

## 1. Series de potencias

### 1.1. Definición

**Definición 1.** Una serie de potencias es una serie de la forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

donde  $a_n, n = 0, 1, \dots, z_0$  y  $z$  son elementos de  $\mathbb{R}$ .

Estamos interesados en determinar los valores de  $z$  para los cuales una serie converge.

**Ejemplo 1.** La serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n,$$

es una serie de potencias. Aquí  $a_n = 1, n = 0, 1, \dots$  y  $z_0 = 0$ . Esta serie converge para  $|z| < 1$  a

$$\frac{1}{1 - z}$$

y no converge para cualquier otro valor de  $z \in \mathbb{R}$ .

**Ejemplo 2.** Supongamos  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $I$  es un intervalo abierto  $I = (a, b)$  y que  $f$  tiene derivadas de todo orden en  $z_0 \in I$ . Entonces es posible construir la serie de Taylor de  $f$  en  $z_0$  que es una serie de potencias. Recordemos que esta serie es

$$S(f, z_0, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n.$$

## 2. Límites superior e inferior

**Definición 2.** Dada una sucesión de números reales  $x_n$ , consideramos una nueva sucesión:

$$A_n = \sup\{x_n, x_{n+1}, \dots\}$$

La nueva sucesión de reales  $A_n$  es siempre no creciente ( $A_n \geq A_{n+1}$ ), luego tiene un límite (puede ser  $\pm\infty$ ). A este límite lo llamamos **el límite superior de  $x_n$** . Lo denotamos por  $\limsup$ . Es decir:

$$\limsup x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup\{x_n, x_{n+1}, \dots\}.$$

Tomando ínfimo en lugar de supremo conseguimos **el límite inferior** ( $\liminf$ ).

**Ejemplo 3.** Si  $x_n = (-1)^n$ , entonces

$$\{x_n, x_{n+1}, \dots\} = \{\pm 1, \mp 1, \pm 1, \dots\}.$$

El supremo de este conjunto es para todo  $n$  igual a 1 y el ínfimo igual a -1. Luego  $\liminf x_n = -1$  y  $\limsup = 1$ .

**Ejemplo 4.** Si  $x_n = 1/n$ , si  $n$  es par y  $x_n = 1$  si  $n$  es impar, entonces el conjunto

$$\{x_n, x_{n+1}, \dots\}$$

tiene por supremo 1 y el ínfimo igual a 0. Luego  $\liminf x_n = 0$  y  $\limsup = 1$ .

**Teorema 1. Propiedades** Sea  $x_n$  e  $y_n$  dos sucesiones de números reales, entonces:

1. El  $\limsup$  y el  $\liminf$  existen siempre si se permite que  $\pm\infty$  sean sus posibles valores.
2.  $\liminf x_n \leq \limsup x_n$ .
3.  $\liminf x_n = \limsup x_n$  si y solo si el  $\lim x_n$  existe. En este caso todos los límites coinciden.
4.  $\liminf(x_n + y_n) \geq \liminf x_n + \liminf y_n$ .
5.  $\limsup(x_n + y_n) \leq \limsup x_n + \limsup y_n$ .

### 3. Radio de convergencia

**Definición 3.** Dada la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

definimos el **radio de convergencia**  $R$  de la siguiente forma:

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}.$$

**Ejemplo 5.** La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n,$$

tiene radio de convergencia:

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} 1^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1^{1/n} = 1$$

Luego  $R = 1$ .

**Ejemplo 6.** La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{M}\right)^n z^n,$$

tiene radio de convergencia:

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{1}{M}\right)^n\right)^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{1}{M}\right)^n\right)^{1/n} = \frac{1}{M}$$

Luego  $R = M$ .

**Ejemplo 7.** Fijemos  $M > 0$  y  $n$  un natural tal que  $[n/2] > M$  (aquí  $[x]$  es la parte entera de  $x$ ). Entonces, como  $n - [n/2] \geq [n/2] > M$

$$\begin{aligned} n! &= n(n-1) \cdots 1 > n(n-1) \cdots (n - [n/2]) \\ &> \underbrace{M \cdots M}_{[n/2] \text{ veces}} \\ &\geq M^{[n/2]} \\ &> M^{n/3} \end{aligned}$$

Luego

$$\frac{1}{R} := \limsup_{n \rightarrow \infty} (1/n!)^{1/n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{M^{n/3}}\right)^{1/n} = \frac{1}{\sqrt[3]{M}}$$

Como  $M$  es arbitrario, haciendo  $M \rightarrow \infty$  vemos que el radio de convergencia de la

serie  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$  es  $R = \infty$ .

### Primer Teorema Principal

**Teorema** Consideremos la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

Entonces:

1.  $\leftrightarrow$  Si  $|z| < R$ , la serie converge absolutamente en  $z$ .
2.  $\leftrightarrow$  Si  $|z| > R$ , la serie diverge.
3.  $\leftrightarrow$  Si  $|z| = R$ , ????

**Demostración Primer Teorema Principal Dem.** Supongamos  $0 < R < \infty$ . Sea  $L = 1/R$  y tomemos  $\varepsilon > 0$  pequeño. Como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup\{|a_n|^{1/n}, |a_{n+1}|^{1/n+1}, \dots\} = L$$

para  $n_0$  suficientemente grande

$$\sup\{|a_n|^{1/n}, |a_{n+1}|^{1/n+1}, \dots\} < L + \varepsilon.$$

Así

$$|a_n|^{1/n} < L + \varepsilon \quad \text{para } n \geq n_0.$$

Elijamos  $0 < r < 1/(L + \varepsilon) < 1/L = R$ . Si  $|z| < r$  entonces

$$|a_n||z|^n < (L + \varepsilon)^n r^n \quad \text{para } n \geq n_0.$$

### Demostración Primer Teorema Principal

Pero  $r(L + \varepsilon) < 1$ . La desigualdad de arriba y el teorema de comparación (notar que el miembro de la derecha forma una serie geométrica) implican que la serie converge absolutamente para este  $z$ . Como  $\varepsilon$  es arbitrario, dado cualquier  $z$ , con  $|z| < 1$ , tenemos un  $\varepsilon$  lo suficientemente chico para que  $|z| < 1/(L + \varepsilon)$ .

**Ejercicio:** Demostrar los casos  $R = 0$ ,  $R = \infty$  y el segundo inciso.

### Segundo Teorema Principal

**Teorema** La función

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

es holomorfa dentro del círculo con centro en el origen dado por el radio de convergencia. Además

$$f'(z) = g(z) := \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1},$$

teniendo esta serie el mismo radio de convergencia que el de  $f$ .

**Demostración Segundo Teorema Principal Dem.** La afirmación sobre el radio de convergencia es consecuencia de que  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/n} = 1$ . Como el radio  $R'$  de convergencia de  $g$  es:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R'} &= \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}(n+1)|^{1/(n+1)} \\ &\stackrel{\text{Ejer. Matemáticos}}{=} \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}|^{1/(n+1)} \lim_{n \rightarrow \infty} |(n+1)|^{1/(n+1)} \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}|^{1/(n+1)} = \frac{1}{R} \end{aligned}$$

**Demostración Segundo Teorema Principal** Ahora veamos que  $f$  es holomorfa y  $f' = g$ . Sea  $0 < r < R$ ,  $|z_0| < r$  y  $N \in \mathbb{N}$ . Pongamos:

$$f(z) = S_N(z) + E_N(z),$$

$$S_N(z) = \sum_{n=0}^N a_n z^n \quad \text{y} \quad E_N(z) = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n z^n$$

Tomemos  $|h| < r - |z_0|$ , así  $|z_0 + h| < r$ . Tenemos

$$\begin{aligned} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} - g(z_0) &= \frac{S_N(z_0 + h) - S_N(z_0)}{h} - S'_N(z_0) \\ &\quad + S'_N(z_0) - g(z_0) \\ &\quad + \frac{E_N(z_0 + h) - E_N(z_0)}{h} \end{aligned}$$

**Demostración Segundo Teorema Principal** Ahora si  $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \left| \frac{E_N(z_0 + h) - E_N(z_0)}{h} \right| &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \left| \frac{(z_0 + h)^n - z_0^n}{h} \right| \\ &= \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| (|z_0|^{n-1} + |z_0|^{n-2}h + \dots + h^{n-1}) \\ &\leq 2 \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| nr^{n-1} < \varepsilon \end{aligned}$$

Para  $N$  suficientemente grande. Además como  $S'_N(z) \rightarrow g(z)$  cuando  $N \rightarrow \infty$  podemos elegir, a su vez,  $N$  suficientemente grande para que

$$|S'_N(z_0) - g(z_0)| < \varepsilon$$

**Demostración Segundo Teorema Principal** Fijemos un  $N$  que satisfaga las condiciones anteriores. Ahora podemos encontrar  $\delta > 0$  para que  $|h| < \delta$  cumpla que

$$\left| \frac{S_N(z_0 + h) - S_N(z_0)}{h} - S'_N(z_0) \right| < \varepsilon.$$

Esto muestra que  $f'(z_0) = g(z_0)$  y por consiguiente  $f$  es holomorfa.

**Un corolario**

**Corolario** Una serie de potencias es infinitamente diferenciable. Las sucesivas derivadas se obtienen derivando término a término la serie. El radio de convergencia se conserva.

**Representación de la función exponencial**

**Ejemplo** Habíamos visto que la serie:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

tenía radio de convergencia infinito y por ende converge en  $\mathbb{R}$ . Ahora vemos que

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

**Representación de la función exponencial**

**Ejemplo** Esta  $f$  resuelve la simple ecuación diferencial  $f'(z) = f(z)$ . La misma ecuación es resuelta por  $g(z) = e^z$ . Tenemos:

$$\frac{d}{dz} f(z)e^{-z} = f'(z)e^{-z} - f(z)e^{-z} = 0$$

Entonces  $h(z) = f(z)e^{-z}$  es una función constante. Pero  $h(0) = 1$ , entonces  $f(z)e^{-z} = 1$  y de allí  $f(z) = e^z$ .

**Comentario** Podemos a partir de la exponencial encontrar desarrollos en serie para las funciones trigonométricas.

## 4. Funciones analíticas

**Funciones Analíticas**

Podemos hacer un desarrollo de potencias centrado en otro punto  $z_0 \in \mathbb{R}$  diferente que 0. Nos referimos a considerar series de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

Claramente a este tipo de serie se le aplican todos los resultados anteriores. Ahora el disco de convergencia es un disco centrado en  $z_0$  y de radio dado por el radio de convergencia dado por la misma fórmula que antes.

**Funciones Analíticas**

**Definición** Una función  $f : \Omega \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  se dirá analítica si para cada  $z_0 \in \Omega$ , existe un  $R$  y  $a_n \in \mathbb{R}$ , tal que vale la igualdad:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad \text{para } |z - z_0| < R$$

**Ejercicio** Si  $f$  es analítica tenemos la siguiente fórmula

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

para los coeficientes  $a_n$ .