Problemas del cálculo de variaciones

Fernando Mazzone

Dpto de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas Físico-Químicas y Naturales
Universidad Nacional de Río Cuarto Dpto de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad Nacional de La Pampa
CONICET

8 de julio de 2015

Índice

Índice

Ecuaciones de Newton

Sistema mecánico: n-puntos masa en un espacio euclideano tridimensional. Supuesto un sistema de coordenadas cartesiano, sean $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n \in \mathbb{R}^3$ las coordenadas de los puntos masa, $\boldsymbol{x}_i = (x_{i,1}, x_{i,2}, x_{i,3})$, $i = 1, \ldots, n$. Vamos a poner $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n) \in \mathbb{R}^{3n}$. Las variables $\boldsymbol{x}_i$ dependen del tiempo t. A la función $t \mapsto \boldsymbol{x}(t)$ la denominamos un movimiento.
Fuerzas: Supongamos que actúan fuerzas $\boldsymbol{f}_i = \boldsymbol{f}_i(t, \boldsymbol{x}(t), \dot{\boldsymbol{x}}(t))$ sobre cada masa m_i.

Leyes de movimiento de Newton

Suponiendo que el sistema satisface la segunda ley de Newton.

$$m_i \ddot{\boldsymbol{x}}_i = \boldsymbol{f}_i, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

Sistemas conservativos

Definición

El sistema se llama conservativo si existe una función $U = U(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, con $U : \mathbb{R}^{3n} \times \mathbb{R}^{3n} \to \mathbb{R}$ tal que

$$\boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}) = - \left. \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{x}_i} \right|_{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}})}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

El signo menos en el segundo miembro es sólo una convención.

Las derivadas del miembro de la derecha en (2) hay que entenderlas como que presuponen las tres identidades escalares

$$f_{i,j}(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}) = \left. \frac{\partial U}{\partial x_{i,j}} \right|_{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}})}, \quad i = 1, \ldots, n; j = 1, 2, 3.$$

Lagrangiano

En un sistema conservativo se define la energía cinética $T : \mathbb{R}^{3n} \to \mathbb{R}$ por

$$T(\boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{|\boldsymbol{y}_i|}{2}, \quad \boldsymbol{y} = (\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_n) \in \mathbb{R}^{3n}$$

y la energía potencial por U.
Vamos a definir la función de Lagrange o Lagrangiano por

$$\boxed{L(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{|\boldsymbol{y}_i|^2}{2} - U(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})} \tag{3}$$

ECUACIONES DE EULER-LAGRANGE

Las ecuaciones de Newton (1) ahora se pueden escribir

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{y}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{x}_i}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

O más sintéticamente

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{y}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{x}}} \tag{4}$$

Estas ecuaciones se denominan ecuaciones de Euler-Lagrange

EJEMPLO

Consideremos la ecuación del resorte u oscilador armónico

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t).$$

En estas ecuaciones hemos dividido por la masa. Aquí el movimiento se realiza sobre una línea, de modo que un eje de coordenadas es suficiente para describir el movimiento $x(t) \in \mathbb{R}$. El sistema es conservativo, pues

$$f = -\omega^2 x = -\frac{dU}{dx}, \quad \text{donde } U = \omega^2 \frac{x^2}{2}.$$

El lagrangiano es

$$L(t, x, y) = \frac{y^2}{2} - \omega^2 \frac{x^2}{2}.$$

Integral de acción

Definición

La integral de acción depende sobre los movimientos $\boldsymbol{x}(t)$, para t en un intervalo $[a, b]$, y se define por

$$I(\boldsymbol{x}) = \int_a^b L(t, \boldsymbol{x}(t), \dot{\boldsymbol{x}}(t))dt \tag{5}$$

Principio de Mínima Acción de Hamilton

Las soluciones de (4) son puntos críticos de la integral de acción.