

1. Series de potencias

En esta sección recordamos algunos conceptos y teoremas sobre series de potencias. Dado que este tema es motivo de un estudio más profundo en otras materias de la licenciatura en matemática omitimos algunas demostraciones.

1.1. Definición

Definición 1. Una serie de potencias es una serie de la forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

donde a_n , $n = 0, 1, \dots$, z_0 y z son elementos de \mathbb{R} .

Estamos interesados en determinar los valores de z para los cuales una serie converge.

Ejemplo 1. La serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n,$$

es una serie de potencias. Aquí $a_n = 1$, $n = 0, 1, \dots$ y $z_0 = 0$. Esta serie converge para $|z| < 1$ a

$$\frac{1}{1 - z}$$

y no converge para cualquier otro valor de $z \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 2. Supongamos $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, donde I es un intervalo abierto $I = (a, b)$ y que f tiene derivadas de todo orden en $z_0 \in I$. Entonces es posible construir la serie de Taylor de f en z_0 que es una serie de potencias. Recordemos que esta serie es

$$S(f, z_0, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n.$$

1.2. Límites superior e inferior

Definición 2. Dada una sucesión de números reales x_n , consideramos una nueva sucesión:

$$A_n = \sup\{x_n, x_{n+1}, \dots\}$$

La nueva sucesión de reales A_n es siempre no creciente ($A_n \geq A_{n+1}$), luego tiene un límite (puede ser $\pm\infty$). A este límite lo llamamos **el límite superior de x_n** . Lo denotamos por \limsup . Es decir:

$$\limsup x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup\{x_n, x_{n+1}, \dots\}.$$

Tomando ínfimo en lugar de supremo conseguimos **el límite inferior** (\liminf).

Ejemplo 3. Si $x_n = (-1)^n$, entonces

$$\{x_n, x_{n+1}, \dots\} = \{\pm 1, \mp 1, \pm 1, \dots\}.$$

El supremo de este conjunto es para todo n igual a 1 y el ínfimo igual a -1. Luego $\liminf x_n = -1$ y $\limsup = 1$.

Ejemplo 4. Si $x_n = 1/n$, si n es par y $x_n = 1$ si n es impar, entonces el conjunto

$$\{x_n, x_{n+1}, \dots\}$$

tiene por supremo 1 y el ínfimo igual a 0. Luego $\liminf x_n = 0$ y $\limsup = 1$.

Teorema 1. Propiedades Sea x_n e y_n dos sucesiones de números reales, entonces:

1. El \limsup y el \liminf existen siempre si se permite que $\pm\infty$ sean sus posibles valores.
2. $\liminf x_n \leq \limsup x_n$.
3. $\liminf x_n = \limsup x_n$ si y solo si el $\lim x_n$ existe. En este caso todos los límites coinciden.
4. $\liminf(x_n + y_n) \geq \liminf x_n + \liminf y_n$.
5. $\limsup(x_n + y_n) \leq \limsup x_n + \limsup y_n$

1.3. Radio de convergencia

Definición 3. Dada la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

definimos el **radio de convergencia** R de la siguiente forma:

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}.$$

Ejemplo 5. La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n,$$

tiene radio de convergencia:

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} 1^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1^{1/n} = 1$$

Luego $R = 1$.

Ejemplo 6. La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{M}\right)^n z^n,$$

tiene radio de convergencia:

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{1}{M}\right)^n\right)^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{1}{M}\right)^n\right)^{1/n} = \frac{1}{M}$$

Luego $R = M$.

Ejemplo 7. Fijemos $M > 0$ y n un natural tal que $[n/2] > M$ (aquí $[x]$ es la parte entera de x). Entonces, como $n - [n/2] \geq [n/2] > M$

$$\begin{aligned} n! &= n(n-1) \cdots 1 > n(n-1) \cdots (n - [n/2]) \\ &> \underbrace{M \cdots M}_{[n/2] - \text{veces}} \\ &\geq M^{[n/2]} \\ &> M^{n/3} \end{aligned}$$

Luego

$$\frac{1}{R} := \limsup_{n \rightarrow \infty} (1/n!)^{1/n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{M^{n/3}}\right)^{1/n} = \frac{1}{\sqrt[3]{M}}$$

Como M es arbitrario, haciendo $M \rightarrow \infty$ vemos que el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ es $R = \infty$.

Teorema 2. Consideremos la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

Entonces:

1. Si $|z - z_0| < R$, la serie converge absolutamente en z .
2. Si $|z - z_0| > R$, la serie diverge.
3. Si $|z - z_0| = R$, no se afirma nada.

Dem. Se puede suponer sin pérdida de generalidad $z_0 = 0$. Supongamos $0 < R < \infty$. Sea $L = 1/R$ y tomemos $\varepsilon > 0$ pequeño. Como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup\{|a_n|^{1/n}, |a_{n+1}|^{1/n+1}, \dots\} = L$$

para n_0 suficientemente grande

$$\sup\{|a_n|^{1/n}, |a_{n+1}|^{1/n+1}, \dots\} < L + \varepsilon.$$

Así

$$|a_n|^{1/n} < L + \varepsilon \quad \text{para } n \geq n_0.$$

Elijamos $0 < r < 1/(L + \varepsilon) < 1/L = R$. Si $|z| < r$ entonces

$$|a_n||z|^n < (L + \varepsilon)^n r^n \quad \text{para } n \geq n_0.$$

Pero $r(L + \varepsilon) < 1$. La desigualdad de arriba y el teorema de comparación (notar que el miembro de la derecha forma una serie geométrica) implican que la serie converge absolutamente para este z . Como ε es arbitrario, dado cualquier z , con $|z| < 1/L$, tenemos un ε lo suficientemente chico para que $|z| < 1/(L + \varepsilon)$. \square

Ejercicio 1. Demostrar los casos $R = 0$, $R = \infty$ y el segundo inciso.

Teorema 3. La función

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

es diferenciable dentro en $\{z : |z - z_0| < R\}$. Además

$$f'(z) = g(z) := \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1},$$

teniendo esta serie el mismo radio de convergencia que el de f .

Dem. Nuevamente supondremos $z_0 = 0$. La afirmación sobre el radio de convergencia es consecuencia de que $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/n} = 1$. Como el radio R' de convergencia de g es:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R'} &= \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}(n+1)|^{1/(n+1)} \\ &\stackrel{\text{Ejercicio}}{=} \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}|^{1/(n+1)} \lim_{n \rightarrow \infty} |(n+1)|^{1/(n+1)} \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}|^{1/(n+1)} = \frac{1}{R} \end{aligned}$$

Ahora veamos que f es holomorfa y $f' = g$. Sea $0 < r < R$, $|z_0| < r$ y $N \in \mathbb{N}$. Pongamos:

$$\begin{aligned} f(z) &= S_N(z) + E_N(z), \\ S_N(z) &= \sum_{n=0}^N a_n z^n \quad \text{y} \quad E_N(z) = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n z^n \end{aligned}$$

Tomemos $|h| < r - |z_0|$, así $|z_0 + h| < r$. Tenemos

$$\begin{aligned} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} - g(z_0) &= \frac{S_N(z_0 + h) - S_N(z_0)}{h} - S'_N(z_0) \\ &\quad + S'_N(z_0) - g(z_0) \\ &\quad + \frac{E_N(z_0 + h) - E_N(z_0)}{h} \end{aligned}$$

Ahora si $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \left| \frac{E_N(z_0 + h) - E_N(z_0)}{h} \right| &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \left| \frac{(z_0 + h)^n - z_0^n}{h} \right| \\ &= \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| (|z_0|^{n-1} + |z_0|^{n-2}h + \dots + h^{n-1}) \\ &\leq 2 \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| nr^{n-1} < \varepsilon \end{aligned}$$

Para N suficientemente grande. Además como $S'_N(z) \rightarrow g(z)$ cuando $N \rightarrow \infty$ podemos elegir, a su vez, N suficientemente grande para que

$$|S'_N(z_0) - g(z_0)| < \varepsilon$$

Fijemos un N que satisfaga las condiciones anteriores. Ahora podemos encontrar $\delta > 0$ para que $|h| < \delta$ cumpla que

$$\left| \frac{S_N(z_0 + h) - S_N(z_0)}{h} - S'_N(z_0) \right| < \varepsilon.$$

Esto muestra que $f'(z_0) = g(z_0)$ y por consiguiente f es derivable. \square

Corolario 1. Una serie de potencias es infinitamente diferenciable. Las sucesivas derivadas se obtienen derivando término a término la serie. El radio de convergencia se conserva.

Ejemplo 8. Hemos visto que la serie:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

tiene radio de convergencia infinito y por ende converge en \mathbb{R} . Ahora vemos que

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

Luego f resuelve la simple ecuación diferencial $f'(z) = f(z)$. La misma ecuación es resuelta por $g(z) = e^z$. Además $f(0) = g(0) = 1$. Por el Teorema de existencia y unicidad $f(z) = g(z)$ para todo z . Hemos probado la importante fórmula.

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n \quad (1)$$

1.4. Funciones analíticas

Definición 4. Una función $f : \Omega \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se dirá analítica si para cada $z_0 \in \Omega$, existe un R y $a_n \in \mathbb{R}$, tal que vale la igualdad:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad \text{para } |z - z_0| < R$$

Ejercicio 2. Si f es analítica tenemos la siguiente fórmula

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

para los coeficientes a_n .

Teorema 4. Operaciones entre series de potencias Supongamos que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ y $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_0)^n$ son series de potencias con radio de convergencia mayor o igual a $R > 0$. Entonces $f + g$ y fg son funciones analíticas que tienen por desarrollo en serie

$$(f + g)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)(z - z_0)^n$$

$$(fg)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) (z - z_0)^n,$$

y los radios de convergencia de las series anteriores es, al menos, R .

2. Solución de EDO mediante series de potencias. Método coeficientes indeterminados

2.1. Método coeficientes indeterminados

Dada una EDO

$$(1) \quad F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (2)$$

queremos encontrar el desarrollo en series de potencias de la solución general a esta ecuación. El método que estudiaremos se denomina **metodo de los coeficientes indeterminados**. Consiste en proponer el desarrollo en serie de la solución

$$y(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots$$

reemplazar $y(x)$ por este desarrollo en en la ecuación (1) y tratar de resolver la ecuación resultante para los coeficientes (indeterminados) a_n . El método suele funcionar en algunas ecuaciones. Desarrollemos un ejemplo.

Ejemplo 9. Hallar el desarrollo en serie de la solución del siguiente pvi

$$\begin{cases} y' &= y \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$

La solución, es bien sabido, es $y(x) = e^x$, pero pretendemos reencontrarla por el método expuesto. Escribimos

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$$

$$y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + (n+1)a_{n+1}x^n + \dots$$

La igualdad $y' = y$ implica que

$$\begin{aligned} a_1 &= a_0 \\ a_2 &= \frac{a_1}{2} \\ a_3 &= \frac{a_2}{3} \\ &\vdots \\ a_{n+1} &= \frac{a_n}{n+1} \end{aligned}$$

Si iteramos la fórmula $a_{n+1} = a_n/(n+1)$, obtenemos

$$a_n = \frac{1}{n} a_{n-1} = \frac{1}{n(n-1)} a_{n-2} = \cdots = \frac{1}{n(n-1) \cdots 1} a_0 = \frac{a_0}{n!}.$$

Pero $a_0 = y(0) = 1$. Luego

$$a_n = \frac{1}{n!} \quad (3)$$

También podemos usar SAGE para obtener el resultado.

```
"""
Método de coeficientes indeterminados para
la ecuación y'=y
"""
#La serie la sumamos hasta X^orden
orden=7
# Lista coeficientes
Lista=['a%s'%i for i in range(orden)]
#expresiones polinómicos con los an
A = PolynomialRing(QQ,Lista)
#Series con coeficientes en A
Series.<X> = PowerSeriesRing(A)
#n-upla de los a_n
Coef=A.gens()
#serie truncada en orden
y=sum(Coef[i]*X^i for i in range(orden))
#sustituyo en la ecuación
Ecua=y.derivative()-y
#lista de los a_n convertidos en expresión
a= [SR(i) for i in A.gens()]
""" A las ecuaciones le agrego a0=1 y evito usar la
última pues tiene un problema que viene del truncamiento
"""
Ecuaciones=[a[0]-1,list(Ecua)[: -1]]
```



```
#resuelvo las relaciones de recurrencia
Sol_a_n=solve(Ecuaciones,a)
"""Lista de los coeficientes convertidos en racionales """
L=[QQ(f.rhs()) for f in Sol_a_n[0]]
# Desarrollo en serie de la solución
y=sum([L[i]*X^i for i in range(orden)]) + O(X^orden)
```

Vemos que la solución es

$$y(x) = 1 + X + \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{6}X^3 + \frac{1}{24}X^4 + \frac{1}{120}X^5 + \frac{1}{720}X^6 + O(X^7) \quad (4)$$

2.2. Relaciones de recurrencia

La expresión $a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1}$ es un ejemplo de relación de recurrencia.

Definición 5. Una relación de recurrencia para una sucesión b_n de números reales es una sucesión de funciones $f_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que relaciona b_{n+1} con los términos anteriores de la sucesión por medio de la expresión

$$b_{n+1} = f_n(b_1, \dots, b_n) \quad (5)$$

Resolver una relación de recurrencia es encontrar una fórmula explícita de b_n como función de n .

Hay técnicas y métodos para resolver relaciones de recurrencia que guardan analogías con técnicas y métodos de resolver ecuaciones diferenciales. No vamos a desarrollar este tema en este curso, sólo agregamos que SAGE resuelve relaciones recurrentes. Para ello se necesita de un módulo extra, también basado en Python, llamado Sympy. Este módulo tiene el comando `rsolve` para resolver relaciones de recurrencia. Sympy tiene sus propios comandos, que son parecidos pero no iguales a SAGE.

Ejemplo 10. Resolvamos la sucesión de Fibonacci $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ con SAGE.

```
""" Resolvemos la relación de recurrencia
de los números de Fibonacci"""
#Importamos Sympy
from sympy import *
#En Sympy se declaran símbolos en lugar de variables
n=Symbol('n', integer=True)
#Y así se declaran funciones
y = Function('y')
#Así una ecuación
f=Equality(y(n), y(n-1)+y(n-2))
#Así la resolvemos
```

`rsolve(f, y(n))`

El resultado es

$$a_n = C_0 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \right)^n + C_1 \left(-\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} \right)^n \quad (6)$$

Las constantes arbitrarias C_0 y C_1 aparecen porque una relación de recurrencia no tiene una única solución. Se dice que una relación de recurrencia tiene orden k o es de k -términos si el coeficiente a_n se expresa en función de k de los anteriores. En general la solución general de una relación de recurrencia de k -términos tiene k constantes arbitrarias. Por consiguiente, si queremos una única solución debemos tener k relaciones extras. Usualmente esto se consigue dando los valores de los k -primeros términos a_0, \dots, a_k . Por ejemplo, en la sucesión de Fibonacci si pedimos $a_0 = a_1 = 1$.

```
reset()
n=var('n')
C0,C1=var('C0,C1')
A=C0*(1/2+sqrt(5)/2)^n+C1*(1/2-sqrt(5)/2)^n
Cval=solve([A(n=0)-1,A(n=1)-1],[C0,C1],solution_dict=True)
Fib=A.subs(Cval[0])
[Fib(n=i).expand() for i in range(10)]
```

Llegamos a la fórmula

$$a_n = \frac{1}{10} \left(\frac{1}{2} \sqrt{5} + \frac{1}{2} \right)^n (\sqrt{5} + 5) - \frac{1}{10} \left(-\frac{1}{2} \sqrt{5} + \frac{1}{2} \right)^n (\sqrt{5} - 5). \quad (7)$$

Los primeros 20 números de Fibonacci son

$[1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765]$.

2.3. Serie binomial

Se puede utilizar el método de coeficientes indeterminados para encontrar desarrollos en serie de una función f . La técnica consiste en encontrar un pvi que satisfaga f y le aplicamos el método de coeficientes indeterminados a ese pvi.

Ejemplo 11. Encontrar el desarrollo en serie de la función

$$y(x) = (1+x)^p \quad p \in \mathbb{R}$$

La función $y(x)$ resuelve el pvi $(1+x)y'(x) = py$, $y(0) = 1$. apliquemos el método de coeficientes indeterminados a este pvi. Como

$$\begin{aligned} y &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots \\ y' &= a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + (n+1)a_{n+1}x^n + \dots \end{aligned}$$

Tenemos

$$\begin{aligned} py &= pa_0 + pa_1x + pa_2x^2 + \cdots + pa_nx^n + \cdots \\ (1+x)y' &= a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + (n+1)a_{n+1}x^n + \cdots \\ &\quad + a_1x + 2a_2x^2 + 3a_3x^3 + \cdots + na_nx^n + \cdots \end{aligned}$$

$$0 = (1+x)y' - py = (a_1 - pa_0) + (a_1 + 2a_2 - pa_1)x + \cdots + ((n+1)a_{n+1} + na_n - pa_n)x^n + \cdots$$

Tenemos la relación

$$a_{n+1} = \frac{(p-n)}{n+1} a_n.$$

Que es una relación de recurrencia de un sólo término. Estas relaciones se resuelven iterando la relación de manera sucesiva de modo de relacionar a_n con a_0

$$a_n = \frac{(p-n+1)}{n} a_{n-1} = \frac{(p-n+1)(p-n+2)}{n(n-1)} a_{n-2} = \cdots = \frac{(p-n+1)(p-n+2) \cdots p}{n!} a_0.$$

Como $a_0 = y(0) = 1$ vemos que

$$a_n = \frac{(p-n+1)(p-n+2) \cdots p}{n!}. \quad (8)$$

Si $p \in \mathbb{N}$ entonces $a_n = 0$ para $n > p$. Esto es claro, por otro lado, ya que en este caso $(1+x)^p$ es un polinomio. Por fórmula del binomio de Newton los coeficientes cuando $p \in \mathbb{N}$ no son más que los coeficientes binomiales

$$a_n = \binom{p}{n}$$

Cuando $p \in \mathbb{R}$ aún vamos a seguir denominado a a_n , dado por la fórmula (8), el coeficiente binomial. La serie resultante se llama la serie binomial. Cuando $p \in \mathbb{R} - \mathbb{N}$ es una serie infinita y no un polinomio. Notar que para p no entero positivo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|p-n|}{|n+1|} = 1$$

Luego la serie tiene radio de convergencia 1. Hemos demostrado así que vale la siguiente fórmula, que es una generalización de la fórmula binomial de Newton

$$(1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2!}x^2 + \cdots = 1 + \binom{p}{1}x + \binom{p}{2}x^2 + \cdots \quad (9)$$

Esta importante serie se denomina serie binomial.

"" "

Método de coeficientes indeterminados para la ecuación $(1+x)y' = py$, $y(0) = 1$

```

"""
orden=4
#En la lista de coeficientes debemos poner p
Lista=['a%s'%i for i in range(orden)]+['p']
A = PolynomialRing(QQ,Lista)
Series.<X> = PowerSeriesRing(A)
Coef=A.gens()
y=sum(Coef[i]*X^i for i in range(orden))
Ecu=(1+X)*y.derivative()-A.gens()[-1]*y
a= [SR(i) for i in A.gens()[:-1]]
Ecuaciones=[a[0]-1,list(Ecu)[:-1]]
Sol_a_n=solve(Ecuaciones,a)
L=[f.rhs().factor() for f in Sol_a_n[0]]
x=var('x')
y=sum([L[i]*x^i for i in range(orden)])

```

$$y(x) = \frac{1}{6}(p-1)(p-2)px^3 + \frac{1}{2}(p-1)px^2 + px + 1. \quad (10)$$

2.4. Oscilador armónico

Ejemplo 12. Consideremos la ecuación

$$y'' + \omega^2 y = 0.$$

Esta es una ecuación de segundo orden. Veamos si el método de coeficientes indeterminados nos lleva a la solución. Se tiene

$$\begin{aligned} \omega^2 y &= \omega^2 a_0 + \omega^2 a_1 x + \omega^2 a_2 x^2 + \cdots + \omega^2 a_n x^n + \cdots \\ y'' &= 2a_2 + 2 \cdot 3a_3 x + \cdots + (n+1)(n+2)a_{n+2}x^n + \cdots \end{aligned}$$

$$0 = y'' + \omega^2 y = (\omega^2 a_0 + 2a_2) + (\omega^2 a_1 + 2 \cdot 3a_3)x + \cdots + (\omega^2 a_n + (n+1)(n+2)a_{n+2})x^n + \cdots$$

Encontramos la relación de recurrencia de dos términos

$$a_{n+2} = -\frac{\omega^2 a_n}{(n+1)(n+2)}. \quad (11)$$

Notar que en este caso a_1 y, obviamente, a_0 no se relacionan con ningún coeficiente anterior. Por este motivo es de esperar que podamos elegir de manera arbitraria a_0 y a_1 . Esto está de acuerdo con el hecho que remarcamos antes de que en una relación de recurrencia de dos términos aparecen dos constantes arbitrarias y también está de

acuerdo con que la solución general de una ecuación de segundo orden tiene dos constantes arbitrarias. En este caso resolvemos la relación de recurrencia relacionando a_n con a_0 cuando n es impar y con a_1 cuando es impar. Concretamente si $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$,

$$a_{2k} = -\frac{\omega^2}{2k(2k-2)}a_{2k-2} = \cdots = (-1)^k \frac{\omega^{2k}}{(2k)!}a_0.$$

En cambio si $n = 2k + 1$ es impar

$$a_{2k+1} = -\frac{\omega^2}{2k+1}2k-1a_{2k-1} = \cdots = (-1)^k \frac{\omega^{2k}}{(2k+1)!}a_1.$$

Agrupando los términos pares y los impares de la serie de potencias resultante queda

$$\begin{aligned} y(x) &= a_0 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k)!} (\omega x)^{2k} + \frac{a_1}{\omega} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} (\omega x)^{2k+1} \\ &= a_0 \cos \omega x + \frac{a_1}{\omega} \sin \omega x \end{aligned} \quad (12)$$

La última igualdad es conocida de las asignaturas de análisis. Es fácil verificar, lo dejamos de ejercicio, que las series involucradas tienen radio de convergencia infinito.

Podemos hacer los cálculos anteriores con SAGE

```
"""
Método de coeficientes indeterminados para
la ecuación y''+omega^2y=0
"""
orden=8
Lista=['a%s'%i for i in range(orden)]+['omega']
A = PolynomialRing(QQ,Lista)
Series.<X> = PowerSeriesRing(A)
Coef=A.gens()
y=sum(Coef[i]*X^i for i in range(orden))
Ecua=y.derivative(2)+A.gens()[0]^2*y
a= [SR(i) for i in A.gens()[1:-1]]
Ecuaciones=[a[0]-1,a[1],list(Ecua)[-2]]
Sol_a_n=solve(Ecuaciones,a)
L=[f.rhs() for f in Sol_a_n[0]]
x=var('x')
y1=sum([L[i]*x^i for i in range(orden)])
Ecuaciones=[a[0],a[1]-1,list(Ecua)[-2]]
Sol_a_n=solve(Ecuaciones,a)
L=[f.rhs() for f in Sol_a_n[0]]
y2=sum([L[i]*x^i for i in range(orden)])
```

Obtenemos las soluciones

$$y_1(x) = \cdots - \frac{1}{720} \omega^6 x^6 + \frac{1}{24} \omega^4 x^4 - \frac{1}{2} \omega^2 x^2 + 1 = \cos \omega x$$

$$y_2(x) = \cdots - \frac{1}{5040} \omega^6 x^7 + \frac{1}{120} \omega^4 x^5 - \frac{1}{6} \omega^2 x^3 + x = \frac{1}{\omega} \sin \omega x$$

2.5. Ecuación de Legendre. Primera aproximación

Ejemplo 13. Consideremos la ecuación de Legendre.

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + p(p+1)y = 0, \quad (13)$$

donde $p > 0$. Esta ecuación aparece en muchas aplicaciones, por ejemplo en muchos problemas que involucran funciones definidas en esferas, como es el caso de los modos normales de vibración de una esfera y en problemas de potenciales esféricos

$$\begin{aligned} p(p+1)y &= p(p+1)a_0 + p(p+1)a_1x + p(p+1)a_2x^2 + \cdots + p(p+1)a_nx^n + \cdots \\ -2xy' &= -2a_1x - 4a_2x^2 - 6a_3x^3 + \cdots - 2na_nx^n + \cdots \\ (1-x^2)y'' &= 2a_2 + 2 \cdot 3a_3x + \cdots + (n+1)(n+2)a_{n+2}x^n + \cdots \\ &\quad - 2a_2x^2 - 2 \cdot 3a_3x^3 - \cdots - (n-1)na_nx^n - \cdots \\ &\quad \text{-----} \\ 0 &= (1-x^2)y'' - 2xy' + p(p+1)y = (p(p+1)a_0 + 2a_2) + (p(p+1)a_1 - 2a_1 \cdot 2 \cdot 3a_3)x + \cdots \\ &\quad + ((p(p+1) - n(n+1))a_n + n(n+1)a_{n+2})x^n + \cdots \end{aligned}$$

Obtenemos la relación de recurrencia

$$a_{n+2} = -\frac{(p-n)(p+n+1)}{(n+1)(n+2)}a_n \quad (14)$$

Ahora vamos a dividir la serie en los términos pares e impares

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} x^{2k+1}$$

A cada una de estas series le podemos aplicar el criterio de la razón usando la fórmula de recurrencia de arriba. Por ejemplo para los términos pares

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_{2k+2} x^{2k+2}|}{|a_{2k} x^{2k}|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|p_0 - 2k||p_0 + 2k + 1|}{(2k+1)(2k+2)} |x|^2 = |x|^2$$

De modo que la serie tiene radio de convergencia 1. La misma situación ocurre con la serie de términos impares. Esto muestra que la serie en su conjunto también tiene radio

de convergencia igual a 1. Era previsible que el radio de convergencia no fuese mayor a 1, pues la forma explícita de la ecuación de la ecuación de Legendre es

$$y'' - \frac{2x}{(1-x^2)}y' + \frac{p(p+1)}{(1-x^2)}y = 0.$$

Se observa que 1 y -1 son puntos singulares de la ecuación.

Podemos relacionar cualquier coeficiente de índice par a_{2k} con el a_0 y cualquiera con índice impar a_{2k+1} con el a_1 . Esto lo resolveremos con SAGE

```
"""
Método de coeficientes indeterminados para
la ecuación (1-x^2)y'' - 2xy' + p(p+1)y=0
"""
orden=10
Lista=['a%s'%i for i in range(orden)] + ['p']
A = PolynomialRing(QQ, Lista)
Series.<X> = PowerSeriesRing(A)
Coef=A.gens()
y=sum(Coef[i]*X^i for i in range(orden))
p=A.gens()[-1]
Ecua=(1-X^2)*y.derivative(2)-2*X*y.derivative()+p*(p+1)*y
a= [SR(i) for i in A.gens()[:-1]]
Ecuaciones=list(Ecua[:-2])
Sol_a_n=solve(Ecuaciones,a)
Sol_a_n=[i.lhs()==i.rhs().factor() for i in Sol_a_n[0]]
```

Obtenemos que la solución a la relación de recurrencia de dos términos es

$$\left(\begin{array}{l} a_0 = r_2 \\ a_1 = r_1 \\ a_2 = -\frac{1}{2}(p+1)pr_2 \\ a_3 = -\frac{1}{6}(p+2)(p-1)r_1 \\ a_4 = \frac{1}{24}(p+3)(p+1)(p-2)pr_2 \\ a_5 = \frac{1}{120}(p+4)(p+2)(p-1)(p-3)r_1 \\ a_6 = -\frac{1}{720}(p+5)(p+3)(p+1)(p-2)(p-4)pr_2 \\ a_7 = -\frac{1}{5040}(p+6)(p+4)(p+2)(p-1)(p-3)(p-5)r_1 \\ a_8 = \frac{1}{40320}(p+7)(p+5)(p+3)(p+1)(p-2)(p-4)(p-6)pr_2 \\ a_9 = \frac{1}{362880}(p+8)(p+6)(p+4)(p+2)(p-1)(p-3)(p-5)(p-7)r_1 \end{array} \right)$$

En general

$$a_{2n} = \frac{(p+1)(p_0+3) \cdots (p+2n-1) \times p(p-2) \cdots (p-2n+2)}{(2n)!} a_0$$

y

$$a_{2n+1} = \frac{(p+2)(p+4) \cdots (p+2n) \times (p-1)(p-3) \cdots (p-2n+1)}{(2n+1)!} a_1$$

Podemos elegir a_0 y a_1 de manera arbitraria (esto está de acuerdo con que en una ecuación de orden 2 aparece 2 constantes de integración) y por las relaciones anteriores deducir el valor de los restantes a_n .

Un caso especial se plantea cuando $p \in \mathbb{N}$. En esa situación vemos que infinitos de los a_n resultan iguales a cero. De hecho una de las series, la de términos impares o la de términos pares acorde a que p sea par o impar respectivamente, se trunca. Supongamos que esto ocurre con la serie de términos impares, es decir p es entero positivo impar. Si ahora tomamos $a_0 = 0$ toda la serie de términos pares se hará cero. Para a_1 elijo algún valor no nulo y esto me garantiza que los términos impares son no nulos hasta el término a_n , pero a partir de allí también se hacen cero. Es usual elegir a_1 para que $y(1) = 1$. Nos queda definida así una función polinómica que se denomina polinomio de Legendre y se denota por P_p . Cuando p es par hacemos una construcción análoga, quedando un polinomio P_p , con todas potencias pares, tal que $P_p(1) = 1$.

Todos estos cálculos los programamos en la siguiente función de SAGE. Esta función tiene un argumento n que debe ser un número natural y devuelve el correspondiente polinomio de Legendre.

```
def legendre(n):
    """
    Método de coeficientes indeterminados para
    la ecuación  $(1-x^2)y'' - 2xy' + p(p+1)y = 0$ 
    """
    if n not in NN:
        print "n no es entero"
    else:
        orden=n+2
        Lista=['a%s'%i for i in range(orden)]
        A = PolynomialRing(QQ,Lista)
        Series.<X> = PowerSeriesRing(A)
        Coef=A.gens()
        y=sum(Coef[i]*X^i for i in range(orden))
        Ecua=(1-X^2)*y.derivative(2)-2*X*y.derivative()+n*(n+1)*y
        a= [SR(i) for i in A.gens()]
        Ecuaciones=list(Ecua)[:2]
        s=var('s')
        if n%2==0:
            Ecuaciones+=[a[0]-s,a[1]]
        else:
            Ecuaciones+=[a[0],a[1]-s]
        Sol_a_n=solve(Ecuaciones,a)
        L=[f.rhs() for f in Sol_a_n[0]]
        x=var('x')
        y=sum([L[i]*x^i for i in range(orden)])
        sol=solve(y(x=1)==1,s)
        return y.subs(sol[0])
```

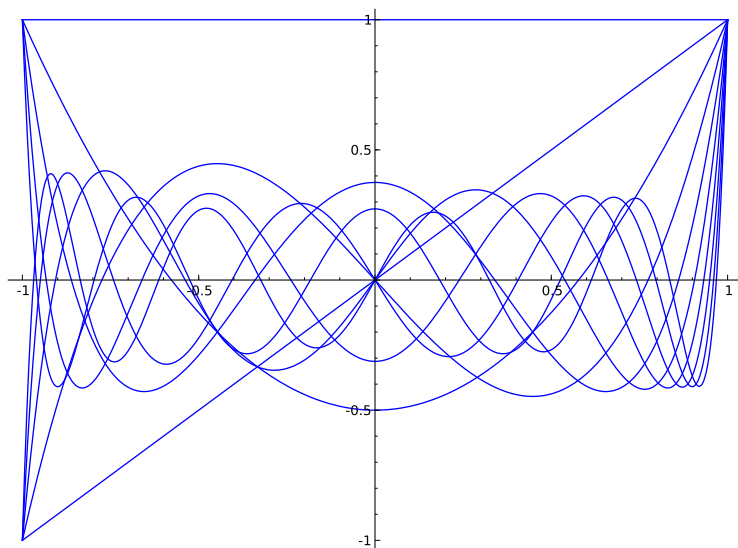
Con la ayuda de esta función podemos generar rápidamente una tabla de polinomios

de Legendre

```
L=[legendre(i) for i in range(10)]
```

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x \\ \frac{35}{8}x^4 - \frac{15}{4}x^2 + \frac{3}{8} \\ \frac{63}{8}x^5 - \frac{35}{4}x^3 + \frac{15}{8}x \\ \frac{231}{16}x^6 - \frac{315}{16}x^4 + \frac{105}{16}x^2 - \frac{5}{16} \\ \frac{429}{16}x^7 - \frac{693}{16}x^5 + \frac{315}{16}x^3 - \frac{35}{16}x \\ \frac{6435}{128}x^8 - \frac{3003}{32}x^6 + \frac{3465}{64}x^4 - \frac{315}{32}x^2 + \frac{35}{128} \\ \frac{12155}{128}x^9 - \frac{6435}{32}x^7 + \frac{9009}{64}x^5 - \frac{1155}{32}x^3 + \frac{315}{128}x \end{pmatrix}$$

y graficarlos



3. Teorema fundamental sobre puntos ordinarios

3.1. Puntos Ordinarios y Singulares

Definición 6. Dada la ecuación diferencial

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$$

donde p, q son funciones definidas en algún intervalo abierto I , diremos que $x_0 \in I$ es un **punto ordinario** de la ecuación si p y q son analíticas en x_0 . Un punto no ordinario se llama **singular**.

Ejemplo 14. En la ecuación del oscilador armónico

$$y'' + \omega^2 y = 0$$

todo punto es ordinario.

Ejemplo 15. En la ecuación de Legendre

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + p(p + 1)y = 0$$

1 y -1 son puntos singulares, otros valores de x son puntos ordinarios.

Antes de ir al Teorema más importante de esta sección vamos a enunciar un lema que nos resultará útil.

Lema 1. Comparación. Supongamos que tenemos una relación de recurrencia de dos términos

$$a_{n+2} = f_n(a_n, a_{n+1}) \quad (15)$$

donde las funciones f_n son crecientes respecto a sus dos variables. Si la sucesión $\{a_n\}$ resuelve (15), la sucesión $\{b_n\}$ resuelve la desigualdad

$$b_{n+2} \leq f_n(b_n, b_{n+1})$$

y además vale que $b_0 \leq a_0$ y $b_1 \leq a_1$, entonces $b_n \leq a_n$ para todo $n = 2, 3, \dots$. En particular la afirmación se satisface cuando f_n es lineal con coeficientes positivos, es decir $f_n(x, y) = \alpha_n x + \beta_n y$, con $\alpha, \beta \geq 0$.

Dem. Es muy sencilla y la dejamos de ejercicio (evidentemente hay que utilizar el principio de inducción). \square

Teorema 5. Teorema Fundamental Sobre Puntos Ordinarios. Sea x_0 un punto ordinario de la ecuación

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$$

y sean $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$. Existe una solución de la ecuación que es analítica en un entorno de x_0 y que satisface $y(x_0) = a_0$ e $y'(x_0) = a_1$. El radio de convergencia del desarrollo en serie de y es al menos tan grande como el mínimo de los radios de convergencia de los desarrollos en serie de p y q .

Dem. Supongamos, sin perder generalidad, que $x_0 = 0$. Consideremos que los desarrollos en serie de potencias de p y q .

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \quad \text{y} \quad q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n. \quad (16)$$

Supongamos que ambas series convergen en $|x| < R$, para cierto $R > 0$. Vamos a aplicar el método de coeficientes indeterminados. Tenemos

$$\begin{aligned} y &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots \\ y' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = a_1 + 2a_2 x + \cdots + (n+1) a_{n+1} x^n + \cdots \\ y'' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n = 2a_2 + 2 \cdot 3a_3 x + \cdots + (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n + \cdots \end{aligned}$$

Por el Teorema 4

$$\begin{aligned} q(x)y &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k q_{n-k} \right) x^n, \\ p(x)y' &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n (k+1) a_{k+1} p_{n-k} \right) x^n. \end{aligned}$$

Sustituyendo estos, y los anteriores, desarrollos en la ecuación, obtenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ (n+1)(n+2) a_{n+2} + \sum_{k=0}^n a_k q_{n-k} + \sum_{k=0}^n (k+1) a_{k+1} p_{n-k} \right\} x^n.$$

De esta forma deducimos la ecuación de recurrencia que se satisface en una ecuación lineal general de segundo orden en un punto ordinario.

$$a_{n+2} = - \frac{\sum_{k=0}^n \{ a_k q_{n-k} + (k+1) a_{k+1} p_{n-k} \}}{n(n+1)} \quad (17)$$

Dados los coeficientes a_0 y a_1 la relación de recurrencia determina los a_n , $n \geq 2$. Queda ver que la serie así definida tiene radio de convergencia al menos R .

Tomemos r tal que $0 < r < R$. Como las series (16) tienen radio de convergencia R , estas series convergen absolutamente para $x = r$. El criterio de convergencia de series conocido como criterio del resto implica que $p_n r^n, q_n r^n$ son sucesiones que tienden a 0. En particular están acotadas, y por ello existe $M > 0$ tal que

$$|p_n| r^n, |q_n| r^n \leq M.$$

Tomando módulo en (17) y usando las desigualdades de arriba concluimos

$$\begin{aligned} |a_{n+2}| &\leq \frac{M}{(n+1)(n+2)r^n} \sum_{k=0}^n (|a_k| + (k+1)|a_{k+1}|) r^k \\ &\leq \frac{M}{(n+1)(n+2)r^n} \sum_{k=0}^n (|a_k| + (k+1)|a_{k+1}|) r^k + \frac{M|a_{n+1}|r}{(n+1)(n+2)}. \end{aligned}$$

En la última desigualdad se agregó un término en apariencia por capricho, pero este término nos servirá para complementar una expresión en el futuro. Definamos la sucesión b_n como la solución de la siguiente relación de recurrencia

$$b_{n+2} = \frac{M}{(n+1)(n+2)r^n} \sum_{k=0}^n (b_k + (k+1)b_{k+1}) r^k + \frac{Mb_{n+1}r}{(n+1)(n+2)}, \quad (18)$$

con las condiciones iniciales $b_0 = |a_0|$ y $b_1 = |a_1|$. Por el Lema 1 tenemos que $|a_n| \leq b_n$ para todo n . Aplicando (18) a $n-1$ en lugar de n

$$b_{n+1} = \frac{M}{n(n+1)r^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} (b_k + (k+1)b_{k+1}) r^k + \frac{Mb_n r}{n(n+1)}, \quad (19)$$

Multiplicando (18) por r y usando 19

$$\begin{aligned} r b_{n+2} &= \frac{M}{(n+1)(n+2)r^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} (b_k + (k+1)b_{k+1}) r^k \\ &\quad + \frac{Mr(b_n + (n+1)b_{n+1})}{(n+1)(n+2)} + \frac{Mb_{n+1}r^2}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n(n+1)b_{n+1} - Mb_n r}{(n+1)(n+2)} + \frac{Mr(b_n + (n+1)b_{n+1})}{(n+1)(n+2)} \\ &\quad + \frac{Mb_{n+1}r^2}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{(n(n+1) + Mr(n+1) + Mr^2)}{(n+1)(n+2)} b_{n+1}, \end{aligned}$$

Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|b_{n+2}x^{n+2}|}{|b_{n+1}x^{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n(n+1) + Mr(n+1) + Mr^2)}{(n+1)(n+2)} \frac{|x|}{r} = \frac{|x|}{r}.$$

Luego la serie $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ converge para $|x| < r$. Como $|a_n| \leq b_n$ la misma afirmación es cierta para $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Como $r < R$ fue elegido arbitrariamente, tenemos que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge en $|x| < R$. \square