Índice

1. Introducción

> "Me convertí en ateo porque como estudiante de post-grado en física cuántica, la vida parecía ser reducible a ecuaciones diferenciales de segundo orden. Matemáticas, química y física tenían todo y yo no veo ninguna necesidad de ir más allá de eso."

Francis Collins

Definición 1 (Ecuación lineal general de segundo orden)**.**

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = r(x), \tag{1}$$

donde p, q, r son funciones definidas en un intervalo $I = (a, b)$ de $\mathbb{R}$ con valores en $\mathbb{R}$.Si $r \equiv 0$ se llama homogénea

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = 0, \tag{2}$$

Teorema 1 (Teorema de existencia y unicidad de soluciones)**.**

Supongamos p, q, r continuas sobre I. Sean $x_0 \in I$ e $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$ dados. Entonces existe una única solución del PVI

$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dx^2} + & p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = r(x), \quad x \in I \\ y(x_0) & = y_0 \\ y'(x_0) & = y_0^1 \end{cases}$$

Demostración. Más adelante.

□

2. Estructura del conjunto de soluciones

Teorema 1.

Si y_1 e y_2 son soluciones de (2) y $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ entonces $c_1y_1 + c_2y_2$ es solución. Vale decir, el conjunto de soluciones es un espacio vectorial. En particular $y \equiv 0$ es una solución, a la que llameremos *trivial*.

Demostración. El operador

$$L[y] := y'' + py' + qy$$

es lineal, por consiguiente $L[c_1y_1 + c_2y_2] = c_1L[y_1] + c_2L[y_2] = 0$. □

Teorema 2.

Supongamos que y_p es una solución particular de (1) y que $y_g = y_g(x, c_1, c_2)$ es una solución general de (2). Entonces $y = y_p + y_g$ es solución general de (1).

Demostración. El operador

$$L[y] := y'' + py' + qy$$

es lineal, por consiguiente $L[y_g + y_p] = L[y_g] + L[y_p] = 0 + r = r$. Recíprocamente supongamos y solución de $L[y] = r$, entonces $L[y - y_p] = L[y] - L[y_p] = r - r = 0$. Luego debe haber c_1 y c_2 con $y(x) - y_p(x) = y_g(x, c_1, c_2)$.

□

Volviendo a las ecuaciones homogéneas, supongamos que tenemos dos soluciones de (2) y_1 e y_2. Entonces la expresión

$$c_1 y_1 + c_2 y_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \tag{3}$$

es solución también. Notar que en la expresión aparecen dos constantes y habíamos dicho que era de esperar que la solución general de una ecuación de orden 2 contuviese precisamente dos constantes de integración. De modo que podemos conjeturar que (3) es solución general de (2). Hay una situación especial, si, por ejemplo, $y_1 = ky_2$, $k \in \mathbb{R}$,entonces $c_1 y_1 + c_2 y_2 = (c_1 k + c_2) y_2 = c y_2$. Vale decir la combinación lineal (3) termina siendo sólo combinación lineal de la función y_2 y por ende siendo esencialmente una expresión uniparamétrica.

Definición 1 (Independencia lineal)**.**

Un conjunto finito de funciones $\{y_1, \dots, y_n\}$ se dirá linealmente independiente sobre un conjunto I, si la única solución de $c_1 y_1(t) + \cdots + c_n y_n(t) = 0$, para $t \in I$, es $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$.

Definición 2 (Definición wronskiano)**.**

Dadas n fuciones $\{y_1, \dots, y_n\}$ con dominio I el wronskiano $W(x) = W(y_1, y_2, \dots, y_n)(x)$ de estas funciones en un punto $x \in I$ se define por

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \tag{4}$$

Lema 1 (Propiedades Wronskiano I)**.**

Sea $\{y_1, \dots, y_n\}$ un conjunto de n funciones. Si existe un $x_0 \in I$ con $W(x_0) \neq 0$ entonces $\{y_1, \dots, y_n\}$ son linealmente independientes

Demostración. Supongamos que $c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n \equiv 0$. Derivando $n-1$ veces esta igualdad y evaluando el resultado en x_0 obtenemos

$$\begin{aligned} c_1 y_1(x_0) + \cdots + c_n y_n(x_0) &= 0 \\ c_1 y_1'(x_0) + \cdots + c_n y_n'(x_0) &= 0 \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ c_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \cdots + c_n y_n^{(n-1)}(x_0) &= 0 \end{aligned}$$

Las igualdades anteriores dicen que el vector $(c_1, \ldots, c_n)^t$ pertenece al nucleo de la matriz

$$\begin{pmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \cdots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \cdots & y_n'(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix}$$

Como por hipótesis la matríz es no singular, debe ocurrir que $c_1 = c_2 = \cdots c_n = 0$. $\square$

Teorema 3 (Teorema. Propiedades wronskiano II, Fórmula de Abel)**.**

Supongamos que y_1 e y_2 son solución de

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = 0, \quad x \in I = (a,b) \tag{5}$$

Entonces existe $c \in \mathbb{R}$ que satisface

$$W(y_1, y_2)(x) = ce^{-\int p dx}. \tag{6}$$

Esta expresión se denomina fórmula de Abel. En particular vale que

$$\exists x_0 \in I : W(x_0) \neq 0 \Longleftrightarrow \forall x \in I : W(x) \neq 0.$$

Demostración. Tenemos que

$$W(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x).$$

Derivando y usando (5)

$$\begin{aligned} W'(x) &= y_1 y_2'' - y_1 y_2'' \\ &= y_1(-py_2' - qy_2) - y_2(-py_1' - qy_1) \\ &= -pW. \end{aligned}$$

Vale decir W resuelve la ecuación $W' = -pW$ la cual es facilmente resoluble, mostrando su resolución que se satisface (6) $\square$

Teorema 4 (Propiedades wronskiano III)**.**

Sean y_1 e y_2 soluciones de (5). Entonces son equivalentes

1. y_1 e y_2 son linealmente indepenientes en I.
2. $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$ para todo $x \in I$.

Demostración. Que 2 implica 1 es consecuencia de la propiedad del wronskiano I. Veamos que 1 implica 2. Supongamos que exista un x_0 con $W(x_0) = 0$. Esto quiere decir que una de las columnas de la matríz wronskiana en x_0 es múltiplo de la otra. Supongamos que $y_2(x_0) = ky_1(x_0)$ e $y_2'(x_0) = ky_1'(x_0)$. Esto quiere decir que y_2 y ky_1 resuelven el mismo pvi. Por lo tanto $y_2(x) = ky_1(x)$ para todo x. Lo que nos dice lo contrario de 1 □

Teorema 5 (Estructura del conjunto de soluciones, ecuación homogénea)**.**

Si y_1 e y_2 son soluciones linealmente independientes de

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = 0, \quad x \in I = (a, b)$$

entonces

$$\boxed{y(x, c_1, c_2) = c_1y_1 + c_2y_2} \tag{7}$$

es solución general.

Demostración. Que la expresión (7) es solución ya lo hemos dicho. Restaría ver que cualquier solución se escribe como en (7). Sea y cualquier solución y $x_0 \in I$. La matriz wronskiana

$$\begin{pmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{pmatrix}$$

Es no singular dado que el determinante es no nulo. Por este motivo el sistema

$$\begin{aligned} c_1y_1(x_0) + c_2y_2(x_0) &= y(x_0) \\ c_1y_1'(x_0) + c_2y_2'(x_0) &= y'(x_0) \end{aligned}$$

tiene solución para c_1 y c_2. De este modo vemos que la función $c_1y_1 + c_2y_2$ resuelve el PVI

$$\begin{cases} \frac{d^2z}{dx^2} + & p(x)\frac{dz}{dx} + q(x)z = 0, \quad x \in I \\ z(x_0) & = y(x_0) \\ z'(x_0) & = y'(x_0) \end{cases}.$$

Evidentemente y es solución también, por el Teorema de Existencia y Unicidad vemos que $y = c_1y_1 + c_2y_2$ □

3. Reducción de orden

Como conclusión de los anterior, vemos que si queremos resolver (5) debemos conseguir dos soluciones linealmente independientes. Suponiendo que ya contamos con una solución no trivial vamos a describir un método que posibilita encontrar otra solución y_2 linealmente independiente de y_1. El método consiste en proponer que y_2 se escribe

$$\boxed{y_2(x) = v(x)y_1(x)}.$$

Sustituyendo este ansatz en la ecuación

$$\begin{aligned}
0 &= y_2'' + py_2' + qy_2 \\
&= y_1v'' + 2v'y_1' + vy_1'' + pv'y_1 + pvy_1' + qvy_1 \\
&= y_1v'' + (2y_1' + py_1)v' + v(y_1'' + py_1' + qy_1) \\
&= y_1v'' + (2y_1' + py_1)v'
\end{aligned}$$

La fórmula anterior es nuevamente una ecuación de segundo orden para v, pero en este caso afortunadamente contamos con herramientas para resolverla puesto que se trata de una ecuación donde la variable dependiente v no aparece explícitamente, sino que aparecen sus derivadas v' y v''. Hay que intentar la sustitución $w = v'$. Luego

$$y_1w'' + (2y_1' + py_1)w = 0$$

Recordar que y_1 la asumimos conocida y que p es obviamente conocida, así $2y_1' + py_1$ es una funcióon conocida. La ecuación es una ecuación lineal homogénea de primer orden. Usando la fórmula para resolver este tipo de ecuación, obtenemos

$$w(x) = Ce^{-\int \frac{y_1'}{y_1} + pdx} = Ce^{-2\ln|y_1|}e^{-\int pdx} = C\frac{1}{y_1^2}e^{-\int pdx}$$

Es suficiente encontrar sólo una función v, de allí podemos tomar $C = 1$.

$$w(x) = \frac{1}{y_1^2}e^{-\int pdx} \Longrightarrow v(x) = \int \frac{1}{y_1^2}e^{-\int pdx}dx \tag{8}$$

Otra manera de testear la independencia lineal de dos funciones y_1 e y_2 es notar que si fueran linealmente dependientes e $y_1 \neq 0$ en un conjunto $J \subset I$ entonces y_2/y_1 sería constante. Luego uno chequearía independencia si comprobase que y_2/y_1 no es constante en algún subdominio $J \subset I$. En el caso anterior $y_2/y_1 = v$, luego deberíamos tener v no constante sobre algún subconjunto J. Pero v constante implicaría $y_1^{-2}e^{-\int pdx} = 0$ y esto claramente no ocurre. De modo que por el método anterior encontramos dos soluciones independientes.

4. Ecuaciones homogéneas con coeficientes constantes

Consideramos la ecuación

$$y'' + py' + qy = 0, \quad p, q \in \mathbb{R} \tag{9}$$

Propongamos una solución de la forma

$$\boxed{y(x) = e^{\lambda x}, \quad \lambda \in \mathbb{C}}$$

Reemplazando en la ecuación

$$(\lambda^2 + \lambda p + q)e^{\lambda x} = 0.$$

Se debe satisfacer la llamada *ecuación característica*

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0 \tag{10}$$

Tenemos tres casos acorde al valor de $\Delta := p^2 - 4c$

1. **$\boldsymbol{\Delta = p^2 - 4c > 0}$, raices reales distintas $\boldsymbol{\lambda_1, \lambda_2}$.** Este es el caso más sencillo de todos, obtenemos las soluciones

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x} \quad \text{y} \quad y_2(x) = e^{\lambda_2 x}.$$

Para chequear la independencia

$$\frac{y_2}{y_1} = e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x} \neq \text{cte.}$$

Luego

$$y(x, c_2, c_2) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}. \tag{11}$$

es solución general

2. **$\boldsymbol{\Delta = p^2 - 4c < 0}$, raices complejas conjugadas** $\lambda_1 = \mu + i\nu$**,** $\lambda_2 = \mu - i\nu$**,** $\mu, \nu \in \mathbb{R}$. Proponemos una solución de la forma

$$y(x) = e^{\mu x} v(x)$$

Hagamos los cálculos con `SymPy`

```
>>> x,p,q=symbols('x,p,q')
>>> v=Function('v')(x)
>>> y=exp(-p/2*x)*v
>>> ecua=y.diff(x,2)+p*y.diff(x)+q*y
>>> simplify(ecua/exp(-p/2*x))
```

$$-\frac{p^2}{4}v(x) + qv(x) + \frac{d^2}{dx^2}v(x) = 0$$

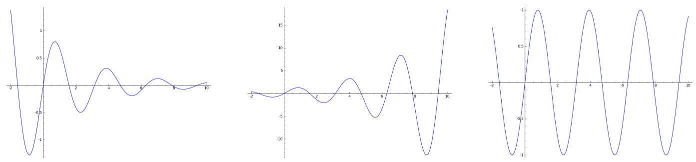
Como $\nu^2 := -\frac{1}{4}(p^2 - 4q) > 0$, v resuelve la ecuación del oscilador armónico con frecuencia ν. Recordar que la solución general para v es

$$v(x) = C_1 \cos \nu x + C_2 \operatorname{sen} \nu x,$$

y de allí

$$y(x) = e^{\mu x}\left\{C_1 \cos \nu x + C_2 \operatorname{sen} \nu x\right\} \tag{12}$$

Seguidamente presentamos las gráficas de las soluciones para distiontos valores de μ.



$\mu < 0$ $\quad$ $\mu > 0$ $\quad$ $\mu = 0$

3. $\boldsymbol{\Delta = p^2 - 4c = 0}$**, raices iguales** . Conocemos una solución $\boxed{y_1 = e^{-\frac{p}{2}x}}$. Podemos hallar otra por el método de reducción de orden. Esto consiste en proponer otra solución de la forma $y_2(x) = y_1(x)v(x)$ Dejemos que lo haga `SymPy`

```
>>> x,p=symbols('x,p')
>>> y=Function('y')(x)
>>> v=Function('v')(x)
>>> y=v*exp(-p/2*x)
>>> ecua=y.diff(x,2)+p*y.diff(x)+p**2/4*y
>>> ecuav=simplify(ecua/exp(-p/2*x))
>>> ecuav
```

Se obtiene

$$\frac{d^2}{dx^2}v(x) = 0.$$

La solución general para v es $v = c_1 + c_2 x$. Así el método mencionado proporciona la solución extra

$$\boxed{y_2(x) = xe^{-\frac{p}{2}x}}.$$

5. Ecuación no homogénea

5.1. Método coeficientes indeterminados

Intentamos resolver

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = r(x), \tag{13}$$

donde $p, q, r \in \mathbb{R}$, $r \in C(I)$ $r \neq 0$. El método consiste en buscar soluciones en la misma clase de funciones a la que pertenece $r(x)$. Funciona de manera metódica sólo para algunos tipos de funciones $r(x)$. Concretamente para $r(x)$ combinación lineal de funciones polinómicas, exponenciales $e^{\alpha x}$ o trigonométricas $\cos \alpha x$ y $\operatorname{sen} \alpha x$. Lo vamos a ilustrar con ejemplos para cada caso.

1. **Caso $r(x) = e^{ax}$ y $a^2 + pa + q \neq 0$.** En esta situación se propone como solución una función de la forma $\boxed{y(x) = Ae^{ax}}$. Usamos `SymPy` para el cálculo

```
>>> x,p,q,a,A=symbols('x,p,q,a,A')
>>> y=A*exp(a*x)
>>> ecua=y.diff(x,2)+p*y.diff(x)+q*y-exp(a*x)
>>> ecua=simplify(ecua/exp(a*x))
>>> ecua
A*a**2 + A*a*p + A*q - 1
>>> solve(ecua,A)
[1/(a**2 + a*p + q)]
```

   Si $a^2+pa+q \neq 0$, encontramos la solución particular $\boxed{y(x) = \dfrac{1}{(a^2 + pa + q)} e^{ax}}$.

2. **Caso $r(x) = e^{ax}$ y $a^2 + pa + q = 0$.** En esta situación diremos que la ecuación está en *resonancia*. Más generalmente, diremos que se presenta resonancia cuando $r(x)$ es solución del problema homogéneo. Propongamos como solución $y(x) = Axe^{ax}$. Hagamos los cálculos con `SymPy`.

```
>>> x,p,q,a,A=symbols('x,p,q,a,A')
>>> y=A*x*exp(a*x)
>>> ecua=y.diff(x,2)+p*y.diff(x)+q*y-exp(a*x)
>>> ecua=simplify(ecua/exp(a*x))
>>> ecua
A*a*(a*x + 2) + A*p*(a*x + 1) + A*q*x - 1
>>> ecua.subs(q,-a**2 - a*p).simplify()
2*A*a + A*p - 1
```

   Luego, si $2a + p \neq 0$, $\boxed{y(x) = \dfrac{1}{2a + p} xe^{ax}}$ resuelve el problema.

3. **Caso $r(x) = e^{ax}$, $a^2 + pa + q = 0$ y $2a + p = 0$.** Si $2a + p = 0$, como también $a^2 + pa + q = 0$, tenemos que a es una raíz doble de la ecuación $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$. En este caso, proponemos como solución $y(x) = Ax^2e^{ax}$.

```
>>> x,p,q,a,A=symbols('x,p,q,a,A')
>>> y=A*x**2*exp(a*x)
>>> ecua=y.diff(x,2)+p*y.diff(x)+q*y-exp(a*x)
>>> ecua=simplify(ecua/exp(a*x))
>>> ecua
A*p*x*(a*x + 2) + A*q*x**2 + A*(a**2*x**2 + 4*a*x + 2) - 1
>>> ecua.subs([(q,-a**2 - a*p) , (p,-2*a)]).simplify()
2*A - 1
```

Hay que tomar $\boxed{y(x) = \frac{1}{2}x^2 e^{ax}}$

4. **Caso $r(x) = \operatorname{sen} bx$.** Proponemos

$$y(x) = A\cos x + B\operatorname{sen} x,$$

como candidato a solución.

```
>>> x,p,q,a,b,A,B=symbols('x,p,q,a,b,A,B')
>>> y=A*cos(b*x)+B*sin(b*x)
>>> ecua=y.diff(x,2)+p*y.diff(x)+q*y-sin(b*x)
>>> ecua.simplify()
-b**2*(A*cos(b*x) + B*sin(b*x)) - b*p*(A*sin(b*x) -
B*cos(b*x)) + q*(A*cos(b*x) + B*sin(b*x)) - sin(b*x)
```

La expresión en el miembro de la izquierda es una combinación lineal de las funciones $\cos bx$ y $\operatorname{sen} bx$. Como estas funciones son linealmente independientes debemos tener que los coeficientes en la combinación lineal deben ser cero

```
>>> ecua.expand().coeff(sin(b*x))
-A*b*p - B*b**2 + B*q - 1
>>> ecua.expand().coeff(cos(b*x))
-A*b**2 + A*q + B*b*p
```

Obtenemos un sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} -Abp - (b^2 - q)B & = 1 \\ Bbp - (b^2 - q)A & = 0 \end{cases} \tag{14}$$

Para que el sistema tenga solución la matriz de coeficientes debe ser no singular

$$0 \neq \det \begin{pmatrix} -bp & -(b^2 - q) \\ -(b^2 - q) & bp \end{pmatrix} = -(b^2 p^2 + (b^2 - q)^2)$$

Podemos suponer $b \neq 0$, de lo contrario la ecuación hubiese sido homogénea. entonces la condición de arriba ocurre si y sólo si $p \neq 0$ o $b^2 \neq q$. En esa situación encontraremos una solución de la forma

$$\boxed{y(x) = A\cos bx + B\operatorname{sen} bx},$$

donde A y B resuelven (14).

Cuando $p = 0$ y $b^2 = q$ el sistema (14) puede no tener solución. Notar que en este caso la ecuación queda

$$y'' + b^2 y = \operatorname{sen} bx$$

Es una ecuación de un oscilador armónico no homogénea. Habíamos visto que justamente $r(x) = \operatorname{sen} bx$ es una solución del problema homogéno. Nuevamente estamos en una situación de resonancia. Como en casos anteriores hay que proponer como solución

$$y(x) = x\,(A\cos x + B \operatorname{sen} x)\,,$$

5. **Caso $r(x) = \operatorname{sen} bx$ con resonancia**

```
>>> x,b,A,B=symbols('x,b,A,B')
>>> y=x*(A*cos(b*x)+B*sin(b*x))
>>> ecua=y.diff(x,2)+b**2*y-sin(b*x)
>>> eq1=ecua.expand().coeff(sin(b*x))
>>> eq2=ecua.expand().coeff(cos(b*x))
>>> H=solve([eq1,eq2],[A,B])
>>> H
{B: 0, A: -1/(2*b)}
>>> y.subs(H)
-x*cos(b*x)/(2*b)
```

Encontramos la solución general

$$\boxed{y(x) = -\frac{x}{2b}\cos bx}.$$

El caso donde $r(x) = \cos bx$ se trata de manera completamente similar.

6. **Caso $r(x)$ polinomio** Hay que proponer como solución un polinomio, en primera instancia, del mismo grado.

Supongamos

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + q(x)y = c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n \tag{15}$$

Se propone $y = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$. Luego

$$\begin{array}{l} 2a_2 + 3\cdot 2x + \cdots + n(n-1)x^{n-2} + \\ pa_1 + p2a_2x + \cdots + pna_nx^{n-1} + \\ qa_0 + qa_1x + \cdots + qa_nx^n = c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n \end{array}.$$

Como las funciones $1, x, \ldots, x^n$ son linealmente independientes, los coeficientes en ambos lados de la igualdad deben ser iguales.

$$\begin{aligned} 2a_2 + pa_1 + qa_0 &= c_0 \\ 3 \cdot 2 + 2pa_2 + qa_1 &= c_1 \\ &\vdots \\ n(n-1) + p(n-1)a_{n-1} + qa_{n-2} &= c_{n-2} \\ pna_n + qa_{n-1} &= c_{n-1} \\ qa_n &= c_n \end{aligned}$$

Es útil escribir estas igualdades matricialmente.

$$\begin{pmatrix} q & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & q & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & q & pn \\ \vdots & & & & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{pmatrix}$$

Es un sistema triángular superior que se resuelve por sustitución ascendente. Esto siempre que $q \neq 0$. En caso contrario la matríz es singular y es posible que el sistema no tenga solución.

El caso $q = 0$ es una forma de resonancia. Puede ser tratado como las anteriores resonancias, pero notando que la ecuación se reduce a $y'' + py' = r$ conviene tomar $v = y'$ como nueva variable dependiente y reducir la ecuación a una de primer orden.

Por último señalemos que si deseamos resolver un problema de la forma

$$L[y] \equiv y'' + py' + qy = r_1(x) + \cdots + r_n(x),$$

donde las funciones r_i son de alguna de las formas descriptas en los casos previos, entonces la linealidad de L implica que, si y_i resuelve $L[y_i] = r_i$, $y = y_1 + \cdots + y_n$ resuelve la ecuación deseada.

5.2. Método de variación de los parámetros

Queremos resolver la ecuación

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = r(x). \tag{16}$$

Supongamos que contamos con un par de soluciones y_1, y_2 linealmente independientes de la ecuación homogénea asociada

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0. \tag{17}$$

El método de variacion de los parámetros consiste en proponer una solución de la forma

$$y(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x). \tag{18}$$

Hay dos funciones incognitas c_1 y c_2, pero sólo una ecuación. Tendremos por esto libertad de introducir otra condición que consideremos conveniente. Tenemos

$$y' = c_1'y_1 + c_1y_1' + c_2'y_2 + c_2y_2'.$$

Pidamos que

$$c_1'y_1 + c_2'y_2 = 0. \tag{19}$$

Supuesta esta igualad

$$y' = c_1y_1' + c_2y_2'.$$

Derivando

$$y'' = c_1'y_1' + c_2'y_2' + c_1y_1'' + c_2y_2''.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
r(x) &= y'' + py' + qy \\
&= c_1'y_1' + c_2'y_2' + c_1y_1'' + c_2y_2'' + p(c_1y_1' + c_2y_2') + q(c_1y_1 + c_2y_2) \\
&= c_1(y_1'' + py_1' + qy_1) + c_2(y_2'' + py_2' + qy_2) + c_1'y_1' + c_2y_2' \\
&= c_1'y_1' + c_2'y_2'
\end{aligned}$$

Esta ecuación junto a (19) nos dan el sistema

$$\begin{cases} c_1'y_1 + c_2'y_2 & = 0 \\ c_1'y_1' + c_2'y_2' & = r \end{cases} \tag{20}$$

Las incognitas son c_1' y c_2'. El determinante de la matriz de coeficientes es precisamente el Wronskiano W de las soluciones y_1 e y_2, por la suposición de independencia $W \neq 0$ y por lo tanto el sistema tiene solución única. Se tiene

$$c_1' = -\frac{\det\begin{pmatrix} 0 & y_2 \\ r & y_2' \end{pmatrix}}{W} = -\frac{ry_2}{W}$$

y

$$c_2' = -\frac{\det\begin{pmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & r \end{pmatrix}}{W} = \frac{ry_1}{W}$$

En consecuencia

$$c_1 = -\int \frac{ry_2}{W}dx \tag{21}$$

y

$$c_2 = \int \frac{ry_1}{W} \tag{22}$$

Usando estas fórmulas y (18) obtenemos una solución particular del sistema. La solución general es la suma de la particular más una solución general del homogéneo. Esta última solución general se escribe como una combinación lineal genérica entre y_1 e y_2.
Ejemplo 1. Resolver el siguiente pvi $y'' + y = \csc x$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ y $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. La ecuación homogénea asociada tiene el par $y_1(x) = \cos(x)$ e $y_1(x) = \operatorname{sen}(x)$ de soluciones linealmente independientes. El wronskiano es $W \equiv 1$ y entonces una solución paarticular es

$$\begin{aligned} y(x) &= -\int \frac{ry_2}{W} dx y_1 + \int \frac{ry_1}{W} dx y_2 \\ &= -\int dx \cos(x) + \int \frac{1}{\tan(x)} dx \operatorname{sen}(x) \\ &= -x\cos(x) + \ln(\operatorname{sen}(x)) \operatorname{sen}(x). \end{aligned}$$

La solución general es

$$y(x) = -x\cos(x) + \ln(\operatorname{sen}(x)) \operatorname{sen}(x) + c_1 \cos(x) + c_2 \operatorname{sen}(x).$$

Las condiciones $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ y $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ nos conducen a $c_2 = 0$ y $c_1 = \frac{\pi}{2}$.

6. Conclusiones

1. Si podemos encontrar dos soluciones linealmente independientes de una ecuación lineal homogénea de segundo orden, tenemos la solución general a traves de combinaciones lineales.
2. Si tenemos una solución no trivial de una ecuación lineal homogénea de segundo orden podemos hallar otra por el método de reducción de orden.
3. Podemos resolver completamente una ecuación lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes.
4. Podemos resolver algunos problemas no homogéneos por el método de coeficientes indeterminados.
5. Si conocemos las soluciones del problema homogéneo podemos resolver, en teoría, el no homogéneno para cualquier $r(x)$ por el método de variación de los parámetros

7. Aplicaciones

7.1. Vibraciones mecánicas

Problema 1.

Estudiar el movimiento de un resorte (cómo el de la unidad anterior) pero suponer que además de actuar sobre la masa la fuerza elástica del resorte, tenemos una fuerza de fricción debida a la resistencia del medio. Por la acción de esta fuerza, se dice que es un sistema resorte-masa amortiguado. Además suponemos que hay otra fuerza F externa y que sólo depende de t. Por ejemplo si el resorte se colocase verticalmente y se dejase suspendida la masa, F sería la fuerza de gravedad. Si la masa estuviese hecha de metal, F podría ser una fuerza provista por un imán. Por la acción de esta fuerza el sistema se dice forzado. Por consiguiente el sistema completo, con la acción de las tres fuerzas, se denomina un sistema resorte-masa, amortiguado y forzado.

La fuerza elástica del resorte se modeliza con la Ley de Hooke. Para la amortiguación, supongamos que el módulo de la fuerza es proporcional a la velocidad de la masa. La constante de proporcionalidad c se llama coeficiente de viscosidad. La dirección y sentido de la fuerza amortiguadora es siempre contraria al movimiento. Por el principio de conservación de la energía, vemos que la fuerza de amortiguación siempre realiza un trabajo W negativo, por consiguiente hace perder energía cinética. De la fuerza externa F no sabemos nada en principio. Por todo lo expuesto, si ponemos un sistema de coordenadas con origen en la posición de equilibrio del sistema masa-resorte y si $x(t)$ es la posición de la masa en el momento t, la ecuación que gobierna el sistema masa-resorte con amortiguación y forzamiento es

$$mx''(t) \underbrace{=}_{2^\circ \text{ Ley Newton}} \underbrace{-kx(t)}_{\text{Hooke}} \underbrace{-cx'(t)}_{\text{Amortiguación}} + \underbrace{F(t)}_{\text{Fuerza externa}} \tag{23}$$

7.1.1. Vibraciones amortiguadas no forzadas ($c > 0$, $F = 0$)

Escribamos la ecuación (23) de la siguiente froma

$$\boxed{x''(t) + 2\mu x'(t) + \omega^2 x = 0} \quad \mu := \frac{c}{2m}, \omega := \sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{24}$$

Las raíces de la ecuación característica son

$$\boxed{\lambda_{1,2} = -\mu \pm \sqrt{\Delta}, \quad \Delta := \mu^2 - \omega^2}$$

Caso $\Delta > 0$. Aquí la viscocidad es “grande” relativa ala rigidez k. Se dice que el sistema está sobreamortiguado. En este caso tenemos dos soluciones linealmente independientes del problema homogéneo y la solución general de este es de la forma

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

Notar que $\lambda_1, \lambda_2 < 0$. Supongamos que el sistema masa-resorte parte del resposo $x'(0) = 0$ y de una posición indeterminada x_0. Resolvamos este pvi

```
>>> from sympy import *
>>> init_printing()
>>> lambda1,lambda2,t,x0,c1,c2=symbols('lambda1,lambda2,t,x0,c1,c2')
>>> x=c1*exp(lambda1*t)+c2*exp(lambda2*t)
>>> C=solve([x.subs(t,0)-x0,x.diff(t).subs(t,0)], [c1,c2])
>>> C
```

$$\left\{c_1 : -\frac{\lambda_2 x_0}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad c_2 : \frac{\lambda_1 x_0}{\lambda_1 - \lambda_2}\right\}$$

```
>>> x=x.subs(C[0])
```

$$x(t) = x_0 \left\{ \frac{\lambda_1 e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2} - \frac{\lambda_2 e^{\lambda_1 t}}{\lambda_1 - \lambda_2} \right\} \tag{25}$$

```
>>> x=x.subs({lambda1:-1,lambda2:-2,x0:1})
>>> plot(x,(t,0,10))
```

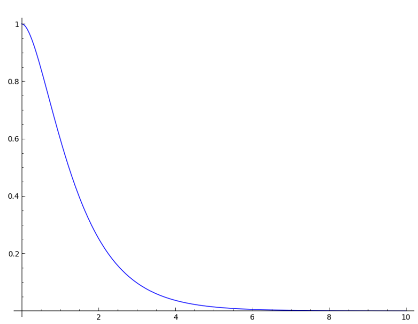


Figura 1: Vibraciones amortiguadas no forzadas ($c > 0$, $F = 0$)

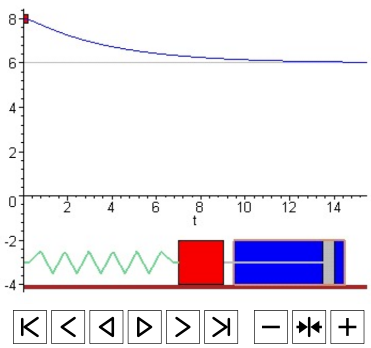


Figura 2: Masa-resorte sobreamortiguado

Como se observa en la gráfica 1 y la animación 2 la masa ejecuta una oscilación, lo cual le demanda un tiempo infinito. Podría haber pasado por la posición de equilibrio sólo en el pasado, puesto que $x(t) = 0$ cuando

$$\boxed{t = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_2} < 0}$$

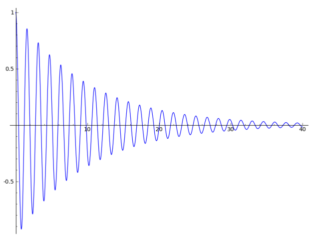
Caso $\Delta = 0$. En esta situación se dice que hay amortiguación crítica. Las raíces son iguales $\lambda_1 = \lambda_2 = -\mu$. Sabemos que

$$x_1(t) = c_1 e^{-\mu t} + c_2 t e^{-\mu t} = e^{-\mu t}\{c_1 + c_2 t\} \tag{26}$$

Nuevamente la solución puede pasar a lo sumo una vez por la posición de equilibrio, siempre y cuando $C_2 \neq 0$. El compportamiento cualitativo de la solución es muy parecido al caso anterior.
Caso $\Delta < 0$, caso subamortiguado. $\lambda_{1,2} = -\mu \pm \nu i$ con $\nu = \sqrt{|\Delta|} = \sqrt{|\omega^2 - \mu^2|}$. La solución general viene dada por

$$x(t) = e^{-\mu t}\{c_1 \cos \nu t + c_2 \operatorname{sen} \nu t\} \tag{27}$$

```
sage: c1,c2,mu,nu,x0,t=var('c1,c2,mu,nu,x0,t')
sage: x=e^(-mu*t)*(c1*cos(nu*t)+c2*sin(nu*t))
sage: C=solve([x(t=0)==x0,x.diff(t).subs(t=0)==0],[c1,c2],solution_dict
    =True)
sage: x=x.subs(C[0]).subs({mu:.1,nu:4,x0:1})
sage: x.plot((x,0,100))
```



Vibraciones amortiguadas no forzadas ($c > 0$, $F = 0$)

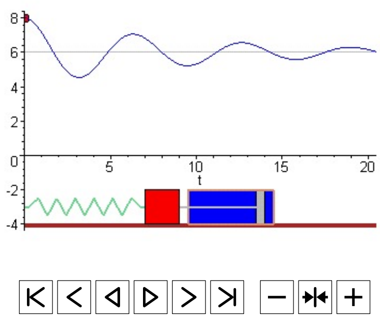


Figura 3: Masa-resorte subamortiguado

Vibraciones amortiguadas no forzadas ($c > 0$, $F = 0$) Se suele escribir la ecuación (27) de otra forma. Expresemos el vector (c_1, c_2) en coordenadas polares.

$$c_1 = \rho \cos \alpha, \quad c_2 = \rho \operatorname{sen} \alpha.$$

Entonces

$$x(t) = e^{-\mu t} \{c_1 \cos \nu t + c_2 \operatorname{sen} \nu t\} = \boxed{\rho e^{-\mu t} \cos(\nu t - \alpha)}.$$

Llamaremos este régimen *movimiento cuasi-oscilatorio*. Se ejecutan vibraciones que se van amortiguando de frecuencia

$$f = \frac{1}{\text{período}} = \frac{\nu}{2\pi}, \quad \nu = \sqrt{\omega^2 - \mu^2} = \sqrt{\left(\frac{k}{m}\right)^2 - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}.$$

En lugar de la frecuencia se suele considerar la frecuencia angular que se define como $2\pi f$. La ventaja de esta definición es que la frecuencia ángular de la función de arriba es ν.

Vibraciones amortiguadas no forzadas ($c > 0$, $F = 0$) **Ejercicio:** En cualquiera de las situaciones descriptas, $x(t) \to 0$ y $x'(t) \to 0$, cuando $t \to \infty$. Es decir, la masa se va deteniendo.

Vibraciones no amortiguadas y forzadas ($c = 0$, $F \neq 0$) Vamos a considerar una fuerza externa oscilatoria de frecuencia angular ω_0 y amplitud F_0. Tenemos que resolver

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = F_0 \cos(\omega_0 t). \tag{28}$$

Usaremos el método de coeficientes indeterminados y SAGE. Antes, recordar que si $\omega = \omega_0$ estamos en resonancia. Tendremos que considerar ese caso por separado. Supongamos pues $\omega \neq \omega_0$. El siguiente código se puede encontrar en la carpeta `scripts` del repositorio GitHub de esta materia. El script se denomina `osc_arm_forz_noamort.sage`