Ecuaciones de primer orden

1. Ecuaciones homog[Pleaseinsertintopreamble]neas
2. Ecuaciones exactas
3. Factores integrantes
4. Ecuaciones Lineales
5. Reducción de orden
6. Ejemplos

Ecuaciones homogéneas

Funciones homogéneas

Una función $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice homogénea de grado α si

$$f(rx, ry) = r^{\alpha} f(x, y).$$

Ejemplos

- $f(x, y) = \frac{y}{x}$ es homogénea de grado 0.
- Más generalmente, cualquier función $f(x, y)$ que dependa sólo de x/y, esto es que se escriba de la forma $f(x, y) = g(y/x)$ es homogénea de grado 0. Así $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$ es homogénea de grado 0 pues $\frac{x-y}{x+y} = \frac{1-x/y}{1+x/y}$
- $f(x, y) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k y^{n-k}$ es homogénea de grado n.

Ecuaciones homogéneas

Resolviendo ecuaciones homogéneas

Una ecuación

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

tal que f es homogénea de grado 0 se llamará ecuación homogénea.

Resolviendo ecuaciones homogéneas

Si una ecuación del tipo (1) es homogénea entonces se transforma en una ecuación separable mediante el cambio de variable dependiente $\boxed{z = y/x}$.

Resolviendo ecuaciones homogéneas

En efecto, para $x \neq 0$

$$f(x, y) = x^0 f\left(1, \frac{y}{x}\right) = f(1, z)$$

y

$$y' = z'x + z$$

Como $y' = f(x, y)$ tenemos

$$z'x + z = f(1, z) \Longrightarrow \frac{dz}{f(1, z) - z} = \frac{dx}{x}. \qquad (2)$$

Resolvieno ecuaciones homogéneas

Ejemplo Resolver $y' = \frac{x+y}{x-y}$.
La ecuación (2) queda

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{\frac{1+z}{1-z} - z} = \frac{(1-z)dz}{1+z^2}$$
$$\Downarrow$$
$$\ln|x| + C = \arctan(z) - \frac{1}{2}\ln\left|1+z^2\right|.$$

Ecuaciones exactas

Definición

Dada una función f de n variables independientes $x_1, \ldots, x_n$ definimos su diferencial por

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n.$$

Es costumbre escribir las ecuaciones diferenciales de la siguiente forma, supongamos $f(x, y) = -M(x, y)/N(x, y)$ entonces

$$y' = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)} \leftrightarrows M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0.$$

ECUACIONES EXACTAS

Dada $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la familia paramétrica de curvas

$$f(x, y) = c$$

satisface a ecuación diferencial

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = 0 \iff \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0 \iff df = 0.$$

El recíproco es tambien cierto, esto es una ecuación que se puede expresar como $df = 0$ tiene soluciones dadas por la familia paramétrica de arriba.
Para que una ecuación cualquiera

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

Se pueda expresar como $df = 0$ se debe cumplir que debe existir $f(x, y)$ tal que $M = \partial f / \partial x$ y $N = \partial f / \partial y$.

ECUACIONES EXACTAS

Vale decir el campo vectorial $(x, y) \mapsto (M(x, y), N(x, y))$ es un campo gradiente o conservativo con potencial f. No todo campo es un campo gradiente, recordemos

CARACTERIZACIÓN DE CAMPOS CONSERVATIVOS

Sea $\mathcal{O}$ abierto de $\mathbb{R}^n$ y simplemente conexo. Son equivalentes

1. El campo $F : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^n$ es un gradiente.
2. Si C es un camino cerrado entonces
$$\oint_C F \cdot dx = 0.$$
3. $$\frac{\partial F^i}{\partial x_j} = \frac{\partial F^j}{\partial x_i}, \qquad \text{para } i, j = 1, \ldots, n$$
.

ECUACIONES EXACTAS

El item 3 es particularmente simple de chequear. Una vez establecido con un campo es conservativo tendremos el problema de hallar el potencial f. Ilustremos esto con el campo $(x, y) \mapsto (M(x, y), N(x, y))$. Supongamos que $\mathcal{O}$ es abierto de $\mathbb{R}^2$ y

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}, \quad \text{para } (x, y) \in \mathcal{O}.$$

En primer lugar debemos tener un campo escalar f tal que

$$M = \frac{\partial f}{\partial x} \Rightarrow f = \int M dx + C(y).$$

Ahora como $f_y = N$

$$N = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int M dx + C'(y).$$

ECUACIONES EXACTAS

$$C'(y) = N - \frac{\partial}{\partial y} \int M dx.$$

Para que esta ecuación tenga solución $N - \frac{\partial}{\partial y} \int M dx$ debe ser sólo función de y. Pero la condición necesaria y suficiente para ello es

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial x} \left(N - \frac{\partial}{\partial y} \int M dx \right) \\ &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \int M dx \\ &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \int M dx \\ &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}. \end{aligned}$$

ECUACIONES EXACTAS

Pero estamos bajo ese supuesto, entonces

$$C(y) = \int \left(N - \frac{\partial}{\partial y} \int M dx \right) dy. \tag{3}$$

Ejemplo Resolver $e^y dx + (xe^y + 2y)dy = 0$.
Solución Aquí

$$M = e^y \quad \text{y } N = xe^y + 2y.$$

Así

$$\frac{\partial M}{\partial y} = e^y = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

La ecuación es exacta. El potencial f debe cumplir

$$f = \int e^y dx = xe^y + C(y)$$

ECUACIONES EXACTAS

y

$$C(y) = \int \left(xe^y + 2y - \frac{\partial}{\partial y} xe^y \right) dy = y^2$$

Tener en cuenta que la función potencial f no es única, queda deerminada hasta una constante aditiva de integración que podemos elegir a gusto ya que debemos encontrar sólo un potencial. Entonces podemos tomar

$$f = xe^y + y^2.$$

La solución general de la ecuación estará dada por

$$xe^y + y^2 = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Como no sabemos despejar $\boxed{y}$ de aquí dejamos indicada de esta manera la solución.

FACTORES INTEGRANTES

Las ecuaciones exactas son raras, no obstante tenemos un recurso para llevar algunas ecuaciones no exactas a una equivalente y exacta.
Supongamos que la ecuación

$$Mdx + Ndy = 0$$

no es exacta. La idea es econtrar una función $\mu(x, y)$ llamada factor integrante que haga que la ecuación

$$\mu\left(Mdx + Ndy\right) = 0$$

si lo sea. Para ello se debe cumplir que

$$\frac{\partial \mu M}{\partial y} = \frac{\partial \mu N}{\partial x} \Longleftrightarrow \boxed{\mu\frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial \mu}{\partial y}M = \frac{\partial N}{\partial x}\mu + N\frac{\partial \mu}{\partial x}}. \qquad (4)$$

Factores integrantes

Observación

Toda ecuación

$$Mdx + Ndy = 0 \tag{5}$$

que tiene una solución general que se escribe

$$f(x, y) = c, \tag{6}$$

tiene, en teoría, un factor integrante.

FACTORES INTEGRANTES

Si derivamos (6)

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0.$$

De esta ecuación y (5) vemos que

$$-\frac{M}{N} = y' = -\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y} \Longrightarrow \frac{\partial f/\partial x}{M} = \frac{\partial f/\partial y}{N} =: \mu(x, y)$$

Aquí hemos asumido $N \neq 0 \neq \frac{\partial f}{\partial y}$. De la igualdad de arrriba se deduce que existe $\mu(x, y)$ con

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \mu M \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \mu N.$$

Es decir μ es factor integrante.

FACTORES INTEGRANTES

La observación nos dice que parece razonable que siempre exista un factor integrante, pero no ayuda a hallarlo puesto que deberíamos conocer la solución general de la ecuación para hacerlo. O deberíamos resolver la ecuación (4) que es una ecuación en derivadas parciales para μ.

Hay que señalar que sólo necesitamos una solución de (4) y no su solución general. En la práctica se suele proceder a hacer alguna suposición sobre μ que simplifique la expresión (ansatz). Es común suponer que μ es sólo función de una de las variables. Si por ejemplo asumimos que $\mu = \mu(x)$ las ecuaciones (4) se escriben

$$\mu \frac{\partial M}{\partial y} = \mu \frac{\partial N}{\partial x} + N\mu'(x) \Longrightarrow \boxed{\frac{\mu'}{\mu} = \frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N}}$$

FACTORES INTEGRANTES

Para que esto funcione la función

$$\frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N}$$

debe depender sólo de x. Si eso ocurre y llamamos $h(x)$ a esa función vamos a tener que

$$\mu(x) = e^{\int h(x)dx}$$

es un factor integrante. Recordar que sólo necesitamos hallar uno, por ese motivo no consideramos constantes de integración.

Factores integrantes

De manera similar, si la función

$$\frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{-M}$$

depende sólo de y y llamamos $h(y)$ a esa función tenemos que

$$\mu(y) = e^{\int h(y)dy}$$

es un factor integrante, que en este caso sólo depende de y.

Factores integrantes

Ejemplo 1 $ydx + (x^2y - x)dy = 0$. Primero chequeemos la posible exactitud.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 \text{ y } \frac{\partial N}{\partial x} = 2xy - 1 \Longrightarrow \text{no exacta.}$$

Ahora

$$\frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N} = \frac{2 - 2xy}{x(xy-1)} = -\frac{2}{x} =: h(x).$$

El factor integrante es

$$\mu(x) = e^{\int h(x)dx} = e^{-2\ln|x|} = \frac{1}{x^2}.$$

EXACTITUD, OTRAS TÉCNICAS

Veamos otra forma de trabajar para transformar ecuaciones no exactas en exactas. Aunque esta forma no es metódica, sino que depende de la habilidad de quien la lleva adelante. Consiste en explotar la similitud de la ecuación diferencial con alguna expresión exacta conocida. Ilustremos esto con el ejemplo anterior $ydx + (x^2y - x)dy = 0$. La ecuación equivale a

$$x^2ydy - (xdy - ydx) = 0.$$

Ahora podemos notar que

$$d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{xdy - ydx}{x^2}.$$

Lo que sugiere dividir por x^2 la ecuación.

Exactitud, Otras Técnicas

$$0 = ydy - \frac{xdy - ydx}{x^2} = d\left(\frac{y^2}{2}\right) - d\left(\frac{y}{x}\right) = d\left(\frac{y^2}{2} - \frac{y}{x}\right).$$

La solución general es pues

$$\frac{y^2}{2} - \frac{y}{x} = c.$$

EXACTITUD, OTRAS TÉCNICAS

Otras fórmulas para tener en cuenta que son exactas

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2} \quad \text{nada nuevo} \tag{7}$$

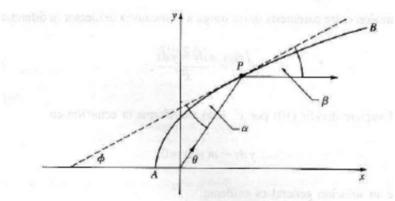
$$d(xy) = ydx + xdy \tag{8}$$

$$d(x^2 + y^2) = 2(xdx + ydy) \tag{9}$$

$$d\left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right) = \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} \quad \text{falla caracterización pag 9!!!!}$$

$$d\left(\ln\left(\frac{y}{x}\right)\right) = \frac{ydx - xdy}{xy} \tag{10}$$

EJEMPLO, ÓPTICA



Problema Hallar la forma del espejo curvo tal que el reflejo de todo haz de luz que viaja paralelo al eje *x* con dirección negativa respecto a este eje pasa por el $(0, 0)$.

Ejercicio Dejamos como ejercicio demostrar que un haz de luz que se refleja sobre un espejo lo hace de tal manera que los ángulos que se forman con los rayos de incidencia y refracción y la tangente al espejo en el punto de incidencia son iguales ($\beta = \alpha$ en el dibujo). Para resolver esto hay que usar el principio de mínimo tiempo de Fermat

EJEMPLO, ÓPTICA

Solución. Sea (x, y) el punto de incidencia. Apelando a la geometría elemental, $\phi = \beta$ y $\theta = \alpha + \phi = 2\beta$. Como $\tan\theta = \frac{y}{x}$ y como

$$\tan\theta = \tan 2\beta = \frac{2\tan\beta}{1 - \tan^2\beta},$$

deducimos que

$$\frac{y}{x} = \frac{2dy/dx}{1 - (dy/dx)^2}.$$

Despejando

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x \pm \sqrt{x^2 + y^2}}{y}.$$

EJEMPLO, ÓPTICA

Podemos escribir la ecuación de este otro modo

$$xdx + ydy = \pm\sqrt{x^2 + y^2}dx.$$

Tomando en cuenta (9)

$$\pm\frac{d(x^2 + y^2)}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = dx.$$

Si $r = x^2 + y^2$

$$dx = \pm\frac{dr}{2\sqrt{r}} = \pm d\sqrt{r} = \pm d\sqrt{x^2 + y^2}$$

Las solución general es

$$\pm\sqrt{x^2 + y^2} = x + c.$$

EJEMPLO, ÓPTICA

Elevando al cuadrado ambos miembros

$$y^2 = 2xc + c^2 = 2c\left(x + \frac{c}{2}\right)$$

Que es la familia de todas las parábolas con eje de simetría x, positivamente orientadas y con foco en $(0, 0)$.

ECUACIONES LINEALES

Se llama ecuación diferencial lineal a una ecuación que es lineal respecto a la/s variables dependientes. La ecuación puede ser no lineal repecto a la variable independiente. La siguiente es la ecuación diferencial lineal general de primer orden

$$y' + p(x)y = q(x). \tag{11}$$

y la de segundo orden

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x).$$

Es costumbre introducir los operadores $L_1[y] = y' + py$ y $L_2[y] = y'' + py' + qy$. Haciendo más precisa la definición, los operadores L_1 y L_2 son lineales, es decir, por ejemplo, $L_1[y_1 + y_2] = L_1[y_1] + L_1[y_2]$.

Ecuaciones Lineales

Vamos a resolver la ecuación lineal de primer orden (11). Esto es sencillo pues la ecuación equivalente

$$dy + (p(x)y - q(x))dx = 0 \tag{12}$$

tiene un factor integrante. En efecto como $M = p(x)y - q(x)$ y $N = 1$.

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N} = p(x).$$

Entonces $\mu(x) = e^{\int p dx}$ es factor integrante. Luego si multiplicamos por μ en (12), la expresión es exacta.

$$e^{\int p dx} dy + p(x) e^{\int p dx} y dx = q(x) e^{\int p dx} dx.$$

ECUACIONES LINEALES

Podemos identificar rápidamente, sin necesidad de hacer cálculos, el correspondiente potencial.

$$d\left(e^{\int p dx} y\right) = d\left(\int q(x) e^{\int p} dx\right).$$

Integrando

$$e^{\int p dx} y = \int e^{\int p dx} q(x) dx + C.$$

O

$$\boxed{y = e^{-\int p dx}\left\{\int e^{\int p dx} q(x) dx + C\right\}} \qquad (13)$$

ECUACIONES LINEALES

Ejemplo Resolver $y' + y/x = 3x$.
Solución. En la práctica, para evitar recordar fórmulas, se suele repetir el procedimiento que llevo a la fórmula (13), ahora, dado la cercanía de su derivación, vamos a usarla de manera directa. La solución general es

$$
\begin{aligned}
y(x) &= e^{-\int \frac{1}{x}dx}\left\{\int e^{\int \frac{1}{x}dx} 3x dx + C\right\} \\
&= \frac{1}{|x|}\left\{\int |x| 3x dx + C\right\} \\
&= x^2 + \frac{C}{|x|} \\
&= x^2 + \frac{C}{x}
\end{aligned}
$$

CASO $F(x, y', y'') = 0$

Algunas ecuaciones de segundo orden

$$F(x, y, y', y'') = 0 \tag{14}$$

se pueden reducir a una de primer orden. Por ejemplo si F no depende de y. Es decir la ecuación es

$$F(x, y', y'') = 0 \tag{15}$$

Aquí introducimos la nueva variable dependiente $\boxed{p = y'}$, que resuelve

$$F(x, p, p') = 0.$$

Que es una ecuación de primer orden. Supuesto que la podemos resolver y encontrar una solución general para p, tendremos

CASO $F(x, y', y'') = 0$

$$\boxed{y = \int p dx + C} \tag{16}$$

Es la solución general de la ecuación de segundo orden.

CASO $F(y, y', y'') = 0$

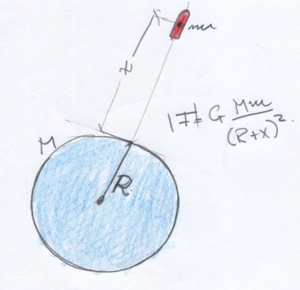
Si la ecuación general de segundo orden (14) no depende de x, entonces nuevamente $\boxed{p = y'}$ como nueva variable depeniente pero también usamos $\boxed{y}$ como nueva variable independiente. Como

$$y'' = p' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}p$$

La ecuación se reduce ala ecuación de primer orden

$$F\left(y, p, \frac{dp}{dy}\right) = 0 \tag{17}$$

VELOCIDAD DE ESCAPE



Problema. Que velocidad hay que imprimirle a un proyectil que es lanzado verticalmente desde la superficie de la Tierra si nuestra pretensión es que el proyectil se escape al infinito. La velocidad más chica con esta cualidad se llama velocidad de escape.

VELOCIDAD DE ESCAPE

Solución. Para resolver este problema hay que tomar en consideración la Ley de gravitación universal de Newton. En la parte que nos interesa, esta Ley afirma que el módulo de la fuerza de gravedad que se ejercen entre si dos cuerpos de masa m_1 y m_2 separados una distancia r es proporcional al producto de las masas e inversamente proporcional al cuadrado de las distancia que los separa. Vale decir

$$|F| = G\frac{m_1 m_2}{r^2},$$

donde G es la constante de proporcionalidad. Cuando los cuerpos no son puntos masa, sino cuerpos extendidos en el espacio, la distancia de separación hay que medirla entre los centros de masa de los cuerpos.

Velocidad de escape

Hay que aclarar que usando el Principio conservación energía mecánica podemos resolver el problema de una manera más simple. Incluso podemos ver que la suposición de que el tiro es vertical no es necesaria, es decir la velocidad e escape es la misma aunque el tiro sea oblicuo. Discutiremos esa solución durante la clase. Lamentablemente (o no) esta solución no usa ecuaciones diferenciales. Vamos a dar una solución, quizás un poco más complicada, pero que invoca las técnicas discutidas.

Velocidad de escape

Supondremos a la Tierra una esfera de radio R, masa M y su centro de masa en el centro de la esfera. Al proyectil lo supondremos un punto masa con masa m y su posición en el momento t, denotada $x = x(t)$, la mediremos sobre un eje vertical con origen en la superficie de la Tierra. Todo como está indicado en la página 35. Luego la distancia Tierra-proyectil será igual a $R + x$ donde x es la posición del proyectil

VELOCIDAD DE ESCAPE

Utilizaremos la Segunda ley de Newton, $F = ma$. Nos queda

$$mx''(t) = -\frac{GMm}{(R+x)^2}.$$

Es una ecuación de la forma

$$F(t, x, x', x'') = 0.$$

Con variable dependiente x e independiente t. Pero, en realidad no depende de t y por consiguiente, como vimos, se puede convertir en una ecuación de primer orden tomando como nuevas variables: 1) independiente x 2) dependiente $v = x'$. En estas variables

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}.$$

VELOCIDAD DE ESCAPE

Y la ecuación se convierte en

$$v\frac{dv}{dx} = -\frac{GM}{(R+x)^2} \Longrightarrow vdv + \frac{GM}{(R+x)^2}dx = 0.$$

Que es una ecuación en variables separables y también es exacta. Usaremos la técnica discutida para ecuaciones exactas.

Siempre las ecuaciones en variables separables son exactas pues se escriben de la forma

$$M(x)dx + N(y)dy = 0$$

Tienen potencial

$$f = \int M(x)dx + \int N(y)dy$$

Velocidad de escape

Aplicando esto a nuestra ecuación

$$\frac{v^2}{2} - \frac{GM}{(R+x)} = E = \text{cte.} \tag{18}$$

La igualdad anterior es precisamente consecuencia directa del Principio conservación energía mecánica. Sea v_0 la velocidad inicial para $t = 0$. como E es constante y $x = 0$ en $t = 0$ debe ser

$$E = \frac{v_0^2}{2} - GM/R \tag{19}$$

Como $v^2 \geq 0$ y por (18) y (19).

$$-\frac{GM}{(R+x)} \leq \frac{v^2}{2} - \frac{GM}{(R+x)} = \frac{v_0}{2} - GM/R$$

VELOCIDAD DE ESCAPE

Queremos encontrar v_0 tal que $x \to \infty$. Luego tiene sentido tomar límite cuando $x \to \infty$ en la expresión anterior

$$0 \leq \frac{v_0^2}{2} - GM/R$$

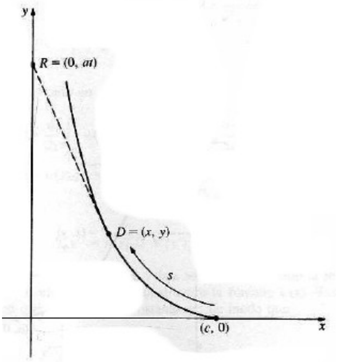
De esto deducimos

Curvas de persecución

Problema Supongamos que un conejo se mueve sobre una línea recta con rapidez uniforme a y de un punto por fuera de la recta parte un perro que lo persigue con rapidez uniforme b. Encontrar la trayectoria del perrro

CURVAS DE PERSECUCIÓN

Supongamos que el perro parte del punto $(c, 0)$, el conejo de $(0, 0)$ y la recta sobre la cual se mueve el conejo en dirección positiva es el eje y. Vamos a suponer que la trayectoria del perro sigue la trayectoria tal que la tangente a su movimiento en un momento dado intersecta a la posición del conejo correspondiente a ese momento.



CURVAS DE PERSECUCIÓN

Pasado un tiempo t, el conejo estará en el punto $(0, at)$ y el perro en un punto de su trayectoria que forma un arco de longitud $s = bt$ hasta el $(c, 0)$. Ese punto, donde está el perro, lo denotaremos (x, y). Como hemos supuesto que la tangente a la trayectoria del perro en (x, y) pasa por la posición del conejo $(0, at)$ se debe cumplir que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - at}{x} \Longrightarrow xy' - y = -at. \tag{20}$$

En esta ecuación hay tres variables, t , x e y. No es muy claro cuales estamos usando como independiente y cuales depenientes. Generalmente el tiempo t es una variable indepeniente, pero en la expresión de arriba aparece la derivada de y respecto a x.

CURVAS DE PERSECUCIÓN

Pareciese como que estamos considerando y tanto función de t como de x. La intuición nos dice que y la puedo pensar tanto como función de una u otra.
Tratemos de elinar t de esa ecuación, de modo de tener una ecuación, una variable dependiente y una independiente, como el Dios de la matemática manda.
No es razonable pensar que lograremos tener menos variables sin pagar algún precio, pues, como dice el dicho, "Cuando la limosna es grande hasta el santo desconfía" .

Curvas de persecución

En este caso, el costo que pagaremos es incrementar el orden de la ecuación. Como hemos dado algunas técnicas de resolver ecuaciones de orden dos quizás estemos en condiciones de pagar este precio.
Para eliminar t de la ecuación derivamos (20) respecto a x. Queda

$$xy'' = -a\frac{dt}{dx}.$$

Como $ds/dt = b$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{dt}{ds}\frac{ds}{dx} = -\frac{\sqrt{1+y'(x)^2}}{b}.$$

El signo menos aparece porque s es decreciente con x pues $s = \int_x^c \sqrt{1+y'^2}dx$.

Curvas de persecución

Entonces

$$xy'' = \frac{a\sqrt{1+y'(x)^2}}{b}. \tag{21}$$

Que es una ecuación que no contiene y. De modo que usando $p = y'$ como variable dependiente reducimos el orden de la ecuación. Nos queda

$$\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{a}{b}\frac{dx}{x}.$$

Que es una ecuación en variable separables. Tomando la integral definida entre c y x, y considerando que si $x = c$ entonces $p = 0$, tenemos

$$\ln\left(p + \sqrt{1+p^2}\right) = \ln\left(\frac{x}{c}\right)^{\frac{a}{b}}.$$

CURVAS DE PERSECUCIÓN

Si despejamos p queda

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{c}\right)^{a/b} - \left(\frac{c}{x}\right)^{a/b}\right]. \tag{22}$$

Vamos a dejar que la continuidad del análisis como ejercicio.

Oscilador armónico

Un oscilador armónico es el más simple de los sistemas físicos vibratorios. Podemos definirlo como un sistema elástico que obedece a la Ley de elasticidad de Hooke, en honor a su descubridor Robert Hooke

Oscilador armónico

OSCILADOR ARMÓNICO

Suele citarse al resorte como un ejemplo familiar de oscilador armónico.
Esto debido a que, cuando las oscilaciones de un resorte son pequeñas, se satisface aproximadamente la Ley de elasticidad de Hooke.
Esta ley afirma que la fuerza que ejerce un resorte sobre una masa m conectada a él por uno de sus extremos es proporcional en magnitud al desplazamiento del resorte desde la posición de equilibrio.
Además la fuerza de elasticidad actúa en sentido opuesto al desplazamiento

Oscilador armónico

Supongamos que tenemos un resorte, en unos de sus extremos fijado en una pared y unido a una masa m por el otro extremo. Supongamos que no actúa otra fuerza sobre la masa. Ver la animación de pag. 51. Pongamos un eje de coordenadas en la dirección del movimiento, con origen en la posición de equilibrio del resorte. Esta posición es el punto donde el resorte no ejerce fuerza. Supongamos que la dirección positiva es la dirección donde el resorte se expande. Denotemos por $x(t)$ la posición de la masa en el momento t.

OSCILADOR ARMÓNICO

Entonces según la Segunda Ley de Newton y la Ley de Elasticidad de Hooke, tenemos que

$$\boxed{mx''(t) = -kx(t).} \tag{23}$$

La constante de proporcionalidad k se llama constante elástica. La ecuación (23) se denomina la ecuación del oscilador armónico o ecuación del resorte.

OSCILADOR ARMÓNICO

La ecuación del oscilador armónico se escribe $0 = f(t, x, x', x'')$, donde en $f(t, x, y, z) = kx + mz$ es independiente de t. Podemos intentar usar x como variable independiente y $z = x'$ como dependiente. Como vimos en la página 34 $x''(t) = dz/dt = dz/dxz$. Así la ecuación queda

$$m\frac{dz}{dx}z = -kx \Longrightarrow mzdz = -kxdx \Longrightarrow m\frac{z^2}{2} = -k\frac{x^2}{2} + C_1$$

$$\Longrightarrow z = \pm\sqrt{-\frac{k}{m}x^2 + C_1}$$

$$\Longrightarrow x'(t) = \pm\sqrt{-\frac{k}{m}x^2 + C_1}.$$

OSCILADOR ARMÓNICO

Debe ser $C_1 \geq 0$ de lo contrario el dominio de la función sería vacío. Nos queda una nueva ecuación para x'. Esta ecuación es en variables separables

$$\frac{dx}{\sqrt{-\frac{k}{m}x^2 + C_1}} = dt.$$

OSCILADOR ARMÓNICO

Integrando

$$
\begin{aligned}
t + C_2 &= \int \frac{dx}{\sqrt{-\frac{k}{m}x^2 + C_1}} \\
&= \sqrt{\frac{1}{C_1}} \int \frac{dx}{\sqrt{-\frac{k}{C_1 m}x^2 + 1}} \\
&= \sqrt{\frac{m}{k}} \int \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} \qquad \left(\text{haciendo } u = \sqrt{\frac{k}{C_1 m}} x \right) \\
&= \sqrt{\frac{m}{k}} \operatorname{arc\,sen} u.
\end{aligned}
$$

Oscilador armónico

Entonces

$$x = \frac{C_1 m}{k} u = \frac{C_1 m}{k} \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}(t + C_2)\right)$$

$$= \boxed{C_3 \operatorname{sen}\sqrt{\frac{k}{m}} t + C_4 \cos\sqrt{\frac{k}{m}} t}.$$

Que es la solución general de la ecuación del oscilador armónico. Como vemos el movimiento es oscilatorio con frecuencia

$$\boxed{f = \sqrt{\frac{k}{m}}}.$$

En particular, no importan las condiciones iniciales, la frecuencia es siempre la misma.

EDP, MÉTODO CARACTERÍSTICAS

Saber resolver ecuaciones ordinarias de primer orden nos permite resolver algunas ecuaciones en derivadas parciales de primer orden.
Para tener un problema bien planteado con una ecuación en derivadas parciales no es suficiente conocer el valor de la función en un punto (como en una EDO de primer orden). En cambio una condición típica es dar el valor de la función a lo largo de una recta.
Por ejemplo

$$\left.\begin{array}{l} a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = c(x,y,u) \\ u(x,0) = f(x) \end{array}\right\} \tag{24}$$

Aquí x, y son variables independientes y u dependiente.

EDP, MÉTODO CARACTERÍSTICAS

El método de características consiste en encotrar u a lo largo de las soluciones de la ecuación

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{b(x,y)}{a(x,y)}} \tag{25}$$

Una solución de esta ecuación es normalmente una curva en el plano x, y. La idea es que las soluciones de (25) forman un flia uniparamétrica de curvas que llena una gran parte Ω del plano x, y. Así terminamos conociendo el valor de u sobre este conjunto Ω

Para que (25) tenga sentido debemos tener $a \neq 0$. De todas formas si $a = 0$ podemos invertir los papales de x e y.

EDP, MÉTODO CARACTERÍSTICAS

Supongamos $y(x)$ solución de (25), entonces pongamos por abuso de notación $u(x) = u(x, y(x))$. Se tiene que

$$\boxed{\frac{du}{dx} = u_x + u_y y' = u_x + u_y \frac{b}{a} = \frac{c(x, y(x), u(x))}{a(x, y)}} \tag{26}$$

Que es otra ecuación ordinaria. Podemos escribir (25) y (26) en una ecuación más simétrica

$$\boxed{\frac{du}{c} = \frac{dx}{a} = \frac{dy}{b}} \tag{27}$$

Estas ecuaciones se llaman ecuaciones características.

EDP, método características

Ejemplo: Resolver

$$\left.\begin{array}{r} u_x + u_y = yu \\ u(x,0) = f(x) \end{array}\right\} \tag{28}$$

En este caso

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} \Rightarrow y' = 1 \Rightarrow y(x) = x + \mu, \quad \mu = \text{cte.}$$

Entonces

$$\frac{du}{dx} = \frac{c}{a} \Rightarrow u' = yu = (x+\mu)u \Rightarrow \ln|u| = \frac{x^2}{2} + \mu x + C(\mu).$$

Notar que la nueva constante de integración $C(\mu)$ debe depender de la primera μ. Entonces

$$u = \pm e^{\frac{x^2}{2}} e^{(y-x)x} e^{C(y-x)}.$$

EDP, método características

Ahora

$$u(x,0)=f(x)\Rightarrow f(x)=\pm e^{\frac{x^2}{2}}e^{(-x^2}e^{C(-x)}\Rightarrow C(\mu)=\frac{\mu^2}{2}+\ln|f(-\mu)|.$$

Entonces

$$u(x,y)=\pm e^{\frac{x^2}{2}}e^{(y-x)x}e^{\frac{(y-x)^2}{2}+\ln|f(x-y)|}=e^{\frac{y^2}{2}}f(x-y).$$