

# Ecuaciones Diferenciales

Fernando Mazzone

19 de agosto de 2017

# Índice general

<b>1. Estabilidad</b>	<b>2</b>
1.1. Estabilidad en puntos de Equilibrio . . . . .	2
1.1.1. Definiciones . . . . .	2
1.1.2. Estabilidad via linealización . . . . .	3
1.1.3. Método de Lyapunov . . . . .	4
1.2. Estabilidad d órbitas periódicas . . . . .	7

# Capítulo 1

## Estabilidad

### Concepto General

«En ciencias, una situación es estable si se mantiene en estado estacionario, es decir, igual en el tiempo y una modificación razonablemente pequeña de las condiciones iniciales no altera significativamente el futuro de la situación. Dependiendo del área en particular, estabilidad tiene significados ligeramente diferentes.»

Wikipedia

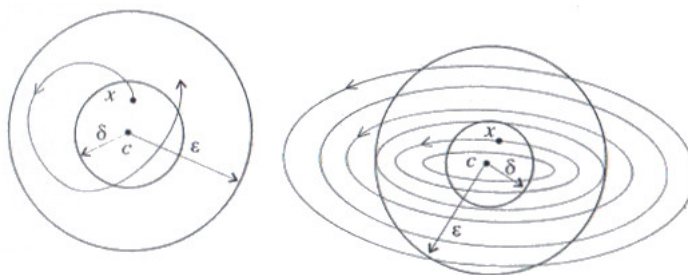
### 1.1 Estabilidad en puntos de Equilibrio

#### 1.1.1. Definiciones

##### Definición 1.

Estabilidad de puntos de equilibrio Supongamos  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$  abierto,  $X : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo vectorial independiente del tiempo,  $\Phi_t(x)$  el flujo asociado a  $X$  y  $c \in \mathcal{O}$  un equilibrio ( $X(c) = 0$ ). Llamamos  $I_x = (a_x, b_x)$  al intervalo máximo donde esta definida la solución que en  $t = 0$  pasa por  $x \in \mathcal{O}$ . El equilibrio  $c$  se dice estable si para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$|x - c| < \delta \Rightarrow \forall t \in [0, b_x) : |\Phi_t(x) - c| < \varepsilon.$$



##### Definición 2 (Inestabilidad en puntos de equilibrio).

Un punto de equilibrio  $c$  se dice *inestable* si no es estable.

**Ejercicio.**

Un punto de equilibrio  $c$  es inestable si y sólo si existe un  $\varepsilon > 0$ , una sucesión de puntos  $\{x_n\}$  y de tiempos  $\{t_n\}$  tal que  $t_n \in [0, b_{x_n})$ ,  $x_n \rightarrow c$  y  $|\Phi_{t_n}(x_n) - c| \geq \varepsilon$ .

*Observación.* Si  $c$  es un punto de equilibrio estable de  $X : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^n$  entonces  $b_x = +\infty$ .

Esta afirmación necesita una demostración. Tomemos  $\varepsilon > 0$  tal que  $\overline{B}(c, \varepsilon) \subset \mathcal{O}$ . Por definición de estabilidad, existe  $\delta > 0$  tal que si  $|x - c| < \delta$  y  $t \in [0, b_x)$  entonces  $\Phi_t(x) \in B(c, \varepsilon)$ . Luego la imagen por la solución del intervalo  $[0, b_x)$  está contenido dentro de un compacto. Esto implica que  $b_x = \infty$ .

**Definición 3 (Estabilidad asintótica).**

**Definición:** estabilidad asintótica Un punto de equilibrio  $c \in \mathcal{O}$  se dice *asintóticamente estable* si es estable y existe  $\delta > 0$  tal que

$$x \in B(c, \delta) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi_t(x) = c.$$

**1.1.2. Estabilidad via linealización****Teorema 1 (Estabilidad asintótica de sistemas lineales).**

Consideremos el sistema lineal  $x' = Ax$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Son equivalentes

1. El sistema lineal  $x' = Ax$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , tiene un equilibrio asintóticamente estable en 0.
2. Todo autovalor  $\lambda$  de  $A$  satisface que  $\lambda \in (-\infty, 0)$ .

**Teorema 2 (Invariancia de la estabilidad por equivalencias topológicas).**

Sean  $X : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $Y : \mathcal{O}' \rightarrow \mathbb{R}^n$  dos campos  $C^1$  topológicamente equivalentes. Sea  $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}'$  un homeomorfismo que realiza esta equivalencia topológica entre  $X$  e  $Y$ . Sea  $c \in \mathcal{O}$  un punto de equilibrio de  $X$ , recordar que  $b := f(c)$  lo es de  $Y$ . Entonces tenemos que  $c$  es (asintóticamente) estable si y sólo si  $d$  es (asintóticamente) estable.

*Demostración.* Seguir los siguientes pasos. Demostrar como *ejercicio* que si  $\Phi_t^X$  y  $\Phi_t^Y$  son los flujos asociados a  $X$  e  $Y$  respectivamente, entonces para cada  $y \in \mathcal{O}'$  y  $t \in I_y$  vale que:

$$\Phi_t^Y = f \circ \Phi_t^X \circ f^{-1}.$$

Suponer  $c$  estable y tomar  $\varepsilon > 0$ . Como  $f$  es continua,  $f^{-1}(B(b, \varepsilon))$  es abierto y de allí existe  $\varepsilon_0 > 0$  tal que  $B(c, \varepsilon_0) \subset f^{-1}(B(b, \varepsilon))$ . Como  $c$  es estable, existe  $\delta_0$  tal que  $\Phi_t^X(B(c, \delta_0)) \subset B(c, \varepsilon_0)$ . Como  $f^{-1}$  es continua,  $f(B(c, \delta_0))$  es abierto, luego existe  $\delta > 0$  tal que  $B(b, \delta) \subset f(B(c, \delta_0))$ . Por todos los hechos previos,

$$\begin{aligned} \Phi_t^Y(B(b, \delta)) &= f \circ \Phi_t^X \circ f^{-1}(B(b, \delta)) \subset f \circ \Phi_t^X(B(c, \delta_0)) \\ &\subset f(B(c, \varepsilon_0)) \subset B(b, \varepsilon). \end{aligned}$$

La afirmación recíproca, si  $b$  es estable entonces  $c$  lo es, sería redundante demostrarla. Para la estabilidad asintótica, supongamos  $c$  asintóticamente estable y  $\delta_0 > 0$  tal que

$$x \in B(c, \delta_0) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi_t^X(x) = 0.$$

Por la continuidad de  $f^{-1}$  existe  $\delta > 0$  tal que  $B(b, \delta) \subset f(B(c, \delta_0))$ . Luego, de estos hechos, el ejercicio previo, la continuidad de  $f$  y  $\Phi_t^X$  tenemos que si  $y \in B(b, \delta)$  entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi_t^Y(y) = \lim_{t \rightarrow \infty} f \circ \Phi_t^X \circ f^{-1}(y) = f \left( \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi_t^X(f^{-1}(y)) \right) = 0$$

□

### Corolario 1.

Supongamos que  $c$  es un punto de equilibrio de  $X : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Supongamos que todos las partes reales de autovalores de  $DX(c)$  son negativas. Entonces  $c$  es asintóticamente estable. Si en cambio, algún autovalor tiene parte real positiva,  $c$  es inestable.

El Corolario no afirma nada cuando hay autovalores imaginarios puros. Desafortunadamente esta situación se presenta con frecuencia. Ejemplo de esto es la ecuación del resorte.

### 1.1.3. Método de Lyapunov

El método de Lyapunov está basado en la introducción de ciertas funciones, campos escalares  $\Lambda : U \rightarrow \mathbb{R}$  donde  $U$  es entorno de  $c$ . Estas funciones se llaman funciones de Lyapunov y cumplen un papel análogo al de energía en sistemas mecánicos.

A pesar del nombre, el método de Lyapunov no es del todo metódico, no tenemos un algoritmo para determinar cuando existe una función de Lyapunov ni tampoco como puede ser obtenida.

### Definición 4 (derivada covariante).

Sea  $X : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo vectorial sobre el abierto  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ . La derivada covariante respecto a  $X$  se simboliza por  $\nabla_X$  y es un operador (diferencial) que actúa sobre campos escalares  $F : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ . Se define por

$$\nabla_X F(x) = X \cdot \nabla F = \sum_{j=1}^n X_j(x) \frac{\partial F}{\partial x_j}(x).$$

**Ejercicio.**

Demostrar que

1. La derivada covariante de  $F$  representa la variación de  $F$  a lo largo de una trayectoria del flujo asociado a  $X$ . En otros términos

$$(\nabla_X F)(\Phi_t^X(x)) = \frac{d}{dt} (F(\Phi_t^X(x))).$$

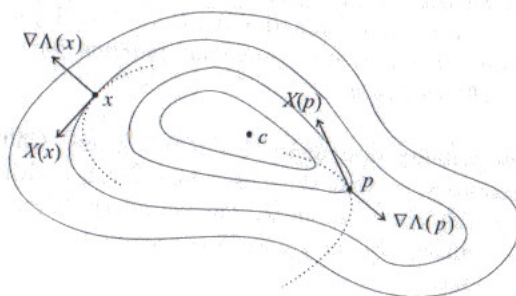
2.  $(\nabla_X F)(x) = |\nabla F(x)| |X(x)| \cos(\theta(x))$ , donde  $\theta(x)$  representa el ángulo entre  $X(x)$  y uno de los vectores normales a la superficie de la forma  $\{y : F(y) = k\}$  que pasa por  $x$ .

**Definición 5** (Función de Lyapunov).

Sea  $X : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo vectorial sobre el abierto  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$  y  $c$  un punto de equilibrio. Una función, de clase  $C^1$ ,  $\Lambda : U \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $U \subset \mathcal{O}$  es abierto y  $c \in U$ , se denomina Función de Lyapunov para  $c$  si satisface

1.  $\Lambda(c) < \Lambda(x)$  para todo  $x \in U \setminus \{c\}$ .
2.  $\nabla_X \Lambda \leq 0$  en  $U$ .
3. Si se satisface la desigualdad estricta  $\nabla_X \Lambda < 0$  diremos que  $\Lambda$  es una función de Lyapunov estricta.

Acorde al inciso 2 de nuestro ejercicio, la condición  $(\nabla_X \Lambda)(x) \leq 0$  dice que el ángulo entre  $X(x)$  y la superficie de nivel  $\{z : \Lambda(z) = k\}$  que contiene a  $x$  es obtuso ( $(\nabla_X \Lambda)(x) < 0$ ) o, a lo sumo, recto ( $(\nabla_X \Lambda)(x) = 0$ ).



Visto a través del inciso 1) del ejercicio, una función de Liapunov satisface que tiene un mínimo en  $c$  y que  $\Lambda(\Phi_t^X(x))$  es decreciente respecto al tiempo. Esta observación es la idea clave para demostrar el Teorema de Estabilidad de Lyapunov.

**Teorema 3** (Teorema de Estabilidad de Lyapunov).

Sea  $X : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo vectorial sobre el abierto  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$  y  $c$  un punto de equilibrio. Supongamos que  $\Lambda : U \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $U \subset \mathcal{O}$  abierto y  $c \in U$ , es una Función de Lyapunov para  $c$ . Entonces  $c$  es un equilibrio estable. Si  $\Lambda$  es una función de Lyapunov estricta para  $c$ , entonces  $c$  es asintóticamente estable.

*Demostración.* Sea  $\varepsilon > 0$ . Tomemos  $0 < \varepsilon_0$  tal que  $\varepsilon_0 \leq \varepsilon$  y  $\overline{B}(c, \varepsilon_0) \subset U$ . Como  $\partial B(c, \varepsilon_0)$  es un compacto y  $\Lambda$  es continua,  $\Lambda$  alcanza un valor mínimo sobre aquel conjunto, es decir existe  $z_0$ , con  $|z_0 - c| = \varepsilon_0$  tal que

$$\mu := \min\{\Lambda(y) : |y - c| = \varepsilon_0\} = \Lambda(z_0) > \Lambda(c). \quad (1.1)$$

Sea ahora  $\delta > 0$  tal que

$$B(c, \delta) \subset B(c, \varepsilon_0) \cap \Lambda^{-1}(-\infty, \mu).$$

ver figura 1.1.

Teorema de Estabilidad de Lyapunov

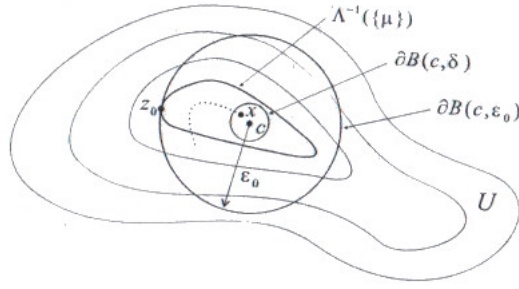


Figura 1.1: Demostración Teorema Lyapunov

Teorema de Estabilidad de Lyapunov Supongamos ahora que  $x \in B(c, \delta)$ . Como  $\Lambda(x) < \mu$  y como  $\Lambda(\Phi_t(x))$  es decreciente para  $t \in [0, b_x)$  tenemos que

$$\Lambda(\Phi_t(x)) < \mu \quad \text{para } t \in [0, b_x). \quad (1.2)$$

Vemos que  $\Phi_t(x) \in B(c, \varepsilon_0)$  cuando  $t \in [0, b_x)$ . De lo contrario existiría un  $t_0 > 0$  con  $\Phi_{t_0}(x) \notin B(c, \varepsilon_0)$ . Como  $\Phi_t(x)$  es continua respecto a  $t$ , el conjunto  $\{\Phi_t(x) | t \in [0, t_0]\}$  es conexo. Por consiguiente  $\{\Phi_t(x) | t \in [0, t_0]\} \cap \partial B(c, \varepsilon_0) \neq \emptyset$ . Luego existiría un  $t \in [0, t_0]$  tal que  $\Phi_t(x) \in \partial B(c, \varepsilon_0)$ . Para este  $t_0$  por (1.1) tendríamos que  $\Lambda(\Phi_{t_0}(x)) \geq \mu$  que contradice (1.2). Como  $B(c, \varepsilon_0) \subset B(c, \varepsilon)$ , hemos demostrado la estabilidad.

Supongamos la función de Lyapunov  $\Lambda$  estricta. Veamos que si  $x \in B(c, \delta)$  entonces  $\Phi_t(x) \rightarrow c$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . De no ser esto último cierto, existiría un  $\varepsilon_1 > 0$  y una sucesión de tiempos  $t_k$  tendiente a  $+\infty$  tal que

$$|\Phi_{t_k}(x) - c| \geq \varepsilon_1.$$

Como  $\Phi_{t_k}(x) \in \overline{B}(c, \varepsilon_0)$  y este conjunto es compacto, existiría una subsucesión de  $\Phi_{t_k}(x)$  convergente. Por simplicidad supondremos que esta subsucesión es  $t_k$  y llamaremos  $z$  a este límite.

Ahora  $\Lambda(\Phi_t(z))$  es decreciente respecto a  $t$ , por ello existe  $s > 0$  tal que  $\Lambda(\Phi_s(z)) < \Lambda(z)$ . Como la función  $y \mapsto \Lambda(\Phi_s(y))$  es continua en  $y$  para  $s$  fijo, existe un entorno  $V$  de  $z$  tal que si  $y \in V$  entonces  $\Lambda(\Phi_s(y)) < \Lambda(z)$ . Como  $\Phi_{t_k}(x)$  tiende a  $z$ , existiría  $K > 0$  tal que  $\Phi_{t_k}(x) \in V$ , cuando  $k > K$ . Fijemos uno de tales  $k$ , lo llamaremos  $k_0$ . Ahora si elegimos cualquier  $k$  suficientemente grande para que  $t_k > t_{k_0} + s$ , tendremos

$$\Lambda(z) \leq \Lambda(\Phi_{t_k}) < \Lambda(\Phi_{t_{k_0}+s}) = \Lambda(\Phi_s(\Phi_{t_{k_0}}(x))) < \Lambda(z).$$

□

#### 1.1.4. Método de Lyapunov: Ejemplos

**Ejemplo 1.0.** Estabilidad de los equilibrios  $2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , en la ecuación del péndulo

## 1.2 Estabilidad d órbitas periódicas

Estabilidad en general

Recordemos: si  $X : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un campo de clase  $C^1$  y  $x \in \mathcal{O}$ , entonces  $I_x = (a_x, b_x)$  denota el intervalo máximo de definición de la solución  $\gamma$  que satisface que  $\gamma(0) = x$

Estabilidad órbitas periódicas Estabilidad de Soluciones en General Sea  $X : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un campo de clase  $C^1$  y  $c \in \mathcal{O}$ . Sea  $\gamma : I_c \rightarrow \mathcal{O}$  la solución tal que  $\gamma(0) = c$ . Diremos que  $\gamma$  es *estable* si para cada  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  con  $B(c, \delta) \subset \mathcal{O}$  y si  $x \in B(c, \delta)$  entonces:

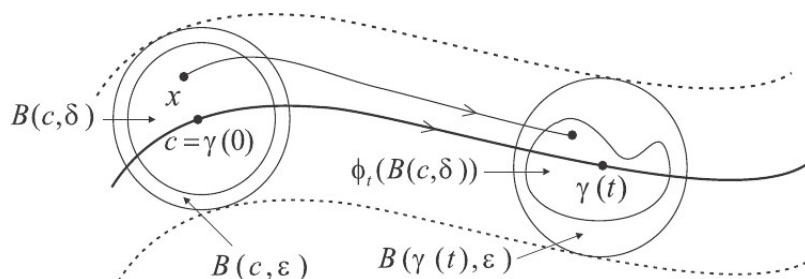
1.  $[0, b_c) \subset [0, b_x)$
2.  $|\Phi_t(x) - \gamma(t)| < \varepsilon$ , para todo  $t \in [0, b_c)$ .

Si además tenemos que  $b_x = +\infty$  y

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\Phi_t(x) - \gamma(t)| = 0,$$

diremos que  $\gamma$  es *asintóticamente estable*.

Estabilidad en general



Estabilidad: estrategia de abordaje Si desarrollamos en serie de Taylor  $X$  alrededor de cualquier  $x \in \mathcal{O}$ , tenemos para  $h \in \mathbb{R}^n$  chico

$$X(x+h) = X(x) + DX(x)h + \dots$$

Supongamos  $\gamma$  la solución de la cual queremos considerar su estabilidad, y sea  $\alpha$  otra solución (luego habrá que suponer que  $\alpha(0)$  es cercano a  $\gamma(0)$ ). Escribamos  $\alpha = \gamma + \xi$ . Se suele decir que  $\xi$  es la variación de  $\gamma$ . ¿Resolverá alguna ecuación  $\xi$ ? Reemplazando en el desarrollo de Taylor  $x$  por  $\gamma$  y  $h$  por  $\xi$  y desestimando los términos de mayor orden vemos  $\xi$  resolvería aproximadamente

$$\xi'(t) = DX(\gamma(t))\xi(t).$$

Estabilidad: ecuaciones variacionales Si desarrollamos en serie de Taylor  $X$  alrededor de cualquier  $x \in \mathcal{O}$ , tenemos para  $h \in \mathbb{R}^n$  chico

$$X(x+h) = X(x) + DX(x)h + \dots$$

Supongamos  $\gamma$  la solución de la cual queremos considerar su estabilidad, y sea  $\alpha$  otra solución (luego habrá que suponer que  $\alpha(0)$  es cercano a  $\gamma(0)$ ). Escribamos  $\alpha = \gamma + \xi$ . Se suele decir que  $\xi$  es la variación de  $\gamma$ . ¿Resolverá alguna ecuación  $\xi$ ? Reemplazando en el desarrollo de Taylor  $x$  por  $\gamma$  y  $h$  por  $\xi$  y desestimando los términos de mayor orden vemos  $\xi$  resolvería aproximadamente

$$\xi'(t) = DX(\gamma(t))\xi(t).$$

Estabilidad: ecuaciones variacionales Ecuaciones Variacionales  $X : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un campo de clase  $C^1$  y  $\gamma : I \rightarrow \mathcal{O}$  una solución. A la función a valores matriciales  $A(t) = DX(\gamma(t))$  la llamaremos *matriz variacional* o *matriz de monodromía*.

El sistema lineal asociado  $x'(t) = A(t)x(t)$  se llama el sistema de *ecuaciones variacionales*.



La matriz fundamental de este sistema  $G : I \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  se llama la *matriz característica*.

Sea  $\gamma$  una solución periódica que no es un equilibrio. Entonces existe un período  $p > 0$  mínimo entre todos los períodos positivos. Esto es  $\gamma(x + p) = \gamma(x)$  y cualquier otro período es múltiplo de  $p$ . Es sabido que en este caso el dominio máximo de definición de  $\gamma$  es  $\mathbb{R}$ . En esta situación definiremos los *multiplicadores característicos* de  $\gamma$  como los autovalores de  $G(p)$ .

Ecuaciones variacionales ejemplos

ver notebook de SAGE

Matriz de deformaciones Matriz de deformaciones  $X : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un campo de clase  $C^1$  y  $\Phi_t : \mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{O}$  el flujo asociado. Definimos la *matriz de deformaciones*  $H$  como

$$H(t, x) = (D_x \Phi_t)(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_t^1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \Phi_t^1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \Phi_t^n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \Phi_t^n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Matriz de deformaciones y característica Teorema Sea  $\gamma : I \rightarrow \mathcal{O}$  una solución, con  $0 \in I$  y  $c = \gamma(0)$ . La matriz característica  $G$  de  $\gamma$  coincide con la matriz de deformaciones  $H$  en  $c$ :

$$G(t) = H(t, c).$$

Además

$$G(t)X(c) = X(\gamma(t)) \quad t \in I.$$

Luego si  $\gamma$  es periódica de período  $p$  tenemos

$$G(p)X(c) = X(c).$$

Entonces 1 es un autovalor y  $X(c)$  (como  $\gamma$  no es equilibrio  $X(c) \neq 0$ ) es un autovector asociado. En conclusión 1 es siempre un multiplicador característico.

Matriz de deformaciones y característica **Demostración** Derivando respecto a  $x$  la relación

$$\frac{d}{dt} \Phi_t(x) = X(\Phi_t(x)),$$

Obtenemos

$$\frac{\partial H}{\partial t}(t, x) = D_x X(\Phi_t(x))H(t, x)$$

Además  $H(0, x) = I$ , donde  $I$  es la identidad (**Ejercicio**). Como  $\gamma(t) = \Phi_t(c)$  si reemplazamos  $x$  por  $c$  arriba tenemos

$$\frac{\partial H}{\partial t}(t, c) = A(t)H(t, c)$$

Lo cual termina por mostrar que  $G(t) = H(t, c)$ .

Matriz de deformaciones y característica Ahora derivando

$$\gamma'(t) = X(\gamma(t)),$$

vemos que

$$\gamma''(t) = D_x X(\gamma(t))\gamma'(t) = A(t)\gamma'(t),$$

es decir que  $\gamma'(t)$  es solución de las ecuaciones características. Además  $\gamma'(0) = X(\gamma(0)) = X(c)$ . Ahora como  $G$  es una matriz fundamental para las ecuaciones características

$$X(\gamma(t)) = \gamma'(t) = G(t)X(c).$$

Esto prueba la segunda afirmación. La tercera es consecuencia de que  $\gamma(p) = \gamma(0) = c$ .

Invariación de la matriz de deformaciones Invariancia de la matriz de deformaciones Sea  $f : \mathcal{O} \rightarrow \tilde{\mathcal{O}}$  un difeomorfismo entre abiertos de  $\mathbb{R}^n$ ,  $X : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo  $C^1$  e  $Y : \tilde{\mathcal{O}} \rightarrow \mathbb{R}^n$  su push-forward, es decir  $Y = f_*(X)$ . Sean  $H^X$  y  $H^Y$  las matrices de deformaciones de los campos  $X$  e  $Y$  respectivamente. También consideramos los flujos  $\Phi_t^X$  y  $\Phi_t^Y$ . Se tiene la siguiente relación

$$H(t, y) = Df(\Phi_t^X(f^{-1}(y)))H(t, f^{-1}(y)) (Df(f^{-1}(y)))^{-1}. \quad (1.3)$$

Invariación de la matriz de deformaciones Invariancia de la matriz de deformaciones Si  $\gamma : I \rightarrow \mathcal{O}$  es una solución de  $x' = X(x)$ , entonces  $\beta = f \circ \gamma$  es solución de  $y' = Y(y)$ . Las matrices características de  $\gamma$  y  $\beta$ , digamos  $G^X$  y  $G^Y$  respectivamente, son similares. Específicamente

$$G^Y(t) = D_x f(\gamma(t)) G^X(t) (D_x f(c))^{-1}. \quad (1.4)$$

En particular si  $\gamma$  es periódica de periodo  $p$ ,  $\beta$  es periódica con el mismo periodo y los multiplicadores característicos son los mismos.

Invariación de la matriz de deformaciones **Demostración** Derivando respecto a  $y$  la siguiente relación, que es sabido que ocurre,

$$\Phi_t^Y(y) = (f \circ \Phi_t^X \circ f^{-1})(y),$$

y usando la regla de la cadena obtenemos (1.3). Supongamos que  $\gamma(0) = c$ . Entonces  $\gamma(t) = \Phi_t^X(c)$ ,  $\beta(0) = f(c)$  y  $\beta(t) = \Phi_t^Y(f(c))$ . Luego, reemplazando  $y$  por  $f(c)$  en (1.3) llegamos a (1.4). Reemplazando en esta última ecuación  $t$  por el período  $p$  vemos que  $G^Y(p)$  y  $G^X(p)$  son similares, de allí tienen el mismo espectro.  $\square$

Radio espectral Definición: radio espectral Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  una matriz, definimos su radio espectral  $\rho(A)$  por

$$\rho(A) := \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Aquí, como es usual,  $\sigma(A)$  es el espectro de  $A$ .

Radio espectral

Sea  $\mathcal{F}$  la familia de todas las normas sobre  $\mathbb{R}^n$ . Si  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $\|\cdot\| \in \mathcal{F}$ , por abuso de notación seguiremos usando el mismo símbolo  $\|A\|$  para la norma como operador sobre  $A$  inducida por  $\|\cdot\|$ . Es decir

$$\|A\| := \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|$$

Teorema: una representación del radio espectral Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Entonces

$$\rho(A) = \inf_{\|\cdot\| \in \mathcal{F}} \|A\|.$$

Radio espectral

Corolarios

1. Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $\varepsilon > 0$ . Entonces existe una norma  $\|\cdot\| \in \mathcal{F}$  tal que

$$\rho(A) \leq \|A\| < \rho(A) + \varepsilon.$$

2. Si  $\rho(A) < 1$  existirá una norma  $\|\cdot\|_0$ , para la cual  $A$  es una contracción, es decir  $\|Ax\|_0 < q\|x\|_0$  y  $q < 1$ .

3. Si  $\rho(A) < 1$  entonces  $A^k x \rightarrow 0$  cuando  $k \rightarrow \infty$ .

Una idea general Sea  $\gamma(t)$  una solución periódica de período  $p$  con  $\gamma(0) = c$  y  $X(c) \neq 0$ . Sea  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  los autovalores de  $G(p)$ , es decir los multiplicadores característicos de  $\gamma$ . Como 1 es autovalor, podemos suponer  $\mu_1 = 1$ . Un

autovector asociado es  $X(c)$ . Sea  $M_c$  el hiperplano ortogonal a  $X(c)$  que contiene a  $c$ ,  $M_c = \{x | (x - c) \cdot X(c) = 0\}$ .

Vamos a demostrar que si  $|\mu_j| < 1$ ,  $j = 2, \dots, n$  entonces  $G(p)$  restringida a  $M_c$  es una contracción.

Consideremos  $\alpha$  una solución cercana en  $t = 0$  a  $\gamma$ . Como vimos podemos escribir

$$\alpha \approx \gamma + \xi, \quad (1.5)$$

donde  $\xi$  resuelve las ecuaciones variacionales  $\xi'(t) = A(t)\xi(t)$ . Como  $G(t)$  es una matriz fundamental para ese sistema

$$\xi(t) = G(t)\xi(0). \quad (1.6)$$

Una idea general **Ejercicio:** Demostrar que si  $A(t)$  es una función a valores matriciales  $A : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  que además es periódica con periodo  $p$ , entonces la matriz fundamental satisface que  $G(t + p) = G(t)G(p)$ . En particular

$$G(kp) = G(p)^k. \quad (1.7)$$

Considerando los tiempos  $t = p, 2p, \dots$  y usando (1.5), (1.6) y (1.7) llegamos a

$$\alpha(kp) = c + G(p)^k \xi(0),$$

Vamos a ver que toda solución cercana a  $\gamma$  atraviesa  $M_c$ , así podremos suponer que  $\xi(0) \in M_c$ . Luego si  $|\mu_j| < 1$ ,  $j = 2, \dots, n$ , entonces  $\alpha(kp) \rightarrow c$ .

Esta discusión da un indicio de por qué podremos esperar estabilidad si  $|\mu_j| < 1$ ,  $j = 2, \dots, n$ .

**Estabilidad orbital** Sea  $\gamma$  una solución periódica y  $\Gamma = \gamma(\mathbb{R})$ . Diremos que  $\gamma$  es *orbitalmente estable* si para cada  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$d(x, \Gamma) < \delta \Rightarrow d(\Phi_t(x), \Gamma) < \varepsilon.$$

Si además tenemos que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} d(\Phi_t(x), \Gamma) = 0,$$

diremos que  $\gamma$  es *orbitalmente asintóticamente estable*.

**Mapeo de Poincaré Teorema:** Mapeo de Poincaré Sea  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{O}$  una solución de período  $p$  del sistema  $x' = X(x)$ , donde  $X : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Sea  $c$  y  $M_c$  como antes. Entonces existe un entorno abierto  $U$  de  $c$  y una función  $C^1$   $\tau : U \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\tau(c) = p$

$$\Phi_{\tau(x)} \in M_c$$

La aplicación  $P : U \cap M_c \rightarrow M_c$  dada por  $P(x) = \Phi_{\tau(x)}(x)$  se llama Mapeo de Poincaré.

Mapeo de Poincaré **Demostración** Definimos

$$F(t, x) = (\Phi_t(x) - c) \cdot X(x).$$

Se tiene que  $F(p, c) = 0$  y que

$$\frac{\partial}{\partial t} F(t, x) = X(\Phi_t(x)) \cdot X(x).$$

Luego

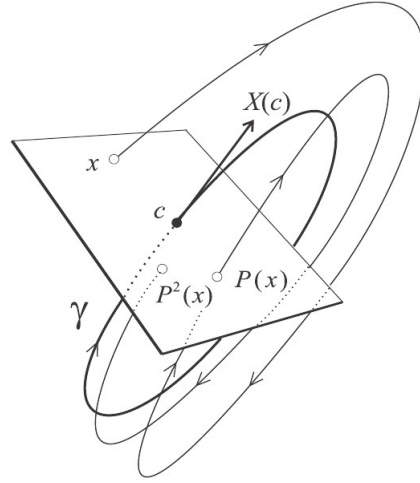
$$\frac{\partial F}{\partial t}(p, c) = |X(c)|^2 > 0.$$

**Mapeo de Poincaré** Se satisfacen las hipótesis del teorema de la función implícita, por consiguiente existe un entorno abierto  $V$  de  $(p, c)$  y un entorno  $U$  de  $c$  tal que

$$\{(t, x) \in V | F(t, x) = 0\} = \{(t, x) | x \in U \text{ y } t = \tau(x)\}$$

Vale decir  $F(\tau(x), x) = 0$ , lo que implica  $\Phi_{\tau(x)}(x) \in M_c$  □

Mapeo de Poincaré



Un ejemplo de Mapeo Poincaré **Ejemplo:**

$$\begin{cases} x'(t) &= x(t)^3 + x(t)y(t)^2 - by(t) - x(t) \\ y'(t) &= x(t)^2y(t) + y(t)^3 + bx(t) - y(t) \end{cases}$$

Convirtiendo a polares

$$\begin{cases} r'(t) &= r(t)(r^2(t) - r(t)) \\ \theta'(t) &= b. \end{cases}$$

ver Sigue en notebook de SAGE

Producto tensorial Dados dos vectores  $a, b \in \mathbb{R}^n$  definimos su producto tensorial  $a \otimes b$  como el operador lineal  $a \otimes b : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  definido por

$$(a \otimes b)v = (b \cdot v)a, \quad \text{para } v \in \mathbb{R}^n.$$

**Ejercicio** Demostrar que respecto a la base canónica de  $\mathbb{R}^n$  la representación matricial del operador  $a \otimes b$  tiene entrada  $ij$

$$(a \otimes b)_{ij} = a_i b_j.$$

El mapeo de Poincaré  $P$  está definido en  $U \cap M_c$ , pero podemos extenderlo  $\tilde{P} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  por

$$\tilde{P}(x) = \Phi_{\tau(x)}(x).$$

Matriz Jacobiana Mapeo Poincaré **Ejercicio:** Demostrar que

$$D\tilde{P}(x) = X(\tilde{P}(x)) \otimes \nabla \tau(x) + H(\tau(x), x),$$

en particular

$$D\tilde{P}(c) = X(c) \otimes \nabla \tau(c) + G(p).$$

Matriz Jacobiana Mapeo Poincaré Teorema Matriz Jacobiana Mapeo Poincaré Asumamos  $c = 0$  y  $X(0) = (0, 0, \dots, 0, 1)$ . Entonces:

$$G(p) = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1,n-1} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ b_{n-1,1} & \cdots & b_{n-1,n-1} & 0 \\ * & \cdots & * & 1 \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

$$D\tilde{P}(0) = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1,n-1} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ b_{n-1,1} & \cdots & b_{n-1,n-1} & 0 \\ * & \cdots & * & * \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

Matriz Jacobiana Mapeo Poincaré Matriz Jacobiana Mapeo Poincaré Al subespacio  $M_0 = \{(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) | x_i \in \mathbb{R}\}$  lo identificamos con  $\mathbb{R}^{n-1}$  y al abierto relativo  $U \cap M_0$  con un abierto  $V$  de  $\mathbb{R}^{n-1}$ . Con estas identificaciones podemos pensar en el Jacobiano de  $P : V \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$  siendo este en  $c = 0$  dado por

$$DP(0) = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1,n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n-1,1} & \cdots & b_{n-1,n-1} \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

Luego si  $\mu_1 = 1, \mu_2, \dots, \mu_n$  son los multiplicadores característicos de  $\gamma$  entonces  $\mu_2, \dots, \mu_n$  son autovalores de  $DP(0)$ .

Matriz Jacobiana Mapeo Poincaré **Demostración** Como  $G(p)X(0) = X(0)$  y como  $X(0) = (0, 0, \dots, 0, 1)$  vemos que la  $n$ -ésima columna de  $G(p)$  es también el  $n$ -ésimo vector canónico. Esto justifica (1.8). Tenemos que

$$X(0) \otimes \nabla \tau(0) = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ * & \cdots & * & * \end{bmatrix}$$

Como  $D\tilde{P}(0) = X(0) \otimes \nabla \tau(0) + G(p)$  se tiene (1.9).

Matriz Jacobiana Mapeo Poincaré Sea  $I_k$  la matriz identidad de  $k \times k$ ,  $B$  la matriz  $B = \{b_{ij}\}_{i,j=1}^{n-1}$ . Como

$$\det(G(p) - \mu I_n) = (1 - \mu) \det(B - \mu I_{n-1}),$$

los autovalores de  $B$  son precisamente  $\mu_2, \dots, \mu_n$ .

Consideramos la incrustación  $i : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , dada por  $i(x_1, \dots, x_{n-1}) = (x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$  y la proyección  $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ , dada por  $\rho(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{n-1})$ . Con esta notación

$$P(v) = \rho(\tilde{P}(i(v))), \quad \text{para } v \in V = \rho(U \cap M_0)$$

por la regla de la cadena,

$$DP(0) = [I_{n-1} \quad 0_{(n-1) \times n}] \begin{bmatrix} B & 0_{(n-1) \times n} \\ * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n-1} \\ 0_{n \times (n-1)} \end{bmatrix} = B$$

□

Matriz Jacobiana Mapeo Poincaré **Ejercicio** ¿Cómo podemos reducir el caso general  $c$  no necesariamente 0 y  $X(c) \neq 0$  al caso considerado?

Teorema Estabilidad Orbital Teorema Estabilidad Orbital Sea  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{O}$  una solución de período  $p$  del sistema  $x' = X(x)$ , donde  $X : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Sea  $c = \gamma(0)$  y  $M_c$  como antes. Supongamos que  $n - 1$  de los múltiplos característicos  $\mu_2, \dots, \mu_n$  tienen módulo menor a 1. Entonces  $\gamma$  es orbitalmente estable. Además, si  $|\mu_j| < a < 1$ , para  $j = 2, \dots, n$ , entonces existe  $L > 0$  y un abierto  $\Omega$ , con  $\Gamma \subset \Omega$  tal que si  $x \in \Omega$ , existe  $T \in \mathbb{R}$  tal que

$$|\Phi_{T+t}(x) - \gamma(t)| \leq La^{t/p}, \quad (1.11)$$

para todo  $t \geq p$ . El número  $T$ , que es el único con la propiedad establecida (**ejercicio**), se denomina la *fase asintótica* de  $x$ .

Teorema Estabilidad Orbital **Demostración** Como antes, asumamos  $c = 0$  y  $X(0) = (0, 0, \dots, 0, 1)$ . Sea  $\Omega_0$  un abierto con  $\Gamma \subset \Omega_0$  y  $\overline{\Omega}_0$  compacto. Pongamos  $\Phi(t, x) = \Phi_t(x)$ , entonces  $\Phi : \mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Tenemos que  $\Phi^{-1}(\Omega_0)$  es un abierto y  $(t, 0) \in \Phi^{-1}(\Omega_0)$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Luego para cada  $t \in [0, 2p]$  existe  $(a_t, b_t) \ni t$  y  $R_t > 0$  tal que  $(t, 0) \in (a_t, b_t) \times B_{R_t}(0) \subset \Phi^{-1}(\Omega_0)$ . Como  $\{(a_t, b_t)\}_{t \in [0, 2p]}$  es un cubrimiento por abiertos del compacto  $[0, 2p]$ , podemos

cubrir por finitos  $(a_{t_i}, b_{t_i})$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Si ahora tomamos  $0 < R < R_{t_i}$ ,  $i = 1, \dots, m$ , tendremos que

$$[0, 2p] \times \overline{B}_R(0) \subset \Phi^{-1}(\Omega_0).$$

**Teorema Estabilidad Orbital** Sea  $0 \in U \subset \mathcal{O}$  un entorno abierto donde está definida y es de clase  $C^1$  el mapeo de retorno  $\tau : U \rightarrow \mathbb{R}$ . Podemos asumir  $B_R(0) = U$ . Sea  $\tilde{P}$ , como antes,  $\tilde{P} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  definida por  $\tilde{P}(x) = \Phi(\tau(x), x)$ . Por el Teorema anterior y las hipótesis sabemos que los autovalores de  $DP(0)$  tienen todos módulo menor que  $a$ . Por el resultado de álgebra lineal tenemos que existe una norma  $\|\cdot\|_0$  tal que

$$\|DP(0)x\|_0 < a\|x\|_0.$$

**Ejercicio** Eligiendo  $\delta > 0$  suficientemente chico tendremos que  $\|x\|_0 < \delta$  implica  $\|P(x)\|_0 \leq a\|x\|_0$ .

Podemos asumir  $B_\delta(0) \subset U$ , donde la bola la tomamos respecto a la norma  $\|\cdot\|_0$ . Como, en particular,  $\|P(x)\|_0 < \delta$ , tendremos que  $P(W) \subset W$ , donde  $W = B_\delta(0) \cap M_0$ . Luego tenemos definida la secuencia  $P^k(x)$ ,  $x \in W$ ,  $k = 1, 2, \dots$

**Teorema Estabilidad Orbital** De la continuidad de  $\tau : W \rightarrow \mathbb{R}$  podemos suponer que  $|\tau(x) - p| \leq p/2$  para todo  $x \in W$ . En particular  $p/2 \leq \tau(x) \leq 2p$ .

Sea

$$\Omega := \{\Phi_t(x) | x \in W, t \in [0, \tau(x)]\},$$

Se tiene que  $\Omega \subset \Omega_0$  y  $\Omega$  es un entorno de  $\Gamma$  (**Ejercicio**).

Veamos que  $\Omega$  es invariante  $\Phi_t(\Omega) \subset \Omega$ ,  $t \geq 0$ . Esto probará la estabilidad orbital.

Sea  $x \in \Omega$ , entonces existe  $w_0 \in W$  y  $t_0 \in [0, \tau(w_0)]$  tal que  $x = \Phi_{t_0}(w_0)$ . Ahora definimos:

$$\begin{aligned} w_1 &= P(w_0) & y & \quad t_1 = \tau(w_0) - t_0 \\ w_k &= P(w_{k-1}) & y & \quad t_k = \tau(w_{k-1}) + t_{k-1} \quad \text{para } k = 2, \dots, \end{aligned}$$

**Teorema Estabilidad Orbital Ejercicio:**  $\Phi_{t_k}(x) = w_k \in W$ ,  $k = 1, 2, \dots$

Como  $\tau(y) \geq p/2$ , para  $y \in W$ , tenemos que  $t_k \rightarrow \infty$ . Luego  $[0, \infty) \subset I_x$  y  $\Phi_t(x)$ ,  $x \in \Omega$ , esta definida para  $t \geq 0$ . Para probar la invariancia tomemos  $x \in \Omega$  y  $t > 0$ . Supongamos  $t_k < t \leq t_{k+1}$ ,  $k \geq 1$ , entonces

$$\Phi_t(x) = \Phi_{t-t_k}(\Phi_{t_k}(x)) = \Phi_{t-t_k}(w_k) \in \Omega.$$

Si  $t \in (0, t_1)$ , entonces  $t + t_0 < t_1 + t_0 = \tau(w_0)$  y

$$\Phi_t(x) = \Phi_t(\Phi_{t_0}(w_0)) = \Phi_{t+t_0}(w_0) \in \Omega.$$

**Teorema Estabilidad Orbital** Ahora probaremos la estabilidad orbital asintótica. Vamos a establecer algunas desigualdades cuya justificación discutiremos en clase. La compacidad de  $\overline{\Omega}_0$  y la continuidad de  $X$  nos dan un  $L_1 > 0$  tal que

$$\|X(y)\|_0 \leq L_1, \quad y \in \overline{\Omega}_0$$

Como  $\Phi \in C^1$  existe  $L_2 > 0$  tal que

$$\|\Phi_t(y) - \Phi_t(x)\|_0 \leq L_2\|y - x\|_0 \quad x, y \in \overline{B}_R(0), \quad t \in [0, 2p].$$

Por las mismas razones existe  $L_3 > 0$  tal que

$$\|\tau(y) - \tau(x)\|_0 \leq L_3\|y - x\|_0 \quad x, y \in \overline{B}_R(0).$$

**Teorema Estabilidad Orbital** Tenemos

$$\|w_k\|_0 = \|P(w_{k-1})\|_0 \leq a\|w_{k-1}\|_0,$$

Por inducción

$$\|w_k\|_0 \leq a^k \|w_0\|_0, k = 1, 2, \dots$$

Pongamos  $T_k := t_k - kp, k = 0, 1, \dots$

$$\begin{aligned} |T_{k+1} - T_k| &= |t_{k+1} - t_k - p| \\ |\tau(w_k) - p| &= |\tau(w_k) - \tau(0)| \\ &\leq L_3 \|w_k\|_0 \leq L_3 a^k \|w_0\|_0. \end{aligned}$$

**Teorema Estabilidad Orbital** La desigualdad anterior implica que  $T_k$  es una sucesión de Cauchy, luego existe  $T$  tal que  $\lim T_k = T$ . Este número resulta la fase de  $x$ .

Ahora demostraremos (1.11). Sea  $t \geq p$  y tomemos  $k \in \mathbb{N}$  con  $kp \leq t < (k+1)p$ . Sea  $s := t - kp$ .

$$\Phi_{s+t_k}(x) = \Phi_s(\Phi_{t_k}(x)) = \Phi_s(w_k)$$

y  $\Phi_s(0) = \gamma(s)$ . Como  $s \in [0, p]$ , se puede usar la desigualdad Lipschitziana para  $\Phi_s$  para conseguir

$$\begin{aligned} \|\Phi_{s+t_k}(x) - \gamma(s)\|_0 &\leq \|\Phi_s(w_k) - \Phi_s(0)\|_0 \\ &\leq L_2 \|w_k\|_0 \\ &\leq L_2 a^k \|w_0\|_0. \end{aligned}$$

**Teorema Estabilidad Orbital**

Sea  $s_1 < s_2$

$$\begin{aligned} \|\Phi_{s_1}(x) - \Phi_{s_2}(x)\|_0 &\leq \max_{[s_1, s_2]} \left\| \frac{\partial}{\partial s} \Phi_s(x) \right\|_0 |s_1 - s_2| \\ &\leq \max_{[s_1, s_2]} \|X(\Phi_s(x))\|_0 |s_1 - s_2| \leq L_1 |s_1 - s_2|. \end{aligned}$$

Tomando  $s_2 = s + t_k$  y  $s_1 = s + kp + T$ , en este caso  $s_2 - s_1 = T_k - T$  y dejamos como **ejercicio** probar que

$$\|\Phi_{s+t_k}(x) - \Phi_{s+kp+T}(x)\|_0 \leq L_1 |T_k - T| \leq \frac{L_1 L_3 \|w_0\|_0}{1-a} a^k.$$

Luego

$$\|\Phi_{t+T}(x) - \gamma(t)\| = \|\Phi_{s+kp+T}(x) - \gamma(s)\|_0 \leq K a^{k+1} \leq K a^{t/p}.$$

El caso general se aborda como es usual, mediante un push forward.  $\square$

**Corolario Estabilidad Orbital** Sea  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{O}$  una solución de período  $p$  del sistema  $x' = X(x)$ , donde  $X : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Sea  $c = \gamma(0)$  y  $M_c$  como antes. Sea  $P : U \cap M_c \rightarrow M_c$  el mapeo de Poincare. Supongamos que para cada entorno  $\tilde{W}$  de  $c$  en  $U \cap M_c$  existe un entorno  $W \subset \tilde{W}$  de  $c$  en  $U \cap M_c$  tal que

$$P(W) \subset W.$$

Entonces  $\gamma$  es orbitalmente estable.