Introducción y motivaciones del cálculo de variaciones

Fernando Mazzone

Dpto de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas Físico-Químicas y Naturales
Universidad Nacional de Río Cuarto Dpto de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad Nacional de La Pampa
CONICET

14 de julio de 2015

Índice

Índice

ECUACIONES DE NEWTON

Sistema mecánico: n-puntos masa en un espacio euclideano tridimensional. Supuesto un sistema de coordenadas cartesiano, sean $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n \in \mathbb{R}^3$ las coordenadas de los puntos masa, $\boldsymbol{x}_i = (x_{i,1}, x_{i,2}, x_{i,3})$, $i = 1, \ldots, n$. Vamos a poner $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n) \in \mathbb{R}^{3n}$. Las variables $\boldsymbol{x}_i$ dependen del tiempo t. A la función $t \mapsto \boldsymbol{x}(t)$ la denominamos un movimiento.
Fuerzas: Supongamos que actúan fuerzas $\boldsymbol{f}_i = \boldsymbol{f}_i(t, \boldsymbol{x}(t), \dot{\boldsymbol{x}}(t))$ sobre cada masa m_i.

LEYES DE MOVIMIENTO DE NEWTON

Suponiendo que el sistema satisface la segunda ley de Newton.

$$m_i\ddot{\boldsymbol{x}}_i = \boldsymbol{f}_i, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

Sistemas conservativos

Definición

El sistema se llama conservativo si existe una función $U = U(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, con $U : \mathbb{R}^{3n} \times \mathbb{R}^{3n} \to \mathbb{R}$ tal que

$$\boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}) = - \left.\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{x}_i}\right|_{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}})}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

El signo menos en el segundo miembro es sólo una convención.

Las derivadas del miembro de la derecha en (2) hay que entenderlas como que presuponen las tres identidades escalares

$$f_{i,j}(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}) = \left.\frac{\partial U}{\partial x_{i,j}}\right|_{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}})}, \quad i = 1, \ldots, n; j = 1, 2, 3.$$

Lagrangiano

En un sistema conservativo se define la energía cinética $T : \mathbb{R}^{3n} \to \mathbb{R}$ por

$$T(\boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{|\boldsymbol{y}_i|}{2}, \quad \boldsymbol{y} = (\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_n) \in \mathbb{R}^{3n}$$

y la energía potencial por U.
Vamos a definir la función de Lagrange o Lagrangiano por

$$\boxed{L(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = T - U = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{|\boldsymbol{y}_i|^2}{2} - U(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})} \tag{3}$$

ECUACIONES DE EULER-LAGRANGE

Las ecuaciones de Newton (1) ahora se pueden escribir

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{y}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{x}_i}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

O más sintéticamente

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{y}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{x}}} \tag{4}$$

Estas ecuaciones se denominan ecuaciones de Euler-Lagrange

Ejercicio Definimos la energía total del sistema por $E = T + U$. Demostrar que si $\boldsymbol{x}(t)$ resuelve (1) entonces $E(\boldsymbol{x}(t), \dot{\boldsymbol{x}}(t))$ no depende de t, i.e. la energía total del sistema se conserva.

EJEMPLO

Consideremos la ecuación del resorte u oscilador armónico

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t).$$

En estas ecuaciones hemos dividido por la masa. Aquí el movimiento se realiza sobre una línea, de modo que un eje de coordenadas es suficiente para describir el movimiento $x(t) \in \mathbb{R}$. El sistema es conservativo, pues

$$f = -\omega^2 x = -\frac{dU}{dx}, \quad \text{donde } U = \omega^2 \frac{x^2}{2}.$$

El lagrangiano es

$$L(t, x, y) = \frac{y^2}{2} - \omega^2 \frac{x^2}{2}.$$

Índice

PROBLEMAS DE CONTORNO

La ecuación (4) no caracteriza una única solución, hace falta introducir condiciones adicionales. Estamos interesados en considerar problemas de contorno. Hay de distinto tipo, aquí algunos ejemplos. Supongamos $\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1 \in \mathbb{R}^n$,

DIRICHLET $\boldsymbol{x}(a) = \boldsymbol{x}_0$ y $\boldsymbol{x}(b) = \boldsymbol{x}_1$.

NEUMANN $\dot{\boldsymbol{x}}(a) = \boldsymbol{x}_0$ y $\dot{\boldsymbol{x}}(b) = \boldsymbol{x}_1$.

ROBIN (MIXTA) dados α,β,γ y δ en $\mathbb{R}$, con $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ y $\gamma^2 + \delta^2 \neq 0$,

$$\begin{aligned} \alpha\boldsymbol{x}(a) + \beta\dot{\boldsymbol{x}}(a) &= \boldsymbol{x}_0 \\ \gamma\boldsymbol{x}(b) + \delta\dot{\boldsymbol{x}}(b) &= \boldsymbol{x}_1. \end{aligned}$$

PERIÓDICAS $\boldsymbol{x}(a) = \boldsymbol{x}(b)$ y $\dot{\boldsymbol{x}}(a) = \dot{\boldsymbol{x}}(b)$.

Índice

Principio de mínima acción de Hamilton

Principio de Mínima Acción de Hamilton

Las soluciones del problema de contorno

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{y}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{x}} \\ \boldsymbol{x}(a) = \boldsymbol{x}_0, \quad \boldsymbol{x}(b) = \boldsymbol{x}_1 \end{cases}$$

(4) son puntos críticos de la integral de acción

$$\boxed{I(\boldsymbol{x}) = \int_a^b L(t, \boldsymbol{x}(t), \dot{\boldsymbol{x}}(t))dt} \tag{5}$$

para

$$\boldsymbol{x} \in C := \{\boldsymbol{u} \in H^1([a,b], \mathbb{R}^n) | \quad \boldsymbol{x}(a) = \boldsymbol{x}_0 \quad \text{y} \quad \boldsymbol{x}(b) = \boldsymbol{x}_1\}.$$

Observación: Así los mínimos y máximos de I son solución.

Principio de Hamilton, idea de justificación

Más adelante desarrollaremos esto con detalle.

$\boldsymbol{x} \in C$ es un punto crítico de I si cierta derivada de I es igual a cero.

En este caso tomamos $\boldsymbol{r}(t) \in H^1([0,T])$ con $\boldsymbol{r}(a) = \boldsymbol{r}(b) = 0 \in \mathbb{R}^n$ y definimos la derivada de I en $\boldsymbol{x}$ en la dirección de $\boldsymbol{r}$ por

$$DI(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{r} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{I(\boldsymbol{x} + \varepsilon \boldsymbol{r}) - I(\boldsymbol{x})}{\varepsilon}.$$

Notar que $\boldsymbol{x} \in C$, $\boldsymbol{r}(a) = \boldsymbol{r}(b) = 0$ y $\varepsilon \in \mathbb{R}$ implican $\boldsymbol{x} + \varepsilon \boldsymbol{r} \in C$

Principio de Hamilton, idea de justificación

Suponiendo que podemos intercambiar integrales con límites

$$DI(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{r} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{I(\boldsymbol{x} + \varepsilon \boldsymbol{r}) - I(\boldsymbol{x})}{\varepsilon}. \qquad \text{(definición)}$$

$$= \int_a^b \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{L(t, \boldsymbol{x} + \varepsilon \boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{x}} + \varepsilon \dot{\boldsymbol{r}}) - L(t, \boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}})}{\varepsilon} dt \qquad \text{(TCM?)}$$

$$= \int_a^b D_{\boldsymbol{x}} L(t, \boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}) \cdot \boldsymbol{r} + D_{\boldsymbol{y}} L(t, \boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}) \cdot \dot{\boldsymbol{r}} \, dt \qquad \text{(derivamos } L\text{)}$$

$$= \int_a^b \left(D_{\boldsymbol{x}} L(t, \boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}) - \frac{d}{dt} D_{\boldsymbol{y}} L(t, \boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}) \right) \cdot \boldsymbol{r} \, dt \qquad \text{(integral}$$

$$+ D_{\boldsymbol{y}} L(t, \boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}) \cdot \boldsymbol{r} \, \Big|_{t=a}^{t=b} \qquad \text{por partes)}$$

$$= \int_a^b \left(D_{\boldsymbol{x}} L(t, \boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}) - \frac{d}{dt} D_{\boldsymbol{y}} L(t, \boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}) \right) \cdot \boldsymbol{r} \, dt, \quad (\boldsymbol{r}(a) = \boldsymbol{r}(b) = 0)$$

Principio de Hamilton, idea de justificación

Teorema

Sea $\boldsymbol{f} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ integrable, y supongamos que para toda $\boldsymbol{r} \in C^\infty([a,b],\mathbb{R}^n)$, con $\boldsymbol{r}(a) = \boldsymbol{r}(b) = 0$, tenemos

$$\int_a^b \boldsymbol{f}(t) \cdot \boldsymbol{r}(t) dt = 0,$$

entonces $\boldsymbol{f} = 0$, c.t.p.

Ejercicio: demostrar este teorema.
Aplicando el Teorema concluímos que

$$\forall \boldsymbol{r} : DI(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{r} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} D_{\boldsymbol{y}} L(t, \boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}) = D_{\boldsymbol{x}} L(t, \boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}), \text{ c.t.p. } t \in [a,b].$$

$\square$

Detalle pendiente: por qué se puede intercambiar los límtes con las intergales?

Índice

ECUACIONES ESCALARES

Las ecuaciones escalares de segundo orden

$$u'' + f(u) = h(t),$$

$u : [a, b] \to \mathbb{R}$ son siempre conservativas. Al menos si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua, pues f tiene la primitiva

$$F(u) = \int_0^u f(s)ds$$

Así tenemos el potencial

$$U(t, u) = F(u) - uh(t).$$

PROBLEMA DE DIRICHLET ECUACIÓN LINEAL NO RESONANTE

Ejemplo

$$\begin{cases} u''(t) + \frac{1}{2}u = \text{sen}(t), & 0 < t < \pi \\ u(0) = u(\pi) = 0 \end{cases}$$

Por medios elementales hallamos la solución general de la ecuación diferencial. Usamos el método de coeficientes indeterminados. Proponemos

$$u(t) = A\cos(t) + B\,\text{sen}(t).$$

reemplazamos en la ecuación y hallamos

$$\boxed{\text{A=0}}, \boxed{\text{B=-2}}$$

PROBLEMA DE DIRICHLET ECUACIÓN LINEAL NO RESONANTE

La solución general es la solución particular más una general del homogéneo

$$u = c_1 \cos\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) - 2\operatorname{sen}(t).$$

La condición de contorno $u(0) = u(\pi) = 0$ implica $c_1 = c_2 = 0$. El problema tiene una única solución

$$\boxed{u = -2\operatorname{sen}(t).}$$

El lagrangiano es

$$L(t, x, y) = \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{4} + \operatorname{sen}(t)x.$$

PROBLEMA DE DIRICHLET ECUACIÓN LINEAL NO RESONANTE

La solución general es la solución particular más una general del homogéneo

$$u = c_1 \cos\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) - 2\operatorname{sen}(t).$$

La condición de contorno $u(0) = u(\pi) = 0$ implica $c_1 = c_2 = 0$. El problema tiene una única solución

$$\boxed{u = -2\operatorname{sen}(t).}$$

El lagrangiano es

$$L(t, x, y) = \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{4} + \operatorname{sen}(t)x.$$