



---

FACULTAD DE CS. EXACTAS, FÍSICO-QUÍMICAS Y NATURALES  
DEPTO DE MATEMÁTICA.  
SEGUNDO CUATRIMESTRE DE 2015  
CÁLCULO VARIACIONES  
PRÁCTICA 4: FUNCIONALES SOBRE ESPACIOS DE BANACH .

---

**Ejercicio 1** Sea  $X$  un espacio de Banach e  $I : X \rightarrow (-\infty, \infty]$  una función convexa y acotada por superiormente en un entorno del punto  $a \in X$ . Entonces  $I$  es continua en  $a$ .

**Ejercicio 2** Sea  $X$  un espacio de Banach. Una funcional  $I : X \rightarrow (-\infty, \infty]$  se llama *estrictamente convexa* si

$$I(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda I(x) + (1 - \lambda)I(y), \quad \forall \lambda \in (0, 1) \forall x, y \in X.$$

Demostrar que una función estrictamente convexa alcanza a lo sumo un punto mínimo.

**Ejercicio 3** Sea  $X$  un espacio de Banach e  $I : X \rightarrow (-\infty, \infty]$  una función convexa y semicontinua inferiormente en la topología fuerte. Entonces  $I$  es coercitiva ( $I(u) \rightarrow \infty$  cuando  $\|u\| \rightarrow \infty$ ) si y sólo si existen  $\alpha > 0$  y  $\beta \geq 0$  tales que

$$I(u) \geq \alpha \|u\| - \beta.$$

**Ejercicio 4** Sea  $X$  un espacio de topológico.

- Si  $I_1, I_2 : X \rightarrow (-\infty, \infty]$  son convexas, o s.c.i., o s.s.c.i. y  $\alpha \geq 0$  entonces  $I_1 + I_2$  y  $\alpha I_1$  son convexas, o s.c.i., o s.s.c.i. respectivamente.
- Si  $\{I_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  es una familia, posiblemente infinita, de funciones convexas, o s.c.i., o s.s.c.i. entonces

$$\sup_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda,$$

es convexa, o s.c.i., o s.s.c.i. respectivamente.

**Ejercicio 5** Sea  $X$  un espacio topológico. Una función  $I : X \rightarrow (-\infty, \infty]$  es s.c.i si y sólo si  $\{u \in X | I(u) \leq \alpha\}$  es cerrado para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

**Ejercicio 6** Si  $I : X \rightarrow (-\infty, \infty]$  es convexa, entonces  $\{u \in X | I(u) \leq \alpha\}$  es convexo para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Demostrar con un ejemplo que el recíproco no es en general cierto.

**Ejercicio 7** Si  $I : X \rightarrow (-\infty, \infty]$  es convexa, o si es s.c.i., entonces el conjunto donde  $I$  alcanza un mínimo es convexo, respectivamente cerrado, para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

**Ejercicio 8** Si  $I : X \rightarrow (-\infty, \infty]$  es convexa, entonces un mínimo local es mínimo global.

**Ejercicio 9** Sean  $X, Y$  espacios de Banach y  $F : X \rightarrow Y$  una función. Se dice que  $F$  es *diferenciable según Fréchet* en  $u \in X$  si existe un operador lineal acotado  $dF(u) : X \rightarrow Y$  tal que

$$\lim_{\|v\|_X \rightarrow 0} \frac{\|F(u+v) - F(u) - dF(u)(v)\|_Y}{\|v\|_X} = 0.$$

Demostrar que si  $F : X \rightarrow \mathbb{R}$  es diferenciable Fréchet entonces es diferenciable Gâteaux. Demostrar, con un ejemplo de una  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , que el recíproco no es cierto.