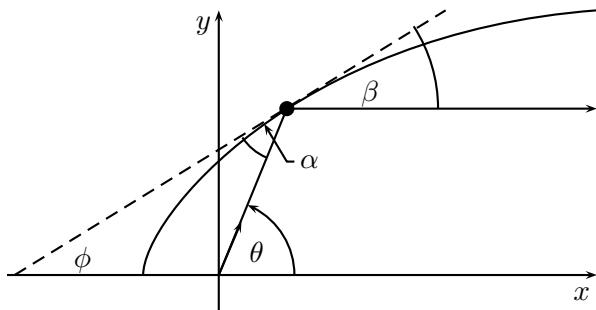


Figura 1.5: Reflejo en un espejo curvo

**Solución.** Sea  $(x, y)$  el punto de incidencia. Apelando a la geometría elemental,  $\phi = \beta$  y  $\theta = \alpha + \phi = 2\beta$ . Como  $\tan \theta = \frac{y}{x}$  y como

$$\begin{aligned}\tan \theta &= \tan 2\beta \\ &= \frac{2 \tan \beta}{1 - \tan^2 \beta},\end{aligned}$$

deducimos que

$$\frac{y}{x} = \frac{2dy/dx}{1 - (dy/dx)^2}.$$



Antena parabólica

Despejando

$$(\pm \sqrt{x^2 + y^2} + x)dx + ydy = 0 \quad (1.26)$$

La expresión sugiere introducir coordenadas polares

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta.$$

Atendiendo a (1.20) tenemos:

$$dx = \cos \theta dr - r \sen \theta d\theta, \quad dy = \sen \theta dr + r \cos \theta d\theta.$$

Sustituyendo en (1.26)

$$\mp r^2 \sin(\theta)d\theta + (\pm r \cos(\theta) + r)dr = 0.$$

Notar que

$$\frac{N_\theta - M_r}{M} = -\frac{1}{r}$$

es independiente de  $\theta$ . Tenemos que  $\mu(r) = r^{-1}$  es factor integrante. Multiplicando por  $\mu$  llegamos a la ecuación exacta

$$\mp r \sen \theta d\theta + (\pm \cos \theta + 1)dr = 0.$$

Siguiendo las técnicas expuestas llegamos a la función potencial

$$\Phi(\theta, r) = \pm r \cos \theta + r.$$

Convirtiendo nuevamente a coordenadas cartesianas, encontramos que la solución general es

$$\pm x + \sqrt{x^2 + y^2} = c.$$

Despejando

$$y^2 = \mp 2xc + c^2 = 2c \left( \mp x + \frac{c}{2} \right)$$

Que es la familia de todas las parábolas con eje de simetría  $x$  y con foco en  $(0, 0)$ . El signo  $\mp$  refleja el hecho que el espejo podría mirar hacia un lado u otro.

## 1.12 Ecuaciones Lineales

**Definición 1.12.18 (Ecuación lineal)** Se llama ecuación diferencial lineal a una ecuación que es lineal respecto a la/s variables dependientes. La siguiente es la ecuación diferencial lineal general de primer orden

$$y' + p(x)y = q(x) \quad (1.27)$$

y la de segundo orden

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x). \quad (1.28)$$

Aquí  $p$ ,  $q$  y  $r$  son funciones de  $x$  usualmente definidas sobre un intervalo abierto de  $\mathbb{R}$ .

La ecuación puede ser no lineal respecto a la variable independiente.

Es costumbre introducir los operadores diferenciales  $L_1[y] = y' + py$  y  $L_2[y] = y'' + py' + qy$ . Para una ecuación lineal, los operadores  $L_1$  y  $L_2$  son lineales. Es decir,  $L_1[y_1 + y_2] = L_1[y_1] + L_1[y_2]$ .

Vamos a resolver la ecuación lineal de primer orden (1.27). Esto es sencillo pues la forma diferencial asociada

$$dy + (p(x)y - q(x))dx = 0 \quad (1.29)$$

tiene un factor integrante que depende sólo de  $x$ . En efecto como  $M = p(x)y - q(x)$  y  $N = 1$ .

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{\partial M / \partial y - \partial N / \partial x}{N} = p(x).$$

Entonces  $\mu(x) = e^{\int pdx}$  es factor integrante. Luego si multiplicamos por  $\mu$  en (1.29), la expresión es exacta.

$$e^{\int pdx} dy + p(x)e^{\int pdx} y dx = q(x)e^{\int pdx} dx.$$

Podemos identificar rápidamente, sin necesidad de hacer cálculos, el correspondiente potencial.

$$d\left(e^{\int pdx} y\right) = d\left(\int q(x)e^{\int pdx} dx\right).$$

Integrando

$$e^{\int pdx} y = \int e^{\int pdx} q(x) dx + C.$$

Entonces

$$y = e^{-\int pdx} \left\{ \int e^{\int pdx} q(x) dx + C \right\} \quad (1.30)$$

**Ejemplo 1.12.18** Resolver  $y' + y/x = 3x$ .

**Solución.** En la práctica, para evitar recordar fórmulas, se suele repetir el procedimiento que lleva a la fórmula (1.30), ahora, dado la cercanía de su derivación, vamos a usarla de manera directa. La solución general es

$$\begin{aligned}
y(x) &= e^{-\int \frac{1}{x} dx} \left\{ \int e^{\int \frac{1}{x} dx} 3x dx + C \right\} \\
&= \frac{1}{|x|} \left\{ \int |x| 3x dx + C \right\} \\
&= x^2 + \frac{C}{|x|} \\
&= x^2 + \frac{C}{x}
\end{aligned}$$

## 1.13 Reducción de orden

Algunas ecuaciones de segundo orden

$$F(x, y, y', y'') = 0 \quad (1.31)$$

se pueden reducir a una de primer orden. Por ejemplo si  $F$  no depende de  $y$ . Es decir la ecuación es

$$F(x, y', y'') = 0 \quad (1.32)$$

Aquí introducimos la nueva variable dependiente  $p = y'$ , que resuelve

$$F(x, p, p') = 0.$$

Que es una ecuación de primer orden. Supuesto que la podemos resolver y encontrar una solución general para  $p$ , tendremos

$$y = \int pdx + C \quad (1.33)$$

Es la solución general de la ecuación de segundo orden.

Si la ecuación general de segundo orden (1.31) no depende de  $x$ , es decir tenemos  $F(y, y', y'') = 0$  entonces nuevamente usaremos  $p = y'$  como nueva variable dependiente pero también  $y$  como nueva variable independiente. Como

$$y'' = p' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} p$$

La ecuación se reduce a la siguiente ecuación de primer orden

$$F \left( y, p, \frac{dp}{dy} p \right) = 0 \quad (1.34)$$

## 1.14 Aplicaciones

### 1.14.1 Velocidad de escape

**Velocidad de escape.** Que velocidad hay que imprimirle a un proyectil que es lanzado verticalmente desde la superficie de la Tierra si nuestra pretensión es que el proyectil se escape al infinito. La velocidad más chica con esta cualidad se llama velocidad de escape.

**Solución.** Para resolver este problema hay que tomar en consideración la Ley de gravitación universal de Newton. En la parte que nos interesa, esta Ley afirma que el módulo de la fuerza de gravedad que se ejercen entre si dos cuerpos de masa  $m_1$  y  $m_2$  separados una distancia  $r$  es proporcional al producto de las masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa. Vale decir

$$|F| = G \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

donde  $G$  es la constante de proporcionalidad. Cuando los cuerpos no son puntos masa, sino esferas de densidad uniforme la distancia de separación hay que medirla entre los centros de masa de los cuerpos.

Hay que aclarar que usando el Principio conservación energía mecánica podemos resolver el problema de una manera más simple. Incluso podemos ver que la suposición de que el tiro es vertical no es necesaria, es decir la velocidad de escape es la misma aunque el tiro sea oblicuo. Discutiremos esa solución durante la clase. Lamentablemente, esta solución no usa ecuaciones diferenciales. Vamos a dar una solución, quizás un poco más complicada, pero que invoca las técnicas discutidas.

Supondremos a la Tierra una esfera de radio  $R$ , masa  $M$  y su centro de masa en el centro de la esfera. Al proyectil lo supondremos un punto masa con masa  $m$  y su posición en el momento  $t$ , denotada  $x = x(t)$ , la mediremos sobre un eje vertical con origen en la superficie de la Tierra. Todo como está indicado en la figura 1.6. Luego la distancia Tierra-proyectil será igual a  $R + x$  donde  $x$  es la posición del proyectil. Utilizando la Segunda ley de Newton,  $F = ma$ , obtenemos

$$mx''(t) = -\frac{GMm}{(R+x)^2}.$$

Es una ecuación de la forma

$$F(x, x', x'') = 0.$$

Con variable dependiente  $x$  e independiente  $t$ . Pero  $F$  no depende de  $t$  y por consiguiente, como vimos, se puede convertir en una ecuación de primer orden tomando como nuevas variables: 1) independiente  $x$  2) dependiente  $v = x'$ . En estas variables

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx}.$$

La ecuación se convierte en

$$v \frac{dv}{dx} = -\frac{GM}{(R+x)^2} \implies v dv + \frac{GM}{(R+x)^2} dx = 0.$$

Que es una ecuación en variables separables y también es exacta. Usaremos la técnica discutida para ecuaciones exactas, los que nos indica que la solución general se expresa de la siguiente forma

$$\frac{v^2}{2} - \frac{GM}{(R+x)} = E = \text{cte.} \quad (1.35)$$

La igualdad anterior es precisamente consecuencia directa del Principio conservación energía mecánica, La hemos deducido como consecuencia de que la ecuación era

Siempre las ecuaciones en variables separables son exactas pues se escriben de la forma

$$M(x)dx + N(y)dy = 0,$$

por consiguiente tienen potencial

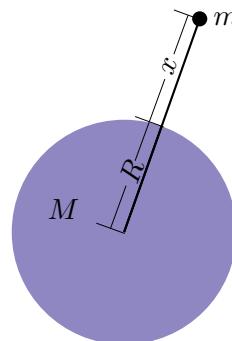


Figura 1.6: Velocidad de Escape

exacta. Sea  $v_0$  la velocidad inicial para  $t = 0$ . Como  $E$  es constante y  $x = 0$  en  $t = 0$  debemos tener

$$E = \frac{v_0^2}{2} - GM/R \quad (1.36)$$

Como  $v^2 \geq 0$  y por (1.35) y (1.36).

$$-\frac{GM}{(R+x)} \leq \frac{v^2}{2} - \frac{GM}{(R+x)} = \frac{v_0^2}{2} - \frac{GM}{R}$$

Queremos encontrar  $v_0$  tal que  $x \rightarrow \infty$ . Si tomamos límite cuando  $x \rightarrow \infty$  en la expresión anterior obtenemos

$$0 \leq \frac{v_0^2}{2} - GM/R$$

De aquí deducimos que el valor mínimo de velocidad de escape es  $\sqrt{2 * GM/R}$ .

### 1.14.2 Curvas de persecución

**Curvas de persecución.** Supongamos que un conejo se mueve sobre una línea recta con rapidez uniforme  $a$  y de un punto por fuera de la recta parte un perro que lo persigue con rapidez uniforme  $b$ . Encontrar la trayectoria del perro.

Figura 1.7: Persecución en un pentágono estrellado. Art of Pursuit, Ivars Peterson

Supongamos que el perro parte del punto  $(c, 0)$ , el conejo de  $(0, 0)$  y se mueve en línea recta en la dirección positiva del eje  $y$ . Vamos a suponer que el perro sigue la trayectoria donde la tangente a su movimiento, en un momento dado, intersecta a la posición del conejo correspondiente a ese momento.

Pasado un tiempo  $t$ , el conejo estará en el punto  $(0, at)$  y el perro en un punto de su trayectoria que forma un arco de longitud  $s = bt$  hasta el punto  $(c, 0)$ . Ese punto, donde está el perro, lo denotaremos  $(x, y)$ . Como hemos supuesto que la tangente a la trayectoria del perro en  $(x, y)$  pasa por la posición del conejo  $(0, at)$  se debe cumplir que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - at}{x} \implies xy' - y = -at. \quad (1.37)$$

En esta ecuación hay tres variables,  $t$ ,  $x$  e  $y$ . No hemos definido cuales son independiente y cuales dependientes. Generalmente el tiempo  $t$  se considera variable independiente, pero en la expresión de arriba aparece la derivada de  $y$  respecto a  $x$ . Claramente deberíamos eliminar una de las variables. Conviene eliminar  $t$ , dado que al no aparecer en la derivación no tendremos que hacer un cambio de variables allí, donde siempre es un poco más engorroso. Por otra parte, la intuición del problema, nos dice que a cada  $t$  corresponde uno, y sólo un,  $x^2$ , lo que indica que  $t$  es función de  $x$  y por consiguiente

<sup>2</sup>De lo contrario el perro no se hubiera movido en la dirección horizontal entre dos momentos, lo que es absurdo

es de esperar poder escribir la ecuación (1.37) en términos de  $x$  e  $y$ . Tener en cuenta que no es razonable en matemática, como en la política, pensar que lograremos tener un beneficio (menos variables) sin pagar algún precio, pues, como dice el dicho, "Cuando la limosna es grande hasta el santo desconfía". En este caso, el costo que pagaremos es incrementar el orden de la ecuación. Como hemos dado algunas técnicas de resolver ecuaciones de orden dos, quizás estemos en condiciones de pagar este precio.

Para eliminar  $t$  de la ecuación (1.37), derivamos (1.37) respecto a  $x$ , para obtener

$$xy'' = -a \frac{dt}{dx}.$$

Como  $ds/dt = b$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{dt}{ds} \frac{ds}{dx} = -\frac{\sqrt{1 + y'(x)^2}}{b}.$$

Hemos usado la relación  $s = \int_x^c \sqrt{1 + y'^2} dx$ . Entonces

$$xy'' = \frac{a\sqrt{1 + y'(x)^2}}{b}. \quad (1.38)$$

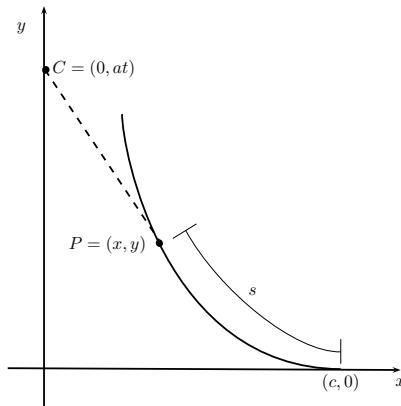


Figura 1.8: Curva persecución

Que es una ecuación que no contiene  $y$ . De modo que usando  $p = y'$  como variable dependiente reducimos el orden de la ecuación. Nos queda

$$\frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = \frac{a}{b} \frac{dx}{x}.$$

Que es una ecuación en variable separables. Tomando la integral definida entre  $c$  y  $x$ , y considerando que si  $x = c$  entonces  $p = 0$ , tenemos

$$\ln(p + \sqrt{1 + p^2}) = \ln\left(\frac{x}{c}\right)^{\frac{a}{b}}.$$

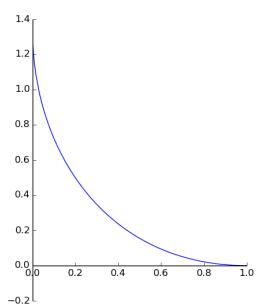
Si despejamos  $p$  conseguimos

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{x}{c}\right)^{a/b} - \left(\frac{c}{x}\right)^{a/b} \right]. \quad (1.39)$$

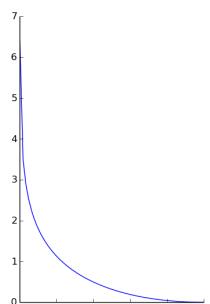
Para hallar  $y$  hay que recordar que  $y' = p$  e  $y(1) = 0$ .

Usemos SymPy para completar este cálculo y hacer los gráficos. El siguiente código evalúa la integral, halla la constante de integración para que  $y(1) = 0$  y grafica.

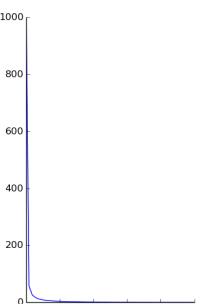
Los resultados son:



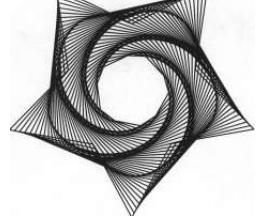
$a < b$



$a = b$



$a > b$



Lo anterior constituye un ejemplo de lo que se conoce como curva de persecución. Este es un tema muy interesante que tiene varias generalizaciones, por ejemplo el problema de los ratones donde se colocan en cada vértice de un polígono ratones cada uno de los cuales persigue al vecino en sentido antihorario (u horario, da lo mismo). Se consiguen patrones geométricos muy bellos

Persecución en un pentágono estrellado. Extraído de



Robert Hooke

## 1.15 Oscilador armónico

Un oscilador armónico es el más simple de los sistemas físicos vibratorios. Podemos definirlo como un sistema elástico que obedece a la Ley de elasticidad de Hooke, en honor a su descubridor Robert Hooke (1635-1703).

Suele citarse al resorte como un ejemplo familiar de oscilador armónico. Esto debido a que, cuando las oscilaciones de un resorte son pequeñas, se satisface aproximadamente la Ley de elasticidad de Hooke. Esta ley afirma que la fuerza que ejerce un resorte sobre una masa  $m$  conectada a él por uno de sus extremos es proporcional en magnitud al desplazamiento del resorte desde la posición de equilibrio. Además la fuerza de elasticidad actúa en sentido opuesto al desplazamiento.

Figura 1.9: Resorte

Supongamos que tenemos un resorte, en uno de sus extremos fijado en una pared y unido a una masa  $m$  por el otro extremo. Supongamos que no actúa otra fuerza sobre la masa mas que la del resorte. Ver la animación de la figura 1.9. Pongamos un eje de coordenadas en la dirección del movimiento, con origen en la posición de equilibrio del resorte. Esta posición es el punto donde el resorte no ejerce fuerza. Supongamos que la dirección positiva es la dirección donde el resorte se expande. Denotemos por  $x(t)$  la posición de la masa en el momento  $t$ . Entonces según la Segunda Ley de Newton y la Ley de Elasticidad de Hooke, tenemos que

$$mx''(t) = -kx(t). \quad (1.40)$$

La constante de proporcionalidad  $k$  se llama constante elástica. La ecuación (1.40) se denomina la ecuación del oscilador armónico o ecuación del resorte.

La ecuación del oscilador armónico se escribe  $0 = f(t, x, x', x'')$ , donde  $f(t, x, y, z) = kx + mz$  es independiente de  $t$ . Podemos intentar usar  $x$  como variable independiente y  $z = x'$  como dependiente. Como vimos  $x''(t) = dz/dt = dz/dxz$ . Así la ecuación queda

$$\begin{aligned} m \frac{dz}{dx} z = -kx &\implies mzdz = -kxdx \implies m \frac{z^2}{2} = -k \frac{x^2}{2} + C_1 \\ &\implies z = \pm \sqrt{-\frac{k}{m}x^2 + C_1} \\ &\implies x'(t) = \pm \sqrt{-\frac{k}{m}x^2 + C_1}. \end{aligned}$$

Debe ser  $C_1 \geq 0$  de lo contrario el dominio de la función sería vacío. Nos queda una nueva ecuación para  $x'$ . Esta ecuación es en variables separables

$$\frac{dx}{\sqrt{-\frac{k}{m}x^2 + C_1}} = dt.$$

Integrando

$$\begin{aligned}
 t + C_2 &= \int \frac{dx}{\sqrt{-\frac{k}{m}x^2 + C_1}} \\
 &= \sqrt{\frac{1}{C_1}} \int \frac{dx}{\sqrt{-\frac{k}{C_1 m}x^2 + 1}} \\
 &= \sqrt{\frac{m}{k}} \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \quad \left( \text{haciendo } u = \sqrt{\frac{k}{C_1 m}}x \right) \\
 &= \sqrt{\frac{m}{k}} \arcsen u.
 \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{C_1 m}{k} u = \frac{C_1 m}{k} \sen \left( \sqrt{\frac{k}{m}}(t + C_2) \right) \\
 &= C_3 \sen \sqrt{\frac{k}{m}}t + C_4 \cos \sqrt{\frac{k}{m}}t.
 \end{aligned}$$

Que es la solución general<sup>3</sup> de la ecuación del oscilador armónico. Como vemos el movimiento es oscilatorio con frecuencia

$$f = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

En particular, no importan las condiciones iniciales, la frecuencia es siempre la misma.

## 1.16 EDP, método características

Saber resolver ecuaciones ordinarias de primer orden nos permite resolver algunas ecuaciones en derivadas parciales de primer orden. Vamos a exponer este punto a través del método de características.

Para tener un problema bien planteado con ecuaciones en derivadas parciales no es suficiente conocer el valor de la función en un punto (como en una EDO de primer orden). Una condición típica extra, para lograr este propósito, es consignar el valor de la función a lo largo de una curva, que por simplicidad asumiremos que es una recta .

**Ejemplo 1.16.19** Resolver

$$\left. \begin{array}{l} a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = c(x, y, u) \\ u(x, 0) = f(x) \end{array} \right\} \quad (1.41)$$

Aquí  $x, y$  son variables independientes y  $u$  dependiente. La primera línea es la ecuación diferencial, que incluye derivadas parciales de la incognita y la segunda línea podemos denominarla condición inicial (pensando que la variable  $y$  representa tiempo).

El método de características consiste en encontrar  $u$  a lo largo de las soluciones de la EDO

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b(x, y)}{a(x, y)} \quad (1.42)$$

Una solución de esta ecuación es normalmente una curva en el plano  $x, y$ . La idea es que las soluciones de (1.42) forman un *flia* uniparamétrica de curvas que llena una parte  $\Omega$

<sup>3</sup>Esta afirmación se justificará en el capítulo 3

del plano  $x, y$ . Así terminamos conociendo el valor de  $u$  sobre este conjunto  $\Omega$ . Para que (1.42) tenga sentido debemos tener  $a \neq 0$ . De todas formas si  $a = 0$  podemos invertir los roles de  $x$  e  $y$ .

Supongamos  $y(x)$  solución de (1.42), entonces pongamos por abuso de notación  $u(x) = u(x, y(x))$ . Se tiene que

$$\frac{du}{dx} = u_x + u_y y' = u_x + u_y \frac{b}{a} = \frac{c(x, y(x), u(x))}{a(x, y)} \quad (1.43)$$

Que es otra ecuación ordinaria. Podemos escribir (1.42) y (1.43) en una ecuación más simétrica

$$\frac{du}{c} = \frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} \quad (1.44)$$

Estas ecuaciones se llaman *ecuaciones características*. Las soluciones de estas ecuaciones son un familia de curvas que suele llenar un conjunto abierto de  $\mathbb{R}^3$ . La gráfica de la solución se obtiene eligiendo entre estas curvas las que pasan por los puntos de la gráfica de  $u$  especificados en la condición inicial, es decir  $(x, 0, f(x))$ . Esto, en los casos favorables, forma una superficie que es la gráfica de la solución. La proyección de estas curvas en el plano  $x, y$  se denominan *características*. Son la familia de soluciones de  $y' = b/a$ .

**Ejemplo 1.16.20** Resolver

$$\left. \begin{array}{l} u_x + u_y = yu \\ u(x, 0) = f(x) \end{array} \right\} \quad (1.45)$$

En este caso

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} \Rightarrow y' = 1 \Rightarrow y(x) = x + \mu, \quad \mu = \text{cte.}$$

Entonces

$$\frac{du}{dx} = \frac{c}{a} \Rightarrow u' = yu = (x + \mu)u \Rightarrow \ln |u| = \frac{x^2}{2} + \mu x + C(\mu).$$

Notar que la nueva constante de integración  $C(\mu)$  debe depender de la primera  $\mu$ . Entonces

$$u = \pm e^{\frac{x^2}{2}} e^{(y-x)x} e^{C(y-x)}.$$

Ahora

$$u(x, 0) = f(x) \Rightarrow f(x) = \pm e^{\frac{x^2}{2}} e^{-x^2} e^{C(-x)} \Rightarrow C(\mu) = \frac{\mu^2}{2} + \ln |f(-\mu)|.$$

Entonces

$$u(x, y) = \pm e^{\frac{x^2}{2}} e^{(y-x)x} e^{\frac{(y-x)^2}{2} + \ln |f(x-y)|} = e^{\frac{y^2}{2}} f(x-y).$$

## Apéndices

### 1.A La braquistócrona

Dados dos puntos  $A$  y  $B$  en las proximidades de la superficie terrestre, uno mas abajo respecto al suelo que el otro, queremos diseñar el tobogán óptimo entre los dos, esto es el tobogán que nos lleve de  $A$  hasta  $B$  en el menor tiempo. La curva solución a este problema se llama curva braquistócrona (braquistos - el más corto, cronos - tiempo).



Johann Bernoulli (1667-1748)



Pierre de Fermat (1601-1665)

Este problema fue resuelto por primera vez por Johann Bernoulli y es unos de los problemas precursores de la rama de las matemáticas que se denomina cálculo de variaciones. Vamos a dar la solución del problema encontrada por Johann Bernoulli que es muy elegante y está basada en un resultado de óptica llamado el Principio de Mínimo Tiempo de Fermat.

**Principio de Mínimo Tiempo de Fermat** La luz sigue para ir de un punto a otro el recorrido que minimiza el tiempo.

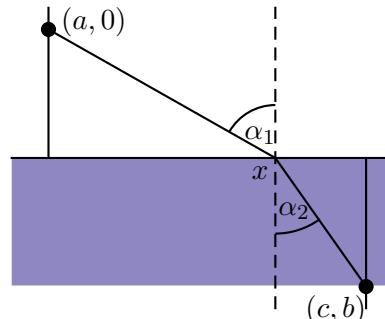
La primera impresión es que ese recorrido debería ser la línea recta. Si embargo esto no es así debido a que la velocidad de la luz cambia de acuerdo al medio que atraviesa. La velocidad de la luz en el vacío es 299.792,458km/h y en el diamante 124.034,943 km/h. La velocidad de la luz cambia no sólo con la sustancia sino con sus cualidades, como la densidad.

Si la luz se mueve dentro de un medio homogéneo, el camino que sigue es la línea recta. Esto ya no es más así cuando la luz cambia de medio de propagación. Por ejemplo cuando pasa del aire al vidrio.

Supongamos que la luz une los puntos  $A$  y  $B$  del plano y en el camino atraviesa de un medio a otro, siendo la velocidad de la luz en cada uno de ellos  $v_1$  y  $v_2$ . Supongamos que  $A = (a, 0)$  y  $B = (c, b)$  y el eje  $x$  es la frontera entre los medios.

Como sabemos que mientras se mueva en un medio homogéneo la luz sigue en línea recta, el tiempo que emplea la luz para ir  $A$  a  $B$  es

$$t = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(c-x)^2 + b^2}}{v_2}$$



Para determinar la trayectoria es suficiente encontrar

$x$ , el punto donde la luz choca con la interfaz entre los medios. El principio de Fermat afirma que el tiempo es mínimo de modo que hallaremos un punto crítico de  $t$  respecto a  $x$ .

$$\frac{dt}{dx} = -\frac{c-x}{\sqrt{(c-x)^2 + b^2} v_2} + \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2} v_1} = \frac{\sin \alpha_1}{v_1} - \frac{\sin \alpha_2}{v_2}$$

Deducimos que en un punto crítico

$$\frac{\sin \alpha_1}{v_1} = \frac{\sin \alpha_2}{v_2} \quad (1.46)$$

que se denomina Ley de Snell. El punto crítico es mínimo pues  $\frac{dt}{dx}|_{x=0} = -\frac{c}{bv_2} < 0$  y  $\frac{dt}{dx}|_{x=c} = \frac{c}{\sqrt{c^2+a^2}v_1} > 0$ .

A la razón entre la velocidad de la luz dentro de un determinado medio y la velocidad de la luz en el vacío se lo denomina índice de refracción y se lo denota con la letra  $n$ . La Ley de Snell se la suele escribir

$$n_1 \operatorname{sen} \alpha_1 = n_2 \operatorname{sen} \alpha_2.$$

Que pasa si la luz atraviesa un medio que va cambiando de manera continua de índice de refracción. Por ejemplo, el índice de refracción en la atmósfera va cambiando de manera continua con la altitud respecto a la superficie terrestre, ya que la densidad del aire va cambiando con la altitud. La Ley de Snell en este caso es

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{v} = \text{cte}$$

Aquí el ángulo  $\alpha$  y la velocidad  $v$  cambian respecto a alguna variable/s real/es, por ejemplo la altitud.

¿Qué tienen en común el recorrido de la luz y la braquistócrona? Bernoulli se dió cuenta que la situación en los dos casos es la misma, ya que en los dos casos se trata de minimizar el tiempo del recorrido. De modo que la braquistócrona también tiene que satisfacer la Ley de Snell. Ahora supongamos un sistema de coordenadas con origen en el punto  $A$ , inicial del recorrido. Además supongamos que el móvil parte del reposo. Con estas suposiciones  $x(t_0) = 0$  y  $v(t_0) = 0$ . Por la conservación de la energía

$$\frac{m}{2} |v(t)|^2 = -mgy(t) = mg|y(t)|.$$

Así por la ley de Snell

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{|v(t)|} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\sqrt{2g|y|}} = c = \text{cte.}$$

En (1.16) habíamos expresado el  $\cos \alpha$  (en realidad del ángulo opuesto por el vértice, pero es igual) mediante la derivada. Luego

$$\operatorname{sen} \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{1}{\sqrt{1 + y'(x)^2}}.$$

Entonces tenemos

$$\sqrt{2g|y|}\sqrt{1 + y'(x)^2} = c = \text{cte}$$

Despejando llegamos a la ecuación diferencial

$$\sqrt{\frac{y}{c-y}}y' = 1.$$

Es una ecuación con variables separables. La constante  $c$  no tiene el mismo valor que en la ecuación anterior.

La solución se obtiene resolviendo la integral

$$x = \int dx = \int \sqrt{\frac{y}{c-y}} dy.$$

lo que no es tan sencillo. Hacemos el cambio de variables

$$\sqrt{\frac{y}{c-y}} = \tan \phi \implies y = c \operatorname{sen}^2 \phi \implies dy = 2c \operatorname{sen} \phi \cos \phi d\phi.$$

Luego

$$x = 2c \int \operatorname{sen}^2 \phi d\phi = \frac{c}{2} (2\phi - \operatorname{sen} 2\phi) + C_1.$$

Como tiene que pasar por  $x = 0$  e  $y = 0$  debe ser  $C_1 = 0$ . Tenemos que

$$\begin{cases} y &= c \operatorname{sen}^2 \phi \\ x &= \frac{c}{2}(2\phi - \operatorname{sen} 2\phi) \end{cases} = \frac{c}{2}(1 - \cos 2\phi)$$

Conviene llamar  $2\phi = \theta$  y  $a = c/2$

$$\begin{cases} y &= a(1 - \cos \theta) \\ x &= a(\theta - \operatorname{sen} \theta) \end{cases}$$

Que son la ecuaciones paramétricas de una curva conocida con el nombre de cicloide. Podemos usar SymPy para graficar esta curva

```
theta=symbols('theta')
from sympy.plotting import *
plot_parametric(theta-sin(theta),1-cos(theta),(theta,0,10*pi))
```

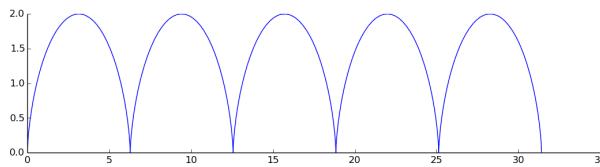


Figura 1.A.2: Cicloide

Figura 1.A.3: Cicloide

Si intentamos resolver las ecuaciones con SymPy el resultado no es muy alentador.

```
x,c=symbols('x,c')
y=Function('y')(x)
MiEcua=Eq(y.diff(x),sqrt((c-y)/y))
f=dsolve(MiEcua,y,hint='separable')
```

**Resultado:**

$$\begin{cases} -i\sqrt{c}\sqrt{-1 + \frac{1}{c}y(x)}\sqrt{y(x)} - ic \operatorname{acosh}\left(\frac{1}{\sqrt{c}}\sqrt{y(x)}\right) & \text{for } |\frac{1}{c}y(x)| > 1 \\ \frac{\sqrt{c}\sqrt{y(x)}}{\sqrt{1-\frac{1}{c}y(x)}} + c \operatorname{asin}\left(\frac{1}{\sqrt{c}}\sqrt{y(x)}\right) + \frac{y^{\frac{3}{2}}(x)}{\sqrt{c}\sqrt{1-\frac{1}{c}y(x)}} & \text{otherwise} \end{cases} = C_1 + x$$

## 1.B La tautócrona

Vamos a ver otra propiedad notable de la cicloide. Supongamos que dejamos caer el cuerpo del reposo desde un punto intermedio, digamos en  $(x_0, y_0)$ . Sea  $\theta_0$  el valor del parámetro  $\theta$  correspondiente a este punto. ¿Cuánto tardará en llegar el cuerpo al punto mínimo de la curva que ocurre cuando  $\theta = \pi$ ?

Tenemos

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\theta} &= a(1 - \cos \theta) \\ \frac{dy}{d\theta} &= a \operatorname{sen} \theta \end{cases}$$

Como el cuerpo ahora no parte de  $(0, 0)$  tendremos

$$|v| = \sqrt{2g(y_0 - y)}.$$

Por (1.13)  $ds/dt = |v|$ . Si llamamos  $T$  al tiempo que demanda en llegar a  $\theta = \pi$ , y llamamos  $s_0$  y  $s_1$  a los arcos correspondientes al punto inicial y final. Tenemos

$$T = \int_0^T dt = \int_{s_0}^{s_1} \frac{dt}{ds} ds = \int_{s_0}^{s_1} \frac{1}{\sqrt{2g(y_0 - y)}} ds.$$

Cambiando la variable de integración a  $\theta$ . Como

$$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} = \sqrt{2a\sqrt{1 - \cos\theta}}.$$

Tenemos

$$T = \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{\theta_0}^{\pi} \frac{\sqrt{1 - \cos\theta}}{\cos\theta_0 - \cos\theta} d\theta = \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{\theta_0}^{\pi} \frac{\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{2}}{\cos^2\frac{\theta_0}{2} - \cos^2\frac{\theta}{2}} d\theta.$$

Ahora hacemos la sustitución

$$u = \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta_0}{2}} \implies du = -\frac{\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{2}}{2\cos\frac{\theta_0}{2}} d\theta.$$

Vemos que

$$T = 2\sqrt{\frac{a}{g}} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} du.$$

Que es una expresión independiente de  $\theta_0$ . En consecuencia el tiempo  $T$  que demanda el cuerpo para llegar  $\theta = \pi$  es siempre el mismo no importa desde donde se deje caer.

Figura 1.B.1: Tautócrona

## 1.C Solución al problema del espejo con Sympy

En este apéndice resolvemos el problema usando formas diferenciales El submódulo `diffgeom` de Sympy implementa formas diferenciales. Del sub-submodulo `sympy.diffgeom.rn` importamos el objeto `R2`. Para comprender el funcionamiento del código remitimos a la documentación de Sympy.

```
from sympy import *
from sympy.diffgeom.rn import R2
eq=(-sqrt(R2.x**2+R2.y**2)+R2.x)*R2.dx+R2.y*R2.dy
M=eq.rcall(R2.e_theta)
```

```
N=eq.rcall(R2.e_r)
x,y,theta=symbols('x,y,theta')
r=symbols('r',positive=True)
subst={R2.x:r*cos(theta),R2.y:r*sin(theta),R2.theta:theta,R2.r:r}
M=M.subs(subst).simplify()
N=N.subs(subst).simplify()
mu=(N.diff(theta)-M.diff(r))/M
FactInt=exp(Integral(mu,r).doit())
phi=(M/r).integrate(theta)
g=Function('g')(r)
phi=phi+g
dsolve(phi.diff(r)-N/r,g)
phi=(M/r).integrate(theta)+r
phi
```

$$-r \cos(\theta) + r$$

## 2 Teoría de Lie y ecuaciones diferenciales

### 2.1 Introducción histórica

«Marius Sophus Lie fue un matemático noruego (17 de diciembre de 1842-18 de febrero de 1899) que creó en gran parte la teoría de la simetría continua, y la aplicó al estudio de la geometría y las ecuaciones diferenciales. La herramienta principal de Lie, y uno de sus logros más grandes fue el descubrimiento de que los grupos continuos de transformación (ahora llamados grupos de Lie), podían ser entendidos mejor "linealizándolos", y estudiando los correspondientes campos vectoriales generadores (los, así llamados, generadores infinitesimales). Los generadores obedecen una versión linealizada de la ley del grupo llamada el corchete o comutador, y tienen la estructura de lo que hoy, en honor suyo, llamamos un álgebra de Lie.»



[Wikipedia](#)

«La historia del análisis de simetrías comenzó a mediados del siglo XIX cuando S. Lie Y F. Klein se reunieron en Berlín. Ambos matemáticos contribuyeron mucho a la teoría de las simetrías. S. Lie presentó su famosa obra para examinar las simetrías en relación con ecuaciones algebraicas y diferenciales. En su programa de Erlangen, Klein desarrolló las contrapartes discreta y algebraica de la aplicación de las simetrías a las funciones. S. Lie creó un gran campo de las ecuaciones diferenciales, que fue muy útil para clasificar las ecuaciones diferenciales de una forma nueva. La teoría desarrollada por Lie es muy laboriosa, si se hace a mano. Esta es una de las razones por las que la aplicación de esta teoría desapareció en la práctica de resolver problemas. Muy pocas personas usaron los procedimientos de Lie para examinar ecuaciones diferenciales. Uno de ellos fue Birkhoff, quien en la década de 1950 aplicó la teoría a problemas hidrodinámicos. En los últimos años, se prestó más atención a la teoría de Lie como uno de los métodos raros para obtener soluciones, especialmente para ecuaciones diferenciales no lineales. Hoy el procedimiento de Lie es accesible para su aplicación, si es usado el poder computacional del álgebra computacional. Los cálculos algebraicos muy extendidos hoy en día se llevan a cabo por computadoras. En los últimos 20 años, ha habido un enorme aumento de la potencia de las computadoras y del desarrollo de lenguajes simbólicos, permitiendo abordar problemas en una manera más sencilla.»

Symmetry Analysis of Differential Equations with Mathematica®  
[?]

### 2.2 Cambios de Variables

Vamos a seguir estudiando ecuaciones no lineales de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (2.1)$$

o, utilizando la escritura en *forma diferencial*

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0. \quad (2.2)$$

En el apéndice ?? discutimos muy sumariamente el concepto de forma diferencial.

**Problema (Cambio de variables)** Dada la ecuación (2.1) o (2.2) en las variables  $x, y$ . Queremos encontrar nuevas variables

$$\begin{cases} \hat{x} = \hat{x}(x, y) \\ \hat{y} = \hat{y}(x, y) \end{cases}. \quad (2.3)$$

tales que la ecuación se transforme en una que podamos resolver.

Para no correr riesgos de perder información en la ecuación transformada, es conveniente que  $x$  e  $y$  también se expresan en función de  $\hat{x}$  e  $\hat{y}$ , vale decir que la transformación pueda invertirse:

$$\begin{cases} x = x(\hat{x}, \hat{y}) \\ y = y(\hat{x}, \hat{y}) \end{cases}. \quad (2.4)$$

## 2.2.1 Cómputos de cambios de variables

Vamos a estudiar en primer lugar como computar cambios de variables. Empezaremos por casos más sencillos hasta ir a la situación más general.

### 2.2.1.1 Cambio de la variable dependiente manteniendo la independiente

Supongamos que el conjunto de variables se relacionan por las identidades  $x = \hat{x}$  e  $y = y(x, \hat{y})$ . Notar que en este caso usamos la relación inversa. Entonces, derivando  $y$  respecto a  $x$  y usando la regla de la cadena (que sería más apropiado llamarla regla de cambio de variables para la derivada)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \hat{y}} \frac{d\hat{y}}{dx}.$$

La ecuación se convierte

$$\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \hat{y}} \frac{d\hat{y}}{dx} = f(x, y(x, \hat{y})).$$

Que es una expresión sólo en  $\hat{y}$  y  $x$ . Parece más complicada, pero en un ejemplo concreto puede ser más simple.

**Ejemplo 2.2.1** Hacer el cambio de variable propuesto en la ecuación indicada

$$y = \frac{e^{\hat{y}}}{x} \quad \text{en} \quad y' = [\ln(xy)]^2 xy - \frac{y}{x}.$$

1) Expresemos  $dy/dx$  sólo con  $x, \hat{y}$  y  $d\hat{y}/dx$ .

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{e^{\hat{y}}}{x^2} + \frac{e^{\hat{y}}}{x} \frac{d\hat{y}}{dx}.$$

2) Remplacemos  $y'$  e  $y$  en la ecuación

$$-\frac{e^{\hat{y}}}{x^2} + \frac{e^{\hat{y}}}{x} \frac{d\hat{y}}{dx} = \left[ \ln \left( x \frac{e^{\hat{y}}}{x} \right) \right]^2 x \frac{e^{\hat{y}}}{x} - \frac{e^{\hat{y}}}{x}.$$

Es costumbre recurrir a un abuso de notación que suele producir confusión al estudiante. Nos referimos a distinguir las derivadas  $\partial y / \partial x$  y  $dy / dx$ . Tratándose  $y$  en el caso que nos ocupa, de una función de  $x$  e  $\hat{y}$ , la derivada  $\partial y / \partial x$  representa la derivada parcial de  $y$  respecto a su primera variable. Como  $\hat{y}$  es a su vez función de  $x$ , por  $dy / dx$  denotamos la derivada de  $y$  atendiendo a que la segunda variable también depende de  $x$ .

### 3) Simplifiquemos

$$\frac{d\hat{y}}{dx} = \hat{y}^2 x. \quad (2.5)$$

**Importante:** Observar que en un cambio de variable, ya se cambie la variable dependiente, independiente o ambas, las derivadas (tratándose de la velocidad de cambio de unas variables respecto a otras) también hay que cambiarlas.

Podemos resolver los cambios de variables con SymPy, lo cual es muy útil por dos motivos. El primero porque nos permite hacer cambios de variables en expresiones muy grandes, resolviendo operaciones que a mano son sumamente tediosas. El segundo, y no menos importante para nosotros, es que es muy rico explorar un procedimiento encarcándolo en un contexto muy distinto. En este caso, el procedimiento es realizar un cambio de variables y estamos explorando el mismo a través de un breve código que lo implementa en un lenguaje de programación.

```
x=symbols('x') #unico simbolo primitivo
y_n=Function('y_n')(x) #variables nuevas, funciones de x
y=exp(y_n)/x #relacion entre y, y_n
eq=Eq(y.diff(x)-(ln(x*y))**2*x*y+y/x,0) #la ecuacion
eq1=simplify(eq) # simplifica expresiones
```

Obtenemos la ecuación

$$\frac{\left(-x \log(e^{y_n(x)})^2 + \frac{d}{dx} y_n(x)\right) e^{y_n(x)}}{x} = 0,$$

que SymPy no simplifica a nuestro gusto

#### 2.2.1.2 Cambio de la variable independiente manteniendo la dependiente

Supongamos  $\hat{x} = \hat{x}(x)$ . Usamos la relación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\hat{x}} \frac{d\hat{x}}{dx}.$$

Suponiendo que la relación  $\hat{x} = \hat{x}(x)$  se invierte en  $x = x(\hat{x})$ , todo lo que resta es sustituir  $x$  por su igual en términos de  $\hat{x}$

$$\frac{dy}{d\hat{x}} = f(x(\hat{x}), y) \left[ \frac{d\hat{x}}{dx} \Big|_{x=x(\hat{x})} \right]^{-1}.$$

Que es una expresión sólo en  $\hat{x}$  e  $y$ . Describir el procedimiento en general puede hacer parecer que es más difícil de lo que en realidad es en un caso concreto.

**Ejemplo 2.2.2** Hacer el cambio de variable en la ecuación indicados

$$x = \cos \hat{x} \quad \text{en} \quad -\frac{dy}{dx} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} y = 0.$$

1)  $\hat{x} = \arcsen x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\hat{x}} \frac{d\hat{x}}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{dy}{d\hat{x}}.$$

2) Remplazemos  $x$  e  $y'$  en la ecuación

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{dy}{d\hat{x}} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} y = 0$$

3) Reemplazando  $x$  por  $\cos(\hat{x})$  y simplificando

$$\frac{dy}{d\hat{x}} + \cos(\hat{x}) y = 0.$$

Para hacer esto con SymPy (de ahora en más omitiremos la sentencia de importación del módulo, esta operación se hace sólo una vez por sesión).

```
x,x_n=symbols('x,x_n')
x_n=acos(x)
y=Function('y')(x_n)
Ecuacion=-y.diff()**1/(sqrt(1-x**2))*y
xn=symbols('xn')
Eq=Ecuacion.subs(x,cos(xn))
```

Obtenemos la ecuación

$$\frac{y(\cos(\cos(xn)))}{\sqrt{-\cos^2(xn) + 1}} + \frac{\frac{d}{d\xi_1}y(\xi_1)\Big|_{\xi_1=\cos(\cos(xn))}}{\sqrt{-\cos^2(xn) + 1}}$$

Nuevamente SymPy no simplifica a nuestro gusto, esto ocurre aún con aquellas expresiones que parece muy evidente como se simplifican. El caso es que la operación de simplificación es por un lado subjetiva, depende de un supuesto tácito de a que expresión se quiere arribar y por otro algunas expresiones, por ejemplo  $\ln \exp(z)$ , se simplifican en determinados campos numéricos y en otros no. En el caso del ejemplo  $\ln \exp(z)$ , la expresión es simplificable si  $z \in \mathbb{R}$ , pero no lo es si por ejemplo  $z \in \mathbb{C}$ . De modo que no puede esperarse que SymPy efectúe esta simplificación a menos que conozca que se trabaja en el campo numérico indicado. Hay que distinguir que supuestos tácitos está haciendo uno y hay que indicárselos a SymPy. El lector debe tener en cuenta que en ningún momento uno le dijo a SymPy que tipo de ente estaba manipulando en expresiones del tipo  $x_n = \cos(x)$ . Puede parecer natural que se trata de números reales, no obstante esta información nunca fue comunicada al interprete de SymPy. ¿Porqué el habría de entender que  $x$  es real? Si al fin y al cabo  $x_n = \cos(x)$  tiene sentido si  $x$  es complejo y aún si es una matriz. Muchas veces las operaciones que se simplifican en un campo no lo pueden hacer en otro. El comando `symbols` tiene la opción de informar a SymPy que tipo de ente representa  $x$  de la siguiente forma `x=symbols('x', real=True)`. De esta forma se consiguen mejores resultados en las simplificaciones.

### 2.2.1.3 Cambio de variable general $\hat{x} = \hat{x}(x, y), \hat{y} = \hat{y}(x, y)$

A. Calculamos  $d\hat{y}/d\hat{x}$  en las variables  $x, y$

$$\frac{d\hat{y}}{d\hat{x}} = \frac{\frac{d\hat{y}}{dx}}{\frac{d\hat{x}}{dx}} = \frac{\frac{\partial \hat{y}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{y}}{\partial y} y'}{\frac{\partial \hat{x}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{x}}{\partial y} y'} = \frac{\frac{\partial \hat{y}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{y}}{\partial y} f(x, y)}{\frac{\partial \hat{x}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{x}}{\partial y} f(x, y)}. \quad (2.6)$$

B. En la expresión resultante sustituímos  $x, y$  por las transformaciones inversas  $x = x(\hat{x}, \hat{y})$  y  $y = y(\hat{x}, \hat{y})$

**Ejemplo 2.2.3** Transformar a polares

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^3 + x^2y - x - y}{x^3 + xy^2 - x + y}.$$

Dado que el cálculo es extenso lo haremos con SymPy, el procedimiento seguido ilustra como hacerlo a mano. Es ilustrativo hacer esto último para apreciar la utilidad de usar un sistema de álgebra computacional (SAC) como SymPy.

```
x=symbols('x')
y=Function('y')(x)
r=sqrt(x**2+y**2)
theta=atan(y/x)
Expr2=r.diff(x)/theta.diff(x)
```

Obtenemos la siguiente expresión

$$\frac{\left(1 + \frac{y^2(x)}{x^2}\right) \left(x + y(x) \frac{d}{dx} y(x)\right)}{\sqrt{x^2 + y^2(x)} \left(\frac{\frac{d}{dx} y(x)}{x} - \frac{y(x)}{x^2}\right)}.$$

Ahora sustituímos  $y'(x)$  usando la ecuación diferencial, redefinimos  $r, \theta$  fundamentalmente para limpiar el valor que tenían asignado en el código previo, que era una expresión de  $x, y$ , y finalmente sustituímos  $x$  e  $y$  por su expresión en polares.

```
Expr3=Expr2.subs(y.diff(x),(y**3+x**2*y-x-y)/(x**3+x*y**2-x+y))
r,theta=symbols('r,theta',positive=True)
Expr4=Expr3.subs([(y,r*sin(theta)),(x,r*cos(theta))])
Expr5=simplify(Expr4)
```

Encontramos que en polares la ecuación es mucho más simple

$$\frac{dr}{d\theta} = -r^3 + r.$$

Quizás usar la notación como forma diferencial sea más efectivo. Como  $r$  y  $\theta$  son funciones de  $x$  e  $y$ , ellas son 0-formas. Usando las reglas de la diferencial, hay que reemplazar

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta; & dx &= \cos \theta dr - \sin \theta r d\theta \\ y &= r \sin \theta; & dy &= \sin \theta dr + \cos \theta r d\theta \end{aligned}$$

en la 1-forma:

$$(y^3 + x^2y - x - y)dx - (x^3 + xy^2 - x + y)dy.$$

Sympy posee un módulo para operar con formas diferenciales, en un apéndice describimos como utilizarlo para resolver este ejemplo.

## 2.3 Grupos

### 2.3.1 Definición y ejemplos

**Definición 2.3.1 (Grupo)** Un grupo es un par  $(G, \cdot)$  donde  $G$  es un conjunto y  $\cdot : G \times G \rightarrow G$  una operación binaria interna que satisface

- A.  $(g_1 \cdot g_2) \cdot g_3 = g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3)$ , para todos  $g_1, g_2, g_3 \in G$ ,
- B. Existe  $e \in G$  tal que  $e \cdot g = g \cdot e = g$ , para todo  $g \in G$ .
- C. Para todo  $g \in G$  existe  $h \in G$  tal que  $g \cdot h = h \cdot g = e$ . Esta función  $h$  se denota  $g^{-1}$ .

Es usual omitir el punto para indicar la operación, i.e. escribimos  $g \cdot h = gh$ .  
**Ejemplo 2.3.4** Sea  $\Pi$  un plano euclídeo y  $G$  el conjunto de todas las transformaciones rígidas de  $\Pi$  en si mismo. Entonces  $G$  es un grupo con la operación de composición. Se llama el *grupo de transformaciones rígidas*.

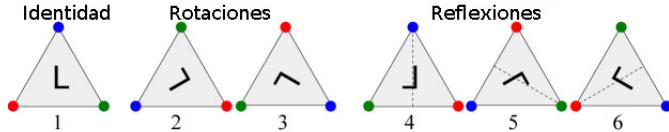
**Ejemplo 2.3.5** Sea  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  un conjunto de  $n$  elementos y  $S_n$  definido por

$$S_n = \{\sigma | \sigma : X \rightarrow X \text{ y } \sigma \text{ es biyectiva}\}$$

Entonces  $S_n$  es un grupo con la operación de composición. Se denomina *grupo simétrico*.

**Ejemplo 2.3.6** Sea  $\Delta$  un polígono regular de  $n$  lados en un plano euclídeo  $\Pi$  y  $D_{2n}$  el conjunto de todas las transformaciones rígidas de  $\Pi$  en si mismo que llevan  $\Delta$  en si mismo.  $D_{2n}$  se llama el *grupo diedral* de orden  $2n$ . Para un triángulo equilátero:

Las raíces históricas de la teoría de grupos son la teoría de las ecuaciones algebraicas, la teoría de números y la geometría. Euler, Gauss, Lagrange, Abel y Galois fueron los creadores que ponen los cimientos de esta rama del álgebra abstracta. Otros importantes matemáticos que contribuyen son Cayley, Emil Artin, Emmy Noether, Peter Ludwig Mejdell Sylow, A.G. Kurosch, Iwasawa entre muchos otros. (Wikipedia)



Recordemos el siguiente concepto.

**Definición 2.3.2 (Acción de un grupo sobre un conjunto)** iremos que un grupo  $G$  actúa sobre el conjunto  $X$  si existe una operación binaria externa  $\star : G \times X \rightarrow G$  que satisface:

- A. Si  $e$  es el neutro de  $G$ ,  $e \star x = x$ , para todo  $x \in X$ .
- B. Para todos  $g, h \in G$  y  $x \in X$ ,  $g \star (h \star x) = (gh) \star x$ .

Como en el caso de grupos suele nos escribirse el símbolo de la operación binaria, i.e. se escribe  $g \star x = gx$ .

## 2.4 Grupos continuos de simetrías

### 2.4.1 Grupos y cambios de variables

Los cambios de variables de un conjunto de dos variables, digamos  $x$  e  $y$ , son funciones  $\Gamma$ , invertibles, de clase  $C^1$ , donde  $\Gamma : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ , con  $\Omega_1, \Omega_2$  abiertos de  $\mathbb{R}^2$ . Acostumbraremos escribir  $(\hat{x}, \hat{y}) = \Gamma(x, y)$  y diremos que  $(\hat{x}, \hat{y})$  son las variables nuevas y  $(x, y)$  las viejas.

**Ejemplo 2.4.7 Coordenadas polares.** Es más facil describir la transformación que lleva coordenadas polares en cartesianas. En este caso  $(x, y) = \Gamma(r, \theta)$  y

$$\begin{aligned}\Gamma(r, \theta) &= (r \cos(\theta), r \sen(\theta)), \\ \Omega_1 &= (0, \infty) \times (-\pi, \pi), \\ \Omega_2 &= \mathbb{R}^2 - \{(x, y) | y = 0, x \leq 0\}\end{aligned}$$

### 2.4.2 Grupos de Lie uniparamétricos

**Definición 2.4.3 (Grupos de Lie uniparamétricos)** upongamos dada una acción del grupo  $(\mathbb{R}, +)$  en  $\mathbb{R}^2$ . En este caso vamos a adoptar una notación funcional, i.e. en lugar de escribir  $\epsilon \star (x, y)$ , con  $\epsilon \in \mathbb{R}$  y  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  pondremos  $\Gamma_\epsilon(x, y)$ . Denotaremos por  $\{\Gamma_\epsilon\}$  a la acción introducida. Notar que  $\{\Gamma_\epsilon\}$  satisface que

- A.  $\forall \epsilon_1, \epsilon_2 \in \mathbb{R} : \Gamma_{\epsilon_1} \circ \Gamma_{\epsilon_2} = \Gamma_{\epsilon_1 + \epsilon_2}$ .
- B.  $\Gamma_0 = I$ .
- C.  $\Gamma_\epsilon$  es invertible y  $(\Gamma_\epsilon)^{-1} = \Gamma_{-\epsilon}$

La acción  $\Gamma_\epsilon$  se denomina un *grupo de Lie uniparamétrico* si además:

- 4.  $\forall \epsilon \in \mathbb{R} : \Gamma_\epsilon$  es un difeomorfismo sobre  $\mathbb{R}^2$ .
- 5. Si  $\Gamma_\epsilon(x, y) = (\hat{x}(x, y, \epsilon), \hat{y}(x, y, \epsilon))$  entonces las funciones  $\hat{x}(x, y, \epsilon)$  y  $\hat{y}(x, y, \epsilon)$  se desarrollan en serie de potencias respecto a  $\epsilon$ . Es decir para todo  $\epsilon_0 \in \mathbb{R}$

existen coeficientes  $a_j$  y  $b_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, r$  tales que

$$\begin{aligned}\hat{x}(x, y, \epsilon) &= a_0(x, y) + a_1(x, y)(\epsilon - \epsilon_0) + \dots \\ \hat{y}(x, y, \epsilon) &= b_0(x, y) + b_1(x, y)(\epsilon - \epsilon_0) + \dots\end{aligned}\quad (2.7)$$

para  $|\epsilon - \epsilon_0| < r$ .

**Ejemplo 2.4.8** Demostrar que las siguientes aplicaciones inducen grupos de Lie uniparamétricos

A.  $\Gamma_\epsilon(x, y) = (x + \epsilon, y)$  y  $\Gamma_\epsilon(x, y) = (x, y + \epsilon)$ .

B.  $\Gamma_\epsilon(x, y) = (e^\epsilon x, y)$

C.  $\Gamma_\epsilon(x, y) = \left( \frac{x}{1-\epsilon x}, \frac{y}{1-\epsilon x} \right)$

D.  $\Gamma_\epsilon(x, y) = \begin{pmatrix} \cos(\epsilon) & -\sin(\epsilon) \\ \sin(\epsilon) & \cos(\epsilon) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Vamos a desarrollar sólo el ejemplo de  $\Gamma_\epsilon(x, y) = (x + \epsilon, y)$ . La propiedad 1 en la definición la chequearemos con SymPy.

```
x,y,epsilon,epsilon1,epsilon2=symbols('x,y,epsilon,epsilon1,epsilon2')
T=Matrix([x+epsilon,y])
x_copete=T.subs(epsilon,epsilon1)[0]
y_copete=T.subs(epsilon,epsilon1)[1]
PropGrupo=T.subs([(x,x_copete),(y,y_copete),(epsilon,epsilon2)])\
-T.subs(epsilon,epsilon1+epsilon2)
```

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

La propiedad 2 en la definición es evidente y la propiedad 3 es siempre consecuencia de 1. y 2. Se incluyó en la lista sólo para resaltar su cumplimiento, pero no es necesario chequearla. La propiedad 4. es clara la 5. también lo es, notar que el desarrollo en serie (4.46) es válido en este caso con  $a_0(x, y) = x$ ,  $a_1(x, y) = 1$ ,  $a_j(x, y) = 0$ ,  $j \geq 2$ ,  $b_0(x, y) = y$  y  $b_j(x, y) = 0$ ,  $j \geq 1$ . La justificaciones correspondientes al resto de los ejemplos queda como ejercicio.

Las reflexiones en el plano, por ejemplo  $\Gamma(x, y) = (-x, y)$ , no pueden pertenecer a un grupo de Lie uniparamétrico. Más generalmente:

**Teorema 2.4.1** Una transformación  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que el determinante de la matriz Jacobiana  $\det(DT)$  sea negativo en algún punto no puede pertenecer a un grupo de Lie uniparamétrico. Dicho de otro modo, debe ocurrir que  $\det(D\Gamma_\epsilon) > 0$  para todo  $\epsilon$  y todo grupo  $\{\Gamma_\epsilon\}$ .

*Demostración.* Si  $\Gamma_\epsilon$  es un grupo y supongamos por ejemplo que existe  $\epsilon_0 \in \mathbb{R}$  y  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  tal que:

$$J(x_0, y_0, \epsilon_0) := \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} & \frac{\partial \hat{x}}{\partial y} \\ \frac{\partial \hat{y}}{\partial x} & \frac{\partial \hat{y}}{\partial y} \end{pmatrix} < 0,$$

donde las derivadas son tomadas en  $\epsilon = \epsilon_0$ ,  $x = x_0$  y  $y = y_0$ . Por otro lado tenemos que  $J(x_0, y_0, 0) = 1$ . Como  $J(x_0, y_0, \epsilon)$  es continua respecto a  $\epsilon$  debería existir  $\epsilon'$  con  $J(x_0, y_0, \epsilon') = 0$ . Esto implica que la matriz jacobiana  $D\Gamma_\epsilon$  es singular y esto contradice que  $\Gamma : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  es difeomorfismo ( $D\Gamma D\Gamma^{-1} = I$ ).  $\square$

En el caso de la reflexión  $\Gamma(x, y) = (x, -y)$ , se genera un grupo discreto, ya que  $\Gamma^2 = \Gamma \circ \Gamma = I$ . Luego  $\Gamma$  genera el grupo finito  $G = \{I, \Gamma\}$  que es isomorfo a  $\mathbb{Z}_2$ . En este caso diremos que  $\{I, \Gamma\}$  es un *grupo discreto*.

### 2.4.3 Grupos de simetrías de EDO

**Definición 2.4.4 (Grupo de simetrías de una ecuación)** Consideremos una ecuación

$$y' = f(x, y). \quad (2.8)$$

Una transformación o cambio de variables  $\Gamma$  se denomina una *simetría* de la ecuación si el cambio de variables dado por  $(\hat{x}, \hat{y}) = \Gamma(x, y)$  deja invariante la ecuación. Diremos que un grupo de Lie uniparamétrico  $\{\Gamma_\epsilon\}$  es un grupo uniparamétrico de simetrías de (2.8) si  $\Gamma_\epsilon$  es simetría de la ecuación para cada  $\epsilon$ .

De acuerdo con (2.6) para que  $(\hat{x}, \hat{y}) = \Gamma(x, y)$  sea una simetría de (2.8) se debe cumplir que

$$\frac{\frac{\partial \hat{y}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{y}}{\partial y} f(x, y)}{\frac{\partial \hat{x}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{x}}{\partial y} f(x, y)} = f(\hat{x}, \hat{y}) \quad (2.9)$$

Esta ecuación se llama *condición de simetría*. Es una ecuación en derivadas parciales, en principio más compleja que la ecuación original. Tiene varios grados de libertad, por lo que suele haber muchas simetrías. Es común que encontremos soluciones a través de un ansatz.

**Ejemplo 2.4.9** Consideremos la ecuación

$$y' = 0. \quad (2.10)$$

La condición de simetría se reduce a

$$\frac{\frac{\partial \hat{y}}{\partial x}}{\frac{\partial \hat{x}}{\partial x}} = 0$$

Debemos tener que  $\frac{\partial \hat{y}}{\partial x} = 0$ . Vale decir  $\hat{y}$  es independiente de  $x$ . De allí la forma general de una simetría es

$$\hat{x} = \hat{x}(x, y) \quad \hat{y} = \hat{y}(y).$$

Hay muchas simetrías. Las traslaciones en cualquier dirección  $(x, y) \mapsto (x + \alpha, y + \beta)$  ( $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ). Cambios de escala en ambos ejes  $(x, y) \mapsto (e^\epsilon x, y)$ ,  $(x, y) \mapsto (x, e^\epsilon y)$ . Reflexiones respecto ambos ejes  $(x, y) \mapsto (-x, y)$ ,  $(x, y) \mapsto (x, -y)$ . Observar que el gráfico de las soluciones posee las mismas simetrías, pues en general *las simetrías de una ecuación llevan soluciones en soluciones*.

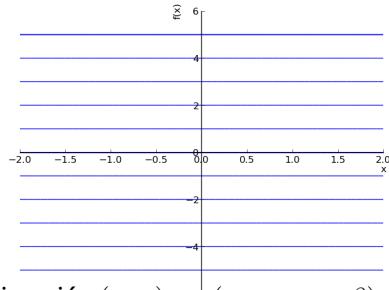
De todas las simetrías encontradas  $\Gamma_\epsilon(x, y) = (e^\epsilon x, y)$ ,  $\Gamma_\epsilon(x, y) = (x + \epsilon, y)$  y  $\Gamma_\epsilon(x, y) = (x, y + \epsilon)$  se llaman *triviales* pues llevan una curva solución en sí misma. Cualquier cambio de la forma  $\hat{x} = \hat{x}(x, y)$ ,  $\hat{y} = y$  es trivial. Estamos interesados en *hallar grupos de Lie uniparamétricos de simetrías no triviales*.

**Ejemplo 2.4.10** Hallar simetrías de

$$\frac{dy}{dx} = f(x).$$

De acuerdo con (2.6) se debe cumplir que

$$\frac{\frac{\partial \hat{y}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{y}}{\partial y} f(x)}{\frac{\partial \hat{x}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{x}}{\partial y} f(x)} = f(\hat{x})$$



La forma de la ecuación sugiere el ansatz

$$\boxed{\hat{x} = x}, \quad \frac{\partial \hat{y}}{\partial x} = \frac{\partial \hat{x}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \hat{y}}{\partial y} = \frac{\partial \hat{x}}{\partial x}.$$

Luego

$$\frac{\partial \hat{y}}{\partial y} = 1 \Rightarrow \boxed{\hat{y} = y + \epsilon}$$

con  $\epsilon$  constante arbitraria. Hallamos que

$$\Gamma_\epsilon(x, y) = (x, y + \epsilon)$$

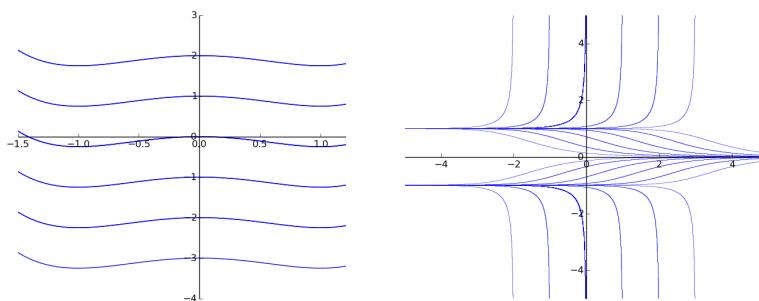
es un grupo de Lie uniparamétrico de simetrías. De manera similar

$$\Gamma_\epsilon(x, y) = (x + \epsilon, y)$$

es un grupo uniparamétrico de simetrías para

$$\frac{dy}{dx} = f(y).$$

Geométricamente en el primer caso todas las soluciones se obtienen trasladando una cualquiera verticalmente y en el segundo caso horizontalmente.



Soluciones de  $y' = x^3 - x$       Soluciones de  $y' = y^3 - y$

**Ejemplo 2.4.11** Demostrar que las rotaciones alrededor del origen es un grupo de Lie uniparamétrico de simetrías de

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^3 + x^2y - x - y}{x^3 + xy^2 - x + y}. \quad (2.11)$$

Sea  $\Gamma_\epsilon$  la transformación que rota un ángulo  $\epsilon$  alrededor del origen. Es un ejercicio demostrar que  $\{\Gamma_\epsilon | \epsilon \in \mathbb{R}\}$  es un grupo uniparamétrico de simetrías. Se tiene la representación matricial

$$\begin{aligned} \Gamma_\epsilon(x, y) &= \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\epsilon) & -\sin(\epsilon) \\ \sin(\epsilon) & \cos(\epsilon) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \Gamma_\epsilon^{-1}(\hat{x}, \hat{y}) &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\epsilon) & \sin(\epsilon) \\ -\sin(\epsilon) & \cos(\epsilon) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Para el cálculo recurrimos a SymPy (usamos  $x_n$  en lugar de  $\hat{x}$ )

```
x, theta=symbols('x,theta')
y=Function('y')(x)
x_n=cos(theta)*x-sin(theta)*y
y_n=sin(theta)*x+cos(theta)*y
Expr2=y_n.diff(x)/x_n.diff(x)
Expr3=Expr2.subs(y.diff(),\
(y**3+x**2*y-x-y)/(x**3+x*y**2-x+y))
x_n,y_n=symbols('x_n,y_n')
Expr4=Expr3.subs([(y, -sin(theta)*x_n+cos(theta)*y_n),\
(x, cos(theta)*x_n+sin(theta)*y_n)])
Expr5=simplify(Expr4)
```

La ecuación resultante es *la misma*

$$\frac{x_n^2 y_n - x_n + y_n^3 - y_n}{x_n^3 + x_n y_n^2 - x_n + y_n}$$

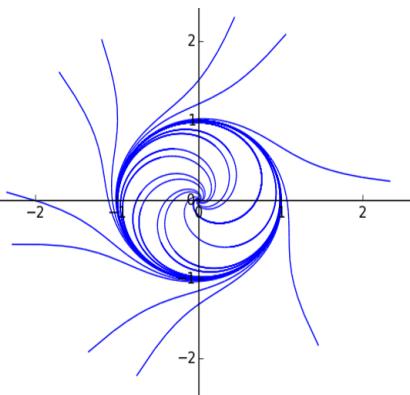
A la misma conclusión arribábamos si recordabamos que en coordenadas polares la ecuación se escribe

$$\frac{dr}{d\theta} = r - r^3,$$

y que esta ecuación tiene las simetrías  $\Gamma_\epsilon$ :  $(r, \theta) \mapsto (r, \theta + \epsilon)$ . Si rotamos un ángulo fijo el gráfico de una solución obtenemos el gráfico de otra solución.

**Ejemplo 2.4.12** Supongamos que  $y' = f(x, y)$  tiene el grupo de Lie uniparamétrico de simetrías

$$(\hat{x}, \hat{y}) = \Gamma_\epsilon(x, y) = (x, y + \epsilon) \quad (2.12)$$



Usando la condición de simetrías (2.9) tenemos

$$f(x, y) = f(\hat{x}, \hat{y}) = f(x, y + \epsilon).$$

La igualdad vale para todo  $\epsilon$ , luego poniendo  $\epsilon = -y$  vemos que  $f(x, y) = f(x, 0) := f(x)$ . Vale decir que  $f$  es independiente de  $y$  y la ecuación

$$y' = f(x),$$

se resuelve simplemente integrando.

## 2.5 Órbitas, tangentes y curvas invariantes

**Definición 2.5.5 (Órbitas)** dado un grupo uniparamétrico de simetrías  $G = \{\Gamma_\epsilon | \epsilon \in \mathbb{R}\}$ , y  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  llamamos órbita  $(x_0, y_0)$  bajo la acción de  $G$  (simplemente órbita si es claro quien es  $G$ ) a la curva

$$\{\Gamma_\epsilon(x_0, y_0) | \epsilon \in \mathbb{R}\}$$

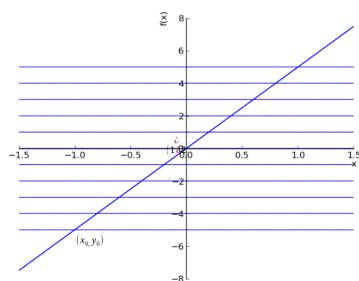
Si  $G$  es un grupo de simetrías no trivial, entonces es de esperar que la órbita de  $(x_0, y_0)$  cruce transversalmente las curvas solución. La órbita se usará como una nueva coordenada. La órbita a través de  $(x, y)$  es el conjunto de puntos de coordenadas

$$(\hat{x}(x, y, \epsilon), \hat{y}(x, y, \epsilon)) = \Gamma_\epsilon(x, y), \quad (2.13)$$

donde

$$(\hat{x}(x, y, 0), \hat{y}(x, y, 0)) = (x, y).$$

Las ecuaciones (2.13) son ecuaciones parámetricas (parámetro  $\epsilon$ ) de una curva en el plano.



**Definición 2.5.6 (Puntos invariantes)** Un punto  $(x, y)$  se llama invariante si su órbita se reduce a  $\{(x, y)\}$ , vale decir

$$(x, y) = \Gamma_\epsilon(x, y), \quad \forall \epsilon > 0$$

**Ejemplo 2.5.13** La órbita de  $(x, y)$  bajo la acción del grupo de Lie uniparamétrico

$$\Gamma_\epsilon(x, y) = \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\epsilon) & -\sin(\epsilon) \\ \sin(\epsilon) & \cos(\epsilon) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Son circunferencias con centro en el origen. El punto  $(0, 0)$  es invariante.

**Definición 2.5.7 (Campo vectorial de tangentes)** A un grupo de Lie uniparamétrico  $(\hat{x}(x, y, \epsilon), \hat{y}(x, y, \epsilon)) = \Gamma_\epsilon(x, y)$  definimos el campo vectorial

$$(\xi(x, y), \eta(x, y)) = \left( \frac{d\hat{x}}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0}, \frac{d\hat{y}}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} \right).$$

$\xi$  y  $\eta$  se llaman *símbolos infinitesimales*.

Como  $\hat{x}, \hat{y}$  eran analíticas respecto a  $\epsilon$  tenemos las fórmulas.

$$\begin{aligned} \hat{x} &= x + \epsilon\xi(x, y) + O(\epsilon^2) \\ \hat{y} &= y + \epsilon\eta(x, y) + O(\epsilon^2) \end{aligned} \tag{2.14}$$

En un punto invariante  $\boxed{\xi(x, y) = \eta(x, y) = 0}$ .

**Ejemplo 2.5.14** Campo vectorial de infinitesimales para las rotaciones.

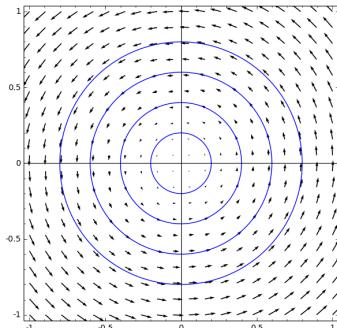


Figura 2.1: Campo vectorial de infinitesimales  $(\xi, \eta)$

**Definición 2.5.8** Así generalmente, un conjunto  $C \subset \mathbb{R}^2$  se dice *invariante* por un grupo uniparamétrico de simetrías de Lie  $\Gamma_\epsilon$  si y sólo si  $\forall \epsilon : \Gamma_\epsilon(C) \subset C$ , i.e. las órbitas de puntos en  $C$  permanecen en  $C$ .

### Observaciones

- A. El conjunto unitario  $\{(x, y)\}$  es invariante si y sólo si el punto  $(x, y)$  es invariante.
- B. Se  $C$  es una curva plana suave, supongamos que  $C$  viene dada por la ecuación implícita  $g(x, y) = 0$ , con  $\nabla g \neq 0$ . Supongamos que  $(\xi, \eta) \neq (0, 0)$  sobre  $C$ . Entonces  $C$  es invariante si y sólo si la tangente a  $C$  en cada punto  $(x, y)$  es paralela a  $(\xi(x, y), \eta(x, y))$ . La demostración de este hecho se propone como ejercicio.

- C. Si en particular  $C$  es una curva que viene descripta como el gráfico de una función  $y = h(x)$ , entonces  $C$  es invariante si y sólo si

$$Q(x, y, y') = \eta(x, y) - h' \xi(x, y) \equiv 0. \quad (2.15)$$

En efecto, en este caso  $g(x, y) = y - h(x)$  (notar que  $\nabla g = (-h'(x), 1) \neq 0$ ). Como  $\nabla g$  es perpendicular a  $C$  tenemos la ecuación (2.15). La ecuación (2.15) se llama *ecuación característica*.

- D. Si además de lo anterior,  $\Gamma_\epsilon$  es un grupo de Lie de simetrías de  $y' = f(x, y)$  e  $y(x)$  es una curva invariante y solución de la ecuación entonces:

$$\bar{Q}(x, y) = \eta(x, y) - f(x, y) \xi(x, y) \equiv 0. \quad (2.16)$$

A esta ecuación la llamamos *ecuación característica reducida*.

El recíproco también es cierto.

**Teorema 2.5.2** Supongamos que  $y(x)$  es solución de la ecuación característica y que

$$\left. \frac{\partial \bar{Q}}{\partial y} \right|_{y=y(x)} \neq 0.$$

Entonces  $y(x)$  es una solución invariante de la ecuación.

*Demostración.* Será completada más adelante. □

### Ejemplo 2.5.15 La EDO

$$y' = y \quad (2.17)$$

tiene simetrías de escala

$$(\hat{x}, \hat{y}) = \Gamma_\epsilon(x, y) = (x, e^\epsilon y).$$

Luego

$$(\xi, \eta) = \left( \left. \frac{d\hat{x}}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0}, \left. \frac{d\hat{y}}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \right) = (0, y)$$

Cualquier punto en el conjunto  $\{(x, 0) | x \in \mathbb{R}\}$  es invariante. La ecuación característica reducida es.

$$\bar{Q}(x, y) = 0 \Rightarrow y = 0$$

Esta formada enteramente por puntos invariantes.

**Ejemplo 2.5.16** Demostrar que la siguiente expresión es un grupo de Lie uniparamétrico de simetrías

$$(\hat{x}, \hat{y}) = \Gamma_\epsilon(x, y) = (e^\epsilon x, e^{(e^\epsilon - 1)x} y),$$

para la ecuación (2.17). Para este grupo tenemos

$$(\xi, \eta) = (x, xy)$$

Todo punto en  $x = 0$  es invariante. La ecuación característica reducida es

$$\bar{Q}(x, y) = 0 \Rightarrow xy - xy = 0$$

De modo que estas simetrías actúan trivialmente sobre las soluciones. Llevan una solución en sí misma. Chequeemos esta afirmación de manera directa.

Buscamos el cambio de variables inverso

$$\begin{cases} \hat{x} = e^\epsilon x \\ \hat{y} = e^{(e^\epsilon - 1)x} y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = e^{-\epsilon} \hat{x} \\ y = e^{(e^{-\epsilon} - 1)\hat{x}} \hat{y} \end{cases}$$

Las soluciones son  $y = ke^x$ , sustituímos en esta expresión, luego de unas operaciones, llegamos a  $\hat{y} = ke^{\hat{x}}$ .

**Ejemplo 2.5.17** La ecuación de Riccati

$$y' = xy^2 - \frac{2y}{x} - \frac{1}{x^3}, \quad x \neq 0$$

Tiene el grupo de Lie de simetrías

$$(\hat{x}, \hat{y}) = \Gamma_\epsilon(x, y) = (e^\epsilon x, e^{-2\epsilon} y).$$

Tenemos

$$(\xi, \eta) = (x, -2y).$$

La característica reducida

$$\overline{Q}(x, y) = \frac{1}{x^2} - x^2 y^2 = 0.$$

Tenemos dos soluciones invariantes

$$y = \pm \frac{1}{x^2}.$$

## 2.6 Simetrías a partir de Infinitesimales

La mayoría de los métodos de simetría usan  $(\xi, \eta)$  en lugar de las simetrías en si mismas. Por otra parte  $(\xi(\hat{x}, \hat{y}), \eta(\hat{x}, \hat{y}))$  determinan las simetrías a través de las ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \frac{d\hat{x}}{d\epsilon} & = \xi(\hat{x}, \hat{y}) \\ \frac{d\hat{y}}{d\epsilon} & = \eta(\hat{x}, \hat{y}) \\ \hat{x}(x, y, 0) & = x \\ \hat{y}(x, y, 0) & = y \end{array} \right. \quad (2.18)$$

**Justificación de las ecuaciones.** De la propiedad de grupo  $\Gamma_{\epsilon_1} \circ \Gamma_\epsilon = \Gamma_{\epsilon+\epsilon_1}$ , deducimos

$$\hat{x}(x, y, \epsilon + \epsilon_1) = \hat{x}(\hat{x}(x, y, \epsilon), \hat{y}(x, y, \epsilon), \epsilon_1).$$

Derivando respecto a  $\epsilon_1$  y evaluando en  $\epsilon_1 = 0$  justificamos las EDO en (2.18).

El sistema de ecuaciones (2.18) puede ser difícil de resolver. Pero en algunos casos puede ser posible.

**Ejemplo 2.6.18** Encontrar el grupo de simetrías para los infinitesimales  $\xi(x, y), \eta(x, y)) = (x^2, xy)$ .

$$\frac{d\hat{x}}{d\epsilon} = \xi(\hat{x}, \hat{y}) = \hat{x}^2 \text{ y } \hat{x}(x, y, 0) = x \Rightarrow \hat{x} = \frac{x}{1 - \epsilon x}$$

y

$$\frac{d\hat{y}}{d\epsilon} = \eta(\hat{x}, \hat{y}) = \hat{x}\hat{y} \text{ y } \hat{y}(x, y, 0) = y \Rightarrow \hat{y} = \frac{y}{1 - \epsilon x}$$

## 2.7 Condición de Simetría Linealizada

En esta sección discutiremos una técnica para encontrar simetrías de ecuaciones.

Desarrollando en serie de Taylor las funciones  $\hat{x}$  e  $\hat{y}$  en  $\epsilon$  alrededor de  $\epsilon = 0$

$$\begin{aligned}\hat{x} &= x + \epsilon\xi + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ \hat{y} &= y + \epsilon\eta + \mathcal{O}(\epsilon^2)\end{aligned}$$

Reemplazando en la condición de simetría, que recordemos es

$$\frac{\frac{\partial \hat{y}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{y}}{\partial y} f(x, y)}{\frac{\partial \hat{x}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{x}}{\partial y} f(x, y)} = f(\hat{x}, \hat{y}),$$

obtenemos

$$\frac{f + \epsilon\{\eta_x + f\eta_y\} + \mathcal{O}(\epsilon^2)}{1 + \epsilon\{\xi_x + f\xi_y\} + \mathcal{O}(\epsilon^2)} = f(x + \epsilon\xi + \mathcal{O}(\epsilon^2), y + \epsilon\eta + \mathcal{O}(\epsilon^2))$$

Desarrollando en serie de Taylor para  $x$  e  $y$  el segundo miembro y luego de algunas operaciones

$$f + \epsilon\{\eta_x + (\eta_y - \xi_x)f - \xi_y f^2\} + \mathcal{O}(\epsilon^2) = f + \epsilon\{\xi f_x + \eta f_y\} + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

Cancelando  $f$  dividiendo por  $\epsilon$  y haciendo  $\epsilon \rightarrow 0$  llegamos a la *Condición de Simetría Linealizada*

$$\boxed{\eta_x + (\eta_y - \xi_x)f - \xi_y f^2 = \xi f_x + \eta f_y} \quad (2.19)$$

Recordando la característica reducida  $\bar{Q} = \eta - f\xi$ , la fórmula anterior se escribe más sintéticamente

$$\boxed{\bar{Q}_x + f\bar{Q}_y = f_y \bar{Q}} \quad (2.20)$$

Cada solución de (2.20) conlleva una infinita cantidad de grupos de Lie de simetrías, porque si  $\bar{Q}$  resuelve (2.20) entonces para toda función  $\xi$  el par  $(\xi, \bar{Q} + f\xi)$  son infinitesimales para un grupo de Lie de simetrías de la ecuación. La solución trivial  $\bar{Q} \equiv 0$  de (2.20) se corresponde con simetrías triviales. En principio podríamos utilizar el método de características, que hemos visto en la unidad anterior, para resolver la ecuación lineal en derivadas parciales de primer orden (2.20) que, recordando lo visto, se puede escribir

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{f} = \frac{d\bar{Q}}{f_y \bar{Q}}.$$

La primera igualdad en la ecuación anterior equivale a  $dy/dx = f$ , que es al fin y al cabo, la ecuación que queremos resolver. Así estas consideraciones parecen habernos llevado al origen de nuestro problema. No obstante, algunas veces es posible encontrar una solución de (2.19) recurriendo a un ansatz.

**Ejemplo 2.7.19** Encontrar un grupo de Lie de simetrías no trivial de  $y' = \frac{y}{x} + x$ .

La condición de simetría linealizada es

$$\eta_x + (\eta_y - \xi_x) \left( \frac{y}{x} + x \right) - \xi_y \left( \frac{y}{x} + x \right)^2 = \xi \left( 1 - \frac{y}{x^2} \right) + \frac{\eta}{x},$$

que luce intimidante. Hagamos el ansatz  $\xi = 0$  y  $\eta = \eta(x)$ . Conseguimos

$$\eta_x - \frac{\eta}{x} = 0$$

Cuya solución general es  $\boxed{\eta = cx}$ . Ahora podemos encontrar simetrías de la ecuación.

Recordando (2.18), tenemos

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\hat{x}}{d\xi} = 0 \\ \frac{d\hat{y}}{d\xi} = c\hat{x} \\ \hat{x}(x, y, 0) = x \\ \hat{y}(x, y, 0) = y \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \hat{x} = x \\ \hat{y} = cex + y \end{array} \right.$$

Podemos constatar de manera directa que  $\hat{x} = x$  e  $\hat{y} = cex + y$  constituyen un grupo de Lie uniparamétrico de simetrías de la ecuación, para el cual  $\bar{Q} \neq 0$ .

**Ejemplo 2.7.20** Encontrar valiéndose de SymPy los infinitesimales de la ecuación (2.11).

```
from sympy import *
init_printing()
x,y=symbols('x,y',real=True)
f=(y**3+x**2*y-x-y)/(x**3+x*y**2-x+y)
```

Cómo en muchos otras situaciones que se presentan cuando intentamos resolver de manera exacta ecuaciones diferenciales, debemos recurrir a una heurística con el objeto de resolver el problema. Por ejemplo, SymPy incorpora una estrategia de búsqueda entre distintos candidatos a infinitesimales, ver [?, ?] para los detalles. Por ejemplo, la primer heurística que se enumera en [?] es la que usamos en el ejemplo anterior, es decir  $\xi = 0$  y  $\eta = \eta(x)$ . En el ejemplo actual, vamos a usar la siguiente heurística

$$\xi = ax + by + h, \quad \eta = cx + dy + k.$$

```
a,b,c,d,h,k=symbols('a,b,c,d,h,k',real=True)
xi=a*x+b*y+h
eta=c*x+d*y+k
Q=eta-f*xi
```

Reemplazamos el valor de  $Q$  en la condición de simetría linealizada.

```
CondSim=Q.diff(x)+f*Q.diff(y)-f.diff(y)*Q
CondSim=simplify(CondSim)
```

Llegamos a una ecuación de la forma

$$\frac{P_1(x, y)}{P_2(x, y)} = 0,$$

donde  $P_1$  y  $P_2$  son polinomios bivariados. Obviamente sólo nos interesa  $P_1$ , que podemos extraer de la siguiente forma

```
P1,P2=fraction(CondSim)
P1
```

[Wikipedia](#)

Obtenemos la siguiente expresión monstruosa de  $P_1$ , que sólo reproducimos a modo anecdótico

$$\begin{aligned} P_1 = & -ax^4 - 2ax^2y^2 - ax^2 + 2axy - ay^4 + ay^2 - bx^2 - 2bxy \\ & + by^2 - cx^2 - 2cxy + cy^2 - dx^4 - 2dx^2y^2 + dx^2 - 2dxy \\ & - dy^4 - dy^2 + hx^4y - 2hx^3 + 2hx^2y^3 - 2hx^2y - 2hxy^2 + hy^5 \\ & - 2hy^3 + 2hy - kx^5 - 2kx^3y^2 + 2kx^3 - 2kx^2y - kxy^4 + 2kxy^2 \\ & - 2kx - 2ky^3 \end{aligned}$$

Hay que resolver  $P_1 = 0$ . A pesar de la apariencia atemorizante de esta ecuación, es completamente inofensiva si tenemos en mente que el “juego” consiste en hallar los coeficientes  $a, b, c, d, h, k$  que resuelven la ecuación para todo  $x$  e  $y$ . De modo que podemos reemplazar  $x$  e  $y$  por distintos valores y resolver las ecuaciones resultantes. En el código debajo usamos el método `collect(x)` que agrupa los términos de una expresión que tienen la misma potencia para  $x$ .

```
P1.subs(y,0).collect(x)
```

**Heurística:** ...significa «hallar, inventar» (etimología que comparte con eureka)... Cuando se usa como sustantivo, se refiere a la disciplina, el arte o la ciencia del descubrimiento... Cuando aparece como adjetivo, se refiere a cosas más concretas, como estrategias, reglas, silogismos y conclusiones heurísticas. Estos dos usos están íntimamente relacionados, ya que la heurística usualmente propone estrategias que guían el descubrimiento. El término fue utilizado por Albert Einstein en la publicación sobre efecto fotoeléctrico (1905).

## Resulta

$$0 = -kx^5 - 2kx + x^4(-a - d) + x^3(-2h + 2k) + x^2(-a - b - c + d)$$

Es un polinomio en  $x$  que debería ser idénticamente 0, debe para ello tener todos los coeficientes iguales a 0. Inferimos inmediatamente de esto que  $k = h = 0$ ,  $d = -a$  y  $c = -2a - b$ . Reemplazemos ahora  $y$  por 1.

```
P11=P1.subs({h:0,k:0,d:-a,c:-2*a-b})
P11.subs(y,1).collect(x)
```

Resulta en la expresión  $8ax$ , que si es idénticamente 0 fuerza que  $a = 0$ . Luego  $d = 0$  y  $c = -b$ . El valor de  $c$  es arbitrario, se puede elegir cualquiera, elejimos  $c = 1$  y por consiguiente  $b = -1$ .

```
xi=xi.subs({d:0,a:0,b:-1,c:1,h:0,k:0})
eta=eta.subs({d:0,a:0,b:-1,c:1,h:0,k:0})
xi,eta
```

Concluimos  $\xi = -y$  y  $\eta = x$ . Todavía no estamos seguros que estos  $\xi$  y  $\eta$  resuelvan nuestro problema. El razonamiento anterior está incompleto sino chequeamos que la solución obtenida resuelve la ecuación de simetría linealizada para todo  $x$  e  $y$ , esto porque con la metodología utilizada solo estamos seguros que los valores obtenidos para los coeficientes solucionan el problema en los valores que elegimos para  $y$  ( $y = 0$  e  $y = 1$ ). Ahora podemos chequear que en realidad se resuelve la ecuación de simetría linealizada para cualquier valor de  $x$  e  $y$ .

```
CondSimLin=Q.diff(x)+f*Q.diff(y)-f.diff(y)*Q
CondSimLin.simplify()
```

Que definitivamente establece que la elección que hemos hecho resuelve el problema.

**Completación de la demostración del Teorema 2.5.2.** Restaba demostrar que si  $y(x)$  resuelve la ecuación  $\bar{Q}(x, y(x)) = 0$  y  $\bar{Q}_y \neq 0$  en los puntos a lo largo de la curva  $(x, y(x))$  entonces  $y(x)$  es solución invariante de la ecuación  $y' = f$ .

Por el Teorema de la función implícita, la condición de simetría linealizada (2.20) y  $\bar{Q} = 0$

$$y'(x) = -\frac{\bar{Q}_x}{\bar{Q}_y} = f - f_y \frac{\bar{Q}}{\bar{Q}_y} = f$$

Luego  $y$  es solución de la ecuación. El hecho de que es invariante es simplemente la igualdad  $\bar{Q} = 0$ .

## 2.8 Coordenadas canónicas

### 2.8.1 Definición y ejemplos

**Definición 2.8.9 (Coordenadas canónicas)** iremos que las coordenadas  $(r, s)$  son canónicas respecto a el grupo de Lie de simetrías  $\Gamma_\epsilon$  si en las coordenadas  $(r, s)$  la acción de grupo es la traslación

$$(\hat{r}, \hat{s}) := (r(\hat{x}, \hat{y}), s(\hat{x}, \hat{y})) = (r(x, y), s(x, y) + \epsilon). \quad (2.21)$$

**Ejemplo 2.8.21** Las coordenadas polares son canónicas respecto al grupo de Lie de rotaciones. Las rotaciones en coordenadas cartesianas y polares se escriben

$$\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\epsilon) & -\sin(\epsilon) \\ \sin(\epsilon) & \cos(\epsilon) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} \hat{r} \\ \hat{\theta} \end{matrix} = r + \epsilon$$

Derivando las ecuaciones (2.21) respecto a  $\epsilon$  obtenemos

$$\begin{aligned} \xi(x, y) \frac{\partial r}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial r}{\partial y} &= 0 \\ \xi(x, y) \frac{\partial s}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial s}{\partial y} &= 1 \end{aligned} \quad (2.22)$$

Los cambios de coordenadas deben ser invertibles, de modo que pediremos la condición de no degeneración

$$\frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial y} - \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial s}{\partial x} \neq 0 \quad (2.23)$$

#### Observaciones:

- A. El vector tangente en cualquier punto no invariante es paralelo a la curva  $r = \text{cte}$  que pasa por ese punto. Luego esa curva continene las órbitas de cada punto en ella. Las órbitas son invariantes, así  $r$  se llama la *coordenada invariante*. Las curvas  $s = \text{cte}$  son transversales a las órbitas.
- B. Las coordenadas canónicas no están definidas en un punto  $(x, y)$  invariante pues en esos puntos  $\xi(x, y) = \eta(x, y) = 0$ .
- C. Las coordenadas canónicas están definidas en un entorno de cualquier punto no invariante. Esta afirmación requiere una demostración que utiliza métodos y conceptos que están fuera de los objetivos de este curso.
- D. Las coordenadas canónicas no son únicas. De hecho si  $(r, s)$  son canónicas  $(\tilde{r}, \tilde{s}) = (F(r), G(r) + s)$  lo son para cualquier  $F$  y  $G$  con  $F'(r) \neq 0$  (para la no degeneración).

## 2.9 Encontrando coordenadas canónicas

### 2.9.1 Integrales primeras

**Definición 2.9.10 (Integrales primera)** na integral primera de la EDO  $y' = f(x, y)$  es una función  $\phi(x, y)$  que es constante a lo largo de cualquier curva solución de la EDO. Se la denomina también *magnitud conservada*.

**Teorema 2.9.3 (Propiedad de conservación de coordenadas canónicas)** Si  $(r, s)$  son coordenadas canónicas de una grupo de Lie de simetrías entonces  $r$  es una integral primera de la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\eta(x, y)}{\xi(x, y)}. \quad (2.24)$$

**Dem.** La afirmación del teorema es consecuencia de que el campo  $(\xi, \eta)$  es tangente a las curvas  $r = c$ , con  $c$  constante. Justifiquemos el teorema del siguiente modo. Supongamos  $y(x)$  solución de la EDO, es suficiente demostrar que  $\frac{d}{dx}r(x, y(x)) = 0$ . Pero, en efecto

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}r(x, y(x)) &= \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial s}{\partial y}y' \quad (\text{regla cadena}) \\ &= \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial s}{\partial y} \frac{\eta(x, y)}{\xi(x, y)} \quad (\text{Ec. (2.24)}) \\ &= 0 \quad (\text{Ec. (2.22)})\end{aligned}$$

□

**Ejemplo 2.9.22** Ya conocemos las coordenadas canónicas de las rotaciones,

$$\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\epsilon) & -\sin(\epsilon) \\ \sin(\epsilon) & \cos(\epsilon) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

hallemosla por el método propuesto. Hay que resolver

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \Rightarrow ydy = -xdx \Rightarrow y^2 + x^2 = C$$

Luego  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  es una integral primera.

La coordenada  $r$  es constante sobre los puntos en la gráfica de una solución de (2.24). Sobre esos puntos  $(x, y(x))$ , la coordenada  $s$  satisface:

$$\begin{aligned}\frac{ds}{dx} &= \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial s}{\partial y}y'(x) \quad (\text{Regla cadena}) \\ &= \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial s}{\partial y} \frac{\eta}{\xi} \quad (2.24) \\ &= \frac{1}{\xi} \quad (2.22).\end{aligned}\tag{2.25}$$

Ahora podemos aprovechar que ya conocemos  $r$  y expresar  $y$  como función de  $r, x$ . Luego

#### Teorema 2.9.4 (Expresión para $s$ )

$$s = \int \frac{ds}{dx} dx = \int \frac{dx}{\xi(x, y(r, x))}. \tag{2.26}$$

En la igualdad resultante reemplazamos  $r$  por su expresión en las variables  $x, y$ .

Si ocurriese que  $\xi = 0$  y  $\eta \neq 0$ . Entonces por (2.24)  $r_y = 0$ , de modo que  $r$  es sólo función de  $x$ . Se puede asumir  $r = x$ . Además  $\eta s_y = 1$ , entonces

$$s = \int \frac{dy}{\eta(r, y)}. \tag{2.27}$$

**Ejemplo 2.9.23** Retornando al ejemplo de las rotaciones, donde hallamos que  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , vemos que

$$s = \int \frac{dx}{-y} = - \int \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \arccos\left(\frac{x}{r}\right).$$

Por consiguiente  $s$  es el ángulo polar.

**Ejemplo 2.9.24** Encontrar coordenadas canónicas para el grupo de Lie de simetrías

$$(\hat{x}, \hat{y}) = (e^\epsilon x, e^{k\epsilon} y) \quad k > 0.$$

El vector tangente es

$$(\xi, \eta) = \left( \frac{d\hat{x}}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0}, \frac{d\hat{y}}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} \right) = (x, ky).$$

Resolvamos la ecuación (2.24)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ky}{x} \Rightarrow y = Cx^k.$$

Luego  $\Phi = y/x^k$  es integral primera. Entonces podemos tomar  $r = y/x^k$ . Para  $s$

$$s = \int \frac{dx}{\xi} = \frac{dx}{x} = \ln|x|.$$

Entonces  $(r, s) = (yx^{-k}, \ln|x|)$  son coordenadas canónicas. No están definidas en  $x = 0$ . Podemos encontrar coordenadas canónicas definidas en  $x = 0$  del siguiente modo. Recordamos que para todas  $F$  y  $G$

$$(\tilde{r}, \tilde{s}) = (F(r), G(r) + s) = (F(x^{-k}y), G(x^{-k}y) + \ln|x|).$$

Son canónicas también. Si tomamos  $F(r) = 1/r$  y  $G(r) = \frac{1}{k} \ln|r|$ , evitamos la singularidad. Luego

$$(\tilde{r}, \tilde{s}) = (x^k y^{-1}, \frac{1}{k} \ln|y|).$$

Son canónicas, están definidas en  $x = 0$  pero no en  $y = 0$ .

**Ejemplo 2.9.25** Encontrar coordenadas canónicas para

$$(\hat{x}, \hat{y}) = \left( \frac{x}{1 - \epsilon x}, \frac{y}{1 - \epsilon x} \right).$$

$$(\xi, \eta) = \left( \frac{d\hat{x}}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0}, \frac{d\hat{y}}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} \right) = (x^2, xy).$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\eta}{\xi} = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{y}{x} = \text{cte.}$$

Podemos tomar  $r = y/x$ . Para  $s$

$$s = \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}.$$

Luego  $(r, s) = (\frac{y}{x}, -\frac{1}{x})$  son canónicas.

En este caso los puntos sobre  $x = 0$  son invariantes, no podemos definir coordenadas canónicas allí.

Lo podemos desarrollar con SymPy.

```
x,y,epsilon=symbols('x,y,epsilon')
T=Matrix([x/(1-epsilon*x),y/(1-epsilon*x)])
xi=T[0].diff(epsilon).subs(epsilon,0)
print(xi)
eta=T[1].diff(epsilon).subs(epsilon,0)
print(eta/xi)
y=Function('z')(x)
sol=dsolve(y.diff(x)-y/x,y)
print(sol)
Integral(1/xi,x).doit()
```

## 2.9.2 Infinitesimales → Simetrías (Revisitado)

Las coordenadas canónicas nos dan otra manera de encontrar simetrías a partir de los infinitesimales siguiendo el procedimiento:

- A. Determinar las coordenadas canónicas (sólo necesitamos conocer los infinitesimales).
- B. Expresamos las relaciones  $\hat{r} = r$  y  $\hat{s} = s + \epsilon$  en las coordenadas  $x, y$ .

**Ejemplo 2.9.26** Hallar el grupo de simetrías asociado a los infinitesimales  $\xi = x^2$  y  $\eta = xy$ .

- A. En la sección hallamos las coordenadas canónicas  $(r, s) = (\frac{y}{x}, -\frac{1}{x})$  asociadas a los infinitesimales dados.
- B. Entonces

$$\begin{aligned}(\hat{r}, \hat{s}) &= (r, s + \epsilon) \Rightarrow \frac{\hat{y}}{\hat{x}} = \frac{y}{x}, -\frac{1}{\hat{x}} = -\frac{1}{x} + \epsilon \\&\Rightarrow \hat{x} = \frac{x}{1-\epsilon x}, \hat{y} = \frac{y}{1-\epsilon x}.\end{aligned}$$

## 2.10 Resolviendo EDO con grupos de Lie de simetrías

### 2.10.1 Método de solución

Finalmente, toda la teoría expuesta nos permite elaborar un método que puede resolver una ecuación dada supuesto que conocemos un grupo de Lie de simetrías de ella. Supongamos dado un grupo de Lie de simetrías  $(\hat{x}, \hat{y})$  de la ecuación

$$y' = f(x, y) \quad (2.28)$$

Supongamos que las simetrías son no triviales. Según (2.16) debemos tener

$$\eta(x, y) \not\equiv f(x, y)\xi(x, y)$$

La razón de esta condición es que si fuese falsa entonces la ecuación (2.24) es la misma que la ecuación (2.28) y el método es inútil.

Supongamos  $(r, s)$  coordenadas canónicas. La ecuación en las coordenadas  $(r, s)$ , según (2.6), se escribirá

$$\frac{ds}{dr} = \hat{f}(r, s) := \frac{s_x + f(x, y)s_y}{r_x + f(x, y)r_y}. \quad (2.29)$$

Las coordenadas canónicas se definen por (2.21) de modo que el grupo de simetrías actúe por traslación  $(\hat{r}, \hat{s}) = (r, s + \epsilon)$ . Cómo se justifica en el Ejemplo 2.4.12,  $\hat{f}$  es independiente de  $s$ , por consiguiente la ecuación se reduce a

$$\frac{ds}{dr} = \hat{f}(r) \quad (2.30)$$

que se resuelve integrando.

**Ejemplo 2.10.27** Resolver

$$y' = xy^2 - \frac{2y}{x} - \frac{1}{x^3}, \quad x \neq 0,$$

sabiendo que la ecuación es invariante para el grupo de simetrías

$$(\hat{x}, \hat{y}) = (e^\epsilon x, e^{-2\epsilon} y).$$

Por los resultados de la sección :

$$(r, s) = (x^2 y, \ln |x|)$$

son canónicas. Según (2.29) la ecuación en  $(r, s)$  es:

$$\frac{dr}{ds} = \frac{\frac{1}{x}}{2xy + x^2 \left( xy^2 - \frac{2y}{x} - \frac{1}{x^3} \right)} = \frac{1}{x^4 y^2 - 1} = \frac{1}{r^2 - 1}$$

Como sabíamos que debía suceder el resultado del segundo miembro no depende sólo de  $r$ . Integrando

$$s = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{r-1}{r+1} \right) + C.$$

Sustituyendo

$$\ln |x| = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{x^2 y - 1}{x^2 y + 1} \right) + C.$$

Despejando

$$y = -\frac{x^2 + C}{x^2(x^2 - C)} \quad (2.31)$$

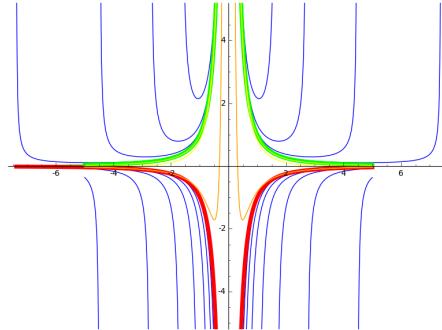


Figura 2.1: Soluciones de  $y' = xy^2 - \frac{2y}{x} - \frac{1}{x^3}$

La ecuación característica reducida (2.16) es para la ecuación de este ejemplo:

$$0 = \bar{Q} = -2y - \left( xy^2 - \frac{2y}{x} - \frac{1}{x^3} \right) x = -x^2 y^2 + \frac{1}{x^2}$$

Cuyas soluciones son

$$y = \pm \frac{1}{x^2}.$$

Que además son solución de la ecuación diferencial. La curva  $y = -1/x^2$  se obtiene de (2.31) con  $C = 0$ . La curva  $y = 1/x^2$ . En la figura 2.1 graficamos las distintas soluciones. Las curvas azules y naranjas se corresponden con las gráficas de (2.31) con  $c > 0$  y  $c < 0$  respectivamente. La verde es la de  $y = 1/x^2$  y la roja de  $y = -1/x^2$ .

**Ejemplo 2.10.28** Resolver

$$y' = \frac{y+1}{x} + \frac{y^2}{x^3}, \quad x \neq 0,$$

sabiendo que la ecuación es invariante para el grupo de simetrías

$$(\hat{x}, \hat{y}) = \left( \frac{x}{1-\epsilon x}, \frac{y}{1-\epsilon x} \right).$$

Ya hemos computado las coordenadas canónicas en la subsección :

$$(r, s) = \left( \frac{y}{x}, \frac{1}{x} \right).$$

Por (2.29) la ecuación se escribe

$$\frac{dr}{ds} = \frac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{y}{x^2} + \frac{1}{x}\left(\frac{y+1}{x} + \frac{y^2}{x^3}\right)} = \frac{1}{1+r^2},$$

cuya solución es

$$s = \arctan(r) + C \Rightarrow y = -x \tan\left(\frac{1}{x} + C\right).$$

## 2.10.2 Ecuaciones homogéneas

**Ejemplo 2.10.29** En este ejemplo deduciremos nuevamente el método de solución de ecuaciones homogéneas apelando a las simetrías. Es decir, queremos resolver la ecuación

$$y' = F\left(\frac{y}{x}\right). \quad (2.32)$$

Aquí tenemos el Grupo de Lie de simetrías de cambio de escalas

$$(\hat{x}, \hat{y}) = (e^\epsilon x, e^\epsilon y).$$

Por los resultados de la subsección ,  $(r, s) = (y/x, \ln|x|)$  son canónicas y la ecuación se escribe

$$\frac{ds}{dr} = \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{y}{x^2} + \frac{F(\frac{y}{x})}{x}} = \frac{1}{F(r) - r}.$$

La solución general es

$$\ln|x| = \int^{y/x} \frac{dr}{F(r) - r} + c.$$

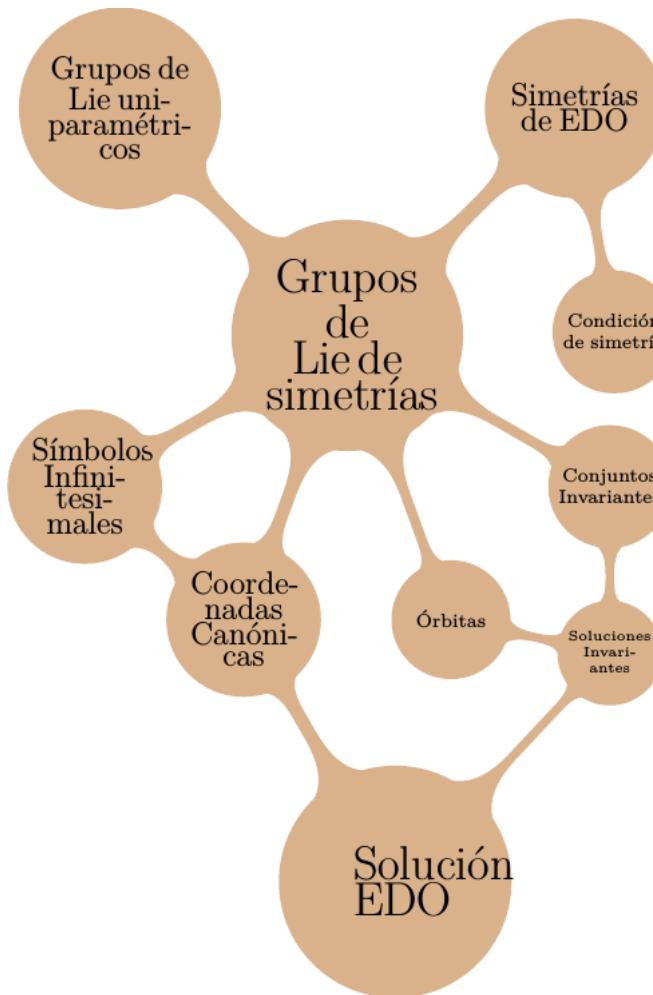
## 2.10.3 Método de Lie y SymPy

SymPy Incorpora distintas estrategias para resolver ecuaciones por el método de Lie. Hay mucho por indagar al respecto, pero sólo vamos a mencionar una función para calcular los infinitesimales  $(\xi, \eta)$ . Aprovechamos para mostrar como luce una consola de ipython, otra manera de usar Python y SymPy.

```
x=symbols('x')
y=Function('y')(x)
from sympy.solvers.ode import infinitesimals
xi_eta=infinitesimals((y+1)/x+y**2/x**3-y.diff(x))
```

$$[\{\eta(x, y(x)) : xy(x), \quad \xi(x, y(x)) : x^2\}]$$

## 2.11 Diagrama conceptual



## Apéndices

### 2.A Formas Diferenciales, una introducción ingenua

La expresión (2.1) es más asimétrica, entre las variables  $x$  e  $y$  una de ellas es independiente ( $x$ ) y la otra independiente ( $y$ ). La expresión (2.2) es más simétrica, las dos variables tienen el mismo estatus.

Las expresiones del tipo (2.2) representan un ente matemático importante llamado forma diferencial. No disponemos del tiempo necesario para dotar con entidad matemática el concepto de forma diferencial. Tampoco resulta de vital importancia. Pero las reglas que rigen la combinación de las formas diferenciales son muy simples y nos gustaría describir este aspecto de las formas diferenciales brevemente; como motivación para un estudio posterior más profundo y para que el lector gane en confianza en su manipulación. Daremos así una pintura de las formas diferenciales incompleta, por cuanto sólo diremos como ellas se combinan pero no contestaremos la pregunta de que son. Sólo digamos, para advertir al lector sobre los requisitos teóricos que se requieren, que las formas diferenciales se encuentran asociados al concepto de variedad diferencial, concepto este que generaliza al de curva y superficie. Más concretamente, las formas diferenciales son funciones que toman valores en los duales de los espacios tangentes a las variedades diferenciales. En particular hay formas diferenciales asociadas a los espacios euclídeo, que podemos identificar con  $\mathbb{R}^n$ .

Aquí vamos a pensar a las formas diferenciales como objetos puramente formales sobre los que actúa un operador  $d$ , leyes de composición internas y externas. Se construyen formas diferenciales invocando un sistema de coordenadas  $x_1, \dots, x_n$ . Estas coordenadas, deben ser coordenadas de alguna variedad diferencial, pero, por simplicidad, supondremos que son coordenadas cartesianas ortogonales de un espacio euclídeo. Las formas diferenciales forman un espacio vectorial con una operación de suma  $+$  y producto por un escalar. Además tienen definido un producto  $\wedge$ , llamado producto exterior, que posee algunas particularidades. Como los polinomios, las formas diferenciales tienen grado. Por eso se dice que forman un álgebra graduada. A diferencia de los polinomios, este grado no supera la dimensión  $n$  del espacio ( $\mathbb{R}^n$  o más generalmente una variedad) a la que están asociadas. Para ser más exactas, la única forma de grado  $k > n$  es la trivial, esto es la nula. Denotamos  $\Lambda_k$  las formas de grado  $k$ , siendo  $\Lambda = \bigoplus_{k=0}^n \Lambda_k$  el espacio vectorial de todas ellas. Luego  $d : \Lambda \rightarrow \Lambda$  y  $\wedge : \Lambda \times \Lambda \rightarrow \Lambda$ . Ahora describimos unas simples reglas de las formas,  $d$  y  $\wedge$ .

- A. Una 0-forma diferencial es una función  $g(x_1, \dots, x_n)$ .
- B. Si  $\alpha \in \Lambda_k$  y  $\beta \in \Lambda_p$  entonces  $\alpha \wedge \beta \in \Lambda_{k+p}$ .
- C. El producto  $\wedge$  es asociativo, distributivo y satisface una especie de anticommutatividad, específicamente si  $\alpha \in \Lambda_k$  y  $\beta \in \Lambda_p$  entonces  $\alpha \wedge \beta = (-1)^{kp} \beta \wedge \alpha$ . En particular  $\alpha \wedge \alpha = 0$  cuando  $\alpha$  es un  $k$ -forma con  $k$  impar.
- D. El diferencial satisface
  - D.1) Si  $\omega$  es una  $k$ -forma diferencial  $d\omega$  es una  $k+1$  forma diferencial.
  - D.2)  $d^2\omega = d(d\omega) = 0$ , para toda  $\omega \in \Lambda$ .
  - D.3) Si  $\alpha \in \Lambda_k$  entonces  $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta$ .
  - D.4) En el caso de 0-forma (función)  $g(x_1, \dots, x_n)$  el diferencial se define

$$dg = \frac{\partial g}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial g}{\partial x_n} dx_n$$

- E. Las expresiones  $dx_i, i = 1, \dots, n$  forman una especie de base del espacio de las formas  $\Lambda$ , en el sentido que cualquier  $k$  forma  $\alpha$  se expresa de la siguiente manera:

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} g_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k},$$

para ciertas funciones  $g_{i_1 \dots i_k}$ . Observar que la suma se extiende sobre todos los subconjuntos ordenados de  $\{1, \dots, n\}$ .

Una  $k$ -forma diferencial  $\alpha$  se llama exacta cuando es el diferencial de una  $k-1$ -forma y se dice cerrada cuando  $d\alpha = 0$ . Las propiedades de las formas implican que toda forma exacta es cerrada. Un famoso Lema de Poincaré trata con el recíproco de esta afirmación.

Las reglas anteriores permiten computar cualquiera de las operaciones. **Ejemplo 2.1.30**  
Si  $\alpha = M(x, y)dx + N(x, y)dy$  es una 1-forma de  $\mathbb{R}^2$ , entonces

$$\begin{aligned} d\alpha &= dM \wedge dx - Md^2x + dN \wedge dy - Nd^2y \\ &= \left( \frac{\partial M}{\partial x} dx + \frac{\partial M}{\partial y} dy \right) \wedge dx + \left( \frac{\partial N}{\partial x} dx + \frac{\partial N}{\partial y} dy \right) \wedge dy \\ &= \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx \wedge dy \end{aligned}$$

Recordemos el famoso Teorema de Green, que afirmaba que si  $D \subset \mathbb{R}^2$  era una región cuyo borde  $C = \partial D$  era una curva cerrada simple, entonces

$$\oint_{\partial D} M dx + N dy = \iint_D \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy.$$

Utilizando formas diferenciales este resultado se escribe de la manera, mucho más compacta y sugerente

$$\oint_{\partial D} \alpha = \iint_D d\alpha,$$

donde  $\alpha = M(x, y)dx + N(x, y)dy$ . Esto es una relación clave de las formas diferenciales que se generaliza en un teorema fundamental de la matemática llamado Teorema de Stokes.

**Ejemplo 2.1.31** Computemos  $d^2g$ , cuando  $g$  es una función (0-forma).

$$\begin{aligned} d^2g &= d \left( \frac{\partial g}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial g}{\partial x_n} dx_n \right) \\ &= d \left( \frac{\partial g}{\partial x_1} \right) \wedge dx_1 + \cdots + d \left( \frac{\partial g}{\partial x_n} \right) \wedge dx_n - \frac{\partial g}{\partial x_1} \wedge d^2x_1 - \cdots - \frac{\partial g}{\partial x_n} \wedge d^2x_n \\ &= \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_1} dx_i \right) \wedge dx_1 + \cdots + \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_n} dx_i \right) \wedge dx_n \\ &= \sum_{i \neq 1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_1} dx_i \wedge dx_1 + \cdots + \sum_{i \neq n}^n \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_n} dx_i \wedge dx_n \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left\{ \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 g}{\partial x_j \partial x_i} \right\} dx_i \wedge dx_j = 0. \end{aligned}$$

Que es lo que tenía que ser.

## 2.B Formas diferenciales en Sympy

En este apéndice resolveremos el problema planteado en el ejemplo 2.2.3 usando formas diferenciales y Sympy. Usaremos el módulo de geometría diferencial, donde se pueden definir formas diferenciales y otros entes propios de la geometría diferencial: campos escalares y vectoriales. No es posible entender completamente este módulo sin introducir conceptos básicos de geometría diferencial, cosa que no haremos pues nos alejaría del propósito del curso. De modo que vamos a discutir superficialmente la solución de este problema. Es suficiente importar del módulo de geometría diferencial el submodulo R2, que ya nos crea las formas diferenciales  $dx$ ,  $dy$  (se accede por  $R2.dx$ ,  $R2.dy$ ), como así también las formas  $dr$  y  $d\theta$  ( $R2.dr$ ,  $R2.dtheta$ ). Técnicamente hablando R2 es una variedad diferencial –en este caso el espacio euclídeo bidimensional– con toda la estructura algebraica que lleva consigo.

En el siguiente código, luego de las sentencias de importación, cada línea efectúa lo siguiente: 4-define la forma diferencial en coordenadas cartesianas, 5 y 6-calcula el valor de  $M$  y  $N$  en coordenadas polares  $-Md\theta + Ndr$ . Sin embargo el resultado, todavía tiene apelaciones a las coordenadas  $x$  e  $y$ . Por este motivo en las líneas 7 y 8 introducimos los símbolos  $r$  y  $theta$  y en las líneas 9 a 11 sustituímos  $x$  e  $y$  por  $r \cos \theta$  y  $r \sin \theta$  respectivamente. Hay que notar que los símbolos que introdujimos  $r$  y  $\theta$  son diferentes de  $R2.theta$  y  $R2.r$ , a los que Sympy despliega en negritas en la consola de ipython. Por ese motivo, también sustituímos  $R2.theta$  y  $R2.r$  por  $\theta$  y  $r$  respectivamente.

```

1 from sympy import *
from sympy.diffgeom.rn import R2
3 init_printing()
forma=(R2.y**3+R2.x**2*R2.y-R2.x-R2.y)*R2.dx-(R2.x**3+R2.x*R2.y**2-R2.x+R2.y)*
      R2.dy
5 M=forma.rcall(R2.e_theta)
N=forma.rcall(R2.e_r)
7 r=symbols('r',positive=True)
theta=symbols('theta')
9 sust={R2.x:r*cos(theta),R2.y:r*sin(theta),R2.theta:theta,R2.r:r}
Mpol=M.subs(sust).simplify()
```

```

11 Npol=N. subs(sust). simplify()
forma_pol=Mpol*R2. dtheta+Npol*R2. dr

```

scripts/sust\_formas.py

La forma obtenida es  $-rdr + (-r^4 + r^2)d\theta$ .

## 2.C Teoría de grupos computacional: GAP

«GAP (Groups, Algorithms, Programming) es un sistema de álgebra discreta computacional, con especial énfasis en la teoría de grupos computacional. GAP proporciona un lenguaje de programación, una biblioteca de miles de funciones implementando algoritmos algebraicos escritos en el lenguaje GAP, así como bibliotecas de datos de objetos algebraicos de gran tamaño [...] GAP se utiliza en la investigación y la enseñanza para estudiar grupos y sus representaciones, anillos, espacios vectoriales, álgebras, estructuras combinatorias, y más. El sistema, incluida la fuente, se distribuye libremente.»

(Página Oficial de GAP)

Hasta donde sabemos Sympy no implementa objetos de teoría de grupos. Sin embargo existe software libre para estudiar grupos. El más conocido de ellos es GAP. Este sistema provee un lenguaje muy sencillo y transparente. Lamentablemente el estudio de esta herramienta está más allá de los alcances de este documento. Desarrollaremos un simple ejemplo.

**Ejemplo 2.3.32** En el siguiente ejemplo de sesión con línea de comandos de GAP introducimos sentencias que quedan indicadas en cada línea iniciada con el símbolo de sistema (prompt) >gap. Las líneas que no inician con el símbolo de sistema indican la salida correspondiente a la sentencia que antecede dichas líneas. En línea 1 introducimos el grupo simétrico de orden 3 y lo llamamos G. En línea 3 pedimos que nos enumere los elementos de G. En línea 5, introducimos el elemento de G que en notación cíclica se escribe  $(1, 3, 2)$ . En líneas 7 y 9 calculamos potencias de r. En 11 definimos como H el subgrupo generado por r y en 13 enumeramos los elementos de H. En 15 averiguamos si H es normal. Siendo este el caso, podemos calcular el grupo cociente en 17 y lo llamamos K. Por último averiguamos el orden de K en 19.

```

gap> G:= SymmetricGroup(3);
2 Sym( [ 1 .. 3 ] )
gap> Elements(G);
4 [ (), (2,3), (1,2), (1,2,3), (1,3,2), (1,3) ]
gap> r:=(1,3,2);
5 (1,3,2)
gap> r^2;
6 (1,2,3)
gap> r^3;
7 ()
gap> H:= Subgroup(G,[r]);
8 Group([ (1,3,2) ])
gap> Elements(H);
9 [ (), (1,2,3), (1,3,2) ]
gap> IsNormal(G,H);
10 true
gap> K:= FactorGroup(G,H);
11 Group([ f1 ])
gap> Size(K);
12 2

```

scripts/gap\_basico.g

# 3 Teoremas de Existencia y Unicidad

## 3.0.1 Introducción

«El determinismo es una doctrina filosófica que sostiene que todo acontecimiento físico, incluyendo el pensamiento y acciones humanas, está causalmente determinado por la irrompible cadena causa-consecuencia, y por tanto, el estado actual determina en algún sentido el futuro...En física, el determinismo sobre las leyes físicas fue dominante durante siglos, siendo algunos de sus principales defensores Pierre Simon Laplace y Albert Einstein.»

«Podemos mirar el estado presente del universo como el efecto del pasado y la causa de su futuro. Se podría condensar un intelecto que en cualquier momento dado sabría todas las fuerzas que animan la naturaleza y las posiciones de los seres que la componen. Si este intelecto fuera lo suficientemente vasto para someter los datos al análisis, podría condensarse en una simple fórmula de movimiento de los grandes cuerpos del universo y del átomo más ligero; para tal intelecto nada podría ser incierto y el futuro, así como el pasado, estaría frente sus ojos»

Laplace, citado en [?]

La ciencia se vale de estructuras matemáticas para describir a través de modelos la evolución de sistemas reales. Usualmente esas estructuras son ecuaciones (diferenciales) donde el tiempo es una de sus variables. Conocer el estado actual de un sistema (las posiciones que menciona Laplace) es conocer las condiciones iniciales. Mientras que las ecuaciones en sí mismas se derivan de las fuerzas que animan la naturaleza. Así, para que la matemática colabore con la filosofía determinista, debería ella misma plantear problemas deterministas. En ese sentido, hablando específicamente de ecuaciones diferenciales, para que podamos decir que un PVI sea determinista, el problema debería tener solución (existencia de soluciones), caso contrario este PVI no produciría ninguna predicción del futuro. Pero también esta solución debería ser única (unicidad de soluciones), porque de no ser así, el problema produciría múltiples predicciones y por tanto el estado actual no determinaría el futuro. Un problema que satisfaga estas condiciones lo denominaremos *bien planteado*<sup>1</sup>.

Por lo expuesto, es de trascendencia para la ciencia en general que se pueda establecer que los problemas matemáticos que modelizan problemas de estas ciencias sean bien planteados. Este es el propósito de este capítulo.

Para nuestra sorpresa, PVIs sin ningún problema aparente a la vista no son problemas bien planteados.

**Ejemplo 3.0.1** Considerar el siguiente PVI:

$$\begin{cases} y'(x) = y(x)^{2/3} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

La ecuación es en variables separables. Deberíamos dividir por  $y(x)$ , pero notar antes de hacerlo que  $y \equiv 0$  es solución. Supongamos  $y(x) \neq 0$ , una vez dividido

$$\frac{dy}{y^{2/3}} = dx \Rightarrow 3y^{1/3} = x + C \Rightarrow y(x) = \left(\frac{x}{3} + C\right)^3.$$

A pesar de la limitación original de que  $y(x) \neq 0$ , la expresión para  $y(x)$  que hemos hallado es solución para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Notar que  $y(x) = 0$  cuando  $x = -C/3$ . Sin

<sup>1</sup>Es común en la literatura requerir, además de la existencia y unicidad, la estabilidad para hablar de problema bien planteado

embargo, el valor problemático  $y = 0$  nos trae aparejado un inesperado problema. Ocurre que la función  $y_C(x) := \left(\frac{x}{3} + C\right)^3$  tiene derivada igual a cero en  $x = -C/3$ . Esto implica que si  $C_1 < C_2$  entonces la función

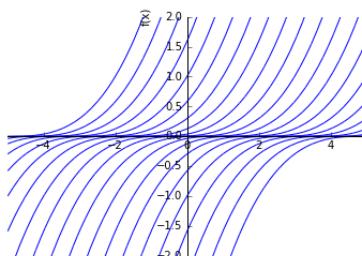
$$y_{C_1, C_2}(x) := \begin{cases} y_{C_1}(x) & \text{si } x \leq -C_2 \\ 0 & \text{si } x \in [C_1, C_2] \\ y_{C_2}(x) & \text{si } x \geq -C_1 \end{cases}$$

está bien definida y es diferenciable en  $\mathbb{R}$ . Además de ello, cualquiera de estas funciones con  $C_1 \leq 0 \leq C_2$  resuelven el PVI. De esta manera hemos encontrado un PVI con infinitas soluciones.

```

from sympy import *
x,y=symbols('x,y')
Rango=range(-10,11)
C=[k/6.0 for k in Rango]
p=plot((x/3+C[0])**3,(x,-5,5),show=False,xlim=(-5,5),ylim=(-2,2),aspect_ratio=(1,1))
for pend in C[1:]:
    p1=plot((x/3+pend)**3,(x,-5,5),show=False,xlim=(-5,5),ylim=(-2,2),aspect_ratio=(1,1))
    p.append(p1[0])
p.show()

```



scripts/no-unicidad.py

### **3.1 Sistemas de Ecuaciones Diferenciales**

### 3.1.1 Definición y ejemplos

Un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden es un conjunto de ecuaciones que relacionan una variable independiente, digamos  $x$ , un conjunto de variables dependientes, digamos  $y_1(x), \dots, y_n(x)$ , y sus derivadas respecto a  $x$ . A las ecuaciones diferenciales con una incógnita y una ecuación las denominaremos *ecuaciones escalares*.

**Definición 3.1.1** Un sistema de ecuaciones diferenciales es una conjunto de ecuaciones de la forma

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy_1}{dx}(x) = f_1(x, y_1(x), \dots, y_n(x)) \\ \frac{dy_2}{dx}(x) = f_2(x, y_1(x), \dots, y_n(x)) \\ \vdots \\ \frac{dy_n}{dx}(x) = f_n(x, y_1(x), \dots, y_n(x)) \end{array} \right., \quad (3.1)$$

donde  $f_j : [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $j = 1, \dots, n$ , son funciones.

Una manera alternativa y compacta de denotar un sistema se logra introduciendo las funciones  $y = (y_1, \dots, y_n)$  y  $f = (f_1, \dots, f_n)$ . Entonces  $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una función con valores en  $\mathbb{R}^n$  y  $f : [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un campo vectorial dependiente de  $x$ . Con estas notaciones el sistema se escribe:

$$y'(x) = f(x, y(x)). \quad (3.2)$$

**Ejemplo 3.1.2** Si  $x(t)$  es el ángulo que forma un péndulo, de longitud  $l$ , con la vertical en el tiempo  $t$  y  $v(t) = x'(t)$ , entonces  $x(t)$  y  $v(t)$  deben satisfacer el siguiente sistema

de ecuaciones:

$$\begin{cases} x'(t) = v(t) \\ v'(t) = -\frac{g}{l} \operatorname{sen}(x(t)). \end{cases} \quad (3.3)$$

**Ejemplo 3.1.3** En 1925 y 1926, Alfred J. Lotka y Vito Volterra respectivamente, introdujeron las ecuaciones de Lotka-Volterra. Se trata de un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden que se usan para describir dinámicas de sistemas biológicos en el que dos especies interactúan, una como presa y otra como depredador. Se definen como:

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)(\alpha - \beta y(t)) \\ y'(t) = -y(t)(\gamma - \delta x(t)) \end{cases} \quad (3.4)$$

La variable  $y$  representa el número de individuos de algún predador (por ejemplo, un lobo) y  $x$  es el número de sus presas (por ejemplo, conejos),  $t$  representa el tiempo; y  $\alpha, \beta, \gamma$  y  $\delta$  son parámetros (positivos)



Vito Volterra (1860-1940)

### 3.1.2 Sistemas de ecuaciones y ecuaciones de orden superior

Es posible convertir el sistema (3.1) de  $n$ -ecuaciones diferenciales de primer orden en una ecuación escalar de orden  $n$

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}). \quad (3.5)$$

y viceversa.

Para justificar la aseveración anterior supongamos que  $y = y(x)$  resuelven (3.5) y escribamos:

$$y_1 = y, y_2 = y', y_3 = y'', \dots, y_n = y^{(n-1)}.$$

Entonces notar que

$$\begin{cases} y'_1(x) &= y_2(x) \\ y'_2(x) &= y_3(x) \\ &\vdots \\ y'_{n-1}(x) &= y_n(x) \\ y'_n(x) &= f(x, y_1(x), \dots, y_n(x)) \end{cases}, \quad (3.6)$$

Recíprocamente, supongamos que  $y_1, \dots, y_n$  resuelven (3.1). Por simplicidad vamos a suponer que las  $f_j$  son independientes de  $x$ , el procedimiento general sigue las mismas líneas que el caso que discutimos aquí. Se toma  $y = y_n$  (podríamos usar cualquier  $y_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ ). Ahora derivamos sucesivamente  $n$ -veces respecto a  $x$  la ecuación para  $y_n$ , y reemplazamos cada derivada  $y'_j$  por  $f_j$  (vamos a omitir los argumentos de  $f_j$  que son en todos los casos  $(y_1, \dots, y_n)$ ):

$$\begin{aligned} y'_n(x) &= f_n(y_1, \dots, y_n) &=: g_1(y_1, \dots, y_n) \\ y''_n(x) &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_n}{\partial y_j} f_j + &=: g_2(y_1, \dots, y_n) \\ y'''_n(x) &= \sum_{k,j=1}^n \frac{\partial^2 f_n}{\partial y_k \partial y_j} f_k f_j + \sum_{k,j=1}^n \frac{\partial f_n}{\partial y_j} \frac{\partial f_j}{\partial y_k} f_k &=: g_k(y_1, \dots, y_n) \\ &\vdots &\vdots \\ y_n^{(n)}(x) &= \dots &=: g_n(y_1, \dots, y_n) \end{aligned}$$

Las igualdades anteriores tienen la estructura  $z = G(y)$ , donde  $y = (y_1, \dots, y_n)$ ,  $z = (y'_n, y''_n, \dots, y_n^{(n)})$  y  $G = (y_1, \dots, y_n)$ . Si la función  $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es invertible y escribimos  $H = G^{-1}$  entonces

$$y_n = H_n(z) = H_n(y'_n, y''_n, \dots, y_n^{(n)}).$$

La anterior es una ecuación escalar de orden  $n$  para  $y_n$ . Por consiguiente hemos logrado reducir el sistema de  $n$ -ecuaciones a una ecuación de orden  $n$ . Observar que si resolvemos esta ecuación, encontrando  $y_n$ , podemos hallar el resto de las incognitas  $y_j$ ,  $j = 1, \dots, n - 1$ , usando que  $y_j = H_j(y'_n, y''_n, \dots, y^{(n)}_n)$ .

**Ejemplo 3.1.4** Reduzcamos las ecuaciones de Lotka-Volterra a una ecuación de orden 2 y luego revirtamos el camino.

La primera parte la resolvemos con Sympy:

```

1 t=symbols('t')
2 y=Function('y')(t)
3 x=Function('x')(t)
4 alpha,beta,gamma,delta=symbols('alpha,beta,gamma,delta',positive=True)
5 ec=y.diff()+gamma*y-delta*x*y
6 ec1=alpha*x-beta*x*y
7 ec2=ec.diff(t)
8 ec3=ec2.subs(x.diff(),ec1)
9 ec4=(y+gamma*y)/delta/y #Esto es x
10 ec5=ec3.subs(x,ec4)
11 ec6=ec5.simplify()
12 ec6

```

scripts/Sist-Ecua.py

Resulta en

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) - \frac{d}{dt}y(t) + (-\alpha\gamma - \alpha)y(t) + (\beta\gamma + \beta)y^2(t) = 0 \quad (3.7)$$

El camino inverso es más sencillo. Llamamos  $z = y'$ . Usando las variables  $y, z$  la ecuación (3.7) se escribe

$$\begin{cases} y'(t) &= v(t) \\ v'(t) &= v + (\alpha\gamma + \alpha)y(t) - (\beta\gamma + \beta)y^2(t) \end{cases}$$

No llegamos a la ecuación de partida. Hay que tener presente que una ecuación tiene diferentes representaciones en diferentes variables y que las variables que hemos elegido para el camino de vuelta  $y, v$ , no son las originales del problema  $y, x$ .

## 3.2 Método de iteraciones de Picard

En esta sección vamos a describir la estrategia que emplearemos para la demostración de la existencia de soluciones. El método que seguiremos fue ideado por Émile Picard

Introducimos previamente algunas definiciones elementales.



Émile Picard (1856-1941)

**Definición 3.2.2** ea  $\alpha$  una función definida en un intervalo  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  con valores en  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 1$ , tal que cada componente es una función integrable. Entonces, como es usual, escribimos

$$\int_a^b \alpha(s)ds = \left( \int_a^b \alpha_1(s)ds, \dots, \int_a^b \alpha_n(s)ds \right)$$

Es un ejercicio muy sencillo demostrar que vale las propiedades elementales de las integrales, para esta extensión del concepto de integral a funciones con valores vectoriales. En particular vale el Teorema Fundamental del Cálculo: Si  $\alpha$  es continuamente diferenciable entonces

$$\int_a^b \alpha'(s)ds = \alpha(b) - \alpha(a).$$

Además vale la desigualdad triangular: si  $a < b$

$$\left\| \int_a^b \alpha(s)ds \right\| \leq \int_a^b \|\alpha(s)\| ds.$$

Nuestra intención es demostrar la existencia de soluciones de un PVI para el sistema de EDOs

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}, \quad (3.8)$$

donde  $f : \Omega \subset (a, b) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\Omega$  abierto,  $y : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$  (se debe satisfacer que  $(x, y(x)) \in \Omega$ , para  $x \in [a, b]$ ),  $x_0 \in (a, b)$  e  $y_0 \in \mathbb{R}^n$  son dados con  $(x_0, y_0) \in \Omega$ .

Integremos la ecuación diferencial en un intervalo de extremos  $x_0$  y  $x$  y tomando en consideración las condiciones iniciales obtenemos una nueva ecuación para  $y(x)$ , en este caso una ecuación integral :

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t))dt. \quad (3.9)$$

Esta ecuación presenta una estructura muy particular. Podemos pensar el miembro derecho de (3.9) como una transformación (función)  $T$  que lleva la función  $y = y(x)$  en la función

$$T(y)(x) := y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t))dt.$$

Pensando de esta manera (3.9) se escribe sencillamente

$$T(y) = y.$$

Vale decir, la ecuación integral expresa el hecho que  $T$  lleva a la función  $y$  en si misma. Esto en matemática es conocido como un punto fijo. En análisis numérico los puntos fijos son utilizados para resolver ecuaciones algebraicas del tipo  $h(x) = x$ , donde  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . En aquel contexto se ve que un procedimiento para aproximar soluciones es interar la función  $h$ , i.e. dado un  $x_0$  cualquiera considerar la sucesión de *aproximaciones sucesivas*

$$x_n = h(x_{n-1}), \quad n = 1, 2, \dots$$

El fundamento de proceder así es que si la sucesión  $x_n$  converge a algún valor  $x^*$  y si  $h$  es continua entonces  $x^*$  resuelve  $h(x) = x$  pues

$$h(x^*) = h\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} h(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = x^*. \quad (3.10)$$

Vamos a proceder por analogía y proponer el siguiente proceso iterativo que genera las funciones  $\varphi_k$ ,  $k = 0, 1, \dots$ :

$$\begin{cases} \varphi_0 &= y_0 \\ \varphi_{k+1}(x) &= y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi_k(t))dt. \end{cases} \quad (3.11)$$

Este proceso se denomina *método de las aproximaciones sucesivas de Picard* y fué propuesto por E. Picard en [?] y luego generalizado por Ernest Lindelöf en [?].

Deberemos indagar por condiciones que nos aseguren que la sucesión  $\varphi_k$  converja a una función  $\varphi$  y que esta función  $\varphi$  es solución del PVI. Antes de adentrarnos en los detalles de las demostraciones, constatemos que la idea funciona en algunos ejemplos sencillos.

### Ejemplo 3.2.5 Resolver

$$\begin{cases} y'(x) &= y(x) \\ y(0) &= y_0 \end{cases},$$

donde  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $y_0$  es un punto arbitrario de  $\mathbb{R}$ .



Ernst L. Lindelöf (1870–1946)

Aplicando el método de picard:

$$\begin{aligned}\varphi_0(x) &= y_0 \\ \varphi_1(x) &= y_0 + \int_0^x \varphi_0(t) dt = y_0(1+x) \\ \varphi_2(x) &= y_0 + \int_0^x \varphi_1(t) dt = y_0(1+x + \frac{x^2}{2}) \\ &\vdots \\ \varphi_k(x) &= y_0 + \int_0^x \varphi_{k-1}(t) dt = y_0(1+x + \cdots + \frac{x^k}{k!})\end{aligned}$$

Se aprecia que en  $\varphi_k$  aparecen las sumas parciales del desarrollo en serie de Taylor alrededor de 0 de la función exponencial. Luego tenemos que  $\varphi_k$  converge a  $y_0 e^x$  que es justamente la solución del PVI propuesto.

Más ejemplos serán tratados en la actividad práctica.

### 3.3 Teorema de punto fijo Banach

**Definición 3.3.3** ea  $(X, d)$  un espacio métrico completo. Una función  $K : X \rightarrow X$  se denominará una contracción si existe un  $\theta \in [0, 1)$  tal que

$$d(K(x), K(y)) \leq \theta d(x, y), \quad x, y \in X.$$

Dada una función  $K : X \rightarrow X$  escribiremos

$$K^n(x) = \underbrace{K(K(K \cdots K(x) \cdots))}_{n-\text{veces}}.$$

Cuando  $n = 0$  ponemos  $K^0(x) = x$ .

**Teorema 3.3.1 (Principio de contracción de Banach)** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico completo y  $K : X \rightarrow X$  una contracción. Entonces  $K$  tiene un único punto fijo  $x^*$ . Además para todo  $x$

$$d(K^n(x), x^*) \leq \frac{\theta^n}{1 - \theta} d(K(x), x).$$



Stefan Banach (1892–1945)

*Demostración.* Sea  $x \in X$  un punto arbitrario y definimos  $x_n := K^n(x)$ . Entonces si  $m < n$

$$\begin{aligned}d(K^n(x), K^m(x)) &\leq d(K^n(x), K^{n-1}(x)) + \cdots + d(K^{m+1}(x), K^m(x)) \\ &\leq \theta^{n-1} d(K(x), x) + \cdots + \theta^m d(K(x), x) \\ &\leq \frac{\theta^m}{1 - \theta} d(K(x), x)\end{aligned}$$

Como  $\theta < 1$  vemos que si  $m, n$  son suficientemente grandes podemos hacer que  $d(K^n(x), K^m(x))$  sea arbitrariamente chico. Hemos probado que la sucesión  $K^n(x)$  es de Cauchy, de allí tiene límite, al que llamaremos  $x^*$ . Que  $x^*$  es punto fijo se justifica como en (3.10) (notar que una contracción es continua).

Que el punto fijo es único, se deduce de suponer que existe otro  $z^*$  y aplicar que  $K$  es contracción

$$d(x^*, z^*) = d(K(x^*), K(z^*)) \leq \theta d(x^*, z^*) < d(x^*, z^*).$$

Lo que es una contradicción. □

**Corolario 3.3.1** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico completo y  $K : X \rightarrow X$  continua y  $K^m$  contracción para algún  $m \in \mathbb{N}$ . Entonces  $K$  tiene un único punto fijo  $x^*$  y para todo  $x \in X$  se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K^n(x) = x^*.$$

*Demostración.* Sea  $x^*$  el único punto fijo de  $K^m$  dado por el principio de contracción de Banach aplicado a  $K^m$ . Sean  $x \in X$  y  $0 \leq r < m$ . Consideremos las sucesiones  $\{K^{km+r}(x)\}_{k \in \mathbb{N}}$ . Tenemos  $m$  de estas sucesiones, una para cada valor de  $r = 0, \dots, m-1$ . Todas ellas son subsucesiones de  $\{K^n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Además

$$\bigcup_{r=0}^{m-1} \{K^{km+r}(x)\}_{k \in \mathbb{N}} = \{K^n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}.$$

Vamos a demostrar que estas  $m$  subsucesiones convergen todas a  $x^*$ . Esto es fácil consecuencia de que  $K^m$  es contracción. Pues de ello obtenemos que  $(K^m)^n(y) \rightarrow x^*$ , cuando  $n \rightarrow \infty$  para todo  $y \in X$ . Luego

$$\lim_{k \rightarrow \infty} K^{km+r}(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} (K^m)^k(K^r(x)) = x^*.$$

Esto establece que  $\lim_{n \rightarrow \infty} K^n(x) = x^*$ .

Veamos que  $x^*$  es punto fijo de  $K$ .

$$K(x^*) = K\left(\lim_{n \rightarrow \infty} K^n(x)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} K(K^n(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} K^{n+1}(x) = x^*.$$

Para la unicidad, observar que un punto fijo de  $K$  lo es de  $K^m$ . Cómo  $K^m$  tiene un único punto fijo, lo mismo podemos afirmar de  $K$ .  $\square$

**Definición 3.3.4** ea  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Diremos que  $f$  es *lipschitziana* (o que es una función Lipschitz) si existe una constante  $K \geq 0$  tal que

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\|, \quad \forall x, y \in \Omega.$$

Si  $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , diremos que  $f = f(t, x)$  es lipschitziana respecto a la segunda variable si existe  $K \geq 0$  tal que

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\|, \quad \forall (t, x), (t, y) \in \Omega.$$

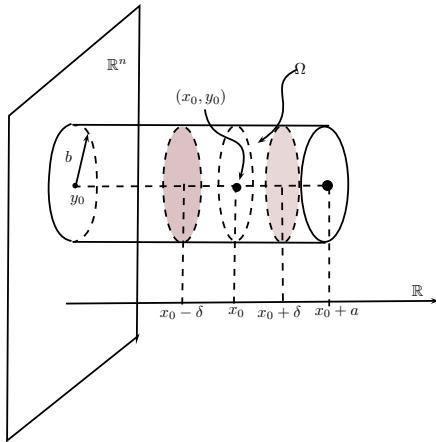
**Teorema 3.3.2 (Picard- Lindelöf)** Sean  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $y_0 \in \mathbb{R}^n$  y  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  continua y lipschitziana respecto a la segunda variable, donde  $\Omega = I_a \times B_b$ ,  $I_a = [x_0 - a, x_0 + a]$  y  $B_b = \{y \in \mathbb{R}^n | \|y - y_0\| \leq b\}$ . Como  $\Omega$  es compacto y  $f$  es continua, existe  $M \geq 0$  tal que  $\|f\| \leq M$ . Entonces existe una única solución del PVI:

$$\begin{cases} y'(x) &= f(x, y(x)), \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases},$$

en  $I_\delta = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  con  $\delta := \min\{a, b/M\}$ .

*Demostración.* Definamos

$$X = C(I_\delta, B_b) := \{\varphi | \varphi : I_\delta \rightarrow B_b \text{ continua}\}.$$

Figura 3.1: Conjunto  $I_\delta \times B_b$ **Ejercicio 3.3.1 a función**

$$d(\varphi_1, \varphi_2) := \max \{ \| \varphi_1(x) - \varphi_2(x) \| \mid x \in I_\delta \}$$

define una métrica sobre el conjunto  $X$  y con esta métrica  $(X, d)$  es completo.

Para  $\varphi \in X$ , definamos una nueva función  $K(\varphi)$  por:

$$K(\varphi)(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi(t)) dt.$$

**Afirmación 1:**  $K : X \rightarrow X$ .

En efecto, si  $x \geq x_0$  y  $x \in I_\delta$  (si  $x \leq x_0$  queda como ejercicio)

$$\| K(\varphi)(x) - y_0 \| \leq \int_{x_0}^x \| f(t, \varphi(t)) \| dt \leq M|x - x_0| \leq b.$$

Esto muestra que  $K(\varphi) : I_\delta \rightarrow B_b$ .

La continuidad se establece del siguiente modo. Si  $x_1 < x_2$

$$\| K(\varphi)(x_1) - K(\varphi)(x_2) \| \leq \int_{x_1}^{x_2} \| f(t, \varphi(t)) \| dt \leq M|x_1 - x_2|.$$

Lo que implica la continuidad. Entonces  $K(\varphi) \in X$ .

**Afirmación 2:**  $K^m$  es contracción para  $m$  suficientemente grande.

La afirmación es consecuencia de la siguiente desigualdad, para  $\varphi_1, \varphi_2 \in X$  y  $x \in I_\delta$

$$\| K^m(\varphi_1)(x) - K^m(\varphi_2)(x) \| \leq \frac{L^m |x - x_0|^m}{m!} d(\varphi_1, \varphi_2).$$

La prueba procede por inducción sobre  $m$ . Cuando  $m = 0$  es inmediata. Supuesta válida la desigualdad para  $m$  vemos que (otra vez asumimos  $x_0 \leq x$ )

$$\begin{aligned}
\|K^{m+1}(\varphi_1)(x) - K^{m+1}(\varphi)(x)\| &= \|K(K^m(\varphi_1))(x) - K(K^m(\varphi))(x)\| \\
&= \left\| \int_{x_0}^x f(t, K^m(\varphi_1)(t)) - f(t, K^m(\varphi_2)(t)) dt \right\| \\
&\leq \int_{x_0}^x \|f(t, K^m(\varphi_1)(t)) - f(t, K^m(\varphi_2)(t))\| dt \\
&\leq L \int_{x_0}^x \|K^m(\varphi_1)(t) - K^m(\varphi_2)(t)\| dt \\
&\leq \frac{L^{m+1}}{m!} d(\varphi_1, \varphi_2) \int_{x_0}^x |t - x_0|^m dt \\
&= \frac{L^{m+1} |x - x_0|^{m+1}}{(m+1)!} d(\varphi_1, \varphi_2)
\end{aligned}$$

Notar que  $L^m|x - x_0|^m/m!$  es el valor absoluto del término general de la serie de Taylor de  $e^{Lx}$  alrededor de  $x_0$ . Como esta serie tiene radio de convergencia infinito, el término general tiende a cero. Por consiguiente existe  $m$  suficientemente grande para que  $L^m|x - x_0|^m/m! < 1$ . Para este  $m$ ,  $K^m$  será contracción. Luego, por el Corolario 3.3.1, deducimos que  $K$  tiene un único punto fijo. Vale decir que existe  $y \in X$  con

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt.$$

Notar que  $y(x_0) = y_0$ , i.e.  $y$  satisface la condición inicial. Por el teorema fundamental del cálculo  $y'(x) = f(x, y(x))$ , i.e.  $y$  satisface la ecuación y por tanto, finalmente, es solución del PVI.  $\square$

**Corolario 3.3.2** Sea  $\Omega$  abierto de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  y  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  continua con  $\partial f_j / \partial y_k$  también continuas  $j, k = 1, \dots, n$ . Entonces para todo  $(x_0, y_0) \in \Omega$  existe un entorno  $V = [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times B_b(y_0)$  tal que el PVI

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases},$$

tiene solución única en  $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ . Además el gráfico de esta solución está contenido en  $V$ .

*Demostración.* Sea  $(x_0, y_0) \in \Omega$  arbitrario. Como  $\Omega$  es abierto, existen  $a, b > 0$  tal que  $[x_0 - a, x_0 + a] \times B_b(y_0) \subset \Omega$ . Como  $\partial f_j / \partial y_k$  son continuas y  $V$  es compacto, tenemos que existe  $M > 0$  con  $|\partial f_j / \partial y_k| \leq M$  en  $V$ ,  $j, k = 1, \dots, n$ . El Teorema del valor medio para funciones en varias variables implica que existe una constante  $C > 0$  tal que si  $(t, x), (t, z) \in V$

$$\|f(t, x) - f(t, z)\| \leq CM\|x - z\|.$$

i.e.  $f$  es Lipschitziana respecto a la segunda variable en  $V$ . La conclusión del Corolario sigue del Teorema de Picard-Lindelöf.  $\square$

# 4 Ecuaciones Lineales de Segundo Orden

## 4.1 Introducción

Me convertí en ateo porque como estudiante de post-grado en física cuántica, la vida parecía ser reducible a ecuaciones diferenciales de segundo orden. Matemáticas, química y física tenían todo y yo no veo ninguna necesidad de ir más allá de eso.

Francis Collins

**Definición 4.1.1 (Ecuación lineal general de segundo orden)**

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = r(x), \quad (4.1)$$

donde  $p, q, r$  son funciones definidas en un intervalo  $I = (a, b)$  de  $\mathbb{R}$  con valores en  $\mathbb{R}$ . Si  $r \equiv 0$  se llama homogénea

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = 0, \quad (4.2)$$

**Teorema 4.1.1 (Teorema de existencia y unicidad de soluciones)** Supongamos  $p, q, r$  continuas y acotadas sobre  $I$ . Sean  $x_0 \in I$  e  $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$  dados. Entonces existe una única solución del PVI

$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = r(x), & x \in I \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases}$$

*Demostración.* Es un caso particular del Teorema Picard-Lindelöf. Más específicamente de un ejercicio que se presentó en la actividad práctica. Llamando  $z = y'(x)$  el PVI propuesto se convierte en un PVI asociado a un sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} y'(x) = z(x) \\ z'(x) = -p(x)z(x) - q(x)y + r(x), \\ y(x_0) = y_0 \\ z(x_0) = y_1 \end{cases}$$

Es un sistema de la forma  $w'(x) = f(x, w(x))$  donde  $w(x) = (y(x), z(x))$  y  $f(x, w) = (z, -p(x)z - q(x)y + r(x))$ . Vamos a chequar que  $f$  es Lipschitz respecto a la segunda variable en  $I \times \mathbb{R}^2$ . Si  $(x, w_0), (x, w_1) \in I \times \mathbb{R}^2$  ( $w_0 = (z_0, y_0)$  y  $w_1 = (z_1, y_1)$ ) entonces:

$$\begin{aligned} \|f(x, w_1) - f(x, w_2)\| &\leq \sqrt{(z_1 - z_0)^2 + (p(x)(z_1 - z_0) + q(x)(y_1 - y_0))^2} \\ &\leq C\|w_1 - w_0\|, \end{aligned}$$

para una constante apropiada  $C$  que depende de una cota de  $|p(x)|, |q(x)|, x \in I$ . Cómo  $f$  es Lipschitz respecto a la segunda variable en todo  $\mathbb{R}^2$ , el sistema tiene una solución definida en todo  $I$ .

□

## 4.2 Estructura del conjunto de soluciones

**Teorema 4.2.2** Si  $y_1$  e  $y_2$  son soluciones de (4.2) y  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  entonces  $c_1y_1 + c_2y_2$  es solución. Vale decir, el conjunto de soluciones es un espacio vectorial. En particular  $y \equiv 0$  es una solución, a la que llamaremos *trivial*.

*Demostración.* El operador

$$L[y] := y'' + py' + qy$$

es lineal, por consiguiente  $L[c_1y_1 + c_2y_2] = c_1L[y_1] + c_2L[y_2] = 0$ . □

**Teorema 4.2.3** Supongamos que  $y_p$  es una solución particular de (4.1) y que  $y_g = y_g(x, c_1, c_2)$  es una solución general de (4.2). Entonces  $y = y_p + y_g$  es solución general de (4.1).

*Demostración.* El operador

$$L[y] := y'' + py' + qy$$

es lineal, por consiguiente  $L[y_g + y_p] = L[y_g] + L[y_p] = 0 + r = r$ . Recíprocamente supongamos  $y$  solución de  $L[y] = r$ , entonces  $L[y - y_p] = L[y] - L[y_p] = r - r = 0$ . Luego debe haber  $c_1$  y  $c_2$  con  $y(x) - y_p(x) = y_g(x, c_1, c_2)$ . □

Volviendo a las ecuaciones homogéneas, supongamos que tenemos dos soluciones de (4.2)  $y_1$  e  $y_2$ . Entonces la expresión

$$c_1y_1 + c_2y_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \tag{4.3}$$

es solución también. Notar que en la expresión aparecen dos constantes y habíamos dicho que era de esperar que la solución general de una ecuación de orden 2 contuviese precisamente dos constantes de integración. De modo que podemos conjeturar que (4.3) es solución general de (4.2). Hay una situación especial, si, por ejemplo,  $y_1 = ky_2$ ,  $k \in \mathbb{R}$ , entonces  $c_1y_1 + c_2y_2 = (c_1k + c_2)y_2 = cy_2$ . Vale decir la combinación lineal (4.3) termina siendo sólo combinación lineal de la función  $y_2$  y por ende siendo esencialmente una expresión uniparamétrica.

**Definición 4.2.2 (Independencia lineal)** Un conjunto finito de funciones  $\{y_1, \dots, y_n\}$  se dirá linealmente independiente sobre un conjunto  $I$ , si la única solución de  $c_1y_1(t) + \dots + c_ny_n(t) = 0$ , para  $t \in I$ , es  $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ .

**Definición 4.2.3 (Definición wronskiano)** Dadas  $n$  funciones  $\{y_1, \dots, y_n\}$  con dominio  $I$ , el wronskiano  $W(x) = W(y_1, y_2, \dots, y_n)(x)$  de estas funciones en un

punto  $x \in I$  se define por

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) & \cdots & y'_n(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

**Lema 4.2.1 (Propiedades Wronskiano I)** sea  $\{y_1, \dots, y_n\}$  un conjunto de  $n$  funciones. Si existe un  $x_0 \in I$  con  $W(x_0) \neq 0$  entonces  $\{y_1, \dots, y_n\}$  son linealmente independientes

*Demostración.* Supongamos que  $c_1y_1 + \cdots + c_ny_n \equiv 0$ . Derivando  $n - 1$  veces esta igualdad y evaluando el resultado en  $x_0$  obtenemos

$$c_1y_1(x_0) + \cdots + c_ny_n(x_0) = 0$$

$$c_1y'_1(x_0) + \cdots + c_ny'_n(x_0) = 0$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$c_1y_1^{(n-1)}(x_0) + \cdots + c_ny_n^{(n-1)}(x_0) = 0$$

Las igualdades anteriores dicen que el vector  $(c_1, \dots, c_n)^t$  pertenece al nucleo de la matriz

$$\begin{pmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \cdots & y_n(x_0) \\ y'_1(x_0) & y'_2(x_0) & \cdots & y'_n(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix}$$

Como por hipótesis la matriz es no singular, debe ocurrir que  $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ .  $\square$

**Teorema 4.2.4 (Teorema. Propiedades wronskiano II, Fórmula de Abel)** Supongamos que  $y_1$  e  $y_2$  son solución de

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = 0, \quad x \in I = (a, b) \quad (4.5)$$

Entonces existe  $c \in \mathbb{R}$  que satisface

$$W(y_1, y_2)(x) = ce^{-\int p dx}. \quad (4.6)$$

Esta expresión se denomina fórmula de Abel. En particular vale que

$$\exists x_0 \in I : W(x_0) \neq 0 \iff \forall x \in I : W(x) \neq 0.$$

*Demostración.* Tenemos que

$$W(x) = y_1(x)y'_2(x) - y'_1(x)y_2(x).$$

Derivando y usando (4.5)

$$\begin{aligned} W'(x) &= y_1y''_2 - y''_1y_2 \\ &= y_1(-py'_2 - qy_2) - y_2(-py'_1 - qy_1) \\ &= -pW. \end{aligned}$$

Vale decir  $W$  resuelve la ecuación  $W' = -pW$  la cual es fácilmente resoluble, mostrando su resolución que se satisface (4.6)  $\square$

**Teorema 4.2.5 (Propiedades wronskiano III)** Sean  $y_1$  e  $y_2$  soluciones de (4.5). Entonces son equivalentes

- A.  $y_1$  e  $y_2$  son linealmente independientes en  $I$ .
- B.  $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$  para todo  $x \in I$ .

*Demostración.* Que B implica A es consecuencia de la propiedad del wronskiano I. Veamos que A implica B. Supongamos que existe un  $x_0$  con  $W(x_0) = 0$ . Esto quiere decir que una de las columnas de la matriz wronskiana en  $x_0$  es múltiplo de la otra. Supongamos que  $y_2(x_0) = ky_1(x_0)$  e  $y'_2(x_0) = ky'_1(x_0)$ . Esto quiere decir que  $y_2$  y  $ky_1$  resuelven el mismo PVI. Por lo tanto  $y_2(x) = ky_1(x)$  para todo  $x$ . Lo que nos dice lo contrario de A  $\square$

**Teorema 4.2.6 (Estructura del conjunto de soluciones, ecuación homogénea)** Si  $y_1$  e  $y_2$  son soluciones linealmente independientes de

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = 0, \quad x \in I = (a, b)$$

entonces

$$y(x, c_1, c_2) = c_1y_1 + c_2y_2 \quad (4.7)$$

es solución general.

*Demostración.* Que la expresión (4.7) es solución ya lo hemos dicho. Restaría ver que cualquier solución se escribe como en (4.7). Sea  $y$  cualquier solución y  $x_0 \in I$ . La matriz wronskiana

$$\begin{pmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y'_1(x_0) & y'_2(x_0) \end{pmatrix}$$

Es no singular dado que el determinante es no nulo. Por este motivo el sistema

$$\begin{aligned} c_1y_1(x_0) + c_2y_2(x_0) &= y(x_0) \\ c_1y'_1(x_0) + c_2y'_2(x_0) &= y'(x_0) \end{aligned}$$

tiene solución para  $c_1$  y  $c_2$ . De este modo vemos que la función  $c_1y_1 + c_2y_2$  resuelve el PVI

$$\begin{cases} \frac{d^2z}{dx^2} + p(x)\frac{dz}{dx} + q(x)z = 0, & x \in I \\ z(x_0) = y(x_0) \\ z'(x_0) = y'(x_0) \end{cases}.$$

Evidentemente  $y$  es solución también, por el Teorema de Existencia y Unicidad vemos que  $y = c_1y_1 + c_2y_2$   $\square$

### 4.3 Reducción de orden

Como conclusión de los anterior, vemos que si queremos resolver (4.5) debemos conseguir dos soluciones linealmente independientes. Suponiendo que ya contamos con una solución no trivial vamos a describir un método que posibilita encontrar otra solución  $y_2$  linealmente independiente de  $y_1$ . El método consiste en proponer que  $y_2$  se escribe

$$y_2(x) = v(x)y_1(x).$$

Sustituyendo este ansatz en la ecuación

$$\begin{aligned} 0 &= y_2'' + py_2' + qy_2 \\ &= y_1v'' + 2v'y_1' + vy_1'' + pv'y_1 + pvy_1' + qvy_1 \\ &= y_1v'' + (2y_1' + py_1)v' + v(y_1'' + py_1' + qy_1) \\ &= y_1v'' + (2y_1' + py_1)v' \end{aligned}$$

La fórmula anterior es nuevamente una ecuación de segundo orden para  $v$ , pero en este caso afortunadamente contamos con herramientas para resolverla puesto que se trata de una ecuación donde la variable dependiente  $v$  no aparece explícitamente, sino que aparecen sus derivadas  $v'$  y  $v''$ . Hay que intentar la sustitución  $w = v'$ . Luego

$$y_1w' + (2y_1' + py_1)w = 0$$

Recordar que  $y_1$  la asumimos conocida, así  $2y_1' + py_1$  es también una función conocida. La ecuación es una ecuación lineal homogénea de primer orden. Usando la fórmula para resolver este tipo de ecuación, obtenemos

$$w(x) = Ce^{-\int \frac{y_1'}{y_1} + pdx} = Ce^{-2\ln|y_1|}e^{-\int pdx} = C\frac{1}{y_1^2}e^{-\int pdx}$$

Es suficiente encontrar sólo una función  $v$ , de allí podemos tomar  $C = 1$ .

$$w(x) = \frac{1}{y_1^2}e^{-\int pdx} \implies v(x) = \int \frac{1}{y_1^2}e^{-\int pdx} dx \quad (4.8)$$

Otra manera de testear la independencia lineal de dos funciones  $y_1$  e  $y_2$  es notar que si fueran linealmente dependientes e  $y_1 \neq 0$  en un conjunto  $J \subset I$  entonces  $y_2/y_1$  sería constante. Luego uno chequearía independencia si comprobase que  $y_2/y_1$  no es constante en algún subdominio  $J \subset I$ . En el caso anterior  $y_2/y_1 = v$ , luego deberíamos tener  $v$  no constante sobre algún subconjunto  $J$ . Pero  $v$  constante implicaría  $y_1^{-2}e^{-\int pdx} = 0$  y esto claramente no ocurre. De modo que por el método anterior encontramos dos soluciones independientes.

## 4.4 Ecuaciones homogéneas con coeficientes constantes

Consideramos la ecuación

$$y'' + py' + qy = 0, \quad p, q \in \mathbb{R} \quad (4.9)$$

Propongamos una solución de la forma

$$y(x) = e^{\lambda x}, \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

Reemplazando en la ecuación

$$(\lambda^2 + \lambda p + q)e^{\lambda x} = 0.$$

Se debe satisfacer la llamada *ecuación característica*

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0 \quad (4.10)$$

Tenemos tres casos acorde al valor de  $\Delta := p^2 - 4q$

A.  $\Delta = p^2 - 4q > 0$ , **raíces reales distintas**  $\lambda_1, \lambda_2$ . Este es el caso más sencillo de todos, obtenemos las soluciones

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x} \quad y \quad y_2(x) = e^{\lambda_2 x}.$$

Para chequear la independencia

$$\frac{y_2}{y_1} = e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x} \neq \text{cte.}$$

Luego

$$y(x, c_1, c_2) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}. \quad (4.11)$$

es solución general

B.  $\Delta = p^2 - 4q < 0$ , **raíces complejas conjugadas**  $\lambda_1 = \mu + i\nu, \lambda_2 = \mu - i\nu, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ . Proponemos una solución de la forma

$$y(x) = e^{\mu x} v(x)$$

Hagamos los cálculos con SymPy

```

2  >>> x,p,q=symbols('x,p,q')
3  >>> v=Function('v')(x)
4  >>> y=exp(-p/2*x)*v
>>> ecua=y.diff(x,2)+p*y.diff(x)+q*y
>>> simplify(ecua/exp(-p/2*x))

```

$$-\frac{p^2}{4}v(x) + qv(x) + \frac{d^2}{dx^2}v(x) = 0$$

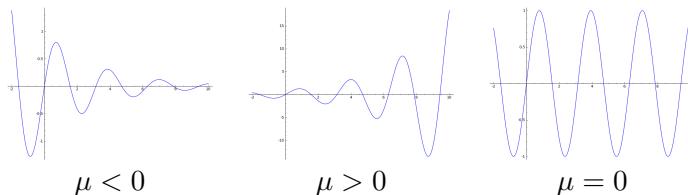
Como  $\nu^2 := -\frac{1}{4}(p^2 - 4q) > 0$ ,  $v$  resuelve la ecuación del oscilador armónico con frecuencia  $\nu$ . Recordar que la solución general para  $v$  es

$$v(x) = C_1 \cos \nu x + C_2 \operatorname{sen} \nu x,$$

y de allí

$$y(x) = e^{\mu x} \{C_1 \cos \nu x + C_2 \operatorname{sen} \nu x\} \quad (4.12)$$

Seguidamente presentamos las gráficas de las soluciones para distintos valores de  $\mu$ .



C.  $\Delta = p^2 - 4c = 0$ , **raíces iguales**. Conocemos una solución  $[y_1 = e^{-\frac{p}{2}x}]$ . Podemos hallar otra por el método de reducción de orden. Esto consiste en proponer otra solución de la forma  $y_2(x) = y_1(x)v(x)$  Dejemos que lo haga SymPy

```

2  >>> x,p=symbols('x,p')
3  >>> y=Function('y')(x)
4  >>> v=Function('v')(x)
5  >>> y=v*exp(-p/2*x)
>>> ecua=y.diff(x,2)+p*y.diff(x)+p**2/4*y
>>> ecuav=simplify(ecua/exp(-p/2*x))
>>> ecuav

```

Se obtiene

$$\frac{d^2}{dx^2}v(x) = 0.$$

La solución general para  $v$  es  $v = c_1 + c_2x$ . Así el método mencionado proporciona la solución extra

$$y_2(x) = xe^{-\frac{p}{2}x}.$$

## 4.5 Ecuación no homogénea

### 4.5.1 Método coeficientes indeterminados

Intentamos resolver

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = r(x), \quad (4.13)$$

donde  $p, q, r \in \mathbb{R}$ ,  $r \in C(I)$   $r \neq 0$ . El método consiste en buscar soluciones en la misma clase de funciones a la que pertenece  $r(x)$ . Funciona de manera metódica sólo para algunos tipos de funciones  $r(x)$ . Concretamente para  $r(x)$  combinación lineal de funciones polinómicas, exponenciales  $e^{\alpha x}$  o trigonométricas  $\cos \alpha x$  y  $\sin \alpha x$ . Lo vamos a ilustrar con ejemplos para cada caso.

- A. **Caso**  $r(x) = e^{ax}$  y  $a^2 + pa + q \neq 0$ . En esta situación se propone como solución una función de la forma  $y(x) = Ae^{ax}$ . Usamos SymPy para el cálculo

```

1 >>> x,p,q,a,A=symbols('x,p,q,a,A')
2 >>> y=A*x*exp(a*x)
3 >>> ecua=y.diff(x,2)+p*y.diff(x)+q*y-exp(a*x)
4 >>> ecua=simplify(ecua/exp(a*x))
5 >>> ecua
6 A*a**2 + A*a*p + A*q - 1
7 >>> solve(ecua,A)
8 [1/(a**2 + a*p + q)]

```

Si  $a^2 + pa + q \neq 0$ , encontramos la solución particular

$$y(x) = \frac{1}{(a^2 + pa + q)} e^{ax}.$$

- B. **Caso**  $r(x) = e^{ax}$  y  $a^2 + pa + q = 0$ . En esta situación diremos que la ecuación está en *resonancia*. Más generalmente, diremos que se presenta resonancia cuando  $r(x)$  es solución del problema homogéneo. Propongamos como solución  $y(x) = Axe^{ax}$ . Hagamos los cálculos con SymPy.

```

2 >>> x,p,q,a,A=symbols('x,p,q,a,A')
3 >>> y=A*x*exp(a*x)
4 >>> ecua=y.diff(x,2)+p*y.diff(x)+q*y-exp(a*x)
5 >>> ecua=simplify(ecua/exp(a*x))
6 >>> ecua
7 A*a*(a*x + 2) + A*p*(a*x + 1) + A*q*x - 1
8 >>> ecua.subs(q,-a**2 - a*p).simplify()
9 2*A*a + A*p - 1

```

Luego, si  $2a + p \neq 0$ ,  $y(x) = \frac{1}{2a+p}xe^{ax}$  resuelve el problema.

C. **Caso**  $r(x) = e^{ax}$ ,  $a^2 + pa + q = 0$  y  $2a + p = 0$ . Si  $2a + p = 0$ , como también  $a^2 + pa + q = 0$ , tenemos que  $a$  es una raíz doble de la ecuación  $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ . En este caso, proponemos como solución  $y(x) = Ax^2e^{ax}$ .

```

1 >>> x,p,q,a,A=symbols('x,p,q,a,A')
2 >>> y=A*x**2*exp(a*x)
3 >>> ecua=y.diff(x,2)+p*y.diff(x)+q*y-exp(a*x)
4 >>> ecua=simplify(ecua/exp(a*x))
5 >>> ecua
A*p*x*(a*x + 2) + A*q*x**2 + A*(a**2*x**2 + 4*a*x + 2) - 1
6 >>> ecua.subs([(q,-a**2 - a*p), (p,-2*a)]).simplify()
7 2*A - 1

```

Hay que tomar  $y(x) = \frac{1}{2}x^2e^{ax}$

D. **Caso**  $r(x) = \sin bx$ . Proponemos

$$y(x) = A \cos x + B \sin x,$$

como candidato a solución.

```

1 >>> x,p,q,a,b,A,B=symbols('x,p,q,a,b,A,B')
2 >>> y=A*cos(b*x)+B*sin(b*x)
3 >>> ecua=y.diff(x,2)+p*y.diff(x)+q*y-sin(b*x)
4 >>> ecua.simplify()
5 -b**2*(A*cos(b*x) + B*sin(b*x)) - b*p*(A*sin(b*x) -
6 B*cos(b*x)) + q*(A*cos(b*x) + B*sin(b*x)) - sin(b*x)

```

La expresión en el miembro de la izquierda es una combinación lineal de las funciones  $\cos bx$  y  $\sin bx$ . Como estas funciones son linealmente independientes debemos tener que los coeficientes en la combinación lineal deben ser cero

```

1 >>> ecua.expand().coeff(sin(b*x))
2 -A*b*p - B*b**2 + B*q - 1
3 >>> ecua.expand().coeff(cos(b*x))
4 -A*b**2 + A*q + B*b*p

```

Obtenemos un sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} -Abp - (b^2 - q)B = 1 \\ Bbp - (b^2 - q)A = 0 \end{cases} \quad (4.14)$$

Para que el sistema tenga solución la matriz de coeficientes debe ser no singular

$$0 \neq \det \begin{pmatrix} -bp & -(b^2 - q) \\ -(b^2 - q) & bp \end{pmatrix} = -(b^2 p^2 + (b^2 - q)^2)$$

Podemos suponer  $b \neq 0$ , de lo contrario la ecuación hubiese sido homogénea. entonces la condición de arriba ocurre si y sólo si  $p \neq 0$  o  $b^2 \neq q$ . En esa situación encontraremos una solución de la forma

$$y(x) = A \cos bx + B \sin bx,$$

donde  $A$  y  $B$  resuelven (4.14).

Cuando  $p = 0$  y  $b^2 = q$  el sistema (4.14) puede no tener solución. Notar que en este caso la ecuación queda

$$y'' + b^2y = \operatorname{sen} bx$$

Es una ecuación de un oscilador armónico no homogénea. Habíamos visto que justamente  $r(x) = \operatorname{sen} bx$  es una solución del problema homogéno. Nuevamente estamos en una situación de resonancia. Como en casos anteriores hay que proponer como solución

$$y(x) = x(A \cos x + B \operatorname{sen} x),$$

#### E. Caso $r(x) = \operatorname{sen} bx$ con resonancia

```

2  >>> x,b,A,B=symbols('x,b,A,B')
3  >>> y=x*(A*cos(b*x)+B*sin(b*x))
4  >>> ecua=y.diff(x,2)+b**2*y-sin(b*x)
5  >>> eq1=ecua.expand().coeff(sin(b*x))
6  >>> eq2=ecua.expand().coeff(cos(b*x))
7  >>> H=solve([eq1,eq2],[A,B])
8  >>> H
9  {B: 0, A: -1/(2*b)}
10 >>> y.subs(H)
11 -x*cos(b*x)/(2*b)
```

Encontramos la solución general

$$y(x) = -\frac{x}{2b} \cos bx.$$

El caso donde  $r(x) = \cos bx$  se trata de manera completamente similar.

F. Caso  $r(x)$  polinomio Hay que proponer como solución un polinomio, en primera instancia, del mismo grado.

Supongamos

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p \frac{dy}{dx} + q(x)y = c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n \quad (4.15)$$

Se propone  $y = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ . Luego

$$\begin{aligned} 2a_2 + 3 \cdot 2x + \cdots + n(n-1)x^{n-2} + \\ pa_1 + p2a_2x + \cdots + pna_nx^{n-1} + \\ qa_0 + qa_1x + \cdots + qa_nx^n = c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n \end{aligned}$$

Como las funciones  $1, x, \dots, x^n$  son linealmente independientes, los coeficientes en ambos lados de la igualdad deben ser iguales.

$$\begin{aligned} 2a_2 + pa_1 + qa_0 &= c_0 \\ 3 \cdot 2 + 2pa_2 + qa_1 &= c_1 \\ &\vdots \\ n(n-1) + p(n-1)a_{n-1} + qa_{n-2} &= c_{n-2} \\ pna_n + qa_{n-1} &= c_{n-1} \\ qa_n &= c_n \end{aligned}$$

Es útil escribir estas igualdades matricialmente.

$$\begin{pmatrix} q & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & q & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & q & pn & \\ \vdots & & & & & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{pmatrix}$$

Es un sistema triángular superior que se resuelve por sustitución ascendente. Esto siempre que  $q \neq 0$ . En caso contrario la matriz es singular y es posible que el sistema no tenga solución.

El caso  $q = 0$  es una forma de resonancia. Puede ser tratado como las anteriores resonancias, pero notando que la ecuación se reduce a  $y'' + py' = r$  conviene tomar  $v = y'$  como nueva variable dependiente y reducir la ecuación a una de primer orden.

Por último señalemos que si deseamos resolver un problema de la forma

$$L[y] \equiv y'' + py' + qy = r_1(x) + \cdots + r_n(x),$$

donde las funciones  $r_i$  son de alguna de las formas descriptas en los casos previos, entonces la linealidad de  $L$  implica que, si  $y_i$  resuelve  $L[y_i] = r_i$ ,  $y = y_1 + \cdots + y_n$  resuelve la ecuación deseada.

### 4.5.2 Método de variación de los parámetros

Queremos resolver la ecuación

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = r(x). \quad (4.16)$$

Supongamos que contamos con un par de soluciones  $y_1, y_2$  linealmente independientes de la ecuación homogénea asociada

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0. \quad (4.17)$$

El método de variacion de los parámetros consiste en proponer una solución de la forma

$$y(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x). \quad (4.18)$$

Hay dos funciones incógnitas  $c_1$  y  $c_2$ , pero sólo una ecuación. Tendremos por esto libertad de introducir otra condición que consideremos conveniente. Tenemos

$$y' = c'_1y_1 + c_1y'_1 + c'_2y_2 + c_2y'_2.$$

Pidamos que

$$c'_1y_1 + c'_2y_2 = 0. \quad (4.19)$$

Supuesta esta igualdad

$$y' = c_1y'_1 + c_2y'_2.$$

Derivando

$$y'' = c'_1y'_1 + c'_2y'_2 + c_1y''_1 + c_2y''_2.$$

Entonces

$$\begin{aligned} r(x) &= y'' + py' + qy \\ &= c'_1y'_1 + c'_2y'_2 + c_1y''_1 + c_2y''_2 + p(c_1y'_1 + c_2y'_2) + q(c_1y_1 + c_2y_2) \\ &= c_1(y''_1 + py'_1 + qy_1) + c_2(y''_2 + py'_2 + qy_2) + c'_1y'_1 + c'_2y'_2 \\ &= c'_1y'_1 + c'_2y'_2 \end{aligned}$$

Esta ecuación junto a (4.19) nos dan el sistema

$$\begin{cases} c'_1 y_1 + c'_2 y_2 = 0 \\ c'_1 y'_1 + c'_2 y'_2 = r \end{cases} \quad (4.20)$$

Las incógnitas son  $c'_1$  y  $c'_2$ . El determinante de la matriz de coeficientes es precisamente el Wronskiano  $W$  de las soluciones  $y_1$  e  $y_2$ , por la suposición de independencia  $W \neq 0$  y por lo tanto el sistema tiene solución única. Se tiene

$$c'_1 = -\frac{\det \begin{pmatrix} 0 & y_2 \\ r & y'_2 \end{pmatrix}}{W} = -\frac{ry_2}{W}$$

y

$$c'_2 = -\frac{\det \begin{pmatrix} y_1 & 0 \\ y'_1 & r \end{pmatrix}}{W} = \frac{ry_1}{W}$$

En consecuencia

$$c_1 = - \int \frac{ry_2}{W} dx \quad (4.21)$$

y

$$c_2 = \int \frac{ry_1}{W} \quad (4.22)$$

Usando estas fórmulas y (4.18) obtenemos una solución particular del sistema. La solución general es la suma de la particular más una solución general del homogéneo. Esta última solución general se escribe como una combinación lineal genérica entre  $y_1$  e  $y_2$ .

**Ejemplo 4.5.1** Resolver el siguiente pvi  $y'' + y = \csc x$ ,  $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$  y  $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ . La ecuación homogénea asociada tiene el par  $y_1(x) = \cos(x)$  e  $y_2(x) = \sin(x)$  de soluciones linealmente independientes. El wronskiano es  $W \equiv 1$  y entonces una solución particular es

$$\begin{aligned} y(x) &= - \int \frac{ry_2}{W} dx y_1 + \int \frac{ry_1}{W} dx y_2 \\ &= - \int dx \cos(x) + \int \frac{1}{\tan(x)} dx \sin(x) \\ &= -x \cos(x) + \ln(\sin(x)) \sin(x). \end{aligned}$$

La solución general es

$$y(x) = -x \cos(x) + \ln(\sin(x)) \sin(x) + c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x).$$

Las condiciones  $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$  y  $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$  nos conducen a  $c_2 = 0$  y  $c_1 = \frac{\pi}{2}$ .

## 4.6 Conclusiones

- A. Si podemos encontrar dos soluciones linealmente independientes de una ecuación lineal homogénea de segundo orden, tenemos la solución general a través de combinaciones lineales.
- B. Si tenemos una solución no trivial de una ecuación lineal homogénea de segundo orden podemos hallar otra por el método de reducción de orden.

- C. Podemos resolver completamente una ecuación lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes.
- D. Podemos resolver algunos problemas no homogéneos por el método de coeficientes indeterminados.
- E. Si conocemos las soluciones del problema homogéneo podemos resolver, en teoría, el no homogéneo para cualquier  $r(x)$  por el método de variación de los parámetros

## 4.7 Aplicaciones

### 4.7.1 Vibraciones mecánicas

**Problema** Estudiar el movimiento de un resorte (cómo el de la unidad anterior) pero suponer que además de actuar sobre la masa la fuerza elástica del resorte, tenemos una fuerza de fricción debida a la resistencia del medio. Por la acción de esta fuerza, se dice que es un sistema resorte-masa amortiguado. Además suponemos que hay otra fuerza  $F$  externa y que sólo depende de  $t$ . Por ejemplo si el resorte se colocase verticalmente y se dejase suspendida la masa,  $F$  sería la fuerza de gravedad. Si la masa estuviese hecha de metal,  $F$  podría ser una fuerza provista por un imán. Por la acción de esta fuerza el sistema se dice forzado. Por consiguiente el sistema completo, con la acción de las tres fuerzas, se denomina un sistema resorte-masa, amortiguado y forzado.

La fuerza elástica del resorte se modeliza con la Ley de Hooke. Para la amortiguación, supongamos que el módulo de la fuerza es proporcional a la velocidad de la masa. La constante de proporcionalidad  $c$  se llama coeficiente de viscosidad. La dirección y sentido de la fuerza amortiguadora es siempre contraria al movimiento. Por el principio de conservación de la energía, vemos que la fuerza de amortiguación siempre realiza un trabajo  $W$  negativo, por consiguiente hace perder energía cinética. De la fuerza externa  $F$  no sabemos nada en principio. Por todo lo expuesto, si ponemos un sistema de coordenadas con origen en la posición de equilibrio del sistema masa-resorte y si  $x(t)$  es la posición de la masa en el momento  $t$ , la ecuación que gobierna el sistema masa-resorte con amortiguación y forzamiento es

$$mx''(t) = \underbrace{-kx(t)}_{\text{2da Ley Newton}} + \underbrace{-cx'(t)}_{\text{Amortiguación}} + \underbrace{F(t)}_{\text{Fuerza externa}} \quad (4.23)$$

#### 4.7.1.1 Vibraciones amortiguadas no forzadas ( $c > 0, F = 0$ )

Escribamos la ecuación (4.23) de la siguiente forma

$$x''(t) + 2\mu x'(t) + \omega^2 x = 0 \quad \mu := \frac{c}{2m}, \omega := \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (4.24)$$

Las raíces de la ecuación característica son

$$\lambda_{1,2} = -\mu \pm \sqrt{\Delta}, \quad \Delta := \mu^2 - \omega^2$$

**Caso**  $\Delta > 0$ . Aquí la viscosidad es “grande” relativa a la rigidez  $k$ . Se dice que el sistema está sobreamortiguado. En este caso tenemos dos soluciones linealmente independientes del problema homogéneo y la solución general de este es de la forma

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

Notar que  $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ . Supongamos que el sistema masa-resorte parte del resreso  $x'(0) = 0$  y de una posición indeterminada  $x_0$ . Resolvamos este pvi

```

1  >>> from sympy import *
2  >>> init_printing()
3  >>> lambda1,lambda2,t,x0,c1,c2=symbols('lambda1,lambda2,t,x0,c1,c2')
4  >>> x=c1*exp(lambda1*t)+c2*exp(lambda2*t)
5  >>> C=solve([x.subs(t,0)-x0,x.diff(t).subs(t,0)], [c1,c2])
6  >>> C

```

$$\left\{ c_1 : -\frac{\lambda_2 x_0}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad c_2 : \frac{\lambda_1 x_0}{\lambda_1 - \lambda_2} \right\}$$

```
>>> x=x.subs(C[0])
```

$$x(t) = x_0 \left\{ \frac{\lambda_1 e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2} - \frac{\lambda_2 e^{\lambda_1 t}}{\lambda_1 - \lambda_2} \right\} \quad (4.25)$$

```

1 >>> x=x.subs({lambda1:-1,lambda2:-2,x0:1})
2 >>> plot(x,(t,0,10))

```

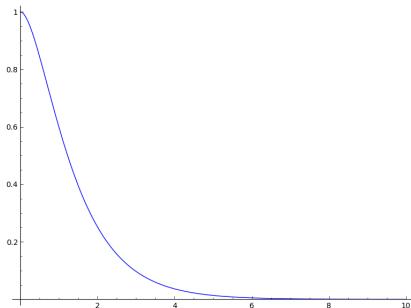


Figura 4.1: Vibraciones amortiguadas no forzadas ( $c > 0, F = 0$ )

Figura 4.2: Masa-resorte sobreamortiguado

Como se observa en la gráfica 4.1 y la animación 4.2 la masa ejecuta una oscilación, lo cual le demanda un tiempo infinito. Podría haber pasado por la posición de equilibrio

sólo en el pasado, puesto que  $x(t) = 0$  cuando

$$t = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_2} < 0$$

**Caso  $\Delta = 0$ .** En esta situación se dice que hay amortiguación crítica. Las raíces son iguales  $\lambda_1 = \lambda_2 = -\mu$ . Sabemos que

$$x_1(t) = c_1 e^{-\mu t} + c_2 t e^{-\mu t} = e^{-\mu t} \{c_1 + c_2 t\} \quad (4.26)$$

Nuevamente la solución puede pasar a lo sumo una vez por la posición de equilibrio, siempre y cuando  $C_2 \neq 0$ . El comportamiento cualitativo de la solución es muy parecido al caso anterior.

**Caso  $\Delta < 0$ , caso subamortiguado.**  $\lambda_{1,2} = -\mu \pm \nu i$  con  $\nu = \sqrt{|\Delta|} = \sqrt{|\omega^2 - \mu^2|}$ . La solución general viene dada por

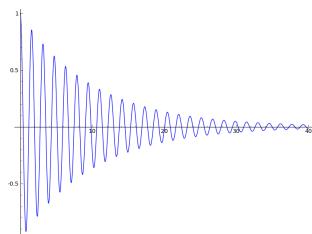
$$x(t) = e^{-\mu t} \{c_1 \cos \nu t + c_2 \sin \nu t\} \quad (4.27)$$

Esta función tiene por gráfica una onda sinusoidal modulada por una función exponencial decreciente.

```

2  >>> c1,c2,mu,nu,x0,t=symbols('c1,c2,mu,nu,x0,t')
3  >>> x=exp(-mu*t)*(c1*cos(nu*t)+c2*sin(nu*t))
4  >>> C=solve([x.subs(t,0)-x0,x.diff(t).subs(t,0)],[c1,c2])
5  >>> x=x.subs(C).subs({mu:1,nu:4,x0:1})
6  >>> plot(x,(t,0,100))

```



Vibraciones amortiguadas no forzadas ( $c > 0, F = 0$ )

Figura 4.3: Masa-resorte subamortiguado

Se suele escribir la ecuación (4.27) de otra forma. Expresemos el vector  $(c_1, c_2)$  en coordenadas polares.

$$c_1 = \rho \cos \alpha, \quad c_2 = \rho \sin \alpha.$$

Entonces usando las fórmulas de adición de las funciones trigonométricas

$$x(t) = e^{-\mu t} \{c_1 \cos \nu t + c_2 \operatorname{sen} \nu t\} = \boxed{\rho e^{-\mu t} \cos(\nu t - \alpha)}.$$

Llamaremos este régimen *movimiento quasi-oscilatorio*. Se ejecutan vibraciones, que se disipan con el tiempo, de frecuencia

$$f = \frac{1}{\text{período}} = \frac{\nu}{2\pi}, \quad \nu = \sqrt{\omega^2 - \mu^2} = \sqrt{\left(\frac{k}{m}\right)^2 - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}.$$

En lugar de la frecuencia se suele considerar la frecuencia angular que se define como  $2\pi f$ . La ventaja de esta definición es que la frecuencia angular de la función de arriba es  $\nu$ .

**Ejercicio:** Demostrar que en cualquiera de las situaciones descriptas,  $x(t) \rightarrow 0$  y  $x'(t) \rightarrow 0$ , cuando  $t \rightarrow \infty$ . Es decir, el movimiento se va deteniendo.

#### 4.7.1.2 Vibraciones no amortiguadas y forzadas ( $c = 0, F \neq 0$ )

Vamos a considerar una fuerza externa oscilatoria de frecuencia angular  $\omega_0$  y amplitud  $F_0$ . Tenemos que resolver

$$\boxed{x''(t) + \omega^2 x(t) = F_0 \cos(\omega_0 t)}. \quad (4.28)$$

Usaremos el método de coeficientes indeterminados. Recordar que si  $\omega = \omega_0$  estamos en resonancia. Tendremos que considerar ese caso por separado. Supongamos pues  $\omega \neq \omega_0$ . Tenemos que reemplazar en la ecuación

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \operatorname{sen}(\omega_0 t),$$

y hallar  $A$  y  $B$  que logren que  $x(t)$  sea solución. Usamos SymPy

```

1 >>> from sympy import *
2 >>> init_printing()
3 >>> t, omega, omega0, F0, A, B = symbols('t, omega, omega0, F0, A, B')
4 >>> x=A*cos(omega0*t)+B*sin(omega0*t)
5 >>> eq=x. diff(t,2)+omega**2*x-F0*cos(omega0*t)
6 >>> eqL1=eq. factor(). coeff(sin(omega0*t))
7 >>> eqL2=eq. factor(). coeff(cos(omega0*t))
8 >>> Incog=[A,B]
9 >>> Ecuas=[eqL1, eqL2]
>>> Matrix([[ecu.coeff(inco) for inco in Incog] for ecu in Ecuas])

```

La matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones para  $A$  y  $B$  es

$$\begin{bmatrix} 0 & \omega^2 - \omega_0^2 \\ \omega^2 - \omega_0^2 & 0 \end{bmatrix}$$

claramente es una matriz no singular, cuando  $\omega \neq \omega_0$ , y por consiguiente en no resonancia tiene una solución

```

1 >>> SolAB=solve([eqL1, eqL2],[A,B])
2 >>> x=x. subs(SolAB)
3 >>> x

```

$$x(t) = \frac{F_0 \cos(\omega_0 t)}{\omega^2 - \omega_0^2}.$$

La solución general del problema es la solución particular que acabamos de obtener más una solución general del homogéneo que sabemos es una combinación lineal generica entre  $\cos \omega t$  y  $\operatorname{sen} \omega t$ .

$$x(t) = \frac{F_0 \cos(\omega_0 t)}{\omega^2 - \omega_0^2} + c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t). \quad (4.29)$$

Como ya hemos visto, considerando las coordenadas polares  $\rho$  y  $\alpha$  de  $c_1, c_2$  podemos reescribir la solución

$$x(t) = \frac{F_0 \cos(\omega_0 t)}{\omega^2 - \omega_0^2} + \rho \cos(\omega t - \alpha)$$

Vemos que el movimiento es la superposición de dos movimientos oscilatorios de frecuencias  $\omega$ , que se denomina la *frecuencia natural* del resorte, y  $\omega_0$  que se denomina *frecuencia impresa*.

Resolvamos el pvi

$$\begin{cases} x''(t) + \omega^2 x(t) = F_0 \cos(\omega_0 t), \\ x'(0) = x(0) = 0 \end{cases}$$

```

1 >>> from sympy import *
2 >>> init_printing()
3 >>> var('t, c1, c2, omega, omega0, F0')
4 >>> x=F0/(omega**2-omega0**2)*cos(omega0*t)+c1*cos(omega*t)+c2*sin(omega*t)
5 >>> C=solve([x.subs(t,0),x.diff(t).subs(t,0)], [c1,c2])
6 >>> x=x.subs(C)
7 >>> x

```

$$x(t) = -\frac{F_0 \cos(\omega t)}{\omega^2 - \omega_0^2} + \frac{F_0 \cos(\omega_0 t)}{\omega^2 - \omega_0^2}$$

Ahora usemos la identidad  $\cos(a-b) - \cos(a+b) = 2 \sin a \sin b$ , con  $a = \frac{1}{2}(\omega + \omega_0)$  y  $b = \frac{1}{2}(\omega - \omega_0)$ . Deducimos

$$x(t) = \frac{2F_0}{\omega^2 - \omega_0^2} \sin\left(\frac{\omega - \omega_0}{2}t\right) \sin\left(\frac{\omega + \omega_0}{2}t\right). \quad (4.30)$$

Esta expresión la podemos ver como una onda de frecuencia grande  $\omega + \omega_0$  modulada por una de frecuencia chica  $\omega - \omega_0$ .

```

1 x=x.subs({F0:1, omega:1, omega0:.9})
2 plot(x,(t,0,200))

```

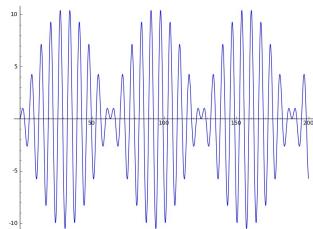


Figura 4.4: Fenómeno de batido

Calculemos el límite  $\lim_{\omega_0 \rightarrow \omega} x(t)$ ,

```
>>> limit(x0, omega0, omega)
```

$$x(t) = \frac{F_0 t \sin(\omega t)}{2\omega}$$

El caso  $\omega = \omega_0$  es el caso con resonancia, que debemos resolver, como fue indicado, proponiendo como solución  $y(x) = x(A \cos x + B \sen x)$ . El siguiente código SymPy muestra que la solución es la misma función que la obtenida por el proceso de límite de los casos sin resonancia.

```

1 >>> var('t, omega, F0, A, B')
2 >>> x=t*(A*cos(omega*t)+B*sin(omega*t))
3 >>> eq=x. diff(t,2)+omega**2*x-F0*cos(omega*t)
4 >>> eqL1=eq. factor(). coeff(sin(omega*t))
5 >>> eqL2=eq. factor(). coeff(cos(omega*t))
6 >>> SolAB=solve([eqL1, eqL2],[A,B])
7 >>> x=x. subs(SolAB)
```

Se producen “vibraciones” no acotadas.

```
>>> plot(x. subs({omega:1, F0:1}), (t, 0, 100))
```

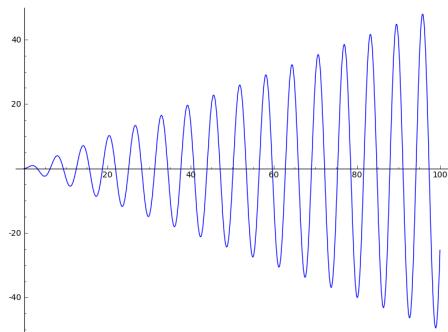


Figura 4.5: Resonancia

En la wiki Hearing a trigonometric identity se puede escuchar ondas sonoras con los fenómenos de resonancia y batido.

#### 4.7.1.3 Vibraciones amortiguadas y forzadas ( $c > 0, F \neq 0$ )

Vamos a considerar una fuerza externa oscilatoria de frecuencia  $\omega_0$  y amplitud  $F_0$ . Tenemos que resolver

$$x''(t) + 2\mu x'(t) + \omega^2 x(t) = F_0 \cos(\omega_0 t). \quad (4.31)$$

Proponemos por solución  $x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sen(\omega_0 t)$ .

```

1 >>> var('t, mu, omega, omega0, F0, A, B')
2 >>> x=A*cos(omega0*t)+B*sin(omega0*t)
3 >>> eq=x. diff(t,2)+2*mu*x. diff(t)+omega**2*x-F0*cos(omega0*t)
4 >>> eqL1=eq. factor(). coeff(sin(omega0*t))
5 >>> eqL2=eq. factor(). coeff(cos(omega0*t))
6 >>> Incog=[A,B]
7 >>> Ecuas=[eqL1, eqL2]
>>> M=Matrix([[ecu. coeff(inco) for inco in Incog] for ecu in Ecuas])
```

<sup>9</sup> | >>> M.det()

La matriz  $M$  del sistema lineal que satisfacen las incógnitas  $A$  y  $B$  tiene determinante

$$\det(M) = -4\mu^2\omega_0^2 - \omega^4 + 2\omega^2\omega_0^2 - \omega_0^4.$$

No queda claro si, eventualmente, puede ser singular. Calculando las posibles soluciones para  $\omega$  de  $\det(M) = 0$

<sup>1</sup> | >>> solve(M.det(), omega)

$$\left[ -\sqrt{-2i\mu\omega_0 + \omega_0^2}, \quad \sqrt{-2i\mu\omega_0 + \omega_0^2}, \quad -\sqrt{2i\mu\omega_0 + \omega_0^2}, \quad \sqrt{2i\mu\omega_0 + \omega_0^2} \right]$$

son todas complejas no reales, por consiguiente la matriz es siempre no singular.

<sup>1</sup> | >>> SolAB=solve([eqL1, eqL2], [A, B])  
<sup>2</sup> | >>> x.subs(SolAB)

$$x(t) = \frac{2F_0\mu\omega_0 \sin(\omega_0 t)}{4\mu^2\omega_0^2 + (\omega^2 - \omega_0^2)^2} + \frac{F_0(\omega^2 - \omega_0^2) \cos(\omega_0 t)}{4\mu^2\omega_0^2 + (\omega^2 - \omega_0^2)^2} \quad (4.32)$$

Es un movimiento oscilatorio de frecuencia angular  $\omega_0$ . Podemos escribir  $x(t) = \rho \cos(\omega_0 t - \alpha)$ , donde  $(\rho, \alpha)$  son las coordenadas polares de  $(A, B)$ . En particular la amplitud de la oscilación viene dada por  $\rho = \sqrt{A^2 + B^2}$ . Recurrimos nuevamente a SymPy para calcular  $\rho$ .

<sup>1</sup> | >>> rho=sqrt(A\*\*2+B\*\*2).subs(SolAB).simplify()  
<sup>2</sup> | >>> rho

$$\rho(\omega_0) = \frac{F_0}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\mu^2\omega_0^2}}$$

Grafiquemos la función  $\rho(\omega_0)$  para  $\omega = 5$  y  $\mu = 0,1$ .

<sup>1</sup> | >>> plot(rho.subs({F0:1, mu:.1, omega:5}), (omega0, 0, 10))

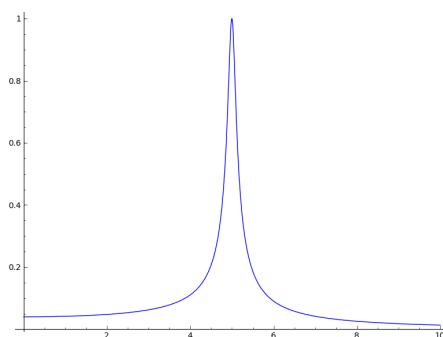


Figura 4.6: Gráfico amplitud vs. frecuencia, resorte amortiguado y forzado

La función tiene un notorio máximo cerca de  $\omega_0 = 5$ . Seguramente es debido a la aparición de resonancias. Hallemos el punto de máximo exacto, primero encontraremos puntos críticos.

```
>>> sol=solve(rho.diff(omega0),omega0)
>>>sol
```

$$\left[ 0, -\sqrt{-2\mu^2 + \omega^2}, \sqrt{-2\mu^2 + \omega^2}, -\sqrt{\infty}\sqrt{F_0^2 - 2\mu^2 + \omega^2}, \sqrt{\infty}\sqrt{F_0^2 - 2\mu^2 + \omega^2} \right]$$

El único lícito, si  $2\mu^2 < \omega$ , es  $\hat{\omega}_0 = \sqrt{-2\mu^2 + \omega^2}$ . Podemos constatar el carácter, si es máximo/mínimo o ninguna de estas opciones. Calculando la derivada segunda

```
>>> rho.diff(omega0,2).subs(omega0,sol[2])
```

$$\frac{2\sqrt{\frac{F_0^2}{4\mu^4+4\mu^2(-2\mu^2+\omega^2)}}(4\mu^2-2\omega^2)}{4\mu^4+4\mu^2(-2\mu^2+\omega^2)}$$

vemos que es claramente negativa. Luego tenemos un máximo local en  $\hat{\omega}_0$ . Comparando el valor de  $\rho(\hat{\omega}_0)$  con los de  $\rho(0)$  y  $\rho(+\infty)$  determinamos si es máximo global. Un cálculo, que podemos hacer con SymPy, nos muestra que

$$\lim_{\omega_0 \rightarrow \infty} \rho(\omega_0) = 0 < \frac{F_0}{\omega^2} = \rho(0) < \frac{1}{2} \frac{F_0}{\mu \sqrt{\omega^2 - \mu^2}} = \rho(\hat{\omega}_0).$$

En consecuencia  $\hat{\omega}_0$  es máximo absoluto.

En el ejemplo que graficamos el máximo ocurre en

```
>>> sol[2].subs({mu:.1, omega:5})
4.99799959983992
```

Vale decir, un oscilador armónico en reposo es más sensible a excitaciones en ciertas frecuencias, aproximadamente igual a la frecuencia natural del resorte cuando el coeficiente de viscosidad  $c = 2m\mu$  es chico. Esto es utilizado para diseñar dispositivos que captan ondas sísmicas.

Hasta aquí hemos encontrado una solución particular del sistema no homogéneo. Para encontrar una solución general deberíamos adicionar a la particular que disponemos una solución general  $x_g(t)$  de la ecuación homogénea. La forma de esta solución general es de alguno de los tipos 4.27, 4.26 o 4.25. Sin embargo no nos importa ahora la fórmula explícita de estas soluciones, sino que nos interesa resaltar que trátese del tipo que se trate, se satisface que  $\lim_{t \rightarrow \infty} x_g(t) = 0$ . Por este motivo, vamos a decir que esta parte de la solución es *transitoria*. En cambio la solución que prevalece en el tiempo dada por (4.32) la denominaremos solución *estacionaria*.

### 4.7.2 Un poco de mecánica celeste

Vamos a considerar ahora el problema del movimiento de un planeta, digamos la Tierra, de masa  $m_{\oplus}$  alrededor del sol, de masa  $m_{\odot}$ . Como  $m_{\odot} \gg m_{\oplus}$  vamos a ignorar la fuerza que actúa sobre el Sol debido a la atracción gravitatoria de la Tierra. Esta suposición, aunque falsa, la hacemos por simplicidad. No obstante, con sólo un poco de trabajo, el caso más general se reduce al tratado aquí. Ver el trabajo final de la Lic. Matemática de Leopoldo Burri, para una deducción más cuidadosa. Vamos a suponer además que el movimiento del planeta se restringe a un plano. Esta afirmación es cierta y aunque su demostración es sencilla no la desarrollaremos aquí. Supongamos un sistema de coordenadas cartesianas sobre el plano en que se realiza el movimiento orbital del planeta. Asumimos el Sol en el origen de coordenadas y en reposo. Como no actúa fuerza sobre él, permanecerá en esa situación. Vamos a suponer que la posición de la Tierra es  $\vec{r}$ .

Los dos ingredientes básicos para derivar la leyes de movimiento del planeta son la Segunda Ley de Newton y la Ley Gravitación Universal. Ya hemos considerado ambas con

anterioridad. Según la Ley de Gravitación Universal, la magnitud de la fuerza de gravedad es proporcional a  $\frac{m_\oplus m_\odot}{d^2}$ , donde  $d$  es la distancia tierra-sol. A la constante de proporcionalidad la llamaremos, como es costumbre,  $G$ . La dirección de la fuerza gravitatoria es la de la recta que une los dos astros y el sentido es tal que la fuerza es atractiva entre los cuerpos. Vale decir, la dirección y sentido de la fuerza de gravedad vienen dados por el versor  $-\vec{r}/r$ , donde  $r = |\vec{r}|$ . Luego se debe satisfacer que

$$m_\oplus \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\frac{G m_\oplus m_\odot}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} = -G m_\oplus m_\odot \frac{\vec{r}}{r^3}.$$

Es decir

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3} \quad \text{donde } \mu := G m_\odot \quad (4.33)$$

Esta ecuación se conoce como la ecuación de los dos cuerpos. Dado que esta ecuación entraña, a su vez, tres ecuaciones escalares, una por cada componente de  $\vec{r}$ , se nos presenta aquí un *Sistema de Ecuaciones Diferenciales*. No sabemos resolver sistemas de ecuaciones. No obstante vamos a ver como podemos reducir la ecuación anterior, mediante ingeniosos cambios de variables, a ecuaciones diferenciales que sabemos resolver.

Vamos a usar coordenadas polares  $(r, \theta)$  y los versores  $\vec{u}_r := (\cos \theta, \sin \theta)$  y  $\vec{u}_\theta := (-\sin \theta, \cos \theta)$ . Notar que  $\vec{u}_r \perp \vec{u}_\theta$  y por consiguiente  $\mathcal{B} := \{\vec{u}_r, \vec{u}_\theta\}$  forma una base del espacio euclídeo 2-dimensional. Usaremos este hecho para representar distintos vectores como combinación lineal de vectores de la base. Los cálculos, como es ya habitual, se los dejaremos a SymPy,

Primero declaramos las variables y asignamos los vectores  $\vec{u}_r$ ,  $\vec{u}_\theta$  y el vector  $\vec{r}$  al que llamamos pos.

```
>>> from sympy import *
2 >>> init_printing()
>>> var('t, mu')
4 >>> x, y, r, theta=symbols('x, y, r, theta', cls=Function)
>>> u_r=Matrix([cos(theta(t)), sin(theta(t))])
6 >>> u_theta=Matrix([-sin(theta(t)), cos(theta(t))])
>>> pos=r(t)*u_r
```

Como vamos a necesitar representar vectores en la base  $\mathcal{B} = \{\vec{u}_r, \vec{u}_\theta\}$ , construimos una matriz con los vectores de la base en las columnas.

```
1 >>> M=u_r.row_join(u_theta)
```

Concretamente queremos representar el vector aceleración  $\vec{a} := \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$  en la base  $\mathcal{B}$ , para ello debemos resolver  $MX = \vec{a}$ , donde  $X$  y  $\vec{a}$  los asumimos vectores columna. Con SymPy lo hacemos en un periquete

**Código (linsolve)** Resuelve un sistema  $Ax = b$

**Sintaxis** (documentación SymPy)

`linsolve((A,b), símbolos)`

`(A,b)`: tupla con la matriz y el término independiente del sistema.

`símbolos`: Muchas veces la solución no es única, en ese caso trata de representar la solución paramétricamente con los símbolos introducidos por `símbolos`.

`Retorna`: Un conjunto finito (tipo de datos de SymPy).

```
1 >>> alpha=symbols('alpha')
>>> a=lin_solve((M, pos.diff(t,2)), alpha )
3 >>> a=list(a) #convertimos de finite set a list
>>> a=a[0] #es una lista de tuples, sacamos el tuple
5 >>> a
```

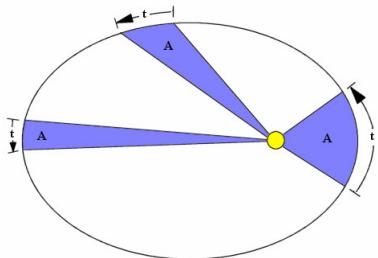
$$\left\{ \left( -r(t) \frac{d}{dt} \theta(t)^2 + \frac{d^2}{dt^2} r(t), \quad r(t) \frac{d^2}{dt^2} \theta(t) + 2 \frac{d}{dt} r(t) \frac{d}{dt} \theta(t) \right) \right\}$$

Obtenemos así las dos componentes de  $\vec{a}$ .

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2\dot{\theta}) \end{pmatrix}$$

El vector aceleración debe ser igual a la fuerza por unidad de masa  $-\mu \vec{r}/r^3$ . Notemos que esta fuerza es central, es decir tiene componente nula respecto al vector  $\vec{u}_\theta$ . Por consiguiente se debe satisfacer que

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2\dot{\theta}) = 0 \iff \exists h \in \mathbb{R} : [r^2\dot{\theta} = h].$$



Hemos derivado la Segunda Ley de Kepler: El radio vector barre áreas iguales en tiempos iguales.

En la dirección radial  $\vec{u}_r$  la componente de la fuerza es  $-\mu/r^2$ . Es decir se satisface la ecuación

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{\mu}{r^2}$$

Notar que esta ecuación entraña dos incógnitas  $r$  y  $\theta$ , pero  $\dot{\theta}$  puede ser remplazado por  $h/r^2$  por la segunda Ley de Kepler. Declaremos la variable  $h$  que juega un rol importante y reemplacemos  $\dot{\theta}$  en la ecuación

\*\*2)

```

1 | >>> var('h')
2 | >>> ed=(a[0]).subs((theta(t)).diff(t),h/r(t))
3 | >>> ed+=mu/r(t)**2

```

### Resulta

$$-\frac{h^2}{r^3(t)} + \frac{\mu}{r^2(t)} + \frac{d^2}{dt^2} r(t) = 0.$$

Conseguimos una ecuación no lineal de segundo orden para  $r$ . De los métodos que hemos visto, ninguno se aplica a esta ecuación. El truco mágico consiste en considerar la nueva variable dependiente  $z = 1/r$  y la nueva variable independiente  $\theta$ .

```

1 | >>> z=Function('z')(theta(t))
2 | >>> r=1/z
3 | >>> ed2=r.diff(t,2)+mu/r**2-h**2/r**3
4 | >>> ed2

```

Se obtiene

$$0 = -h^2 z^3(\theta(t)) + \mu z^2(\theta(t)) + \frac{1}{z^2(\theta(t))} \left( -\frac{d}{dt} \theta(t)^2 \frac{d^2}{d\theta(t)^2} z(\theta(t)) \right. \\ \left. - \frac{d^2}{dt^2} \theta(t) \frac{d}{d\xi_1} z(\xi_1) \Big|_{\xi_1=\theta(t)} + \frac{2 \frac{d}{dt} \theta(t)^2}{z(\theta(t))} \frac{d}{d\xi_1} z(\xi_1) \Big|_{\xi_1=\theta(t)}^2 \right)$$

En la complicada ecuación resultante nuevamente aparece  $\theta'$  y además aparece  $\theta''$ . Tenemos que reemplazar  $\theta'$  por  $hz^2$  y  $\theta''$  por  $\frac{d}{dt} hz^2$ .

```

1 >>> theta2diff=(h*z**2).diff(t).subs(theta(t).diff(t),h*z**2)
2 >>> ed3=ed2.subs({theta(t).diff(t):h*z**2,theta(t).diff(t,2):theta2diff})
3 >>> ed4=(ed3/z**2/h**2).expand()
4 >>> ed4

```

Resulta

$$-z(\theta(t)) - \frac{d^2}{d\theta(t)^2}z(\theta(t)) + \frac{\mu}{h^2} = 0.$$

La ecuación del oscilador armónico. Sabemos resolver esta ecuación y S también!!

```

1 >>> var('theta')
2 >>> z=Function('z')(theta)
3 >>> ed5=ed4.subs(theta(t),theta)
4 >>> dsolve(ed5,z).simplify()

```

Obtenemos

$$z(\theta) = C_1 \sin(\theta) + C_2 \cos(\theta) + \frac{\mu}{h^2}.$$

Ahora si escribimos  $C_1 = \rho \cos \omega$  y  $C_2 = -\rho \sen \omega$  y recordamos que  $z = 1/r$ , deducimos

$$r = \frac{1}{\frac{\mu}{h^2} + \rho \sen(\theta - \omega)}$$

Llamando  $p = \frac{h^2}{\mu}$  y  $e = \frac{\rho h^2}{\mu}$

$$r = \frac{p}{1 + e \sen(\theta - \omega)} \quad (4.34)$$

**Ejercicio:** La ecuación (4.34) es la ecuación de una cónica con foco en el origen y excentricidad  $e$ . Recordemos que la variable  $\theta$  es el ángulo polar. Hagamos algunos gráficos para distintas excentricidades.

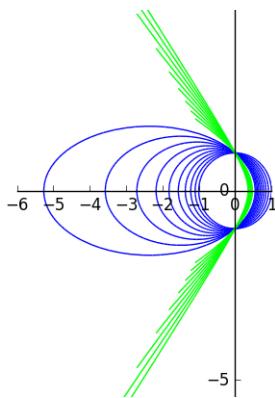
```

from sympy.plotting import plot_parametric
1 """ Gráfico de excentricidades menores a uno """
2 cant=20
3 e_s=[.04*j for j in range(cant)]
4 e=e_s[0]
5 p=plot_parametric(1/(1+e*cos(theta))*cos(theta),\
6 1/(1+e*cos(theta))*sin(theta),\
7 (theta,0,6.28),show=False)

10 for e in e_s[1:]:
11     p1=plot_parametric(1/(1+e*cos(theta))*cos(theta),\
12 1/(1+e*cos(theta))*sin(theta),\
13 (theta,0,6.28),show=False)
14     p.append(p1[0])

16 """ Gráfico de excentricidades mayores a uno """
17 e_s=[.04*j+1 for j in range(1,cant)]
18 for e in e_s:
19     p1=plot_parametric(1/(1+e*cos(theta))*cos(theta),\
20 1/(1+e*cos(theta))*sin(theta),\
21 (theta,-pi*2/3,pi*2/3),show=False, line_color=(0,1,0))
22     p.append(p1[0])
23
24 p.show()

```



Hemos logrado encontrar  $r$  como función de  $\theta$ . No obstante no hemos logrado resolver aún el problema de los dos cuerpos (4.33), para ello deberíamos encontrar  $\vec{r}(t)$ , es decir poner a  $\vec{r}$  como función de  $t$ . Esto nos serviría para decir que punto de la órbita ocupa el planeta en un dado momento. Este problema no lo desarrollaremos aquí dado que su solución se aparta del tema de las ecuaciones diferenciales.

## 4.8 Ecuaciones lineales de orden superior

**Definición 4.8.4 (Ecuación lineal general de orden  $n$ )** Es una ecuación de la forma

$$y^{(n)}(x) + p_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + p_0(x)y(x) = r(x) \quad (4.35)$$

donde  $p_i, r, i = 0, \dots, n-1$  son funciones definidas en un intervalo  $I$

Los resultados y técnicas que hemos desarrollado para ecuaciones de orden 2 se aplican con cambios previsibles a ecuaciones de mayor orden. Exponemos de manera sumaria estos resultados.

### 4.8.1 Existencia y unicidad de soluciones

**Teorema 4.8.7 (Teorema de existencia y unicidad de soluciones)** Supongamos  $p_i, r, i = 0, \dots, n-1$  continuas sobre  $I$ . Sean  $x_0 \in I$  e  $y_0, y_1, \dots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$  dados. Entonces existe una única solución del PVI

$$\begin{cases} y^{(n)}(x) + p_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + p_0(x)y(x) = r(x), x \in I \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

### 4.8.2 Estructura del conjunto de soluciones

**Teorema 4.8.8 (Estructura conjunto de soluciones ecuaciones homogéneas)** Si

pongamos  $y_1, y_2, \dots, y_n$  soluciones linealmente independientes de

$$y^{(n)}(x) + p_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + p_0(x)y(x) = 0.$$

Entonces

$$y = c_1y_1 + \dots + c_ny_n, \quad c_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n,$$

es solución general. Vale decir, el conjunto de soluciones es un espacio vectorial  $n$ -dimensional.

#### **Teorema 4.8.9 (Estructura conjunto de soluciones ecuaciones no homogéneas)**

Una solución general de la ecuación no homogénea

$$y^{(n)}(x) + p_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + p_0(x)y(x) = r(x),$$

es la suma de una solución particular de esta ecuación más una solución general de la ecuación homogénea asociada.

**Teorema 4.8.10 (Fórmula Abel)** Si  $y_1, y_2, \dots, y_n$  son soluciones de la ecuación homogénea

$$y^{(n)}(x) + p_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + p_0(x)y(x) = 0, \quad (4.36)$$

Entonces el Wronskiano satisface

$$W(y_1, \dots, y_n)(x) = W(y_1, \dots, y_n)(x_0)e^{-\int_{x_0}^x p_{n-1}(t)dt}. \quad (4.37)$$

En particular  $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  son linalmente independientes si y solo si  $W(x) \neq 0$  para todo  $x \in I$ .

**Dem.** Las demostraciones de los resultados anteriores es tan similar a su análogo de orden 2 que no vale la pena invertir tiempo en ellas. La demostración de la fórmula de Abel, si nos parece lo suficientemente interesante para dejarla como **ejercicio**.

### 4.8.3 Ecuaciones homogéneas con coeficientes constantes

Las ecuaciones lineales de orden  $n$ , homogéneas con coeficientes constantes se resuelven por métodos análogos a los considerados para ecuaciones de segundo orden. Se propone  $y(x) = e^{rx}$  como solución. Reemplazando esta función en (4.36) vemos que  $y$  sería solución si y solo si  $r$  es solución de la ecuación característica

$$r^n + p_{n-1}r^{n-1} + \dots + p_1r + p_0 = 0. \quad (4.38)$$

Ahora se presentan diversos casos.

#### 4.8.3.1 Raíces reales distintas.

Si la ecuación característica (4.38) tiene  $n$  raíces  $r_1, \dots, r_n$  reales y distintas entonces  $y_1(x) = e^{r_1x}, \dots, y_n(x) = e^{r_nx}$  son soluciones linealmente independientes y por ende

$$y(x) = c_1e^{r_1x} + \dots + c_ne^{r_nx}$$

es solución general.

Dejamos como ejercicio la demostración de la independencia lineal. En lugar de usar el Wronskiano, se puede utilizar la siguiente idea basada en métodos operacionales. Denotemos por  $D$  el operador diferenciación, esto es  $D$  es sencillamente la función definida sobre el conjunto de funciones diferenciables sobre un intervalo abierto y que actúa derivando, esto es  $Dy = y'(x)$ . Dado un polinomio  $p(X) = p_nX^n + p_{n-1}X^{n-1} + \dots + p_1X + p_0$ ,  $p_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 0, \dots, n$ , denotamos por  $p(D)$  el operador definido por

$$p(D)y = p_ny^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + p_1y' + p_0y.$$

Diremos que  $p(D)$  es un *operador diferencial polinomial*.

**Ejercicio 1** Dado que dos polinomios se pueden sumar y multiplicar, resultando estas operaciones en un nuevo polinomio, es posible hacer lo propio con operadores diferenciales polinomiales. Demostrar que el producto de dos de tales operadores  $p(D)$  y  $q(D)$  es comutativo. Esta propiedad es lo mismo que afirmar que el producto de polinomios es comutativo. Analizar que ocurriría si permitiésemos que los coeficientes  $p_i$  fuesen funciones de  $x$ ,  $p_i = p_i(x)$ .

**Ejercicio 2** Supongamos ahora que  $r_1, \dots, r_n$  son números reales distintos y que

$$y = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x} + \dots + c_ne^{r_nx}.$$

Considerar el operador diferencial

$$p(D) = (D - r_1) \cdots (D - r_{i-1})(D - r_{i+1}) \cdots (D - r_n).$$

Demostrar que

$$p(D)y = (r_i - r_1) \cdots (r_i - r_{i-1})(r_i - r_{i+1}) \cdots (r_i - r_n)e^{r_ix}.$$

Deducir de esto la independencia lineal de  $\{e^{r_1x}, \dots, e^{r_nx}\}$ .

#### 4.8.3.2 Raíces reales repetidas.

Supongamos que la ecuación característica (4.38) tiene raíces reales repetidas. Sean  $r_1, \dots, r_k$  las raíces distintas y  $m_j$  la multiplicidad de la raíz  $r_j$ . Por cada raíz  $r_j$  considerar las  $m_j$  funciones

$$\mathcal{B}_j := \{y_j^0(x) = e^{r_jx}, y_j^1(x) = xe^{r_jx}, \dots, y_j^{m_j-1}(x) = x^{m_j-1}e^{r_jx}\}.$$

**Ejercicio 3** Demostrar que  $\mathcal{B} := \mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_k$  forma un conjunto de  $n$  soluciones linealmente independientes.

#### 4.8.3.3 Raíces complejas.

Supongamos que la ecuación característica (4.38) tiene raíces complejas. Como la ecuación característica tiene coeficientes reales, las raíces aparecen de a pares conjugados  $\mu \pm \nu i$ . Si las raíces son simples por cada uno de estos pares hay que considerar las soluciones

$$e^{\mu x} \cos x \quad y \quad e^{\mu x} \sin x.$$

Si son múltiples con multiplicidad  $k$  hay que considerar las  $2k$  soluciones

$$x^0 e^{\mu x} \cos x, \dots, x^{k-1} e^{\mu x} \cos x \quad y \quad x^0 e^{\mu x} \sin x, \dots, x^{k-1} e^{\mu x} \sin x.$$

Dejamos los detalles que es necesario completar como trabajo práctico.

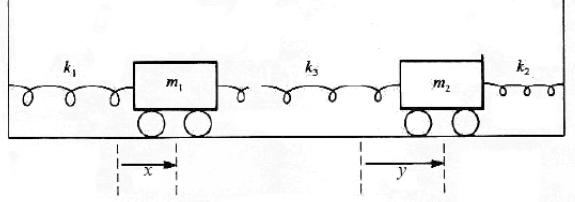
#### 4.8.4 Aplicación: osciladores armónicos acoplados

Supongamos dos masas  $m_1$  y  $m_2$  sujetas a dos puntos fijos por sendos resortes y, a su vez, unidas entre sí por un tercer resorte.

Vamos a medir la posición de las masas desde orígenes distintos situados en los respectivos puntos de equilibrio. Por consiguiente las posiciones  $x$  e  $y$  de las masas representan también su desplazamiento desde el equilibrio. Utilizando la segunda ley de Newton, la Ley de Elasticidad de Hooke y tomando en consideración que el resorte central está desplazado desde su estado de equilibrio en una cantidad igual a  $y - x$ , vemos que se debe satisfacer que

$$\begin{cases} m_1 x''(t) = -k_1 x + k_3(y - x) \\ m_2 y''(t) = -k_3(y - x) - k_2 y \end{cases} \quad (4.39a)$$

$$(4.39b)$$



Se nos presentó un sistema de ecuaciones de segundo orden. Vamos a poder convertirlo en una ecuación pagando el precio de incrementar el orden. El procedimiento es derivar (4.39a) (obviamente es lo mismo empezar por (4.39b)) dos veces respecto a  $t$ . En el resultado sustituímos  $y''$  por su igual según (4.39b). El resultado es una ecuación que todavía tiene la variable  $y$ , pero podemos usar (4.39a) para sustituir  $y$  por una expresión que sólo tiene  $x$  y sus derivadas. Todo esto lo haremos con SymPy.

```

1 >>> from sympy import *
2 >>> init_printing()
3 >>> var('x,y,t,m1,m2,k1,k2,k3')
4 >>> x,y=symbols('x,y',cls=Function)
5 >>> eq1=m1*x(t).diff(t,2)+k1*x(t)-k3*(y(t)-x(t))
6 >>> eq2=m2*y(t).diff(t,2)+k2*y(t)+k3*(y(t)-x(t))
7 >>> sust1,_=solve(eq2,y(t).diff(t,2))
8 >>> sust2,_=solve(eq1,y(t))
9 >>> eq3=eq1.diff(t,2).subs({y(t).diff(t,2):sust1, y(t):sust2})
>>> eq3.expand().collect(x(t))

```

Obtenemos la ecuación de cuarto orden

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^4}{dt^4}x(t) + \left( \frac{k_1 k_2}{m_2} + \frac{k_1 k_3}{m_2} + \frac{k_2 k_3}{m_2} \right) x(t) \\ + \left( k_1 + \frac{k_2 m_1}{m_2} + \frac{k_3 m_1}{m_2} + k_3 \right) \frac{d^2}{dt^2}x(t) = 0. \end{aligned}$$

Vamos a suponer todos los parámetros igual a 1. Encontremos y resolvamos la ecuación característica

```

2 >>> eq4=eq3.subs({m1:1,m2:1,k1:1,k2:1,k3:1})
>>> eq4

```

$$3x(t) + 4 \frac{d^2}{dt^2}x(t) + \frac{d^4}{dt^4}x(t) = 0.$$

```

>>> r=var('r')
2 >>> z=exp(r*t)
>>> eq5=eq4.subs({x(t):z,x(t).diff(t,4):z.diff(t,4),x(t).diff(t,2):z.diff(t,2)
})/z
4 >>> eq5.expand()

```

Las soluciones de la ecuación característica son  $sol$ .

```
>>> sol=solve(eq5, r)
```

Según lo que hemos dicho antes, la solución general será

$$x(t) = A \cos(t) + B \sin(t) + C \cos(\sqrt{3}t) + D \sin(\sqrt{3}t) \quad (4.40)$$

La solución es una superposición de ondas con frecuencias incommensurables. Decimos que dos magnitudes no nulas son incommensurables cuando su cociente es irracional.

¿Tendrá el sistema de osciladores acoplados soluciones periódicas? Notar que una superposición de funciones periódicas no necesariamente es periódica. La pregunta nos lleva a una pregunta más general. Si  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones periódicas de período  $T_1$  y  $T_2$ , será  $f + g$  periódica. La respuesta es el teorema de abajo.

**Teorema 4.8.11** Si  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones no constantes, periódicas y continuas de período  $T_1$  y  $T_2$ , la función  $f + g$  será periódica si y sólo si  $T_1$  y  $T_2$  son commensurables.

*Demostración.* La demostración descansa sobre varios hechos, que poco tienen que ver con las ecuaciones diferenciales. Pero, el teorema nos parece tan interesante, que vamos a dar algunos detalles y otros los dejaremos como ejercicio.  $\square$

**Ejercicio** Sea  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función periódica y sea  $\mathfrak{P}$  el conjunto de todos los períodos. Entonces

- A.  $\mathfrak{P}$  es un subgrupo aditivo de  $\mathbb{R}$ . Si  $F$  es continua  $\mathfrak{P}$  es cerrado.
- B. Si  $\mathfrak{P}$  es cualquier subgrupo aditivo propio y cerrado de  $\mathbb{R}$  entonces  $\mathfrak{P}$  es un grupo cíclico, es decir existe  $a > 0$  con  $\mathfrak{P} = a\mathbb{Z}$ . Como corolario, si  $\mathfrak{P}$  es cualquier subgrupo aditivo cerrado propio y  $T_1, T_2 \in \mathfrak{P}$  entonces  $T_1$  y  $T_2$  son commensurables.

*Ayuda:* Considerar

$$a := \inf\{x \in \mathfrak{P} : x > 0\}$$

Entonces si  $a > 0$ ,  $\mathfrak{P} = a\mathbb{Z}$  y si  $a = 0$ ,  $\mathfrak{P} = \mathbb{R}$ .

¿Qué ocurrirá si no suponemos  $\mathfrak{P}$  cerrado?

- C. Demostrar el Teorema. *Ayuda:* Supongamos que  $f + g$  tiene período  $T > 0$ . Entonces:

$$F(x) := f(x + T) - f(x) = g(x) - g(x + T).$$

La función  $F$  tendrá períodos  $T_1$  y  $T_2$ .

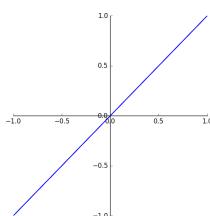
Retornando al oscilador armónico y a su solución general (4.40), el ejercicio anterior nos dice que la solución no será periódica, a menos que  $A = B = 0$  o  $C = D = 0$ . Estos casos especiales de soluciones se denominan modos normales. Usemos SymPy para encontrar y graficar algunos modos normales. Gráficaremos las soluciones sobre el espacio de configuraciones. Esto es decir que graficaremos las curvas  $t \mapsto (x(t), y(t))$  en  $\mathbb{R}^2$ .

**Primer modo normal**

```

1 >>> var('A,B,C,D')
2 >>> x=A*cos(t)+B*sin(t)+C*cos(sqrt(3)*t)+D*sin(sqrt(3)*t)
3 >>> x1=x.ssubs({A:1,B:0,C:0,D:0})
4 >>> y1=x1.diff(t,2)+2*x1
5 >>> from sympy.plotting import *
>>> plot_parametric(x1,y1,(t,0,10*pi))

```



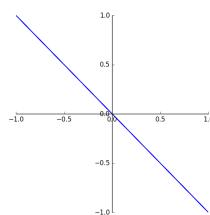
Los desplazamientos de las dos masas estan sobre la recta  $y = x$ , vale decir las masas se mueven perfectamente en fase.

### Segundo modo normal

```

1 >>> x1=x.ssubs({A:0,B:0,C:1,D:0})
2 >>> y1=x1.diff(t,2)+2*x1
>>> plot_parametric(x1,y1,(t,0,10*pi))

```



Los desplazamientos de las dos masas estan sobre la recta  $y = -x$ , vale decir las masas se mueven perfectamente fuera de fase. Cuando una alcanza el desplazamiento negativo menor la otra alcanza el mayor positivo.

### Fuera de un modo normal

```

1 >>> x1=x.ssubs({A:1,B:0,C:1,D:0})
2 >>> y1=x1.diff(t,2)+2*x1
3 >>> plot_parametric(x1,y1,(t,0,10*pi))

```

Se obtienen gráficas bonitas llamadas Curvas de Lissajous, que fuera de los modos normales llenan densamente un cuadrado del plano.

## 4.9 Métodos Operacionales

El denominado Método Operacional es una técnica iniciada por el ingeniero eléctrico Oliver Heaviside (1850-1925).

Hemos mencionado que una ecuación lineal de orden  $n$  con coeficientes constantes y no homogénea se puede pensar como

$$p(D)y = r(x), \quad (4.41)$$

donde  $p(D) = D^n + p_{n-1}D^{n-1} + \cdots + p_1D + p_0$  es un operador diferencial polinomial.

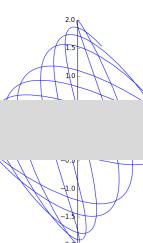


Figura 4.1: Curva de Lissajous

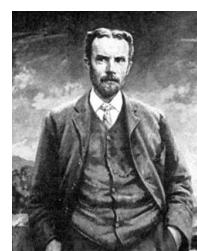


Figura 4.1: Oliver Heaviside

La idea central del método es proceder desde una manera puramente formal, para afirmar que si  $y$  resuelve (4.41) entonces

$$y = \frac{1}{p(D)} r(x), \quad (4.42)$$

Esto no parece más que un juego de símbolos del que no se puede desprender nada interesante. Vamos a ver que no es ese el caso.

El símbolo  $1/p(D)$  debería ser interpretado como el operador inverso de  $p(D)$ . Por ejemplo, supongamos que  $p(D) = D$ . entonces  $p(D)y = y'$ . En este caso  $1/p(D)$  puede ser definido como

$$\frac{1}{p(D)}r = \int r(x)dx \quad (4.43)$$

Si tuviésemos  $p(D) = D - q$ ,  $q \in \mathbb{R}$ , entonces  $p(D)y = y' - qy$ . En este caso, teniendo en mente que  $y(x) = (1/p(D))r(x)$  debería resolver la ecuación lineal de primer orden  $y' - qy = r(x)$ , y por la fórmula explícita que obtuvimos para esta solución, es natural definir

$$\frac{1}{p(D)}r = e^{qx} \int e^{-qx}r(x)dx \quad (4.44)$$

### 4.9.1 Raíces simples

Supongamos ahora que  $p$  es un polinomio que se factoriza en monomios de primer orden

$$p(D) = (D - p_0) \cdots (D - p_k).$$

Siguiendo la línea de razonamiento anterior definimos

$$\frac{1}{p(D)}r = \frac{1}{D - p_0} \left( \frac{1}{D - p_1} \left( \cdots \frac{1}{D - p_k} (r) \cdots \right) \right) \quad (4.45)$$

**Problema.** Resolver  $y'' - 3y' + 2y = xe^x$ . Las cuentas las haremos con SymPy. Primero veamos si el polinomio se factoriza

```

1 >>> var('D')
2 >>> p=D**2-3*D+2
3 >>> p.factor()
```

Vemos que  $p(D) = (D - 2)(D - 1)$ . Ahora programemos la fórmula (4.44) y usemosla para resolver la ecuación.

```

1 >>> x=var('x')
2 >>> LinInv=lambda r,a: exp(a*x)* integrate(exp(-a*x)*r,x)
3 >>> LinInv(LinInv(x*exp(x),1),2)
```

Dedujimos  $y = \frac{e^x}{2} (-x^2 - 2x - 2)$  es solución.

#### 4.9.1.1 Fracciones simples

Otra idea es descomponer  $1/p(D)$  en fracciones simples. Suponiendo  $p(D) = (D - p_0) \cdots (D - p_k)$ , con  $p_j$  raíces simples

$$\frac{1}{(D - p_0) \cdots (D - p_k)} = \left\{ \frac{A_0}{(D - p_0)} + \cdots + \frac{A_k}{(D - p_k)} \right\}.$$

Como cada término del miembro de la derecha lo tenemos definido, sólo tenemos que sumar cada uno de ellos. Reprocesemos con esta idea el ejemplo de antes. La función `apart` de sympy hace descomposiciones en fracciones simples. En el caso del operador  $p(D) = (D - 2)(D - 1)$  obtenemos descomposición en fracciones simples

```
1 >> apart(1/p)
```

$$\frac{1}{p(D)} = -\frac{1}{D-1} + \frac{1}{D-2}.$$

Entonces la siguiente expresión debería darnos una solución

```
1 >> LinInv(x*exp(x),2)-LinInv(x*exp(x),1)
```

Obviamente obtenemos la misma solución que obtuvimos antes.

## 4.9.2 Series

En algunas ocasiones es conveniente desarrollar en serie  $1/p(D)$ :

$$\frac{1}{p(D)} r(x) = (a_0 + a_1 D + a_2 D^2 + \cdots) r(x). \quad (4.46)$$

Por ejemplo cuando  $r$  es un polinomio, puesto que salvo una cantidad finita, todas las derivadas de orden  $k$  de  $r$  son cero.

**Ejemplo.** Resolver  $y''' + 2y'' + y = x^4 + 2x + 5$ . Como  $r$  es un polinomio de grado 4, desarrollemos en serie  $1/p(D)$  hasta ese orden

```
1 >> L=1/(1+2*D**2+D**3)
2 >> L.series(D,0,5)
```

Obtenemos

$$\frac{1}{p(D)} = \frac{1}{1 + 2D^2 + D^3} = 1 - 2D^2 - D^3 + 4D^4 + \mathcal{O}(D^5).$$

Ahora el siguiente código define el operador diferencial asociado a la expresión anterior

```
1 >> coeficientes=[Q.diff(D,j).subs(D,0)/factorial(j) for j in range(5)]
2     def Q_op(f):
         return sum([coeficientes[j]*f.diff(x,j) for j in range(5)])
```

Evaluamos el segundo miembro de (4.46) en  $r(x) = x^4 + 2x + 5$ .

```
1 >> Q_op(x**4+2*x+5)
```

Llegamos a la solución

$$y = x^4 - 24x^2 - 22x + 101$$

# 5 Ecuaciones lineales de segundo orden

## 5.1 Teorema de separación de Sturm

### 5.1.1 Motivación

El objetivo de esta unidad es mostrar como se pueden estudiar propiedades de las soluciones de ecuaciones lineales de segundo orden sin resolver la ecuación diferencial. En particular estudiaremos propiedades de los ceros de las soluciones. Recordemos que denominamos cero de una función  $y$  a un punto  $x$  tal que  $y(x) = 0$ .

Veamos como se comportan los ceros de la ecuación  $y'' + ay = 0$ . Para ser más concretos consideremos el siguiente pvi asociado a esta ecuación.

$$\begin{cases} y'' + ay = 0, \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

Las soluciones acordes al valor de  $a$  son

$$y(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{|a|}} e^{\sqrt{|a|}x} - \frac{1}{2\sqrt{|a|}} e^{-\sqrt{|a|}x} & \text{cuando } a < 0 \\ x & \text{cuando } a = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{|a|}} \operatorname{sen}(\sqrt{a}x) & \text{cuando } a > 0 \end{cases}$$

En la siguiente animación representamos los gráficos de las soluciones a medida que  $a$  varía desde  $-2$  hasta  $6$  de a saltos de  $0,1$ .

La separación entre ceros sucesivos de la solución disminuye a medida que  $a$  crece, la solución pasa de tener un único cero para  $a < 0$  a tener, cuando  $a > 0$ , infinitos separados una distancia de  $\pi/\sqrt{a}$ . Cuando  $a > 0$ , el número  $\sqrt{a}$  es la frecuencia circular de la solución sinusoidal  $y(x) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \operatorname{sen}(\sqrt{a}x)$ , por analogía la seguiremos denominando frecuencia para otros valores de  $a$ .

Vamos a desarrollar dos resultados principales, el Teorema de Separación de Sturm y el Teorema de Comparación de Sturm. Luego generalizaremos este último teorema al Teorema de Comparación de Sturm-Picone.

## 5.1.2 Teorema separación de Sturm

Nuestra investigación sobre los ceros de soluciones comienza con el siguiente teorema que muestra que los ceros de soluciones linealmente independientes alternan entre sí.

**Teorema 5.1.1 (Separación de Sturm)** Sean  $y_1$  e  $y_2$  soluciones linealmente independientes de

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0. \quad (5.1)$$

Entonces entre dos ceros consecutivos de  $y_2$  hay exactamente un cero de  $y_1$ .

*Dem.* Sean  $x_1$  y  $x_2$  ceros sucesivos de  $y_2$ . Podemos suponer  $y_2 > 0$  en  $(x_1, x_2)$ . Vamos a considerar el Wronskiano de las soluciones

$$W = y_1(x)y'_2(x) - y_2(x)y'_1(x),$$

que es no nulo por la independencia lineal y por lo tanto tiene siempre el mismo signo. En los puntos  $x_1$  y  $x_2$  tenemos  $W = y_1(x)y'_2(x)$ . Notar que

$$y'_2(x_1) = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{y_2(x_1 + h)}{h} \geq 0.$$

De manera similar deducimos  $y'_2(x_2) \leq 0$ . Por la invariancia del signo de  $W = y_1y'_2$  debe ocurrir que  $y_1(x_1)$  e  $y_1(x_2)$  tienen signos diferentes. Y por lo tanto  $y_1$  se debe anular en  $(x_1, x_2)$ .  $\square$

**Ejemplo 5.1.1** as funciones  $y_1(x) = c_1 \cos x + c_2 \sen x$  e  $y_2(x) = c_3 \cos x + c_4 \sen x$  son soluciones de la ecuación del oscilador armónico  $y'' + y = 0$ . Para que sean linealmente independientes se tiene que satisfacer que el Wronskiano  $W$  sea no nulo en todo punto. Evaluamos  $W$  en 0

$$W = \det \begin{pmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y'_1(0) & y'_2(0) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} c_1 & c_3 \\ c_2 & c_4 \end{pmatrix} = c_1c_4 - c_2c_3 \neq 0$$

Bajo este supuesto los ceros de  $y_1$  e  $y_2$  alternan. Veamos esta afirmación de manera directa, sin invocar el Teorema de Separación de Sturm. Como es costumbre escribamos

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \rho_1 \cos(x - \alpha_1), \quad \text{donde } c_1 = \rho_1 \cos \alpha_1 \text{ y } c_2 = \rho_1 \sen \alpha_1 \\ y_2(x) &= \rho_2 \cos(x - \alpha_2), \quad \text{donde } c_3 = \rho_2 \cos \alpha_2 \text{ y } c_4 = \rho_2 \sen \alpha_2. \end{aligned}$$

La condición  $c_1c_4 - c_2c_3 \neq 0$  equivale a la independencia lineal de los vectores  $(c_1, c_2)$  y  $(c_3, c_4)$  y esto último a que  $\alpha_1 - \alpha_2 \notin \mathbb{Z}$ . Por consiguiente los ceros de  $y_1$  e  $y_2$  alternan como predice el Teorema.

## 5.1.3 Reducción a la ecuación normal

La ecuación general lineal de segundo orden (5.1) no es muy apropiada para el estudio que nos proponemos. Vamos a mostrar que podemos reducir aquella ecuación a una más simple que denominaremos *normal*.

**Teorema 5.1.2** existe una función  $v$  tal que el cambio de variables  $y(x) = v(x)u(x)$  transforma la ecuación (5.1) en la ecuación

$$u'' + q(x)u = 0. \quad (5.2)$$

Dem.

```

1 >>> from sympy import *
2 >>> init_printing()
3 >>> x=var('x')
4 >>> u,v,P,Q=symbols('u v P Q',cls=Function)
5 >>> y=u(x)*v(x)
6 >>> eq=y.diff(x,2)+P(x)*y.diff(x)+Q(x)*y
7 >>> eq.expand().coeff(u(x).diff(x))
P(x)*v(x) + 2*Derivative(v(x), x)

```

Para que la ecuación lineal de segundo orden resultante no tenga el término con  $u'$  se debe cumplir que

$$P(x)v(x) + 2\frac{d}{dx}v(x) = 0,$$

que es una ecuación lineal de primer orden para  $v$ , cuya solución general es  $v(x) = e^{-\int \frac{P}{2} dx}$ .  $\square$

Hallemos  $q$ .

```

1 >>> y=u(x)*exp(-Integral(P(x)/2,x))
2 >>> eq=y.diff(x,2)+P(x)*y.diff(x)+Q(x)*y
3 >>> eq=eq/exp(-Integral(P(x)/2,x))
4 >>> eq.simplify()

```

Obtenemos

$$\left[ -\frac{1}{4}P^2(x)u(x) + Q(x)u(x) - \frac{1}{2}u(x)\frac{d}{dx}P(x) + \frac{d^2}{dx^2}u(x) = 0 \right].$$

y por lo tanto

$$q = -\frac{1}{4}P^2(x) + Q(x) - \frac{1}{2}\frac{d}{dx}P(x).$$

**Ejemplo 5.1.2** n caso particular de importancia lo constituye la ecuación de Bessel

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - a^2)y = 0 \quad (5.3)$$

. La ecuación equivale a

$$u'' + \left(1 + \frac{1 - 4a^2}{4x^2}\right)u = 0. \quad (5.4)$$

Notar que si  $v(x) \neq 0$ , entonces los ceros de la función  $u(x)$  e  $y(x) = v(x)u(x)$  son los mismos. De allí que, si nuestro objetivo es estudiar ceros de soluciones de ecuaciones lineales de segundo orden, podemos suponer que la ecuación viene dada en la forma normal (5.2).

Por analogía entre las ecuación a coeficientes constantes  $y'' + ay = 0$  y la ecuación con coeficientes variables (5.2), llamaremos a la función  $q(x)$  frecuencia. El objetivo que tenemos es ver si se observa un comportamiento similar entre las soluciones de la ecuación (5.2) y las de su contraparte a coeficientes constantes.

#### 5.1.4 Teorema de Comparación de Sturm

**Teorema 5.1.3** Sean  $q_i, i = 1, 2$ , continuas e  $y_i, i = 1, 2$ , soluciones de

$$y_i''(x) + q_i(x)y_i(x) = 0, \quad i = 1, 2.$$

Sean  $x_0$  y  $x_1$  ceros sucesivos de  $y_2$  y supongamos que  $q_2(x) \leq q_1(x)$  y  $q_2 \not\equiv q_1$  en  $[x_0, x_1]$ . entonces  $y_1$  tiene al menos un cero en  $(x_0, x_1)$ .

*Dem.* Por la linealidad de las ecuaciones y como  $x_0$  y  $x_1$  son ceros consecutivos, podemos suponer  $y_2 > 0$  en  $(x_0, x_1)$ . Supongamos que  $y_1$  no tiene ceros en  $(x_0, x_1)$ , entonces en virtud del Teorema de Bolzano,  $y_1$  no cambia de signo en  $(x_0, x_1)$  y por consiguiente podemos suponer también que  $y_1 > 0$  en  $(x_0, x_1)$ . Derivando el Wronskiano y usando las ecuaciones diferenciales que satisfacen  $y_1$  e  $y_2$

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dx} &= \frac{d}{dx}(y_1 y_2' - y_1' y_2) \\ &= y_1 y_2'' - y_1'' y_2 \\ &= -q_2 y_1 y_2 + q_1 y_1 y_2 \\ &= (q_1 - q_2) y_1 y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Integrando esta desigualdad, tomando en cuenta que  $q_1 \not\equiv q_2$  y que  $x_0$  y  $x_1$  son ceros de  $y_2$

$$0 < \int_{x_0}^{x_1} \frac{dW}{dx} dx = W(x_1) - W(x_0) = y_1(x_1)y_2'(x_1) - y_1(x_0)y_2'(x_0). \quad (5.5)$$

Por un razonamiento análogo al de la demostración del Teorema 5.1.1 debemos tener que  $y_2'(x_0) \geq 0$  e  $y_2'(x_1) \leq 0$ . Luego  $y_1(x_0)y_2'(x_0) \geq 0 \geq y_1(x_1)y_2'(x_1)$  que es una contradicción con (5.5).  $\square$

**Corolario 5.1.1** Si  $q \leq 0$  y  $q \not\equiv 0$  en el intervalo, acotado o no,  $I$  e  $y(x)$  es solución de  $y'' + q(x)y = 0$ , entonces  $y$  tiene al menos un cero en  $I$ .

*Dem.* Si  $y(x)$  tuviese dos ceros entonces podemos usar el Teorema de Comparación de Sturm con  $q_2 = q$ ,  $y_2 = y$ ,  $q_1 = 0$  e  $y_1 \equiv 1$  (notar que  $y_1$  resuelve  $z'' + q_1(x)z = 0$ ) y llegaríamos a que  $y_1$  debería anularse en algún punto. Esta contradicción demuestra el corolario.  $\square$

**Corolario 5.1.2** Si existe  $q_0 \in \mathbb{R}$  tal que  $q(x) \geq q_0 > 0$  en  $I = (a, +\infty)$  y si  $y(x)$  es solución de  $y'' + q(x)y = 0$ , entonces  $y$  tiene infinitos ceros en el intervalo no acotado  $(a, +\infty)$ . De hecho  $y$  tiene un cero en cualquier intervalo de longitud  $\pi/\sqrt{q_0}$ .

*Dem.* Evidentemente hay que usar el Teorema de Comparación de Sturm con la ecuación  $z'' + q_0 z = 0$ . La función  $z(x) = \cos(\sqrt{q_0}x - \alpha)$  es solución esta ecuación. La función  $z$  tiene ceros en  $k\frac{\pi}{\sqrt{q_0}} + \alpha$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Si  $[a, b]$  es cualquier intervalo de longitud  $\frac{\pi}{\sqrt{q_0}}$ , podemos elegir  $\alpha = a$  y entonces  $b$  será  $\frac{\pi}{\sqrt{q_0}} + \alpha$ . Por consiguiente  $y$  tiene un cero en  $[a, b]$ .  $\square$

**Corolario 5.1.3** Supongamos que  $q(x) \geq (1 + \epsilon)/4x^2$ , para  $x > 0$ . Entonces toda solución de  $y'' + q(x)y = 0$  tiene infinitos ceros en  $(0, +\infty)$ . Más aún, hay una sucesión de ceros tendiendo a infinito y otra tendiendo a cero.

Dem. En la ecuación

$$\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{1+\epsilon}{4x^2}z = 0, \quad (5.6)$$

hagamos el cambio de variable dependiente  $z = y\sqrt{x}$ . Primero computemos las derivadas

$$\frac{dz}{dx} = \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{2}y + x^{\frac{1}{2}}\frac{dy}{dx}$$

y

$$\frac{d^2z}{dx^2} = -\frac{x^{-\frac{3}{2}}}{4}y + x^{-\frac{1}{2}}\frac{dy}{dx} + x^{\frac{1}{2}}\frac{d^2y}{dx^2} \quad (5.7)$$

Sustituyendo (5.7) y  $z = y\sqrt{x}$  en (5.6) obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d^2z}{dx^2} + \frac{1+\epsilon}{4x^2}z \\ &= -\frac{x^{-\frac{3}{2}}}{4}y + x^{-\frac{1}{2}}\frac{dy}{dx} + x^{\frac{1}{2}}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1+\epsilon}{4x^2}x^{\frac{1}{2}}y \\ &= \boxed{\frac{\epsilon}{4}x^{-\frac{3}{2}}y + x^{-\frac{1}{2}}\frac{dy}{dx} + x^{\frac{1}{2}}\frac{d^2y}{dx^2}}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Ahora cambiemos la variable independiente por  $t = \ln x$ . Entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \frac{dy}{dt} = \boxed{e^{-t} \frac{dy}{dt}}. \quad (5.9)$$

y

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \left( \frac{d}{dx} e^{-t} \right) \frac{dy}{dt} + e^{-t} \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dt} \right) \\ &= e^{-t} \left( \frac{-1}{x} \right) \frac{dy}{dt} + e^{-t} \frac{d^2y}{dt^2} \frac{1}{x} \\ &= -e^{-2t} \frac{dy}{dt} + e^{-2t} \frac{d^2y}{dt^2} \\ &= \boxed{e^{-2t} \left( -\frac{dy}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2} \right)}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Sustituyendo (5.9) y (5.10) y  $x = e^t$  en (5.8)

$$0 = \frac{\epsilon}{4}e^{-\frac{3}{2}t}y + e^{-\frac{3}{2}t}\frac{dy}{dt} + e^{-\frac{3}{2}t} \left( -\frac{dy}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2} \right) = \frac{\epsilon}{4}e^{-\frac{3}{2}t}y + e^{-\frac{3}{2}t}\frac{d^2y}{dt^2}$$

Dividiendo por  $e^{-\frac{3}{2}t}$  vemos que  $y$  resuelve la ecuación del oscilador armónico

$$\boxed{\frac{\epsilon}{4}y + \frac{d^2y}{dt^2} = 0}. \quad (5.11)$$

Confirmemos los cálculos con SymPy

```

>>> from sympy import *
2  >>> t=symbols('t')
3  >>> y=Function('y')(t)
4  >>> x=symbols('x')
5  >>> z=y.subs(t,ln(x))*sqrt(x)
6  >>> epsilon=symbols('epsilon')
>>> eq=z.diff(x,2)+(1+epsilon)/4*x**2*z

```

Obtenemos

$$\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \left( \frac{\epsilon}{4} + \frac{1}{4} \right) y(\log(x)) + \frac{1}{4x^{\frac{3}{2}}} \left( -y(\log(x)) + 4 \frac{d^2}{d\xi_1^2} y(\xi_1) \Big|_{\xi_1=\log(x)} \right)$$

```
>>> eq1=(eq*x**(.0/2)).subs(ln(x),t).simplify()
>>> eq1
```

$$\frac{\epsilon}{4} y(t) + \frac{d^2}{d\xi_1^2} y(\xi_1) \Big|_{\xi_1=t}$$

Continuando con la demostración, observemos que como las soluciones de la ecuación del oscilador armónico (5.11) tienen infinitos ceros de la forma  $k\pi + \alpha$ , para  $k \in \mathbb{Z}$  y para algún  $\alpha \in \mathbb{R}$ , entonces  $z(x) = \sqrt{x}y(\ln(x))$  va a tener infinitos de la forma  $e^{k\pi+\alpha}$ .

Sea ahora  $y$  solución de  $y'' + q(x)y = 0$ . Si aplicamos el Teorema de Comparación de Sturm con  $q_2(x) = \frac{1+\epsilon}{4x^2}$  y  $q_1 = q$ . Deducimos que entre los números  $e^\alpha(e^\pi)^k$  y  $e^\alpha(e^\pi)^{k+1}$ , para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$  y  $k \in \mathbb{Z}$ , hay siempre un cero de  $y$ , digamos  $e^\alpha(e^\pi)^k < x_{k,\alpha} < e^\alpha(e^\pi)^{k+1}$ . Ahora tomando  $\alpha = 0$  y  $k \rightarrow \infty$  obtenemos una sucesión  $x_{k,0}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , de ceros tendiendo a infinito. Tomando  $\alpha = 0$  y  $k \rightarrow -\infty$  obtenemos la sucesión  $x_{k,0}$ ,  $k = -1, -2, \dots$ , de ceros tendiendo a cero.  $\square$

**Corolario 5.1.4** Una solución a la ecuación de Bessel (5.3) tiene infinitos ceros en  $(0, +\infty)$  que forman una sucesión  $x_n$  tal que  $x_{n+1} - x_n \rightarrow \pi$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .

*Dem.* Vamos a utilizar la ecuación (5.4) cuyas soluciones  $u$  tienen los mismos ceros que las respectivas de (5.3). Fijemos una de estas soluciones  $u(x)$ . Vamos a distinguir tres casos.

**Caso  $a = \frac{1}{2}$**  En este caso la ecuación se reduce a la ecuación del oscilador armónico  $u'' + u = 0$  y la afirmación es ya conocida. **Caso  $a < \frac{1}{2}$**  En esta situación  $1 + \frac{1-4a^2}{4x^2} > 1$  en  $(0, +\infty)$ . Luego por el Teorema de Comparación de Sturm, entre dos ceros de la solución  $z(x) = \operatorname{sen}(x - \alpha)$  de la ecuación  $z'' + z = 0$  tenemos un cero de  $u$ . Como  $\alpha$  es arbitrario, esto implica que  $u$  tiene infinitos ceros que distan entre sí menos de  $\pi$ . Ahora como  $(1-4a^2)/4x^2 \rightarrow 0$ , cuando  $x \rightarrow \infty$ , para todo  $\epsilon > 0$  existe  $x_0 > 0$  tal que  $(1-4a^2)/4x < \epsilon$ , para  $x \geq x_0$ . Entonces en  $[x_0, +\infty)$  podemos usar el Teorema de comparación de Sturm, con  $q_2(x) = 1 + (1-4a^2)/4x^2$  y  $q_1(x) = 1 + \epsilon$ ,  $y_2(x) = u(x)$  e  $y_1(x) = \operatorname{sen}(\sqrt{1+\epsilon}x - \alpha)$ , que es solución de  $y'' + (1+\epsilon)y = 0$ . Concluimos que entre dos ceros de  $u$  hay siempre uno de  $y_1$ . Debe ocurrir entonces que dos ceros sucesivos de  $u$  en  $[x_0, +\infty)$  distan en más de  $\pi/\sqrt{1+\epsilon}$ . De lo contrario, si  $a$  y  $b$  son ceros de  $u$  y  $b-a < \pi/\sqrt{1+\epsilon}$ , entonces para  $\alpha = \sqrt{1+\epsilon}a$ , la función  $y_1(x) = \operatorname{sen}(\sqrt{1+\epsilon}x - \alpha)$  satisface  $y_1(a) = \operatorname{sen}0 = 0$ . Además el cero de  $y_1$  inmediato posterior al cero  $a$  es  $a + \pi/\sqrt{1+\epsilon}$  que es mayor que  $b$ . Por consiguiente entre  $(a, a + \pi/\sqrt{1+\epsilon})$  (y de allí en  $(a, b)$ )  $y_1$  no se anula, contradiciendo esto el Teorema de Comparación de Sturm.

**Caso  $a > \frac{1}{2}$**  Es esencialmente muy similar y queda como **ejercicio**.  $\square$

Ahora vamos a extender el Teorema de Comparación de Sturm a ecuaciones que, sin ser la ecuación general lineal de segundo orden, son más generales que (5.2). Concretamente, supongamos que  $p(x)$  es una función diferenciable y  $q(x)$  es continua en un intervalo  $I$ , entonces consideraremos ecuaciones del tipo

$$(p(x)y'(x))' + q(x)y(x) = 0. \quad (5.12)$$

**Lema 5.1.1 (Identidad de Picone)** Supongamos  $y, z$  dos veces diferenciables en  $I$  con  $z(x) \neq 0$  en  $I$ , y  $p_0, p_1$  diferenciables en  $I$ . Entonces

$$\left[ \frac{y}{z} (zp_0y' - yp_1z') \right]' = y(p_0y')' - \frac{y^2}{z}(p_1z')' + (p_0 - p_1)y'^2 + p_1 \left( y' - \frac{y}{z}z' \right)^2 \quad (5.13)$$

Dem.

```
x=var('x')
2 y,z,p0,p1=symbols('y,z,p0,p1',cls=Function)
eq1=(y(x)/z(x)*(z(x)*p0(x)*y(x).diff(x)-y(x)*p1(x)*z(x).diff(x))).diff()
4 eq2=y(x)*(p0(x)*y(x).diff(x)).diff(x)-y(x)**2/z(x)*(p1(x)*z(x).diff(x)).diff(x)
(p0(x)-p1(x))*(y(x).diff(x))**2+p1(x)*(y(x).diff(x)-y(x)/z(x)*z(x).diff(x))**2
6 eq1=eq1.expand()
eq2=eq2.expand()
8 eq1==eq2
True
```

□

**Teorema 5.1.4 (Teorema de comparación de Sturm-Picone)** Sean  $p_i, i = 1, 2$ , diferenciables y  $q_i, i = 1, 2$ , continuas sobre  $I$ , con  $0 < p_1(x) \leq p_0(x), q_0(x) \leq q_1(x)$  en  $I$ . Supongamos  $y_i, i = 1, 2$ , soluciones no triviales de las ecuaciones

$$(p_i(x)y'_i(x))' + q_i(x)y_i = 0, \quad i = 1, 2 \quad (5.14)$$

respectivamente. Entonces entre ceros consecutivos de  $y_0$  hay uno de  $y_1$ , a menos que  $p_0 \equiv p_1, q_0 \equiv q_1$  y que las funciones  $y_0$  e  $y_1$  sean linealmente dependientes.

Dem. Supongamos  $a$  y  $b$  ceros consecutivos de  $y_0$  y que  $y_1 \neq 0$  en  $(a, b)$ . Aplicando la identidad de Picone, con  $y = y_0, z = y_1$ , y las ecuaciones (5.14), que permiten reemplazar  $(p_i y'_i)'$  por  $-q_i y_i$  en (5.13). Obtenemos

$$\left[ \frac{y_0}{y_1} (y_1 p_0 y'_0 - y_0 p_1 y'_1) \right]' = (q_1 - q_0)y_0^2 + (p_0 - p_1)y_0'^2 + p_1 \left( y'_0 - \frac{y_0}{y_1}y'_1 \right)^2$$

Ahora integramos esta desigualdad entre  $a$  y  $b$ , al ser estos puntos ceros de  $y_0$  obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b \left[ \frac{y_0}{y_1} (y_1 p_0 y'_0 - y_0 p_1 y'_1) \right]' dx \\ &= \int_a^b \left[ (q_1 - q_0)y_0^2 + (p_0 - p_1)y_0'^2 + p_1 \left( y'_0 - \frac{y_0}{y_1}y'_1 \right)^2 \right] dx \end{aligned}$$

Como por hipótesis el integrando es una función no negativa, entonces debe ser la función idénticamente nula y de allí cada término que lo compone es la función nula. Como  $y_i, i = 1, 2$ , son no triviales, debemos tener que  $p_0 \equiv p_1, q_0 \equiv q_1$  y que  $W(y_0, y_1) = -(y_1 y'_0 - y_0 y'_1) = 0$ , es decir  $y_0$  e  $y_1$  son linealmente independientes. □

# 6 Métodos de desarrollo en serie de potencias y en serie de Frobenius

## 6.1 Series de potencias

En esta sección recordamos algunos conceptos y teoremas sobre series de potencias. Dado que este tema es motivo de un estudio más profundo en otras materias de la licenciatura en matemática omitimos algunas demostraciones.

### 6.1.1 Definición

**Definición 6.1.1** Una serie de potencias es una serie de la forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

donde  $a_n, n = 0, 1, \dots, z_0$  y  $z$  son elementos de  $\mathbb{C}$ .

Estamos interesados en determinar los valores de  $z$  para los cuales una serie converge.

**Ejemplo 6.1.1** La serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n,$$

es una serie de potencias. Aquí  $a_n = 1, n = 0, 1, \dots$  y  $z_0 = 0$ . Esta serie converge para  $|z| < 1$  a

$$\frac{1}{1-z}$$

y no converge para cualquier otro valor de  $z \in \mathbb{C}$ .

**Ejemplo 6.1.2** Supongamos  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $I$  es un intervalo abierto  $I = (a, b)$  y que  $f$  tiene derivadas de todo orden en  $z_0 \in I$ . Entonces es posible construir la serie de Taylor de  $f$  en  $z_0$  que es una serie de potencias. Recordemos que esta serie es

$$S(f, z_0, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n.$$

### 6.1.2 Límites superior e inferior

**Definición 6.1.2** Dada una sucesión de números reales  $x_n$ , consideramos una nueva sucesión:

$$A_n = \sup\{x_n, x_{n+1}, \dots\}$$

La nueva sucesión de reales  $A_n$  es no creciente ( $A_n \geq A_{n+1}$ ), luego tiene un límite (puede ser  $\pm\infty$ ). A este límite lo llamamos el *límite superior de  $x_n$* . Lo denotamos por  $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$ . Es decir:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} \{x_n, x_{n+1}, \dots\}.$$

Tomando ínfimo en lugar de supremo conseguimos el *límite inferior* ( $\liminf$ ).

**Ejemplo 6.1.3** Si  $x_n = (-1)^n$ , entonces

$$\{x_n, x_{n+1}, \dots\} = \{\pm 1, \mp 1, \pm 1, \dots\}.$$

El supremo de este conjunto es para todo  $n$  igual a 1 y el ínfimo igual a -1. Luego  $\liminf x_n = -1$  y  $\limsup x_n = 1$ .

**Ejemplo 6.1.4** Si  $x_n = 1/n$ , si  $n$  es par y  $x_n = 1$  si  $n$  es impar, entonces el conjunto

$$\{x_n, x_{n+1}, \dots\}$$

tiene por supremo 1 y el ínfimo igual a 0. Luego  $\liminf x_n = 0$  y  $\limsup x_n = 1$ .

**Teorema 6.1.1 (Propiedades)** Sea  $x_n$  e  $y_n$  dos sucesiones de números reales, entonces:

- A. El  $\limsup x_n$  y el  $\liminf x_n$  existen si se permite que  $\pm\infty$  sean sus posibles valores.
- B.  $\liminf x_n \leq \limsup x_n$ .
- C.  $\liminf x_n = \limsup x_n$  si y solo si el  $\lim x_n$  existe. En este caso todos los límites coinciden.
- D.  $\liminf(x_n + y_n) \geq \liminf x_n + \liminf y_n$ .
- E.  $\limsup(x_n + y_n) \leq \limsup x_n + \limsup y_n$

### 6.1.3 Radio de convergencia

**Definición 6.1.3** Dada la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n,$$

definimos el *radio de convergencia*  $R$  de la siguiente forma:

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}.$$

**Ejemplo 6.1.5** La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n,$$

tiene radio de convergencia:

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} 1^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1^{1/n} = 1$$

Luego  $R = 1$ .

**Ejemplo 6.1.6** La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{M}\right)^n z^n,$$

tiene radio de convergencia:

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left( \left( \frac{1}{M} \right)^n \right)^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \left( \frac{1}{M} \right)^n \right)^{1/n} = \frac{1}{M}$$

Luego  $R = M$ .

**Ejemplo 6.1.7** Fijemos  $M > 0$  y  $n$  un natural tal que  $[n/2] > M$  (aquí  $[x]$  es la parte entera de  $x$ ). Entonces, como  $n - [n/2] \geq [n/2] > M$

$$\begin{aligned} n! &= n(n-1) \cdots 1 > n(n-1) \cdots (n-[n/2]) \\ &> \underbrace{M \cdots M}_{[n/2]-\text{veces}} \\ &\geq M^{[n/2]} \\ &> M^{n/3} \end{aligned}$$

Luego

$$\frac{1}{R} := \limsup_{n \rightarrow \infty} (1/n!)^{1/n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{M^{n/3}} \right)^{1/n} = \frac{1}{\sqrt[3]{M}}$$

Como  $M$  es arbitrario, haciendo  $M \rightarrow \infty$  vemos que el radio de convergencia de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

**Teorema 6.1.2** Supongamos que la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

tiene radio de convergencia  $R > 0$ . Entonces:

- A. Si  $|z - z_0| < R$ , la serie converge absolutamente en  $z$ .
- B. Si  $|z - z_0| > R$ , la serie diverge.
- C. Si  $|z - z_0| = R$ , no se afirma nada.

*Dem.* Se puede suponer sin pérdida de generalidad  $z_0 = 0$ . Supongamos  $0 < R < \infty$ . Sea  $L = 1/R$  y tomemos  $\epsilon > 0$  pequeño. Como

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \{|a_n|^{1/n}, |a_{n+1}|^{1/(n+1)}, \dots\} = L$$

para  $n_0$  suficientemente grande

$$\sup \{|a_n|^{1/n}, |a_{n+1}|^{1/(n+1)}, \dots\} < L + \epsilon.$$

para  $n \geq n_0$ . Así

$$|a_n|^{1/n} < L + \epsilon \quad \text{para } n \geq n_0.$$

Elijamos  $0 < r < 1/(L + \epsilon) < 1/L = R$ . Si  $|z| < r$  entonces

$$|a_n| |z|^n < (L + \epsilon)^n r^n \quad \text{para } n \geq n_0.$$

Pero  $r(L + \epsilon) < 1$ . La desigualdad de arriba y el teorema de comparación para series (notar que el miembro de la derecha forma una serie geométrica) implican que la serie converge absolutamente para este  $z$ . Esto implica la convergencia para cualquier  $|z| < R$ , ya que si  $|z| < R = 1/L$  existe  $\epsilon > 0$  lo suficientemente chico para que  $|z| < 1/(L + \epsilon)$ . Por el resultado ya demostrado la serie converge absolutamente para este  $z$ .  $\square$

**Ejercicio 6.1.1** demostrar los casos  $R = 0$ ,  $R = \infty$  y el segundo inciso.

**Teorema 6.1.3** a función

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n,$$

es diferenciable dentro en  $\{z : |z - z_0| < R\}$ . Además

$$f'(z) = g(z) := \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1},$$

teniendo esta serie el mismo radio de convergencia que el de  $f$ .

*Dem.* Nuevamente supondremos  $z_0 = 0$ . La afirmación sobre el radio de convergencia es consecuencia de que  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/n} = 1$ . Como el radio  $R'$  de convergencia de  $g$  es:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R'} &= \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}(n+1)|^{1/(n+1)} \\ &\stackrel{\text{Ejercicio}}{=} \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}|^{1/(n+1)} \lim_{n \rightarrow \infty} |(n+1)|^{1/(n+1)} \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}|^{1/(n+1)} = \frac{1}{R} \end{aligned}$$

Ahora veamos que  $f' = g$ . Sea  $0 < r < R$ ,  $|z_0| < r$  y  $N \in \mathbb{N}$ . Pongamos:

$$f(z) = S_N(z) + E_N(z),$$

$$S_N(z) = \sum_{n=0}^N a_n z^n \quad y \quad E_N(z) = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n z^n$$

Tomemos  $|h| < r - |z_0|$ , así  $|z_0 + h| < r$ . Tenemos

$$\begin{aligned} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} - g(z_0) &= \frac{S_N(z_0 + h) - S_N(z_0)}{h} - S'_N(z_0) \\ &\quad + S'_N(z_0) - g(z_0) \\ &\quad + \frac{E_N(z_0 + h) - E_N(z_0)}{h} \end{aligned}$$

Ahora si  $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned} \left| \frac{E_N(z_0 + h) - E_N(z_0)}{h} \right| &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \left| \frac{(z_0 + h)^n - z_0^n}{h} \right| \\ &= \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| (|z_0|^{n-1} + |z_0|^{n-2}h + \cdots + h^{n-1}) \\ &\leq 2 \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| nr^{n-1} < \epsilon \end{aligned}$$

Para  $N$  suficientemente grande. Además como  $S'_N(z) \rightarrow g(z)$  cuando  $N \rightarrow \infty$  podemos elegir, a su vez,  $N$  suficientemente grande para que

$$|S'_N(z_0) - g(z_0)| < \epsilon$$

Fijemos un  $N$  que satisfaga las condiciones anteriores. Ahora podemos encontrar  $\delta > 0$  para que  $|h| < \delta$  cumpla que

$$\left| \frac{S_N(z_0 + h) - S_N(z_0)}{h} - S'_N(z_0) \right| < \epsilon.$$

Esto muestra que  $f'(z_0) = g(z_0)$  y por consiguiente  $f$  es derivable.  $\square$

**Corolario 6.1.1** La serie de potencias es infinitamente diferenciable. Las sucesivas derivadas se obtienen derivando término a término la serie. El radio de convergencia se conserva.

**Ejemplo 6.1.8** Hemos visto que la serie:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

tiene radio de convergencia infinito y por ende converge en  $\mathbb{C}$ . Ahora vemos que

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

Lo que nos dice que  $f$  resuelve la simple ecuación diferencial  $f'(z) = f(z)$ . La misma ecuación es resuelta por  $g(z) = e^z$ . Además  $f(0) = g(0) = 1$ . Por el Teorema de existencia y unicidad  $f(z) = g(z)$  para todo  $z$ . Hemos probado la importante fórmula.

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n \tag{6.1}$$

#### 6.1.4 Funciones analíticas

**Definición 6.1.4** Una función  $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  se dirá analítica si para cada  $z_0 \in \Omega$ , existe  $R > 0$  y  $a_n \in \mathbb{C}$ , tal que:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad \text{para } |z - z_0| < R$$

**Ejercicio 6.1.2** Si  $f$  es analítica tenemos la siguiente fórmula

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

para los coeficientes  $a_n$ .

**Teorema 6.1.4 (Operaciones entre series de potencias)** Supongamos que  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  y  $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_0)^n$  son series de potencias con radio de convergencia mayor o igual a  $R > 0$ . Entonces  $f + g$  y  $fg$  son funciones analíticas que tienen por desarrollo en serie

$$(f + g)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)(z - z_0)^n$$

$$(fg)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) (z - z_0)^n,$$

y los radios de convergencia de las series anteriores es, al menos,  $R$ . Si  $g(z) \neq 0$  para  $|z - z_0| < R$  entonces  $f(z)/g(z)$  es analítica y se desarrolla por una serie de radio de convergencia al menos  $R$ . Es posible expresar los coeficientes del cociente en términos de los coeficientes del dividendo y divisor, pero no nos detendremos en ello.

## 6.2 Solución de EDO mediante series de potencias. Método coeficientes indeterminados

### 6.2.1 Método coeficientes indeterminados

Dada una EDO

$$(1) \quad F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (6.2)$$

queremos desarrollar en series de potencias la solución general a esta ecuación. El método que estudiaremos se denomina *método de los coeficientes indeterminados*. Consiste en proponer el desarrollo en serie de la solución

$$y(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots$$

reemplazar  $y(x)$  por este desarrollo en la ecuación (1) y tratar de resolver la ecuación resultante para los coeficientes (indeterminados)  $a_n$ . El método suele funcionar en algunas ecuaciones. Desarrollemos un ejemplo.

**Ejemplo 6.2.9** Hallar el desarrollo en serie de la solución del siguiente pvi

$$\begin{cases} y' \\ y(0) \end{cases} = \begin{cases} y \\ 1 \end{cases}$$

La solución, es bien sabido, es  $y(x) = e^x$ , pero pretendemos reencontrarla por el método expuesto. Escribimos

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$$

$$y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + (n+1)a_{n+1}x^n + \dots$$

La igualdad  $y' = y$  implica que

$$\begin{aligned} a_1 &= a_0 \\ a_2 &= \frac{a_1}{2} \\ a_3 &= \frac{a_2}{3} \\ &\vdots \\ a_{n+1} &= \frac{a_n}{n+1} \end{aligned}$$

Si iteramos la fórmula  $a_{n+1} = a_n/(n + 1)$ , obtenemos

$$a_n = \frac{1}{n}a_{n-1} = \frac{1}{n(n-1)}a_{n-2} = \cdots = \frac{1}{n(n-1)\cdots 1}a_0 = \frac{a_0}{n!}.$$

Pero  $a_0 = y(0) = 1$ . Luego

$$a_n = \frac{1}{n!} \quad (6.3)$$

```

1 a=symbols('a0:6')
x=symbols('x')
3 y=sum([a[i]*x**i for i in range(6)])
Ecua=y.diff(x)-y
5 Ecuaciones=[Ecua.diff(x,i).subs(x,0)/factorial(i) for i in range(6)]
Ecuaciones=Ecuaciones[:-1]+[a[0]-1]
7 a_sol=solve(Ecuaciones,a)
y.subs(a_sol)

```

Vemos que la solución es

$$y(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720} + \cdots \quad (6.4)$$

## 6.2.2 Relaciones de recurrencia

La expresión  $a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1}$  es un ejemplo de relación de recurrencia.

**Definición 6.2.5** Una relación de recurrencia para una sucesión  $b_n$  de números reales es una sucesión de funciones  $f_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  que relaciona  $b_{n+1}$  con los términos anteriores de la sucesión por medio de la expresión

$$b_{n+1} = f_n(b_1, \dots, b_n). \quad (6.5)$$

Resolver una relación de recurrencia es encontrar una fórmula explícita de  $b_n$  como función de  $n$ .

Hay técnicas y métodos para resolver relaciones de recurrencia que guardan analogías con técnicas y métodos de resolver ecuaciones diferenciales. No vamos a desarrollar este importante tema en este curso, sugerimos la correspondiente wiki en la wikipedia. Sólo agregamos que SymPy resuelve relaciones recurrentes a través del comando `rsolve`.

**Ejemplo 6.2.10** Resolvamos con SymPy la sucesión de Fibonacci  $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ .

```

from sympy import *
2 n=symbols('n',integer=True)
y = Function('y')
4 f=Eq(quality(y(n),y(n-1)+y(n-2))
r solve(f,y(n)))

```

El resultado es

$$a_n = C_0 \left( \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \right)^n + C_1 \left( \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \right)^n \quad (6.6)$$

Las constantes arbitrarias  $C_0$  y  $C_1$  aparecen porque una relación de recurrencia no tiene una única solución. Se dice que una relación de recurrencia tiene orden  $k$  o es de  $k$ -términos si el coeficiente  $a_n$  se expresa en función de los  $k$  anteriores. En general la solución general de una relación de recurrencia de  $k$ -términos tiene  $k$  constantes arbitrarias. Por consiguiente, si queremos una única solución debemos tener  $k$  relaciones extras. Usualmente esto se consigue dando los valores de los  $k$ -primeros términos  $a_0, \dots, a_k$ . Por ejemplo, en la sucesión de Fibonacci si pedimos  $a_0 = a_1 = 1$ .

```

1 C0,C1=symbols('C0,C1')
2 A=C0*(1/2+sqrt(5)/2)**n+C1*(1/2-sqrt(5)/2)**n
3 Cval=solve([A.subs(n,0)-1,A.subs(n,1)-1],[C0,C1])
4 Fib=A.subs(Cval)
5 [Fib.subs(n,i).expand() for i in range(10)]

```

Los primeros números de Fibonacci que

$$[1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55]$$

### 6.2.3 Serie binomial

Se puede utilizar el método de coeficientes indeterminados para encontrar desarrollos en serie de una función  $f$ . La técnica consiste en encontrar un pvi que satisfaga  $f$  y le aplicamos el método de coeficientes indeterminados a ese pvi.

**Ejemplo 6.2.11** Encontrar el desarrollo en serie de la función

$$y(x) = (1 + x)^p \quad p \in \mathbb{R}$$

La función  $y(x)$  resuelve el pvi  $(1 + x)y'(x) = py$ ,  $y(0) = 1$ . apliquemos el método de coeficientes indeterminados a este pvi. Como

$$\begin{aligned} y &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \\ y' &= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + (n+1)a_{n+1} x^n + \cdots \end{aligned}$$

Tenemos

$$\begin{aligned} py &= pa_0 + pa_1 x + pa_2 x^2 + \cdots + pa_n x^n + \cdots \\ (1+x)y' &= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + (n+1)a_{n+1} x^n + \cdots \\ &\quad + a_1 x + 2a_2 x^2 + 3a_3 x^3 + \cdots + na_n x^n + \cdots \\ \hline 0 &= (1+x)y' - py = (a_1 - pa_0) + (a_1 + 2a_2 - pa_1)x + \cdots + ((n+1)a_{n+1} + na_n - pa_n)x^n + \cdots \end{aligned}$$

Tenemos la relación

$$a_{n+1} = \frac{(p-n)}{n+1} a_n.$$

Que es una relación de recurrencia de un sólo término. Estas relaciones se resuelven iterando la relación de manera sucesiva de modo de relacionar  $a_n$  con  $a_0$

$$a_n = \frac{(p-n+1)}{n} a_{n-1} = \frac{(p-n+1)(p-n+2)}{n(n-1)} a_{n-2} = \cdots = \frac{(p-n+1)(p-n+2)\cdots p}{n!} a_0.$$

Como  $a_0 = y(0) = 1$  vemos que

$$a_n = \frac{(p-n+1)(p-n+2)\cdots p}{n!}. \quad (6.7)$$

Si  $p \in \mathbb{N}$  entonces  $a_n = 0$  para  $n > p$ . Esto es claro, por otro lado, ya que en este caso  $(1+x)^p$  es un polinomio. Por la fórmula del binomio de Newton los coeficientes para  $p \in \mathbb{N}$  no son más que los coeficientes binomiales

$$a_n = \binom{p}{n}$$

Cuando  $p \in \mathbb{R}$  aún vamos a seguir denominado a  $a_n$ , dado por la fórmula (6.7), coeficiente binomial. La serie resultante se llama la serie binomial. Cuando  $p \in \mathbb{R} - \mathbb{N}$  es una serie infinita y no un polinomio. Notar que para  $p$  no entero positivo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|p-n|}{|n+1|} = 1$$

Luego la serie tiene radio de convergencia 1. Hemos demostrado así que vale la siguiente fórmula, que es una generalización de la fórmula binomial de Newton

$$(1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2!}x^2 + \cdots = 1 + \binom{p}{1}x + \binom{p}{2}x^2 + \cdots \quad (6.8)$$

Esta importante serie se denomina serie binomial.

```

1 a=symbols('a0:6')
2 x,p=symbols('x,p')
3 y=sum([a[i]*x**i for i in range(6)])
4 Ecua=(1+x)*y.diff(x)-p*y
5 Ecuaciones=[Ecua.diff(x,i).subs(x,0)/factorial(i) for i in range(6)]
6 Ecuaciones=Ecuaciones[:-1]+[a[0]-1]
7 a_sol=solve(Ecuaciones,a)
8 y.subs(a_sol)

```

$$y(x) = \frac{1}{6}(p-1)(p-2)px^3 + \frac{1}{2}(p-1)px^2 + px + 1 \quad (6.9)$$

## 6.2.4 Oscilador armónico

**Ejemplo 6.2.12** Consideremos la ecuación

$$y'' + \omega^2 y = 0.$$

Esta es una ecuación de segundo orden. Veamos si el método de coeficientes indeterminados nos lleva a la solución. Se tiene

$$\omega^2 y = \omega^2 a_0 + \omega^2 a_1 x + \omega^2 a_2 x^2 + \cdots + \omega^2 a_n x^n + \cdots$$

$$y'' = 2a_2 + 2 \cdot 3a_3 x + \cdots + (n+1)(n+2)a_{n+2}x^n + \cdots$$

-----

$$0 = y'' + \omega^2 y = (\omega^2 a_0 + 2a_2) + (\omega^2 a_1 + 2 \cdot 3a_3)x + \cdots + (\omega^2 a_n + (n+1)(n+2)a_{n+2})x^n + \cdots$$

Encontramos la relación de recurrencia de dos términos

$$a_{n+2} = -\frac{\omega^2 a_n}{(n+1)(n+2)}. \quad (6.10)$$

Notar que en este caso  $a_1$  y, obviamente,  $a_0$  no se relacionan con ningún coeficiente anterior. Por este motivo es de esperar que podamos elegir de manera arbitraria  $a_0$  y

$a_1$ . Esto está de acuerdo con el hecho que remarcamos antes de que en una relación de recurrencia de dos términos aparecen dos constantes arbitrarias y también está de acuerdo con que la solución general de una ecuación de segundo orden tiene dos constantes arbitrarias. En este caso resolvemos la relación de recurrencia relacionando  $a_n$  con  $a_0$  cuando  $n$  es impar y con  $a_1$  cuando es par. Concretamente si  $n = 2k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$a_{2k} = -\frac{\omega^2}{2k(2k-2)} a_{2k-2} = \dots = (-1)^k \frac{\omega^{2k}}{(2k)!} a_0.$$

En cambio si  $n = 2k+1$  es impar

$$a_{2k+1} = -\frac{\omega^2}{(2k+1)2k} a_{2k-1} = \dots = (-1)^k \frac{\omega^{2k}}{(2k+1)!} a_1.$$

Agrupando los términos pares y los impares de la serie de potencias resultante queda

$$\begin{aligned} y(x) &= a_0 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k)!} (\omega x)^{2k} + \frac{a_1}{\omega} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} (\omega x)^{2k+1} \\ &= a_0 \cos \omega x + \frac{a_1}{\omega} \sin \omega x \end{aligned} \tag{6.11}$$

La última igualdad es conocida de las asignaturas de análisis. Es fácil verificar, lo dejamos de ejercicio, que las series involucradas tienen radio de convergencia infinito.

Podemos hacer los cálculos anteriores con SAGE

```

1 a=symbols('a0:10')
2 orden=10
3 x,omega=symbols('x,omega')
4 y=sum([a[i]*x**i for i in range(orden)])
5 Ecua=y.diff(x,2)+omega**2*y
6 Ecuaciones=[Ecua.diff(x,i).subs(x,0)/factorial(i) for i in range(orden)]
7 Ecuaciones=Ecuaciones[:-2]
8 a_sol=solve(Ecuaciones,a[2:])
9 y.subs(a_sol)

```

## 6.2.5 Ecuación de Legendre. Primera aproximación

**Ejemplo 6.2.13** Consideremos la ecuación de Legendre.

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + p(p+1)y = 0, \tag{6.12}$$

donde  $p > 0$ . Esta ecuación aparece en muchas aplicaciones, por ejemplo en muchos problemas que involucran funciones definidas en esferas, como es el caso de los modos normales de vibración de una esfera y en problemas de potenciales esféricos

$$\begin{aligned} p(p+1)y &= p(p+1)a_0 + p(p+1)a_1x + p(p+1)a_2x^2 + \dots + p(p+1)a_nx^n + \dots \\ -2xy' &= -2a_1x - 4a_2x^2 - 6a_3x^3 + \dots - 2na_nx^n + \dots \\ (1-x^2)y'' &= 2a_2 + 2 \cdot 3a_3x + \dots + (n+1)(n+2)a_{n+2}x^n + \dots \\ &\quad - 2a_2x^2 - 2 \cdot 3a_3x^3 - \dots - (n-1)na_nx^n - \dots \end{aligned}$$

-----

$$\begin{aligned} 0 = (1-x^2)y'' - 2xy' + p(p+1)y &= (p(p+1)a_0 + 2a_2) + (p(p+1)a_1 - 2a_1 \cdot 3a_3)x + \dots \\ &\quad + ((p(p+1) - n(n+1))a_n + n(n+1)a_{n+2})x^n + \dots \end{aligned}$$

Obtenemos la relación de recurrencia

$$a_{n+2} = -\frac{(p-n)(p+n+1)}{(n+1)(n+2)}a_n \quad (6.13)$$

Ahora vamos a dividir la serie en los términos pares e impares

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} x^{2k+1}$$

A cada una de estas series le podemos aplicar el criterio de la razón usando la fórmula de recurrencia de arriba. Por ejemplo para los términos pares

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_{2k+2}x^{2k+2}|}{|a_{2k}x^{2k}|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|p_0 - 2k||p_0 + 2k + 1|}{(2k+1)(2k+2)} |x|^2 = |x|^2$$

De modo que la serie tiene radio de convergencia 1. La misma situación ocurre con la serie de términos impares. Esto muestra que la serie en su conjunto también tiene radio de convergencia igual a 1. Era previsible que el radio de convergencia no fuese mayor a 1, pues la forma explícita de la ecuación de la ecuación de Legendre es

$$y'' - \frac{2x}{(1-x^2)}y' + \frac{p(p+1)}{(1-x^2)}y = 0.$$

Se observa que 1 y -1 son puntos singulares de la ecuación.

Podemos relacionar cualquier coeficiente de índice par  $a_{2k}$  con el  $a_0$  y cualquiera con índice impar  $a_{2k+1}$  con el  $a_1$ . Esto lo resolveremos con SymPy

```

1 a=symbols('a0:10')
2 orden=10
3 x,p=symbols('x,p')
4 y=sum([a[i]*x**i for i in range(orden)])
5 Ecua=(1-x**2)*y.diff(x,2)-2*x*y.diff(x)+p*(p+1)*y
6 Ecuaciones=[Ecua.diff(x,i).subs(x,0)/factorial(i) for i in range(orden)]
7 Ecuaciones=Ecuaciones[:-2]
8 a_sol=solve(Ecuaciones,a[2:])
9 {ind:a_sol[ind].factor() for ind in a[2:]}
```

$$\begin{aligned}
 a_2 &= -\frac{a_0 p}{2} (p+1), \\
 a_3 &= -\frac{a_1}{6} (p-1)(p+2), \\
 a_4 &= \frac{a_0 p}{24} (p-2)(p+1)(p+3), \\
 a_5 &= \frac{a_1}{120} (p-3)(p-1)(p+2)(p+4), \\
 a_6 &= -\frac{a_0 p}{720} (p-4)(p-2)(p+1)(p+3)(p+5), \\
 a_7 &= -\frac{a_1}{5040} (p-5)(p-3)(p-1)(p+2)(p+4)(p+6), \\
 a_8 &= \frac{a_0 p}{40320} (p-6)(p-4)(p-2)(p+1)(p+3)(p+5)(p+7), \\
 a_9 &= \frac{a_1}{362880} (p-7)(p-5)(p-3)(p-1)(p+2)(p+4)(p+6)(p+8).
 \end{aligned}$$

En general

$$a_{2n} = \frac{(p+1)(p_0+3)\cdots(p+2n-1) \times p(p-2)\cdots(p-2n+2)}{(2n)!} a_0$$

y

$$a_{2n+1} = \frac{(p+2)(p+4) \cdots (p+2n) \times (p-1)(p-3) \cdots (p-2n+1)}{(2n+1)!} a_1$$

Podemos elegir  $a_0$  y  $a_1$  de manera arbitraria (esto está de acuerdo con que en una ecuación de orden 2 aparece 2 constantes de integración) y por las relaciones anteriores deducir el valor de los restantes  $a_n$ .

Un caso especial se plantea cuando  $p \in \mathbb{N}$ . En esa situación vemos que infinitos de los  $a_n$  resultan iguales a cero. De hecho una de las series, la de términos impares o la de términos pares acorde a que  $p$  sea par o impar respectivamente, se trunca. Supongamos que esto ocurre con la serie de términos impares, es decir  $p$  es entero positivo impar. Si ahora tomamos  $a_0 = 0$  toda la serie de términos pares se hará cero. Para  $a_1$  elijo algún valor no nulo y esto me garantiza que los términos impares son no nulos hasta el término  $a_n$ , pero a partir de allí también se hacen cero. Es usual elegir  $a_1$  para que  $y(1) = 1$ . Nos queda definida así una función polinómica que se denomina polinomio de Legendre y se denota por  $P_p$ . Cuando  $p$  es par hacemos una construcción análoga, quedando un polinomio  $P_p$ , con todas potencias pares, tal que  $P_p(1) = 1$ .

Todos estos cálculos los programamos en la siguiente función de SymPy. Esta función tiene un argumento  $n$  que debe ser un número natural y devuelve el correspondiente polinomio de Legendre.

```

1 def Legendre(n):
2     orden=n+2
3     a=symbols('a0:%s'%orden)
4     x=symbols('x')
5     y=sum([a[i]*x**i for i in range(orden)])
6     Ecua=(1-x**2)*y.diff(x,2)-2*x*y.diff(x)+n*(n+1)*y
7     Ecuaciones=[Ecua.diff(x,i).subs(x,0)/factorial(i) for i in range(orden-2)]
8     s=symbols('s')
9     if n%2==0:
10         Ecuaciones+=[a[0]-s,a[1]]
11     else:
12         Ecuaciones+=[a[0],a[1]-s]
13     Sol_a_n=solve(Ecuaciones,a)
14     y=y.subs(Sol_a_n)
15     sol=solve(y.subs(x,1)-1,s)
16     return y.subs(s,sol[0])

```

Esto es una función de Python. Se pueden copiar las líneas de arriba en una consola de Python, pero lo más usual es preparar un archivo aparte que luego se carga en una sesión de SymPy. Las sentencias para cargar el archivo son las dadas aquí debajo, donde hemos supuesto que el archivo se llama `Legendre.py` y está en el directorio `/home/fdmazzone/Git/Ecuaciones_Diferenciales/scripts`

```

1 import os
2 os.chdir('/home/fdmazzone/Git/Ecuaciones_Diferenciales/scripts')
3 from Legendre import Legendre

```

Con la ayuda de esta función podemos generar rápidamente una tabla de polinomios de Legendre

```

1 for n in range(1,6):
...     Legendre(n)
3 ...
X
5 3*x**2/2 - 1/2
5*x**3/2 - 3*x/2
7 35*x**4/8 - 15*x**2/4 + 3/8
63*x**5/8 - 35*x**3/4 + 15*x/8

```

y graficarlos

```

1 for n in range(2,8):
2     p1=plot(Legendre(n),(x,-1,1),show=False)
3     p.append(p1[0])
4
p.show()

```

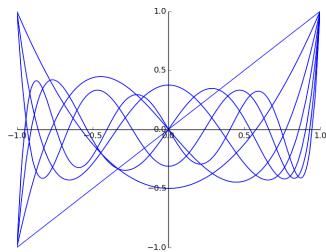


Figura 6.1: Polinomios de Legendre hasta el orden 8

### 6.3 Teorema fundamental sobre puntos ordinarios

**Definición 6.3.6** Dada la ecuación diferencial

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$$

donde  $p, q$  son funciones definidas en algún intervalo abierto  $I$ , diremos que  $x_0 \in I$  es un *punto ordinario* de la ecuación si  $p$  y  $q$  son analíticas en  $x_0$ . Un punto no ordinario se llama *singular*.

**Ejemplo 6.3.14** En la ecuación del oscilador armónico

$$y'' + \omega^2 y = 0$$

todo punto es ordinario.

**Ejemplo 6.3.15** En la ecuación de Legendre

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + p(p+1)y = 0$$

1 y -1 son puntos singulares, otros valores de  $x$  son puntos ordinarios.

Antes de ir al Teorema más importante de esta sección vamos a enunciar un lema que nos resultará útil.

**Lema 6.3.1 (Comparación)** Supongamos que tenemos una relación de recurrencia

$$a_n = f_n(a_0, \dots, a_{n-1}) \quad n \geq 2 \tag{6.14}$$

donde las funciones  $f_n$  son crecientes respecto a sus todas las variables. Si la sucesión  $\{a_n\}$  resuelve (6.14), la sucesión  $\{b_n\}$  resuelve la desigualdad

$$b_n \leq f_n(b_0, \dots, b_{n-1}) \quad n \geq 2$$

y además vale que  $b_0 \leq a_0$  y  $b_1 \leq a_1$ , entonces  $b_n \leq a_n$  para todo  $n = 2, 3, \dots$ . En particular la afirmación se satisface cuando  $f_n$  es lineal con coeficientes positivos,

es decir  $f_n(a_0, \dots, a_{n-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k^n a_k$ , con  $\alpha_k^n \geq 0$  para  $k = 0, \dots, n-1$ .

*Dem.* Es muy sencilla y la dejamos de ejercicio (evidentemente hay que utilizar el principio de inducción).  $\square$

**Teorema 6.3.5 (Teorema Fundamental Sobre Puntos Ordinarios.)** Sea  $x_0$  un punto ordinario de la ecuación

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$$

y sean  $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ . Existe una solución de la ecuación que es analítica en un entorno de  $x_0$  y que satisface  $y(x_0) = a_0$  e  $y'(x_0) = a_1$ . El radio de convergencia del desarrollo en serie de  $y$  es al menos tan grande como el mínimo de los radios de convergencia de los desarrollos en serie de  $p$  y  $q$ .

*Dem.* Supongamos, sin perder generalidad, que  $x_0 = 0$ . Consideremos que los desarrollos en serie de potencias de  $p$  y  $q$ .

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \quad y \quad q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n. \quad (6.15)$$

Supongamos que ambas series convergen en  $|x| < R$ , para cierto  $R > 0$ . Vamos a aplicar el método de coeficientes indeterminados. Tenemos

$$\begin{aligned} y &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots \\ y' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1} x^n = a_1 + 2a_2 x + \cdots + (n+1)a_{n+1} x^n + \cdots \\ y'' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)a_{n+2} x^n = 2a_2 + 2 \cdot 3a_3 x + \cdots + (n+1)(n+2)a_{n+2} x^n + \cdots. \end{aligned}$$

Por el Teorema 6.1.4

$$\begin{aligned} q(x)y &= \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n a_k q_{n-k} \right) x^n, \\ p(x)y' &= \left( \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1} x^n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n (k+1)a_{k+1} p_{n-k} \right) x^n. \end{aligned}$$

Sustituyendo estos, y los anteriores, desarrollos en la ecuación, obtenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ (n+1)(n+2)a_{n+2} + \sum_{k=0}^n a_k q_{n-k} + \sum_{k=0}^n (k+1)a_{k+1} p_{n-k} \right\} x^n.$$

De esta forma deducimos la ecuación de recurrencia que se satisface en una ecuación lineal general de segundo orden en un punto ordinario.

$$a_{n+2} = -\frac{\sum_{k=0}^n \{a_k q_{n-k} + (k+1)a_{k+1} p_{n-k}\}}{n(n+1)} \quad (6.16)$$

Dados los coeficientes  $a_0$  y  $a_1$  la relación de recurrencia determina los  $a_n$ ,  $n \geq 2$ . Queda ver que la serie así definida tiene radio de convergencia al menos  $R$ .

Tomemos  $r$  tal que  $0 < r < R$ . Como las series (6.15) tienen radio de convergencia al menos  $R$ , convergen absolutamente para  $x = r$ . El criterio de convergencia de series conocido como criterio del resto implica que  $p_n r^n, q_n r^n$  son sucesiones que tienden a 0. En particular están acotadas, y por ello existe  $M > 0$  tal que

$$|p_n|r^n, |q_n|r^n \leq M.$$

Tomando módulo en (6.16) y usando las desigualdades de arriba concluimos

$$\begin{aligned} |a_{n+2}| &\leq \frac{M}{(n+1)(n+2)r^n} \sum_{k=0}^n (|a_k| + (k+1)|a_{k+1}|) r^k \\ &\leq \frac{M}{(n+1)(n+2)r^n} \sum_{k=0}^n (|a_k| + (k+1)|a_{k+1}|) r^k + \frac{M|a_{n+1}|r}{(n+1)(n+2)}. \end{aligned}$$

En la última desigualdad se agregó un término en apariencia por capricho, pero este término nos servirá para complementar una expresión en el futuro. Definamos la sucesión  $b_n$  como la solución de la siguiente relación de recurrencia

$$b_{n+2} = \frac{M}{(n+1)(n+2)r^n} \sum_{k=0}^n (b_k + (k+1)b_{k+1}) r^k + \frac{Mb_{n+1}r}{(n+1)(n+2)}, \quad (6.17)$$

con las condiciones iniciales  $b_0 = |a_0|$  y  $b_1 = |a_1|$ . Por el Lema 6.3.1 tenemos que  $|a_n| \leq b_n$  para todo  $n$ . Aplicando (6.17) a  $n-1$  en lugar de  $n$

$$b_{n+1} = \frac{M}{n(n+1)r^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} (b_k + (k+1)b_{k+1}) r^k + \frac{Mb_nr}{n(n+1)}, \quad (6.18)$$

Multiplicando (6.17) por  $r$  y usando 6.18

$$\begin{aligned} rb_{n+2} &= \frac{M}{(n+1)(n+2)r^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} (b_k + (k+1)b_{k+1}) r^k \\ &\quad + \frac{Mr(b_n + (n+1)b_{n+1})}{(n+1)(n+2)} + \frac{Mb_{n+1}r^2}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n(n+1)b_{n+1} - Mb_nr}{(n+1)(n+2)} + \frac{Mr(b_n + (n+1)b_{n+1})}{(n+1)(n+2)} \\ &\quad + \frac{Mb_{n+1}r^2}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{(n(n+1) + Mr(n+1) + Mr^2)}{(n+1)(n+2)} b_{n+1}, \end{aligned}$$

Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|b_{n+2}x^{n+2}|}{|b_{n+1}x^{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n(n+1) + Mr(n+1) + Mr^2)}{(n+1)(n+2)} \frac{|x|}{r} = \frac{|x|}{r}.$$

Luego la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$  converge para  $|x| < r$ . Como  $|a_n| \leq b_n$  la misma afirmación es cierta para  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ . Como  $r < R$  fue elegido arbitrariamente, tenemos que  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  converge en  $|x| < R$ .  $\square$

## 6.4 Puntos singulares, método de Frobenius

### 6.4.1 Series de Frobenius

**Definición 6.4.7 (Singularidades, Polos.)** Sea  $f$  definida en un intervalo abierto  $I$  con valores en  $\mathbb{R}$ . Diremos que  $f$  posee un *punto singular* de orden  $k$  en  $x_0 \in I$ , si la función  $(x - x_0)^k f(x)$  es analítica en un entorno de  $x_0$ . Vale decir que  $(x - x_0)^k f(x)$  se desarrolla en serie de potencias.

$$(x - x_0)^k f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n.$$

En consecuencia

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^{n-k} = \frac{a_0}{(x - x_0)^k} + \cdots + \frac{a_{k-1}}{(x - x_0)} + a_k + a_{k+1}(x - x_0) + \cdots.$$

Este tipo de desarrollo en serie es un caso particular de serie de Laurent.

Cuando el orden de un polo es 1 se lo denomina *punto simple*.

**Definición 6.4.8** Un punto singular  $x_0$  de la ecuación

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$$

se llama singular regular si  $p(x)$  tiene un polo a lo sumo simple en  $x_0$  y  $q(x)$  tiene un polo a lo sumo de orden 2 en  $x_0$ . Es decir

$$(x - x_0)p(x) \quad \text{y} \quad (x - x_0)^2q(x)$$

son analíticas en  $x_0$ .

Algunas de las ecuaciones más importantes de la Física-Matemática tienen puntos singulares regulares.

**Ejemplo 6.4.16** 1 y -1 son puntos singulares regulares de la ecuación de Legendre de orden  $p$

$$y'' - \frac{2x}{1-x^2}y' + \frac{p(p+1)}{1-x^2}y = 0$$

**Ejemplo 6.4.17** 0 es un punto singular regular de la ecuación de Bessel de orden  $p$

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{p^2}{x^2}\right)y = 0$$

El método de coeficientes indeterminados puede fallar en los puntos donde  $p$  y  $q$  tienen polos. En su lugar vamos a proponer otro tipo de desarrollo en serie. Lo vamos a motivar con un ejemplo.

**Ejemplo 6.4.18** Consideremos la ecuación de Euler, para  $p, q \in \mathbb{R}$

$$y'' + \frac{p}{x}y' + \frac{q}{x^2}y = 0$$

o equivalentemente

$$x^2y'' + pxy' + qy = 0$$

Aquí es fácil verificar que las funciones

$$P(x) := \frac{p}{x} \quad \text{y} \quad Q(x) := \frac{q}{x^2}$$

satisfacen que

$$\frac{Q' + 2PQ}{Q^{\frac{3}{2}}} \quad \text{es constante.}$$

Cuando se daba esta condición, el ejercicio 6 de la página 102 del libro de Simmons nos enseña que podemos reducir la ecuación a una ecuación con coeficientes constantes por medio del cambio de la variable independiente

$$z = \int \sqrt{Q} dx$$

En este caso, obviando las constantes, el cambio de variables que debemos hacer es

$$z = \ln(x)$$

Aquí asumimos  $x > 0$ . Seguramente, a esta altura del curso, el alumno ya hizo los cálculos que muestran que la ecuación de Euler se transforma, por medio del cambio de variables propuesto, en la ecuación a coeficientes constantes

$$y'' + (p - 1)y' + qy = 0.$$

Cuya ecuación característica es

$$\lambda^2 + (p - 1)\lambda + q = 0$$

Resolviendo esta ecuación con SymPy

```

1 s, p, q=symbols('s, p, q')
2 Raices=solve(s**2+(p-1)*s+q, s)
3 Raices[0]
4 -p/2 - sqrt(p**2 - 2*p - 4*q + 1)/2 + 1/2
5 Raices[1]
6 -p/2 + sqrt(p**2 - 2*p - 4*q + 1)/2 + 1/2

```

Obtenemos las raíces

$$s_1 = -\frac{p-1}{2} - \frac{\sqrt{p^2 - 2p - 4q + 1}}{2} \quad y \quad s_2 = -\frac{p-1}{2} + \frac{\sqrt{p^2 - 2p - 4q + 1}}{2}.$$

Si  $s_1 \neq s_2$  dos soluciones linealmente independientes son:

$$y_1(z) = e^{s_1 z} \quad y \quad y_2(z) = e^{s_2 z}$$

Si  $s_1 = s_2$

$$y_1(z) = e^{s_1 z} \quad y \quad y_2(z) = ze^{s_1 z}$$

son soluciones linealmente independientes. Asumamos que las raíces  $s_1$  y  $s_2$  son reales, entonces como  $z = \ln(x)$ , las soluciones en términos de la variable  $x$  son

$$y_1(x) = x^{s_1} \quad y \quad y_2(x) = x^{s_2} \quad \text{para } s_1 \neq s_2$$

y

$$y_1(x) = x^{s_1} \quad y \quad y_2(x) = \ln(x)x^{s_1} \quad \text{para } s_1 = s_2$$

Estas funciones, a menos que  $s_1$  y  $s_2$  sean enteros positivos, ya no son analíticas en cero, pues una función analítica es derivable infinitas veces y claramente hay derivadas (o las mismas funciones si las raíces son negativas) de  $y_1$  e  $y_2$  que son discontinuas.

De modo que, como era de suponer, no podremos encontrar en general en un punto singular una solución analítica. Vamos a intentar flexibilizar nuestro método para incluir otro tipo de desarrollo en serie, que está inspirado en los resultados obtenidos para la ecuación de Euler.

**Definición 6.4.9** A una expresión de la forma

$$y(x) = (x - x_0)^m (a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots),$$

donde  $m \in \mathbb{R}$  y  $a_0 \neq 0$ , lo llamaremos Serie de Frobenius.

Las series de Frobenius no son series de potencias ni de Laurent ya que en ellas aparecen potencias no enteras.

El método de Frobenius consiste en proponer como solución de una ecuación diferencial una serie de Frobenius. Este método tiene éxito, por ejemplo, en los puntos singulares regulares de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden.

**Ejemplo 6.4.19** En este ejemplo ilustramos el método de Frobenius. Consideremos la ecuación

$$y'' + \left(\frac{1}{2x} + 1\right)y' - \left(\frac{1}{2x^2}\right)y = 0. \quad (6.19)$$

Notar que  $x = 0$  es regular singular. Desarrollaremos el método de Frobenius, primero "a mano" y por último con SymPy.

Proponemos como solución

$$y(x) = x^m \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+m}$$

y calculamos

$$-\frac{1}{2x^2}y = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2} x^{m+n-2} = -\frac{a_0}{2} x^{m-2} - \frac{a_1}{2} x^{m-1} - \dots - \frac{a_{n+2}}{2} x^{m+n} - \dots$$

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (m+n)a_n x^{m+n-1} = ma_0 x^{m-1} + (m+1)a_1 x^m + \dots + (m+n+1)a_{n+1} x^{m+n} + \dots$$

$$\frac{1}{2x}y' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(m+n)a_n}{2} x^{m+n-2} = \frac{ma_0}{2} x^{m-2} + \frac{(m+1)a_1}{2} x^{m-1} + \dots + \frac{(m+n+2)a_{n+2}}{2} x^{m+n} + \dots$$

$$\begin{aligned} y'' &= \sum_{n=0}^{\infty} (m+n)(m+n-1)a_n x^{m+n-2} \\ &= m(m-1)a_0 x^{m-2} + (m+1)ma_1 x^{m-1} + \dots + (m+n+2)(m+n+1)a_{n+2} x^{m+n} + \dots \end{aligned}$$

Sumando las cuatro igualdades miembro a miembro y sustiyendo en (6.19)

$$\begin{aligned} 0 &= \left(-\frac{1}{2} + \frac{m}{2} + m(m-1)\right) a_0 x^{m-2} + \left(-\frac{a_1}{2} + ma_0 + \frac{(m+1)a_1}{2} + (m+1)ma_1\right) x^{m-1} + \dots \\ &\quad + \left(-\frac{a_{n+2}}{2} + (m+n+1)a_{n+1} + \frac{(m+n+2)a_{n+2}}{2} + (m+n+2)(m+n+1)a_{n+2}\right) x^{m+n} + \dots \\ &= \frac{1}{2} (2m+1) (m-1)a_0 x^{m-2} + \frac{1}{2} (2a_0 + (1+2(m+1))a_1) mx^{m-1} + \dots \\ &\quad + \frac{1}{2} (2a_{n+1} + (2(m+n+2)+1)a_{n+2}) (m+n+1)x^{m+n} + \dots \end{aligned}$$

Igualando a cero los coeficientes de cada exponente obtenemos las ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (2m+1) (m-1)a_0 &= 0 \\ \frac{1}{2} (2a_0 + (1+2(m+1))a_1) m &= 0 \\ &\vdots \\ (2a_{n+1} + (2(m+n+2)+1)a_{n+2}) (m+n+1) &= 0 \end{aligned} \quad (6.20)$$

Despejando de la última ecuación nos queda la relación de recurrencia de un término

$$a_{n+2} = -\frac{2a_{n+1}}{2(m+n+2)+1}. \quad (6.21)$$

Para llegar a esta igualdad debemos suponer  $2(m + n + 2) + 1 \neq 0$ . La primera de las ecuaciones en (6.20) es importante puesto que determina el valor de  $m$ . Se llama ecuación indicial. Vemos que si tomamos  $m = 1$  o  $m = -1/2$  se resuelve la primera ecuación. Supongamos  $m = 1$ . Entonces (6.21) se transforma en

$$a_{n+2} = -\frac{2a_{n+1}}{2n+7}, \quad n = -1, 0, \dots$$

Con ayuda de la relación de recurrencia podemos determinar el radio de convergencia de la serie sin necesidad de conocer el valor de los  $a_n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2|x|}{2n+7} = 0.$$

Por consiguiente el radio de convergencia es infinito. Iterando la relación de recurrencia llegamos

$$a_n = -\frac{2}{2n+3}a_{n-1} = \frac{2}{(2n+3)(2n+1)}a_{n-2} = \dots = \frac{(-1)^n 2^n}{(2n+3)(2n+1)\dots 5}a_0.$$

El valor de  $a_0$  determina al resto de los  $a_n$  y se puede elegir arbitrariamente. Supongamos que  $a_0 = 1$ . Hemos hallado la siguiente solución

$$y_1(x) = x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{(2n+3)(2n+1)\dots 5} x^n. \quad (6.22)$$

Cuando  $m = -\frac{1}{2}$ , la relación de recurrencia es

$$a_{n+1} = -\frac{a_n}{n+1}.$$

Por ende

$$a_n = -\frac{a_{n-1}}{n} = \frac{1}{n(n-1)}a_{n-2} = \dots = \frac{(-1)^n}{n!}a_0 = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Conseguimos la solución

$$y_2(x) = x^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n = \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \quad (6.23)$$

Estas dos soluciones son linealmente independientes. Para justificar esta afirmación basta ver que  $y_1(0) = 0$  y  $\lim_{x \rightarrow 0^+} y_2(x) = +\infty$ . Estas igualdades hacen imposible la relación  $c_1 y_1 + c_2 y_2 = 0$  a menos que  $c_1 = c_2 = 0$ .

Resolvamos el ejemplo con SymPy.

```

1 orden=5
2 a=symbols('a0:%s' %orden)
3 x,m=symbols('x,m')
4 y=x**m*sum([a[i]*x**i for i in range(orden)])
5 Ecua=y.diff(x,2)+(1/(2*x)+1)*y.diff(x,1)-(1/(2*x**2))*y
6 #Dividimos por m-2 asi todos los exponentes son enteros positivos
7 Ecua=Ecua/x**((m-2))
8 Ecua=Ecua.expand()
9 Ecuaciones=[Ecua.diff(x,i).subs(x,0)/factorial(i) for i in range(orden)]
10 for ec in Ecuaciones:
11     ec
12 ...
13 a0*m**2 - a0*m/2 - a0/2
14 a0*m + a1*m**2 + 3*a1*m/2
15 a1*m + a1 + a2*m**2 + 7*a2*m/2 + 5*a2/2
16 a2*m + 2*a2 + a3*m**2 + 11*a3*m/2 + 7*a3
17 a3*m + 3*a3 + a4*m**2 + 15*a4*m/2 + 27*a4/2

```

Con esta parte del script hemos generado la lista de las 5 primeras ecuaciones. Resolvamos la ecuación indicial

```
1 Sol_Ecua_Ind=solve(Ecuaciones[0],m)
2 Sol_Ecua_Ind
[-1/2, 1]
```

Sustituyamos los valores de  $m$  en la lista de ecuaciones, agreguemos la ecuación  $a_0 = 1$ , resolvamos para los  $a_i$  y sustituymos la solución en  $y$ . Obtenemos la primer solución (truncada)

```
1 Ecuaciones1=[ec.subs(m,Sol_Ecua_Ind[1]) for ec in Ecuaciones]
Ecuaciones1
2 [0, a0 + 5*a1/2, 2*a1 + 7*a2, 3*a2 + 27*a3/2, 4*a3 + 22*a4]
Ecuaciones1[0]=a[0]-1
Ecuaciones1
3 [a0 - 1, a0 + 5*a1/2, 2*a1 + 7*a2, 3*a2 + 27*a3/2, 4*a3 + 22*a4]
4 sol=solve(Ecuaciones1,a)
y1=y.subs(sol).subs(m,Sol_Ecua_Ind[1])
5 y1
x*(16*x**4/3465 - 8*x**3/315 + 4*x**2/35 - 2*x/5 + 1)
```

La segunda solución se obtiene

```
1 Ecuaciones2=[ec.subs(m,Sol_Ecua_Ind[0]) for ec in Ecuaciones]
Ecuaciones2
2 [0, -a0/2 - a1/2, a1/2 + a2, 3*a2/2 + 9*a3/2, 5*a3/2 + 10*a4]
Ecuaciones2[0]=a[0]-1
3 sol=solve(Ecuaciones2,a)
y2=y.subs(sol).subs(m,Sol_Ecua_Ind[0])
4 (x**4/24 - x**3/6 + x**2/2 - x + 1)/sqrt(x)
```

## 6.4.2 Ecuación de Bessel, funciones de Bessel de primera especie

### 6.4.2.1 Relaciones de recurrencia y solución por el método de Frobenius

**Definición 6.4.10** Recordemos a la ecuación de Bessel de orden  $p$  ( $p > 0$ )

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{p^2}{x^2}\right)y = 0$$

En  $x = 0$  la ecuación de Bessel tiene un punto singular regular. Vamos a aplicarle el método de Frobenius. Trabajaremos exclusivamente con SymPy.

```
1 orden=8
2 a,x,m,p=symbols(['a0:%s'%orden, 'x','m','p'])
3 y=x**m*sum([a[i]*x**i for i in range(orden)])
4 EDif=y.diff(x,2)+1/x*y.diff(x,1)+(1-p**2/x**2)*y
5 EDif=(EDif/x**2).simplify()
6 ECoef=[EDif.diff(x,i).subs(x,0)/factorial(i) for i in range(orden)]
SoleInd=solve(ECoef[0],m)
```

Las raíces de la ecuación indicial son

$$m = p \quad y \quad m = -p \tag{6.24}$$

Vamos a trabajar con la raíz  $m = p$ .

```

1 ECoeffA=[ec.subs(m,Sol_Ecua_Ind[1]) for ec in ECoef]
2 for ec in ECoeffA:
3     ...     pprint(ec)

```

$$\begin{aligned}0 &= 0 \\0 &= 2a_1p + a_1 \\0 &= a_0 + 4a_2p + 4a_2 \\0 &= a_1 + 6a_3p + 9a_3 \\0 &= a_2 + 8a_4p + 16a_4 \\0 &= a_3 + 10a_5p + 25a_5 \\0 &= a_4 + 12a_6p + 36a_6 \\0 &= a_5 + 14a_7p + 49a_7\end{aligned}$$

Se puede observar que estas ecuaciones relacionan  $a_n$  con  $a_{n-2}$ , i.e. que son relaciones de dos términos. Podemos hacer explícita la relación

```

for i in range(1,orden):
    iter=solve(ECoeffA[i],a[i])[0].factor()
    print str(a[i])+'='+str(iter)
a1=0
a2=a0/(4*(p + 1))
a3=a1/(3*(2*p + 3))
a4=a2/(8*(p + 2))
a5=a3/(5*(2*p + 5))
a6=a4/(12*(p + 3))
a7=a5/(7*(2*p + 7))

```

La ecuación  $a_1(2p + 1) = 0$  no fue correctamente resuelta por SymPy. SymPy consigna la solución  $a_1 = 0$ , pero si  $p = -1/2$  cualquier  $a_1$  es solución. Este caso lo estudiaremos separadamente después, por ahora supondremos  $p \neq -1/2$ . Luego la primera ecuación implica que  $a_1 = 0$  y por consiguiente, puesto que todo  $a_n$ , con  $n$  impar, se relaciona con  $a_1$  vamos a tener que  $a_n = 0$  cuando  $n$  es impar. Más abajo veremos que SymPy confirma esta aseveración. Ahora resolvamos las ecuaciones, en el sentido de expresar todos los coeficientes en función de  $a_0$ . No pedimos que nos resuelva la ecuación para  $a_0$ , pues, como dijimos,  $a_0$  es arbitrario.

```

sol=solve(ECoeffA,a[1:])
for i in sol:
...     print str(i)+'='+str(sol[i].factor())
...
a1=0
a5=0
a7=0
a2=a0/(4*(p + 1))
a6=a0/(384*(p + 1)*(p + 2)*(p + 3))
a3=0
a4=a0/(32*(p + 1)*(p + 2))

```

No queda muy claro cual es la ley que siguen los números 4, 32, 384, etc. que aparecen en el denominador. De modo que nos asistiremos "manualmente" a partir de la relación de recurrencia que es

$$a_{2n} = -\frac{1}{4n(p+n)} a_{2n-2} \quad (6.25)$$

Iterando esta relación

$$\begin{aligned} a_{2n} &= -\frac{1}{4n(p+n)}a_{2n-2} \\ &= \frac{1}{4n(p+n-1)} \cdot \frac{1}{4(n-1)(p+n-1)}a_{2n-4} = \dots \\ &= (-1)^n \frac{1}{4^n n!(p+n)(p+n-1)\dots(p+1)}a_0. \end{aligned}$$

Obtenemos la solución

$$y(x) = x^p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a_0}{4^n n!(p+n)(p+n-1)\dots(p+1)} x^{2n} \quad (6.26)$$

Más adelante veremos que cierta elección especial de  $a_0$  no lleva a lo que denominaremos funciones de Bessel.

`y.subs(sol)`

$$x^m \left( -\frac{a_0 x^6}{384(p+1)(p+2)(p+3)} + \frac{a_0 x^4}{32(p+1)(p+2)} - \frac{a_0 x^2}{4p+4} + a_0 \right),$$

el output confirma (6.26).

#### 6.4.2.2 Función Gamma y la función de Bessel de primera especie

Nuestro objetivo es encontrar dos soluciones linealmente independientes de la ecuación de Bessel. Hemos encontrado una que corresponde a la solución de la ecuación de índices  $m = p$ , la otra surgirá de la solución  $m = -p$ . Pero aún nos restaría elegir el valor de  $a_0$ . El criterio que utilizaremos para elegirlo será que nos simplifique lo más posible la expresión (6.26). Si  $p$  fuese un entero positivo, eligiendo  $a_0$  como  $1/2^p p!$  la expresión quedaría

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(p+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}$$

No obstante, nos previene utilizar este  $a_0$  el hecho de que  $p$  podría no ser entero, y en ese caso no es claro qué significa  $p!$ . El propósito de esta subsección es introducir una extensión de la función factorial a una función de variable real.

**Definición 6.4.11** Para  $p > 0$  definimos la función Gamma por

$$\Gamma(p) := \int_0^\infty t^{p-1} e^{-t} dt \quad (6.27)$$

En la clase demostraremos que la integral impropia en la definición converge. Además demostraremos las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} \Gamma(1) &= 1 \\ \Gamma(p+1) &= p\Gamma(p) \end{aligned} \quad (6.28)$$

Estas igualdades implican, cuando  $p = n$  es entero positivo, que  $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = \dots = n!\Gamma(1) = n!$ . Luego podemos ver a la función gamma como una extensión de la

función factorial a los reales no negativos. Notar que

$$\lim_{p \rightarrow 0^+} \Gamma(p) = \lim_{p \rightarrow 0^+} \frac{\Gamma(p+1)}{p} = +\infty.$$

La función Gamma tiende a infinito cuando nos acercamos a cero por derecha.

La Definición 6.27 es válida para  $p > 0$ . Utilizando la relación (6.28) podemos extender la función a  $p < 0$ . Concretamente, supongamos que  $-1 < p < 0$ , en este caso definimos

$$\Gamma(p) := \frac{\Gamma(p+1)}{p}. \quad (6.29)$$

Observar que el segundo miembro esta bien definido pues  $p+1 > 0$ . Como consecuencia de esta definición tendremos

$$\lim_{p \rightarrow 0^-} \Gamma(p) = \lim_{p \rightarrow 0^-} \frac{\Gamma(p+1)}{p} = -\infty.$$

y

$$\lim_{p \rightarrow -1^+} \Gamma(p) = \lim_{p \rightarrow -1^+} \frac{\Gamma(p+1)}{p} = -\infty.$$

Ahora podemos extender  $\Gamma$  a  $p \in (-2, 1)$ . Pues podemos usar la fórmula (6.29) y el hecho de que ya tenemos definida la función Gamma en  $(-1, 0)$ . Continuando de esta forma, definimos  $\Gamma$  para cualquier valor de  $p < 0$  y  $p \notin \mathbb{Z}$ . Si  $n$  es un entero negativo ocurre que

$$\lim_{p \rightarrow n^+} \Gamma(p) = (-1)^n \infty \quad y \quad \lim_{p \rightarrow n^-} \Gamma(p) = (-1)^{n-1} \infty.$$

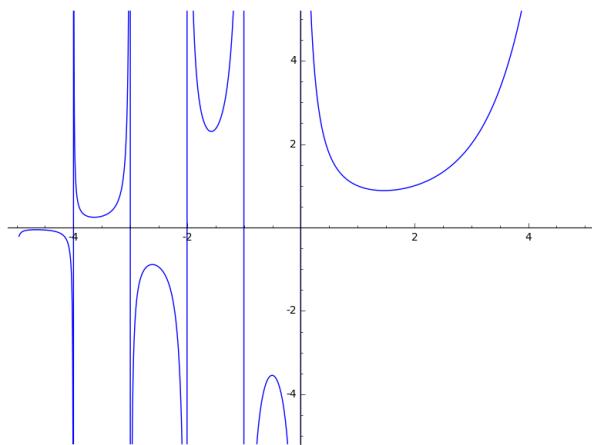


Figura 6.1: La función gamma  $\Gamma$

Ahora estamos en condiciones de definir la función de Bessel de primera especie que resulta de tomar  $a_0$  como  $1/2^p \Gamma(p+1)$ .

**Definición 6.4.12** Definimos la función de Bessel de primera especie como

$$J_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(p+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}$$

Una aproximación a esta función se programa en SymPy de manera muy sencilla. Una vez definida esta función podemos aprovecharla para graficar varias funciones de Bessel de distintos órdenes.

```

1 p,x=symbols('p,x')
2 J= sum([(-1)**n/factorial(n)/gamma(p+n+1)*(x/2)**(2*n+p) for n in range(30)])
3 p1=plot(J.subs(p,1),(x,0,20),line_color=(1,0,0))
4 p2=plot(J.subs(p,2),(x,0,20),line_color=(0,1,0))[0]
5 p1.append(p2)
6 p2=plot(J.subs(p,3),(x,0,20),line_color=(0,0,1))[0]
7 p1.append(p2)
8 p1.show()

```

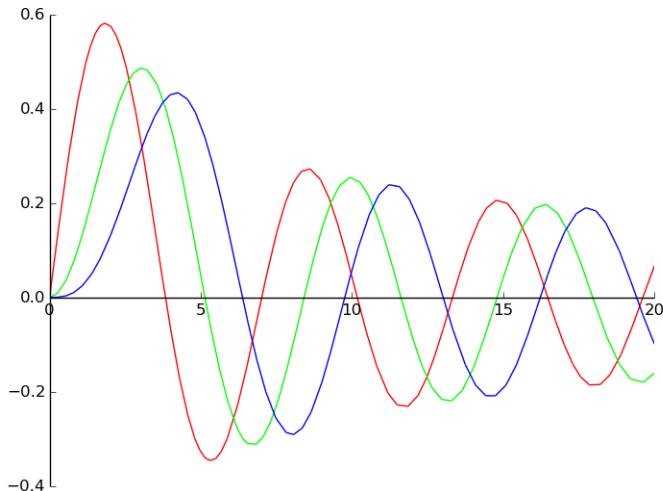


Figura 6.2: Funciones de Bessel  $J_p$ ,  $p = 1, 2, 3$

Ahora consideremos la solución  $m = -p$  de la ecuación indicial.

```

1 ECoeffB=[ec.subs(m,Sol_Ecua_Ind[0]) for ec in ECoef]
2 for i in range(1,orden):
3     iter=solve(ECoeffB[i],a[i])[0].factor()
4     print str(a[i])+'=' +str(iter)
5
6 a1=0
7 a2=a0/(4*(p - 1))
8 a3=a1/(3*(2*p - 3))
9 a4=a2/(8*(p - 2))
10 a5=a3/(5*(2*p - 5))
11 a6=a4/(12*(p - 3))
12 a7=a5/(7*(2*p - 7))

```

Estas relaciones siguen el mismo patrón que la relación de recurrencia (6.25) con  $-p$  en lugar de  $p$ . No obstante, la situación para la raíz  $-p$  no es exactamente igual a la de la raíz  $p$ . La diferencia radica en que cuando  $p \in \frac{1}{2}\mathbb{N} = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$  la expresión en el denominador en la relación

$$a_n = \frac{a_{n-2}}{n(2p-n)} \quad (6.30)$$

se puede anular y esto impediría que pasasemos de miembro esta expresión como hicimos. Notar que este problema ocurre cuando la diferencia de las dos raíces  $p - (-p) = 2p$  es un entero positivo. Esto último lo remarcamos porque veremos más adelante que

en general es un problema que la diferencia de las raíces de la ecuación indicial sean negativas. También  $p = 0$  es una situación problemática, dado que en este caso  $p = -p$  y por consiguiente no estamos en condiciones de encontrar una solución linealmente independiente de  $J_0$ . En síntesis  $p = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$  son valores problemáticos para  $p$ .

Cuando  $p$  no es uno de los valores problemáticos, estamos en condiciones de definir

**Definición 6.4.13** Definimos la función de Bessel de primera especie  $J_{-p}$  ( $p \notin \frac{1}{2}\mathbb{N}$ ) como

$$J_{-p}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(-p+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-p}$$

Grafiquemos algunas de estas funciones de Bessel, la función de Bessel  $J$  que habíamos introducido en SymPy arriba, sigue siendo útil.

```

1 p1=plot(J.subs(p,-1.0/3),(x,0,20),line_color=(1,0,0),ylim=(-2,2))
2 p2=plot(J.subs(p,-2.0/3),(x,0,20),line_color=(0,1,0),ylim=(-2,2))
3 p3=plot(J.subs(p,-5.0/3),(x,0,20),line_color=(0,0,1),ylim=(-2,2))
4 p1.append(p3[0])
5 p1.append(p3[0])

```

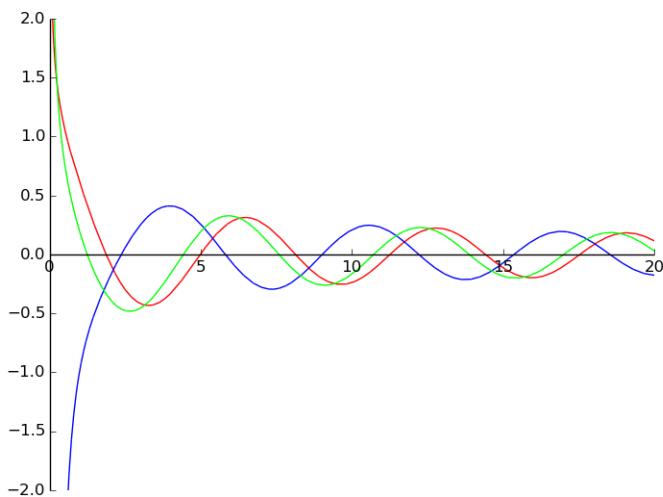


Figura 6.3: Funciones de Bessel  $J_{-1/3}$ ,  $J_{-2/3}$  y  $J_{-5/3}$ .

Más adelante vamos a seguir estudiando con más profundidad la ecuación de Bessel.

### 6.4.3 Teorema fundamental sobre puntos singulares regulares

Habiendo visto algunos ejemplos, ahora pasaremos a discutir la situación general del método de Frobenius.

Supongamos  $x = 0$  un punto regular singular de la ecuación

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \quad (6.31)$$

Supongamos que  $xp(x)$  y  $x^2q(x)$  poseen los siguientes desarrollos en serie

$$xp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \quad \text{y} \quad x^2q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$$

Proponemos como solución

$$y = x^m \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{m+n}.$$

Empecemos por hallar las relaciones de recurrencia para los coeficientes  $a_n, n = 0, 1, \dots$ .  
Tenemos

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (m+n)a_n x^{m+n-1} \quad (6.32a)$$

$$\begin{aligned} y'' &= \sum_{n=0}^{\infty} (m+n)(m+n-1)a_n x^{m+n-2} \\ &= x^{m-2} \sum_{n=0}^{\infty} (m+n)(m+n-1)a_n x^n. \end{aligned} \quad (6.32b)$$

Luego

$$\begin{aligned} p(x)y'(x) &= \frac{1}{x} \left( \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} (m+n)a_n x^{m+n-1} \right) \\ &= x^{m-2} \left( \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} (m+n)a_n x^n \right) \\ &= x^{m-2} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n p_{n-k}(m+k)a_k \right) x^n \\ &= x^{m-2} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^{n-1} p_{n-k}(m+k)a_k + p_0(m+n)a_n \right) x^n \end{aligned} \quad (6.33)$$

Ahora desarrollemos  $q(x)y(x)$ ,

$$\begin{aligned} q(x)y(x) &= \frac{1}{x^2} \left( \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{m+n} \right) \\ &= x^{m-2} \left( \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \\ &= x^{m-2} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n q_{n-k} a_k \right) x^n \\ &= x^{m-2} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^{n-1} q_{n-k} a_k + q_0 a_n \right) x^n \end{aligned} \quad (6.34)$$

A partir de (6.43), (6.34), (6.33) y (6.32b) obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= x^{m-2} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ [(m+n)(m+n-1) + p_0(m+n) + q_0] a_n \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=0}^{n-1} a_k [p_{n-k}(m+k) + q_{n-k}] \right\} x^n. \end{aligned} \quad (6.35)$$

Entonces se debe satisfacer

$$[(m+n)(m+n-1) + p_0(m+n) + q_0] a_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k [p_{n-k}(m+k) + q_{n-k}] = 0,$$

(6.36)

para  $n = 0, 1, \dots$ . Definamos

$$f(m) = m(m-1) + p_0m + q_0. \quad (6.37)$$

Entonces las ecuaciones (6.36) se escriben

$$f(m+n)a_n = - \sum_{k=0}^{n-1} a_k [p_{n-k}(m+k) + q_{n-k}], \quad n = 0, 1, \dots \quad (6.38)$$

La primera de estas ecuaciones es

**Definición 6.4.14** Definimos la ecuación indicial por

$$f(m) = m(m-1) + p_0m + q_0 = 0. \quad (6.39)$$

Si  $m$  resuelve la ecuación indicial entonces  $m$  resuelve la ecuación (6.38) para  $n = 0$  y el valor de  $a_0$  se puede elegir arbitrariamente.

Supongamos que la ecuación indicial tiene las soluciones  $m_2 \leq m_1$ . Podría ocurrir que las soluciones fueran complejos conjugados, pero no trataremos este caso aquí. Ahora discutamos cuando es posible resolver las relaciones de recurrencia (6.38). El único problema que podría ocurrir es que  $f(m+n) = 0$  para algún valor de  $n = 1, 2, \dots$ , dado que en ese caso (6.38) se reduce a

$$0 = - \sum_{k=0}^{n-1} a_k [p_{n-k}(m+k) + q_{n-k}]. \quad (6.40)$$

Esta ecuación no nos dice nada sobre  $a_n$  y no podemos esperar que se satisfaga. Sin embargo, cuando  $m = m_1$  esta desafortunada situación no se da, de lo contrario  $m_1 + n$  sería una raíz de la ecuación indicial distinta que  $m_2$  y  $m_1$ . En consecuencia, si  $m = m_1$  y  $a_0 \neq 0$  es elegido arbitrariamente las ecuaciones (6.38) determinan los coeficientes  $a_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$

Cuando  $m = m_2$  si puede ocurrir que  $f(m_2 + n) = 0$ , esto es así cuando  $m_2 + n = m_1$  para algún  $n = 1, 2, \dots$ , vale decir cuando  $m_1 - m_2 \in \mathbb{Z}$ . Luego estamos en condiciones de afirmar que si  $m = m_2$ ,  $m_1 - m_2 \notin \mathbb{Z}$  y  $a_0 \neq 0$  es elegido arbitrariamente las ecuaciones (6.38) determinan los coeficientes  $a_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . En esta situación, se demuestra con facilidad que las dos soluciones obtenidas por el método de Frobenius son linealmente independientes. Por ejemplo, si estas soluciones son

$$y_1 = x^{m_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad y \quad y_2 = x^{m_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n,$$

con  $a_0 \neq 0 \neq b_0$  y si suponemos que ellas son linealmente dependientes entonces su cociente  $y_1/y_2$  sería una constante  $c$  no nula. Pero tomando límite en la expresión  $y_1/y_2$  cuando  $x \rightarrow 0$  vemos que

$$c = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y_1}{y_2} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{m_1 - m_2} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n} = 0 \cdot \frac{a_0}{b_0} = 0.$$

Si  $m_1 - m_2 := n_0 \in \mathbb{Z}$ , entonces la situación es diferente. Si, en particular, tuviésemos  $n_0 = 0$  ( $m_1 = m_2$ ) entonces claramente podremos encontrar esencialmente sólo una solución en serie de Frobenius.

Supongamos  $n_0 > 0$ . Cuando  $n = n_0$  la ecuación de recurrencia (6.38) se convierte, como ya se dijo, en (6.40) con  $m_2$  en lugar de  $m$ . Una aparente solución sería tomar  $0 = a_0 = \dots = a_{n_0-1}$  que resolvería la ecuación conflictiva. Podríamos elegir  $a_{n_0} \neq 0$  arbitrariamente y continuar la iteración

$$\begin{aligned} f(m_1 + 1)a_{n_0+1} &= -\sum_{k=0}^{n_0} a_k [p_{n_0+1-k}(m_2 + k) + q_{n_0+1-k}] = -a_{n_0}[p_1 m_1 + q_1] \\ f(m_1 + 2)a_{n_0+2} &= -\sum_{k=0}^{n_0+1} a_k [p_{n_0+2-k}(m_2 + k) + q_{n_0+2-k}] \\ &= -a_{n_0}[p_2 m_1 + q_2] - a_{n_0+1}[p_1(m_1 + 1) + q_0] \\ &\vdots \\ (6.41) \end{aligned}$$

Como se ve, la iteración termina siendo la misma que la correspondiente iteración para la raíz  $m_1$ . Además tendríamos que el desarrollo en serie

$$y(x) = x^{m_2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = x^{m_2} \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n x^n = x^{m_2+n_0} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+n_0} x^n = x^{m_1} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n,$$

donde  $b_n := a_{n+n_0}$  resuelve el esquema de iteración (6.41) que, como dijimos, es el esquema de iteración correspondiente a  $m = m_1$ . Vale decir que elegir  $0 = a_0 = \dots = a_{n_0-1}$  nos lleva a una solución linealmente dependiente con la solución que ya encontramos para  $m = m_1$ . Podríamos tener la suerte que eligiendo  $a_0 \neq 0$  se satisfaga la ecuación (6.40) con  $m = m_2$  y  $n = n_0$ . Si esto ocurre podemos elegir  $a_{n_0}$  arbitrariamente, por ejemplo  $a_{n_0} = 0$ , y continuar la iteración. Obtenemos una solución que es linealmente independiente de la correspondiente a  $m_1$ . En síntesis, si  $n_0 := m_1 - m_2 \in \mathbb{Z}$ , si  $a_0 \neq 0$  es elegido arbitrariamente, si  $a_1, \dots, a_{n_0-1}$  son hallados mediante (6.36) y si se satisface (6.40) tenemos una segunda solución en serie de Frobenius para  $m = m_2$ .

Si falla esta última condición ya no hay otra solución en serie de Frobenius. Se puede encontrar un desarrollo, que ya no constituye una serie de Frobenius, para otra solución de la siguiente forma empleando el método de reducción de orden a partir de la solución conocida  $y_1 = x^{m_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ . Este método no decía que la otra solución venía dada a partir de las relaciones

$$y_2(x) = v(x)y_1(x), \quad \text{donde } v'(x) = \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)dx}.$$

Teniendo en cuenta que

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^{n-1} = \frac{p_0}{x} + p_1 + p_2 x + \dots$$

Vemos que

$$\begin{aligned} v'(x) &= \frac{1}{x^{2m_1} (\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)^2} e^{-\int (\frac{p_0}{x} + p_1 + p_2 x + \dots) dx} \\ &= \frac{1}{x^{2m_1} (\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)^2} e^{-p_0 \ln x - p_1 x - \dots} \\ &= \frac{1}{x^{2m_1+p_0} (\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)^2} e^{-p_1 x - \dots} \end{aligned}$$

Ahora la función

$$g(x) = \frac{e^{-p_1 x - \dots}}{(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)^2},$$

es analítica en 0 puesto que el denominador no se anula en cero. Por consiguiente tenemos un desarrollo en serie

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \quad b_0 \neq 0.$$

En la práctica encontrar este desarrollo en serie de manera explícita puede ser muy difícil. Llamemos  $k := 2m_1 + p_0$ . Por la conocida fórmula para la suma de las raíces de una ecuación de segundo grado, se tiene que  $m_1 + m_2 = 1 - p_0$ . Luego  $2m_1 + p_0 = 2m_1 + 1 - m_1 - m_2 = m_1 - m_2 + 1 \in \mathbb{N}$ .

Tenemos que

$$v'(x) = \frac{b_0}{x^k} + \frac{b_1}{x^{k-1}} + \cdots + \frac{b_{k-1}}{x} + b_k + \cdots$$

Entonces

$$v(x) = \frac{b_0}{(-k+1)x^{k-1}} + \frac{b_1}{(-k+2)x^{k-2}} + \cdots + b_{k-1} \ln x + b_k x + \cdots$$

Reemplazando esta identidad en la expresión para  $y_2$ ,

$$\begin{aligned} y_2 &= vy_1 \\ &= y_1 \left( \frac{b_0}{(-k+1)x^{k-1}} + \frac{b_1}{(-k+2)x^{k-2}} + \cdots + b_{k-1} \ln x + b_k x + \cdots \right) \\ &= b_{k-1} \ln xy_1 + x^{m_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \left( \frac{b_0}{(-k+1)x^{k-1}} + \frac{b_1}{(-k+2)x^{k-2}} \cdots \right) \\ &= b_{k-1} \ln xy_1 + x^{m_1-k+1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \left( \frac{b_0}{(-k+1)} + \frac{b_1}{(-k+2)} x + \cdots \right) \end{aligned}$$

Ahora  $m_1 - k + 1 = m_1 - 2m_1 - p_0 + 1 = -p_0 - m_1 + 1$ . Es sabido que la suma de las raíces  $m_1 + m_2$  es igual a  $-p_0 + 1$ , es decir  $m_1 = -p_0 + 1 - m_2$ . Entonces  $m_1 - k + 1 = m_2$ . Obtenemos una solución de la forma

$$y_2(x) = b_{k-1} y_1 \ln x + x^{m_2} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n. \quad (6.42)$$

La segunda solución  $y_2$  es la suma de una serie de Frobenius, con  $m = m_2$ , y un múltiplo de la función  $y_1 \ln x$ . Esta última función no se puede desarrollar en serie de potencias alrededor de 0.

Hemos discutido con cierto detalle las posibles soluciones de las ecuaciones de recurrencia. No resta considerar la cuestión de la convergencia de las series. Esto lo tratamos en el siguiente teorema.

**Teorema 6.4.6** Supongamos  $x = 0$  un punto regular singular de la ecuación

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \quad (6.43)$$

Supongamos que  $xp(x)$  y  $x^2q(x)$  poseen los siguientes desarrollos en serie

$$xp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \quad \text{y} \quad x^2q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$$

y que estas series convergen para  $|x| < R$  ( $R > 0$ ). Supongamos que la ecuación indicial tiene las raíces reales  $m_1, m_2$  con  $m_2 \leq m_1$ . Entonces la ecuación (6.43)

tiene una solución en serie de Frobenius dada por

$$y_1 = x^{m_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad a_0 \neq 0.$$

La serie  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  converge en  $|x| < R$ . Si  $m_1 - m_2$  no es un entero no negativo entonces tenemos una segunda solución en serie de Frobenius con  $m_2$  en lugar de  $m_1$  y satisfaciendo las mismas condiciones que la primer serie.

*Dem.* Dado que  $m_1$  y  $m_2$  son raíces de la ecuación indicial vale la factorización

$$f(m) = (m - m_1)(m - m_2) = m^2 - (m_1 + m_2)m + m_1 m_2.$$

Entonces

$$f(m_1 + n) = n(n + m_1 - m_2) \quad y \quad f(m_2 + n) = n(n + m_2 - m_1).$$

Luego

$$|f(m_1 + n)| \geq n(n - |m_1 - m_2|) \quad y \quad f(m_2 + n) \geq n(n - |m_1 - m_2|). \quad (6.44)$$

Tomemos  $r$  tal que  $0 < r < R$ . Por las mismas razones expresadas en el Teorema (6.3.5), existe  $M > 0$  tal que

$$|p_n|r^n, |q_n|r^n \leq M.$$

Usando (6.38), con  $m = m_1$ , (6.44) y las desigualdades de arriba concluimos

$$n(n - |m_1 - m_2|)|a_n| \leq M \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|a_k|}{r^{n-k}} (|m_1| + k + 1).$$

Ahora definimos la sucesión  $b_n$  por  $b_n = |a_n|$ , para  $0 \leq n \leq |m_1 - m_2|$  y para  $n > |m_1 - m_2|$

$$n(n - |m_1 - m_2|)b_n = M \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{r^{n-k}} (|m_1| + k + 1). \quad (6.45)$$

Por una variación simple del Lema 6.3.1 tenemos que  $|a_n| \leq b_n$ , para todo  $n = 0, 1, \dots$ . Ahora veremos que la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$  converge para  $|x| < r$ . Por (6.45) tenemos que

$$\begin{aligned} r(n+1)(n+1 - |m_1 - m_2|)b_{n+1} &= M \sum_{k=0}^n \frac{|b_k|}{r^{n-k}} (|m_1| + k + 1) \\ &= M \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{r^{n-k}} (|m_1| + k + 1) + Mb_n(|m_1| + n + 1) \\ &= n(n - |m_1 - m_2|)b_n + Mb_n(|m_1| + n + 1). \end{aligned}$$

Luego

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{n(n - |m_1 - m_2|) + M(|m_1| + n + 1)}{r(n+1)(n+1 - |m_1 - m_2|)}$$

Y así

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1}|x|^{n+1}}{b_n|x|^n} = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n - |m_1 - m_2|) + M(|m_1| + n + 1)}{r(n+1)(n+1 - |m_1 - m_2|)} = \frac{|x|}{r}$$

Luego la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$  converge para  $|x| < r$ . Como  $|a_n| \leq b_n$  tendremos que  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  converge absolutamente para  $|x| < r$ . Finalmente como  $0 < r < R$  fue elegido arbitrariamente tendremos que la convergencia se da para  $|x| < R$ .

Restaría considerar el caso  $m = m_2$  cuando  $m_1 - m_2$  no es entero. Pero la demostración del mismo sigue el mismo camino que para  $m = m_1$ .  $\square$

#### 6.4.4 Funciones de Bessel de segunda especie

En la subsección discutimos sobre soluciones de la ecuación de Bessel de orden  $p \geq 0$ . Obtuvo la solución en serie de Frobenius asociada a la solución de la ecuación indicial  $m = p$  (6.24), dada en la Definición 6.4.12. Esta solución es llamada función de Bessel de primera especie y es denotada por  $J_p$ . Es bueno decir que esta función es continua en 0 y  $J_p(0) = 0$ . Para la segunda solución de la ecuación indicial  $m = -p$ , hemos dicho también que para  $p \neq 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$  hay otra solución linealmente independiente de  $J_p$ . Esta solución se denomina también función de Bessel de primera especie, se denota  $J_{-p}$  y es una función no acotada en 0. Según lo que hemos expresado en la Subsección , aún en el caso  $p = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$  tenemos esperanzas de encontrar una solución en serie de Frobenius o al menos una solución de la forma (6.42). Este tipo de soluciones es lo que discutiremos en esta subsección.

Empecemos suponiendo  $p$  entero positivo. A partir de (??) sabemos que la fórmula de recurrencia para  $m = -p$  es

$$n(2p - n)a_n = a_{n-2}, \quad n \geq 2 \quad (6.46)$$

También recordemos de (??) la ecuación

$$-a_1(2p - 1) = 0,$$

que implica  $a_1 = 0$ , puesto que  $p$  es entero y por ende  $p \neq \frac{1}{2}$ . Como consecuencia de la relación de recurrencia (6.46) tenemos  $a_n = 0$  para todo  $n$  impar. Para afirmar esto último tomamos en cuenta que al ser  $p$  entero  $2p - n \neq 0$  cuando  $n$  es impar. Cuando  $n$  es par y más en concreto  $n = 2p$  la relación de recurrencia (6.46) toma la forma  $a_{n-2} = 0$ . Ahora si  $a_{n-2} = 0$  entonces (6.46) implica que  $a_{n-4} = a_{n-6} = \dots = a_0 = 0$ . Eligiendo  $a_n$  arbitrariamente y al resto de los  $a_k$  con  $k$  par mayor a  $n$  de modo que se satisfaga la relación de recurrencia se llega a una solución en serie de Frobenius. Lamentablemente esta segunda solución es esencialmente la misma que  $J_p$ . Esto ya lo hemos discutido en sección . De modo que cuando  $p$  es entero positivo no tenemos una segunda solución en serie de Frobenius.

Más adelante volveremos al caso  $p$  entero. Ahora consideremos  $p = \frac{2k+1}{2}$  con  $k$  entero  $k \geq 0$ . Reemplazando  $p$  en (6.46) por este valor y reemplazando  $n$  por  $2k + 1$ , concluimos  $a_{2k-1} = 0$ . Ahora iterando la relación de recurrencia  $a_{2k-3} = \dots = a_1 = 0$ . La situación es parecida al caso anterior, podemos elegir  $a_{2k+1}$  libremente, vamos a elegirlo igual a 0. Esto anula todos los coeficientes  $a_n$  con  $n$  impar. Pero la diferencia con el caso anterior es que podemos elegir libremente  $a_0$ . Llegamos así a la misma solución de la Definición 6.4.13. En síntesis para todo  $p$  que no es un entero no negativo, tenemos el par de soluciones linealmente independientes  $J_p$  y  $J_{-p}$  tales que

$$y = c_1 J_p + c_2 J_{-p} \quad (6.47)$$

es la solución general de la ecuación de Bessel

Ahora volvamos al caso  $p \in \mathbb{Z}$  para encontrar una segunda solución linealmente independiente de  $J_p$ . Podríamos buscar esta solución apelando a la expresión (6.42), pero es costumbre buscar de otra manera esta segunda solución y vamos a discutir brevemente, sin justificar todos los detalles, esta otra forma. La idea es expresar la segunda solución para  $p = n \in \mathbb{Z}$  como límite de soluciones de la forma (6.47) cuando  $p \rightarrow n$ . Más concretamente.

**Definición 6.4.15** Para  $p \notin \mathbb{Z}$  definimos la función de Bessel  $Y_p$  de segunda especie por

$$Y_p = \frac{\cos p\pi J_p - J_{-p}}{\sin p\pi}. \quad (6.48)$$

La función  $Y_p$  es una solución puesto que es una expresión del tipo (6.47). Además es no acotada cerca de 0 dado que  $J_p$  es acotada y  $J_{-p}$  no. La razón de esta llamativa definición es el siguiente resultado.

**Lema 6.4.2** Para  $n$  entero no negativo, el límite  $\lim_{p \rightarrow n} Y_p$  existe. Por consiguiente, podemos definir

$$Y_n(x) := \lim_{p \rightarrow n} Y_p(x). \quad (6.49)$$

Esta función es solución de la ecuación de Bessel de orden  $n$  y se denomina, también, función de Bessel de segunda especie. También resulta ser una función no acotada cerca de 0 y por consiguiente, linealmente independiente de  $J_n$ .

## 7 Ecuación de la membrana, separación de variables

El movimiento de una membrana elástica sujetada a un aro circular viene gobernado por la ecuación de *ondas bidimensional*

$$u_{tt} = \Delta u := u_{xx} + u_{yy}$$

Esta ecuación es un ejemplo de *ecuación en derivadas parciales*. Aquí la función incógnita  $u$  depende de tres variables independientes  $x, y, t$ . No hemos tratado hasta aquí este tipo de ecuaciones, en esta breve unidad vamos a ver como los resultados que desarrollamos antes nos sirven para encontrar algunas soluciones de esta ecuación.

En la deducción de esta ecuación, que no haremos, se supone que no actúa otra fuerza más que la tensión de la membrana, que el material de esta membrana es uniforme, que la dirección de desplazamientos de un punto sobre la membrana es perpendiculares al plano que contiene al aro de sujeción.

El significado de las variables es el siguiente:  $t$  es el tiempo, las variables  $x, y, u$  son las coordenadas de un punto sobre la membrana en un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales. Las coordenadas  $x, y$  se toman en el plano que contiene al aro de sujeción y por ende, como el desplazamiento es solo en la dirección vertical, son independientes de  $t$ . El aro de sujeción se supone de radio 1 y centro en  $(0, 0)$ . La función  $u$  depende de  $x, y$  y  $t$ . La ecuación se satisface en la bola de radio 1 y centro  $(0, 0)$  de  $\mathbb{R}^2$ . Se impone además una *condición de contorno* que da cuenta del hecho que la membrana está fija al aro, esta condición es  $u = 0$  en  $\partial B$ . Por último necesitamos una *condición inicial* que nos dice cual es el estado de la membrana en  $t = 0$ , vamos a suponer que en ese momento la membrana está en reposo, esto es  $u_t(x, y, 0) = 0$ .

Buscaremos soluciones de la ecuación de ondas en variables separadas, esto es supondremos que  $u$  se escribe  $u(x, y, t) = v(x, y)T(t)$ . Estas soluciones tienen el significado físico de ser *tonos normales*, esto es regímenes de vibración donde todos los puntos de la membrana vibran a la misma frecuencia. Asumamos además que  $u$  parte del reposo, esto es  $u_t(x, y, 0) = 0$ .

Reemplazando  $u(x, y, t) = v(x, y)T(t)$  en la ecuación obtenemos

$$v(x, y)T''(t) = T(t)(v_{xx}(x, y) + v_{yy}(x, y)). \quad (7.1)$$

Vale decir que

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{v_{xx}(x, y) + v_{yy}(x, y)}{v(x, y)}.$$

Las variables  $t, x, y$  son independientes entre si. En el miembro de la izquierda sólo aparece  $t$  y en el de la derecha sólo  $x, y$ . Por consiguiente podríamos cambiar  $t$  en el miembro de la izquierda dejando  $x, y$  fijos. La conclusión es entonces que el miembro de la izquierda no cambia por cambiar  $t$ , vale decir  $T''/T$  es una función constante y por lo tanto  $\Delta v/v$  es constante. Debe existir  $\lambda > 0$  tal que

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{v_{xx}(x, y) + v_{yy}(x, y)}{v(x, y)} = -\lambda.$$

Tenemos así las dos ecuaciones

$$T''(t) + \lambda T(t) = 0, \quad (7.2)$$

$$v_{xx}(x, y) + v_{yy}(x, y) + \lambda v(x, y) = 0 \quad (7.3)$$

Además se deben satisfacer la condiciones de contorno  $u(x, y, t) = 0$  para  $(x, y) \in \partial B$ . Esta condición implica que<sup>1</sup>

$$v = 0 \text{ en } \partial B. \quad (7.4)$$

<sup>1</sup>Otra posible solución de la condición de contorno sería tomar  $T = 0$ , pero esto nos llevaría a la solución trivial

No olvidemos la condición inicial  $u_t(x, y, 0) = 0$ . Atendiendo a la separación de variables debe ocurrir que  $T'(0)v(x, y) = 0$  y esto implica que  $T'(0) = 0$  o  $v(x, y) \equiv 0$ . La segunda opción nos llevaría a la solución trivial de la ecuación, lo que no es de nuestro interés. De modo que aceptaremos

$$T'(0) = 0. \quad (7.5)$$

La ecuación (7.2) es una ecuación de segundo orden, lineal con coeficientes constantes, que hemos considerado en múltiples oportunidades. Si  $\lambda \leq 0$  obtendríamos soluciones que tienden a infinito cuando  $t \rightarrow \infty$  lo que no es compatible con el comportamiento esperado para una membrana. Hay que tener en cuenta que la validez física del modelo matemático alcanza solo a pequeñas oscilaciones, esto es valores chicos de  $u$ . De modo que podemos suponer  $\lambda = \omega^2$ . La ecuación resulta la ecuación del oscilador armónico, cuya solución general es

$$T(t) = k_1 \cos(\omega t) + k_2 \sin(\omega t)$$

Se debe cumplir (7.5)

$$0 = T'(0) = k_2\omega \Rightarrow [k_2 = 0].$$

*La membrana vibra en con frecuencia  $\omega$*  dado que el factor  $T$  de  $u$  vibra en esa frecuencia y el otro factor que compone  $u$ , esto es  $v$ , no depende de  $t$  es decir es estático. La ecuación (7.3), que ahora escribimos

$$v_{xx}(x, y) + v_{yy}(x, y) + \omega^2 v(x, y) = 0, \quad (7.6)$$

se conoce como la ecuación de autovalores del Laplaciano o ecuación de Helmholtz. Los valores de  $\omega$  para los que esta ecuación tiene solución (no todo  $\omega$  lo es) son justamente los autovalores del operador de Laplace. Es decir los autovalores de Laplaciano resultan ser los cuadrados de las frecuencias de los tonos normales. Para encontrar estos autovalores vamos a escribir  $v$  en coordenadas polares  $v = v(r, \theta)$ . Acorde a la fórmula (7.24) del Apéndice tenemos que (7.6) equivale a

$$v_{rr} + \frac{1}{r}v_r + \frac{1}{r^2}v_{\theta\theta} + \omega^2v = 0 \quad (7.7)$$

Nuevamente vamos a considerar la técnica de separación de variables. Proponemos que

$$v(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$$

Reemplazando en (7.7)

$$R''\Theta + \frac{1}{r}R'\Theta + \frac{1}{r^2}R\Theta'' + \omega^2R\Theta = 0.$$

Multiplicando por  $r^2/R\Theta$  y depejando los términos conteniendo  $\Theta$

$$\frac{r^2R''}{R} + \frac{rR'}{R} + \omega^2r^2 = -\frac{\Theta''}{\Theta}. \quad (7.8)$$

Ahora se razona como lo hemos hecho con la ecuación (7.1). Cada miembro depende de variables independientes entre si, esto es de  $r$  el primer miembro y de  $\theta$  el segundo. Para que la igualdad sea posible las funciones deben ser constantes. Luego debe existir  $\lambda$  tal que

$$r^2R'' + rR' + (\omega^2r^2 - \lambda)R = 0 \quad (7.9)$$

$$\Theta'' + \lambda\Theta = 0. \quad (7.10)$$

Además teníamos la condición de contorno (7.11) que se convierte en

$$R(1) = 0. \quad (7.11)$$

La función  $\Theta$  al depender de  $\theta$  debería ser periódica de periodo  $2\pi$ . Para que esto sea así  $\lambda$  debe ser positivo, puesto que las soluciones de 7.9 son periódicas solo para estos valores de  $\lambda$ . Por consiguiente

$$\Theta(\theta) = c_1 \cos \sqrt{\lambda} \theta + c_2 \sin \sqrt{\lambda} \theta. \quad (7.12)$$

Como la solución, además de periódica, debe tener más específicamente período  $2\pi$ , el valor de  $\lambda$  debe ser un entero cuadrado, es decir que existe un entero positivo  $n$  tal que  $\lambda = n^2$ . Así (7.12) se convierte en

$$\Theta(\theta) = c_1 \cos n\theta + c_2 \sin n\theta.$$

Nuestras suposiciones no determinan el valor de las constantes  $c_1$  y  $c_2$ . Obtendremos dos soluciones linealmente independientes eligiendo  $k_1 = 0$  y  $k_2 = 1$  o permutando estos valores. Vamos a seguir ilustrando el método con la segunda elección, es decir

$$\Theta(\theta) = \cos n\theta \quad (7.13)$$

Reemplazando  $\lambda$  por  $n^2$  en (7.9)

$$r^2 R'' + rR' + (\omega^2 r^2 - n^2)R = 0,$$

que se parece mucho a la ecuación de Bessel. De hecho si  $\omega$  fuese 1 sería exactamente la ecuación de Bessel. La podemos convertir fácilmente en la ecuación de Bessel por el cambio de variable independiente  $s = \omega r$ . Tenemos

$$\frac{dR}{dr} = \frac{dR}{ds} \frac{ds}{dr} = \frac{dR}{ds} \omega$$

y

$$\frac{d^2R}{dr^2} = \frac{d^2R}{ds^2} \omega^2$$

Reemplazando las igualdades anteriores y  $r$  por  $s/\omega$  en () llegamos a

$$s^2 R''(s) + sR' + (s^2 - n^2)R = 0$$

Que es la ecuación de Bessel de orden  $n$ . Como el orden es precisamente un entero hemos visto que la ecuación tiene como par de soluciones linealmente independientes la función de Bessel de primera especie  $J_n$  que es analítica en 0 y la función de Bessel de segunda especie  $Y_n$  que es no acotada en 0. Debería ocurrir entonces que  $R = c_1 J_p + c_2 Y_p$ . Pero de ser  $c_2 \neq 0$  tendríamos que  $R$  sería no acotada y esto implicaría que la membrana sería la gráfica de una función no acotada, cosa que no se condice con nuestra idea de lo que es una membrana. De modo que estas soluciones, que matemáticamente son correctas, las descartamos por carecer de significado físico. Sin perder generalidad, supongamos  $c_1 = 1$ . Así tenemos que  $R$  como función de  $s$  es  $J_n(s)$ . Retornando a la variable  $r$

$$R(r) = J_n(\omega r) \quad (7.14)$$

Ahora la condición de contorno (7.11) implica que

$$J(\omega) = 0 \quad (7.15)$$

Así llegamos a la sorprendente conclusión que cuando una membrana vibra en un tono normal su frecuencia es un cero de una función de Bessel de orden  $n$  para algún entero  $n$  positivo. Sabemos que los ceros de la ecuación de Bessel forman una sucesión  $\omega_0 < \omega_1 < \dots$  que tiende a infinito y que la distancia entre ceros sucesivos  $\omega_{k+1} - \omega_k$  tiende a  $\pi$  cuando  $k \rightarrow \infty$ . Hemos encontrado muchas soluciones del problema propuesto, tenemos una solución distinta por cada  $n$  entero positivo y por cada  $\omega_k$  en la lista de

ceros de  $J_n$ . Al tono normal que obtenemos para un  $n$  y  $k$  dados lo llamamos el tono  $(n, k)$  y resulta estar dado en coordenadas polares por

$$u(r, \theta, t) = \cos(\omega_k t) \cos(n\theta) J_n(\omega_k r) \quad (7.16)$$

Siendo  $u$  una función de tres variables independientes no es posible graficarla en nuestro mundo 3d. Tampoco nos interesa la grafica, pues la interpretación de  $u$  es que para un tiempo  $t$  fijo la gráfica en  $\mathbb{R}^3$  de  $u(r, \theta, t)$  es la posición de la membrana. Con SAGE (ver el Apéndice ) generamos un conjunto de gráficos para distintos valores de  $t$  y luego los animamos con el paquete `animate` de  $\text{\LaTeX}$ . Los tonos normales representados son el  $(0, 1)$ ,  $(0, 2)$  y  $(1, 2)$ .

Figura 7.1: Modo  $(0, 1)$

Figura 7.2: Modo  $(0, 2)$

Figura 7.3: Modo (1, 2)

## 7.1 Apéndice A: Laplaciano en coordenadas polares

Escribamos el operador de Laplace en coordenadas polares. Las coordenadas cartesianas  $x, y$  se escriben en función de las coordenadas polares  $r, \theta$  de la siguiente forma

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta.$$

Tenemos que expresar las derivadas tomadas respecto a las coordenadas cartesianas en términos de derivadas tomadas respecto a coordenadas polares.

$$\begin{aligned} u_x &= u_{rr}r_x + u_{\theta\theta}\theta_x \\ u_{xx} &= (u_r)_x r_x + u_{rr}r_{xx} + (u_\theta)_x \theta_x + u_{\theta\theta}\theta_{xx} \\ &= u_{rr}r_x^2 + u_{\theta\theta}\theta_x^2 + 2u_{r\theta}r_x\theta_x + u_{rr}r_{xx} + u_{\theta\theta}\theta_{xx} \end{aligned} \quad (7.17)$$

Usemos SAGE para calcular  $r_x, \theta_x, r_{xx}, \theta_{xx}$

```

1 >>> from sympy import *
2 >>> x,y=symbols('x,y')
3 >>> r=sqrt(x**2+y**2)
4 >>> theta=atan2(y,x)
5 >>> rho=symbols('rho',positive=True)
6 >>> phi=symbols('phi')
7 >>> r.diff(x).subs({x:rho*cos(phi),y:rho*sin(phi)}).simplify()
cos(phi)

```

Es decir

$$r_x = \cos(\theta). \quad (7.18)$$

En el cálculo anterior `rho` y `phi` son introducidas en reemplazo de `r` y `theta` aunque son exactamente iguales. La razón de hacer esto es que SymPy reemplaza `r` y `theta` por sus expresiones en términos de `x` e `y`. Esto es así porque en las líneas 12 y 13 del código anterior hemos declarado `r` y `theta` como expresiones. Cada vez que uno invoca estas variables, SymPy nos devuelve las expresiones que representan. Oviamente SymPy "no se da cuenta" que nosotros queremos expresar todo en función de `r` y `theta` considerando estas variables como independientes. Las restantes derivadas son

```

>>> r.diff(x,2).subs({x:rho*cos(phi),y:rho*sin(phi)}).simplify()
2 sin(phi)**2/rho

```

$$r_{xx} = \frac{\operatorname{sen}^2(\theta)}{r}. \quad (7.19)$$

```

>>> theta.diff(x).subs({x:rho*cos(phi),y:rho*sin(phi)}).simplify()
2 -sin(phi)/rho

```

$$\theta_x = -\frac{\operatorname{sen}(\theta)}{r}. \quad (7.20)$$

```

>>> theta.diff(x,2).subs({x:rho*cos(phi),y:rho*sin(phi)}).simplify()
2 sin(2*phi)/rho**2

```

$$\theta_{xx} = \frac{2 \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta)}{r^2}. \quad (7.21)$$

Sustituyendo en (7.18), (7.19), (7.20) y (7.21) en (7.17)

$$u_{xx} = u_{rr} \cos^2 \theta + u_{\theta\theta} \frac{\operatorname{sen}^2 \theta}{r^2} - 2u_{r\theta} \frac{\cos \theta \operatorname{sen} \theta}{r} + u_r \frac{\operatorname{sen}^2(\theta)}{r} + u_\theta \frac{2 \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta)}{r^2}.$$

$$(7.22)$$

Para las derivadas respecto a  $y$  tenemos

$$u_{yy} = u_{rr}r_y^2 + u_{\theta\theta}\theta_y^2 + 2u_{r\theta}r_y\theta_y + u_r r_{yy} + u_\theta \theta_{yy}$$

Y las derivadas

```
>>> theta.diff(y).subs({x:rho*cos(phi),y:rho*sin(phi)}).simplify()
cos(phi)/rho
>>> r.diff(y).subs({x:rho*cos(phi),y:rho*sin(phi)}).simplify()
sin(phi)
>>> theta.diff(y,2).subs({x:rho*cos(phi),y:rho*sin(phi)}).simplify()
-sin(2*phi)/rho**2
>>> r.diff(y,2).subs({x:rho*cos(phi),y:rho*sin(phi)}).simplify()
cos(phi)**2/rho
```

Luego

$$u_{yy} = u_{rr} \sin^2 \theta + u_{\theta\theta} \frac{\cos^2 \theta}{r^2} + 2u_{r\theta} \frac{\cos \theta \sin \theta}{r} + u_r \frac{\cos^2(\theta)}{r} - u_\theta \frac{2 \sin(\theta) \cos(\theta)}{r^2}.$$

(7.23)

De (7.22) y (7.23) obtenemos

$$u_{xx} + u_{yy} = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} \quad (7.24)$$

## 7.2 Apendice B: Código SAGE para animación de toros normales

```
P.<x>=RR[x]
2 n=2
3 l=0
4 J= sum([(-1)^k/factorial(k)/gamma(k+1)*(x/2)^(2*k+n) for k in range(20)])
Ceros=J.roots()
5 Ceros=[i[0] for i in Ceros if i[0]>0]
t,theta,r=var('t,theta,r')
6 u=cos(Ceros[l]*t)*cos(n*theta)*J(Ceros[l]*r)
gra=[]
7 Trans = Cylindrical('height', ['radius', 'azimuth'])
z=var('z')
8 Trans.transform(radius=r, azimuth=theta, height=z)
aux=parametric_plot3d([-1,-1,t],(t,-1,1),opacity=0)
9 for j in range(50):
    gra=plot3d(u(t=2*pi/Ceros[l]*j/50),(r,0,1),(theta,0,2*pi),\
10 transformation=Trans, viewer='tachyon')+aux
    str2='mem'+str(j)
11 #La sentencia siguiente guarda la gráfica
12 #\texttt{\textbackslash text{}}{gra} en el directorio MiDirectorio
13 #Hay que descomentarla para que funcione.
14 #gra.save('/ MiDirectorio/' + str2 + '.png')
```

## 8 Sistemas autónomos

En esta unidad abordaremos el estudio de sistemas no lineales y autónomos, en particular sistemas autónomos planos.

### 8.1 Ecuaciones autónomas

Una ecuación

$$x'(t) = f(x(t)), \quad (8.1)$$

donde  $\Omega$  es un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$  y  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ , se denomina *ecuación autónoma*. De ahora en más asumiremos que  $f$  es de clase  $C^1$  en  $\Omega$ , de modo que para cada  $(t_0, x^0) \in \mathbb{R} \times \Omega$  existe una solución  $\varphi(t)$  que pasa por  $(t_0, x^0)$ . Cuando invoquemos esta solución supondremos que es una solución máxima y denotaremos su intervalo de definición por  $I_\varphi = (a_\varphi, b_\varphi)$ . Las soluciones a ecuaciones autónomas tienen la siguiente propiedad.

**Teorema 8.1.1** Si  $\varphi$  es solución de (8.1) entonces  $\psi(t) = \varphi(t + c)$  es también solución e  $I_\psi = I_\varphi - c$ .

*Dem.* Por la regla de la cadena y (8.1)

$$\psi'(t) = \varphi'(t + c) = f(\varphi'(t + c)) = f(\psi'(t)).$$

□

Vemos así que toda trasladada, sobre el eje  $t$ , de una solución es también solución. Si  $x^0 \in \Omega$  satisface que  $f(x^0) = 0$  entonces  $\varphi(t) \equiv x^0$  es una solución. Dado que esta solución no experimenta cambios con el tiempo,  $x^0$  se denomina *punto de equilibrio* del sistema (8.1). El teorema anterior tiene la siguiente consecuencia.

**Teorema 8.1.2** Si  $\varphi$  y  $\psi$  son soluciones de (8.1) y  $\varphi(t_0) = \psi(t_1)$  entonces existe un  $c \in \mathbb{R}$  tal que  $\varphi(t) = \psi(t + c)$ .

*Dem.* Por el Teorema 8.1.1, la función  $\psi_1(t) := \psi(t + t_1 - t_0)$  es solución y, por hipótesis,  $\psi_1(t_0) = \varphi(t_0)$ , así, por unicidad,  $\varphi(t) = \psi_1(t)$  para todo  $t$ . □

**Corolario 8.1.1** Si  $\varphi$  es solución de (8.1) y  $\varphi(t_0) = \varphi(t_1)$  para ciertos  $t_0 \neq t_1$  entonces  $\varphi$  es periódica.

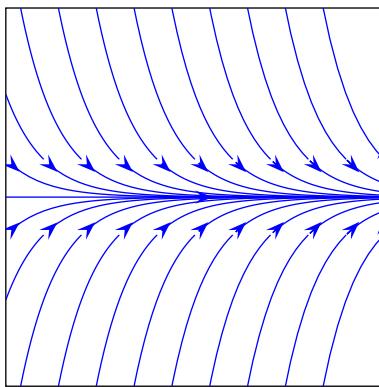
*Dem.* Por el teorema anterior aplicado a  $\psi = \varphi$  obtenemos  $\varphi(t) = \varphi(t + c)$ , luego  $\varphi$  es periódica. □

### 8.2 Ecuaciones unidimensionales

**Ejemplo 8.2.1** Considerar la ecuación

$$x' = x, \quad x \in \mathbb{R},$$

que tiene por solución general  $\varphi(t) = Ce^t$ . Notar que el conjunto  $\Omega$ , en este caso  $\Omega = \mathbb{R}$ , queda dividido en tres regiones  $(-\infty, 0)$ ,  $\{0\}$  y  $(0, \infty)$ . Cada una de estas tres regiones

Figura 8.1: Ecuación  $x' = x$ 

es imagen de soluciones, por ejemplo  $(0, +\infty)$  es imagen de las soluciones positivas. Notar que hay una cantidad infinita de soluciones positivas, de hecho está la solución  $\varphi_0(t) = e^t$  y todas sus trasladadas.

El conjunto  $\{0\}$  es la imagen de la función nula, que, obviamente, coincide con sus trasladadas. Notar que 0 es un punto de equilibrio.

**Ejemplo 8.2.2** Consideremos ahora

$$x' = \frac{1}{2}(x^2 - 1).$$

Para resolver esta ecuación escribamos

$$dt = \frac{2dx}{x^2 - 1}$$

e integremos

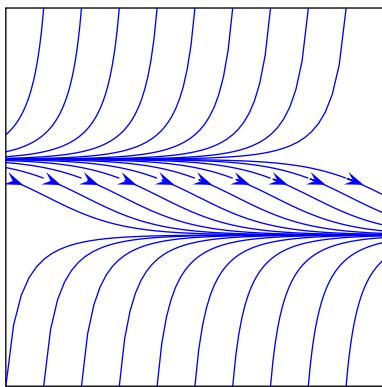
$$\begin{aligned} t + c &= \int \frac{2dx}{x^2 - 1} = \int \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+1} dx \\ &= \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right|. \end{aligned}$$

Luego

$$x(t) = \frac{1 \pm ke^t}{1 \mp ke^t}, \quad k > 0$$

es la solución general. Notar que hay dos "ramas" de  $x(t)$  que corresponden a los intervalos  $(-\infty, -\ln k)$  y  $(-\ln k, +\infty)$ . En realidad hay que pensar estas ramas como dos soluciones máximas diferentes. La primera tiene su gráfica debajo de  $-1$  y la segunda por encima de  $1$ . Las soluciones que empiezan en  $(-1, 1)$  están definidas en todo  $\mathbb{R}$  y permanecen en  $(-1, 1)$ . Los puntos  $-1$  y  $1$  son de equilibrio de la ecuación.

Como muestra la figura 8.2, ahora tenemos dividido  $\Omega = \mathbb{R}$  en cinco regiones  $(-\infty, -1)$ ,  $\{-1\}$ ,  $(-1, 1)$ ,  $\{1\}$  y  $(1, +\infty)$ . Las propiedades cualitativas de cualquier solución en cualquiera de estas ramas son determinadas por las de cualquier solución fija en una de estas ramas, ya que una es una trasladada de la otra. Notar que si  $x(t_0)$  no es un punto de equilibrio entonces  $x'(t) = f(x(t)) \neq 0$  para todo  $t$ , luego  $x(t)$  es una función monótona. Por ende, si  $x$  está definida en un intervalo  $(a, +\infty)$  el siguiente límite  $x^0 := \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t)$  debe existir. Si  $x^0 \in \mathbb{R}$  entonces, por el ejercicio 8.9.1, debe ser un punto de equilibrio, de lo contrario  $x^0 = \pm\infty$ . Notar que, como toda solución máxima  $\varphi(t)$  satisface que  $(t, \varphi(t))$  se sale de cualquier compacto contenido en  $\mathbb{R} \times \Omega$ , se tiene que si  $\varphi(t_0)$  está entre dos puntos de equilibrio,  $\varphi(t)$  permanece entre ellos para todo tiempo  $t$  y  $I_\varphi = \mathbb{R}$ . En el ejemplo, como  $f(x) < 0$  en  $(-1, 1)$  debemos tener que una solución  $\varphi$  tal que  $\varphi(t_0) \in (-1, 1)$  está definida en  $\mathbb{R}$  y  $1 = \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t)$  y  $-1 = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t)$ . Toda esta información cualitativa la podemos representar en el eje

Figura 8.2: Ecuación  $x' = \frac{1}{2}(x^2 - 1)$ Figura 8.3: Retrato de fases de  $x' = \frac{1}{2}(x^2 - 1)$ .

$x$  como en la figura 8.3. Las flechas indican la dirección en que las soluciones recorren la región. Este tipo de representación la llamaremos *retrato de fases*.

Se observa que de haber una cantidad finita de puntos de equilibrio hay sólo una cantidad finita posible de retratos de fases. Por ejemplo si hay sólo un punto de equilibrio hay sólo los cuatro retratos de fases mostrados en la figura 8.4. Por ejemplo  $x' = x$ ,  $x' = x^3$  y  $x' = x - a$ , tienen el mismo retrato de fases d). En este caso diremos que las tres ecuaciones son *cualitativamente equivalentes*.

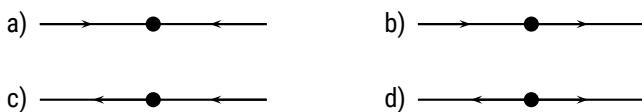


Figura 8.4: Retrato de fases un punto de equilibrio

### 8.3 Sistemas autónomos planos

Ahora consideraremos la ecuación

$$x' = f(x), \quad f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (8.2)$$

donde  $\Omega$  es un abierto de  $\mathbb{R}^2$ . En un sistema autónomo unidimensional el retrato de fases queda completamente determinado por la cantidad de puntos de equilibrio y el comportamiento de las soluciones cerca de sus puntos de equilibrio, esto, a la vez, determina las propiedades cualitativas de las soluciones. En otras palabras, estudiando propiedades

locales, cerca de los puntos de equilibrio, de las soluciones inferimos su comportamiento cualitativo global. En dimensiones mayores las propiedades cualitativas de las soluciones de ecuaciones no lineales no se pueden analizar sólo a partir de propiedades locales. Es por ello que el análisis de sistemas autónomos planos implica desarrollar dos teorías: una local y otra global.

### 8.3.1 Técnicas elementales

Como en el caso de un sistema unidimensional, las soluciones de 8.2 determinarán regiones de  $\Omega$ . Como consecuencia del Teorema 8.1.2 obtenemos que estas regiones son disjuntas. Cada una de ellas es la imagen de alguna solución  $\varphi$ , y por ende también de cualquier trasladada de  $\varphi$ . En símbolos estas regiones son los conjuntos  $\varphi(I_\varphi)$ , con  $\varphi$  solución. Es por ello que estas regiones son curvas de  $\mathbb{R}^2$  y nos referiremos a ellas como *trayectorias* u *órbitas* de (8.2). Algunas veces es relativamente sencillo construir estas órbitas por técnicas elementales. Estas técnicas incluyen

- A. Estudiar las simetrías de la ecuación.
- B. Distinguir si el sistema está desacoplado.
- C. Eliminar el tiempo de la ecuación.
- D. Transformar el sistema por un cambio de variables.

En los siguientes ejemplos ilustramos estas técnicas.

**Ejemplo 8.3.3 Ecuación del péndulo.** Consideremos la ecuación del péndulo plano

$$\begin{cases} x'_1 = x_2 \\ x'_2 = -\operatorname{sen}(x_1) \end{cases} \quad (8.3)$$

Para construir las trayectorias de (8.3) vamos usar una técnica que consiste en eliminar el tiempo de la ecuación y relacionar a  $x_2$  con  $x_1$  por medio de una ecuación, a saber:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-\operatorname{sen}(x_1)}{x_2}.$$

Resolviendo esta ecuación con variables separadas obtenemos

$$x_2 = \pm \sqrt{2 \cos(x_1) + c}.$$

Para que esta ecuación tenga solución debemos tener  $c \geq -2$ . Notar que los puntos de equilibrio del sistema son los puntos  $(n\pi, 0)$ , con  $n \in \mathbb{Z}$ . Si  $(x_1, x_2)$  resuelve (8.3) entonces  $(-x_1, -x_2)$  también lo hace, de modo que es suficiente obtener las trayectorias para  $x_2 \geq 0$  las trayectorias por debajo del eje  $x_1$  se obtienen reflejando las de arriba respecto al origen (observar que esta reflexión puede invertir el recorrido de las trayectorias). Así supongamos que

$$x_2 = \sqrt{2 \cos(x_1) + c}.$$

Observar que  $x'_1 = x_2 > 0$  de modo que  $x_1$  crece en el semiplano superior y, por ende, las trayectorias se recorren de izquierda a derecha en el semiplano superior. En el semiplano inferior el sentido es pues de derecha a izquierda. Si  $c > 2$  entonces  $x_2 > 0$  para todo  $t$  e  $x_2$  es una función periódica de  $x_1$  con mínimos en  $2n\pi$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , y máximos en  $(2n+1)\pi$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Si  $c = 2$  la trayectoria va desde  $(-\pi, 0)$  a  $(\pi, 0)$  (lo mismo ocurre en cada intervalo que resulta de trasladar el intervalo  $(-\pi, \pi)$  por un múltiplo de  $2\pi$ ), no obstante estas trayectorias no puede tocar a los puntos de la forma  $((2n+1)\pi, 0)$  ya que las trayectorias son disjuntas. Vemos así que estas últimas trayectorias se realizan en un tiempo infinito. Si  $-2 < c < 2$  la parte de la trayectoria donde  $x_2 \geq 0$  y  $-\pi < x_1 < \pi$  va desde el punto  $(-\xi, 0)$  a  $(\xi, 0)$ , con  $\cos(\xi) = -\frac{c}{2}$ . Esta trayectoria se "empalma" con su reflejada que irá en el sentido contrario de modo que estas trayectorias provienen de soluciones periódicas. Por otro lado es fácil verificar que

$$\|Df\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos(x_1) & 0 \end{pmatrix} \right\| = 1,$$

luego  $f = (f_1, f_2)$  es lipchitziana sobre  $\mathbb{R}^2$  y las soluciones están definidas para todo tiempo. El aspecto del retrato de fases es mostrado en la figura 8.1. Vemos que los

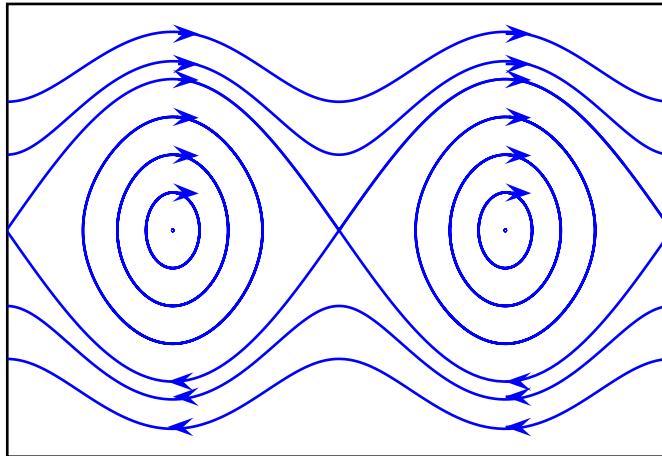


Figura 8.1: Retrato de fases de la ecuación del péndulo

puntos de equilibrio de la forma  $(n\pi, 0)$  son similares, en los sistemas lineales, a *centros* cuando  $n$  es par y a *sillas* cuando  $n$  es impar.

No obstante en los sistemas no lineales pueden aparecer otros comportamientos en rededor de los puntos de equilibrio que aquellos ejemplificados en los sistemas lineales.

**Ejemplo 8.3.4** Consideraremos el sistema

$$\begin{cases} x'_1 = x_1^2 \\ x'_2 = x_2 \end{cases} \quad (8.4)$$

Este sistema es fácil de resolver pues está desacoplado. Resolviendo cada una de las ecuaciones independientemente obtenemos

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{1}{-t + a} \\ x_2(t) &= be^t = e^{t-c} \quad (e^{-c} = b) \end{aligned}$$

Claramente las soluciones no están definidas para todo  $t$ , para cada  $a$  hay dos ramas que corresponden a soluciones diferentes. Notar que si  $(x_1, x_2)$  es solución  $(x_1, -x_2)$  lo es lo que implica que el retrato de fases es simétrico respecto al eje  $x_1$ . Eliminando el tiempo obtenemos que las trayectorias están sobre las curvas definidas por

$$x_2 = ce^{-\frac{1}{x_1}} \quad c > 0.$$

Es fácil ver que  $x_2$  es una función creciente de  $x_1$  cuando  $x_1$  está en  $(-\infty, 0)$  o en  $(0, +\infty)$ . Cuando  $x_1 > 0$ ,  $x_2$  está acotada por  $c$  y  $\lim_{x_1 \rightarrow +\infty} x_2 = c$ . Cuando  $x_1 \rightarrow 0$  por derecha,  $x_2 \rightarrow 0$ . En el cuadrante  $x_1 < 0$  e  $x_2 > 0$  notemos que  $x_2 \rightarrow c$  cuando  $x_1 \rightarrow -\infty$  e  $x_2 \rightarrow +\infty$  cuando  $x_1 \rightarrow 0$  por izquierda. Hay un sólo punto de equilibrio en  $(0, 0)$ . Por último el recorrido de las curvas es de izquierda a derecha pues  $x_2$  es función creciente de  $t$ . Ver la figura 8.2

En un sistema lineal hay un sólo punto de equilibrio o infinitos puntos de equilibrio que forman una recta de  $\mathbb{R}^2$ . En un sistema no lineal autónomo podemos tener infinitos puntos de equilibrios aislados.

**Ejemplo 8.3.5** Consideraremos el sistema

$$\begin{cases} x'_1 = \operatorname{sen}(x_1) \\ x'_2 = -\operatorname{sen}(x_2) \end{cases} \quad (8.5)$$

El sistema tiene puntos de equilibrio en  $(n\pi, m\pi)$ ,  $n, m \in (\mathbb{Z})$ . Observar que si  $(x_1, x_2)$  resuelve (8.5), entonces  $(x_1 + 2n\pi, x_2 + 2m\pi)$ ,  $n, m \in (\mathbb{Z})$ , también lo resuelve, luego es

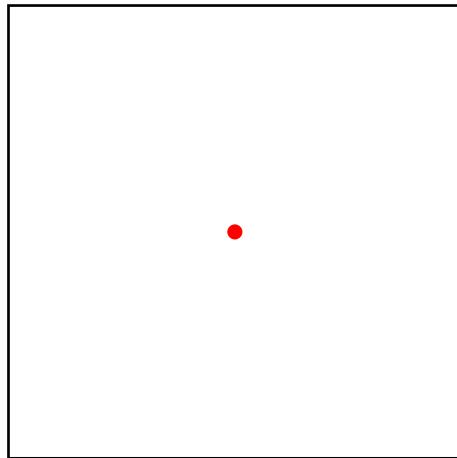


Figura 8.2: Retrato de fases ecuación  $x'_1 = x_1^2, x'_2 = x_2$

suficiente hacer el retrato de fases en la caja  $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$  y trasladar este retrato por vectores de la forma  $(2n\pi, 2m\pi)$ . A la vez  $(x_2 + \pi, x_1 + \pi), (2\pi - x_1, x_2)$  y  $(x_1, 2\pi - x_2)$  son soluciones. Estas simetrías dicen que es suficiente graficar la solución en la caja  $[0, \pi] \times [0, \pi]$ . El sistema está desacoplado, para  $x_1$  tenemos la ecuación:

$$\frac{dx_1}{\operatorname{sen} x_1} = 1.$$

Integrando y haciendo la sustitución  $s = \tan(\frac{x_1}{2})$  obtenemos

$$x_1(t) = 2 \arctan(ae^t), \quad a > 0$$

De manera similar para  $x_2$

$$x_2(t) = 2 \arctan(be^{-t}), \quad b > 0$$

También tenemos las soluciones  $x_1, x_2 = \pm\pi$ . De la expresiones se deduce que si  $(x_0, y_0) \in [0, \pi] \times [0, \pi]$  entonces  $(x_1(t), x_2(t)) \in [0, \pi] \times [0, \pi]$  para todo  $t$ . Cuando  $t \rightarrow -\infty, x_1 \rightarrow 0$  e  $x_2(t) \rightarrow \pi$  y cuando  $t \rightarrow +\infty, x_1 \rightarrow \pi$  e  $x_2(t) \rightarrow 0$ . Ver figura 8.3

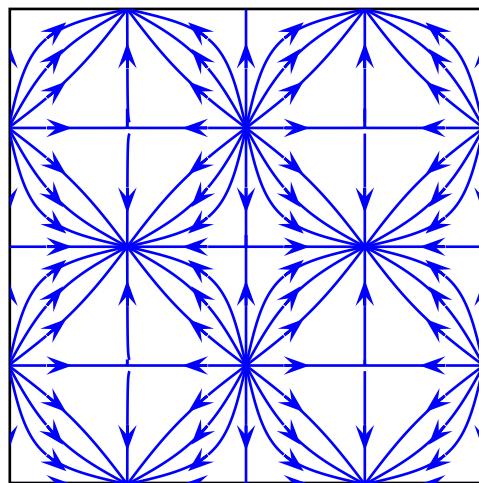


Figura 8.3: Retrato de fases ecuación  $x'_1 = \operatorname{sen} x_1, x'_2 = -\operatorname{sen} x_2$

Veamos un último ejemplo ilustrando un cambio de variables.

**Ejemplo 8.3.6** Consideremos el sistema:

$$\begin{cases} x'_1 = -x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) \\ x'_2 = x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^2 - 1) \end{cases}. \quad (8.6)$$

Aquí vamos a usar coordenadas polares  $x_1 = r \cos \theta$  e  $x_2 = r \sin \theta$ . Se tiene

$$\begin{aligned} r' &= \frac{x_1 x'_1 + x_2 x'_2}{r} \\ \theta' &= \frac{x_1 x'_2 - x_2 x'_1}{r^2}. \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación (8.6) obtenemos

$$\begin{cases} r' = r(r^2 - 1) \\ \theta' = 1 \end{cases}, \quad (8.7)$$

que es un sistema desacoplado y fácil de resolver, obteniendo para  $\theta$  la solución:

$$\theta(t) = t + a.$$

Para  $r$  tenemos, entre otras, las soluciones  $r \equiv 1$  y  $r \equiv 0$ . La primera de ellas junto con  $\theta = t + a$  determinan la circunferencia de radio uno y centro en el origen, la segunda la órbita del equilibrio  $(x_1, x_2) \equiv (0, 0)$ . Observar que, puesto que las órbitas no se cruzan, una órbita que empieza dentro de la bola unidad cerrada  $B_1$  permanece allí por siempre y está definida para todo  $t$ . Si resolvemos  $r$  obtenemos

$$r(t) = \sqrt{\frac{1}{1 + ce^{2t}}},$$

cuando  $c \geq 0$  estamos en  $B_1$  y cuando  $c < 0$  estamos fuera. Si  $c < 0$  las soluciones están definidas (recordar que  $r$  debe ser no negativo) en el intervalo  $(-\infty, -\ln \sqrt{|c|})$ . De la ecuación  $r' = r(r^2 - 1)$ , o de su solución explícita, concluimos que  $r$  es decreciente cuando  $0 < r < 1$  y es creciente cuando  $1 < r$ , además se ve fácilmente que  $\lim_{t \rightarrow -\infty} r(t) = 1$  y  $\lim_{t \rightarrow +\infty} r(t) = 0$ , cuando  $c > 0$ , y  $\lim_{t \rightarrow -\infty} r(t) = 1$  y  $\lim_{t \uparrow -\ln \sqrt{|c|}} r(t) = +\infty$ , cuando  $c < 0$ . Como  $\theta$  crece linealmente (una partícula que se mueva según la ecuación tiene velocidad angular respecto al origen constante) vemos que las soluciones (salvo  $r \equiv 1$  y  $r \equiv 0$ ) son espirales que convergen a 0 ( $c > 0$ ) o infinito ( $c < 0$ ). Ver la figura 8.4. Escribamos el campo  $f$  de este ejemplo como  $f_1 + f_2$

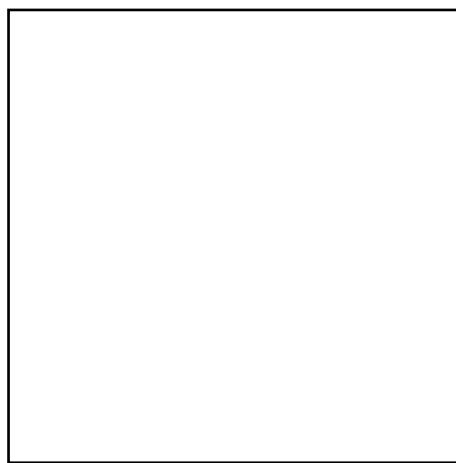


Figura 8.4: Retrato de fases de la ecuación  $r' = r(r^2 - 1)$ ,  $\theta' = 1$

donde

$$f_1 = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad f_2 = \begin{pmatrix} x_1(r^2 - 1) \\ x_2(r^2 - 1) \end{pmatrix}.$$

La expresión  $f_1 + f_2$  es la descomposición de  $f$  como suma de un vector en la dirección de  $(x_1, x_2)$  y el otro en una dirección perpendicular a él (notar que  $f_1 \perp f_2$  y  $f_1$  tiene la dirección de  $(x_1, x_2)$ ). Luego si pensamos a  $f$  como el campo de fuerzas que actúa sobre una partícula, vemos que, si  $r < 1$ ,  $f_2$  actúa en la dirección opuesta a  $(x_1, x_2)$ , así esta fuerza tiende a acercar la partícula al origen cuando  $r < 1$ . Cuando  $r > 1$  la fuerza  $f_2$  rechaza la partícula. En tanto  $f_1$  actúa en la dirección que hace rotar la partícula con velocidad angular constante.

### 8.3.2 Linearización

En la sección anterior construimos los retratos de fases de varios sistemas. La técnicas elementales empleadas fueron *ad hoc*, es decir pueden funcionar en algunos sistemas pero en otros no. El interés en lo que sigue estará puesto en elaborar técnicas más generales de análisis de los retratos de fases. Una de estas técnicas es la linearización. Esta técnica es de índole local, nos dará información del comportamiento de las soluciones cerca de los puntos de equilibrio. Como ya dijimos, esto es insuficiente para analizar los retratos de fases de sistemas no lineales. Expliquemos brevemente esta técnica. Sea la ecuación

$$x' = f(x) \quad f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (8.8)$$

y  $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$  un punto de equilibrio. Aproximando el campo  $f$  por su polinomio de Taylor de grado 1 y recordando que  $f(x^0) = 0$  tenemos

$$x' = Df(x^0)(x - x^0) + R(x - x^0), \quad (8.9)$$

donde el resto  $R$  en esta expresión satisface

$$\lim_{x \rightarrow x^0} \frac{\|R(x - x^0)\|}{\|x - x^0\|} = 0.$$

Si despreciamos  $R$  en la ecuación (8.9) (suponiendo que estamos cerca de  $(x_0, y_0)$ ) y escribimos  $u = (u_1, u_2) = x - x^0$  obtenemos

$$u' = Df(x^0)u := Au \quad (8.10)$$

que es un sistema lineal. La esperanza es que las propiedades cualitativas de los sistemas (8.8) y (8.10) sean las mismas. Para comprobar esto empíricamente volvamos a los ejemplos de la subsección anterior.

En la ecuación del péndulo los puntos de equilibrio del sistema (8.3) son  $x^0 = (n\pi, 0)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Calculando  $Df$  en estos puntos, con  $f = (x_2, -\sin x_1)$  obtenemos

$$A = Df(n\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (-1)^{n+1} & 0 \end{pmatrix} \quad (8.11)$$

Como puede verse fácilmente con las técnicas desarrolladas para sistemas lineales, esta matriz corresponde a un centro cuando  $n$  es par y a una silla cuando  $n$  es impar. Así en este ejemplo la técnica se aplicaría. Pero esto no siempre es así, como lo muestra el ejercicio 8.9.2. Una situación similar, en cierto aspecto, al ejercicio lo representa el ejemplo 8.3.4 cuya linearización en el origen satisface

$$A = Df(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

El retrato de fases del sistema  $u' = Au$  se muestra en la figura 8.5. Como se ve comparando las figuras 8.5 y 8.2 los retratos de fases son muy distintos. ¿Por qué no funciona la técnica de linearización en estos ejemplos? Ocurre que en los sistemas de estos ejemplos la matriz  $A$  tiene autovalores con parte real igual a 0. Como hemos visto un autovalor con parte real positiva determina soluciones cualitativamente muy diferentes que un autovalor con parte real negativa, un autovalor con parte real 0 está en el límite y cualquier pequeña perturbación del sistema proveniente del resto  $R$  puede cambiar radicalmente el retrato de fases de un sistema respecto a su linearización. Esta discusión nos muestra

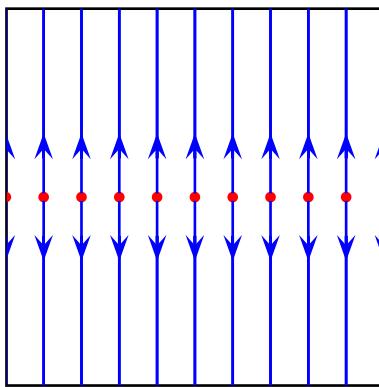


Figura 8.5: Retrato de fases de la ecuación  $u'_1 = 0, u'_1 = u_2$

que la técnica de linearización no funcionará cuando  $A$  tenga autovalores con parte real nula. Pero examinemos más detenidamente la técnica en los casos en que si funciona, por ejemplo en la ecuación del péndulo (8.3). Notar que la matriz  $A$  en (8.11) satisface que  $\sigma(A) = \{\pm 1\}$ , si  $n$  es impar, y  $\sigma(A) = \{\pm i\}$ , si  $n$  es par, por lo dicho anteriormente consideraremos sólo el caso  $n$  impar, ya que el otro caso tiene autovalores con parte real 0. Tomemos  $n = 1$ , el comportamiento en otro equilibrio con  $n$  impar es similar por la periodicidad. Observar que

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

son autovectores correspondientes a los autovalores  $\lambda = 1$  y  $\lambda = -1$ , respectivamente, de  $A$ . El origen es una silla de  $u' = Au$  y sus subespacios estable e inestables son

$$E^s = \{(-x_1, x_1) : x_1 \in \mathbb{R}\} \quad \text{y} \quad E^u = \{(x_1, x_1) : x_1 \in \mathbb{R}\}.$$

Como se sabe  $E^u$  determinan las órbitas que “llegan” a  $(0, 0)$ , cuando “ $t = +\infty$ ”, y  $E^s$  que “salen” cuando “ $t = -\infty$ ”. En el sistema del péndulo (8.3) encontramos trayectorias que salían de  $(\pi, 0)$  y llegaban. Estas trayectorias estaban sobre las gráficas de

$$x_2 = \sqrt{2 \cos(x_1) + 2} = 2 \cos\left(\frac{x_1}{2}\right)$$

y su reflejada

$$x_2 = -\sqrt{2 \cos(x_1) + 2} = -2 \cos\left(\frac{x_1}{2}\right).$$

Las primera llegaba a  $(\pi, 0)$  y la segunda sale. Estas curvas se llaman la *variedad estable* y la *variedad inestable*, respectivamente, de la ecuación en  $(\pi, 0)$ . Notar que las pendientes con que estas trayectorias llegan y salen del equilibrio son igual a

$$\lim_{x_1 \rightarrow \pi^-} \frac{dx_2}{dx_1} = \lim_{x_1 \rightarrow \pi^-} -\sin\left(\frac{x_1}{2}\right) = -1$$

y

$$\lim_{x_1 \rightarrow \pi^-} \frac{dx_2}{dx_1} = \lim_{x_1 \rightarrow \pi^-} \sin\left(\frac{x_1}{2}\right) = 1.$$

Vemos así que, aparte de tener un retrato de fases similar, los subespacios estables e inestables de la linearización son tangentes a las variedades estables e inestables, respectivamente, del sistema (ver figura 8.6). Esto es un hecho general que después demostraremos. Antes de continuar con el tema de linearización discutiremos algunos conceptos.

## 8.4 El flujo de una ecuación diferencial

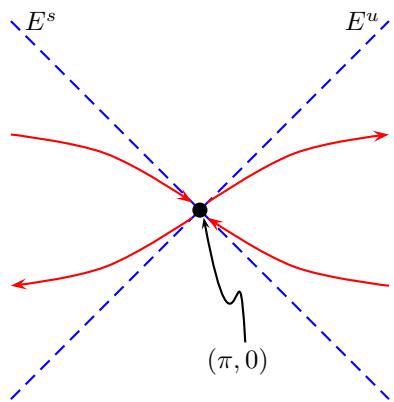


Figura 8.6: Linearización de la ecuación del péndulo

El concepto de *flujo* es una manera nueva de mirar las soluciones de la ecuación diferencial

$$x' = f(x) \quad f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n. \quad (8.12)$$

El flujo es una función  $\Phi_t : \Omega \rightarrow \Omega$ , es decir una transformación (movimiento) del espacio de fases  $\mathbb{R}^n$ . Supongamos que la ecuación (8.12) corresponda a las trayectoria seguida por una partícula que obedece cierta ley física. Entonces  $\Phi_t(x)$  es la posición después de  $t$  segundos que ocupa la partícula que inicialmente está en  $x$ . Notar que al ser el sistema autónomo es irrelevante el valor exacto del tiempo inicial (es lo mismo ver como evoluciona la partícula de  $x$  a  $\Phi_t(x)$  hoy o mañana). La definición del flujo es pues:

**Definición 8.4.1** Definimos el flujo  $\Phi$  de la ecuación (8.12) por  $\Phi_t(x) = \varphi(t)$ , donde  $\varphi$  es solución de (8.12) y  $\varphi(0) = x$ .

Notar que para tener definido  $\Phi_t(x)$  debemos tener que  $t \in I_\varphi$ .

**Teorema 8.4.3** El flujo tiene las siguientes propiedades.

- A.  $\Phi_t \circ \Phi_s = \Phi_{t+s}$ ,
- B.  $\Phi_0$  es la transformación identidad,
- C.  $\Phi_t$  es un homeomorfismo con inversa  $\Phi_{-t}$ .

*Dem.* Para demostrar la primera propiedad tomemos  $\varphi$  solución de (8.12) con  $t \in I_\varphi$  y  $\varphi(0) = x$  y  $\psi$  solución con  $s \in I_\psi$  y  $\psi(0) = \Phi_t(x)$ . Luego  $\varphi(t) = \Phi_t(x) = \psi(0)$  y por el Teorema 8.1.2 debemos tener  $\varphi(t+s) = \psi(s)$  que es la igualdad A. La propiedad B es inmediata de la definición. Para la propiedad en C notemos que por A y B  $\Phi_t$  tiene por inversa  $\Phi_{-t}$ . El hecho de que estas trasformaciones son continuas se sigue de la continuidad de las soluciones respecto a las condiciones iniciales, esto no lo demostraremos en este curso.  $\square$

Si toda las soluciones estuvieran definidas en  $\mathbb{R}$  entonces la aplicación  $t \rightarrow \Phi_t$  es un homomorfismo entre el grupo  $\mathbb{R}$  y el grupo de todos los homeomorfismos con la operación de composición. Por este motivo se dice que el flujo  $\Phi_t$  forma un *grupo uniparamétrico*.

## 8.5 Conjuntos invariantes

El siguiente concepto de *conjunto invariante* desempeña un rol importante.

**Definición 8.5.2** sea  $\Phi_t$  el flujo asociado a la ecuación (8.12). Un conjunto  $S \subset \Omega$  se dirá invariante por  $\Phi$  si  $\Phi_t(x) \in S$ , para cada  $x \in S$  y para cada  $t$  tal que tengamos definido  $\Phi_t(x)$ .

Vale decir un conjunto es invariante si una solución que en un momento está dentro de él lo está, y estuvo, siempre. Análogamente podemos definir *conjunto invariante hacia el futuro*

**Definición 8.5.3** iremos que  $S \subset \Omega$  es invariante hacia el futuro si  $\Phi_t(x) \in S$ , para cada  $x \in S$  y para cada  $t > 0$  tal que  $\Phi_t(x)$  este definida.

Una condición que utilizaremos para demostrar la invariancia hacia el futuro de un conjunto abierto  $S \subset \Omega$  viene de una intuición geométrica clara. Supongamos que en cada punto  $x \in \partial S$  el campo  $f(x)$  apunta hacia dentro del conjunto  $S$ , en ese caso podemos intuir que el conjunto es invariante hacia el futuro. Esto se afirma porque para escaparse de  $S$  una trayectoria debería atravesar  $\partial S$  y, en el punto  $x$  en que la atraviesa, la dirección de  $f(x)$  que debe ser tangente a la trayectoria debería apuntar en la dirección exterior de  $S$ . En lo que sigue trataremos de explicitar mejor estas afirmaciones.

**Definición 8.5.4** Sea un vector  $v$  definimos el cono de amplitud  $\theta > 0$ , de longitud  $h > 0$ , con centro en  $x^0$  y dirección de  $v$  por

$$S(x^0, v, \theta, h) = B_h(x^0) \cap \{x \in \mathbb{R}^n : (x - x^0) \cdot v > \theta \|x - x^0\| \|v\|\}.$$

Vale decir  $S(x^0, v, \theta, h)$  corresponde a todos los puntos  $x$  tales que  $x - x^0$  forma un ángulo menor a  $\arccos \theta$  con  $v$  y que  $x \in B(x^0, h)$ .

**Teorema 8.5.4** Sea  $S \subset \Omega$  un conjunto abierto y supongamos que para cada  $x^0 \in \partial S$  existen un  $1 \geq \theta > 0$  y  $h > 0$  tales que  $S(x^0, f(x^0), \theta, h) \subset S$  (vale decir, no sólo  $f(x^0)$  sino todo un cono apunta hacia el interior), entonces  $S$  es invariante hacia el futuro.

*Dem.* Supongamos que por el contrario existe  $x \in S$  y  $t > 0$  tales que  $y := \Phi_t(x) \notin S$ . Debe ocurrir que existe un  $t_0 \in [0, t]$  tal que  $x^0 = \Phi_{t_0}(x) \in \partial S$ . De lo contrario la trayectoria entre  $[0, t]$ , que es un conjunto conexo, estaría contenida en la unión del interior y exterior de  $S$  que daría una contradicción. Sea  $t_1 = \sup\{s : \Phi_s(x) \in \partial S\}$ , entonces por continuidad y como  $\partial S$  es cerrado  $x^0 = \Phi_{t_1}(x) \in \partial S$ . Además, de la definición  $\Phi_s(x) \notin S$ , cuando  $s > t_1$ . Sean  $\theta$  y  $h$  los parámetros de las hipótesis del teorema. Pongamos  $\varphi(t) = \Phi_{t+t_1}(x)$  y desarrollemos  $\varphi$  por su polinomio de Taylor de grado 1 alrededor de  $t = 0$ :

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= x^0 + t\varphi'(0) + R(t) \\ &= x^0 + tf(x^0) + R(t) \quad \text{con } \|R(t)\|/t \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow 0. \end{aligned} \tag{8.13}$$

Sea  $\epsilon > 0$  tal que  $2\epsilon < (1 - \theta)\|f(x^0)\|$  (notar que debe ser  $f(x^0) \neq 0$ ) y sea  $\delta > 0$  suficientemente pequeño para que

$$\|R(t)\| \leq \epsilon t,$$

para  $0 < t < \delta$ , entonces

$$\|\varphi(t) - x^0\| \leq t\|f(x^0)\| + \|R(t)\| \leq t\|f(x^0)\| + \epsilon t.$$

para  $0 < t < \delta$ . Así tendremos  $\|\varphi(t) - x^0\| \leq h$  eligiendo  $\delta$  suficientemente pequeño.

Entonces

$$\begin{aligned}
 (\varphi(t) - x^0) \cdot f(x^0) &\geq t\|f(x^0)\|^2 - \|R(t)\|\|f(x^0)\| \\
 &\geq t\|f(x^0)\|^2 - \epsilon t\|f(x^0)\| \\
 &\geq \theta t\|f(x^0)\|^2 + (1-\theta)t\|f(x^0)\|^2 - \frac{(1-\theta)}{2}t\|f(x^0)\|^2 \\
 &\geq \theta t\|f(x^0)\|^2 + \frac{(1-\theta)}{2}t\|f(x^0)\|^2 \\
 &\geq \theta t\|f(x^0)\|^2 + \epsilon t\|f(x^0)\| \\
 &\geq \theta\|\varphi(t) - x^0\|\|f(x^0)\|
 \end{aligned}$$

De esta manera vemos que  $\varphi(t) = \Phi_{t+t_1}(x) \in S(x^0, f(x^0), \theta, h) \subset S$  para  $0 < t < \delta$  y esto contradice la elección de  $t_1$ .  $\square$

## 8.6 Linearización: continuación

En esta sección elaboraremos técnicas que nos permitirán demostrar que, en ciertos casos, el retrato de fases de un sistema se comporta de manera similar a su linearización. Sólo demostraremos el caso de nodos estables, otros casos quedarán como ejercicio. Consideremos  $f$  una campo de clase  $C^1$  definido sobre  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . Supongamos que  $x^0$  es un punto de equilibrio *aislado* de  $f$ , es decir  $f(x^0) = 0$  y existe una bola  $B(x^0, \delta)$  tal que dentro de esta bola el único equilibrio es  $x^0$ . A lo largo de esta sección vamos a considerar la linearización del sistema

$$x' = f(x). \quad (8.14)$$

Notar que si  $x$  resuelve este sistema entonces  $y = x - x^0$  resuelve  $y' = g(y)$ , donde  $g(y) := f(y + x^0)$ , y que  $g$  tiene un equilibrio en  $x^0 = 0$ . Por ello, de ahora en más supondremos  $x^0 = 0$ . Con esta convención, la linearización de (8.14) es el sistema

$$x' = Ax, \quad (8.15)$$

donde, a lo largo de la sección escribiremos  $A$  para la matriz jacobiana  $Df(0)$ .

**Definición 8.6.5** iremos que el punto de equilibrio  $x^0 = 0$  es *simple* si la matriz  $A$  es no singular.

Para un vector no nulo  $v$  escribiremos  $\arg v = v/\|v\|$ , el valor  $\arg v$  se puede identificar continuamente con un único ángulo  $\theta$  cuando  $\theta \in (-\pi, \pi)$ .

**Lema 8.6.1** Un punto de equilibrio simple es aislado. Además

$$\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \frac{\|f(x)\|}{\|Ax\|} = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{\|x\| \rightarrow 0} (\arg f(x) - \arg Ax) = 0$$

*Dem.* Como  $A$  es no singular  $Ax \neq 0$  para todo  $x$  con  $\|x\| = 1$ . Luego

$$c := \inf_{\|x\|=1} \|Ax\| > 0.$$

La constante  $c$  satisface que

$$c\|x\| \leq \|Ax\|, \quad (8.16)$$

para todo  $x \in \mathbb{R}^2$ . Como  $f$  es diferenciable y  $f(0) = 0$ :

$$f(x) = Ax + R(x), \quad \text{con} \quad \lim_{\|x\| \rightarrow 0} \frac{\|R(x)\|}{\|x\|} = 0. \quad (8.17)$$

Luego

$$\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \left\| \frac{f(x)}{\|Ax\|} - \frac{Ax}{\|Ax\|} \right\| \leq c \lim_{\|x\| \rightarrow 0} \left\| \frac{f(x)}{\|x\|} - \frac{Ax}{\|x\|} \right\| = 0.$$

Esta última desigualdad implica que  $f(x) \neq 0$  en un entorno de 0 y por otro lado

$$\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \left| \frac{\|f(x)\|}{\|Ax\|} - 1 \right| \leq \lim_{\|x\| \rightarrow 0} \left\| \frac{f(x)}{\|Ax\|} - \frac{Ax}{\|Ax\|} \right\| = 0$$

y

$$\begin{aligned} \lim_{\|x\| \rightarrow 0} (\arg f(x) - \arg Ax) &= \lim_{\|x\| \rightarrow 0} \left\| \frac{f(x)}{\|f(x)\|} - \frac{Ax}{\|Ax\|} \right\| \\ &= \lim_{\|x\| \rightarrow 0} \left\| \frac{f(x)}{\|f(x)\|} - \frac{f(x)}{\|Ax\|} + \frac{f(x)}{\|Ax\|} - \frac{Ax}{\|Ax\|} \right\| \\ &\leq \lim_{\|x\| \rightarrow 0} \left\| \frac{f(x)}{\|f(x)\|} - \frac{f(x)}{\|Ax\|} \right\| \\ &= \lim_{\|x\| \rightarrow 0} \left| \frac{\|f(x)\|}{\|Ax\|} - 1 \right| = 0. \end{aligned}$$

□

A menudo aplicaremos este lema de la siguiente forma: para todo  $\epsilon > 0$  existe un  $r > 0$  tal que para todo  $x$  en la bola abierta  $B_r$  con centro en 0 y radio  $r$  se tiene que

$$\left| \frac{\|f(x)\|}{\|Ax\|} - 1 \right| < \epsilon \quad y \quad \|\arg f(x) - \arg Ax\| < \epsilon. \quad (8.18)$$

**Definición 8.6.6** ea  $x(t)$  una solución de (8.14) tal que  $x(t)$  tiende al equilibrio 0 cuando  $t \rightarrow \infty$ . Diremos que  $x(t)$  entra en el equilibrio 0 en la dirección de  $v$  si  $\arg(x(t)) \rightarrow v$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

**Teorema 8.6.5** Sea  $x(t)$  que entra a 0 cuando  $t \rightarrow \infty$  en la dirección de  $v$ , entonces  $v$  es un autovector de  $A = Df(0)$ .

*Dem.* Por la ecuaciones (8.14), (8.17), dividiendo por  $\|x(t)\|$  y tomando límite para  $t \rightarrow \infty$  tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x'(t)}{\|x(t)\|} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(x(t))}{\|x(t)\|} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{Ax(t)}{\|x(t)\|} + \frac{R(x(t))}{\|x(t)\|} \\ &= Av. \end{aligned}$$

Por lo tanto  $x'(t)/\|x(t)\|$  tiene límite cuando cuando  $t \rightarrow +\infty$ . Utilizando la regla de l'Hospital en cada coordenada  $i = 1, 2$  y teniendo en cuenta que

$$\frac{d}{dt} \|x(t)\| = \frac{x(t) \cdot x'(t)}{\|x(t)\|}$$

obtenemos que

$$\begin{aligned} v &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x(t)}{\|x(t)\|} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x'(t)}{\frac{x(t) \cdot x'(t)}{\|x(t)\|}} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x'(t)}{\|x(t)\|} \frac{1}{\frac{x(t) \cdot x'(t)}{\|x(t)\|^2}} \\ &= \frac{1}{v \cdot Av} Av. \end{aligned}$$

Lo que muestra que  $v$  es un autovector correspondiente al autovalor  $\lambda := v \cdot Av$ .  $\square$

Sea  $x(t)$  solución no nula de (8.14) que tiende a 0 cuando  $t \rightarrow \infty$ , sea  $P$  cualquier matriz no singular y pongamos

$$y = P^{-1}x, \quad (8.19)$$

entonces  $y$  resuelve

$$y' = P^{-1}x' = P^{-1}f(x) = P^{-1}f(Py) =: g(y).$$

Notar que

$$Dg(y) = P^{-1}DfP = P^{-1}AP =: B,$$

si elegimos  $P$  de modo que  $B$  sea la forma de Jordan de  $A$ , vemos que el retrato de fases del sistema (8.14) y su linearizado se obtienen por una transformación afín del retrato de fases de un sistema cuya linearización tiene una matriz en forma de Jordan; como este tipo de transformaciones preservan todas las características que deseamos estudiar, a menudo supondremos que  $A = Df(0)$  está dada en forma de Jordan.

En lo que sigue será importante considerar el ángulo  $\alpha \in (-\pi, \pi]$  que forma el campo  $f(x)$  con  $-x$  ( $x \neq 0$ ), ver la figura 8.1. Este ángulo satisface:

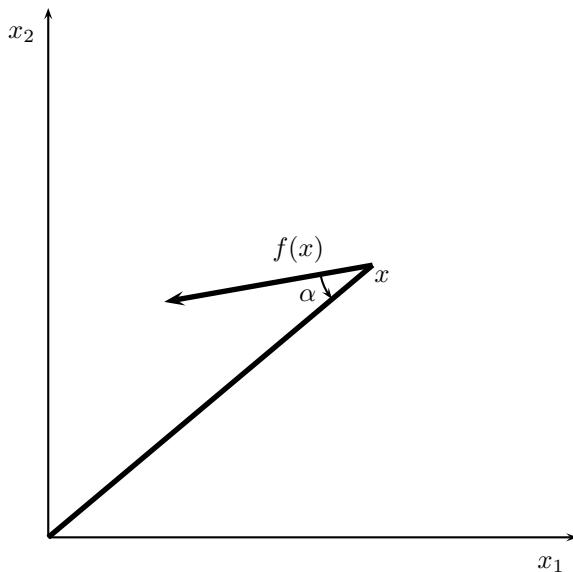


Figura 8.1: Ángulo  $\alpha$

$$\cos \alpha = -\frac{f(x) \cdot x}{\|f(x)\| \|x\|} = -\arg f(x) \cdot \arg x.$$

Análogamente definimos  $\beta \in (-\pi, \pi]$ , que satisface:

$$\cos \beta = -\frac{Ax \cdot x}{\|Ax\|\|x\|} = -\arg Ax \cdot \arg x.$$

Estas ecuaciones determinan  $|\alpha|$  y  $|\beta|$ , pero no el signo de los ángulos. Los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$  pueden ser funciones discontinuas de  $x$  cuando asumen el valor  $\pi$ , no obstante  $\cos \alpha$  y  $\cos \beta$  son funciones continuas de  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ . Recordando el Lema 8.6.1 tenemos que para todo  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$|\cos \alpha - \cos \beta| < \epsilon, \quad \text{cuando } \|x\| < \delta. \quad (8.20)$$

Notar además que  $\beta(x) = \beta(\lambda x)$ , para todo  $\lambda$ . Es a menudo conveniente representar la ecuación en coordenadas polares  $(r, \theta)$ , teniendo en cuenta que  $(x_1, x_2) \perp (-x_2, x_1)$  nos queda:

$$\begin{aligned} r' &= \frac{x \cdot x'}{r} = -\frac{x \cdot f(x)}{r} = -\|f(x)\| \cos \alpha \\ \theta' &= \frac{x_1 x'_2 - x'_1 x_2}{r^2} \\ &= \frac{(f_1, f_2) \cdot (-x_2, x_1)}{r^2} \\ &= \frac{\|f(x)\| \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)}{r} \\ &= \frac{\|f(x)\| \sin \alpha}{r}. \end{aligned} \quad (8.21)$$

Vamos a considerar por separado la linearización de sistemas (8.14) para tipos distintos (no todos) del sistema linearizado (8.15).

**Teorema 8.6.6 (Nodos estables)** Supongamos que  $f(0) = 0$  y que (8.15) tiene un nodo estable en 0, es decir  $A$  tiene autovalores reales distintos y negativos  $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ . Entonces existe  $\delta > 0$  tal que si  $x \in B_\delta(0)$ :

- A.  $\Phi_t(x)$  está definida para todo  $t \geq 0$  y  $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi_t(x) = 0$ .
- B.  $\Phi_t(x)$  entra en  $(0, 0)$  y lo puede hacer sólo en las direcciones determinadas por los autovectores de  $A$ .
- C. Hay al menos una trayectoria que llega en la dirección de cada autovector.

*Dem.* Por el cambio de variables (8.19) podemos suponer

$$A = Df(0, 0) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

y

$$f(x) = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2) + R(x),$$

donde

$$\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \frac{\|R(x)\|}{\|x\|} = 0.$$

Por las suposiciones sobre los autovalores se tiene  $\cos \beta > 0$ , cuando  $x \neq 0$ . Como  $\cos \beta$  es una función continua,  $\cos \beta(x) = \cos \beta(\lambda x)$  y  $\partial B_1(0)$  es compacto se tiene que existe  $x^0 \in \partial B_1(0)$  tal que

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}} \cos \beta = \min_{x \in \partial B_1(0)} \cos \beta = \cos(\beta(x^0)) =: c_0 > 0. \quad (8.22)$$

Esto muestra que siempre el ángulo  $\beta$  satisface que  $|\beta| < \pi/2$  en  $\mathbb{R}^2$ . Sea  $\epsilon > 0$  y tomemos  $\delta > 0$  que satisface (8.20). Tomando  $\epsilon = c_0/2$  obtenemos a partir de (8.22) y (8.20) que

$$\cos \alpha \geq \frac{c_0}{2} =: c_1 > 0, \quad (8.23)$$

para todo  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ . Sea  $x \in B_\delta \setminus \{0\}$ , expresando la trayectoria  $\Phi_t(x)$  usando las ecuaciones (8.21) tenemos

$$r'(t) \leq -\|f(\Phi_t(x))\|c_1 < 0 \quad \text{y} \quad \theta'(t) = \frac{\|f(\Phi_t(x))\| \operatorname{sen} \alpha}{r}. \quad (8.24)$$

Así vemos que  $r'$  es decreciente y, por ende,  $\Phi_t(x) \in B_\delta$ , para todo  $t \geq 0$ . Esto implica que  $\Phi_t(x)$  está definida para todo  $t \geq 0$ . Supongamos que  $\Phi_t(x)$  no tiende a 0, luego, ya que  $r(t)$  es decreciente, existe  $r_0$  tal que  $\delta \geq r(t) \geq r_0$ , para todo  $t > 0$ . Como 0 es un equilibrio aislado podemos elegir  $\delta$  de modo que en  $B_{2\delta}(0)$  sólo exista el equilibrio  $x = 0$ . Entonces  $\|f(y)\|$  tiene una cota inferior  $k > 0$  cuando  $r_0 \leq \|y\| \leq \delta$ . Esto y (8.24) implican que  $r'(t) \leq -c_1 k$ , e integrando entre 0 y  $t$  esta desigualdad obtenemos

$$r(t) \leq -c_1 kt + r(0) \leq -c_1 r_0 t + \delta. \quad (8.25)$$

Luego si  $t$  es suficientemente grande tendríamos  $r(t) < r_0$  que contraría nuestra suposición. Luego  $\Phi_t(x) \rightarrow 0$ , cuando  $t \rightarrow \infty$ , para todo  $x \in B_\delta$ . Esto prueba el inciso A.

Ahora el Teorema 8.6.5 implica que de entrar en el origen  $\Phi_t(x)$  lo debería hacer en las direcciones de los autovectores de  $A$ , que en este caso podrían ser los vectores  $\pm e_1, \pm e_2$ . Probaremos ahora que toda trayectoria que empieza en  $B_\delta$  entra al origen, más precisamente probaremos que si  $\Phi_t(x)$  no entra al origen con la dirección de  $\pm e_1$  lo hace en la de  $\pm e_2$ .

Sea  $\eta > 0$ . Cubramos los ejes  $x_1$  y  $x_2$  del plano con sectores de ángulo  $\eta$  y nombremos las regiones resultantes como en la figura 8.2. Sea  $x$  un vector en el primer cuadrante

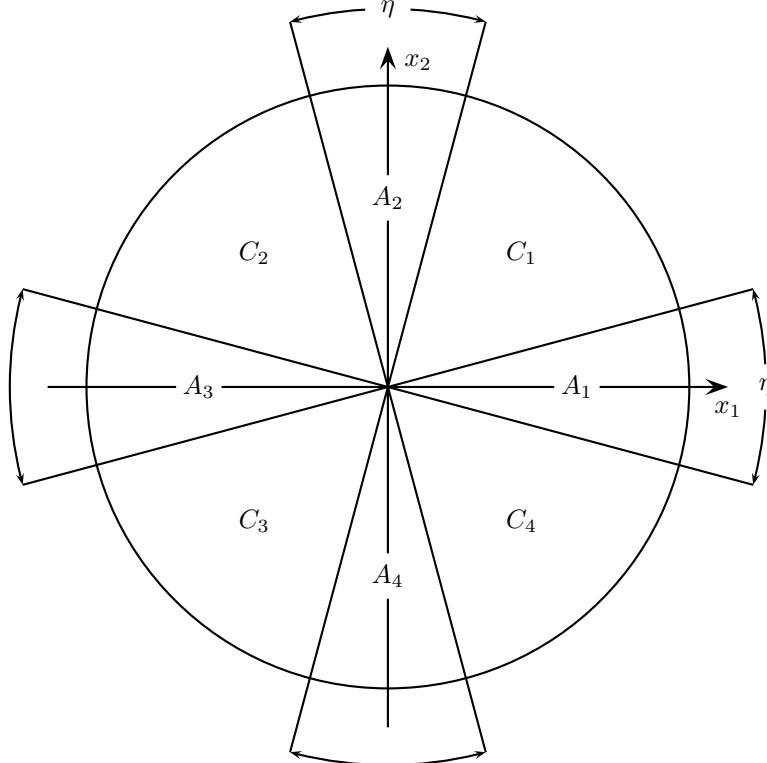


Figura 8.2: División del plano

con  $\|x\| = 1$ . Notemos que la desigualdad de Cauchy-Schwartz dice que la igualdad

$$|Ax \cdot x| = \|Ax\| \|x\| = \|Ax\|$$

se alcanza si, y sólo si,  $Ax$  y  $x$  están alineados, es decir si existe  $\mu$  tal que  $Ax = \mu x$  y, en otras palabras si  $\mu$  es un autovalor y  $x$  un autovector. Esto nos dice que  $\mu = \lambda_1$  y  $x = e_1$  o  $\mu = \lambda_2$  y  $x = e_2$ . Por ende si  $x \in C_1$  tenemos que

$$-1 < \cos \beta = \frac{Ax \cdot x}{\|Ax\| \|x\|} < 1$$

Consideremos el compacto  $K := C_1 \cap \partial B_1(0)$ . La función (continua respecto a  $x$ )  $\cos \beta = \cos \beta(x)$  alcanza un máximo  $c_0$  y un mínimo  $c_1$  en  $K$ . Luego, por la desigualdad anterior y dado que  $e_1, e_2 \notin K$ , si  $x \in K$

$$-1 < c_1 \leq \cos \beta \leq c_0 < 1. \quad (8.26)$$

Ahora (8.26) y la identidad  $H(\lambda x) = H(x)$  implican que (8.26) se mantiene para todo  $x \in C_1 \setminus \{0\}$ . Esto prueba que

$$-1 < c_1 \leq \cos \beta \leq c_0 < 1. \quad (8.27)$$

Tomando  $\arccos$  tenemos  $0 < \beta_0 < |\beta| < \pi - \beta_0$ , para cierto  $\beta_0$ . Lo mismo ocurre en las otras regiones  $C$ . Nuevamente, de la continuidad de  $\cos \beta(x)$  vemos que  $\beta$  debe asumir sólo un signo en cada región  $C$ . Se puede verificar que  $\beta$  es positivo en el primer y tercer cuadrante (en el interior de ellos para ser más específico) y negativo en los restantes, entonces  $0 < \beta_0 < \beta < \pi - \beta_0$  en  $C_1$ . Entonces, si  $x^0$  es un punto de la frontera común entre  $A_1$  y  $C_1$  se tiene

$$S(x^0, Ax^0, \cos \beta_0, h) \subset C_1, \quad \text{para algún } h > 0. \quad (8.28)$$

Pongamos  $\theta_1 = \cos \beta_0$ . De la acotación (8.16) existe  $\lambda > 0$  tal que

$$\lambda \|x\| \leq \|Ax\|,$$

para todo  $x$ . Sean  $\epsilon, \theta_0$  números positivos que especificaremos con más precisión luego. En virtud del Lema 8.18 y la diferenciabilidad de  $f$ , podemos elegir  $\delta > 0$  de modo que

$$\|R(x)\| \leq \epsilon \|x\| \quad \text{y} \quad \|f(x)\| > (1 - \epsilon) \|Ax\|,$$

cuando  $\|x\| < \delta$ . Ahora si  $x \in S(x^0, f(x^0), \theta_0, h)$  y  $x^0 \in B_\delta$  tenemos que

$$\begin{aligned} \theta_0(1 - \epsilon) \|Ax^0\| \|x - x^0\| &\leq \theta_0 \|f(x^0)\| \|x - x^0\| \\ &\leq f(x^0) \cdot (x - x^0) \\ &\leq Ax^0 \cdot (x - x^0) + R(x^0) \cdot (x - x^0) \\ &\leq Ax^0 \cdot (x - x^0) + \|R(x^0)\| \|x - x^0\| \\ &\leq Ax^0 \cdot (x - x^0) + \epsilon \|x^0\| \|x - x^0\| \\ &\leq Ax^0 \cdot (x - x^0) + \epsilon \lambda^{-1} \|Ax^0\| \|x - x^0\| \end{aligned}$$

Ahora eligiendo  $\theta_0$  arbitrariamente en el intervalo  $(\theta, 1)$  y  $\epsilon > 0$  de modo que  $(1 - \epsilon)\theta_0 > \frac{\theta_1 + \theta_0}{2}$  y  $\epsilon \lambda^{-1} < \frac{\theta_0 - \theta_1}{2}$  (para lo cual habrá que achicar  $\delta$  convenientemente), obtenemos qué

$$\theta_1 \|Ax^0\| \|x - x^0\| \leq Ax^0 \cdot (x - x^0),$$

lo que prueba que

$$S(x^0, f(x^0), \theta_0, h) \subset S(x^0, Ax^0, \theta_1, h).$$

Recordando (8.28), vemos que si  $x^0$  está en el borde común entre  $C_1$  y  $A_1$  entonces existe  $h > 0$  y  $\theta_0$  tales que

$$S(x^0, f(x^0), \theta_0, h) \subset C_1. \quad (8.29)$$

Luego por el Teorema 8.5.4 si  $x \in B_\delta \cap C_1$  entonces  $\Phi_t(x)$  no puede cruzar  $\partial C_1 \cap \partial A_1$ . Recordando que  $\delta$  se había elegido de modo que  $r(t)$  era decreciente ( $\Phi_t(x)$  no puede cruzar  $\partial B_\delta$ ) y haciendo un análisis análogo al anterior sobre cada lado de los sectores angulares  $A_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , se finaliza por demostrar las siguientes afirmaciones:

A. Si  $i = 2, 4$ , entonces  $B_\delta \cap A_i$  es invariante hacia el futuro.

B. Si  $x \in B_\delta$  pero  $x$  no está en  $A_i, i = 1, 3$ , entonces  $\Phi_t(x)$  nunca entra a  $A_i, i = 1, 3$ .

Sea  $x \in B_\delta \setminus \{0\}$ . Observar que una condición necesaria y suficiente para que  $\Phi_t(x)$  entre al origen en la dirección de  $-e_1$  es que para todo  $\delta' > 0$  y  $\eta > 0$  existe  $t_{\eta, \delta'}$  tal que para  $t > t_{\eta, \delta'}$  tengamos  $\Phi_t(x) \in A_1(\eta) \cap B_\delta$ . Una afirmación análoga se mantiene para las otras tres direcciones en que  $\Phi_t(x)$  puede entrar a 0.

Supongamos que  $x \in B_\delta$  y que  $\Phi_t(x)$  no entra al origen en la dirección de  $\pm e_1$ . Por el comentario del párrafo anterior existen  $\delta > \delta' > 0, \eta' > 0$  y  $t_0$  tales que  $\Phi_{t_0}(x) \notin (A_1(\eta') \cup A_3(\eta')) \cap B_{\delta'}$ . Vamos a ver, observando que en las regiones  $C_i, i = 1, \dots, 4$  la velocidad angular  $\theta'$  es estrictamente positiva, que, para todo  $\eta < \eta'$ , la trayectoria  $\Phi_t(x)$  entra a las regiones  $A_i(\eta), i$  par, para algún  $t > t_0$ .

Si esto no fuera cierto  $\Phi_t(x), t > t_0$  permanecería en una región  $C_i$ , digamos  $C_1$ , para algún  $\eta$ . Ahora en  $C_1$  el ángulo  $\alpha$  es positivo y por (8.24) tenemos

$$\theta'(t) = \frac{\|f(\Phi_t(x))\| \operatorname{sen} \alpha}{r} > 0.$$

Es decir que la función  $\theta(t)$  es creciente, además  $\theta$  está acotado en  $C_1$ , más precisamente  $\theta < \frac{\pi}{2} - \frac{\eta}{2}$ . De esta manera el límite  $\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) =: \theta_0$  existe, es menor a  $\pi/2$  y positivo. Esto implica que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\Phi_t(x)}{r(t)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} (\cos \theta, \operatorname{sen} \theta) = (\cos \theta_0, \operatorname{sen} \theta_0) =: v_0,$$

donde  $v_0$  es distinto de  $e_1$  y  $e_2$ , lo que contradice que las únicas formas de entrar eran en la dirección de los autovectores.

Hemos probado que para todo  $\eta$ , existe un  $t_1$  tal que  $\Phi_{t_1}(x)$  está en las regiones  $A_2$ . Como  $A_2$  es invariante hacia el futuro, tenemos que  $\Phi_t(x) \in A_2$ , para todo  $t \geq t_1$ . Luego  $\Phi_t(x)$  entra al origen en la dirección de  $-e_2$ . Con esto probamos el inciso B.

Observar que, de paso, probamos que toda trayectoria que empieza en la bola  $B_\delta$  y en alguna de las regiones  $C$  entra al origen en la dirección de  $\pm e_2$ . Si empieza en  $C_i$ , con  $i = 1, 2$ , entra en la dirección de  $-e_2$ ; si empieza en  $C_i$ , con  $i = 3, 4$ , entra en la dirección de  $e_2$ . Entonces hay trayectorias que entran en la dirección de  $\pm e_2$ . Lo único que restaría probar es que hay al menos una trayectoria que entra al origen en la dirección de  $\pm e_1$ .

Esto se hará con un argumento puramente topológico. Supongamos que hay trayectorias entrando al origen en la dirección de  $-e_1$ . Consideremos el sector  $A_1(\eta)$ , para cualquier  $\eta$ . De modo que si  $x \in A_1(\eta) \cap B_\delta$ ,  $\Phi_t(x)$  debe entrar al origen en la dirección de  $\pm e_2$ . Para ello  $\Phi_t(x)$  debe pasar primero por alguno de los interiores de las regiones  $C_1$  o  $C_4$ . Dividamos  $A_1(\eta) \cap B_\delta$  en los dos conjuntos  $G_1$  y  $G_2$  acorde a aquellos puntos que llegan al interior de  $C_1$  o al de  $C_4$ . Se tiene que  $A_1(\eta) \cap B_\delta = G_1 \cup G_2, G_1 \cap G_2 = \emptyset$  y que  $G_1$  y  $G_2$  son abiertos relativos en  $A_1(\eta) \cap B_\delta$  (esto sigue de la continuidad de  $\Phi_t$ ). Además los conjuntos  $G$  son no vacíos, para ver esto solo hay que notar que  $A_1(\eta) \cap B_\delta$  contiene puntos de las regiones  $C_1$  y  $C_4$  correspondientes a  $\eta/2$ . Todo esto implica una contradicción pues  $A_1(\eta) \cap B_\delta$  es conexo. De esta forma alguna trayectoria entra al origen en la dirección de  $e_1$ .  $\square$

Para puntos sillas tenemos el siguiente teorema.

**Teorema 8.6.7 (Sillas)** Supongamos que  $f(0) = 0$  y que (8.15) tiene un punto silla en 0, es decir  $A$  tiene autovalores reales de distinto signo  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ . Consideremos las regiones  $A_2(\eta)$  y  $A_4(\eta)$  como en la demostración del teorema anterior. Entonces existe  $\delta > 0$  tal que:

- A. Si  $x \in A_i(\eta) \cap B_\delta, i = 2, 4$ ,  $\Phi_t(x)$  se sale de  $A_i(\eta) \cap B_\delta$  cruzando  $A_i(\eta) \cap \partial B_\delta$ . Vale decir la trayectoria sale de la región cruzando la parte curva de la región y no los lados del sector  $A_i$ .
- B. Si  $\Phi_t(x)$  no entra en  $(0, 0)$  entonces  $\Phi_t(x) \not\rightarrow 0$ .

C. Hay al menos una trayectoria que llega en la dirección de  $\pm e_1$ .

Por último mencionamos el siguiente teorema.

**Teorema 8.6.8 (Focos)** Supongamos que  $f(0) = 0$  y que (8.15) tiene un foco estable en 0, es decir  $A$  tiene autovalores complejos conjugados  $\lambda = a \pm bi$  con  $a < 0$  y  $b > 0$ . Entonces existe  $\delta > 0$  tal que:

- A. Si  $x \in B_\delta$  entonces  $\Phi_t(x)$  está definida para todo  $t \geq 0$  y  $\Phi_t(x) \rightarrow 0$ , cuando  $t \rightarrow \infty$ .
- B. Para ningún  $x \in B_\delta$ ,  $\Phi_t(x)$  entra en  $(0, 0)$ .
- C. El ángulo  $\theta(t)$  satisface que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \theta(t) = +\infty$ .

Notar entonces que las trayectorias tienen que formar espirales que se aproximan al origen.

## 8.7 Aplicación a un modelo biológico

Hemos modelizado la dinámica de una población por una ecuación del tipo  $x' = kx$ . Cuando  $k$  es constante obtenemos la ley de reproducción normal, que representa la ley que obedece la evolución de la población cuando no hay ningún agente externo que influya en la misma. En general podemos pensar en una ley del tipo  $x' = k(x)x$ , donde  $k$  es función de  $x$ , por ejemplo si  $k(x) = a - x$  obtenemos la ecuación logística, esta ecuación toma cuenta de una provisión de alimentos limitada. Cuando pensamos en dos especies que interactúan y denotamos  $x_i$ ,  $i = 1, 2$ , la cantidad de individuos en cada una de ellas podemos representar la dinámica de las mismas por un sistema del tipo

$$\begin{cases} x'_1 = k_1(x_1, x_2)x_1 \\ x'_2 = k_2(x_1, x_2)x_2 \end{cases} \quad (8.30)$$

Aquí  $k_i$  representa la naturaleza de la interacción. Pensemos en dos especies compitiendo por la misma fuente de alimentos, es lógico suponer entonces que en esta situación la función  $k_i$  disminuya a medida que aumenten las cantidades  $x_i$ . Por otro lado, si  $x_i$  son pequeños, los  $k_i$  deberían estar cerca de la constante en la ley de reproducción normal  $r_i$ . Un modelo simple que da cuenta de estos comportamientos es:

$$\begin{aligned} x'_1 &= (r_1 - a_1 x_1 - b_1 x_2)x_1 \\ x'_2 &= (r_2 - a_2 x_2 - b_2 x_1)x_2 \end{aligned} \quad (8.31)$$

Todos los coeficientes son positivos y para abolir casos especiales supondremos que  $a_1 a_2 - b_1 b_2 \neq 0$ . Hay cuatro equilibrios en este modelo:

$$\begin{aligned} E_1 &= (0, 0) & E_2 &= (0, r_2/a_2) \\ E_3 &= (r_1/a_1, 0) & E_4 &= (a_1 a_2 - b_1 b_2)(a_2 r_1 - b_1 r_2, a_1 r_2 - b_2 r_1) \end{aligned} \quad (8.32)$$

El equilibrio  $E_1$  corresponde a que ambas especies se han extinguido. En los equilibrios  $E_2$  y  $E_3$  se ha extinguido una especie y la otra ha llegado al equilibrio con la provisión de alimentos. El equilibrio  $E_4$  tiene sentido para nuestro problema si tiene ambas componentes positivas, es el más "sano" de todos los equilibrios pues representa un equilibrio donde ambas especies coexisten.

El análisis del modelo requiere dividir en casos acorde a la magnitud relativa de los coeficientes. De todos los casos posibles analizaremos el siguiente:

$$a_2 r_1 < b_1 r_2 \quad y \quad a_1 r_2 < b_2 r_1. \quad (8.33)$$

Multiplicando las dos ecuaciones y dividiendo por  $r_1 r_2$  obtenemos

$$a_2 a_2 < b_1 b_2. \quad (8.34)$$

Con estas asignaciones  $E_4$  está en el primer cuadrante. La desigualdad (8.34) se puede interpretar como que la competencia intraespecies es más débil que la interespecies.

Empecemos por considerar el sistema linearizado en  $E_1 = (0, 0)$ . No hay necesidad de derivar la ecuación ya que muy fácilmente se desarrolla  $f$  en series de potencias respecto a las variables  $x_1, x_2$  y despreciando todos los monomios en (8.31) de grado mayor que 1, nos queda que

$$A = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix}.$$

El equilibrio es por ende un nodo inestable. Los vectores  $e_1$  y  $e_2$  son autovectores de  $A$  (únicos si  $r_1 \neq r_2$ ), de modo que las trayectorias nacen en  $-\infty$  tangentes a alguno de estos vectores (nuevamente si  $r_1 \neq r_2$ ). El desarrollo en  $E_2$  lo obtenemos reemplazando  $x_1 = u_1 + r_1/a_1$  y  $x_2 = u_2$  y eliminando los monomios cuadráticos, obtenemos

$$A = \begin{pmatrix} -r_1 & -r_1 b_1/a_1 \\ 0 & -(b_2 r_1 - a_1 r_2)/a_1 \end{pmatrix}.$$

Como  $A$  es triangular los autovalores están sobre la diagonal y son negativos acorde a (8.33). Así el equilibrio es un nodo estable. Un autovector correspondiente a  $-r_1$  es  $e_1$  y un autovector correspondiente a  $-(b_2 r_1 - a_1 r_2)/a_1$  es  $((a_1 r_2 - b_2 r_1 - r_1 a_1)/a_1, 1)$ , notar que la primera coordenada es negativa.

La linearización en  $E_3$  es simétrica respecto a  $E_2$ . Para analizar el sistema linearizado en  $E_4$  pongamos  $E_4 = (A_1, A_2)$  sustituimos  $x_1 = u_1 + A_1$  y  $x_2 = u_2 + A_2$  en el campo y eliminemos los monomios cuadráticos, obtenemos

$$A = \begin{pmatrix} -a_1 A_1 & -b_1 A_1 \\ -b_2 A_2 & -a_2 A_2 \end{pmatrix}.$$

Como  $A_1, A_2 > 0$  tenemos que  $\det A = (a_1 a_2 - b_1 b_2) A_1 A_2 < 0$  que implica que tenemos un punto silla. No vamos a buscar los autovectores en este caso.

Por supuesto que con sólo la información local en los puntos de equilibrio no podemos generalmente reconstruir el retrato de fases, es necesario pues utilizar alguna información global, en este ejemplo vamos a ilustrar el método de las *isoclinas*. Las isoclinas son curvas donde el sentido y dirección del campo  $f$  es constante. En particular es útil considerar cuando  $f(x)$  es horizontal o vertical que corresponde a  $f_2(x_1, x_2) = 0$  o  $f_1(x_1, x_2) = 0$  respectivamente. En nuestro caso tenemos  $f_2(x_1, x_2) = 0$  en las rectas

$$\begin{aligned} L_1 : 0 &= x_2 \\ L_2 : 0 &= r_2 - a_2 x_2 - b_2 x_1 \end{aligned}$$

y  $f_1(x_1, x_2) = 0$  en las rectas

$$\begin{aligned} L_3 : 0 &= x_1 \\ L_4 : 0 &= r_1 - a_1 x_1 - b_1 x_2 \end{aligned}$$

Recordar que  $x_1, x_2 \geq 0$  de modo que miramos estas rectas sólo en el primer cuadrante. El corte de las rectas  $L_2$  y  $L_4$  es el equilibrio  $E_4$ . Estas rectas dividen el primer cuadrante en cuatro regiones como muestra la figura 8.1.

Notar que si  $x_2 = 0$  podemos fácilmente analizar la ecuación que queda para  $x_1$ , esta es  $x'_1 = (r_1 - a_1 x_1)x_1$  que resulta ser la ecuación logística. Vemos así que una solución que empieza sobre el eje  $x_2$  permanece allí (es decir  $L_1$  es invariante). Analizando esta ecuación vemos que tiene un equilibrios en  $x_1 = 0$  y  $x_1 = r_1/a_1$ , 0 es un equilibrio inestable y  $r_1/a_1$  estable (de hecho esto ocurría en  $\mathbb{R}^2$ ). Lo mismo ocurre para  $x_1 = 0$ .

Sobre la recta  $L_2$  tenemos que la dirección  $f(x)$  es horizontal y sobre  $L_4$  es vertical. Para determinar los sentidos de estos vectores notar que en los puntos por encima de la recta  $L_4$  tenemos que  $x'_1 = f_1(x_1, x_2) = (r_1 - a_1 x_1 - b_1 x_2)x_1 < 0$  y, para los puntos debajo de esta recta tenemos  $x'_1 = f_1(x_1, x_2) > 0$ . Haciendo el mismo análisis para la recta  $L_2$  averiguamos el sentido de los vectores sobre las rectas  $L_2$  y  $L_4$ . Además notemos que de paso averiguamos que:

- A. En la región I  $x'_1 < 0$  y  $x'_2 < 0$  y por ende  $x_1$  y  $x_2$  decrecen,

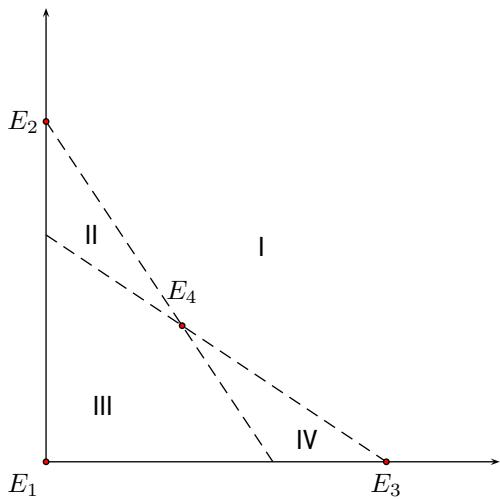


Figura 8.1:

- B. En la región  $II$   $x_1$  decrece y  $x_2$  crece,
- C. En la región  $III$   $x_1$  y  $x_2$  crecen,
- D. Por último, en la región  $IV$   $x_1$  crece y  $x_2$  decrece.

Toda esta información la podemos consignar en un gráfico marcando un vector en cada una de las regiones I-IV indicando como se comportan  $x_1$  y  $x_2$  allí. Esto lo hicimos en la figura 8.2 Vemos así que las regiones II y IV son invariantes hacia el futuro pues

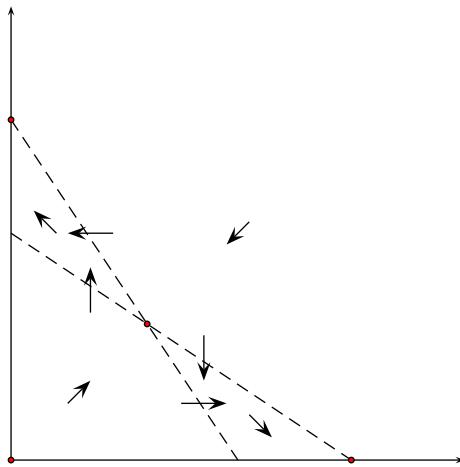


Figura 8.2:

sobre los bordes de ellas correspondientes a las rectas  $L_1$  y  $L_2$  el campo apunta hacia el interior de la región, el borde restante está formado por una trayectoria de modo que otra trayectoria no la puede cruzar. Por el sentido en que apuntan los vectores y ya que  $E_2$  y  $E_3$  eran equilibrios estables inferimos que una solución que entra a la región II o a la IV tiende a  $E_2$  o  $E_3$  respectivamente. De manera similar si una trayectoria esta en la región III el equilibrio  $E_4$  atrae a la trayectoria, no obstante en este caso la trayectoria puede pasar a las otras regiones pues la región III no es invariante. Lo mismo ocurre en la región I. Aunque no hayamos calculado los autovectores de  $Df(E_4)$  de la información brindada podemos concluir que un autovector correspondiente al autovalor positivo tiene que apuntar (supuesto su origen en  $E_4$ ) hacia las regiones II o IV, mientras que un

autovector correspondiente al autovalor negativo lo tiene que hacer hacia las regiones I o III. Esto es así pues de lo contrario inferiríamos que habría trayectorias que no se comportan como vimos. En la figura 8.3 realizamos el retrato de fases con el paquete de  $\text{\LaTeX}$  pstricks-add para los valores  $a_1 = a_2 = 1$ ,  $b_1 = b_2 = 1,5$  y  $r_1 = r_2 = 3$ . Con estos valores (en particular de que  $r_1 = r_2$ ) puede ocurrir que las trayectorias entren a los nodos estables en cualquier dirección.

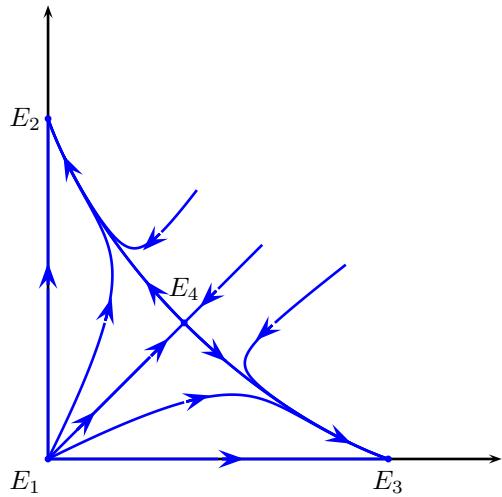


Figura 8.3: Retrato de fases modelo biológico

La conclusión del análisis es negativa desde el punto de vista de la diversidad biológica, pues salvo el equilibrio  $E_4$  y las dos trayectorias que tienden a él, cualquier otra trayectoria termina con la extinción de alguna de las dos especies. No obstante recordemos que nuestras suposiciones (8.33) implicaban la desigualdad (8.34) que nos decía que la competencia interespecies era más fuerte que la intraespecies. Cuando las desigualdades (8.33) son invertidas de modo que la competencia intraespecies es más fuerte que la interespecies el retrato de fases adquiere la forma de la figura 8.4, como se observa el equilibrio  $E_4$  ahora es estable.

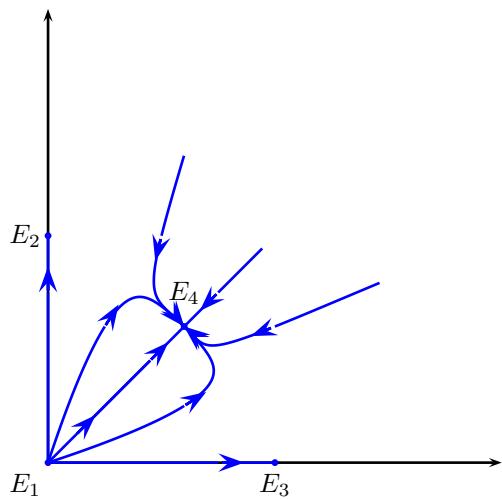


Figura 8.4:  $a_1a_2 > b_1b_2$

## 8.8 Teoría global

### 8.8.1 Puntos regulares

### 8.8.2 $\omega$ -límites

### 8.8.3 Teorema de Poincare-Bendixson

## 8.9 Estabilidad en el sentido de Lyapunov

### Ejercicios

**Ejercicio 8.9.1** Sea  $\varphi$  una solución de  $x' = f(x)$  con  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Demostrar que si el  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t)$  existe y es un punto  $x^0$  en  $\Omega$  entonces  $x^0$  es un punto de equilibrio.

**Ejercicio 8.9.2** Demostrar que los siguientes sistemas

$$\begin{cases} x'_1 = -x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ x'_2 = x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{cases} \quad \begin{cases} x'_1 = -x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) \\ x'_2 = x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2 - 1) \end{cases},$$

tienen la misma linearización en su equilibrio común  $(0, 0)$  pero se comportan de manera cualitativamente diferente allí.

**Ejercicio 8.9.3** Analizar todas las posibles formas en que una solución a un sistema lineal  $x' = Ax$ , con  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  no singular, puede entrar a 0

**Ejercicio 8.9.4** Hacer el retrato de fases de los siguientes sistemas:

A. 
$$\begin{cases} x' = -y + x(1 - x^2 - y^2) \\ y' = x + y(1 - x^2 - y^2) \end{cases}$$

B. 
$$\begin{cases} x' = -y + x(x^2 + y^2) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \\ y' = x + y(x^2 + y^2) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \end{cases}$$

C. 
$$\begin{cases} x' = y[y^2 + (x^2 - 1)^2] + x(1 - x^2 - y^2) \\ y' = -x[y^2 + (x^2 - 1)^2] + y(1 - x^2 - y^2) \end{cases}$$

**Ejercicio 8.9.5** En el modelo de dos especies (8.31) suponer que las desigualdades (8.33) son invertidas. Demostrar que el retrato de fases es como se muestra en la

figura 8.4.

**Ejercicio 8.9.6** Demostrar los teoremas 8.6.7 y 8.6.8.

**Ejercicio 8.9.7** Sea  $f$  una función continua definida en un abierto  $D$  de  $\mathbb{R}^n$ . Supongamos que existe una función  $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f = \nabla \varphi$ . Demostrar que  $x' = f(x)$  no posee órbitas periódicas. Si  $f$  tiene sólo puntos de equilibrio aislados, demostrar que para toda órbita  $x$ ,  $\Omega[x]$  es vacío o es un punto de equilibrio.

Sugerencia: Notar que

$$\frac{d\varphi(x(t))}{dt} > 0$$

para toda trayectoria, esto es  $\varphi(x(t))$  es creciente.

**Ejercicio 8.9.8** Sea  $\Phi_t(x)$  el flujo generado por un campo  $f$  continuo. Un subconjunto  $S \subset \mathbb{R}^n$  se llama *minimal* de  $f$  si es invariante, compacto y no contiene subconjuntos propios de esas características. Demostrar que en  $\mathbb{R}^2$  los únicos subconjuntos minimales son los puntos singulares y las órbitas periódicas de  $f$ . ¿Si  $n > 2$  es cierto esto?

**Ejercicio 8.9.9** Determinar los conjuntos  $\Omega[x]$  para el sistema

$$\begin{cases} x' = -y + x(1 - x^2 - y^2) \\ y' = x + y(1 - x^2 - y^2) \end{cases}$$

**Ejercicio 8.9.10** Encontrar  $\Omega[x]$  para el siguiente campo  $f = (f_1, f_2)$  definido sobre  $\mathbb{R}^2$ :

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &:= -y + x(x^2 + y^2) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \\ f_2(x, y) &:= x + y(x^2 + y^2) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \end{aligned}$$

**Ejercicio 8.9.11** Idem ejercicios anteriores para el sistema

$$\begin{cases} x' = y[y^2 + (x^2 - 1)^2] + x(1 - x^2 - y^2) \\ y' = -x[y^2 + (x^2 - 1)^2] + y(1 - x^2 - y^2) \end{cases}$$

**Ejercicio 8.9.12 Criterio de Bendixson** Si  $f = (f_1, f_2)$  es un campo de clase  $C^1$  en  $D \subset \mathbb{R}^2$ , con  $D$  abierto y simplemente conexo, y

$$\operatorname{div} f \neq 0$$

entonces  $f$  no tiene órbitas periódicas. Sugerencia: Aplicar el teorema de Green.

**Ejercicio 8.9.13** Determinar los puntos de equilibrio del sistema correspondiente al p'edulo con fricción:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -b \operatorname{sen} x - ay, \end{cases}$$

**Ejercicio 8.9.14 Sistemas conservativos unidimensionales** Considerar la ecuación

$$x'' = F(x),$$

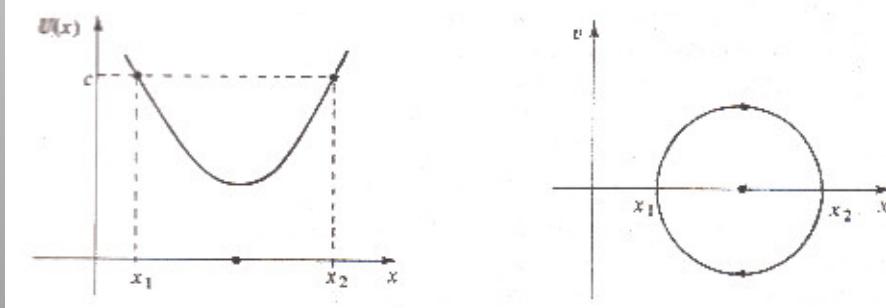
donde  $F : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Esta ecuación equivale al sistema:

$$\begin{cases} x' = v \\ v' = F(x) \end{cases} \quad (8.35)$$

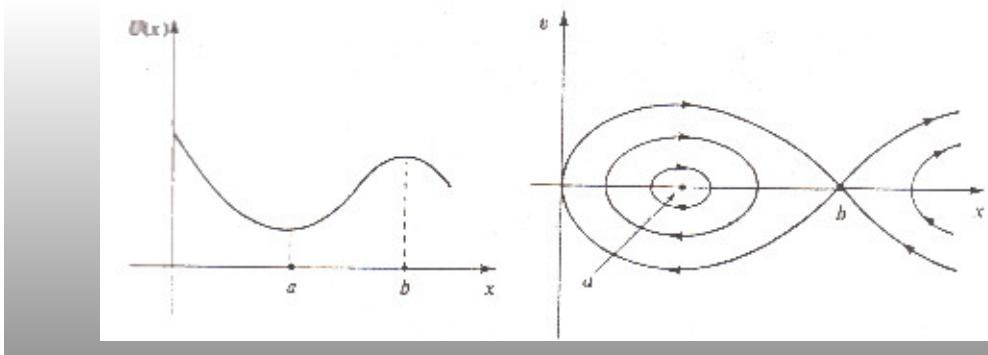
- A. Demostrar que las soluciones preservan la energía total del sistema  $E := T + U$  donde  $T(v) := \frac{v^2}{2}$  es la energía cinética y  $U(x) := -\int_{x_0}^x f(\xi) d\xi$  es la energía potencial.
- B. Demostrar que los puntos de equilibrio del sistema (8.35) están en el eje  $x$ . Demostrar que toda órbita periódica de (8.35) interseca al eje de las  $x$  y son simétricas respecto a ese eje.
- C. Demostrar que si  $U(x_1) = U(x_2) = c$  y  $U(x) < c$  para  $x_1 < x < x_2$  entonces (8.35) tiene una solución periódica que pasa por los puntos  $(x_1, 0)$  y  $(x_2, 0)$ . *Sugerencia:* La órbita que pasa por  $(x_0, 0)$  satisface  $\frac{v^2}{2} + U(x) = E$  donde  $E$  es su energía. Usar el hecho que:

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{F(x)}{v}$$

para concluir que esta órbita se vuelve a cortar con el eje  $x$  en  $(x_2, 0)$ . Usar entonces el ítem B.



- D. Supongamos  $F(x) \neq 0$  para  $0 < |x - x_0| < a$ . Demostrar que (8.35) tiene un centro o una silla en  $(x_0, 0)$  acorde a  $U(x_0)$  sea un mínimo o un máximo relativo.



**Ejercicio 8.9.15** Utilizando el ejercicio anterior determinar el espacio de fases de las siguientes ecuaciones:

- A.  $x'' = -x$  (resorte).
- B.  $x'' = -\sin x$  (pendulo).
- C.  $x'' = -\frac{1}{x^2}$  (gravitacion).

**Ejercicio 8.9.16** Sea  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  una campo vectorial continuo. Una función  $E : D \rightarrow \mathbb{R}$  se llama integral primera de  $f$  en  $D$  si:

- A.  $E$  es constante sobre cada 'órbita' de  $f$ .
- B.  $E$  no es constante en ning'un subconjunto abierto de  $D$ .

Resolver los siguientes problemas:

- A. Sea  $E : D \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^1$  tal que

$$DE(x) \cdot f(x) = 0 \quad \text{y} \quad DE(x) \neq 0,$$

para todo  $x$ , donde  $DE$  denota el diferencial de  $E$ . Entonces  $E$  es una integral primera.

- B. Encontrar una integral primera para el centro dado por:

$$\begin{cases} x'_1 = -\beta x_2 \\ x'_2 = \beta x_1 \end{cases}$$

y de la silla

$$\begin{cases} x'_1 = \lambda_1 x_1 \\ x'_2 = \lambda_2 x_2 \end{cases}$$

donde  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ .

- C. Demostrar que no existe una integral primera para los sumideros o fuentes lineales en  $\mathbb{R}^2$ .
- D. Generalizar los dos incisos anteriores a sistemas lineales en  $\mathbb{R}^n$ .
- E. Sea  $H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$  una función de clase  $C^1$ . Supongamos que los puntos donde  $DH(x) = 0$  son aislados. Encontrar una integral primera para el campo:

$$f(x_1, \dots, x_{2n}) = \left( \frac{\partial H}{\partial x_{n+1}}, \dots, \frac{\partial H}{\partial x_{2n}}, -\frac{\partial H}{\partial x_1}, \dots, -\frac{\partial H}{\partial x_n} \right).$$

Tal campo se lo conoce como Hamiltoniano.

- F. Sea  $D \subset \mathbb{R}^2$  y  $E : D \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^1$  tal que  $DE$  no se anula en ning'un abierto de  $D$ . Encontrar un campo  $f$  que tenga a  $E$  por integral primera.
- G. Demostrar que si  $E$  es una integral primera de  $f$  entonces  $M_c = f^{-1}(c)$  es invariante para el flujo generado por  $f$ . En particular podemos considerar las 'orbitas contenidas en  $M_c$  como un "subsistema" de una dimensi'on menor en una unidad al original.

**Ejercicio 8.9.17** Consideremos las ecuaciones de Lotka-Volterra:

$$\begin{cases} x' = \alpha x - \beta xy \\ y' = -\gamma x + \delta xy \end{cases}$$

donde  $\alpha, \beta, \gamma$  y  $\delta$  son positivos. Demostrar que el sistema tiene una integral primera  $E$  que posee en  $(\gamma/\delta, \alpha/\beta)$  un punto de m'inimo no degenerado (esto es  $D^2E$  es definida positiva en ese punto). Concluir que todas las soluciones en el cuadrante positivo son periódicas. *Sugerencia:* Transformar el sistema en una ecuaci'on en variables separadas y deducir que

$$E = -y^\alpha x^\gamma e^{-\beta y} e^{-\delta x}$$

**Ejercicio 8.9.18** Demostrar que el origen es un punto de equilibrio asintoticamente estable de:

$$\begin{cases} x' = -x - \frac{x^3}{3} - 2\sin y \\ y' = -y - \frac{y^3}{3} \end{cases}$$

**Ejercicio 8.9.19** Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  continua y supongamos que  $f(0) = 0$  y  $\langle x, f(x) \rangle < 0 \forall x \neq 0$ . Demostrar que  $x \mapsto |x|^2$  es una funci'on de Liapunov estricta para el sistema  $x' = f(x)$ .

**Ejercicio 8.9.20** Sea  $x_0$  un punto de equilibrio de  $x' = f(x)$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  continua,  $D \subset \mathbb{R}^n$  abierto. Sea  $V : U \rightarrow \mathbb{R}$  una funci'on de Liapunov en  $x_0$ . Supongamos que no existe una trayectoria del sistema completamente contenida en  $Z := \{x \in U : \dot{V} = 0\}$ , excepto  $x(t) \equiv x_0$ . Entonces  $x_0$  es asintoticamente estable.

**Ejercicio 8.9.21** Sea  $x_0$  un punto de equilibrio de  $x' = f(x)$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  continua,  $D \subset \mathbb{R}^n$  abierto. Sea  $V$  una funci'on de clase  $C^1$  definida en un entorno de  $x_0$  tal que  $\dot{V} > 0 \forall x \neq x_0$  y  $V(x_0) = 0$ . Si en todo entorno de  $x_0$  existe un  $x$  tal que  $V(x) > 0$ , entonces  $x_0$  es inestable.

**Ejercicio 8.9.22** Sea  $x_0$  un punto de equilibrio de  $x' = f(x)$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  continua,  $D \subset \mathbb{R}^n$  abierto. Sea  $V : U \rightarrow \mathbb{R}$  una funci'on de Liapunov estricta de  $x_0$ . Entonces, para cada  $c > 0$  tal que  $V^{-1}([0, c])$  es compacto se tiene que  $V^{-1}([0, c]) \subset E(x_0)$  la variedad estable de  $x_0$ .

**Ejercicio 8.9.23** Sea  $D \subset \mathbb{R}^n$  abierto y  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$  una función de clase  $C^1$ . Consideremos el sistema

$$x' = -\nabla V(x).$$

Demostrar que

- A.  $\dot{V}(x) \leq 0 \forall x \in D$  y  $\dot{V}(x) = 0$  si, y solo si,  $x$  es un punto de equilibrio de  $-\nabla V$ .
- B. Si  $x_0$  es un mínimo aislado de  $V$ , entonces  $x_0$  es un punto de equilibrio asintóticamente estable de  $-\nabla V$ .
- C.  $-\nabla V$  no posee órbitas periódicas no constantes.

**Ejercicio 8.9.24** Sea  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$  una función  $C^1$ , con  $D \subset \mathbb{R}^n$  abierto. Sea  $y$  un punto  $\omega$ -límite de una trayectoria del campo  $-\nabla V$ . Entonces  $y$  es un punto de equilibrio de este campo. Sugerencia: Demostrar que  $V$  es constante en  $\Omega[x] \forall x$ .

**Ejercicio 8.9.25** Considerar una partícula moviéndose bajo la influencia de una función potencial  $P : D \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^1$ ,  $D \subset \mathbb{R}^3$  abierto. El sistema dinámico correspondiente es:

$$\begin{cases} x' = v, \\ v' = -\nabla P(x) \end{cases}$$

Demostrar el Teorema de Lagrange, segúun el cual un punto de equilibrio  $(x_0, 0)$  del sistema es estable si  $x_0$  es un mínimo local estricto de  $P$ .

**Ejercicio 8.9.26** Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $f(0) = 0$ . La solución 0 de  $x' = f(x)$  se dice globalmente estable cuando es estable y  $x(t) \rightarrow 0$  para  $t \rightarrow \infty$  para toda otra solución  $x(t)$ . Sea  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función de Liapunov estricta de  $x' = f(x)$  en 0. Supongamos que para cada  $c > 0$  existe un  $R > 0$  tal que  $|x| > R$ , implica  $V(x) > c$ . Entonces 0 es una solución globalmente estable de  $x' = f(x)$ . Observar que no es necesaria la condición  $V(x) = 0$  si  $x = 0$ . Es suficiente suponer que no existe una solución  $x(t)$ , distinta de la nula, tal que  $V(x(t)) = 0 \forall t$ .

# A Breve introducción a Python y SymPy

## A.1 Descripción

Python es un lenguaje de programación interpretado, abierto, fácil de aprender, potente y portátil. Es utilizado en proyectos de todo tipo, no sólo aplicaciones científicas.

SciPy, Python científico, es un conjunto de módulos de python para distintos tipos de cálculos. Está integrado por los módulos, SymPy (para cálculos simbólicos), numpy (cálculos numéricos), matplotlib (gráficos) entre otros. En este curso sólo usaremos SymPy.

SymPy es una biblioteca de Python para matemática simbólica. Su objetivo es convertirse en un sistema de álgebra computacional (SAC) completo, manteniendo el código lo más simple posible para que sea comprensible y fácilmente extensible. SymPy está escrito enteramente en Python y no requiere de ninguna biblioteca externa.

Matplotlib es una biblioteca de trazado de gráficos de Python que produce figuras de calidad de publicación en una variedad de formatos impresos y entornos interactivos a través de plataformas. Matplotlib se puede utilizar en scripts Python, en el shell Python e IPython, el portátil jupyter, servidores de aplicaciones web.



## A.2 Instalación

Son muchas las componentes requeridas para poder ejecutar los programas con los que trabajaremos en esta asignatura. Hay que instalar un interprete de python, los módulos que utilizaremos (sympy, matplotlib), es útil utilizar entornos integrados de desarrollo (IDE), que facilitan al usuario editores de código fuente (especializados con la sintaxis de python), consolas de comandos mejoradas (ipython, qt, etc). Otro recurso que se dispone son las notebooks, de las cuales hablaremos más adelante. Sería engorroso instalar todas estas componentes, que muchas veces tienen orígenes en desarrolladores diferentes, de manera independiente. Para nuestra fortuna existen, las así llamadas, *distribuciones*. Estas en algunos casos son archivos ejecutables que instalan todas las componentes necesarias, o al menos muchas de ellas, de un determinada aplicación. Recomendamos las siguientes distribuciones.

### A.2.1 Anaconda

La versión de código abierto de Anaconda es una distribución de alto rendimiento de Python y R e incluye más de 100 de los paquetes científicos más populares asociados a estos lenguajes. Además, se puede acceder a más de 720 paquetes que pueden ser fácilmente instalados con Conda, un programa incluido en Anaconda para la gestión de paquetes. Anaconda tiene licencia BSD que da permiso para utilizar Anaconda comercialmente y para su redistribución. Al día que se escriben estas líneas, anaconda parece la opción más sencilla y completa para instalar todos los recursos necesarios para desarrollar los contenidos de estas notas. Existen versiones para linux, OS X y Windows.



### A.2.2 Windows

Hay distribuciones específicas para distintos sistemas operativos. La distribución python(x,y) instala el interprete de python y todos los módulos de scipy. Además el entorno de desarrollo integrado (IDE) spyder.

### A.2.3 linux

Aquí todo es más sencillo, el interprete de python suele venir con la distribución del SO y se pueden instalar los módulos, SymPy, NumPy, etc, recurriendo al administrador de paquetes o tipeando la sentencia adecuada en la línea de comandos.

### A.2.4 Android

Qpython es una aplicación que permite ejecutar código python y una versión básica de sympy desde tablets y smartphones. Se descarga desde la plataforma google play. .



### A.2.5 Computación en la nube

En los últimos tiempos se ha popularizado el uso de la computación en la nube. Esto se trata de servidores que algunas empresas o asociaciones sin fines de lucro facilitan en la web para ejecutar programas en diversos lenguajes. Citamos como ejemplo cocalc. Una vez registrado en el sitio se pueden subir o crear notebooks de jupyter. Soporta varios lenguajes, incluido Python y sus librerías. Como uno utiliza los recursos instalados en el servidor, no se necesita tener instalado ningún interprete de los lenguajes. Sólo se necesita un navegador web actualizado. De este modo pueden ejecutarse programas desde un smartphone o tablet.

## A.3 Forma de trabajo: por medio de scripts e interactiva

Se puede trabajar de tres formas

- Interactivamente, ingresando sentencias, de a una por vez, en la línea de comandos y obteniendo respuestas. Se requiere una consola.
- Haciendo un script (programa) donde se guardan todas las sentencias que se desea ejecutar. Posteriormente este script se puede ejecutar, ya sea desde la línea de comandos o desde un IDE (spyder) oprimiendo un botón de ejecución.
- En una notebook. Se hacen celdas que contienen porciones de código que pueden ejecutarse.

## A.4 Características sobresalientes del lenguaje

Seguiremos en esta exposición a [?] de manera cercana. Las principales características del lenguaje son:

- Interpretado. Es necesario un conjunto de programas, el interprete, que entienda el código python y ejecute las acciones contenidas en él.
- Implementa tipos dinámicos.
- Multiparadigma, ya que soporta orientación a objetos, programación imperativa y, en menor medida, programación funcional.
- Multiplataforma.
- Es comprendido con facilidad. Usa palabras donde otros lenguajes utilizarían símbolos. Por ejemplo, los operadores lógicos !, || y \&\& en Python se escriben not, or y and, respectivamente.
- El contenido de los bloques de código (bucles, funciones, clases, etc.) es delimitado mediante espacios o tabuladores.

- Empieza a contar desde cero (elementos en listas, vectores, etc).

## A.5 Elementos del Lenguaje

### A.5.1 Comentarios

Hay dos formas de producir comentarios, texto que el interprete no ejecuta y que sirve para entender un programa.

Para comentarios largos se utilizan las tildes:  
`''' comentario '''`.

La segunda notación utiliza el símbolo #, no necesita símbolo de finalización pues se extiende hasta el final de la línea.

```
'''
Comentario largo en un script de Python
'''
print "Hola mundo" # Comentario corto
```

El intérprete no tiene en cuenta los comentarios, lo cual es útil si deseamos poner información adicional en nuestro código como, por ejemplo, una explicación sobre el comportamiento de una sección del programa.

### A.5.2 Variables

Las variables se definen de forma dinámica, lo que significa que no se tiene que especificar cuál es su tipo de antemano y que una variable puede tomar distintos valores en distintos momentos de un programa, incluso puede tomar un tipo diferente al que tenía previamente. Se usa el símbolo = para asignar valores a variables. Es importante distinguir este = (de asignación) con el igual que es utilizado para definir igualdades en sympy, para ecuaciones por ejemplo.

```
x = 1
x = "texto"
```

Esto es posible porque los tipos son asignados dinámicamente

### A.5.3 Tipo de datos

Python implementa diferentes tipos de datos. Para la noción de *tipos de datos* en general ver [?]. A continuación describimos sumariamente algunos de los tipos más comunes presentes en Python. Cuando se utilizan módulos específicos (p. ej. sympy) la diversidad de tipos de datos se expande, con la incorporación de tipos con significación matemática, p.ej. matrices, expresiones algebraicas, etc.

Tipo	Clase	Notas	Ejemplo
<code>str</code>	Cadena	Inmutable	<code>'Cadena'</code>
<code>list</code>	Secuencia	Mutable, puede contener objetos de diversos tipos	<code>[4.0, 'Cadena', True]</code>
<code>tuple</code>	Secuencia	Inmutable, puede contener objetos de diversos tipos	<code>(4.0, 'Cadena', True)</code>
<code>dict</code>	Mapping	Grupo de pares clave:valor	<code>{'key1': 1.0, 'key2': False}</code>
<code>int</code>	Número entero	Precisión fija, convertido en <code>long</code> en caso de overflow.	<code>42</code>
<code>long</code>	Número entero	Precisión arbitraria	<code>42L ó 456966786151987643L</code>
<code>float</code>	Número decimal	Coma flotante de doble precisión	<code>3.1415927</code>
<code>complex</code>	Número complejo	Parte real y parte imaginaria, j.	<code>(4.5 + 3j)</code>
<code>bool</code>	Booleano	Valor booleano verdadero o falso	<code>True o False</code>

Se clasifican en:

**Mutable** si su contenido puede cambiarse.

**Inmutable** si su contenido no puede cambiarse.

Se usa el comando `\type` para averiguar que tipo de dato contiene una variable

```
>>> x=1
>>> type(x)
<type 'int'>
>>> x='Ecuaciones'
>>> type(x)
<type 'str'>
```

#### A.5.4 Listas y tuplas

- Es una estructura de dato, que contiene, como su nombre lo indica, listas de otros datos en cierto orden. Listas y tuplas son muy similares.
- Para declarar una lista se usan los corchetes [], en cambio, para declarar una tupla se usan los paréntesis (). En ambos casos los elementos se separan por comas, y en el caso de las tuplas es necesario que tengan como mínimo una coma.
- Tanto las listas como las tuplas pueden contener elementos de diferentes tipos. No obstante las listas suelen usarse para elementos del mismo tipo en cantidad variable mientras que las tuplas se reservan para elementos distintos en cantidad fija.
- Para acceder a los elementos de una lista o tupla se utiliza un índice entero (empezando por "0", no por "1"). Se pueden utilizar índices negativos para acceder elementos a partir del final.
- Las listas se caracterizan por ser mutables, mientras que las tuplas son inmutables.

```
>>> lista = ["abc", 42, 3.1415]
>>> lista[0] # Acceder a un elemento por su indice
'abc'
>>> lista[-1] # Acceder a un elemento usando un indice negativo
3.1415
>>> lista.append(True) # Agregar un elemento al final de la lista
>>> lista
['abc', 42, 3.1415, True]
>>> del lista[3] # Borra un elemento de la lista usando un indice
>>> lista[0] = "xyz" # Re-assignar el valor del primer elemento
>>> lista[0:2] #elementos del indice "0" al "1"
['xyz', 42]
>>> lista_anidada = [lista, [True, 42L]] #Es posible anidar listas
>>> lista_anidada
[[['xyz', 42, 3.1415], [True, 42L]]
>>> lista_anidada[1][0] #accede lista dentro de otra lista
True

>>> tupla = ("abc", 42, 3.1415)
>>> tupla[0] # Acceder a un elemento por su indice
'abc'
>>> del tupla[0] # No es posible borrar ni agregar
Traceback (most recent call last):
  File "<stdin>", line 1, in <module>
TypeError: 'tuple' object doesn't support item deletion
>>> tupla[0] = "xyz" # Tampoco es posible re-assignar
Traceback (most recent call last):
  File "<stdin>", line 1, in <module>
TypeError: 'tuple' object does not support item assignment
>>> tupla[0:2] # elementos del indice "0" al "2" sin incluir
('abc', 42)
```

```
>>> tupla_anidada = (tupla, (True, 3.1415)) # es posible anidar
>>> 1, 2, 3, "abc" # Esto tambien es una tupla
(1, 2, 3, 'abc')
>>> (1) # no es una tupla, ya que no posee al menos una coma
1
>>> (1,) # si es una tupla
(1,)
>>> (1, 2) # Con mas de un elemento no es necesaria la coma final
(1, 2)
>>> (1, 2,) # Aunque agregarla no modifica el resultado
(1, 2)
```

## A.5.5 Diccionarios

- Para declarar un diccionario se usan las llaves {}. Contienen elementos separados por comas, donde cada elemento está formado por un par clave:valor (el símbolo : separa la clave de su valor correspondiente).
- Los diccionarios son mutables, es decir, se puede cambiar el contenido de un valor en tiempo de ejecución.
- En cambio, las claves de un diccionario deben ser inmutables. Esto quiere decir, por ejemplo, que no podremos usar ni listas ni diccionarios como claves.
- El valor asociado a una clave puede ser de cualquier tipo de dato, incluso un diccionario.

```
>>> dicci = {"cadena": "abc", "numero": 42, "lista": [True, 42L]}
>>> dicci["cadena"] # Usando una clave, se accede a su valor
'abc'
>>> dicci["lista"][0]
True
>>> dicci["cadena"] = "xyz" # Re-asignar el valor de una clave
>>> dicci["cadena"]
'xyz'
>>> dicci["decimal"] = 3.1415927 # nuevo elemento clave:valor
>>> dicci["decimal"]
3.1415927
>>> dicci_mixto = {"tupla": (True, 3.1415), "diccionario": dicci}
>>> dicci_mixto["diccionario"]["lista"][1]
42L
>>> dicci = {("abc",): 42} # tupla puede ser clave
>>> dicci = {[["abc"]]: 42} # una clave no puede ser lista
Traceback (most recent call last):
  File "<stdin>", line 1, in <module>
TypeError: unhashable type: 'list'
```

## A.5.6 Listas por comprensión

Una lista por comprensión es una expresión compacta para definir listas. Al igual que el operador lambda, aparece en lenguajes funcionales. Ejemplos:  
`range(n)` devuelve una lista, empezando en 0 y terminando en  $n - 1$ .

```
>>> range(5) #
[0, 1, 2, 3, 4]
>>> [i*i for i in range(5)]
[0, 1, 4, 9, 16]
>>> lista = [(i, i + 2) for i in range(5)]
>>> lista
[(0, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 6)]
```

## A.5.7 Funciones

- Las funciones se definen con la palabra clave `def`, seguida del nombre de la función y sus parámetros. Otra forma de escribir funciones, aunque menos utilizada, es con la palabra clave `lambda` (que aparece en lenguajes funcionales como Lisp). Generalmente esta forma es apropiada para funciones que es posible definir en una sola línea.
- El valor devuelto en las funciones con `def` será el dado con la instrucción `return`.

```
>>> def suma(x, y = 2): #el argumento y tiene un valor por defecto
...     return x + y # Retornar la suma
...
>>> suma(4) # La variable "y" no se modifica, siendo su valor: 2
6
>>> suma(4, 10) # La variable "y" si se modifica
14

>>> suma = lambda x, y = 2: x + y
>>> suma(4) # La variable "y" no se modifica
6
>>> suma(4, 10) # La variable "y" si se modifica
14
```

## A.5.8 Condicionales

Una sentencia condicional (`if condicion`) ejecuta su bloque de código interno sólo si `condicion` tiene el valor booleano `True`. Condiciones adicionales, si las hay, se introducen usando `elif` seguida de la condición y su bloque de código. Todas las condiciones se evalúan secuencialmente hasta encontrar la primera que sea verdadera, y su bloque de código asociado es el único que se ejecuta. Opcionalmente, puede haber un bloque final (la palabra clave `else` seguida de un bloque de código) que se ejecuta sólo cuando todas las condiciones fueron falsas.

```
>>> verdadero = True
>>> if verdadero: # No es necesario poner "verdadero == True"
...     print "Verdadero"
...
Verdadero
>>> else:
File "<stdin>", line 1
    else:
    ^
SyntaxError: invalid syntax
>>>     print "Falso"
File "<stdin>", line 1
    print "Falso"
    ^
IndentationError: unexpected indent

>>> lenguaje = "Python"
>>> if lenguaje == "C":
...     print "Lenguaje de programacion: C"
... elif lenguaje == "Python": # tantos "elif" como se quiera
...     print "Lenguaje de programacion: Python"
... else:
...     print "Lenguaje de programacion: indefinido"
...
Lenguaje de programacion: Python
>>> if verdadero and lenguaje == "Python":
...     print "Verdadero y Lenguaje de programacion: Python"
```

...  
Verdadero y Lenguaje de programacion: Python

### A.5.9 Bucles

El bucle `for` es similar a otros lenguajes. Recorre un objeto *iterable*, esto es una lista o una tupla, y por cada elemento del iterable ejecuta el bloque de código interno. Se define con la palabra clave `for` seguida de un nombre de variable, seguido de `in` seguido del iterable, y finalmente el bloque de código interno. En cada iteración, el elemento siguiente del iterable se asigna al nombre de variable especificado:

```
>>> lista = ["a", "b", "c"]
>>> for i in lista: # Iteramos sobre una lista, que es iterable
...     print i
...
a
b
c
>>> cadena = "abc"
>>> for i in cadena: # Iteramos sobre una cadena, que es iterable
...     print i # una coma al final evita un salto de linea
...
a
b
c
```

El bucle `while` evalúa una condición y, si es verdadera, ejecuta el bloque de código interno. Continúa evaluando y ejecutando mientras la condición sea verdadera. Se define con la palabra clave `while` seguida de la condición, y a continuación el bloque de código interno:

```
>>> numero = 0
>>> while numero < 3:
...     print numero
...     numero += 1
...
0
1
2
```