FACULTAD DE CS. EXACTAS, FÍSICO-QUÍMICAS Y NATURALES
DEPTO DE MATEMÁTICA.
SEGUNDO CUATRIMESTRE DE 2015
CÁLCULO VARIACIONES
PRÁCTICA 2: FUNCIONES ABSOLUTAMENTE CONTINUAS Y DE VARIACIÓN ACOTADA.

Ejercicio 1 Supongamos que f y f son de variación acotada sobre $[a, b]$ y $a, b \in \mathbb{R}$. Entonces $af + bg$ y fg son de variación acotada en $[a, b]$. Si $g \geq \epsilon$ en $[a, b]$ para algún $\epsilon > 0$ entonces f/g es de variación acotada. ¿Se puede reemplazar $g \geq \epsilon$ por $g > 0$?

Ejercicio 2 Demostrar que si $V_a^b f < \infty$ entonces

$$V_a^b f = V_a^{b+} f + V_a^{b-} f \quad \text{y} \quad f(b) - f(a) = V_a^{b+} f - V_a^{b-} f \; .$$

Ejercicio 3 Se define $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ de la siguiente forma:

$$f(0) = 0, \quad f\left(\frac{1}{2n+1}\right) = 0 \quad \text{y} \quad f\left(\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

y en cada intervalo de la forma $[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ la función f es lineal. Demostrar que f no es de variación acotada.

Ejercicio 4 Demostrar que

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{\pi}{x}\right) & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

es de variación acotada.

Ejercicio 5 Supongamos que la sucesión de funciones $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ converge puntualmente a f cuando $n \to \infty$. Demostrar que

$$V_a^b f \leq \liminf_{n\to\infty} V_a^b f_n.$$

Demostrar que no vale en general la igualdad en desigualdad anterior. Para ello considerar la sucesión $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x \in \left(0, \frac{1}{n}\right] \\ 0 & \text{si } x \in \left(\frac{1}{n}, 1\right] \end{cases}$$

Ejercicio 6 Computar las derivadas de Dini D^+ y D^- para la función del primer ejercicio.

Ejercicio 7 Si f tiene un máximo en $c \in (a, b)$ entonces $D^- f(c) \geq 0$.

Ejercicio 8 Supongamos $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ absolutamente continua. Entonces f es Lipschitz en $[a, b]$ si y sólo si $f' \in L^\infty([a, b])$.

Ejercicio 9 Demostrar que la función de Cantor es continua pero no absolutamente continua.

Ejercicio 10 Demostrar que si $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ son absolutamente continuas en $[a, b]$ entonces vale la fórmula integral por partes

$$\int_a^b fg' dx = fg\Big|_a^b - \int_a^b f' g dx.$$