

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Estructura del conjunto de soluciones</b>	<b>2</b>
<b>3. Reducción de orden</b>	<b>6</b>
<b>4. Ecuaciones homogéneas con coeficientes constantes</b>	<b>6</b>
<b>5. Ecuación no homogénea</b>	<b>8</b>
5.1. Método coeficientes indeterminados . . . . .	8
5.2. Método de variación de los parámetros . . . . .	12
<b>6. Conclusiones</b>	<b>14</b>
<b>7. Aplicaciones</b>	<b>15</b>
7.1. Vibraciones mecánicas . . . . .	15
7.1.1. Vibraciones amortiguadas no forzadas ( $c > 0, F = 0$ ) . . . .	15

## 1. Introducción

“Me convertí en ateo porque como estudiante de post-grado en física cuántica, la vida parecía ser reducible a ecuaciones diferenciales de segundo orden. Matemáticas, química y física tenían todo y yo no veo ninguna necesidad de ir más allá de eso.”

Francis Collins

**Definición 1** (Ecuación lineal general de segundo orden).

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = r(x), \quad (1)$$

donde  $p, q, r$  son funciones definidas en un intervalo  $I = (a, b)$  de  $\mathbb{R}$  con valores en  $\mathbb{R}$ . Si  $r \equiv 0$  se llama homogénea

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = 0, \quad (2)$$

**Teorema 1** (Teorema de existencia y unicidad de soluciones).

Supongamos  $p, q, r$  continuas sobre  $I$ . Sean  $x_0 \in I$  e  $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$  dados. Entonces existe una única solución del PVI

$$\begin{cases} \frac{d^2 y}{dx^2} + p(x) \frac{dy}{dx} + q(x)y = r(x), & x \in I \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0^1 \end{cases}$$

*Demostración.* Más adelante. □

## 2. Estructura del conjunto de soluciones

**Teorema 1.**

Si  $y_1$  e  $y_2$  son soluciones de (2) y  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  entonces  $c_1 y_1 + c_2 y_2$  es solución. Vale decir, el conjunto de soluciones es un espacio vectorial. En particular  $y \equiv 0$  es una solución, a la que llamaremos *trivial*.

*Demostración.* El operador

$$L[y] := y'' + py' + qy$$

es lineal, por consiguiente  $L[c_1 y_1 + c_2 y_2] = c_1 L[y_1] + c_2 L[y_2] = 0$ . □

**Teorema 2.**

Supongamos que  $y_p$  es una solución particular de (1) y que  $y_g = y_g(x, c_1, c_2)$  es una solución general de (2). Entonces  $y = y_p + y_g$  es solución general de (1).

*Demostración.* El operador

$$L[y] := y'' + py' + qy$$

es lineal, por consiguiente  $L[y_g + y_p] = L[y_g] + L[y_p] = 0 + r = r$ . Recíprocamente supongamos  $y$  solución de  $L[y] = r$ , entonces  $L[y - y_p] = L[y] - L[y_p] = r - r = 0$ . Luego debe haber  $c_1$  y  $c_2$  con  $y(x) - y_p(x) = y_g(x, c_1, c_2)$ . □

Volviendo a las ecuaciones homogéneas, supongamos que tenemos dos soluciones de (2)  $y_1$  e  $y_2$ . Entonces la expresión

$$c_1 y_1 + c_2 y_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \quad (3)$$

es solución también. Notar que en la expresión aparecen dos constantes y habíamos dicho que era de esperar que la solución general de una ecuación de orden 2 contuviese precisamente dos constantes de integración. De modo que podemos conjeturar que (3) es solución general de (2). Hay una situación especial, si, por ejemplo,  $y_1 = k y_2$ ,  $k \in \mathbb{R}$ , entonces  $c_1 y_1 + c_2 y_2 = (c_1 k + c_2) y_2 = c y_2$ . Vale decir la combinación lineal (3) termina siendo sólo combinación lineal de la función  $y_2$  y por ende siendo esencialmente una expresión uniparamétrica.

**Definición 1** (Independencia lineal).

Un conjunto finito de funciones  $\{y_1, \dots, y_n\}$  se dirá linealmente independiente sobre un conjunto  $I$ , si la única solución de  $c_1 y_1(t) + \dots + c_n y_n(t) = 0$ , para  $t \in I$ , es  $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ .

**Definición 2** (Definición wronskiano).

Dadas  $n$  funciones  $\{y_1, \dots, y_n\}$  con dominio  $I$  el wronskiano  $W(x) = W(y_1, y_2, \dots, y_n)(x)$  de estas funciones en un punto  $x \in I$  se define por

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \quad (4)$$

**Lema 1** (Propiedades Wronskiano I).

Sea  $\{y_1, \dots, y_n\}$  un conjunto de  $n$  funciones. Si existe un  $x_0 \in I$  con  $W(x_0) \neq 0$  entonces  $\{y_1, \dots, y_n\}$  son linealmente independientes

*Demostración.* Supongamos que  $c_1 y_1 + \dots + c_n y_n \equiv 0$ . Derivando  $n - 1$  veces esta

igualdad y evaluando el resultado en  $x_0$  obtenemos

$$\begin{aligned} c_1 y_1(x_0) + \cdots + c_n y_n(x_0) &= 0 \\ c_1 y_1'(x_0) + \cdots + c_n y_n'(x_0) &= 0 \\ &\vdots \\ c_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \cdots + c_n y_n^{(n-1)}(x_0) &= 0 \end{aligned}$$

Las igualdades anteriores dicen que el vector  $(c_1, \dots, c_n)^t$  pertenece al nucleo de la matriz

$$\begin{pmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \cdots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \cdots & y_n'(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix}$$

Como por hipótesis la matriz es no singular, debe ocurrir que  $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ .  $\square$

**Teorema 3** (Teorema. Propiedades wronskiano II, Fórmula de Abel).

Supongamos que  $y_1$  e  $y_2$  son solución de

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + p(x) \frac{dy}{dx} + q(x)y = 0, \quad x \in I = (a, b) \quad (5)$$

Entonces existe  $c \in \mathbb{R}$  que satisface

$$W(y_1, y_2)(x) = ce^{-\int p dx}. \quad (6)$$

Esta expresión se denomina fórmula de Abel. En particular vale que

$$\exists x_0 \in I : W(x_0) \neq 0 \iff \forall x \in I : W(x) \neq 0.$$

*Demostración.* Tenemos que

$$W(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x).$$

Derivando y usando (5)

$$\begin{aligned} W'(x) &= y_1 y_2'' - y_1' y_2' \\ &= y_1(-p y_2' - q y_2) - y_2(-p y_1' - q y_1) \\ &= -p W. \end{aligned}$$

Vale decir  $W$  resuelve la ecuación  $W' = -pW$  la cual es facilmente resoluble, mostrando su resolución que se satisface (6)  $\square$

**Teorema 4** (Propiedades wronskiano III).

Sean  $y_1$  e  $y_2$  soluciones de (5). Entonces son equivalentes

1.  $y_1$  e  $y_2$  son linealmente independientes en  $I$ .
2.  $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$  para todo  $x \in I$ .

*Demostración.* Que 2 implica 1 es consecuencia de la propiedad del wronskiano I. Veamos que 1 implica 2. Supongamos que exista un  $x_0$  con  $W(x_0) = 0$ . Esto quiere decir que una de las columnas de la matriz wronskiana en  $x_0$  es múltiplo de la otra. Supongamos que  $y_2(x_0) = ky_1(x_0)$  e  $y_2'(x_0) = ky_1'(x_0)$ . Esto quiere decir que  $y_2$  y  $ky_1$  resuelven el mismo pvi. Por lo tanto  $y_2(x) = ky_1(x)$  para todo  $x$ . Lo que nos dice lo contrario de 1 □

**Teorema 5** (Estructura del conjunto de soluciones, ecuación homogénea).

Si  $y_1$  e  $y_2$  son soluciones linealmente independientes de

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = 0, \quad x \in I = (a, b)$$

entonces

$$y(x, c_1, c_2) = c_1y_1 + c_2y_2 \quad (7)$$

es solución general.

*Demostración.* Que la expresión (7) es solución ya lo hemos dicho. Restaría ver que cualquier solución se escribe como en (7). Sea  $y$  cualquier solución y  $x_0 \in I$ . La matriz wronskiana

$$\begin{pmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{pmatrix}$$

Es no singular dado que el determinante es no nulo. Por este motivo el sistema

$$c_1y_1(x_0) + c_2y_2(x_0) = y(x_0)$$

$$c_1y_1'(x_0) + c_2y_2'(x_0) = y'(x_0)$$

tiene solución para  $c_1$  y  $c_2$ . De este modo vemos que la función  $c_1y_1 + c_2y_2$  resuelve el PVI

$$\begin{cases} \frac{d^2z}{dx^2} + p(x)\frac{dz}{dx} + q(x)z = 0, & x \in I \\ z(x_0) = y(x_0) \\ z'(x_0) = y'(x_0) \end{cases}.$$

Evidentemente  $y$  es solución también, por el Teorema de Existencia y Unicidad vemos que  $y = c_1y_1 + c_2y_2$  □

### 3. Reducción de orden

Como conclusión de los anterior, vemos que si queremos resolver (5) debemos conseguir dos soluciones linealmente independientes. Suponiendo que ya contamos con una solución no trivial vamos a describir un método que posibilita encontrar otra solución  $y_2$  linealmente independiente de  $y_1$ . El método consiste en proponer que  $y_2$  se escribe

$$y_2(x) = v(x)y_1(x).$$

Sustituyendo este ansatz en la ecuación

$$\begin{aligned} 0 &= y_2'' + py_2' + qy_2 \\ &= y_1v'' + 2v'y_1' + vy_1'' + pv'y_1 + pvy_1' + qvy_1 \\ &= y_1v'' + (2y_1' + py_1)v' + v(y_1'' + py_1' + qy_1) \\ &= y_1v'' + (2y_1' + py_1)v' \end{aligned}$$

La fórmula anterior es nuevamente una ecuación de segundo orden para  $v$ , pero en este caso afortunadamente contamos con herramientas para resolverla puesto que se trata de una ecuación donde la variable dependiente  $v$  no aparece explícitamente, sino que aparecen sus derivadas  $v'$  y  $v''$ . Hay que intentar la sustitución  $w = v'$ . Luego

$$y_1w'' + (2y_1' + py_1)w = 0$$

Recordar que  $y_1$  la asumimos conocida y que  $p$  es obviamente conocida, así  $2y_1' + py_1$  es una función conocida. La ecuación es una ecuación lineal homogénea de primer orden. Usando la fórmula para resolver este tipo de ecuación, obtenemos

$$w(x) = Ce^{-\int \frac{y_1'}{y_1} + p dx} = Ce^{-2 \ln |y_1|} e^{-\int p dx} = C \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p dx}$$

Es suficiente encontrar sólo una función  $v$ , de allí podemos tomar  $C = 1$ .

$$w(x) = \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p dx} \implies v(x) = \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p dx} dx \quad (8)$$

Otra manera de testear la independencia lineal de dos funciones  $y_1$  e  $y_2$  es notar que si fueran linealmente dependientes e  $y_1 \neq 0$  en un conjunto  $J \subset I$  entonces  $y_2/y_1$  sería constante. Luego uno chequearía independencia si comprobase que  $y_2/y_1$  no es constante en algún subdominio  $J \subset I$ . En el caso anterior  $y_2/y_1 = v$ , luego deberíamos tener  $v$  no constante sobre algún subconjunto  $J$ . Pero  $v$  constante implicaría  $y_1^{-2} e^{-\int p dx} = 0$  y esto claramente no ocurre. De modo que por el método anterior encontramos dos soluciones independientes.

### 4. Ecuaciones homogéneas con coeficientes constantes

Consideramos la ecuación

$$y'' + py' + qy = 0, \quad p, q \in \mathbb{R} \quad (9)$$

Propongamos una solución de la forma

$$y(x) = e^{\lambda x}, \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

Reemplazando en la ecuación

$$(\lambda^2 + \lambda p + q)e^{\lambda x} = 0.$$

Se debe satisfacer la llamada *ecuación característica*

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0 \quad (10)$$

Tenemos tres casos acorde al valor de  $\Delta := p^2 - 4q$

1.  $\Delta = p^2 - 4q > 0$ , **raíces reales distintas**  $\lambda_1, \lambda_2$ . Este es el caso más sencillo de todos, obtenemos las soluciones

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x} \quad \text{y} \quad y_2(x) = e^{\lambda_2 x}.$$

Para chequear la independencia

$$\frac{y_2}{y_1} = e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x} \neq \text{cte.}$$

Luego

$$y(x, c_1, c_2) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}. \quad (11)$$

es solución general

2.  $\Delta = p^2 - 4q < 0$ , **raíces complejas conjugadas**  $\lambda_1 = \mu + i\nu, \lambda_2 = \mu - i\nu$ ,  $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ . Proponemos una solución de la forma

$$y(x) = e^{\mu x} v(x)$$

Hagamos los cálculos con SymPy

```

1 >>> x,p,q=symbols('x,p,q')
2 >>> v=Function('v')(x)
3 >>> y=exp(-p/2*x)*v
4 >>> ecua=y.diff(x,2)+p*y.diff(x)+q*y
5 >>> simplify(ecua/exp(-p/2*x))

```

$$-\frac{p^2}{4}v(x) + qv(x) + \frac{d^2}{dx^2}v(x) = 0$$

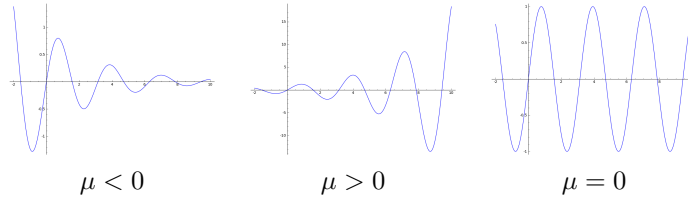
Como  $\nu^2 := -\frac{1}{4}(p^2 - 4q) > 0$ ,  $v$  resuelve la ecuación del oscilador armónico con frecuencia  $\nu$ . Recordar que la solución general para  $v$  es

$$v(x) = C_1 \cos \nu x + C_2 \sin \nu x,$$

y de allí

$$y(x) = e^{\mu x} \{C_1 \cos \nu x + C_2 \operatorname{sen} \nu x\} \quad (12)$$

Seguidamente presentamos las gráficas de las soluciones para distintos valores de  $\mu$ .



3.  $\Delta = p^2 - 4c = 0$ , **raíces iguales**. Conocemos una solución  $y_1 = e^{-\frac{p}{2}x}$ . Podemos hallar otra por el método de reducción de orden. Esto consiste en proponer otra solución de la forma  $y_2(x) = y_1(x)v(x)$ . Dejemos que lo haga SYMPY

```
>>> x,p=symbols('x,p')
>>> y=Function('y')(x)
>>> v=Function('v')(x)
>>> y=v*exp(-p/2*x)
>>> ecua=y.diff(x,2)+p*y.diff(x)+p**2/4*y
>>> ecuav=simplify(ecua/exp(-p/2*x))
>>> ecuav
```

Se obtiene

$$\frac{d^2}{dx^2}v(x) = 0.$$

La solución general para  $v$  es  $v = c_1 + c_2x$ . Así el método mencionado proporciona la solución extra

$$y_2(x) = xe^{-\frac{p}{2}x}.$$

## 5. Ecuación no homogénea

### 5.1. Método coeficientes indeterminados

Intentamos resolver

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p \frac{dy}{dx} + qy = r(x), \quad (13)$$

donde  $p, q, r \in \mathbb{R}$ ,  $r \in C(I)$   $r \neq 0$ . El método consiste en buscar soluciones en la misma clase de funciones a la que pertenece  $r(x)$ . Funciona de manera metódica sólo



para algunos tipos de funciones  $r(x)$ . Concretamente para  $r(x)$  combinación lineal de funciones polinómicas, exponenciales  $e^{\alpha x}$  o trigonométricas  $\cos \alpha x$  y  $\sin \alpha x$ . Lo vamos a ilustrar con ejemplos para cada caso.

1. **Caso  $r(x) = e^{ax}$  y  $a^2 + pa + q \neq 0$ .** En esta situación se propone como solución una función de la forma  $y(x) = Ae^{ax}$ . Usamos SymPy para el cálculo

```

1 >>> x,p,q,a,A=symbols('x,p,q,a,A')
2 >>> y=A*exp(a*x)
3 >>> ecua=y.diff(x,2)+p*y.diff(x)+q*y-exp(a*x)
4 >>> ecua=simplify(ecua/exp(a*x))
5 >>> ecua
A*a**2 + A*a*p + A*q - 1
7 >>> solve(ecua,A)
[1/(a**2 + a*p + q)]

```

Si  $a^2 + pa + q \neq 0$ , encontramos la solución particular  $y(x) = \frac{1}{(a^2 + pa + q)} e^{ax}$ .

2. **Caso  $r(x) = e^{ax}$  y  $a^2 + pa + q = 0$ .** En esta situación diremos que la ecuación está en *resonancia*. Más generalmente, diremos que se presenta resonancia cuando  $r(x)$  es solución del problema homogéneo. Propongamos como solución  $y(x) = Axe^{ax}$ . Hagamos los cálculos con SymPy.

```

1 >>> x,p,q,a,A=symbols('x,p,q,a,A')
2 >>> y=A*x*exp(a*x)
3 >>> ecua=y.diff(x,2)+p*y.diff(x)+q*y-exp(a*x)
4 >>> ecua=simplify(ecua/exp(a*x))
5 >>> ecua
6 A*a*(a*x + 2) + A*p*(a*x + 1) + A*q*x - 1
7 >>> ecua.subs(q,-a**2 - a*p).simplify()
8 2*A*a + A*p - 1

```

Luego, si  $2a + p \neq 0$ ,  $y(x) = \frac{1}{2a + p} x e^{ax}$  resuelve el problema.

3. **Caso  $r(x) = e^{ax}$ ,  $a^2 + pa + q = 0$  y  $2a + p = 0$ .** Si  $2a + p = 0$ , como también  $a^2 + pa + q = 0$ , tenemos que  $a$  es una raíz doble de la ecuación  $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ . En este caso, proponemos como solución  $y(x) = Ax^2 e^{ax}$ .

```

1 >>> x,p,q,a,A=symbols('x,p,q,a,A')
2 >>> y=A*x**2*exp(a*x)
3 >>> ecua=y.diff(x,2)+p*y.diff(x)+q*y-exp(a*x)
4 >>> ecua=simplify(ecua/exp(a*x))
5 >>> ecua
A*p*x*(a*x + 2) + A*q*x**2 + A*(a**2*x**2 + 4*a*x + 2) - 1
7 >>> ecua.subs([(q,-a**2 - a*p), (p,-2*a)]).simplify()
8 2*A - 1

```

Hay que tomar  $y(x) = \frac{1}{2}x^2e^{ax}$

4. **Caso  $r(x) = \text{sen } bx$ .** Proponemos

$$y(x) = A \cos x + B \text{sen } x,$$

como candidato a solución.

```
>>> x,p,q,a,b,A,B=symbols('x,p,q,a,b,A,B')
>>> y=A*cos(b*x)+B*sin(b*x)
>>> ecua=y.diff(x,2)+p*y.diff(x)+q*y-sin(b*x)
>>> ecua.simplify()
-b**2*(A*cos(b*x) + B*sin(b*x)) - b*p*(A*sin(b*x) -
B*cos(b*x)) + q*(A*cos(b*x) + B*sin(b*x)) - sin(b*x)
```

La expresión en el miembro de la izquierda es una combinación lineal de las funciones  $\cos bx$  y  $\text{sen } bx$ . Como estas funciones son linealmente independientes debemos tener que los coeficientes en la combinación lineal deben ser cero

```
>>> ecua.expand().coeff(sin(b*x))
-A*b*p - B*b**2 + B*q - 1
>>> ecua.expand().coeff(cos(b*x))
-A*b**2 + A*q + B*b*p
```

Obtenemos un sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} -Abp - (b^2 - q)B = 1 \\ Bbp - (b^2 - q)A = 0 \end{cases} \quad (14)$$

Para que el sistema tenga solución la matriz de coeficientes debe ser no singular

$$0 \neq \det \begin{pmatrix} -bp & -(b^2 - q) \\ -(b^2 - q) & bp \end{pmatrix} = -(b^2 p^2 + (b^2 - q)^2)$$

Podemos suponer  $b \neq 0$ , de lo contrario la ecuación hubiese sido homogénea. entonces la condición de arriba ocurre si y sólo si  $p \neq 0$  o  $b^2 \neq q$ . En esa situación encontraremos una solución de la forma

$$y(x) = A \cos bx + B \text{sen } bx,$$

donde  $A$  y  $B$  resuelven (14).

Cuando  $p = 0$  y  $b^2 = q$  el sistema (14) puede no tener solución. Notar que en este caso la ecuación queda

$$y'' + b^2 y = \text{sen } bx$$

Es una ecuación de un oscilador armónico no homogénea. Habíamos visto que justamente  $r(x) = \sin bx$  es una solución del problema homogéneo. Nuevamente estamos en una situación de resonancia. Como en casos anteriores hay que proponer como solución

$$y(x) = x(A \cos x + B \sin x),$$

### 5. Caso $r(x) = \sin bx$ con resonancia

```

>>> x,b,A,B=symbols('x,b,A,B')
>>> y=x*(A*cos(b*x)+B*sin(b*x))
>>> ecua=y.diff(x,2)+b**2*y-sin(b*x)
>>> eq1=ecua.expand().coeff(sin(b*x))
>>> eq2=ecua.expand().coeff(cos(b*x))
>>> H=solve([eq1,eq2],[A,B])
>>> H
{B: 0, A: -1/(2*b)}
>>> y.subs(H)
-x*cos(b*x)/(2*b)

```

Encontramos la solución general

$$y(x) = -\frac{x}{2b} \cos bx.$$

El caso donde  $r(x) = \cos bx$  se trata de manera completamente similar.

### 6. Caso $r(x)$ polinomio Hay que proponer como solución un polinomio, en primera instancia, del mismo grado.

Supongamos

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + q(x)y = c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n \quad (15)$$

Se propone  $y = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ . Luego

$$\begin{aligned} & 2a_2 + 3 \cdot 2x + \cdots + n(n-1)x^{n-2} + \\ & pa_1 + p2a_2x + \cdots + pna_nx^{n-1} + \\ & qa_0 + qa_1x + \cdots + qa_nx^n = c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n. \end{aligned}$$

Como las funciones  $1, x, \dots, x^n$  son linealmente independientes, los coeficientes en ambos lados de la igualdad deben ser iguales.

$$\begin{aligned}
2a_2 + pa_1 + qa_0 &= c_0 \\
3 \cdot 2 + 2pa_2 + qa_1 &= c_1 \\
&\vdots \\
n(n-1) + p(n-1)a_{n-1} + qa_{n-2} &= c_{n-2} \\
pa_n + qa_{n-1} &= c_{n-1} \\
qa_n &= c_n
\end{aligned}$$

Es útil escribir estas igualdades matricialmente.

$$\begin{pmatrix} q & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & q & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & q & pn \\ \vdots & & & & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{pmatrix}$$

Es un sistema triangular superior que se resuelve por sustitución ascendente. Esto siempre que  $q \neq 0$ . En caso contrario la matriz es singular y es posible que el sistema no tenga solución.

El caso  $q = 0$  es una forma de resonancia. Puede ser tratado como las anteriores resonancias, pero notando que la ecuación se reduce a  $y'' + py' = r$  conviene tomar  $v = y'$  como nueva variable dependiente y reducir la ecuación a una de primer orden.

Por último señalemos que si deseamos resolver un problema de la forma

$$L[y] \equiv y'' + py' + qy = r_1(x) + \cdots + r_n(x),$$

donde las funciones  $r_i$  son de alguna de las formas descritas en los casos previos, entonces la linealidad de  $L$  implica que, si  $y_i$  resuelve  $L[y_i] = r_i$ ,  $y = y_1 + \cdots + y_n$  resuelve la ecuación deseada.

## 5.2. Método de variación de los parámetros

Queremos resolver la ecuación

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = r(x). \quad (16)$$

Supongamos que contamos con un par de soluciones  $y_1, y_2$  linealmente independientes de la ecuación homogénea asociada

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0. \quad (17)$$

El método de variación de los parámetros consiste en proponer una solución de la forma

$$y(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x). \quad (18)$$

Hay dos funciones incógnitas  $c_1$  y  $c_2$ , pero sólo una ecuación. Tendremos por esto libertad de introducir otra condición que consideremos conveniente. Tenemos

$$y' = c_1'y_1 + c_1y_1' + c_2'y_2 + c_2y_2'.$$

Pidamos que

$$c_1'y_1 + c_2'y_2 = 0. \quad (19)$$

Supuesta esta igualdad

$$y' = c_1y_1' + c_2y_2'.$$

Derivando

$$y'' = c_1'y_1' + c_2'y_2' + c_1y_1'' + c_2y_2''.$$

Entonces

$$\begin{aligned} r(x) &= y'' + py' + qy \\ &= c_1'y_1' + c_2'y_2' + c_1y_1'' + c_2y_2'' + p(c_1y_1' + c_2y_2') + q(c_1y_1 + c_2y_2) \\ &= c_1(y_1'' + py_1' + qy_1) + c_2(y_2'' + py_2' + qy_2) + c_1'y_1' + c_2'y_2' \\ &= c_1'y_1' + c_2'y_2' \end{aligned}$$

Esta ecuación junto a (19) nos dan el sistema

$$\begin{cases} c_1'y_1 + c_2'y_2 &= 0 \\ c_1'y_1' + c_2'y_2' &= r \end{cases} \quad (20)$$

Las incógnitas son  $c_1'$  y  $c_2'$ . El determinante de la matriz de coeficientes es precisamente el Wronskiano  $W$  de las soluciones  $y_1$  e  $y_2$ , por la suposición de independencia  $W \neq 0$  y por lo tanto el sistema tiene solución única. Se tiene

$$c_1' = -\frac{\det \begin{pmatrix} 0 & y_2 \\ r & y_2' \end{pmatrix}}{W} = -\frac{ry_2}{W}$$

y

$$c_2' = -\frac{\det \begin{pmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & r \end{pmatrix}}{W} = \frac{ry_1}{W}$$

En consecuencia

$$c_1 = -\int \frac{ry_2}{W} dx \quad (21)$$

y

$$c_2 = \int \frac{ry_1}{W} dx \quad (22)$$

Usando estas fórmulas y (18) obtenemos una solución particular del sistema. La solución general es la suma de la particular más una solución general del homogéneo. Esta última solución general se escribe como una combinación lineal genérica entre  $y_1$  e  $y_2$ .

**Ejemplo 1.** Resolver el siguiente pvi  $y'' + y = \csc x$ ,  $y(\frac{\pi}{2}) = 0$  y  $y'(\frac{\pi}{2}) = 1$ . La ecuación homogénea asociada tiene el par  $y_1(x) = \cos(x)$  e  $y_2(x) = \sin(x)$  de soluciones linealmente independientes. El wronskiano es  $W \equiv 1$  y entonces una solución particular es

$$\begin{aligned} y(x) &= - \int \frac{ry_2}{W} dx y_1 + \int \frac{ry_1}{W} dx y_2 \\ &= - \int dx \cos(x) + \int \frac{1}{\tan(x)} dx \sin(x) \\ &= -x \cos(x) + \ln(\sin(x)) \sin(x). \end{aligned}$$

La solución general es

$$y(x) = -x \cos(x) + \ln(\sin(x)) \sin(x) + c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x).$$

Las condiciones  $y(\frac{\pi}{2}) = 0$  y  $y'(\frac{\pi}{2}) = 1$  nos conducen a  $c_2 = 0$  y  $c_1 = \frac{\pi}{2}$ .

## 6. Conclusiones

1. Si podemos encontrar dos soluciones linealmente independientes de una ecuación lineal homogénea de segundo orden, tenemos la solución general a través de combinaciones lineales.
2. Si tenemos una solución no trivial de una ecuación lineal homogénea de segundo orden podemos hallar otra por el método de reducción de orden.
3. Podemos resolver completamente una ecuación lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes.
4. Podemos resolver algunos problemas no homogéneos por el método de coeficientes indeterminados.
5. Si conocemos las soluciones del problema homogéneo podemos resolver, en teoría, el no homogéneo para cualquier  $r(x)$  por el método de variación de los parámetros

## 7. Aplicaciones

### 7.1. Vibraciones mecánicas

#### Problema 1.

Estudiar el movimiento de un resorte (cómo el de la unidad anterior) pero suponer que además de actuar sobre la masa la fuerza elástica del resorte, tenemos una fuerza de fricción debida a la resistencia del medio. Por la acción de esta fuerza, se dice que es un sistema resorte-masa amortiguado. Además suponemos que hay otra fuerza  $F$  externa y que sólo depende de  $t$ . Por ejemplo si el resorte se colocase verticalmente y se dejase suspendida la masa,  $F$  sería la fuerza de gravedad. Si la masa estuviese hecha de metal,  $F$  podría ser una fuerza provista por un imán. Por la acción de esta fuerza el sistema se dice forzado. Por consiguiente el sistema completo, con la acción de las tres fuerzas, se denomina un sistema resorte-masa, amortiguado y forzado.

La fuerza elástica del resorte se modeliza con la Ley de Hooke. Para la amortiguación, supongamos que el módulo de la fuerza es proporcional a la velocidad de la masa. La constante de proporcionalidad  $c$  se llama coeficiente de viscosidad. La dirección y sentido de la fuerza amortiguadora es siempre contraria al movimiento. Por el principio de conservación de la energía, vemos que la fuerza de amortiguación siempre realiza un trabajo  $W$  negativo, por consiguiente hace perder energía cinética. De la fuerza externa  $F$  no sabemos nada en principio. Por todo lo expuesto, si ponemos un sistema de coordenadas con origen en la posición de equilibrio del sistema masa-resorte y si  $x(t)$  es la posición de la masa en el momento  $t$ , la ecuación que gobierna el sistema masa-resorte con amortiguación y forzamiento es

$$mx''(t) \underset{\substack{= \\ \text{2º Ley Newton}}}{=} \underbrace{-kx(t)}_{\text{Hooke}} \underbrace{-cx'(t)}_{\text{Amortiguación}} + \underbrace{F(t)}_{\text{Fuerza externa}} \quad (23)$$

#### 7.1.1. Vibraciones amortiguadas no forzadas ( $c > 0, F = 0$ )

Escribamos la ecuación (23) de la siguiente forma

$$\boxed{x''(t) + 2\mu x'(t) + \omega^2 x = 0} \quad \mu := \frac{c}{2m}, \omega := \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (24)$$

Las raíces de la ecuación característica para el problema homogéneo son

$$\boxed{\lambda_{1,2} = -\mu \pm \sqrt{\Delta}, \quad \Delta := \mu^2 - \omega^2}$$

**Caso  $\Delta > 0$ .** Aquí la viscosidad es “grande” relativa a la rigidez  $k$ . Se dice que el sistema está sobreamortiguado. En este caso tenemos dos soluciones linealmente independientes del problema homogéneo y la solución general de este es de la forma

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

Notar que  $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ . Supongamos que el sistema masa-resorte parte del reposo  $x'(0) = 0$  y de una posición indeterminada  $x_0$ . Resolvamos este pvi

```
>>> from sympy import *
>>> init_printing()
>>> lambda1, lambda2, t, x0, c1, c2 = symbols('lambda1, lambda2, t, x0, c1, c2')
>>> x = c1*exp(lambda1*t) + c2*exp(lambda2*t)
>>> C = solve([x.subs(t, 0) - x0, x.diff(t).subs(t, 0)], [c1, c2])
>>> C
```

$$\left\{ c_1 : -\frac{\lambda_2 x_0}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad c_2 : \frac{\lambda_1 x_0}{\lambda_1 - \lambda_2} \right\}$$

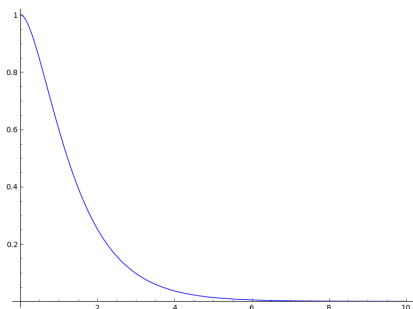
```
>>> x = x.subs(C[0])
```

$$x(t) = x_0 \left\{ \frac{\lambda_1 e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2} - \frac{\lambda_2 e^{\lambda_1 t}}{\lambda_1 - \lambda_2} \right\} \quad (25)$$

La masa podría haber pasado por la posición de equilibrio sólo en el pasado, puesto que  $x(t) = 0$  cuando

$$t = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_2} < 0$$

```
sage: x = x.subs({lambda1:-1, lambda2:-2, x0:1})
sage: x.plot((x, 0, 10))
```



Vibraciones amortiguadas no forzadas ( $c > 0$ ,  $F = 0$ )



Figura 1: Masa-resorte sobreamortiguado

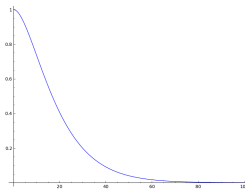
Vibraciones amortiguadas no forzadas ( $c > 0, F = 0$ ) **Caso**  $\Delta = 0$ . En esta situación se dice que hay amortiguación crítica. Las raíces son iguales  $\lambda_1 = \lambda_2 = -\mu$ . Sabemos que

$$x_1(t) = c_1 e^{-\mu t} + c_2 t e^{-\mu t} = e^{-\mu t} \{c_1 + c_2 t\} \quad (26)$$

```

sage: c1,c2,mu,t,x0=var('c1,c2,mu,t,x0')
sage: x=e^(-mu*t)*(c1+c2*t)
sage: C=solve([x(t=0)==x0,x.diff(t).subs(t=0)==0],[c1,c2],solution_dict=True)
sage: C
[{c2: mu*x0, c1: x0}]
sage: x=x.subs(C[0]).subs({mu:.1,x0:1})
sage: x.plot((x,0,100))

```



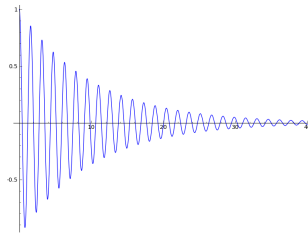
Vibraciones amortiguadas no forzadas ( $c > 0, F = 0$ ) **Caso**  $\Delta < 0$ . Caso subamortiguado,  $\lambda_{1,2} = -\mu \pm \nu i$  con  $\nu = \sqrt{|\Delta|} = \sqrt{|\omega^2 - \mu^2|}$ . La solución general viene dada por

$$x(t) = e^{-\mu t} \{c_1 \cos \nu t + c_2 \sin \nu t\} \quad (27)$$

```

1 sage: c1, c2, mu, nu, x0, t = var('c1, c2, mu, nu, x0, t')
sage: x = e^(-mu*t) * (c1*cos(nu*t) + c2*sin(nu*t))
3 sage: C = solve([x(t=0)==x0, x.diff(t).subs(t=0)==0], [c1, c2], solution_dict
= True)
sage: x = x.subs(C[0]).subs({mu:.1, nu:4, x0:1})
5 sage: x.plot((x, 0, 100))

```



Vibraciones amortiguadas no forzadas ( $c > 0$ ,  $F = 0$ )

Figura 2: Masa-resorte subamortiguado

Vibraciones amortiguadas no forzadas ( $c > 0$ ,  $F = 0$ ) Se suele escribir la ecuación (27) de otra forma. Expresemos el vector  $(c_1, c_2)$  en coordenadas polares.

$$c_1 = \rho \cos \alpha, \quad c_2 = \rho \sin \alpha.$$

Entonces

$$x(t) = e^{-\mu t} \{c_1 \cos \nu t + c_2 \sin \nu t\} = \boxed{\rho e^{-\mu t} \cos(\nu t - \alpha)}.$$

Llamaremos este régimen *movimiento cuasi-oscilatorio*. Se ejecutan vibraciones que se van amortiguando de frecuencia

$$f = \frac{1}{\text{período}} = \frac{\nu}{2\pi}, \quad \nu = \sqrt{\omega^2 - \mu^2} = \sqrt{\left(\frac{k}{m}\right)^2 - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}.$$

En lugar de la frecuencia se suele considerar la frecuencia angular que se define como  $2\pi f$ . La ventaja de esta definición es que la frecuencia angular de la función de arriba es  $\nu$ .

Vibraciones amortiguadas no forzadas ( $c > 0, F = 0$ ) **Ejercicio:** En cualquiera de las situaciones descritas,  $x(t) \rightarrow 0$  y  $x'(t) \rightarrow 0$ , cuando  $t \rightarrow \infty$ . Es decir, la masa se va deteniendo.

Vibraciones no amortiguadas y forzadas ( $c = 0, F \neq 0$ ) Vamos a considerar una fuerza externa oscilatoria de frecuencia angular  $\omega_0$  y amplitud  $F_0$ . Tenemos que resolver

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = F_0 \cos(\omega_0 t). \quad (28)$$

Usaremos el método de coeficientes indeterminados y SAGE. Antes, recordar que si  $\omega = \omega_0$  estamos en resonancia. Tendremos que considerar ese caso por separado. Supongamos pues  $\omega \neq \omega_0$ . El siguiente código se puede encontrar en la carpeta `scripts` del repositorio GitHub de esta materia. El script se denomina `osc_arm_forz_noamort.sage`