1. Teorema de separación de Sturm

1.1. Motivación

El objetivo de esta unidad es mostrar como se pueden estudiar propiedades de las soluciones de ecuaciones lineales de segundo orden sin resolver la ecuación diferencial. En particular estudiaremos propiedades de los ceros de las soluciones. Recordemos que denominamos cero de una función y a un punto x tal que $y(x) = 0$.

Veamos como se comportan los ceros de la ecuación $y'' + ay = 0$. Para ser más concretos consideremos el siguiente pvi asociado a esta ecuación.

$$\begin{cases} y'' + ay = 0. \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

Las soluciones acordes al valor de a son

$$y(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{|a|}} e^{\sqrt{|a|}x} - \frac{1}{2\sqrt{|a|}} e^{-\sqrt{|a|}x} & \text{cuando } a < 0 \\ x & \text{cuando } a = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{|a|}} \operatorname{sen}(\sqrt{a}x) & \text{cuando } a > 0 \end{cases} .$$

En la siguiente animación representamos los gráficos de las soluciones a medida que a varía desde -2 hasta 6 de a saltos de $0{,}1$.

La separación entre ceros sucesivos de la solución disminuye a medida que a crece, la solución pasa de tener un único cero para $a < 0$ a tener infinitos separados una distancia de $\pi/\sqrt{a}$. Cuando $a > 0$, el número $\sqrt{a}$ es la frecuencia circular de la solución sinusoidal $y(x) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \operatorname{sen}(\sqrt{a}x)$, por analogía la seguiremos denominando frecuencia para otros valores de a.

Vamos a desarrollar dos resultados principales, el Teorema de Separación de Sturm y el Teorema de Comparación de Sturm. Luego generalizaremos este último teorema al Teorema de Comparación de Sturm-Picone.

1.2. Teorema separación de Sturm

Nuestra investigación sobre los ceros de soluciones comienza con el siguiente teorema que muestra que los ceros de soluciones linealmente independientes alternan entre si.

Teorema 1.1 (Separación de Sturm) *Sean y_1 e y_2 soluciones linealmente independientes de*

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0. \tag{1}$$

Entonces entre dos ceros consecutivos de y_2 hay exactamente un cero de y_1.

Dem. Sean x_1 y x_2 ceros sucesivos de y_2. Podemos suponer $y_2 > 0$ en (x_1, x_2). Vamos a considerar el Wronskiano de las soluciones

$$W = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x),$$

que es no nulo por la independencia lineal y por lo tanto tiene siempre el mismo signo. En los puntos x_1 y x_2 tenemos $W = y_1(x)y_2'(x)$. Notar que

$$y_2'(x_1) = \lim_{h \to 0+} \frac{y_2(x_1 + h)}{h} \geq 0.$$

De manera similar deducimos $y_2'(x_2) \leq 0$. Por la invariancia del signo de $W = y_1 y_2'$ debe ocurrir que $y_1(x_1)$ e $y_1(x_2)$ tienen signos diferentes. Y por lo tanto y_1 se debe anular en (x_1, x_2). $\square$

Ejemplo 1.1 Las funciones $y_1(x) = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x$ e $y_2(x) = c_3 \cos x + c_4 \operatorname{sen} x$ son soluciones de la ecuación del oscilador armónico $y'' + y = 0$. Para que sean linealmente independientes se tiene que satisfacer que el Wronskiano W sea no nulo en todo punto. Evaluamos W en 0

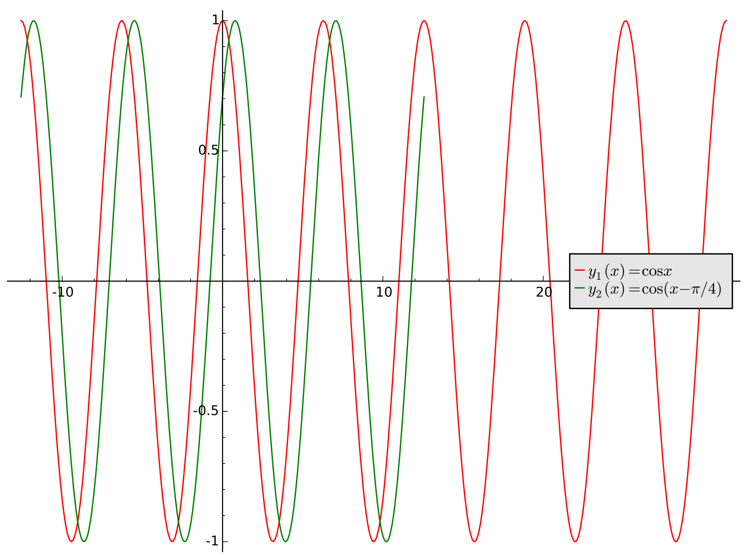
$$W = \det \begin{pmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1'(0) & y_2'(0) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} c_1 & c_3 \\ c_2 & c_4 \end{pmatrix} = c_1 c_4 - c_2 c_3 \neq 0$$

Bajo este supuesto los ceros de y_1 e y_2 alternan. Veamos esta afirmación de manera directa, sin invocar el Teorema de Separación de Sturm. Como es costumbre escribamos

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \rho_1 \cos(x - \alpha_1), \quad \text{donde } c_1 = \rho_1 \cos \alpha_1 \text{ y } c_2 = \rho_1 \operatorname{sen} \alpha_1 \\ y_2(x) &= \rho_2 \cos(x - \alpha_2), \quad \text{donde } c_3 = \rho_2 \cos \alpha_2 \text{ y } c_4 = \rho_2 \operatorname{sen} \alpha_2. \end{aligned}$$

La condición $c_1 c_4 - c_2 c_3 \neq 0$ equivale a la independencia lineal de los vectores (c_1, c_2) y (c_3, c_4) y esto último a que $\alpha_1 - \alpha_2 \notin \mathbb{Z}$. Por consiguiente los ceros de y_1 e y_2 alternaran como predice el Teorema.

```
p=plot(cos(x),(x,-4*pi,10*pi),color='red',legend_label='$y_1(x)=\cos x$')
p+=plot(cos(x-pi/4),(x,-4*pi,4*pi),color='green',legend_label='$y_2(x)=\cos( x-\pi/4)$')
```



1.3. Reducción a la ecuación normal

La ecuación general lineal de segundo orden (1) no es muy apropiada para el estudio que nos proponemos. Vamos a mostrar que podemos reducir aquella ecuación a una más simple que denominaremos *normal*.

Teorema 1.2 *Existe una función v tal que el cambio de variables $y(x) = v(x)u(x)$ transforma la ecuación* (1) *en la ecuación*

$$u'' + q(x)u = 0. \tag{2}$$

Dem.

```
>>> from sympy import *
>>> x=symbols('x')
>>> y=Function('y')(x)
>>> u=Function('u')(x)
>>> v=Function('v')(x)
>>> Q=Function('Q')(x)
>>> Q=Function('Q')(x)
>>> y=u*v
>>> eq=y.diff(x,2)+P*y.diff(x)+Q*y
>>> eq.expand().coeff(u.diff(x))
P(x)*v(x) + 2*Derivative(v(x), x)
```

Para que la ecuación lineal de segundo orden resultante no tenga el término con u' se debe cumplir que

$$P(x)v(x) + 2\frac{d}{dx}v(x) = 0,$$

que es una ecuación lineal de primer orden para v. Resolvamos la ecuación

```
>>> dsolve(eq.expand().coeff(u.diff(x)),v)
v(x) == C1*exp(-Integral(P(x), x)/2)
```

Obtenemos que una solución es $v(x) = e^{-\int \frac{P}{2}dx}$. $\square$

Hallemos q.

```
>>> y=u*exp(-Integral(P/2,x))
>>> eq=y.diff(x,2)+P*y.diff(x)+Q*y
>>> eq=(eq/exp(-Integral(P/2,x))).simplify()
>>> eq
-P(x)**2*u(x)/4 + Q(x)*u(x) - u(x)*Derivative(P(x), x)/2 + Derivative(u(x), x, x)
```

Obtenemos

$$\boxed{-\frac{1}{4}P^2(x)u(x) + Q(x)u(x) - \frac{1}{2}u(x)\frac{d}{dx}P(x) + \frac{d^2}{dx^2}u(x) = 0}.$$

y por lo tanto

$$\boxed{q = -\frac{1}{4}P^2(x) + Q(x) - \frac{1}{2}\frac{d}{dx}P(x)}.$$

Ejemplo 1.2 Un caso particular de importancia lo constituye la ecuación de Bessel

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - a^2)y = 0 \tag{3}$$

.

```
>>> a=symbols('a')
>>> eq2=eq.subs({P:1/x,Q(x):1-a**2/x**2,P.diff():(1/x).diff(x)}).simplify()
>>> eq2.expand()
-a**2*u(x)/x**2 + u(x) + Derivative(u(x), x, x) + u(x)/(4*x**2)
```

Vemos que la ecuación equivale a

$$\boxed{u'' + \left(1 + \frac{1-4a^2}{4x^2}\right)u = 0}. \tag{4}$$

Notar que si $v(x) \neq 0$, entonces los ceros de la función $u(x)$ e $y(x) = v(x)u(x)$ son los mismos. De allí que, si nuestro objetivo es estudiar ceros de soluciones de ecuaciones lineales de segundo orden, podemos suponer que la ecuación viene dada en la forma normal (2).

Por analogía entre las ecuación a coeficientes constantes $y'' + ay = 0$ y la ecuación con coeficientes variables (2), llamaremos a la función $q(x)$ frecuencia. El objetivo que tenemos es ver si se observa un comportamiento similar entre las soluciones de la ecuación (2) y las de su contraparte a coeficientes constantes.

1.4. Teorema de Comparación de Sturm

Teorema 1.3 *Sean q_i, $i = 1, 2$, continuas e y_i, $i = 1, 2$, soluciones de*

$$y_i''(x) + q_i(x)y_i(x) = 0, \quad i = 1, 2.$$

Sean x_0 y x_1 ceros sucesivos de y_2 y supongamos que $q_2(x) \leq q_1(x)$ y $q_2 \not\equiv q_1$ en $[x_0, x_1]$. entonces y_1 tiene al menos un cero en (x_0, x_1).

Dem. Por la linealidad de las ecuaciones y como x_0 y x_1 son ceros consecutivos, podemos suponer $y_2 > 0$ en (x_0, x_1). Supongamos que y_1 no tiene ceros en (x_0, x_1), entonces en virtud del Teorema de Bolzano, y_1 no cambia de signo en (x_0, x_1) y por consiguiente podemos suponer también que $y_1 > 0$ en (x_0, x_1). Derivando el Wronskiano y usando las ecuaciones diferenciales que satisfacen y_1 e y_2

$$\begin{aligned}\frac{dW}{dx} &= \frac{d}{dx}(y_1y_2' - y_1'y_2)\\ &= y_1y_2'' - y_1''y_2\\ &= -q_2y_1y_2 + q_1y_1y_2\\ &= (q_1 - q_2)y_1y_2 \geq 0\end{aligned}$$

Integrado esta desigualdad, tomando en cuenta que $q_1 \not\equiv q_2$ y que x_0 y x_1 son ceros de y_2

$$0 < \int_{x_0}^{x_1} \frac{dW}{dx} dx = W(x_1) - W(x_2) = y_1(x_1)y_2'(x_1) - y_1(x_0)y_2'(x_0). \tag{5}$$

Por un razonamiento análogo al de la demostración del Teorema 1.1 debemos tener que $y_2'(x_0) \geq 0$ e $y_2'(x_1) \leq 0$. Luego $y_1(x_0)y_2'(x_0) \geq 0 \geq y_1(x_1)y_2'(x_1)$ que es una contradicción con (5). □

Corolario 1.4 *Si $q \leq 0$ y $q \not\equiv 0$ en el intervalo, acotado o no, I e $y(x)$ es solución de $y'' + q(x)y = 0$, entonces y tiene a los sumo un cero en I.*

Dem. Si $y(x)$ tuviese dos ceros entonces podemos usar el Teorema de Comparación de Sturm con $q_2 = q$, $y_2 = y$, $q_1 = 0$ e $y_1 \equiv 1$ (notar que y_1 resueleve $z'' + q_1(x)z = 0$) y llegaríamos a que y_1 debería anularse en algún punto. Esta contradicción demuestra el corolario. □

Corolario 1.5 *Si existe $q_0 \in \mathbb{R}$ tal que $q(x) \geq q_0 > 0$ en $I = (a, +\infty)$ y si $y(x)$ es solución de $y'' + q(x)y = 0$, entonces y tiene infinitos ceros en el intervalo no acotado $(a, +\infty)$. De hecho y tiene un cero en cualquier intervalo de longitud $\pi/\sqrt{q_0}$.*

Dem. Evidentemente hay que usar el Teorema de Comparación de Sturm con la ecuación $z'' + q_0 z = 0$. La función $z(x) = \cos(\sqrt{q_0}x - \alpha)$ es solución esta ecuación. La función z tiene ceros en $k\frac{\pi}{\sqrt{q_0}} + \alpha$, $k = 1, 2, \ldots$. Si $[a, b]$ es cualquier intervalo de longitud $\frac{\pi}{\sqrt{q_0}}$, podemos elegir $\alpha = a$ y entonces b será $\frac{\pi}{\sqrt{q_0}} + \alpha$. Por consiguiente y tiene un cero en $[a, b]$. □

Corolario 1.6 *Supongamos que $q(x) \geq (1 + \varepsilon)/4x^2$, para $x > 0$. Entonces toda solución de $y'' + q(x)y = 0$ tiene infinitos ceros en $(0, +\infty)$. Más aún, hay una sucesión de ceros tendiendo a infinito y otra tendiendo a cero.*

Dem. En la ecuación

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{1 + \varepsilon}{4x^2} z = 0, \tag{6}$$

hagamos el cambio de variable dependiente $z = y\sqrt{x}$. Primero computemos las derivadas

$$\frac{dz}{dx} = \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{2} y + x^{\frac{1}{2}} \frac{dy}{dx}$$

y

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = -\frac{x^{-\frac{3}{2}}}{4} y + x^{-\frac{1}{2}} \frac{dy}{dx} + x^{\frac{1}{2}} \frac{d^2 y}{dx^2} \tag{7}$$

Sustituyendo (7) y $z = y\sqrt{x}$ en (6) obtenemos

$$0 = \frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{1 + \varepsilon}{4x^2} z = -\frac{x^{-\frac{3}{2}}}{4} y + x^{-\frac{1}{2}} \frac{dy}{dx} + x^{\frac{1}{2}} \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1 + \varepsilon}{4x^2} x^{\frac{1}{2}} y = \boxed{\frac{\varepsilon}{4} x^{-\frac{3}{2}} y + x^{-\frac{1}{2}} \frac{dy}{dx} + x^{\frac{1}{2}} \frac{d^2 y}{dx^2}}. \tag{8}$$

Ahora cambiemos la variable independiente por $t = \ln x$. Entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \frac{dy}{dt} = \boxed{e^{-t} \frac{dy}{dt}}. \tag{9}$$

y

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \left(\frac{d}{dx} e^{-t} \right) \frac{dy}{dt} + e^{-t} \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dt} \right) = e^{-t} \left(\frac{-1}{x} \right) \frac{dy}{dt} + e^{-t} \frac{d^2 y}{dt^2} \frac{1}{x} = -e^{-2t} \frac{dy}{dt} + e^{-2t} \frac{d^2 y}{dt^2} = \boxed{e^{-2t} \left(-\frac{dy}{dt} + \frac{d^2 y}{dt^2} \right)}. \tag{10}$$

Sustituyendo (9) y (10) y $x = e^t$ en (8)

$$0 = \frac{\varepsilon}{4} e^{-\frac{3}{2}t} y + e^{-\frac{3}{2}t} \frac{dy}{dt} + e^{-\frac{3}{2}t} \left(-\frac{dy}{dt} + \frac{d^2 y}{dt^2} \right) = \frac{\varepsilon}{4} e^{-\frac{3}{2}t} y + e^{-\frac{3}{2}t} \frac{d^2 y}{dt^2}$$

Dividiendo por $e^{-\frac{3}{2}t}$ vemos que y resuelve la ecuación del oscilador armónico

$$\boxed{\frac{\varepsilon}{4}y + \frac{d^2y}{dt^2} = 0}. \tag{11}$$

Continuando con la demostración, observemos que como las soluciones de la ecuación del oscilador armónico (11) tienen infinitos ceros de la forma $k\pi + \alpha$, para $k \in \mathbb{Z}$ y para algún $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $z(x) = \sqrt{x}y(\ln(x))$ va a tener infinitos de la forma $e^{k\pi+\alpha}$.

Sea ahora y solución de $y'' + q(x)y = 0$. Si aplicamos el Teorema de Comparación de Sturm con $q_2(x) = \frac{1+\varepsilon}{4x^2}$ y $q_1 = q$. Deducimos que entre los números $e^{\alpha}(e^{\pi})^k$ y $e^{\alpha}(e^{\pi})^{k+1}$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{Z}$, hay siempre un cero de y, digamos $e^{\alpha}(e^{\pi})^k < x_{k,\alpha} < e^{\alpha}(e^{\pi})^{k+1}$. Ahora tomando $\alpha = 0$ y $k \to \infty$ obtenemos una sucesión $x_{k,0}$, $k = 1, 2, \ldots,$, de ceros tendiendo a infinito. Tomando $\alpha = 0$ y $k \to -\infty$ obtenemos la sucesión $x_{k,0}$, $k = -1, -2, \ldots,$, de ceros tendiendo a cero. □

Corolario 1.7 *Toda solución a la ecuación de Bessel* (3) *tiene infinitos ceros en* $(0, +\infty)$ *que forman una sucesión* x_n *tal que* $x_{n+1} - x_n \to \pi$ *cuando* $n \to \infty$.

Dem. Vamos a utilizar la ecuación (4) cuyas soluciones u tienen los mismos ceros que las respectivas de (3). Fijemos una de estas soluciones $u(x)$. Vamos a distiguir tres casos.
Caso $a = \frac{1}{2}$ En este caso la ecuación se reduce a la ecuación del oscilador armónico $u'' + u = 0$ y la afirmación es ya conocida.
Caso $a < \frac{1}{2}$ En esta situación $1 + \frac{1-4a^2}{4x^2} > 1$ en $(0, +\infty)$. Luego por el Teorema de Comparación de Sturm, entre dos ceros de la solución $z(x) = \operatorname{sen}(x - \alpha)$ de la ecuación $z'' + z = 0$ tenemos un cero de u. Como α es arbitrario, esto implica que u tiene infinitos ceros que distan entre si menos de π. Ahora como $(1 - 4a^2)/4x^2 \to 0$, cuando $x \to \infty$, para todo $\varepsilon > 0$ existe $x_0 > 0$ tal que $(1 - 4a^2)/4x < \varepsilon$, para $x \geq x_0$. Entonces en $[x_0, +\infty)$ podemos usar el Teorema de comparación de Sturm, con $q_2(x) = 1 + (1 - 4a^2)/4x^2$ y $q_1(x) = 1 + \varepsilon$, $y_2(x) = u(x)$ e $y_1(x) = \operatorname{sen}(\sqrt{1+\varepsilon}x - \alpha)$, que es solución de $y'' + (1 + \varepsilon)y = 0$. Concluímos que entre dos ceros de u hay siempre uno de y_1. Debe ocurrir entonces que dos ceros sucesivos de u en $[x_0, +\infty)$ distan en más de $\pi/\sqrt{1+\varepsilon}$. De lo contrario, si a y b son ceros de u y $b - a < \pi/\sqrt{1+\varepsilon}$, entonces para $\alpha = \sqrt{1+\varepsilon}a$, la función $y_1(x) = \operatorname{sen}(\sqrt{1+\varepsilon}x - \alpha)$ satisface $y_1(a) = \operatorname{sen} 0 = 0$. Además el cero de y_1 inmediato posterior al cero a es $a + \pi/\sqrt{1+\varepsilon}$ que es mayor que b. Por consiguiente entre $(a, a + \pi/\sqrt{1+\varepsilon})$ (y de allí en (a, b)) y_1 no se anula, contradiciendo esto el Teorema de Comparación de Sturm.
Caso $a > \frac{1}{2}$ Es esencialmente muy similar y queda como **ejercicio**. □

Ahora vamos a extender el Teorema de Comparación de Sturm a ecuaciones que, sin ser la ecuación general lineal de segundo orden, son más generales que (2). Concretamente, supongamos que $p(x)$ es una función diferenciable y $q(x)$ es continua en un intervalo I, entonces consideraremos ecuaciones del tipo

$$(p(x)y'(x))' + q(x)y(x) = 0. \tag{12}$$

Lema 1.8 (Identidad de Picone) *Supongamos* y, z *dos veces diferenciables en* I *con* $z(x) \neq 0$ *en* I*, y* p_0, p_1 *diferencialbles en* I. *Entonces*

$$\left[\frac{y}{z}\left(zp_0y' - yp_1z'\right)\right]' = y(p_0y')' - \frac{y^2}{z}(p_1z')' + (p_0 - p_1)y'^2 + p_1\left(y' - \frac{y}{z}z'\right)^2 \tag{13}$$

Dem. **??** □

Teorema 1.9 (Teorema de comparación de Sturn-Picone) *Sean* p_i,$i = 1, 2$*, diferenciables y* q_i*,* $i = 1, 2$*, continuas sobre* I*, con* $0 < p_1(x) \leq p_0(x)$*,* $q_0(x) \leq q_1(x)$ *en* I*. Supongamos* y_i*,* $i = 1, 2$*, soluciones no triviales de las ecuaciones*

$$(p_i(x)y_i'(x))' + q_i(x)y_i = 0, \quad i = 1, 2 \tag{14}$$

respectivamente. Entonces entre ceros consecutivos de y_0 *hay uno de* y_1*, a menos que* $p_0 \equiv p_1$*,* $q_0 \equiv q_1$ *y que las funciones* y_0 *e* y_1 *sean linealmente dependientes.*

Dem. Supongamos a y b ceros consecutivos de y_0 y que $y_1 \neq 0$ en (a, b). Aplicando la identidad de Picone, con $y = y_0$, $z = y_1$, y las ecuaciones (14), que permiten reemplazar $(p_iy_i')'$ por $-q_iy_i$ en (13). Obtenemos

$$\left[\frac{y_0}{y_1}\left(y_1p_0y_0' - y_0p_1y_1'\right)\right]' = (q_1 - q_0)y_0^2 + (p_0 - p_1){y_0'}^2 + p_1\left(y_0' - \frac{y_0}{y_1}y_1'\right)^2$$

Ahora integramos esta desigualdad entre a y b, al ser estos puntos ceros de y_0 obtenemos

$$0 = \int_a^b \left[\frac{y_0}{y_1} \left(y_1 p_0 y_0' - y_0 p_1 y_1' \right) \right]' dx = \int_a^b \left[(q_1 - q_0) y_0^2 + (p_0 - p_1) {y_0'}^2 + p_1 \left(y_0' - \frac{y_0}{y_1} y_1' \right)^2 \right] dx$$

Como por hipotesis el integrando es una función no negativa, entonces debe ser la función identicamente nula y de allí cada término que lo compone es la función nula. Como y_i, $i = 1, 2$, son no triviales, debemos tener que $p_0 \equiv p_1$, $q_0 \equiv q_1$ y que $W(y_0, y_1) = -(y_1 y_0' - y_0 y_1') = 0$, es decir y_0 e y_1 son linealmente independientes. □