

# Ecuaciones Diferenciales

Fernando Mazzone

10 de marzo de 2017

# Índice general

<b>Prólogo</b>	<b>2</b>
<b>1. Generalidades y ecuaciones de primer orden</b>	<b>6</b>
1.1. ¿Que son las ecuaciones diferenciales? . . . . .	6
1.2. Algunos conceptos relacionados con ecuaciones diferenciales . . . . .	7
1.3. Definición formal . . . . .	9
1.4. Problemas bien planteados, condiciones iniciales . . . . .	11
1.5. Familias paramétricas de funciones . . . . .	12
1.6. Separación de variables . . . . .	15
1.7. Aplicaciones . . . . .	17
1.7.1. Ley de reproducción normal . . . . .	17
1.7.2. Soluciones . . . . .	18
1.7.3. Dinámica del punto . . . . .	18
1.7.4. El péndulo . . . . .	20
1.7.5. La braquistócrona . . . . .	21
1.8. Ecuaciones homogéneas . . . . .	24
1.9. Exactas . . . . .	25
1.10. Factores integrantes . . . . .	27
1.11. Otras Técnicas relacionadas con exactitud . . . . .	28
1.12. Ecuaciones Lineales . . . . .	30
1.13. Reducción de orden . . . . .	31
1.14. SymPy . . . . .	32
1.15. Ejemplos . . . . .	33
1.15.1. Velocidad de escape . . . . .	33
1.15.2. Curvas de persecución . . . . .	34
1.16. Oscilador armónico . . . . .	37
1.17. EDP, método características . . . . .	38
<b>Apéndices</b>	<b>40</b>
1.A. La tautócrona . . . . .	40

# Prólogo

**CARRERA:** Lic en Matemática.

**PLAN DE ESTUDIOS:** 2008 versión 1

**ASIGNATURA:** Ecuaciones Diferenciales   **CÓDIGO:** 1913

**DOCENTES RESPONSABLES:** Fernando Mazzone

**EQUIPO DOCENTE:** Fernando Mazzone

**AÑO ACADÉMICO:** 2017

**REGIMEN DE LA ASIGNATURA:** Cuatrimestral

**RÉGIMEN DE CORRELATIVIDADES:**

Aprobada	Regular
	Álgebra Lineal Aplicada (2261)
	Topología (1917)

**CARGA HORARIA TOTAL:** 80 hs.

Teóricas: 40 hs., Prácticas: 40 hs..

**CARÁCTER DE LA ASIGNATURA:** Obligatoria

## A. CONTEXTUALIZACIÓN DE LA ASIGNATURA

Primer cuatrimestre de cuarto año

## B. OBJETIVOS PROPUESTOS

- Presentar la teoría de las ecuaciones diferenciales desde un perspectiva rigurosa.
- Poner en evidencia la retroalimentación entre teoría matemática y modelos físicos. En este sentido se desarrollan aplicaciones a la caída de cuerpos a lo largo de guías (y su relación con la óptica), problema de la braquistócrona, vibraciones de sistemas mecánicos, membranas, potencial sobre una esfera, movimiento planetario, etc.
- Integrar la asignatura a otras asignaturas del plan de estudios de la Lic. en Matemática. En este sentido se desarrolla la teoría de Lie de solución de ecuaciones por medios de grupos continuos. No es costumbre que esta teoría se desarrolle en cursos introductorios.
- Incorporar el uso de sistemas algebraicos computacionales en la práctica del alumno. Se utilizarán recursos de código abierto que derivan del lenguaje Python, en particular SymPy y SAGE.

## C. CONTENIDOS BÁSICOS DEL PROGRAMA A DESARROLLAR

Ecuaciones de primer orden, métodos de solución. Métodos de Lie. Teorema de existencia y unicidad. Ecuaciones lineales de orden superior. Osciladores armónicos. Método de desarrollo en serie. Método de Frobenius. Sistemas de Ecuaciones.

## D. FUNDAMENTACIÓN DE LOS CONTENIDOS

La gran parte del curso versa sobre temas que ya son estándar en las ecuaciones diferenciales y se consideran básicos en el desarrollo de esta área. No creemos necesario abundar en fundamentos sobre la incorporación de ellos. Si merece fundamentarse aquellos que no son del todo habituales.

Con frecuencia las leyes de la física o modelos matemáticos de sistemas biológicos, sociales, económicos, etc, se expresan por medio de ecuaciones y particularmente con ecuaciones diferenciales. Con igual frecuencia en nuestras aulas la enseñanza de esta, como de otras ramas de la matemática, omite la consideración de las relaciones entre los conceptos matemáticos y otras ciencias. A lo sumo se suele presentar alguna aplicación de la teoría como medio de justificar la relevancia de ella. Se hace extensivo al quehacer pedagógico el postulado formalista que la matemática se valida por si misma y es independiente de cualquier realidad ajena a ella.

Nuestro punto de vista es que las relaciones de la teoría matemática con su entorno constituye un ingrediente insoslayable en la enseñanza de la teoría. Fundamentamos este punto de vista, en que es frecuente que el sistema físico que es modelizado por cierta teoría, ilumine el entendimiento de la teoría misma. Por ejemplo, el principio de máximo, que afirma que una solución de la ecuación  $\Delta u = 0$  en un abierto y acotado  $\Omega$  alcanza su máximo en la frontera de  $\Omega$ , no es evidente de la ecuación en sí misma, pero si lo es en gran medida de una de las situaciones físicas que modeliza: la temperatura en estado estacionario de un cuerpo sobre el cual el calor fluye por difusión. No puede desaprovecharse el recurso de pensar una solución de la ecuación aludida en estos dos sentidos.

También ocurre el camino inverso, esto es que el desarrollo de la teoría matemática ilumine el entendimiento del sistema físico. Al fin y al cabo, ese es el propósito primario de la modelización matemática. Por ejemplo, para quien escribe no resulta físicamente evidente que un sistema de resorte acoplados tenga esencialmente sólo dos modos normales de vibración, cosa que se demuestra en el actual curso. Por estas consideraciones, entre otras, también estamos convencidos que la demostración matemática rigurosa también constituye un ingrediente insoslayable para el entendimiento de la teoría.

Se incorpora activamente el uso de sistemas algebraicos computacionales SAC. Una causa es contar con asistencia para el desarrollo de cálculos que son engorrosos. Pero la causa fundamental de la introducción de SAC es que ponen al alumno en la situación de hacer un programa que implemente procedimientos de la teoría. Esto suele ser una tarea no trivial para el recién iniciado y obliga a desarrollar aptitudes de programación, pero más importante, obliga a repensar la teoría matemática para adaptarla al nuevo contexto.

En el mismo orden de ideas, esto es poner los conocimientos de la asignatura en diversos contextos, se buscó una integración con otras materias del plan de estudios. Por supuesto que hay algunas de ellas que son absolutamente necesarias para desarrollar la teoría de las ecuaciones diferenciales, pero no es costumbre en los cursos elementales sobre ecuaciones diferenciales recurrir a algunas ramas, por ejemplo teoría de grupos. Sin embargo la teoría de grupos tiene cosas importantes para decir sobre las ecuaciones. Se buscó establecer estas vinculaciones menos tradicionales, por ejemplo se desarrollo una unidad sobre la utilización de grupos de Lie de simetrías para resolver EDO. Utilizamos un concepto particular de grupo de Lie, para evitar las complicaciones técnicas en la definición de este concepto en general. La consideración de simetrías es una técnica matemática básica y las simetrías están indisolublemente ligadas al concepto de grupo.

## E. ACTIVIDADES A DESARROLLAR

**CLASES TEÓRICAS:** Presencial, 4 horas semanales. La metodología que se desarrollará es la exposición por parte del docente de los fundamentos teóricos de los contenidos impartidos. Se incentivará la participación de los alumnos durante la clase, requiriendo que ellos aporten, por ejemplo, demostraciones de determinados hechos o, en general, soluciones a determinadas situaciones problemáticas que plantea el desarrollo teórico de la materia.

**CLASES PRÁCTICAS:** Presencial 4 horas semanales. Se espera que los alumnos trabajen sobre los ejercicios de la práctica en forma independiente fuera de los horarios de la asignatura. Posteriormente estos ejercicios se discutirán durante la clase, el profesor tratará de limitar su participación de modo tal de favorecer que los alumnos autogestionen su aprendizaje.

**Internet:** Se utilizaron diversos recursos de internet, que están compendidos en una página de la asignatura y en un repositorio de Git Hub. En la red hay excelentes recursos, videos, páginas web, wikis y, en general, distintos materiales multimedia especialmente útiles para visualizar algunos conceptos, métodos, etc.

**F. NÓMINA DE TRABAJOS PRÁCTICOS** Hay un trabajo práctico por cada unidad de la materia.

**G. HORARIOS DE CLASES:** martes y jueves de 14 a 18.

**Horario de clases de consultas:** Se convendrá con los alumnos, durante el desarrollo de la materia, los horarios de consultas.

**H. MODALIDAD DE EVALUACIÓN:**

**Evaluaciones Parciales:** Se le presentará al alumno una serie de problemas que deberá resolver.

**Evaluación Final:** Será oral, el alumno deberá desarrollar los ejes conceptuales y fundamentos teóricos de la materia.

**Condiciones de regularidad:** Aprobar los exámenes parciales o sus respectivos recuperatorios.

**Condiciones de promoción:** no se prevé

**I. CONTENIDOS:**

*El asterisco al lado de las referencias citadas más abajo indica la bibliografía considerada principal. Las citas sin el asterisco corresponden a bibliografía suplementaria.*

**Unidad 0. Python, SymPy, SAGE.** Panorama de instalación, distribuciones y recursos online. Tipos de datos en Python, programación elemental.

**Unidad 1. Ecuaciones de Primer Orden.** Noción de ecuación diferencial y clasificación. Ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO). Problemas de valores iniciales. Familia de curvas y la familia ortogonal. Método de separación de variables. Aplicaciones: dinámica de mezclas, cuerpos en caída a lo largo de guías, curvas braquistócrona y tautócrona. Ecuaciones homogéneas. Ecuaciones exactas. Factores integrantes. Ecuaciones lineales de primer orden. Métodos de reducción de orden. Curvas de persecución. Velocidad de escape. Problema del resorte. Cambios de variables. Usando SymPy para cambiar variables. Grupos de Lie uniparamétricos. Grupos de simetrías. Generadores infinitesimales. Variables canónicas. Solución de EDO por medio de sus grupos de Lie de simetrías. ?????

**Unidad 2. Teorema de Existencia y Unicidad.** Presentación filosófica: determinismo científico. Funciones Lipschitzianas. Teorema de punto fijo de Banach. Método iterativo de Picard. Teorema de existencia y unicidad para sistemas de EDO de primer orden.????

**Unidad 3. Ecuaciones Lineales de Segundo Orden.** Ecuaciones lineales. Reducción de orden. Ecuaciones homogéneas a coeficientes constantes. El problema no homogéneo. Independencia lineal. Bases de soluciones. Polinomio característico. Ecuaciones no homogéneas. Coeficientes indeterminados y variación de los parámetros. Vibraciones mecánicas. Solución del problema Kepleriano de los dos cuerpos. Osciladores armónicos acoplados. ??

**Unidad 4. Métodos cualitativos.** Teoremas de separación y de comparación de Sturm. Aplicaciones, ceros de las funciones de Bessel.??

**Unidad 5. Desarrollo en serie de potencias.** Repaso de series de potencias. Método de coeficientes indeterminados. Resolución de problemas de desarrollo en serie con SymPy. Ecuaciones lineales de segundo orden: puntos regulares. Puntos singulares regulares. Series de Frobenius. Teoremas fundamentales.??

**Unidad 6. Sistemas lineales.** Base de soluciones. Matriz fundamental. Sistemas lineales a coeficientes constantes. Solución del problema homogéneo con formas de Jordan. Problema no homogéneo. Sistemas no-lineales. ??

J. **CÓDIGO QR** Algunos bloques de código Python que expondremos en el texto vienen acompañados de un código QR como note al margen. La finalidad es que el alumno pueda leer este código con algún dispositivo móvil y ejecutar el código dentro del dispositivo

K. **MARGENES** El significado de las imágenes en los márgenes es el siguiente:

	Enlace de Internet
	Prestar atención
	Lectura adicional
	Actividad práctica

# Capítulo 1

## Generalidades y ecuaciones de primer orden

### 1.1 ¿Qué son las ecuaciones diferenciales?

**Definición 1** (Ecuación diferencial, definición informal).

Es una o varias relaciones entre una o varias variables dependientes y sus tasas de cambio respecto a ciertas variables independientes.

El problema básico asociado a las ecuaciones diferenciales es hallar las variables dependientes que las resuelven.

Las ecuaciones diferenciales son usadas muy a menudo en matemática aplicada, puesto que muchas leyes (de la física por ejemplo) se expresan a través de este tipo de ecuaciones.

- ☒ **Ejemplo 1.** [Caída libre] Modelizar matemáticamente el movimiento de un cuerpo de masa  $m$  en las proximidades de la superficie terrestre, asumiendo que su movimiento es sobre la vertical y que las fuerzas que sobre él actúan son la gravedad y el rozamiento con el aire.

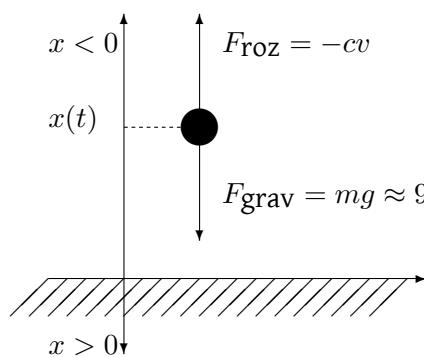


Figura 1.1: Caída libre

$x(t)$  = posición a lo largo de la vertical, relativo a un eje de coordenadas

$v(t) = \frac{dx}{dt}$  = velocidad

$F_{grav}$  = fuerza debida a la gravedad  
=  $mg$  donde  $g = 9,8m/s^2$   
 $F_{roz}$  = fuerza de rozamiento, proporcional a la velocidad y de sentido contrario =  $-cv$ ,  $c > 0$ .

Usamos la Segunda Ley de Newton, esto es la suma de las fuerzas totales que actúan sobre un cuerpo de masa  $m$  es igual al producto de la masa  $m$  y la aceleración  $a(t)$ . Recordemos que la aceleración es la tasa de cambio de la velocidad, es decir la derivada segunda de la posición.

Usando todas las relaciones mencionadas

$$\begin{aligned} ma(t) &= mv'(t) = F_{total} \\ &= F_{grav} + F_{roz} \\ &= mg - cv \end{aligned}$$

vale decir

$$x''(t) + \frac{c}{m}x'(t) = g. \quad (1.1)$$

$$v'(t) + \frac{c}{m}v = g. \quad (1.2)$$

## 1.2 Algunos conceptos relacionados con ecuaciones diferenciales

### Definición 1 (Orden).

El índice de la mayor derivada interviniente en la ecuación.

Por ejemplo la ecuación (1.1) es de orden 2 y la ecuación (1.2), si bien está estrechamente relacionada con la anterior, es de orden 1. Como regla casi general, cuanto menor es el orden, más fáciles de estudiar y/o resolver las ecuaciones son.

### Definición 2 (Solución).

Una función que satisface la relación que indica la ecuación.

Por ejemplo

$$v(t) = \frac{m}{c}g + ke^{-\frac{c}{m}t}, \quad (1.3)$$

resuelve (1.2), para todo  $C \in \mathbb{R}$ . No deberíamos perder tiempo en chequear una cuestión tan sencilla, pero aprovechemos la ocasión para usar SymPy.

```

1 >>>from sympy import *
2 >>>m, g, c, k, t=symbols('m, g, c, k, t')
3 >>>v=m/c*g+k*exp(-c/m*t)
4 >>>simplify(v.diff(t)+c/m*v)
5 g

```



Notar que las líneas que comienzan con el signo del prompt `>>>` indican entradas por línea de comandos y las que comienzan sin este signo son las respuestas del interprete.

Rara vez utilizaremos las siguientes funcionalidades de SymPy, pero es oportuno decir que SymPy puede encontrar la solución a una ecuación diferencial

```

1 >>>v=symbols('v',cls=Function)
2 >>>EqCaida=Eq(v(t).diff(t)+c/m*v(t),g)
3 >>>Vel=dsolve(EqCaida,v(t))
4 >>> Vel
5 v(t) == (g*m + exp(c*(C1 - t/m)))/c

```



La solución obtenida es la ya conocida. Es instructivo averiguar que tipo de dato tiene la variable `Vel`

```

1 >>> type(Vel)
<class 'sympy.core.relation.Equality'>

```

 A este tipo de cuestiones hay que prestar atención cuando se trabaja con sympy, pues existe la tendencia a confundir los conceptos matemáticos con los propios del lenguaje. Por ejemplo, matemáticamente una solución es una función. Sin embargo, en este caso, cuando le solicitamos una solución a sympy nos entrega un objeto de tipo ``relación de igualdad''.

**Definición 3 (Ecuación diferencial ordinaria (EDO)).**

Es una ecuación donde las variables dependientes sólo dependen de una única variable independiente.

Las ecuaciones (1.1) y (1.2) son ejemplo de ello, la variable independiente es el tiempo.

**Definición 4 (Ecuación en derivadas parciales (EDP)).**

Es una ecuación donde las variables dependientes dependen de más de una variable independiente.

Ejemplo de este tipo de ecuación es la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Puede ocurrir también que dispongamos de varias ecuaciones diferenciales que se deben satisfacer simultáneamente. En estos casos, el conjuntos de ecuaciones se suele escribir como una única ecuación vectorial. Por este motivo, en algunas ocasiones cuando dispongamos de una única ecuación diremos que tenemos una *ecuación escalar*.

**Definición 5 (Sistema de ecuaciones).**

Es un conjunto de ecuaciones diferenciales que se deben satisfacer simultáneamente.

En ese caso es de esperar que tengamos varias incógnitas en nuestro problema. En general una ecuación escalar determina sólo una incógnita. De hecho aquí ocurre, a semejanza con ecuaciones algebraicas, que es frecuente necesitar tantas ecuaciones como incógnitas.

**Ejemplo 2.** [Ecuación del péndulo] El sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -\sin(x) \end{cases}$$

es muy conocido pues modeliza el movimiento de un péndulo.

Muy a menudo hablaremos de resolver una ecuación, pero es oportuno discutir que queremos significar con esto.

**Definición 6 (Resolver una ecuación).**

Es expresar la solución como combinaciones algebraicas y composiciones de funciones que consideramos elementales.

Esta definición contiene una vaga apelación a ciertas ``funciones elementales''. El universo de funciones que se considera elemental es una cuestión política, no matemática. En principio, consideraremos elementales a las potencias, exponenciales, logarítmicos, trigonométricas y trigonométricas inversas. No obstante esta lista se puede expandir con muchas funciones especiales. Las operaciones permitidas para combinar estas funciones también están sujetas a convenciones. Por ejemplo, admitiremos como válida una expresión que contenga una integral, al menos en el caso que no sea claro como resolver esta integral.

Casi todo este curso trata con la discusión de métodos para resolver ecuaciones. Sin embargo resolver ecuaciones no es quizás el problema principal relacionado con las ecuaciones diferenciales. No importa tanto lograr una expresión formal de la solución, como, por ejemplo, conocer las propiedades que poseen las soluciones. Al fin y al cabo, uno conoce una función a través de sus propiedades.

**Definición 7 (Solución general).**

Usualmente una ecuación presenta infinitas soluciones. Una solución general es una expresión que representa todas estas soluciones. Es habitual que una solución general contenga parámetros. Cada elección de estos parámetros determina una solución distinta.

Por ejemplo (1.3) es la solución general de (1.2). La afirmación anterior requiere una demostración puesto que sólo hemos mostrado que (1.3) es solución, pero no que toda solución se expresa con (1.3). Para demostrar la afirmación, hay que multiplicar ambos miembros de (1.2) por  $e^{\frac{c}{m}t}$  y luego integrar respecto a  $t$

$$\frac{mg}{c}e^{\frac{c}{m}t} = \int ge^{\frac{c}{m}t}dt = \int v'(t)e^{\frac{c}{m}t} + \frac{c}{m}e^{\frac{c}{m}t}vdt = e^{\frac{c}{m}t}v + C.$$

Despejando  $v$  del primer y último miembro obtenemos (1.3) con  $k = -C$ .

**Ejemplo 3.** En algunas ocasiones sólo podemos dejar una relación implícita entre las variables dependientes e independientes. Por ejemplo

$$x = e^y + y + C \quad \text{para } C \in \mathbb{R} \quad (1.4)$$

es solución general de

$$y'(e^y + 1) = 1.$$

Vamos a chequear sólo que (1.4) es solución, dejando la justificación que toda solución tiene esa forma para más adelante. Derivando (1.4)

$$1 = e^y y' + y'$$

Luego  $y' = 1/(1 + e^y)$ . Reemplazando esta relación en la ecuación diferencial corroboramos que es solución.

### 1.3 Definición formal

**Definición 1 (Ecuación diferencial).**

Una ecuación diferencial ordinaria de orden  $n$  es una relación de la forma

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0.$$

donde  $F : (a, b) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Omega$  es abierto de  $\mathbb{R}^{n+1}$  y  $(a, b)$  un intervalo de  $\mathbb{R}$ .

**Ejemplo 4.** El problema de hallar una primitiva de una función es una ecuación diferencial que, como ya se ha visto en cursos iniciales de análisis, se relaciona con el concepto de integral. Supongamos  $f : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua. Consideremos la ecuación diferencial

$$y'(x) = f(x).$$

Sea  $x_0 \in (a, b)$ , integrando respecto a  $x$  entre  $x_0$  y  $x$

$$y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^x f(t)dt$$

Que es una solución general. Quedaría determinada una única solución si, por ejemplo, conociersemos  $y(x_0)$ .

**Ejemplo 5.** Supongamos  $f : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  como antes. Consideremos la ecuación diferencial

$$y''(x) = f(x).$$

Tomemos una integral indefinida respecto a  $x$

$$y'(x) = C_1 + \int f(t)dt$$

Ahora deberemos tomar una integral indefinida más

$$y(x) = C_2 + C_1 t + \int \left( \int f(x)dx \right) dx.$$

Ahora quedan dos constantes  $C_1$  y  $C_2$ .

En el caso de un sistema de ecuaciones diferenciales, la forma de describirlo es esencialmente igual a la de la Definición 1. La nueva definición contiene a la Definición 1 como caso particular.

**Definición 2** (Sistema de ecuación diferenciales).

Una sistema de  $k$ -ecuaciones diferenciales ordinarias de orden  $n$  es una relación de la forma

$$\boxed{F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0}.$$

donde  $F : (a, b) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$ ,

$$\Omega \subset \underbrace{\mathbb{R}^k \times \cdots \times \mathbb{R}^k}_{n+1-\text{veces}}$$

es abierto y  $(a, b)$  un intervalo de  $\mathbb{R}$ . Notar que el  $=$  en la derecha de la ecuación está en  $\mathbb{R}^k$  y que tenemos  $k$  ecuaciones e incógnitas, las  $k$  componentes de  $y = (y_1, \dots, y_k)$ .

**Ejemplo 6.** En el caso del péndulo  $k = 2$ ,  $n = 1$ , mientras que  $(a, b) = \mathbb{R}$ ,  $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  y  $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  viene dada por

$$F \left( \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \xi - v \\ \eta + \operatorname{sen}(x) \end{pmatrix}$$

Más adelante veremos que toda ecuación, o sistemas de ecuaciones, ordinaria de orden  $n$  se puede reducir a un sistema de orden 1. De modo tal que es más frecuente considerar este tipo de sistemas. También es común considerar, se

trate ya de ecuaciones escalares o sistemas, ecuaciones donde es posible despejar de manera explícita la derivada de mayor orden. A esta forma la denominaremos *forma explícita* de la ecuación

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) = 0. \quad (1.5)$$

## 1.4 Problemas bien planteados, condiciones iniciales

La siguiente definición expresa lo que entenderemos cuando digamos que un problema está bien planteado.

**Definición 1** (Principio de Hadamard).

Un problema se dice bien planteado segun Hadamard si satisface que

- A. El problema admite solución
- B. La solución es única
- C. La solución depende de manera continua de los datos numéricos del problema.



Como hemos visto, una ecuación diferencial no determina una única solución, por consiguiente no sería un problema bien planteado. Debemos agregar relaciones a nuestro problema para que sea bien planteado. Es así que aparecen condiciones iniciales, problemas de contorno, etc.

Jacques Hadamard (1865-1963)

**Definición 2** (Problemas de valores iniciales (PVI)).

Sea  $x_0 \in (a, b)$ ,  $F : (a, b) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  e  $y_0, y_0^1, \dots, y_0^{n-1} \in \mathbb{R}$ . Las siguientes relaciones se denominan problema de valores iniciales

$$\begin{cases} F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 & x \in (a, b) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0^1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1} \end{cases} \quad (1.6)$$

Más delante demostraremos el teorema de existencia y unicidad para ecuaciones y sistemas de ecuaciones. Este teorema nos dice que, para ciertas  $F$ , el problema (2) tiene una única solución alrededor de un entorno de  $x_0$ .

Es común en las aplicaciones físicas de las EDO, que la variable  $x$  represente el tiempo e  $y = y(x)$  represente alguna cantidad física (posición, velocidad, temperatura, etc) caracterizando a cierto sistema físico. Es muy frecuente que aparezcan ecuaciones de orden 2 ( $n = 2$ ). En esta situación, al par  $(y, y')$  se lo denomina *estado* del sistema y las condiciones A y B en la Definición 1 se leen como que el estado del sistema en un momento  $x_0$  dado determina el estado del mismo en cualquier otro momento. Este es el postulado principal de la corriente filosófica conocida por determinismo.

Es común que una ecuación que modela un sistema físico dependa de parámetros. Pensar por ejemplo del papel de la masa en la ecuación (1.1). Estos parámetros o incluso los valores iniciales del problema (2) dependen muchas veces

de resultados de mediciones y sólo es posible tener de ellos un valor aproximado. Por consiguiente, casi nunca se resuelve el PVI que se debería resolver, sino otro, con parámetros y valores iniciales aproximadamente iguales a los correctos<sup>1</sup>. La condición C en la Definición 1 expresa el hecho de que las soluciones a PVIs aproximadamente iguales son aproximadamente iguales entre sí.

Vamos a destacar la siguiente instancia particular de la Definición 2.

**Definición 3** (PVI para ecuaciones de primer orden).

La ecuación general de primer orden tiene la forma

$$F(x, y(x), y'(x)) = 0,$$

donde  $F : (a, b) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  y  $\Omega$  abierto de  $\mathbb{R}^2$ . Con frecuencia asumiremos que  $y'$  se despeja de la relación anterior, es decir que existe  $f : \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Omega'$  abierto de  $\mathbb{R}^2$ , tal que

$$y' = f(x, y).$$

Bajo esta suposición, si  $(x_0, y_0) \in \Omega'$  el problema de valores iniciales se escribe

$$\begin{cases} y' &= f(x, y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases}$$

## 1.5 Familias paramétricas de funciones

Hemos dicho que en el común de los casos es de esperar que una ecuación tenga asociado un conjunto de soluciones. En esta sección vamos a preguntarnos sobre el problema inverso, dado un conjunto de funciones encontrar una ecuación que lo tenga por solución.

**Problema 1.**

Dada una familia paramétrica de funciones

$$y = y(x, c), \quad (1.7)$$

dependiente del parámetro  $c \in \mathbb{R}$ , ¿Será posible hallar una ecuación para la cual la familia sea la solución general?

En líneas generales la respuesta es sí. Nos conviene expresar (1.7) como una ecuación implícita

$$f(x, y, c) = 0. \quad (1.8)$$

Derivando esta ecuación respecto a  $x$

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y'(x, c) = 0. \quad (1.9)$$

Ahora es posible eliminar  $c$  de (1.8) y (1.9) al costo de quedarnos con una sola ecuación.

**Ejemplo 7.** Encontrar la ecuación que satisface la familia paramétrica

$$x^2 + y^2 = c^2.$$

<sup>1</sup>Estamos usando una noción bastante ingenua de corrección

Derivamos

$$2x + 2yy' = 0.$$

Ya está!!!

**Ejemplo 8.** Idem  $x^2 + y^2 = 2cx$ . Derivando

$$2x + 2yy' = 2c.$$

Eliminamos  $c$  de las dos relaciones

$$\frac{x^2 + y^2}{x} = 2x + 2yy' \Rightarrow \boxed{y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy}}.$$

### Problema 2.

Dada una familia paramétrica

$$f(x, y, c) = 0,$$

encontrar otra

$$g(x, y, d) = 0$$

tal que los ángulos que forman los gráficos entre las funciones de una y de otra familia sean rectos en cada punto de corte entre ellos.

Para resolver este problema se completan estos pasos

- Se encuentra la ecuación diferencial que satisface la familia dada, digamos

$$y' = h(x, y).$$

- Se resuelve

$$y' = -\frac{1}{h(x, y)}.$$

**Ejemplo 9.** Encontrar la familia de curvas ortogonales a la flia de circunferencias

$$x^2 + y^2 = c^2$$

Hallamos antes que la ecuación que satisfacen estas curvas es

$$y' = -\frac{x}{y}.$$

Luego deberíamos resolver

$$y' = \frac{y}{x}.$$

Que aún no sabemos resolver, pero SymPy sí!!!

### Función SymPy (dsolve).



**Sintaxis** (ampliar en la documentación SymPy)

`dsolve(eq, f(x), hint)`

`eq`: Ecuación (posicional)

`f(x)`: función incognita (posicional)

`hint`: Método a emplear. Argumento con nombre `hint='cadena'`.

**Ejemplo 10.**

```

1 x=symbols('x')
2 y=Function('y')(x)
MiEcua=Eq(y.diff(x),y/x)
4 f=dsolve(MiEcua,y)

```



**Resultado:** Flea rectas por el origen.

La instrucción

```
f=dsolve(MiEcua,y,hint='separable')
```

produce el mismo resultado.

**Función SymPy (plot).**



**Sintaxis** (Ampliar en la documentación SymPy)

Para un gráfico simple

```
plot(expr,rango,opcionales(claves))
```

expr: Expresión a graficar

rango: Conjunto donde varia la variable independiente

opcionales Argumentos que modifican la apariencia del gráfico. Generalmente de la forma de clave=valor

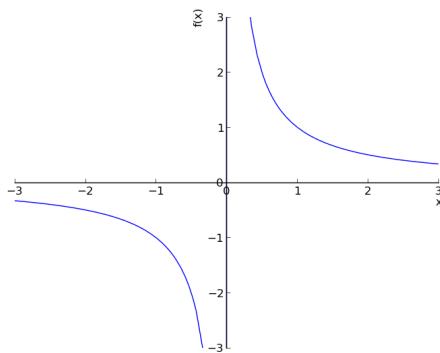
**Ejemplo 11.**

```

1 x=symbols('x')
2 f=plot(1/x,(x,-3,3),ylim=(-3,3))

```

**Resultado:**

**Ejemplo 12.** Grafiquemos una familia paramétrica de funciones.

```

from sympy import *
1 x,y=symbols('x,y')
Rango=range(21)
2 L=[tan(pi*k/21.0) for k in Rango]
p=plot(L[0]*x,(x,-2,2),show=False,xlim=(-2,2),\
3 ylim=(-2,2),aspect_ratio=(1,1))
for pend in L[1:]:
4     p1=plot(pend*x,(x,-2,2),show=False,\n
5         xlim=(-2,2),ylim=(-2,2),aspect_ratio=(1,1))
6     p.append(p1[0])
7 for r in range(1,10):
8     p1=plot_implicit(Eq(x**2 + y**2, 0.2*r),\
9         show=False, aspect_ratio=(1,1),xlim=(-2,2),ylim=(-2,2))
10    p.append(p1[0])
11
12
13
14

```

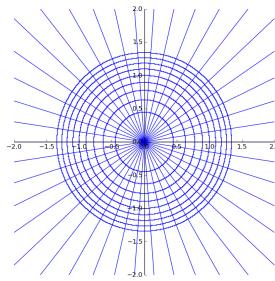


Figura 1.2: Familia curvas ortogonales

**Resultado:****Problema 3 (Familias paramétricas de funciones en coordenadas polares).**

En ocasiones la ecuación de la familia de curvas esta dada en otras coordenadas. Por ejemplo supongamos que tenemos la flia de curvas dadas por una EDO en coordenadas polares

$$\frac{dr}{d\theta} = f(r, \theta),$$

y queremos hallar su flia ortogonal.

**Solución:** Calculemos  $dy/dx$  para las curvas en la familia dada.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{r_\theta \operatorname{sen} \theta + r \cos \theta}{r_\theta \cos \theta - r \operatorname{sen} \theta} = \frac{f \operatorname{sen} \theta + r \cos \theta}{f \cos \theta - r \operatorname{sen} \theta},$$

donde  $r_\theta = dr/d\theta$ . La flia ortogonal tiene que satisfacer

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f \cos \theta - r \operatorname{sen} \theta}{f \operatorname{sen} \theta + r \cos \theta}$$

Luego

$$\frac{r_\theta \operatorname{sen} \theta + r \cos \theta}{r_\theta \cos \theta - r \operatorname{sen} \theta} = -\frac{f \cos \theta - r \operatorname{sen} \theta}{f \operatorname{sen} \theta + r \cos \theta}.$$

Si despejamos  $r_\theta$  llegamos a la ecuación de la flia de curvas ortogonales en coordenadas polares

$$\frac{dr}{d\theta} = -\frac{r^2}{f}. \quad (1.10)$$



Aconsejamos ampliar este tema de Simmons (1991).

## 1.6 Separación de variables

En esta unidad presentaremos algunos métodos de solución para ecuaciones de primer orden. Empezaremos con el, quizás, más popular de todos, el método de *separación de variables*.

**Definición 1** (Ecuaciones en variables separadas).

Se dice que en una ecuación de primer orden

$$y' = f(x, y)$$

separan las variables, si es posible la factorización  $f(x, y) = g(x)h(y)$ .

Una ecuación en la que se separan variables se puede resolver siguiendo los siguientes pasos. Asumamos  $h(y) \neq 0$ . En la práctica hay que chequear cuando  $h(y) = 0$ , es frecuente que así encontremos una solución adicional.

$$\frac{y'}{h(y)} = g(x),$$

Si  $H$  y  $G$  son primitivas de  $1/h$  y  $g$  respectivamente por la regla de la cadena tenemos

$$\frac{d}{dx}H(y) = \frac{d}{dx}G(x)$$

Luego

$$H(y) = G(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Por último, si podemos encontrar la inversa de  $H$

$$y(x) = H^{-1}(G(x) + C). \quad (1.11)$$

será candidata a solución general. No podemos estar seguros de esta afirmación, sobre todo porque la deducción de esta fórmula estuvo sujeta a suposiciones, como  $h(y) \neq 0$ .

**Ejemplo 13.** Resolver

$$y' = \frac{y}{x}.$$

Como queremos agrupar todos los factores que contienen la variable  $y$  en uno de los miembros, debemos ``pasar dividiendo''  $y$ . Esto es imposible si  $y = 0$ . Reemplazando  $y \equiv 0$  en la ecuación vemos que la resuelve. Así hemos encontrado nuestra primera solución  $y \equiv 0$ . El resto del método, es común llevarlo adelante de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} &\implies \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \implies \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \\ &\implies \ln|y| = \ln|x| + C \implies |y| = k|x|, \text{ con } k > 0 \\ &\implies y = kx, \text{ con } k \neq 0 \end{aligned}$$

Notar que, al fin y al cabo, la solución general es  $y = kx$  con  $k \in \mathbb{R}$ . La solución ``díscula''  $y \equiv 0$  también se escribe  $y = kx$ , cuando  $k = 0$ .

**Función SymPy (`classify_ode`: clasificación de ecuaciones).****Sintaxis**

```
classify_ode(eq, f(x))
```

**Ejemplo 14.**

Sympy contiene un comando que nos dice que método es posible aplicar a una ecuación dada.

```

1 x=symbols('x')
2 y=Function('y')(x)
MiEcua=Eq(y.diff(x),y/x)
4 tipo=classify_ode(MiEcua,y)

```



**Resultado:**

```
('separable', '1st_exact', '1st_linear',
'almost_linear', 'lie_group', etc)
```

## 1.7 Aplicaciones

Vamos a describir algunos ejemplos. Algunos de ellos llevan a problemas matemáticos muy simples. No obstante es oportuno discutirlos por dos motivos, habituarnos a la utilización de la matemática para resolver problemas de otras ciencias y sentar las bases para discutir problemas más relevantes desde una óptica matemática.

### 1.7.1. Ley de reproducción normal

En muchos ejemplos de biología, química-física, etc, hay magnitudes que crecen(decrecen) siguiendo una ley que denominaremos Ley de reproducción normal.

- Según esta ley la cantidad de individuos, sustancia, materia, energía, etc, que se agrega o elimina de una población, cuerpo, etc por unidad de tiempo es proporcional a la cantidad de individuos, sustancia, etc que hay presente. Una población de seres vivos puede reproducirse de esta manera bajo algunas circunstancias especiales, por ejemplo si cuenta con fuente ilimitada de alimentos.

Si  $P(t)$  es la cantidad de individuos en el momento  $t$ , la ley de reproducción normal establece en este caso la siguiente ecuación diferencial de primer orden

$$P'(t) = kP(t), \quad \text{con } k > 0.$$

La solución es hallada con suma facilidad, por ejemplo usando separación de variables, siendo ella

$$P(t) = Ce^{kt}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

La constante  $C$  se puede determinar si tenemos un problema a valores iniciales (pvi), por ejemplo  $P(0) = P_0$ , siendo  $P_0 \in \mathbb{R}$  dado. En ese caso  $C = P_0$ .

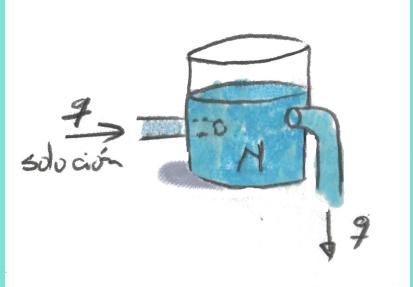
- Otro ejemplo de comportamiento similar es la desintegración radiactiva . Algunos átomos de ciertas sustancias, pueden "desarmarse" en átomos de otras sustancias. En el proceso suelen emitir radiaciones. La velocidad de desintegración sigue una ley de reproducción normal pero hay que tener en cuenta que la materia radiactiva, es decir la "población" en este caso, se pierde. Si  $x(t)$  es la masa de materia radiactiva en el momento  $t$ , evolucionará acorde a la ley

$$x'(t) = -kx(t), \quad \text{con } k > 0.$$

### 1.7.2. Soluciones

**Problema 1.**

Un tanque contiene inicialmente  $N \text{ m}^3$  de  $H_2O$  entre los cuales hay disueltos  $C \text{ kg}$  de sal común  $NaCl$ . A través de una boca de entrada y una de salida empieza circular la solución, entrando y saliendo con el mismo caudal  $q \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$ . Se supone que la solución entrante tiene una concentración conocida  $r$ . Encontrar la cantidad de sal en el momento  $t$ .



Sea  $x(t)$  la cantidad de  $NaCl$  en el tanque en el momento  $t$ . entonces

$$\begin{aligned} x'(t) &= \text{cantidad que entra} - \text{cantidad que sale} \\ &= qr - q \frac{x(t)}{N} \end{aligned}$$

### 1.7.3. Dinámica del punto

**Discusión Teórica**

Vamos a recordar algunas temáticas de la asignatura física. En particular, el tema del movimiento de un cuerpo de masa  $m$ , al que podemos suponer puntual, dentro del espacio euclídeano tridimensional. A un cuerpo de estas características lo llamaremos punto masa. Denotamos por  $x(t) \in \mathbb{R}^3$  su posición en algún marco de referencia cartesiano ortogonal e inercial. Suponemos que sobre él actúa una fuerza  $f$ . Recordemos que  $x'(t)$  es la velocidad  $v(t)$  y que  $x''(t)$  es la aceleración  $a(t)$ . La segunda ley de Newton implica que

$$mx''(t) = f \quad (1.12)$$

Supongamos que el movimiento del punto masa se realiza entre los momentos  $t_0$  y  $t_1$ . Como has visto en Cálculo III la longitud de la curva recorrida  $s(t)$  se puede calcular por

$$s = \int_{t_0}^{t_1} |x'(t)| dt = \int_{t_0}^{t_1} |v(t)| dt. \quad (1.13)$$

- ☒ A  $s$  se lo suele denominar elemento de arco. Es común querer utilizar a  $s$  como variable independiente en lugar de  $t$ , puesto que algunas fórmulas se simplifican de esta forma. Por ejemplo

$$f \cdot v(t) dt = f \cdot \frac{v(t)}{|v(t)|} |v(t)| dt = f_t ds, \quad (1.14)$$

donde  $f_t$  denota la proyección de la fuerza  $f$  sobre la dirección tangente a la trayectoria.

En mecánica newtoniana, un sistema de referencia inercial es un sistema de referencia en el que las leyes del movimiento cumplen las leyes de Newton

Si integramos (1.14) entre  $t_0$  y  $t_1$  y usamos (1.12) obtenemos

$$\begin{aligned} W &:= \int_{s_0}^{s_1} f_t(x(s))ds = \int_{t_0}^{t_1} f(x(t)) \cdot v(t)dt \\ &= m \int_{t_0}^{t_1} v'(t) \cdot v(t)dt \\ &= \frac{m}{2} \int_{t_0}^{t_1} \frac{d|v|^2}{dt} dt \\ &= \frac{m}{2} |v(t_1)|^2 - \frac{m}{2} |v(t_0)|^2. \end{aligned}$$

A la cantidad  $\frac{m}{2}|v|^2$  se la denomina *energía cinética*  $E_c$  y a  $W$  se lo denomina *trabajo*. Las relaciones obtenidas dicen que la variación de la energía cinética es igual al trabajo realizado  $W = \Delta E_c$  por la fuerza  $f$ . El trabajo realizado depende de la proyección tangencial de la fuerza  $f_t$ . Llamaremos a esta relación Principio

☒ de Conservación de la Energía Mecánica.

Vamos a referirnos por *rapidez* al módulo de la velocidad. Si uno quiere incrementar o reducir la rapidez final  $|v(t_1)|$  entonces deberá tener fuerzas con una componente tangencial no nula. Dicho de otra forma, si la fuerza es perpendicular al movimiento, no hay cambio de rapidez.

Hay fuerzas que siempre actúan en la dirección del movimiento. El ejemplo más conocido son las fuerzas de fricción, resistencia del aire, resistencia a la rodadura, etc. Estas fuerzas, actúan sólo en la dirección del movimiento y se oponen a él.

Por el contrario hay otras que actúan perpendiculares al movimiento  $f_t = 0$ . Ejemplo de ello son las fuerzas que mantienen a un cuerpo moviéndose a lo largo de una guía. Por ejemplo un niño cayendo por un tobogán. Que el niño no se despegue de la guía (tobogán) se explica por la aparición de una fuerza que se denomina reacción de vínculo que actúa en la dirección perpendicular al movimiento esto es decir a la guía. Esta fuerza debe compensar a toda otra fuerza que trata de apartar al cuerpo de la guía. En el caso del tobogán la gravedad trata de apartar al niño de aquél.

### Cuerpos cayendo por guías

Analicemos más en detalle el movimiento de un cuerpo cayendo a lo largo de una guía estando además influído por la acción de la gravedad. Supondremos el movimiento en las proximidades de la superficie de la Tierra y por ello, supondremos que la magnitud de la fuerza de la gravedad es la constante  $mg$ .

Supongamos que la guía está confinada a un plano. Introducimos un sistema de coordenadas ortogonales en dicho plano, con el suelo paralelo al eje  $x$

El elemento longitud de arco  $s$  de una curva que es el gráfico de una función  $y(x)$  para  $x$  en  $[x_0, x_1]$  viene dado por

$$s = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'(x)^2} dx$$

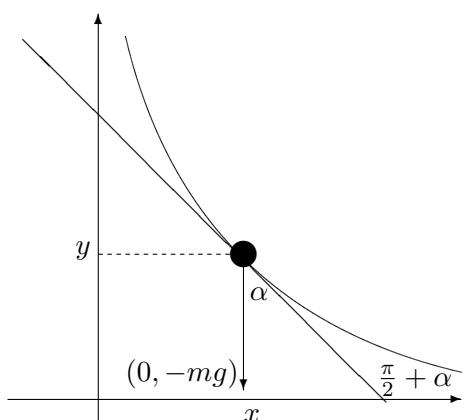


Figura 1.3: Caída por una guía

La fuerza de vínculo de la guía tiene componente tangencial nula, la gravedad tiene una componente tangencial no nula. Su magnitud es  $mg \cos \alpha$  (ver dibujo). Vamos a tratar de expresar  $\cos \alpha$  en términos de  $y'(x)$ . Supongamos  $\cos \alpha > 0$  e  $y'(x) < 0$ . Los demás



casos quedan como **ejercicio**.

$$\tan^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1$$

e

$$y'(x) = \tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\frac{1}{\tan \alpha}$$

Podemos usar las relaciones anteriores para escribir  $\cos \alpha$  en función de  $y'(x)$

$$\cos \alpha = -\frac{y'(x)}{\sqrt{1 + y'(x)^2}} \quad (1.15)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \frac{m}{2}|v(t_1)|^2 - \frac{m}{2}|v(t_0)|^2 &= \int_{s_0}^{s_1} f_t ds = \int_{x_0}^{x_1} f_t \frac{ds}{dx} dx \\ &= -mg \int_{x_0}^{x_1} \frac{y'(x)}{\sqrt{1 + y'(x)^2}} \sqrt{1 + y'(x)^2} dx \quad (1.16) \\ &= -mg(y_1 - y_0) \end{aligned}$$

Esto nos permite escribir la rapidez en función de la altura respecto al piso.

#### 1.7.4. El péndulo

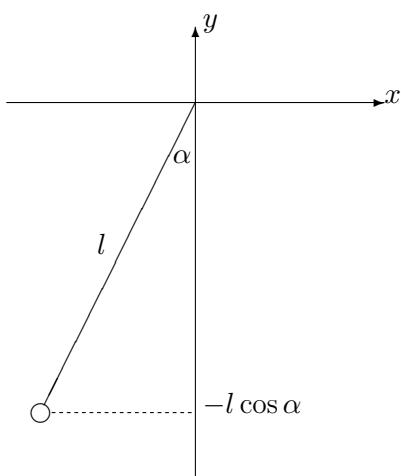


Figura 1.4: Péndulo

Se trata de una masa puntual  $m$  suspendida de un punto por medio de una barra de longitud  $l$  a la que suponemos sin masa. Equivale al movimiento sobre una guía circular. Usaremos el ángulo  $\alpha$  marcado en la figura, como variable dependiente.

Supondremos que el origen del sistema de coordenadas está sobre el punto de amarre de la barra. Entonces de (1.16) con  $t_1 = t$  deducimos

$$\begin{aligned} \frac{m|v(t)|^2}{2} - \frac{m|v(t_0)|^2}{2} \\ = -mg(y(t) - y(t_0)) \\ = mg \cos \alpha(t) - mg \cos \alpha(t_0). \end{aligned}$$

Ahora la posición de la masa es  $x(t) = l(\cos \alpha, -\sin \alpha)$  luego

$$v(t) = l\alpha'(t)(\cos \alpha, -\sin \alpha).$$

Tomando módulo

$$|v(t)|^2 = l^2 \alpha'(t)^2.$$

Entonces

$$\frac{ml^2 \alpha'(t)^2}{2} = mgl \cos \alpha(t) - mgl \cos \alpha(t_0) + \frac{mv(t_0)^2}{2}.$$

Derivando esta relación

$$ml^2 \alpha'(t) \alpha''(t) = -mgl \alpha'(t) \sin \alpha(t).$$

De esto deducimos la ecuación del péndulo

$$\alpha''(t) = -\frac{g}{l} \sin \alpha(t).$$

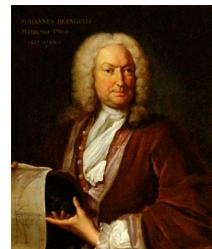
### 1.7.5. La braquistócrona

**Problema 2.**

Dados dos puntos  $A$  y  $B$  en las proximidades de la superficie terrestre, uno mas abajo respecto al suelo que el otro, queremos diseñar el tobogán óptimo entre los dos, esto es el tobogán que nos lleve de  $A$  hasta  $B$  en el menor tiempo. La curva solución a este problema se llama curva braquistócrona (braquistos - el más corto, cronos - tiempo).



- ☒ Este problema fue resuelto por primera vez por Johann Bernoulli y es unos de los problemas precursores de la rama de las matemáticas que se denomina cálculo de variaciones . Vamos a dar la solución del problema encontrada por Johann Bernoulli que es muy elegante y está basada en un resultado de óptica llamado el Principio de Mínimo Tiempo de Fermat .
- ☒
- ☒



Johann Bernoulli  
(1667-1748)



**Principio de Mínimo Tiempo de Fermat**

La luz sigue para ir de un punto a otro el recorrido que minimiza el tiempo.



Pierre de Fermat  
(1601-1665)

- ☒ La primera impresión es que ese recorrido debería ser la línea recta. Si embargo esto no es así debido a que la velocidad de la luz cambia de acuerdo al medio que atraviesa . La velocidad de la luz en el vacío es 299.792,458km/h y en el diamante 124.034,943 km/h. La velocidad de la luz cambia no sólo con la sustancia sino con sus cualidades, como la densidad.

Si la luz se mueve dentro de un medio homogéneo, el camino que sigue es la línea recta. Esto ya no es más así cuando la luz cambia de medio de propagación. Por ejemplo cuando pasa del aire al vidrio.

Supongamos que la luz une los puntos  $A$  y  $B$  del plano  $y$  en el camino atraviesa de un medio a otro, siendo la velocidad de la luz en cada uno de ellos  $v_1$  y  $v_2$ . Supongamos que  $A = (a, 0)$  y  $B = (c, b)$  y el eje  $x$  es la frontera entre los medios.

Como sabemos que mientras se mueva en un medio homogéneo la luz sigue en línea recta, el tiempo que emplea la luz para ir  $A$  a  $B$  es

$$t = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(c-x)^2 + b^2}}{v_2}$$

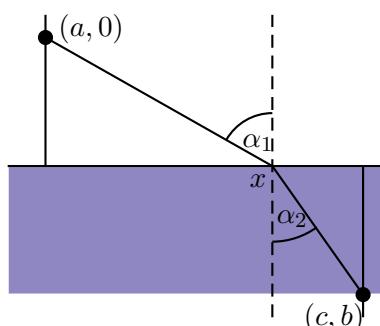


Figura 1.5: Refracción de la luz

Para determinar la trayectoria es suficiente encontrar  $x$ , el punto donde la luz choca con la interfaz entre los medios. El principio de Fermat afirma que el tiempo es mínimo de modo que hallaremos un punto crítico de  $t$  respecto a  $x$ .

$$\frac{dt}{dx} = -\frac{c-x}{\sqrt{(c-x)^2 + b^2 v_2}} + \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2} v_1} = \frac{\sin \alpha_1}{v_1} - \frac{\sin \alpha_2}{v_2}$$

Deducimos que en un punto crítico

$$\frac{\sin \alpha_1}{v_1} = \frac{\sin \alpha_2}{v_2} \quad (1.17)$$

- ☒ que se denomina Ley de Snell . El punto crítico es mínimo pues  $\frac{dt}{dx}|_{x=0} = -\frac{c}{bv_2} < 0$  y  $\frac{dt}{dx}|_{x=c} = \frac{c}{\sqrt{c^2+a^2}v_1} > 0$ .  
A la razón entre la velocidad de la luz dentro de un determinado medio y la velocidad de la luz en el vacío se lo denomina índice de refracción y se lo denota con la letra  $n$ . La Ley de Snell se la suele escribir

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2.$$

Que pasa si la luz atraviesa un medio que va cambiando de manera continua de índice de refracción. Por ejemplo, el índice de refracción en la atmósfera va cambiando de manera continua con la altitud respecto a la superficie terrestre, ya que la densidad del aire va cambiando con la altitud. La Ley de Snell en este caso es

$$\frac{\sin \alpha}{v} = \text{cte}$$

Aquí el ángulo  $\alpha$  y la velocidad  $v$  cambian respecto a alguna variable/s real/es, por ejemplo la altitud.

¿Qué tienen en común el recorrido de la luz y la braquistócrona? Bernoulli se dió cuenta que la situación en los dos casos es la misma, ya que en los dos casos se trata de minimizar el tiempo del recorrido. De modo que la braquistócrona también tiene que satisfacer la Ley de Snell. Ahora supongamos un sistema de coordenadas con origen en el punto  $A$ , inicial del recorrido. Además supongamos que el móvil parte del reposo. Con estas suposiciones  $x(t_0) = 0$  y  $v(t_0) = 0$ . Por la conservación de la energía

$$\frac{m}{2} |v(t)|^2 = -mg y(t) = mg|y(t)|.$$

Así por la ley de Snell

$$\frac{\sin \alpha}{|v(t)|} = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{2g|y|}} = c = \text{cte.}$$

En (1.15) habíamos expresado el  $\cos \alpha$  (en realidad del ángulo opuesto por el vértice, pero es igual) mediante la derivada. Luego

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{1}{\sqrt{1 + y'(x)^2}}.$$

Entonces tenemos

$$\sqrt{2g|y|} \sqrt{1 + y'(x)^2} = c = \text{cte}$$

Despejando llegamos a la ecuación diferencial

$$\sqrt{\frac{y}{c-y}} y' = 1.$$

Es una ecuación con variables separables. La constante  $c$  no tiene el mismo valor que en la ecuación anterior.

La solución se obtiene resolviendo la integral

$$x = \int dx = \int \sqrt{\frac{y}{c-y}} dy.$$

lo que no es tan sencillo. Hacemos el cambio de variables

$$\sqrt{\frac{y}{c-y}} = \tan \phi \implies y = c \sin^2 \phi \implies dy = 2c \sin \phi \cos \phi d\phi.$$

Luego

$$x = 2c \int \sin^2 \phi d\phi = \frac{c}{2} (2\phi - \sin 2\phi) + C_1.$$

Como tiene que pasar por  $x = 0$  e  $y = 0$  debe ser  $C_1 = 0$ . Tenemos que

$$\begin{cases} y &= c \sin^2 \phi \\ x &= \frac{c}{2}(2\phi - \sin 2\phi) \end{cases} = \frac{c}{2}(1 - \cos 2\phi)$$

Conviene llamar  $2\phi = \theta$  y  $a = c/2$

$$\begin{cases} y &= a(1 - \cos \theta) \\ x &= a(\theta - \sin \theta) \end{cases}$$

Que son la ecuaciones paramétricas de una curva conocida con el nombre de  cicloide. Podemos usar SymPy para graficar esta curva

```
1 theta=symbols('theta')
2 from sympy.plotting import *
3 plot_parametric(theta-sin(theta),1-cos(theta),(theta,0,10*pi))
```

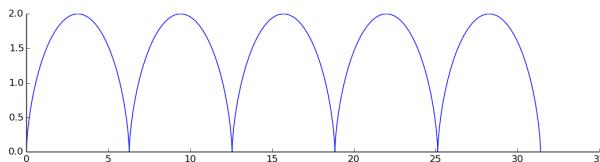


Figura 1.6: Cicloide

Figura 1.7: Cicloide

Si intentamos resolver las ecuaciones con SymPy el resultado no es muy atractivo.

```
1 x,c=symbols('x,c')
2 y=Function('y')(x)
3 MiEcua=Eq(y.diff(x),sqrt((c-y)/y))
f=dsolve(MiEcua,y,hint='separable')
```



**Resultado:**

$$\begin{cases} -i\sqrt{c}\sqrt{-1 + \frac{1}{c}y(x)}\sqrt{y(x)} - ic \operatorname{acosh}\left(\frac{1}{\sqrt{c}}\sqrt{y(x)}\right) & \text{for } \left|\frac{1}{c}y(x)\right| > 1 \\ \frac{\sqrt{c}\sqrt{y(x)}}{\sqrt{1 - \frac{1}{c}y(x)}} + c \operatorname{asin}\left(\frac{1}{\sqrt{c}}\sqrt{y(x)}\right) + \frac{y^{\frac{3}{2}}(x)}{\sqrt{c}\sqrt{1 - \frac{1}{c}y(x)}} & \text{otherwise} \end{cases} = C_1 + x$$

## 1.8 Ecuaciones homogéneas

Volvemos al problema de resolver ecuaciones de primer orden. Abordamos un nuevo método.

**Definición 1 (Funciones homogéneas).**

Una función  $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  se dice homogénea de grado  $\alpha$  si

$$f(rx, ry) = r^\alpha f(x, y).$$

**Ejemplo 15.**

- $f(x, y) = \frac{y}{x}$  es homogénea de grado 0.
- Más generalmente, cualquier función  $f(x, y)$  que dependa sólo de  $x/y$ , esto es que se escriba de la forma  $f(x, y) = g(y/x)$  es homogénea de grado 0. Así  $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$  es homogénea de grado 0 pues  $\frac{x-y}{x+y} = \frac{1-x/y}{1+x/y}$
- $f(x, y) = \sum_{k=0}^n a_k x^k y^{n-k}$  es homogénea de grado  $n$ .

**Definición 2 (Ecuaciones homogéneas).**

Una ecuación

$$y' = f(x, y) \quad (1.18)$$

tal que  $f$  es homogénea de grado 0 se llamará ecuación homogénea.

Si una ecuación del tipo (1.18) es homogénea entonces se transforma en una ecuación separable mediante el cambio de variable dependiente  $z = y/x$ . En efecto, para  $x \neq 0$

$$f(x, y) = x^0 f\left(1, \frac{y}{x}\right) = f(1, z)$$

y

$$y' = z'x + z$$

Como  $y' = f(x, y)$  tenemos

$$z'x + z = f(1, z) \implies \frac{dz}{f(1, z) - z} = \frac{dx}{x}. \quad (1.19)$$

**Ejemplo 16.** Resolver  $y' = \frac{x+y}{x-y}$ .

La ecuación (1.19) queda

$$\begin{aligned} \frac{dx}{x} &= \frac{dz}{\frac{1+z}{1-z} - z} = \frac{(1-z)dz}{1+z^2} \\ &\Downarrow \\ \ln|x| + C &= \arctan(z) - \frac{1}{2} \ln|1+z^2| \end{aligned}$$

## 1.9 Ecuaciones exactas

**Definición 1** (Diferencial).

Dada una función  $f$  de  $n$  variables independientes  $x_1, \dots, x_n$  definimos su diferencial por

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n. \quad (1.20)$$

Esta definición obviamente carece de rigor pues el miembro de la derecha en (1.20) contiene las expresiones indefinidas  $dx_j$ . La diferencial puede ser definida ↗ con toda corrección, es un ejemplo de forma diferencial, en particular es una 1-forma. En la unidad que sigue hablaremos un poco más del concepto de forma diferencial. El uso que haremos de las formas diferenciales es muy elemental, podríamos evitar por completo su uso al costo de usar una notación ligeramente menos compacta y simétrica.

Es costumbre escribir una ecuación diferencial como la 1-forma diferencial

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (1.21)$$

Que corresponde a la ecuación, escrita de manera tradicional,  $y' = -M(x, y)/N(x, y)$ .

Dada  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , satisfaciendo las condiciones del Teorema de la Función Implícita, la expresión

$$f(x, y) = c \quad (1.22)$$

define una familia paramétrica de curvas, con parámetro  $c$ . Derivando la expresión podemos representar esta familia como soluciones de la EDO

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = 0 \iff \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0 \iff df = 0.$$

Esto nos sugiere la idea de que, dada una ecuación diferencial cualquiera, indaguemos si se puede escribir, o puede ser transformada de alguna manera en, una ecuación de la forma  $df = 0$ . Para que la ecuación (1.21), se pueda expresar como  $df = 0$  se debe cumplir que  $M = \partial f / \partial x$  y  $N = \partial f / \partial y$ . Vale decir el campo vectorial  $(x, y) \mapsto (M(x, y), N(x, y))$  es un campo gradiente o conservativo, con potencial  $f$ .

No todo campo es un campo gradiente, recordemos el siguiente teorema de Cálculo III

**Teorema 1** (Caracterización de campos conservativos).

Sea  $\mathcal{O}$  un conjunto abierto y simplemente conexo de  $\mathbb{R}^n$ . Son equivalentes

- A. El campo  $F : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un gradiente.
- B. Si  $C$  es cualquier camino cerrado entonces

$$\oint_C F \cdot dx = 0.$$

C.

$$\frac{\partial F^i}{\partial x_j} = \frac{\partial F^j}{\partial x_i}, \quad \text{para } i, j = 1, \dots, n$$

Pensando al campo  $F$  como un campo de fuerzas sobre el espacio euclídeo tridimensional, el ítem B expresa que el trabajo realizado por la fuerza a lo largo de un camino cerrado es cero. El ítem C afirma que  $\nabla \times F = 0$ , la fuerza es irrotacional.

El ítem C es simple de chequear. Una vez establecido que un campo es conservativo tendremos el problema de hallar el potencial  $f$ . Ilustremos esto con el campo  $(x, y) \mapsto (M(x, y), N(x, y))$ . Supongamos que  $\mathcal{O}$  es abierto de  $\mathbb{R}^2$  y

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}, \quad \text{para } (x, y) \in \mathcal{O}.$$

En primer lugar debemos tener un campo escalar  $f$  tal que

$$M = \frac{\partial f}{\partial x} \Rightarrow f = \int M dx + C(y).$$

Ahora como  $f_y = N$

$$N = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \int M dx + C(y) \right) \Rightarrow C'(y) = N - \frac{\partial}{\partial y} \int M dx.$$

Para que esta ecuación tenga solución  $N - \frac{\partial}{\partial y} \int M dx$  debe ser sólo función de  $y$ . Pero la condición necesaria y suficiente para ello es

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial x} \left( N - \frac{\partial}{\partial y} \int M dx \right) \\ &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \int M dx \\ &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \int M dx \\ &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}. \end{aligned}$$

Pero estamos bajo ese supuesto, entonces

$$f = \int M dx + \int \left( N - \frac{\partial}{\partial y} \int M dx \right) dy. \quad (1.23)$$

**Ejemplo 17.** Resolver  $e^y dx + (xe^y + 2y)dy = 0$ .

**Solución:** Aquí

$$M = e^y \quad y \quad N = xe^y + 2y.$$

Así

$$\frac{\partial M}{\partial y} = e^y = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

La ecuación es exacta. El potencial  $f$  debe cumplir

$$f = \int e^y dx = xe^y + C(y).$$

Luego

$$C(y) = \int \left( xe^y + 2y - \frac{\partial}{\partial y} xe^y \right) dy = y^2$$

Tener en cuenta que la función potencial  $f$  no es única, queda determinada hasta una constante aditiva de integración que podemos elegir a gusto ya que debemos encontrar sólo un potencial. Entonces podemos tomar

$$f = xe^y + y^2.$$

La solución general de la ecuación estará dada por

$$xe^y + y^2 = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Como no sabemos despejar  $y$  de aquí dejamos indicada de esta manera la solución.

## 1.10 Factores integrantes

**Factores integrantes** Las ecuaciones exactas son raras, no obstante tenemos un recurso para llevar algunas ecuaciones no exactas a una equivalente y exacta.

Supongamos que la ecuación (1.21) no es exacta. La idea es encontrar una función  $\mu(x, y)$  llamada factor integrante que haga exacta la ecuación

$$\mu(Mdx + Ndy) = 0.$$

Para ello se debe cumplir que

$$\frac{\partial \mu M}{\partial y} = \frac{\partial \mu N}{\partial x} \iff \left[ \mu \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial \mu}{\partial y} M = \frac{\partial N}{\partial x} \mu + N \frac{\partial \mu}{\partial x} \right]. \quad (1.24)$$

**Proposición 1** (Existencia de factores integrantes).

Toda ecuación de primer orden (1.21), con  $N \neq 0$ , que tiene una solución general que se escribe como en (1.22), con  $\partial f / \partial y \neq 0$  tiene un factor integrante.

*Comentario:* La suposición  $N \neq 0 \neq \frac{\partial f}{\partial y}$ , es razonable pues  $N = 0$  implicaría que no podemos despejar  $y'$  de (1.21) y  $\partial f / \partial y$  contradice las hipótesis del Teorema de la Función Implícita, herramienta necesaria para suponer que  $y$  es función de  $x$ .

*Dem.* Si derivamos (1.22) conseguimos

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0.$$

De esta ecuación y (1.21) vemos que

$$-\frac{M}{N} = y' = -\frac{\partial f / \partial x}{\partial f / \partial y} \implies \frac{\partial f / \partial x}{M} = \frac{\partial f / \partial y}{N} =: \mu(x, y)$$

De la igualdad de arriba se deduce que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \mu M \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \mu N.$$

Es decir  $\mu$  es factor integrante.  $\square$

La proposición anterior nos dice que, mientras la ecuación sea resoluble, siempre existe un factor integrante. Pero no ayuda a hallarlo dado que parte de la solución que es lo que queremos hallar. Otra alternativa es resolver la ecuación (1.24) que es una ecuación en derivadas parciales para  $\mu$ , que normalmente es más difícil que resolver la original. Así, mientras que el método es siempre aplicable, en la práctica es útil en situaciones específicas.

Hay que señalar que sólo necesitamos una solución de (1.24) y no su solución general. En la práctica se suele hacer alguna suposición sobre  $\mu$  que simplifique

la expresión. Es decir proponer alguna forma específica para  $\mu$  que haga la ecuación (1.24) más sencilla de resolver. Por supuesto, a priori el factor integrante, si bien existe, no tiene ninguna forma predeterminada. Lo que hacemos es lo que en lenguaje culto se conoce como ansatz, y en lenguaje coloquial, que aquí es más significativo, estamos haciendo un lance o tratando de adivinar  $\mu$ , sin mucho más criterio que buscarlo entre esas funciones con una forma (simple) predeterminada. Por ejemplo, es común suponer que  $\mu$  es sólo función de una de las variables. Si por ejemplo asumimos que  $\mu = \mu(x)$  la ecuación (1.24) se escribe

$$\mu \frac{\partial M}{\partial y} = \mu \frac{\partial N}{\partial x} + N \mu'(x) \implies \boxed{\frac{\mu'}{\mu} = \frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N}}$$

Este ansatz no siempre funcionará, para que lo haga, la función en el segundo miembro  $(\partial M/\partial y - \partial N/\partial x)/N$  debe depender sólo de  $x$ . Si eso ocurre

$$\mu(x) = e^{\int \frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N} dx}. \quad (1.25)$$

es un factor integrante. Recordar que sólo necesitamos hallar uno, por ese motivo omitivos constantes de integración.

De manera similar, si la función

$$\frac{\partial N/\partial x - \partial M/\partial y}{M}$$

depende sólo de  $y$  tenemos que

$$\mu(y) = e^{\int \frac{\partial N/\partial x - \partial M/\partial y}{M} dy}$$

es un factor integrante que, en este caso, sólo depende de  $y$ .

**Ejemplo 18.**  $ydx + (x^2y - x)dy = 0$ .

Primero chequeemos la posible exactitud.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 \text{ y } \frac{\partial N}{\partial x} = 2xy - 1 \implies \text{no exacta.}$$

Ahora

$$\frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N} = \frac{2 - 2xy}{x(xy - 1)} = -\frac{2}{x}.$$

El factor integrante es

$$\mu(x) = e^{-2 \ln|x|} = \frac{1}{x^2}.$$

## 1.11 Otras Técnicas relacionadas con exactitud

Veamos otra forma de trabajar para transformar ecuaciones no exactas en exactas. Esta forma no es metódica, sino que depende de la habilidad de quien la lleva adelante en encontrar la similitud de la ecuación diferencial con alguna expresión exacta conocida. Ilustraremos esto con el ejemplo anterior  $ydx + (x^2y - x)dy = 0$ . Escrita de este modo no se advina ninguna similitud. Pero si la escribimos

$$x^2ydy - (xdy - ydx) = 0.$$

Recordando que

$$d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{xdy - ydx}{x^2}.$$

Lo que sugiere dividir por  $x^2$  la ecuación.

$$0 = ydy - \frac{x dy - y dx}{x^2} = d\left(\frac{y^2}{2}\right) - d\left(\frac{y}{x}\right) = d\left(\frac{y^2}{2} - \frac{y}{x}\right).$$

La solución general es pues

$$\frac{y^2}{2} - \frac{y}{x} = c.$$

Se obtienen otras formas diferenciales exactas derivando expresiones sencillas

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2} \quad \text{nada nuevo} \quad (1.26)$$

$$d(xy) = ydx + xdy \quad (1.27)$$

$$d(x^2 + y^2) = 2(xdx + ydy) \quad (1.28)$$

$$d\left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right) = \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} \quad \text{falla caracterización pag (1)!!! Qué ocurre?}$$

$$d\left(\ln\left(\frac{y}{x}\right)\right) = \frac{ydx - xdy}{xy} \quad (1.29)$$

**Ejemplo 19.** *Espejos, antenas parabólicos.* Hallar la forma del espejo curvo tal que el reflejo de todo haz de luz que viaja paralelo al eje  $x$  con dirección negativa respecto a este eje pasa por el  $(0, 0)$ .

**Ejercicio.** Dejamos como ejercicio demostrar que un haz de luz que se refleja sobre un espejo lo hace de tal manera que los ángulos que se forman con los rayos de incidencia y refracción y la tangente al espejo en el punto de incidencia son iguales ( $\beta = \alpha$  en el dibujo). Para resolver esto hay que usar el principio de mínimo tiempo

de Fermat  
Solución. Sea  $(x, y)$  el punto de incidencia.  
Apelando a la geometría elemental,  $\phi = \beta$  y  $\theta = \alpha + \phi = 2\beta$ . Como  $\tan \theta = \frac{y}{x}$  y como

$$\tan \theta = \tan 2\beta = \frac{2 \tan \beta}{1 - \tan^2 \beta},$$

deducimos que

$$\frac{y}{x} = \frac{2dy/dx}{1 - (dy/dx)^2}.$$

Figura 1.8: Reflejo en un espejo cur-

vo  
Despejando

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x \pm \sqrt{x^2 + y^2}}{y}.$$

Podemos escribir la ecuación de este otro modo

$$xdx + ydy = \pm \sqrt{x^2 + y^2} dx.$$

Tomando en cuenta (1.28)

$$\pm \frac{d(x^2 + y^2)}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = dx.$$

Si  $r = x^2 + y^2$

$$dx = \pm \frac{dr}{2\sqrt{r}} = \pm d\sqrt{r} = \pm d\sqrt{x^2 + y^2}$$



Figura 1.9: Antena parabólica

Las solución general es

$$\pm\sqrt{x^2 + y^2} = x + c.$$

Elevando al cuadrado ambos miembros

$$y^2 = 2xc + c^2 = 2c\left(x + \frac{c}{2}\right)$$

Que es la familia de todas las paráolas con eje de simetría  $x$ , positivamente orientadas y con foco en  $(0, 0)$ .

## 1.12 Ecuaciones Lineales

### Definición 1 (Ecuación lineal).

Se llama ecuación diferencial lineal a una ecuación que es lineal respecto a la/s variables dependientes. La siguiente es la ecuación diferencial lineal general de primer orden

$$y' + p(x)y = q(x) \quad (1.30)$$

y la de segundo orden

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x). \quad (1.31)$$

Aquí  $p$ ,  $q$  y  $r$  son funciones de  $x$  usualmente definidas sobre un intervalo abierto de  $\mathbb{R}$ .

La ecuación puede ser no lineal respecto a la variable independiente.

Es costumbre introducir los operadores diferenciales  $L_1[y] = y' + py$  y  $L_2[y] = y'' + py' + qy$ . Para una ecuación lineal, los operadores  $L_1$  y  $L_2$  son lineales. Es decir,  $L_1[y_1 + y_2] = L_1[y_1] + L_1[y_2]$ .

Vamos a resolver la ecuación lineal de primer orden (1.30). Esto es sencillo pues la forma diferencial asociada

$$dy + (p(x)y - q(x))dx = 0 \quad (1.32)$$

tiene un factor integrante que depende sólo de  $x$ . En efecto como  $M = p(x)y - q(x)$  y  $N = 1$ ,

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{\partial M / \partial y - \partial N / \partial x}{N} = p(x).$$

Entonces  $\mu(x) = e^{\int pdx}$  es factor integrante. Luego si multiplicamos por  $\mu$  en (1.32), la expresión es exacta.

$$e^{\int pdx} dy + p(x)e^{\int pdx} y dx = q(x)e^{\int pdx} dx.$$

Podemos identificar rápidamente, sin necesidad de hacer cálculos, el correspondiente potencial.

$$d\left(e^{\int pdx} y\right) = d\left(\int q(x)e^{\int pdx} dx\right).$$

Integrando

$$e^{\int pdx} y = \int e^{\int pdx} q(x) dx + C.$$

Entonces

$$y = e^{-\int pdx} \left\{ \int e^{\int pdx} q(x) dx + C \right\} \quad (1.33)$$

**Ejemplo 20.** Resolver  $y' + y/x = 3x$ .

**Solución.** En la práctica, para evitar recordar fórmulas, se suele repetir el procedimiento que lleva a la fórmula (1.33), ahora, dado la cercanía de su derivación, vamos a usarla de manera directa. La solución general es

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-\int \frac{1}{x} dx} \left\{ \int e^{\int \frac{1}{x} dx} 3x dx + C \right\} \\ &= \frac{1}{|x|} \left\{ \int |x| 3x dx + C \right\} \\ &= x^2 + \frac{C}{|x|} \\ &= x^2 + \frac{C}{x} \end{aligned}$$

## 1.13 Reducción de orden

---

Algunas ecuaciones de segundo orden

$$F(x, y, y', y'') = 0 \quad (1.34)$$

se pueden reducir a una de primer orden. Por ejemplo si  $F$  no depende de  $y$ . Es decir la ecuación es

$$F(x, y', y'') = 0 \quad (1.35)$$

Aquí introducimos la nueva variable dependiente  $p = y'$ , que resuelve

$$F(x, p, p') = 0.$$

Que es una ecuación de primer orden. Supuesto que la podemos resolver y encontrar una solución general para  $p$ , tendremos

$$y = \int pdx + C \quad (1.36)$$

Es la solución general de la ecuación de segundo orden.

Si la ecuación general de segundo orden (1.34) no depende de  $x$ , es decir tenemos

$$F(y, y', y'') = 0 \quad (1.37)$$

entonces nuevamente usaremos  $p = y'$  como nueva variable dependiente pero también  $y$  como nueva variable independiente. Como

$$y'' = p' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} p$$

La ecuación se reduce a la siguiente ecuación de primer orden

$$F \left( y, p, \frac{dp}{dy} p \right) = 0 \quad (1.38)$$

## 1.14 SymPy

**Función SymPy (Clasificación de EDO).**

**Sintaxis:** `classify_ode(Eq)`  
**Eq:** ecuación.

El output son los métodos que se le pueden aplicar

```
1 from sympy import *
2 x=symbols('x')
3 y=Function('y')(x)
4 classify_ode(y.diff() + y)
```

**Resultado:**

```
('separable', '1st_exact', '1st_linear',
'almost_linear', '1st_power_series', 'lie_group',
'nth_linear_constant_coeff_homogeneous',
'separable_Integral', '1st_exact_Integral',
'1st_linear_Integral', 'almost_linear_Integral')
```

```
1 Ecuacion=Eq((x**2*y-x)*sin((y.diff(x,1)))**3\
2 +y**5+x**3*sin(y),0)
3 classify_ode(Ecuacion)
```

El único método que puede aplicar SymPy a la ecuación

$$(x^2y - x) \operatorname{sen}^3(y') + y^5 + x^3 \operatorname{sen}(y) = 0,$$

es ('lie\_group',)

```
1 dsolve(Ecuacion,y)
```

**Resultado:** Piensa, piensa pero no llega a nada.

```
1 >>>Ecuacion=Eq(y.diff() + (-x+sqrt(x**2+y**2))/y,0)
2 >>>classify_ode(Ecuacion)
3 ('1st_homogeneous_coeff_best',
4 '1st_homogeneous_coeff_subs_indep_div_dep',
5 '1st_homogeneous_coeff_subs_dep_div_indep',
6 '1st_power_series', 'lie_group',
7 '1st_homogeneous_coeff_subs_indep_div_dep_Integral',
8 '1st_homogeneous_coeff_subs_dep_div_indep_Integral')
```

```
>>>dsolve(Ecuacion,y,hint='lie_group')
```

**Resultado:** Piensa rato largo y:

```
1 The given ODE  $(-x + \sqrt{x^2 + y(x)^2})/y(x) + \operatorname{Derivative}(y(x), x)$ 
cannot be solved by the lie group method
```

```
>>>sol=dsolve(Ecuacion,y,hint='1st_homogeneous_coeff_best')
```

$$y(x) = C_1 e^{\int \frac{x}{y(x)} - \frac{u_2}{u_2^2 - u_2 \sqrt{u_2^2 + 1 - 1}} du_2 + \int \frac{x}{y(x)} \frac{\sqrt{u_2^2 + 1}}{u_2^2 - u_2 \sqrt{u_2^2 + 1 - 1}} du_2}$$

## 1.15 Ejemplos

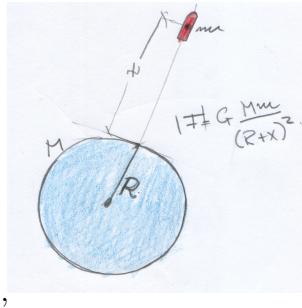
### 1.15.1. Velocidad de escape

**Problema 1 (Velocidad de escape).**

Que velocidad hay que imprimirle a un proyectil que es lanzado verticalmente desde la superficie de la Tierra si nuestra pretensión es que el proyectil se escape al infinito. La velocidad más chica con esta cualidad se llama velocidad de escape.

**Solución.** Para resolver este problema hay que tomar en consideración la Ley de gravedad universal de Newton. En la parte que nos interesa, esta Ley afirma que el módulo de la fuerza de gravedad que se ejercen entre si dos cuerpos de masa  $m_1$  y  $m_2$  separados una distancia  $r$  es proporcional al producto de las masas e inversamente proporcional al cuadrado de las distancias que los separa. Vale decir

$$|F| = G \frac{m_1 m_2}{r^2},$$



donde  $G$  es la constante de proporcionalidad. Cuando los cuerpos no son puntos masa, sino cuerpos extendidos en el espacio, la distancia de separación hay que medirla entre los centros de masa de los cuerpos.

Hay que aclarar que usando el Principio conservación energía mecánica podemos resolver el problema de una manera más simple. Incluso podemos ver que la suposición de que el tiro es vertical no es necesaria, es decir la velocidad de escape es la misma aunque el tiro sea oblicuo. Discutiremos esa solución durante la clase. Lamentablemente, esta solución no usa ecuaciones diferenciales. Vamos a dar una solución, quizás un poco más complicada, pero que invoca las técnicas discutidas.

Supondremos a la Tierra una esfera de radio  $R$ , masa  $M$  y su centro de masa en el centro de la esfera. Al proyectil lo supondremos un punto masa con masa  $m$  y su posición en el momento  $t$ , denotada  $x = x(t)$ , la mediremos sobre un eje vertical con origen en la superficie de la Tierra. Todo como está indicado en la página 1.15.1. Luego la distancia Tierra-proyectil será igual a  $R + x$  donde  $x$  es la posición del proyectil. Utilizando la Segunda ley de Newton,  $F = ma$ , obtenemos

$$mx''(t) = -\frac{GMm}{(R+x)^2}.$$

Es una ecuación de la forma

$$F(t, x, x', x'') = 0.$$

Con variable dependiente  $x$  e independiente  $t$ . Pero, en realidad no depende de  $t$  y por consiguiente, como vimos, se puede convertir en una ecuación de primer orden tomando como nuevas variables: 1) independiente  $x$  2) dependiente  $v = x'$ . En estas variables

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx}.$$

La ecuación se convierte en

$$v \frac{dv}{dx} = -\frac{GM}{(R+x)^2} \implies v dv + \frac{GM}{(R+x)^2} dx = 0.$$

Que es una ecuación en variables separables y también es exacta. Usaremos la técnica discutida para ecuaciones exactas<sup>2</sup>, los que nos indica que la solución general se expresa de la siguiente forma

$$\frac{v^2}{2} - \frac{GM}{(R+x)} = E = \text{cte.} \quad (1.39)$$

La igualdad anterior es precisamente consecuencia directa del Principio conservación energía mecánica, lo hemos vuelto a deducir como consecuencia de que la ecuación era exacta. Sea  $v_0$  la velocidad inicial para  $t = 0$ . Como  $E$  es constante y  $x = 0$  en  $t = 0$  debemos tener

$$E = \frac{v_0^2}{2} - GM/R \quad (1.40)$$

Como  $v^2 \geq 0$  y por (1.39) y (1.40).



Figura 1.10: Remera nerd

$$-\frac{GM}{(R+x)} \leq \frac{v^2}{2} - \frac{GM}{(R+x)} = \frac{v_0^2}{2} - \frac{GM}{R}$$

Queremos encontrar  $v_0$  tal que  $x \rightarrow \infty$ . Luego tiene sentido tomar límite cuando  $x \rightarrow \infty$  en la expresión anterior y concluimos

$$0 \leq \frac{v_0^2}{2} - GM/R$$

De aquí deducimos que el valor mínimo de velocidad de escape es el impreso en la remera de la figura 1.10.

### 1.15.2. Curvas de persecución

#### Problema 2 (Curvas de persecución).

Supongamos que un conejo se mueve sobre una línea recta con rapidez uniforme  $a$  y de un punto por fuera de la recta parte un perro que lo persigue con rapidez uniforme  $b$ . Encontrar la trayectoria del perro.

Supongamos que el perro parte del punto  $(c, 0)$ , el conejo de  $(0, 0)$  y la recta sobre la cual se mueve el conejo en dirección positiva es el eje  $y$ . Vamos a suponer que la trayectoria del perro sigue la trayectoria donde la tangente a su movimiento, en un momento dado, intersecta a la posición del conejo correspondiente a ese momento.

Pasado un tiempo  $t$ , el conejo estará en el punto  $(0, at)$  y el perro en un punto de su trayectoria que forma un arco de longitud  $s = bt$

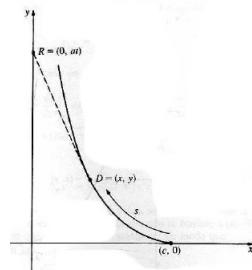


Figura 1.12: Curva persecución

<sup>2</sup>Siempre las ecuaciones en variables separables son exactas pues se escriben de la forma

$$M(x)dx + N(y)dy = 0,$$

por consiguiente tienen potencial

$$f = \int M(x)dx + \int N(y)dy$$

Figura 1.11: Persecución en un pentágono estrellado. Art of Pursuit, Ivars Peterson

hasta el  $(c, 0)$ . Ese punto, donde está el perro, lo denotaremos  $(x, y)$ . Como hemos supuesto que la tangente a la trayectoria del perro en  $(x, y)$  pasa por la posición del conejo  $(0, at)$  se debe cumplir que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - at}{x} \implies xy' - y = -at. \quad (1.41)$$

En esta ecuación hay tres variables,  $t$ ,  $x$  e  $y$ . No hemos definido cuales son independiente y cuales dependientes. Generalmente el tiempo  $t$  se considera variable independiente, pero en la expresión de arriba aparece la derivada de  $y$  respecto a  $x$ . Claramente deberíamos eliminar una de las variables. Conviene eliminar  $t$ , dado que al no aparecer en la derivación no tendremos que hacer un cambio de variables allí, donde siempre es un poco más engorroso. Por otra parte, la intuición del problema, nos dice que a cada  $t$  corresponde uno, y sólo un,  $x^3$ , lo que indica que  $t$  es función de  $x$  y por consiguiente es de esperar poder escribir la ecuación (1.41) en términos de  $x$  e  $y$ . Tener en cuenta que no es razonable en matemática, como en la política, pensar que lograremos tener un beneficio (menos variables) sin pagar algún precio, pues, como dice el dicho, "Cuando la limosna es grande hasta el santo desconfía". En este caso, el costo que pagaremos es incrementar el orden de la ecuación. Como hemos dado algunas técnicas de resolver ecuaciones de orden dos quizás estemos en condiciones de pagar este precio.

Para eliminar  $t$  de la ecuación derivamos (1.41) respecto a  $x$ , obtenemos

$$xy'' = -a \frac{dt}{dx}.$$

Como  $ds/dt = b$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{dt}{ds} \frac{ds}{dx} = -\frac{\sqrt{1 + y'(x)^2}}{b}.$$

Hemos usado la relación  $s = \int_x^c \sqrt{1 + y'^2} dx$ . Entonces

$$xy'' = \frac{a \sqrt{1 + y'(x)^2}}{b}. \quad (1.42)$$

Que es una ecuación que no contiene  $y$ . De modo que usando  $p = y'$  como variable dependiente reducimos el orden de la ecuación. Nos queda

$$\frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = \frac{a}{b} \frac{dx}{x}.$$

---

<sup>3</sup>De lo contrario el perro no se hubiera movido en la dirección horizontal entre dos moementos, lo que es absurdo

Que es una ecuación en variable separables. Tomando la integral definida entre  $c$  y  $x$ , y considerando que si  $x = c$  entonces  $p = 0$ , tenemos

$$\ln \left( p + \sqrt{1 + p^2} \right) = \ln \left( \frac{x}{c} \right)^{\frac{a}{b}}.$$

Si despejamos  $p$  conseguimos

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{x}{c} \right)^{a/b} - \left( \frac{c}{x} \right)^{a/b} \right]. \quad (1.43)$$

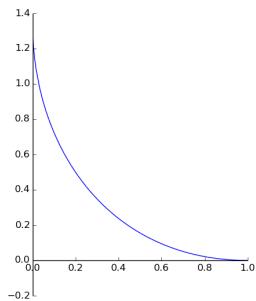
Para hallar  $y$  hay que recordar que  $y' = p$  e  $y(1) = 0$ .

Usemos SymPy para completar este cálculo y hacer los gráficos. El siguiente código evalúa la integral, halla la constante de integración para que  $y(1) = 0$  y grafica.

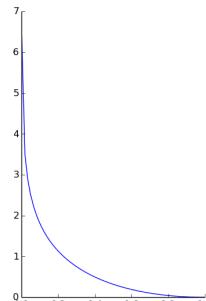
```

1 from sympy import *
2 x=symbols('x', real=True)
3 a=Rational(2)
4 b=Rational(1)
5 c=Rational(1)
6 y=integrate((x/c)**(a/b)-(c/x)**(a/b),x)
7 C=symbols('C')
8 C=solve(y.subs(x,1)+C,C)[0]
9 plot(y+C,(x,0.001,1))
```

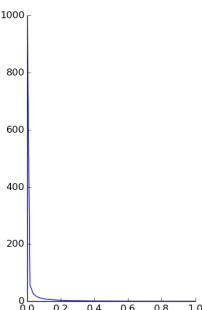
Los resultados son:



$$a < b$$



$$a = b$$



$$a > b$$

Lo anterior constituye un ejemplo de lo que se conoce como curva de persecución. Este es un tema muy interesante que tiene varias generalizaciones, por ejemplo el problema de los ratones donde se colocan en cada vértice de un polígono ratones cada uno de

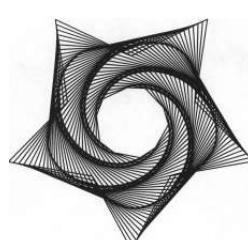


Figura 1.13: Persecución en un pentágono estrellado. Art of Pursuit, Ivars Peterson

los cuales persigue al vecino en sentido antihorario (u horario, da lo mismo). Se consiguen patrones geométricos muy bellos

## 1.16 Oscilador armónico

Un oscilador armónico es el más simple de los sistemas físicos vibratorios. Podemos definirlo como un sistema elástico que obedece a la Ley de elasticidad de Hooke, en honor a su descubridor Robert Hooke.

Suele citarse al resorte como un ejemplo familiar de oscilador armónico. Esto debido a que, cuando las oscilaciones de un resorte son pequeñas, se satisface aproximadamente la Ley de elasticidad de Hooke. Esta ley afirma que la fuerza que ejerce un resorte sobre una masa  $m$  conectada a él por uno de sus extremos es proporcional en magnitud al desplazamiento del resorte desde la posición de equilibrio. Además la fuerza de elasticidad actúa en sentido opuesto al desplazamiento.

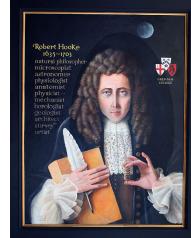


Figura 1.14: Robert Hooke

Figura 1.15: Resorte

Supongamos que tenemos un resorte, en uno de sus extremos fijado en una pared y unido a una masa  $m$  por el otro extremo. Supongamos que no actúa otra fuerza sobre la masa. Ver la animación de la figura 1.15. Pongamos un eje de coordenadas en la dirección del movimiento, con origen en la posición de equilibrio del resorte. Esta posición es el punto donde el resorte no ejerce fuerza. Supongamos que la dirección positiva es la dirección donde el resorte se expande. Denotemos por  $x(t)$  la posición de la masa en el momento  $t$ . Entonces según la Segunda Ley de Newton y la Ley de Elasticidad de Hooke, tenemos que

$$mx''(t) = -kx(t). \quad (1.44)$$

La constante de proporcionalidad  $k$  se llama constante elástica. La ecuación (1.44) se denomina la ecuación del oscilador armónico o ecuación del resorte.

La ecuación del oscilador armónico se escribe  $0 = f(t, x, x', x'')$ , donde  $f(t, x, y, z) = kx + mz$  es independiente de  $t$ . Podemos intentar usar  $x$  como variable independiente y  $z = x'$  como dependiente. Como vimos  $x''(t) = dz/dt = dx/dxz$ . Así la ecuación queda

$$\begin{aligned} m \frac{dz}{dx} z = -kx &\implies mzdz = -kxdx \implies m \frac{z^2}{2} = -k \frac{x^2}{2} + C_1 \\ &\implies z = \pm \sqrt{-\frac{k}{m}x^2 + C_1} \\ &\implies x'(t) = \pm \sqrt{-\frac{k}{m}x^2 + C_1}. \end{aligned}$$

Debe ser  $C_1 \geq 0$  de lo contrario el dominio de la función sería vacío. Nos queda una nueva ecuación para  $x'$ . Esta ecuación es en variables separables

$$\frac{dx}{\sqrt{-\frac{k}{m}x^2 + C_1}} = dt.$$

Integrando

$$\begin{aligned} t + C_2 &= \int \frac{dx}{\sqrt{-\frac{k}{m}x^2 + C_1}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{C_1}} \int \frac{dx}{\sqrt{-\frac{k}{C_1 m}x^2 + 1}} \\ &= \sqrt{\frac{m}{k}} \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \quad \left( \text{haciendo } u = \sqrt{\frac{k}{C_1 m}}x \right) \\ &= \sqrt{\frac{m}{k}} \arcsen u. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} x &= \frac{C_1 m}{k} u = \frac{C_1 m}{k} \sen \left( \sqrt{\frac{k}{m}}(t + C_2) \right) \\ &= \boxed{C_3 \sen \sqrt{\frac{k}{m}}t + C_4 \cos \sqrt{\frac{k}{m}}t}. \end{aligned}$$

Que es la solución general de la ecuación del oscilador armónico. Como vemos el movimiento es oscilatorio con frecuencia

$$\boxed{f = \sqrt{\frac{k}{m}}}.$$

En particular, no importan las condiciones iniciales, la frecuencia es siempre la misma.

## 1.17 EDP, método características

Saber resolver ecuaciones ordinarias de primer orden nos permite resolver algunas ecuaciones en derivadas parciales de primer orden. Vamos a exponer este punto a través del método de características.

Para tener un problema bien planteado con ecuaciones en derivadas parciales no es suficiente conocer el valor de la función en un punto (como en una EDO de primer orden). Una condición típica extra, para lograr este propósito, es consignar el valor de la función a lo largo de una curva, que por simplicidad asumiremos que es una recta .

**Ejemplo 21.**

$$\left. \begin{array}{l} a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = c(x, y, u) \\ u(x, 0) = f(x) \end{array} \right\} \quad (1.45)$$

Aquí  $x, y$  son variables independientes y  $u$  dependiente. La primera línea es la ecuación diferencial, que incluye derivadas parciales de la incognita  $y$  la segunda línea podemos denominarla condición inicial (pensando que la variable  $y$  representa tiempo).

El método de características consiste en encontrar  $u$  a lo largo de las soluciones de la EDO

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b(x, y)}{a(x, y)} \quad (1.46)$$

Una solución de esta ecuación es normalmente una curva en el plano  $x, y$ . La idea es que las soluciones de (1.46) forman una familia uniparamétrica de curvas que llenan una gran parte  $\Omega$  del plano  $x, y$ . Así terminamos conociendo el valor de  $u$  sobre este conjunto  $\Omega$ . Para que (1.46) tenga sentido debemos tener  $a \neq 0$ . De todas formas si  $a = 0$  podemos invertir los roles de  $x$  e  $y$ .

Supongamos  $y(x)$  solución de (1.46), entonces pongamos por abuso de notación  $u(x) = u(x, y(x))$ . Se tiene que

$$\frac{du}{dx} = u_x + u_y y' = u_x + u_y \frac{b}{a} = \frac{c(x, y(x), u(x))}{a(x, y)} \quad (1.47)$$

Que es otra ecuación ordinaria. Podemos escribir (1.46) y (1.47) en una ecuación más simétrica

$$\frac{du}{c} = \frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} \quad (1.48)$$

Estas ecuaciones se llaman *ecuaciones características*. Las soluciones de estas ecuaciones son una familia de curvas que suele llenar un conjunto abierto de  $\mathbb{R}^3$ . La gráfica de la solución se obtiene eligiendo entre estas curvas las que pasan por los puntos de la gráfica de  $u$  especificados en la condición inicial, es decir  $(x, 0, f(x))$ . Esto, en los casos favorables, forma una superficie que es la gráfica de la solución. La proyección de estas curvas en el plano  $x, y$  se denominan *características*. Son la familia de soluciones de  $y' = b/a$ .

**Ejemplo 22.** Resolver

$$\left. \begin{array}{l} u_x + u_y = yu \\ u(x, 0) = f(x) \end{array} \right\} \quad (1.49)$$

En este caso

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} \Rightarrow y' = 1 \Rightarrow y(x) = x + \mu, \quad \mu = \text{cte.}$$

Entonces

$$\frac{du}{dx} = \frac{c}{a} \Rightarrow u' = yu = (x + \mu)u \Rightarrow \ln |u| = \frac{x^2}{2} + \mu x + C(\mu).$$

Notar que la nueva constante de integración  $C(\mu)$  debe depender de la primera  $\mu$ . Entonces

$$u = \pm e^{\frac{x^2}{2}} e^{(y-x)x} e^{C(y-x)}.$$

Ahora

$$u(x, 0) = f(x) \Rightarrow f(x) = \pm e^{\frac{x^2}{2}} e^{-x^2} e^{C(-x)} \Rightarrow C(\mu) = \frac{\mu^2}{2} + \ln |f(-\mu)|.$$

Entonces

$$u(x, y) = \pm e^{\frac{x^2}{2}} e^{(y-x)x} e^{\frac{(y-x)^2}{2} + \ln |f(x-y)|} = e^{\frac{y^2}{2}} f(x - y).$$

# Apéndices

## 1.A La tautócrona

Vamos a ver otra propiedad notable de la cicloide. Supongamos que dejamos caer el cuerpo del reposo desde un punto intermedio, digamos en  $(x_0, y_0)$ . Sea  $\theta_0$  el valor del parámetro  $\theta$  correspondiente a este punto. ¿Cuánto tardara en llegar el cuerpo al punto mínimo de la curva que ocurre cuando  $\theta = \pi$ ?

Tenemos

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\theta} = a(1 - \cos \theta) \\ \frac{dy}{d\theta} = a \sin \theta \end{cases}$$

Como el cuerpo ahora no parte de  $(0, 0)$  tendremos

$$|v| = \sqrt{2g(y_0 - y)}.$$

Por (1.13)  $ds/dt = |v|$ . Si llamamos  $T$  al tiempo que demanda en llegar a  $\theta = \pi$ , y llamamos  $s_0$  y  $s_1$  a los arcos correspondientes al punto inicial y final. Tenemos

$$T = \int_0^T dt = \int_{s_0}^{s_1} \frac{dt}{ds} ds = \int_{s_0}^{s_1} \frac{1}{\sqrt{2g(y_0 - y)}} ds.$$

Cambiando la variable de integración a  $\theta$ . Como

$$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} = \sqrt{2a\sqrt{1 - \cos \theta}}.$$

Tenemos

$$T = \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{\theta_0}^{\pi} \frac{\sqrt{1 - \cos \theta}}{\cos \theta_0 - \cos \theta} d\theta = \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{\theta_0}^{\pi} \frac{\frac{\sin \frac{\theta}{2}}{2}}{\cos^2 \frac{\theta_0}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2}} d\theta.$$

Ahora hacemos la sustitución

$$u = \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta_0}{2}} \implies du = -\frac{\frac{\sin \frac{\theta}{2}}{2}}{2 \cos \frac{\theta_0}{2}} d\theta.$$

Vemos que

$$T = 2\sqrt{\frac{a}{g}} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} du.$$

Que es una expresión independiente de  $\theta_0$ . En consecuencia el tiempo  $T$  que demanda el cuerpo para llegar  $\theta = \pi$  es siempre el mismo no importa desde donde se deje caer.

Figura 1.A.1: Tautócrona

# Bibliografía

Simmons, G. (1991). *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones y Notas Históricas*. McGraw-Hill, Madrid.