Ejercicio 1 Sea $I=(-1,1)$ y sea $u(x)=\frac{1}{2}(|x|+x)$. Verificar que $u\in W^{1,p}(I)$ para todo $1\leq p\leq\infty$ con $u'=H$ siendo

$$H(x)=\begin{cases} 1 & si \quad 0<x<1 \\ 0 & si \quad -1<x<0 \end{cases}$$

Justificar que $H\notin W^{1,p}$ para $1\leq p\leq\infty$.

Ejercicio 2 Considerar la función $u:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por

$$u(x)=\frac{1}{(1+x^2)^{\alpha/2}\ln(2+x^2)}.$$

Demostrar que $u\in W^{1,p}(\mathbb{R})$ si $p\geq 1/\alpha$ y que $u\notin L^p(\mathbb{R})$ si $1\leq p<1/\alpha$.

Ejercicio 3 (Espacios de Lebesgue y Sobolev de funciones con valores vectoriales) Sea I un intervalo abierto de $\mathbb{R}$.

a. Denotamos los espacios de Lebegue de funciones con valores en $\mathbb{R}^n$ por

$$L^p(I,\mathbb{R}^n):=\left\{u:I\to\mathbb{R}^n \Big| |u(t)|\in L^p(I)\right\},$$

donde $L^p(I)$ denota el espacio de Lebesgue escalar usual y $|\cdot|:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}_+$ la norma euclidea sobre $\mathbb{R}^n$. Demostrar que $L^p(I,\mathbb{R}^n)$ es un espacio de Banach con norma

$$\|u\|_{L^p(I,\mathbb{R}^n)}=\|\,|u|\,\|_{L^p(I)}.$$

b. Si $u:I\to\mathbb{R}^n$ pongamos $u=(u_1,\ldots,u_n)$ con $u_i:I\to\mathbb{R}$, $i=1,\ldots,n$. Demostrar que $u\in L^p(I,\mathbb{R}^n)\Leftrightarrow u_i\in L^p(I)$, $i=1,\ldots,n$.

c. $L^p(I,\mathbb{R}^n)\cong L^p(I)\times\cdots\times L^p(I)$, donde $\cong$ siginifica que existe un isomorfismo homeomorfo entre los espacios.

d. $L^p(I,\mathbb{R}^n)$ es reflexivo cuando $1<p<\infty$.

e. Denotamos por $C_c^1(I,\mathbb{R}^n)$ al conjunto (espacio vectorial) de todas las funciones test φ continuamente diferenciables y de soporte compacto en I. Para $1\leq p\leq\infty$, vamos a definir el espacio de Sobolev de funciones con valores en $\mathbb{R}^n$, denotado por $W^{1,p}(I,\mathbb{R}^n)$ por analogía con el caso escalar, es decir

$$W^{1,p}(I,\mathbb{R}^n) := \left\{ u \in L^p(I,\mathbb{R}^n) \middle| \exists v \in L^p(I,\mathbb{R}^n) \forall \varphi \in C^1_c(I,\mathbb{R}^n) : \int_I u \cdot \varphi' dt = -\int_I v \cdot \varphi dt \right\},$$

donde $a \cdot b$ denota el producto escalar entre vectores $a, b \in \mathbb{R}^n$. El espacio $W^{1,p}(I,\mathbb{R}^n)$ es Banach. Justificar esta afirmación.

Ejercicio 4 (Espacios de Sobolev de Funciones Periódicas) Sea $T > 0$ y C^1_T el espacio de las funciones continuas y con derivada continua sobre $[0,T]$ que además son T-periódicas, esto es $\varphi(0) = \varphi(T) = 0$. Definimos el espacio de Sobolev de funciones T periódicas como

$$W^{1,p}_T(I) := \left\{ u \in L^p(I) \middle| \exists v \in L^p(I) \forall \varphi \in C^1_T(I) : \int_I u \cdot \varphi' dt = -\int_I v \cdot \varphi dt \right\},$$

Demostrar que

$$W^{1,p}_T(I) = \left\{ u \in L^p(I) \middle| u \text{ es absolutamente continua, } u' \in L^p(I), u(0) = u(T) \right\}.$$

Generalizar a funciones con valores vectoriales.

Ejercicio 5 (Desigualdad de Poincaré-Wiertinger) Sea I el intervalo acotado (a,b). Para $u : I \to \mathbb{R}$ definimos el promedio

$$\overline{u} := \frac{1}{b-a} \int_a^b u(t)dt.$$

Demostrar la desigualdad de Wirtinger, esto es que existe una contante $C > 0$ tal que para toda $u \in W^{1,p}(I)$, $1 \le p \le \infty$ se satisface que

$$\|u - \overline{u}\|_{L^\infty} \le C\|u'\|_{L^p}.$$

Generalizar a funciones con valores vetoriales. *Ayuda:* Notar que por el teorema del valor medio para integrales debe existir $x_0 \in I$ tal que $\overline{u} = u(x_0)$.

Ejercicio 6 Sea $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada de $W^{1,p}(I)$ con $1 < p \le \infty$.

a. Utilizar el Teorema de Arzela-Ascoli para demostrar que existe una subsucesión $\{u_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ y $u \in W^{1,p}(I)$ tal que $\|u_{n_k} - u\|_{L^\infty} \to 0$.

b. Si $1 < p < \infty$ podemos asumir además que $u'_{n_k} \rightharpoonup u'$ debilmente en $L^p(I)$

c. Si, en cambio, $p = \infty$ podemos asumir que $u'_{n_k} \overset{*}{\rightharpoonup} u'$ en $\sigma(L^\infty, L^1)$.

Ejercicio 7 Sea $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ con $\varphi \not\equiv 0$. Definimos $u_n(x) = \varphi(x+n)$. Supongamos $1 \leq p \leq \infty$. Demostrar que

a. $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada en $W^{1,p}(\mathbb{R})$.

b. No exixte subsucesión que converge en la topología fuerte en $L^q(\mathbb{R})$ para ningun $1 \leq q \leq \infty$.

c. $u_n' \rightharpoonup 0$ debilmente en $W^{1,p}(\mathbb{R})$.

Ejercicio 8 Sea $1 \leq p < \infty$ y $u \in W^{1,p}(\mathbb{R})$. Escribamos

$$D_h u(x) = \frac{u(x+h) - u(x)}{h}, \quad \text{para } h \neq 0, x \in \mathbb{R}.$$

Usar el hecho que $C_c^1(\mathbb{R})$ es denso en $W^{1,p}(\mathbb{R})$ para demostrar que $D_h u \to u'$ en $L^p(\mathbb{R})$ cuando $h \to 0$.