

Ecuaciones Diferenciales

Fernando Mazzone

25 de agosto de 2017

Índice general

1. Estabilidad	2
1.1. Estabilidad en puntos de Equilibrio	2
1.1.1. Definiciones	2
1.1.2. Estabilidad via linealización	3
1.1.3. Método de Lyapunov	4
1.1.4. Método de Lyapunov: Ejemplos	6
1.2. Estabilidad d órbitas periódicas	10
1.2.1. Definiciones	10
1.2.2. Ecuaciones Variacionales	11
1.2.3. Ejemplos	11
1.2.4. Matriz de deformaciones	14
1.2.5. Radio espectral	15
1.2.6. Discución heurística	16
1.2.7. Estabilidad orbital	17
1.2.8. Mapeo de Poincaré	17

Capítulo 1

Estabilidad

Concepto General

«En ciencias, una situación es estable si se mantiene en estado estacionario, es decir, igual en el tiempo y una modificación razonablemente pequeña de las condiciones iniciales no altera significativamente el futuro de la situación. Dependiendo del área en particular, estabilidad tiene significados ligeramente diferentes.»

Wikipedia

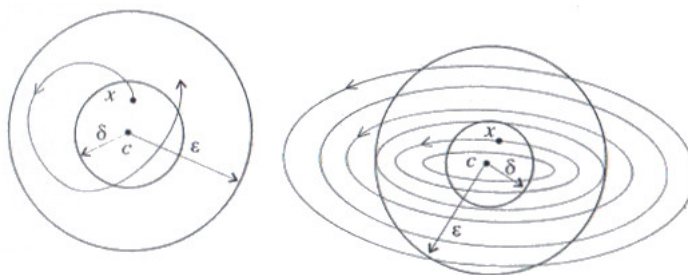
1.1 Estabilidad en puntos de Equilibrio

1.1.1. Definiciones

Definición 1.

Estabilidad de puntos de equilibrio Supongamos $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $X : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial independiente del tiempo, $\Phi_t(x)$ el flujo asociado a X y $c \in \mathcal{O}$ un equilibrio ($X(c) = 0$). Llamamos $I_x = (a_x, b_x)$ al intervalo máximo donde esta definida la solución que en $t = 0$ pasa por $x \in \mathcal{O}$. El equilibrio c se dice estable si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|x - c| < \delta \Rightarrow \forall t \in [0, b_x) : |\Phi_t(x) - c| < \varepsilon.$$



Definición 2 (Inestabilidad en puntos de equilibrio).

Un punto de equilibrio c se dice *inestable* si no es estable.

Ejercicio.

Un punto de equilibrio c es inestable si y sólo si existe un $\varepsilon > 0$, una sucesión de puntos $\{x_n\}$ y de tiempos $\{t_n\}$ tal que $t_n \in [0, b_{x_n})$, $x_n \rightarrow c$ y $|\Phi_{t_n}(x_n) - c| \geq \varepsilon$.

Observación. Si c es un punto de equilibrio estable de $X : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^n$ entonces $b_x = +\infty$.

Esta afirmación necesita una demostración. Tomemos $\varepsilon > 0$ tal que $\overline{B}(c, \varepsilon) \subset \mathcal{O}$. Por definición de estabilidad, existe $\delta > 0$ tal que si $|x - c| < \delta$ y $t \in [0, b_x)$ entonces $\Phi_t(x) \in B(c, \varepsilon)$. Luego la imagen por la solución del intervalo $[0, b_x)$ está contenido dentro de un compacto. Esto implica que $b_x = \infty$.

Definición 3 (Estabilidad asintótica).

Definición: estabilidad asintótica Un punto de equilibrio $c \in \mathcal{O}$ se dice *asintóticamente estable* si es estable y existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in B(c, \delta) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi_t(x) = c.$$

1.1.2. Estabilidad via linealización**Teorema 1 (Estabilidad asintótica de sistemas lineales).**

Consideremos el sistema lineal $x' = Ax$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Son equivalentes

1. El sistema lineal $x' = Ax$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tiene un equilibrio asintóticamente estable en 0.
2. Todo autovalor λ de A satisface que $\lambda \in (-\infty, 0)$.

Teorema 2 (Invariancia de la estabilidad por equivalencias topológicas).

Sean $X : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $Y : \mathcal{O}' \rightarrow \mathbb{R}^n$ dos campos C^1 topológicamente equivalentes. Sea $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}'$ un homeomorfismo que realiza esta equivalencia topológica entre X e Y . Sea $c \in \mathcal{O}$ un punto de equilibrio de X , recordar que $b := f(c)$ lo es de Y . Entonces tenemos que c es (asintóticamente) estable si y sólo si d es (asintóticamente) estable.

Demostración. Seguir los siguientes pasos. Demostrar como *ejercicio* que si Φ_t^X y Φ_t^Y son los flujos asociados a X e Y respectivamente, entonces para cada $y \in \mathcal{O}'$ y $t \in I_y$ vale que:

$$\Phi_t^Y = f \circ \Phi_t^X \circ f^{-1}.$$

Suponer c estable y tomar $\varepsilon > 0$. Como f es continua, $f^{-1}(B(b, \varepsilon))$ es abierto y de allí existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $B(c, \varepsilon_0) \subset f^{-1}(B(b, \varepsilon))$. Como c es estable, existe δ_0 tal que $\Phi_t^X(B(c, \delta_0)) \subset B(c, \varepsilon_0)$. Como f^{-1} es continua, $f(B(c, \delta_0))$ es abierto, luego existe $\delta > 0$ tal que $B(b, \delta) \subset f(B(c, \delta_0))$. Por todos los hechos previos,

$$\begin{aligned} \Phi_t^Y(B(b, \delta)) &= f \circ \Phi_t^X \circ f^{-1}(B(b, \delta)) \subset f \circ \Phi_t^X(B(c, \delta_0)) \\ &\subset f(B(c, \varepsilon_0)) \subset B(b, \varepsilon). \end{aligned}$$

La afirmación recíproca, si b es estable entonces c lo es, sería redundante demostrarla. Para la estabilidad asintótica, supongamos c asintóticamente estable y $\delta_0 > 0$ tal que

$$x \in B(c, \delta_0) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi_t^X(x) = 0.$$

Por la continuidad de f^{-1} existe $\delta > 0$ tal que $B(b, \delta) \subset f(B(c, \delta_0))$. Luego, de estos hechos, el ejercicio previo, la continuidad de f y Φ_t^X tenemos que si $y \in B(b, \delta)$ entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi_t^Y(y) = \lim_{t \rightarrow \infty} f \circ \Phi_t^X \circ f^{-1}(y) = f \left(\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi_t^X(f^{-1}(y)) \right) = 0$$

□

Corolario 1.

Supongamos que c es un punto de equilibrio de $X : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Supongamos que todos las partes reales de autovalores de $DX(c)$ son negativas. Entonces c es asintóticamente estable. Si en cambio, algún autovalor tiene parte real positiva, c es inestable.

El Corolario no afirma nada cuando hay autovalores imaginarios puros. Desafortunadamente esta situación se presenta con frecuencia. Ejemplo de esto es la ecuación del resorte.

1.1.3. Método de Lyapunov

El método de Lyapunov está basado en la introducción de ciertas funciones, campos escalares $\Lambda : U \rightarrow \mathbb{R}$ donde U es entorno de c . Estas funciones se llaman funciones de Lyapunov y cumplen un papel análogo al de energía en sistemas mecánicos.

A pesar del nombre, el método de Lyapunov no es del todo metódico, no tenemos un algoritmo para determinar cuando existe una función de Lyapunov ni tampoco como puede ser obtenida.

Definición 4 (derivada covariante).

Sea $X : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial sobre el abierto $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$. La derivada covariante respecto a X se simboliza por ∇_X y es un operador (diferencial) que actúa sobre campos escalares $F : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$. Se define por

$$\nabla_X F(x) = X \cdot \nabla F = \sum_{j=1}^n X_j(x) \frac{\partial F}{\partial x_j}(x).$$

Ejercicio.

Demostrar que

1. La derivada covariante de F representa la variación de F a lo largo de una trayectoria del flujo asociado a X . En otros términos

$$(\nabla_X F)(\Phi_t^X(x)) = \frac{d}{dt} (F(\Phi_t^X(x))).$$

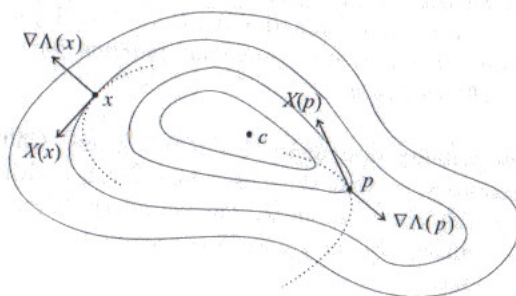
2. $(\nabla_X F)(x) = |\nabla F(x)| |X(x)| \cos(\theta(x))$, donde $\theta(x)$ representa el ángulo entre $X(x)$ y uno de los vectores normales a la superficie de la forma $\{y : F(y) = k\}$ que pasa por x .

Definición 5 (Función de Lyapunov).

Sea $X : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial sobre el abierto $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ y c un punto de equilibrio. Una función, de clase C^1 , $\Lambda : U \rightarrow \mathbb{R}$, donde $U \subset \mathcal{O}$ es abierto y $c \in U$, se denomina Función de Lyapunov para c si satisface

1. $\Lambda(c) < \Lambda(x)$ para todo $x \in U \setminus \{c\}$.
2. $\nabla_X \Lambda \leq 0$ en U .
3. Si se satisface la desigualdad estricta $\nabla_X \Lambda < 0$ diremos que Λ es una función de Lyapunov estricta.

Acorde al inciso 2 de nuestro ejercicio, la condición $(\nabla_X \Lambda)(x) \leq 0$ dice que el ángulo entre $X(x)$ y la superficie de nivel $\{z : \Lambda(z) = k\}$ que contiene a x es obtuso ($(\nabla_X \Lambda)(x) < 0$) o, a lo sumo, recto ($(\nabla_X \Lambda)(x) = 0$).



Visto a través del inciso 1) del ejercicio, una función de Liapunov satisface que tiene un mínimo en c y que $\Lambda(\Phi_t^X(x))$ es decreciente respecto al tiempo. Esta observación es la idea clave para demostrar el Teorema de Estabilidad de Lyapunov.

Teorema 3 (Teorema de Estabilidad de Lyapunov).

Sea $X : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial sobre el abierto $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ y c un punto de equilibrio. Supongamos que $\Lambda : U \rightarrow \mathbb{R}$, con $U \subset \mathcal{O}$ abierto y $c \in U$, es una Función de Lyapunov para c . Entonces c es un equilibrio estable. Si Λ es una función de Lyapunov estricta para c , entonces c es asintóticamente estable.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Tomemos $0 < \varepsilon_0$ tal que $\varepsilon_0 \leq \varepsilon$ y $\overline{B}(c, \varepsilon_0) \subset U$. Como $\partial B(c, \varepsilon_0)$ es un compacto y Λ es continua, Λ alcanza un valor mínimo sobre aquel conjunto, es decir existe z_0 , con $|z_0 - c| = \varepsilon_0$ tal que

$$\mu := \min\{\Lambda(y) : |y - c| = \varepsilon_0\} = \Lambda(z_0) > \Lambda(c). \quad (1.1)$$

Sea ahora $\delta > 0$ tal que

$$B(c, \delta) \subset B(c, \varepsilon_0) \cap \Lambda^{-1}(-\infty, \mu).$$

ver figura 1.1.

Teorema de Estabilidad de Lyapunov

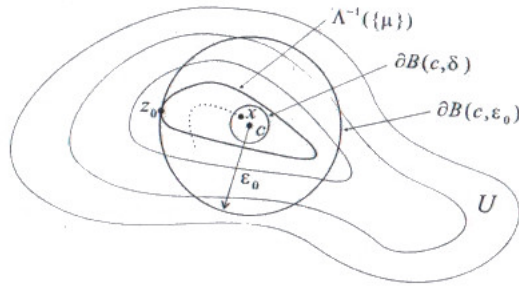


Figura 1.1: Demostración Teorema Lyapunov

Teorema de Estabilidad de Lyapunov Supongamos ahora que $x \in B(c, \delta)$. Como $\Lambda(x) < \mu$ y como $\Lambda(\Phi_t(x))$ es decreciente para $t \in [0, b_x]$ tenemos que

$$\Lambda(\Phi_t(x)) < \mu \quad \text{para } t \in [0, b_x]. \quad (1.2)$$

Vemos que $\Phi_t(x) \in B(c, \varepsilon_0)$ cuando $t \in [0, b_x]$. De lo contrario existiría un $t_0 > 0$ con $\Phi_{t_0}(x) \notin B(c, \varepsilon_0)$. Como $\Phi_t(x)$ es continua respecto a t , el conjunto $\{\Phi_t(x) | t \in [0, t_0]\}$ es conexo. Por consiguiente $\{\Phi_t(x) | t \in [0, t_0]\} \cap \partial B(c, \varepsilon_0) \neq \emptyset$. Luego existiría un $t \in [0, t_0]$ tal que $\Phi_t(x) \in \partial B(c, \varepsilon_0)$. Para este t_0 por (1.1) tendríamos que $\Lambda(\Phi_{t_0}(x)) \geq \mu$ que contradice (1.2). Como $B(c, \varepsilon_0) \subset B(c, \varepsilon)$, hemos demostrado la estabilidad.

Supongamos la función de Lyapunov Λ estricta. Veamos que si $x \in B(c, \delta)$ entonces $\Phi_t(x) \rightarrow c$ cuando $t \rightarrow \infty$. De no ser esto último cierto, existiría un $\varepsilon_1 > 0$ y una sucesión de tiempos t_k tendiente a $+\infty$ tal que

$$|\Phi_{t_k}(x) - c| \geq \varepsilon_1.$$

Como $\Phi_{t_k}(x) \in \overline{B}(c, \varepsilon_0)$ y este conjunto es compacto, existiría una subsucesión de $\Phi_{t_k}(x)$ convergente. Por simplicidad supondremos que esta subsucesión es t_k y llamaremos z a este límite.

Ahora $\Lambda(\Phi_t(z))$ es decreciente respecto a t , por ello existe $s > 0$ tal que $\Lambda(\Phi_s(z)) < \Lambda(z)$. Como la función $y \mapsto \Lambda(\Phi_s(y))$ es continua en y para s fijo, existe un entorno V de z tal que si $y \in V$ entonces $\Lambda(\Phi_s(y)) < \Lambda(z)$. Como $\Phi_{t_k}(x)$ tiende a z , existiría $K > 0$ tal que $\Phi_{t_k}(x) \in V$, cuando $k > K$. Fijemos uno de tales k , lo llamaremos k_0 . Ahora si elegimos cualquier k suficientemente grande para que $t_k > t_{k_0} + s$, tendremos

$$\Lambda(z) \leq \Lambda(\Phi_{t_k}) < \Lambda(\Phi_{t_{k_0}+s}) = \Lambda(\Phi_s(\Phi_{t_{k_0}}(x))) < \Lambda(z).$$

□

1.1.4. Método de Lyapunov: Ejemplos

Ejemplo 1.0. Estabilidad de los equilibrios $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, en la ecuación del péndulo

```
x,y=var('x,y')
Eq1=y
Eq2=-sin(x)
Equilibrios=solve([Eq1,Eq2],[x,y])
Equilibrios
```

Sagemath encuentra los equilibrios $[[x = \pi z_{30}, y = 0]]$, que es su manera de expresar $x = n\pi, y = 0$, con $n \in \mathbb{Z}$. Analicemos el equilibrio $(0, 0)$.

```
X(x,y)=[Eq1,Eq2]
A=X.diff()(0,0)
D=A.eigenmatrix_right()
```

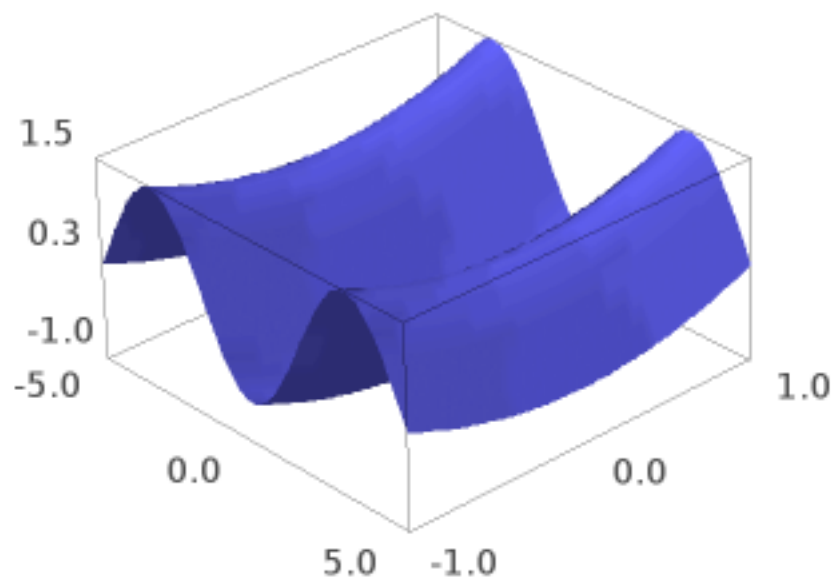
$$\left(\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \right)$$

No se puede aplicar el Teorema de Linearización, autovalores imaginarios puros. Vamos a usar la energía

$$E = \frac{1}{2}y^2 - \cos(x)$$

como función de Lyapunov.

```
Lambda(x,y)=1/2*y^2-cos(x)
p=plot3d(Lambda,(x,-5,5),(y,-1,1))
```

Es facil demostrar que

$$\Lambda(x, y) > \Lambda(0, 0) \quad \text{para } -2\pi < x < \pi, \quad y \in \mathbb{R}, \quad (x, y) \neq (0, 0)$$

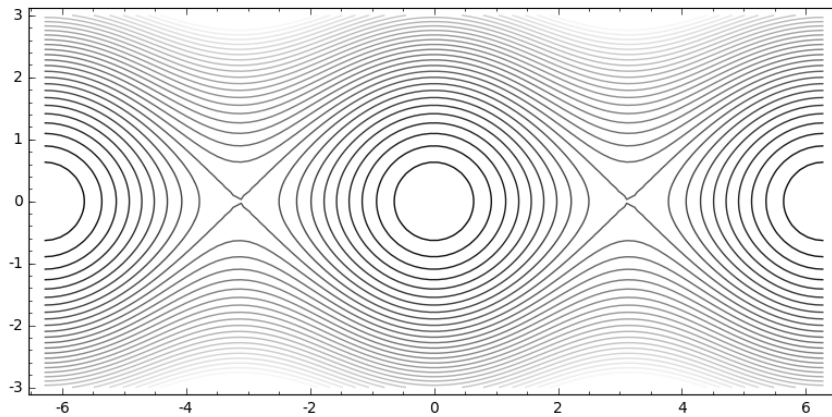
Calculamos la derivada covariante.

$$D\Lambda X = \Lambda_{\text{diff}} \cdot \text{dot_product}(X)$$

$$(x, y) \mapsto 0$$

Como es no positiva, Λ es una función de Lyapunov y por consiguiente $(0, 0)$ es estable. Es interesante analizar las curvas de nivel de la función de Lyapunov.

$$p = \text{contour_plot}(\Lambda, (x, -2\pi, 2\pi), (y, -3, 3), \text{contours}=\text{srange}(-1, 5, .2), \text{fill}=\text{False})$$

**Ejemplo 1.1.** (*?, Ejemplo 6.1*)

$$X(x, y, z) = (y(z-1), x(z+1), -2xy)$$

```
x,y,z=var('x,y,z')
Eq1=y*(z-1)
Eq2=x*(z+1)
Eq3=-2*x*y
Equilibrios=solve([Eq1,Eq2,Eq3],[x,y,z])
```

Encontramos los equilibrios

$$[[x = 0, y = 0, z = r_1], [x = r_2, y = 0, z = (-1)], [x = 0, y = r_3, z = 1]]$$

Vamos a analizar el $(0, 0, 0)$ Estamos en problemas para aplicar el Teorema de Linearización, ni siquiera los puntos de equilibrio están aislados. Un teorema afirma que equilibrio hiperbólico está aislado de otros equilibrios.

```
X(x,y,z)=[Eq1,Eq2,Eq3]
A=X.diff()(0,0,0)
D=A.eigenmatrix_right()
```

$$D = \left(\begin{pmatrix} -i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ i & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

Como adelantamos, la linearización no es posible. Vamos a demostrar que

$$\Lambda(x, y, z) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2),$$

es una función de Lyapunov para el equilibrio $(0, 0, 0)$. Claramente Λ tiene un mínimo en $(0, 0, 0)$.

```
Lambda(x,y,z)=1/2*(x^2+y^2+z^2)
DX=Lambda.diff().dot_product(X).simplify_full()
```

$$DX = 0.$$

Por el Teorema de Lyapunov $(0, 0, 0)$ es estable. Grafiquemos las superficies de nivel y algunas soluciones.

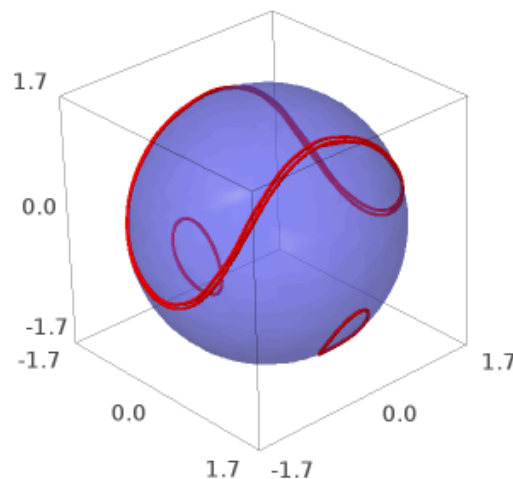
```
def X(t,x):
    return [ x[1]*(x[2]-1), x[0]*(x[2]+1), -2*x[0]*x[1]]

T = ode_solver()
T.function=X
T.algorithm="rk8pd"
A=[]
T.ode_solve(y_0=[1,1,1],t_span=[0,30], num_points=100)
a=T.solution
```

```

Sol=[soln[1] for soln in a]
Gra=list_plot(Sol,plotjoined=True,thickness=.5,rgbcolor=(1,0,0))
theta,phi=var('theta,phi')
Esfe=parametric_plot3d([sqrt(3.0)*cos(theta)*sin(phi), sqrt(3.0)*sin(theta)*sin(phi),
Gra+=Esfe
T.ode_solve(y_0=[1,0,sqrt(2)],t_span=[0,30], num_points=100)
a=T.solution
Sol=[soln[1] for soln in a]
Gra+=list_plot(Sol,plotjoined=True,thickness=.5,rgbcolor=(1,0,0))
T.ode_solve(y_0=[1,0,-sqrt(2)],t_span=[0,30], num_points=100)
a=T.solution
Sol=[soln[1] for soln in a]
Gra+=list_plot(Sol,plotjoined=True,thickness=.5,rgbcolor=(1,0,0))
T.ode_solve(y_0=[-1,0,-sqrt(2)],t_span=[0,30], num_points=100)
a=T.solution
Sol=[soln[1] for soln in a]
Gra+=list_plot(Sol,plotjoined=True,thickness=.5,rgbcolor=(1,0,0))

```



1.2 Estabilidad d órbitas periódicas

1.2.1. Definiciones

Recordemos: si $X : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un campo de clase C^1 y $x \in \mathcal{O}$, entonces $I_x = (a_x, b_x)$ denota el intervalo máximo de definición de la solución γ que satisface que $\gamma(0) = x$

Definición 1 (Estabilidad de Soluciones en General).

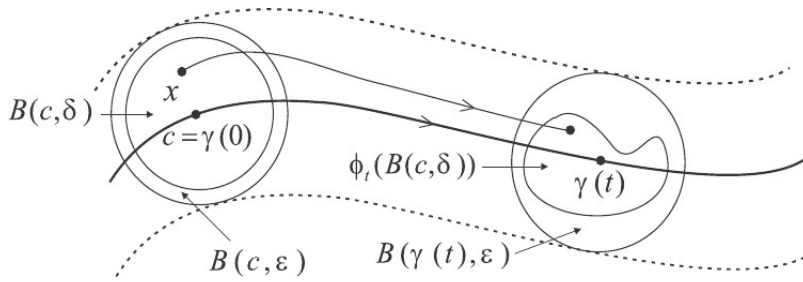
Sea $X : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un campo de clase C^1 y $c \in \mathcal{O}$. Sea $\gamma : I_c \rightarrow \mathcal{O}$ la solución tal que $\gamma(0) = c$. Diremos que γ es *estable* si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ con $B(c, \delta) \subset \mathcal{O}$ y si $x \in B(c, \delta)$ entonces:

1. $[0, b_c) \subset [0, b_x)$
2. $|\Phi_t(x) - \gamma(t)| < \varepsilon$, para todo $t \in [0, b_c)$.

Si además tenemos que $b_x = +\infty$ y

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\Phi_t(x) - \gamma(t)| = 0,$$

diremos que γ es *asintóticamente estable*.

**1.2.2. Ecuaciones Variacionales**

Si desarrollamos en serie de Taylor X alrededor de cualquier $x \in \mathcal{O}$, tenemos para $h \in \mathbb{R}^n$ chico

$$X(x + h) = X(x) + DX(x)h + \dots$$

Supongamos γ la solución de la cual queremos considerar su estabilidad, y sea α otra solución (luego habrá que suponer que $\alpha(0)$ es cercano a $\gamma(0)$). Escribamos $\alpha = \gamma + \xi$. Se suele decir que ξ es la variación de γ . ¿Resolverá alguna ecuación ξ ? Reemplazando en el desarrollo de Taylor x por γ y h por ξ y desestimando los términos de mayor orden vemos ξ resolvería aproximadamente

$$\xi'(t) = DX(\gamma(t))\xi(t).$$

$X : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un campo de clase C^1 y $\gamma : I \rightarrow \mathcal{O}$ una solución. A la función a valores matriciales $A(t) = DX(\gamma(t))$ la llamaremos *matriz variacional* o *matriz de monodromía*.

El sistema lineal asociado $x'(t) = A(t)x(t)$ se llama el sistema de *ecuaciones variacionales*.

La matriz fundamental de este sistema $G : I \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ se llama la *matriz característica*.

Sea γ una solución periódica que no es un equilibrio. Entonces existe un período $p > 0$ mínimo entre todos los períodos positivos. Esto es $\gamma(x + p) = \gamma(x)$ y cualquier otro período es múltiplo de p . Es sabido que en este caso el dominio máximo de definición de γ es \mathbb{R} . En esta situación definiremos los *multiplicadores característicos* de γ como los autovalores de $G(p)$.

1.2.3. Ejemplos

Ejemplo 1.2. (?, Ejemplo 6.3) Considerar el sistema

$$\begin{cases} x' &= -y + xz \\ y' &= x + yz \\ z' &= -z(x^2 + y^2) \end{cases}$$

Vale decir $X : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, es el campo

$$X(x, y, z) = (-y + xz, x + yz, -z(x^2 + y^2))$$

Computemos la matriz Jacobiana

```
x,y,z,t=var('x,y,z,t')
X(x,y,z)=(-y+x*z,x+y*z,-z*(x^2+y^2))
DX=X.diff()(x,y,z)
```

$$DX = \begin{pmatrix} z & -1 & x \\ 1 & z & y \\ -2xz & -2yz & -x^2 - y^2 \end{pmatrix}$$

La función $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), 0)$ es solución de periódica de periodo 2π . Computemos la matriz de monodromía.

```
A=(X.diff())(cos(t),sin(t),0).simplify_trig()
```

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \cos(t) \\ 1 & 0 & \sin(t) \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Las ecuaciones características

```
Eq=A*vector([x,y,z]).column()
```

$$Eq = \begin{pmatrix} z \cos(t) - y \\ z \sin(t) + x \\ -z \end{pmatrix}.$$

Para resolverlas notar que la tercera ecuación está desacoplada de las dos primeras. SAGE no sabe sacar provecho de eso. Lo tenemos que ayudar un poco

```
t=var('t')
x=function('x',t)
y=function('y',t)
z=function('z',t)
z_sol=desolve( z.diff(t)==-z,z)
```

$$z = Ce^{(-t)}.$$

```
a,b,c=var('a,b,c')
Sol=desolve_system([x.diff(t)==c*e^(-t)*cos(t)-y\
,y.diff(t)==sin(t)*c*e^(-t)+x],[x,y],ivar=t,ics=[0,a,b])
```

$$\begin{aligned} x(t) &= -c \cos(t) e^{(-t)} + (a + c) \cos(t) - b \sin(t) \\ y(t) &= -ce^{(-t)} \sin(t) + b \cos(t) + (a + c) \sin(t) \end{aligned}$$

Calculamos la matriz fundamental del sistema, que resulta ser la matriz característica de γ .

```
c1=Sol[0].rhs()
c2=Sol[1].rhs()
c3=c*exp(-t)
e1={a:1,b:0,c:0}
e2={a:0,b:1,c:0}
e3={a:0,b:0,c:1}
G=matrix([\
[c1.substitute(e1),c1.substitute(e2),c1.substitute(e3)]\
,[c2.substitute(e1),c2.substitute(e2),c2.substitute(e3)]\
,[c3.substitute(e1),c3.substitute(e2),c3.substitute(e3)]])
```

$$G = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & -\cos(t)e^{(-t)} + \cos(t) \\ \sin(t) & \cos(t) & -e^{(-t)}\sin(t) + \sin(t) \\ 0 & 0 & e^{(-t)} \end{pmatrix}.$$

Por último los multiplicadores característicos

```
D=G.subs(t=2*pi).eigenmatrix_right()
```

$$\left(\begin{pmatrix} e^{(-2\pi)} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

Ejemplo 1.3. (¿, Ejemplo 6.4) Hallar matriz de monodromía y multiplicadores característicos para el sistema 2-dimensional

$$\begin{aligned} x'(t) &= -x - b * y + x^3 + x * y^2 \\ y'(t) &= b * x - y + x^2 * y + y^3 \end{aligned}$$

```
x,y,t,b=var('x,y,t,b')
X(x,y)=(-x-b*y+x^3+x*y^2,b*x-y+x^2*y+y^3)
```

Si se expresa el sistema en coordenadas polares se puede demostrar que $\gamma(t) = (\cos(bt), \sin(bt))$ es solución periódica de período $2\pi/b$. Chequeemos esta última afirmación de manera directa.

```
((X(cos(b*t),sin(b*t)))[0]-(cos(b*t)).diff(t)).simplify_full()
((X(cos(b*t),sin(b*t)))[1]-(sin(b*t)).diff(t)).simplify_full()
```

Matriz de Monodromía

```
A(t)=(X.diff())(cos(b*t),sin(b*t)).simplify_trig()
```

$$A(t) = \begin{pmatrix} 2 \cos(bt)^2 & 2 \cos(bt) \sin(bt) - b \\ 2 \cos(bt) \sin(bt) + b & -2 \cos(bt)^2 + 2 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio.

Demostrar que la matriz característica viene dada por:

```
G=matrix([[e^(2*t)*cos(b*t) , -sin(b*t) ]\
,[e^(2*t)*sin(b*t) , cos(b*t) ]])
```

$$G = \begin{pmatrix} \cos(bt) e^{(2t)} & -\sin(bt) \\ e^{(2t)} \sin(bt) & \cos(bt) \end{pmatrix}.$$

Multiplicadores característicos

```
D=G.subs(t==2*pi/b).eigenmatrix_right()
```

$$D = \left(\begin{pmatrix} e^{\left(\frac{4\pi}{b}\right)} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

1.2.4. Matriz de deformaciones

Definición 2.

Supongamos $X : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un campo de clase C^1 y $\Phi_t : \mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{O}$ el flujo asociado. Definimos la *matriz de deformaciones* H como

$$H(t, x) = (D_x \Phi_t)(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_t^1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \Phi_t^1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \Phi_t^n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \Phi_t^n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Teorema 1.

Sea $\gamma : I \rightarrow \mathcal{O}$ una solución, con $0 \in I$ y $c = \gamma(0)$. La matriz característica G de γ coincide con la matriz de deformaciones H en c :

$$G(t) = H(t, c).$$

Además

$$G(t)X(c) = X(\gamma(t)) \quad t \in I.$$

Luego si γ es periódica de período p tenemos

$$G(p)X(c) = X(c).$$

Entonces 1 es un autovalor y $X(c)$ (como γ no es equilibrio $X(c) \neq 0$) es un autovector asociado. En conclusión 1 es siempre un multiplicador característico.

Demostración. Derivando respecto a x la relación

$$\frac{d}{dt} \Phi_t(x) = X(\Phi_t(x)),$$

Obtenemos

$$\frac{\partial H}{\partial t}(t, x) = D_x X(\Phi_t(x))H(t, x)$$

Además $H(0, x) = I$, donde I es la identidad (**Ejercicio**). Como $\gamma(t) = \Phi_t(c)$ si reemplazamos x por c arriba tenemos

$$\frac{\partial H}{\partial t}(t, c) = A(t)H(t, c)$$

Lo cual termina por mostrar que $G(t) = H(t, c)$.

Ahora derivando

$$\gamma'(t) = X(\gamma(t)),$$

vemos que

$$\gamma''(t) = D_x X(\gamma(t))\gamma'(t) = A(t)\gamma'(t),$$

es decir que $\gamma'(t)$ es solución de las ecuaciones características. Además $\gamma'(0) = X(\gamma(0)) = X(c)$. Ahora como G es una matriz fundamental para las ecuaciones características

$$X(\gamma(t)) = \gamma'(t) = G(t)X(c).$$

Esto prueba la segunda afirmación. La tercera es consecuencia de que $\gamma(p) = \gamma(0) = c$. \square

Teorema 2.

Sea $f : \mathcal{O} \rightarrow \tilde{\mathcal{O}}$ un difeomorfismo entre abiertos de \mathbb{R}^n , $X : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo C^1 e $Y : \tilde{\mathcal{O}} \rightarrow \mathbb{R}^n$ su push-forward, es decir $Y = f_*(X)$. Sean H^X y H^Y las matrices de deformaciones de los campos X e Y respectivamente. También consideramos los flujos Φ_t^X y Φ_t^Y . Se tiene la siguiente relación

$$H(t, y) = Df(\Phi_t^X(f^{-1}(y)))H(t, f^{-1}(y)) (Df(f^{-1}(y)))^{-1}. \quad (1.3)$$

Si $\gamma : I \rightarrow \mathcal{O}$ es una solución de $x' = X(x)$, entonces $\beta = f \circ \gamma$ es solución de $y' = Y(y)$. Las matrices características de γ y β , digamos G^X y G^Y respectivamente, son similares. Específicamente

$$G^Y(t) = D_x f(\gamma(t)) G^X(t) (D_x f(c))^{-1}. \quad (1.4)$$

En particular si γ es periódica de periodo p , β es periódica con el mismo periodo y los multiplicadores característicos son los mismos.

Demostración. Derivando respecto a y la siguiente relación, que es sabido que ocurre,

$$\Phi_t^Y(y) = (f \circ \Phi_t^X \circ f^{-1})(y),$$

y usando la regla de la cadena obtenemos (1.3). Supongamos que $\gamma(0) = c$. Entonces $\gamma(t) = \Phi_t^X(c)$, $\beta(0) = f(c)$ y $\beta(t) = \Phi_t^Y(f(c))$. Luego, reemplazando y por $f(c)$ en (1.3) llegamos a (1.4). Reemplazando en esta última ecuación t por el período p vemos que $G^Y(p)$ y $G^X(p)$ son similares, de allí tienen el mismo espectro. \square

1.2.5. Radio espectral**Definición 3 (Radio espectral).**

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz, definimos su radio espectral $\rho(A)$ por

$$\rho(A) := \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Aquí, como es usual, $\sigma(A)$ es el espectro de A .

Sea \mathcal{F} la familia de todas las normas sobre \mathbb{R}^n . Si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $\|\cdot\| \in \mathcal{F}$, por abuso de notación seguiremos usando el mismo símbolo $\|A\|$ para la norma como operador sobre A inducida por $\|\cdot\|$. Es decir

$$\|A\| := \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|$$

Teorema 3 (Una representación del radio espectral).

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Entonces

$$\rho(A) = \inf_{\|\cdot\| \in \mathcal{F}} \|A\|.$$

Corolario 1.

1. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $\varepsilon > 0$. Entonces existe una norma $\|\cdot\| \in \mathcal{F}$ tal que

$$\rho(A) \leq \|A\| < \rho(A) + \varepsilon.$$
2. Si $\rho(A) < 1$ existirá una norma $\|\cdot\|_0$, para la cual A es una contracción, es decir $\|Ax\|_0 < q\|x\|_0$ y $q < 1$.
3. Si $\rho(A) < 1$ entonces $A^k x \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$.

1.2.6. Discusión heurística

Sea $\gamma(t)$ una solución periódica de período p con $\gamma(0) = c$ y $X(c) \neq 0$. Sea $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ los autovalores de $G(p)$, es decir los multiplicadores característicos de γ . Como 1 es autovalor, podemos suponer $\mu_1 = 1$. Un autovector asociado es $X(c)$. Sea M_c el hiperplano ortogonal a $X(c)$ que contiene a c , $M_c = \{x | (x - c) \cdot X(c) = 0\}$.

Vamos a demostrar que si $|\mu_j| < 1, j = 2, \dots, n$ entonces $G(p)$ restringida a M_c es una contracción.

Consideremos α una solución cercana en $t = 0$ a γ . Como vimos podemos escribir

$$\alpha \approx \gamma + \xi, \quad (1.5)$$

donde ξ resuelve las ecuaciones variacionales $\xi'(t) = A(t)\xi(t)$. Como $G(t)$ es una matriz fundamental para ese sistema

$$\xi(t) = G(t)\xi(0). \quad (1.6)$$

Ejercicio.

Demostrar que si $A(t)$ es una función a valores matriciales $A : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ que además es periódica con periodo p , entonces la matriz fundamental satisface que $G(t + p) = G(t)G(p)$. En particular

$$G(kp) = G(p)^k. \quad (1.7)$$

Considerando los tiempos $t = p, 2p, \dots$ y usando (1.5), (1.6) y (1.7) llegamos a

$$\alpha(kp) = c + G(p)^k \xi(0),$$

Vamos a ver que todo solución cercana a γ atraviesa M_c , así podremos suponer que $\xi(0) \in M_c$. Luego si $|\mu_j| < 1, j = 2, \dots, n$, entonces $\alpha(kp) \rightarrow c$.

Esta discusión da un indicio de por que podremos esperar estabilidad si $|\mu_j| < 1, j = 2, \dots, n$.

1.2.7. Estabilidad orbital

Definición 4 (Estabilidad orbital).

Sea γ una solución periódica y $\Gamma = \gamma(\mathbb{R})$. Diremos que γ es *orbitalmente estable* si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$d(x, \Gamma) < \delta \Rightarrow d(\Phi_t(x), \Gamma) < \varepsilon.$$

Si además tenemos que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} d(\Phi_t(x), \Gamma) = 0,$$

diremos que γ es *orbitalmente asintóticamente estable*

1.2.8. Mapeo de Poincaré

Teorema 4 (Mapeo de Poincaré).

Sea $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{O}$ una solución de período p del sistema $x' = X(x)$, donde $X : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Sea c y M_c como antes. Entonces existe un entorno abierto U de c y una función C^1 $\tau : U \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\tau(c) = p$

$$\Phi_{\tau(x)} \in M_c$$

La aplicación $P : U \cap M_c \rightarrow M_c$ dada por $P(x) = \Phi_{\tau(x)}(x)$ se llama Mapeo de Poincaré.

Demostración. Definimos

$$F(t, x) = (\Phi_t(x) - c) \cdot X(x).$$

Se tiene que $F(p, c) = 0$ y que

$$\frac{\partial}{\partial t} F(t, x) = X(\Phi_t(x)) \cdot X(x).$$

Luego

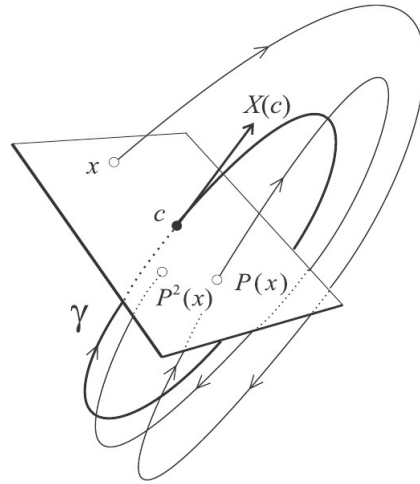
$$\frac{\partial F}{\partial t}(p, c) = |X(c)|^2 > 0.$$

Se satisfacen las hipótesis del teorema de la función implícita, por consiguiente existe un entorno abierto V de (p, c) y un entorno U de c tal que

$$\{(t, x) \in V \mid F(t, x) = 0\} = \{(t, x) \mid x \in U \text{ y } t = \tau(x)\}$$

Vale decir $F(\tau(x), x) = 0$, lo que implica $\Phi_{\tau(x)}(x) \in M_c$

□



□

Ejemplo 1.4. Hallar el Mapeo Poincaré de

$$\begin{cases} x'(t) &= x(t)^3 + x(t)y(t)^2 - by(t) - x(t) \\ y'(t) &= x(t)^2y(t) + y(t)^3 + bx(t) - y(t) \end{cases}$$

Convirtiendo a polares

```
t,b=var('t,b')
theta=function('theta')(t)
r=function('r')(t)
x=r*cos(theta)
y=r*sin(theta)
Eq1=x.diff(t)==-x-b*y+x^3+x*y^2
Eq2=y.diff(t)==b*x-y+x^2*y+y^3
X,Y=var('X,Y')
Eq1s=Eq1.substitute(theta.diff(t)==X,r.diff(t)==Y)
Eq2s=Eq2.substitute(theta.diff(t)==X,r.diff(t)==Y)
Eqpol=solve([Eq1s,Eq2s],[X,Y])
Eq1Pol=Eqpol[0][0].simplify_full()\
.substitute(X==theta.diff(t))
Eq2Pol=Eqpol[0][1].simplify_full()\
.substitute(Y==r.diff(t))
```

$$\begin{aligned} D[0](\theta)(t) &= b \\ D[0](r)(t) &= r(t)^3 - r(t) \\ \begin{cases} r'(t) &= r(t)^2(r(t) - 1) \\ \theta'(t) &= b. \end{cases} \end{aligned}$$

Que es un sistema desacoplado que se puede resolver por técnicas elementales. En particular se demuestra que $\gamma(t) = (x(t), y(t)) = (\cos(b * t), \sin(b * t))$ es solución periódica de período $2\pi/b$.

Calculemos la matriz de monodromía

Dados dos vectores $a, b \in \mathbb{R}^n$ definimos su producto tensorial $a \otimes b$ como el operador lineal $a \otimes b : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definido por

$$(a \otimes b)v = (b \cdot v)a, \quad \text{para } v \in \mathbb{R}^n.$$

Ejercicio Demostrar que respecto a la base canónica de \mathbb{R}^n la representación matricial del operador $a \otimes b$ tiene entrada ij

$$(a \otimes b)_{ij} = a_i b_j.$$

El mapeo de Poincaré P está definido en $U \cap M_c$, pero podemos extenderlo $\tilde{P} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ por

$$\tilde{P}(x) = \Phi_{\tau(x)}(x).$$

Matriz Jacobiana Mapeo Poincaré **Ejercicio:** Demostrar que

$$D\tilde{P}(x) = X(\tilde{P}(x)) \otimes \nabla\tau(x) + H(\tau(x), x),$$

en particular

$$D\tilde{P}(c) = X(c) \otimes \nabla\tau(c) + G(p).$$

Matriz Jacobiana Mapeo Poincaré Teorema Matriz Jacobiana Mapeo Poincaré Asumamos $c = 0$ y $X(0) = (0, 0, \dots, 0, 1)$. Entonces:

$$G(p) = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1,n-1} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ b_{n-1,1} & \cdots & b_{n-1,n-1} & 0 \\ * & \cdots & * & 1 \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

$$D\tilde{P}(0) = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1,n-1} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ b_{n-1,1} & \cdots & b_{n-1,n-1} & 0 \\ * & \cdots & * & * \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

Matriz Jacobiana Mapeo Poincaré Matriz Jacobiana Mapeo Poincaré Al subespacio $M_0 = \{(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) | x_i \in \mathbb{R}\}$ lo identificamos con \mathbb{R}^{n-1} y al abierto relativo $U \cap M_0$ con un abierto V de \mathbb{R}^{n-1} . Con estas identificaciones podemos pensar en el Jacobiano de $P : V \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ siendo este en $c = 0$ dado por

$$DP(0) = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1,n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n-1,1} & \cdots & b_{n-1,n-1} \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

Luego si $\mu_1 = 1, \mu_2, \dots, \mu_n$ son los multiplicadores característicos de γ entonces μ_2, \dots, μ_n son autovalores de $DP(0)$.

Matriz Jacobiana Mapeo Poincaré **Demostración** Como $G(p)X(0) = X(0)$ y como $X(0) = (0, 0, \dots, 0, 1)$ vemos que la n -ésima columna de $G(p)$ es también el n -ésimo vector canónico. Esto justifica (1.8). Tenemos que

$$X(0) \otimes \nabla\tau(0) = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ * & \cdots & * & * \end{bmatrix}$$

Como $D\tilde{P}(0) = X(0) \otimes \nabla\tau(0) + G(p)$ se tiene (1.9).

Matriz Jacobiana Mapeo Poincaré Sea I_k la matriz identidad de $k \times k$, B la matriz $B = \{b_{ij}\}_{i,j=1}^{n-1}$. Como

$$\det(G(p) - \mu I_n) = (1 - \mu) \det(B - \mu I_{n-1}),$$

los autovalores de B son precisamente μ_2, \dots, μ_n .

Consideramos la incrustación $i : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$, dada por $i(x_1, \dots, x_{n-1}) = (x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$ y la proyección $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$, dada por $\rho(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{n-1})$. Con esta notación

$$P(v) = \rho(\tilde{P}(i(v))), \quad \text{para } v \in V = \rho(U \cap M_0)$$

por la regla de la cadena,

$$DP(0) = [I_{n-1} \quad 0_{(n-1) \times n}] \begin{bmatrix} B & 0_{(n-1) \times n} \\ * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n-1} \\ 0_{n \times (n-1)} \end{bmatrix} = B$$

□

Matriz Jacobiana Mapeo Poincaré **Ejercicio** ¿Cómo podemos reducir el caso general c no necesariamente 0 y $X(c) \neq 0$ al caso cosiderado?

Teorema Estabilidad Orbital Sea $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{O}$ una solución de período p del sistema $x' = X(x)$, donde $X : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Sea $c = \gamma(0)$ y M_c como antes. Supongamos que $n - 1$ de los múltiplos característicos μ_2, \dots, μ_n tienen módulo menor a 1. Entonces γ es orbitalmente estable. Además, si $|\mu_j| < a < 1$, para $j = 2, \dots, n$, entonces existe $L > 0$ y un abierto Ω , con $\Gamma \subset \Omega$ tal que si $x \in \Omega$, existe $T \in \mathbb{R}$ tal que

$$|\Phi_{T+t}(x) - \gamma(t)| \leq La^{t/p}, \quad (1.11)$$

para todo $t \geq p$. El número T , que es el único con la propiedad establecida (**ejercicio**), se denomina la *fase asintótica* de x .

Teorema Estabilidad Orbital Demostración Como antes, asumamos $c = 0$ y $X(0) = (0, 0, \dots, 0, 1)$. Sea Ω_0 un abierto con $\Gamma \subset \Omega_0$ y $\bar{\Omega}_0$ compacto. Pongamos $\Phi(t, x) = \Phi_t(x)$, entonces $\Phi : \mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Tenemos que $\Phi^{-1}(\Omega_0)$ es un abierto y $(t, 0) \in \Phi^{-1}(\Omega_0)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Luego para cada $t \in [0, 2p]$ existe $(a_t, b_t) \ni t$ y $R_t > 0$ tal que $(t, 0) \in (a_t, b_t) \times B_{R_t}(0) \subset \Phi^{-1}(\Omega_0)$. Como $\{(a_t, b_t)\}_{t \in [0, 2p]}$ es un cubrimiento por abiertos del compacto $[0, 2p]$, podemos cubrir por finitos (a_{t_i}, b_{t_i}) , $i = 1, \dots, m$. Si ahora tomamos $0 < R < R_{t_i}$, $i = 1, \dots, m$, tendremos que

$$[0, 2p] \times \bar{B}_R(0) \subset \Phi^{-1}(\Omega_0).$$

Teorema Estabilidad Orbital Sea $0 \in U \subset \mathcal{O}$ un entorno abierto donde está definida y es de clase C^1 el mapeo de retorno $\tau : U \rightarrow \mathbb{R}$. Podemos asumir $B_R(0) = U$. Sea \tilde{P} , como antes, $\tilde{P} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $\tilde{P}(x) = \Phi(\tau(x), x)$. Por el Teorema anterior y las hipótesis sabemos que los autovalores de $DP(0)$ tienen todos módulo menor que a . Por el resultado de álgebra lineal tenemos que existe una norma $\|\cdot\|_0$ tal que

$$\|DP(0)x\|_0 < a\|x\|_0.$$

Ejercicio Eligiendo $\delta > 0$ suficientemente chico tendremos que $\|x\|_0 < \delta$ implica $\|P(x)\|_0 \leq a\|x\|_0$.

Podemos asumir $B_\delta(0) \subset U$, donde la bola la tomamos respecto a la norma $\|\cdot\|_0$. Como, en particular, $\|P(x)\|_0 < \delta$, tendremos que $P(W) \subset W$, donde $W = B_\delta(0) \cap M_0$. Luego tenemos definida la secuencia $P^k(x)$, $x \in W$, $k = 1, 2, \dots$

Teorema Estabilidad Orbital De la continuidad de $\tau : W \rightarrow \mathbb{R}$ podemos suponer que $|\tau(x) - p| \leq p/2$ para todo $x \in W$. En particular $p/2 \leq \tau(x) \leq 2p$.

Sea

$$\Omega := \{\Phi_t(x) | x \in W, t \in [0, \tau(x)]\},$$

Se tiene que $\Omega \subset \Omega_0$ y Ω es un entorno de Γ (**Ejercicio**).

Veamos que Ω es invariante $\Phi_t(\Omega) \subset \Omega$, $t \geq 0$. Esto probará la estabilidad orbital.

Sea $x \in \Omega$, entonces existe $w_0 \in W$ y $t_0 \in [0, \tau(w_0)]$ tal que $x = \Phi_{t_0}(w_0)$. Ahora definimos:

$$\begin{aligned} w_1 &= P(w_0) & \text{y} & & t_1 &= \tau(w_0) - t_0 \\ w_k &= P(w_{k-1}) & \text{y} & & t_k &= \tau(w_{k-1}) + t_{k-1} \quad \text{para } k = 2, \dots, \end{aligned}$$

Teorema Estabilidad Orbital Ejercicio: $\Phi_{t_k}(x) = w_k \in W$, $k = 1, 2, \dots$

Como $\tau(y) \geq p/2$, para $y \in W$, tenemos que $t_k \rightarrow \infty$. Luego $[0, \infty) \subset I_x$ y $\Phi_t(x)$, $x \in \Omega$, esta definida para $t \geq 0$. Para probar la invariancia tomemos $x \in \Omega$ y $t > 0$. Supongamos $t_k < t \leq t_{k+1}$, $k \geq 1$, entonces

$$\Phi_t(x) = \Phi_{t-t_k}(\Phi_{t_k}(x)) = \Phi_{t-t_k}(w_k) \in \Omega.$$

Si $t \in (0, t_1)$, entonces $t + t_0 < t_1 + t_0 = \tau(w_0)$ y

$$\Phi_t(x) = \Phi_t(\Phi_{t_0}(w_0)) = \Phi_{t+t_0}(w_0) \in \Omega.$$

Teorema Estabilidad Orbital Ahora probaremos la estabilidad orbital asintótica. Vamos a establecer algunas desigualdades cuya justificación discutiremos en clase. La compacidad de $\overline{\Omega}_0$ y la continuidad de X nos dan un $L_1 > 0$ tal que

$$\|X(y)\|_0 \leq L_1, \quad y \in \overline{\Omega}_0$$

Como $\Phi \in C^1$ existe $L_2 > 0$ tal que

$$\|\Phi_t(y) - \Phi_t(x)\|_0 \leq L_2\|y - x\|_0 \quad x, y \in \overline{B}_R(0), \quad t \in [0, 2p].$$

Por las mismas razones existe $L_3 > 0$ tal que

$$\|\tau(y) - \tau(x)\|_0 \leq L_3\|y - x\|_0 \quad x, y \in \overline{B}_R(0).$$

Teorema Estabilidad Orbital Tenemos

$$\|w_k\|_0 = \|P(w_{k-1})\|_0 \leq a\|w_{k-1}\|_0,$$

Por inducción

$$\|w_k\|_0 \leq a^k\|w_0\|_0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Pongamos $T_k := t_k - kp, k = 0, 1, \dots$

$$\begin{aligned} |T_{k+1} - T_k| &= |t_{k+1} - t_k - p| \\ |\tau(w_k) - p| &= |\tau(w_k) - \tau(0)| \\ &\leq L_3\|w_k\|_0 \leq L_3a^k\|w_0\|_0. \end{aligned}$$

Teorema Estabilidad Orbital La desigualdad anterior implica que T_k es una sucesión de Cauchy, luego existe T tal que $\lim T_k = T$. Este número resulta la fase de x .

Ahora demostremos (1.11). Sea $t \geq p$ y tomemos $k \in \mathbb{N}$ con $kp \leq t < (k+1)p$. Sea $s := t - kp$.

$$\Phi_{s+t_k}(x) = \Phi_s(\Phi_{t_k}(x)) = \Phi_s(w_k)$$

y $\Phi_s(0) = \gamma(s)$. Como $s \in [0, p]$, se puede usar la desigualdad Lipschitziana para Φ_s para conseguir

$$\begin{aligned} \|\Phi_{s+t_k}(x) - \gamma(s)\|_0 &\leq \|\Phi_s(w_k) - \Phi_s(0)\|_0 \\ &\leq L_2\|w_k\|_0 \\ &\leq L_2a^k\|w_0\|_0. \end{aligned}$$

Teorema Estabilidad Orbital

Sea $s_1 < s_2$

$$\begin{aligned} \|\Phi_{s_1}(x) - \Phi_{s_2}(x)\|_0 &\leq \max_{[s_1, s_2]} \left\| \frac{\partial}{\partial s} \Phi_s(x) \right\|_0 |s_1 - s_2| \\ &\leq \max_{[s_1, s_2]} \|X(\Phi_s(x))\|_0 |s_1 - s_2| \leq L_1|s_1 - s_2|. \end{aligned}$$

Tomando $s_2 = s + t_k$ y $s_1 = s + kp + T$, en este caso $s_2 - s_1 = T_k - T$ y dejamos como **ejercicio** probar que

$$\|\Phi_{s+t_k}(x) - \Phi_{s+kp+T}(x)\|_0 \leq L_1|T_k - T| \leq \frac{L_1L_3\|w_0\|_0}{1-a}a^k.$$

Luego

$$\|\Phi_{t+T}(x) - \gamma(t)\|_0 = \|\Phi_{s+kp+T}(x) - \gamma(s)\|_0 \leq Ka^{k+1} \leq Ka^{t/p}.$$

El caso general se aborda como es usual, mediante un push forward. \square

Corolario Estabilidad Orbital Sea $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{O}$ una solución de período p del sistema $x' = X(x)$, donde $X : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Sea $c = \gamma(0)$ y M_c como antes. Sea $P : U \cap M_c \rightarrow M_c$ el mapeo de Poincare. Supongamos que para cada entorno \tilde{W} de c en $U \cap M_c$ existe un entorno $W \subset \tilde{W}$ de c en $U \cap M_c$ tal que

$$P(W) \subset W.$$

Entonces γ es orbitalmente estable.