

CAMBIOS DE VARIABLES, TEORÍA DE LIE Y EDO

Fernando Mazzone

Depto de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas Físico-Químicas y Naturales
Universidad Nacional de Río Cuarto

16 de diciembre de 2014



DISTINTAS FORMAS PARA UNA ECUACIÓN

Consideremos la ecuación diferencial general de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (1)$$

O su equivalente como forma diferencial

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (2)$$

La expresión $\frac{dy}{dx}$ implica una asimetría entre las variables x e y , una de ellas es independiente (x) y la otra (y) dependiente. La expresión $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ es más simétrica, las dos variables tienen el mismo estatus en la expresión. Además las expresiones del tipo (2) representan un ente matemático importante llamado **forma diferencial**

FORMAS DIFERENCIALES, IDEA SOMERA

- 1 Como los polinomios, las formas diferenciales tienen grado.
- 2 Dadas dos (pueden ser mas) variables x, y una 0-forma diferencial es una función $g(x, y)$ de x, y .
- 3 La expresión (2) es una 1-forma diferencial.
- 4 Hay un operador llamado diferencial y denotado por d . Si ω es una k -forma diferencial $d\omega$ es una $k + 1$ forma diferencial.
- 5 En el caso de 0-forma (función) $g(x, y)$ el diferencial se define

$$dg = \frac{\partial M}{\partial x} dx + \frac{\partial N}{\partial y} dy.$$

Una k -forma diferencial se llama exacta cuando es el diferencial de una $k - 1$ -forma.

CAMBIOS DE VARIABLES

IDEA BÁSICA

Supongamos la ecuación (1) o (2) en las variables x, y . La idea es encontrar nuevas variables $\xi = \xi(x, y)$ y $\eta = \eta(x, y)$ tales que la ecuación se transforme en una más sencilla de resolver.

CÓMPUTOS DE CAMBIAMOS VARIABLES

Cambio de la variable dependiente $y = h(x, z)$ manteniendo la independiente

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial z} \frac{dz}{dx}.$$

La ecuación se convierte

$$\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial z} \frac{dz}{dx} = f(x, h(x, z)).$$

Que es una expresión sólo en z y x . Parece más complicada, pero en un ejemplo concreto puede ser más simple.

CÓMPUTOS DE CAMBIOS DE VARIABLES, EJEMPLO

Ejemplo 1 Hacer el cambio de variable en la ecuación

$$y = \frac{e^z}{x} \quad \text{en} \quad y' = [\ln(xy)]^2 xy - \frac{y}{x}.$$

1) Expresemos dy/dx sólo con x y z y dz/dx .

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{e^z}{x^2} + \frac{e^z}{x} \frac{dz}{dx}.$$

2) Remplacemos y' e y en la ecuación

$$-\frac{e^z}{x^2} + \frac{e^z}{x} \frac{dz}{dx} = \left[\ln \left(x \frac{e^z}{x} \right) \right]^2 x \frac{e^z}{x} - \frac{e^z}{x}.$$

3) Simplifiquemos

$$\frac{dz}{dx} = z^2 x.$$

Que es una ecuación muy facil de resolver.

CAMBIOS DE VARIABLES

Cambio de variable general $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$

1) Calculamos $d\eta/d\xi$ en las variables x, y

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{d\eta dx}{\frac{d\xi}{dx}} = \frac{\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} y'}{\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y} y'} = \frac{\frac{d\eta}{dx}}{\frac{d\xi}{dx}} = \frac{\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} f(x, y)}{\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y} f(x, y)}. \quad (3)$$

2) En la expresión resultante sustituir x, y por las transformaciones inversas $x = x(\xi, \eta)$ y $y = y(\xi, \eta)$

CAMBIOS DE VARIABLES

Ejemplo 3. Transformar a polares: $\frac{dy}{dx} = \frac{y^3+x^2y-x-y}{x^3+xy^2-x+y}$.

Dado que el cálculo es extenso lo haremos sólo con SymPy

```
from sympy import *
x=symbols('x')
y=Function('y')(x)
r=sqrt(x**2+y**2)
theta=atan(y/x)
Expr2=r.diff()/theta.diff()
Expr3=Expr2.subs(y.diff(), \
(y**3+x**2*y-x-y)/(x**3+x*y**2-x+y))
r,theta=symbols('r,theta',positive=True)
Expr4=Expr3.subs([(y,r*sin(theta)), \
(x,r*cos(theta))])
Expr5=simplify(Expr4)
```


CAMBIOS DE VARIABLES

Encontramos que en polares la ecuación es mucho más simple

$$\frac{dr}{d\theta} = -r^3 + r.$$

CÓMPUTOS DE CAMBIOS DE VARIABLES, EJEMPLO

Lo podemos hacer con SymPy

```
from sympy import *  
x, y, z = symbols('x, y, z')  
y = Function('y')(x)  
z = Function('z')(x)  
y = exp(z) / x  
eq = Eq(y.diff(x) - (ln(x*y))**2*x*y + y/x, 0)  
simplify(eq)
```

Obtenemos la ecuación

$$\frac{1}{\eta^2 \xi + \eta + \xi^3 - \xi} \left(\eta^3 \left(\cos^2(\theta) + 1 \right) - \eta^2 \xi \sin^2(\theta) + \eta \xi^2 \left(\cos^2(\theta) + 1 \right) \right)$$

que SymPy no simplifica a nuestro gusto

CÓMPUTOS DE CAMBIOS DE VARIABLES

Cambio de la variable independiente $t = h(x)$ manteniendo la dependiente

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dh}{dx} = \frac{dy}{dt} h'(x).$$

Suponiendo h biyectiva, la ecuación se convierte

$$\frac{dy}{dt} h'(h^{-1}(t)) = f(h^{-1}(t), y).$$

Que es una expresión sólo en t e y .

CÓMPUTOS DE CAMBIOS DE VARIABLES, EJEMPLO

Ejemplo 2 Hacer el cambio de variable en la ecuación

$$x = \cos t \quad \text{en} \quad -\frac{dy}{dx} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}y = 0.$$

1) $h(x) = \arcsen x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} h'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{dy}{dt}.$$

2) Reemplacemos x e y' en la ecuación

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{dy}{dt} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} y = 0$$

3) Simplificando

$$\frac{dy}{dt} + y = 0$$

Que es una ecuación lineal a coeficientes constantes.

CÓMPUTOS DE CAMBIOS DE VARIABLES, EJEMPLO

Lo podemos hacer con SymPy

```
from sympy import *  
x,t=symbols('x,t')  
t=acos(x)  
y=Function('y')(t)  
Ecuacion=-y.diff()+1/(sqrt(1-x**2))*y
```

Obtenemos la ecuación

$$?? = 0$$

Nuevamente SymPy no simplifica a nuestro gusto

CÓMPUTOS DE CAMBIOS DE VARIABLES

Cambio de variables general $x = x(\xi, \eta), y = y(\xi, \eta)$
 $M(x, y)dx + N(x, y)dy$

CAMBIOS DE VARIABLES CON SAGE Y FORMAS DIFERENCIALES

sage: G=SymmetricGroup(5)	1
sage: sigma=G([(1,2,3) , (4,5)])	2
sage: sigma^2	3
(1,3,2)	4
sage: sigma^3	5
(4,5)	6
sage: sigma^6	7
()	8
sage: G.order()	9
120	10
sage: H=G.subgroup([sigma])	11
sage: H.order()	12
6	13

La forma obtenida es $??dr + (??)d\theta$.

GRUPOS, REPASO

GRUPOS

Sean G un conjunto y α una función tal que $\alpha : G \times G \rightarrow G$. En el contexto de grupos es más usual la notación $\alpha(g_1, g_2) = g_1 g_2$. El par (G, α) se llama un grupo si se satisface

- 1 $(g_1 g_2) g_3 = g_1 (g_2 g_3)$, para todos $g_1, g_2, g_3 \in G$,
- 2 Existe $e \in G$ tal que $eg = ge = g$, para todo $g \in G$.
- 3 Para todo $g \in G$ existe $h \in G$ tal que $gh = hg = e$. Se acostumbra denotar $h = g^{-1}$.

EJEMPLOS DE GRUPOS

Ejemplo 1 Sea Π un plano euclideo y G el conjunto de todas las transformaciones rígidas de Π en si mismo. Entonces G es un grupo con la operación de composición. Se llama el **grupo de transformaciones rígidas**

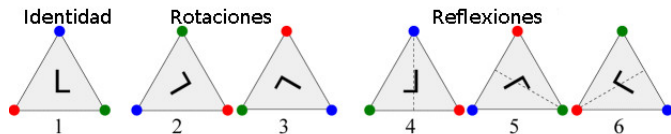
Ejemplo 2 Sea $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ un conjunto de n elementos y S_n definido por

$$S_n = \{\sigma | \sigma : X \rightarrow X \text{ y } \sigma \text{ es biyectiva} \}$$

Entonces S_n es un grupo con la operación de composición. Se denomina **grupo simétrico**

EJEMPLOS DE GRUPOS

Ejemplo 3 Sea Δ un polígono regular de n lados en un plano euclideo Π y D_{2n} el conjunto de todas las transformaciones rígidas de Π en si mismo que llevan Δ en si mismo. D_{2n} se llama el **grupo diedral** de orden $2n$. Para un triángulo equilatero **grupo diedral**



TEORÍA DE GRUPOS COMPUTACIONAL: SAGE Y GAP

GAP - Groups, Algorithms, Programming Lenguaje de programación para álgebra discreta

SAGE: es un sistema de software de matemáticas libre de código abierto bajo la licencia GPL. Se basa en muchos paquetes de código abierto existentes: NumPy, SciPy, matplotlib, SymPy, Maxima, GAP, FLINT, R y muchos más. Acceda a su poder combinado a través de un lenguaje común, basado en Python. Misión: Creación de una alternativa libre de código abierto viable a Magma, Maple, Mathematica y Matlab.

TEORÍA DE GRUPOS COMPUTACIONAL: SAGE Y GAP

sage: <code>H.list()</code>	14
<code>[(), (4,5), (1,2,3), (1,2,3)(4,5), (1,3,2),</code>	15
<code>(1,3,2)(4,5)]</code>	
sage: <code>H.is_normal()</code>	16
<code>False</code>	17
sage: <code>G1=DihedralGroup(3)</code>	18
sage: <code>G1[-2]</code>	19
<code>(1,3,2)</code>	20
sage: <code>H1=G1.subgroup(G1[-2])</code>	21
sage: <code>H1.is_normal()</code>	22
<code>True</code>	23
sage: <code>G1.quotient(H1)</code>	24
<code>Permutation Group with generators [(1,2)]</code>	25

TEORÍA DE GRUPOS COMPUTACIONAL: SAGE Y GAP

??

GRUPOS DE SIMETRÍAS

GRUPOS DE SIMETRÍAS

Los cambios de variables de un conjunto de dos variables, digamos x e y , son funciones φ , invertibles, de clase C^∞ , donde $\varphi : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$, con Ω_1, Ω_2 abiertos de \mathbb{R}^2 .

Acostumbraremos escribir $(\xi, \eta) = \varphi(x, y)$ y diremos que (ξ, η) son las variables nuevas e (x, y) las viejas.

Llamaremos \mathcal{T} al conjunto de todos los cambios de variables φ . El conjunto \mathcal{T} tiene una estructura de grupo con la operación de composición.

GRUPOS DE SIMETRÍAS, EJEMPLOS

Ejemplo, polares: Es más fácil describir la transformación que lleva coordenadas polares en cartesianas. En este caso

$(x, y) = \varphi(r, \theta)$ y

$$\varphi(r, \theta) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta)),$$

$$\Omega_1 = (0, \infty) \times (-\pi, \pi),$$

$$\Omega_2 = \mathbb{R}^2 - \{(x, y) | y = 0, x \leq 0\}$$

GRUPOS DE LIE UNIPARAMÉTRICOS

GRUPOS UNIPARAMÉTRICOS DE SIMETRÍAS

Sea \mathcal{T} el grupo de cambios de variables. Supongamos dado un homomorfismo de grupos $P : (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathcal{T}, \circ)$.

Notación:

- ❶ Para $\lambda \in \mathbb{R}$ escribiremos $P_\lambda = P(\lambda)$
- ❷ Si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ escribimos $(\xi, \eta) = f(x, y, \lambda) := P_\lambda(x, y)$.

Si $f(x, y, \lambda)$ es diferenciable respecto a (x, y) y analítica respecto a λ diremos que $\{P_\lambda | \lambda \in \mathbb{R}\}$ es un **grupo de Lie uniparamétrico de simetrías**.

GRUPOS DE LIE UNIPARAMÉTRICOS

PROPIEDADES DE P_λ

- 1 P_λ es biyectiva y diferenciable sobre su dominio de definición en su imagen.
- 2 $P_{\lambda_1} \circ P_{\lambda_2} = P_{\lambda_1 + \lambda_2}$, equivalentemente $f(f(x, y, \lambda_1), \lambda_2) = f(x, y, \lambda_1 + \lambda_2)$.
- 3 $P_0 = I$, o $f(x, y, 0) = (x, y)$.
- 4 $(P_\lambda)^{-1} = P_{-\lambda}$
- 5 Si $P_\lambda(x, y) = (\xi, \eta)$, entonces $\xi(x, y, \lambda)$ y $\eta(x, y, \lambda)$ son diferenciables respecto (x, y) y se desarrollan en serie de potencias respecto a λ . Es decir para todo $\lambda_0 \in \mathbb{R}$

$$\xi(x, y, \lambda) = a_0(x, y) + a_1(x, y)(\lambda - \lambda_0) + \dots$$

$$\eta(x, y, \lambda) = b_0(x, y) + b_1(x, y)(\lambda - \lambda_0) + \dots$$

EJEMPLOS GRUPOS DE LIE UNIPARAMÉTRICOS

Ejercicio: Demostrar que las siguientes aplicaciones inducen grupos de Lie uniparamétricos

① $P_\lambda(x, y) = (x + \lambda, y)$ y $P_\lambda(x, y) = (x, y + \lambda)$.

② $P_\lambda(x, y) = (e^\lambda x, y)$

③ $P_\lambda(x, y) = \left(\frac{x}{1-\lambda x}, \frac{y}{1-\lambda x} \right)$

④ $P_\lambda(x, y) = \begin{pmatrix} \cos(\lambda) & -\sin(\lambda) \\ \sin(\lambda) & \cos(\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

GRUPO DE SIMETRÍAS DE UNA ECUACIÓN

DEFINICIÓN

Consideremos una ecuación

$$y' = f(x, y).$$

Una transformación $P \in \mathcal{T}$ se denomina una simetría de la ecuación si el cambio de variables dado por $(\xi, \eta) = P(x, y)$ deja invariante la ecuación.

Ejercicio: el conjunto de todas las simetría de una ecuación es un subgrupo de (\mathcal{T}, \circ) . Lo llamaremos **grupo de simetrías** de la ecuación.

ENCONTRAR SIMETRÍAS

Ejemplo: hallar simetrías de

$$\frac{dy}{dx} = f(x).$$

De acuerdo con (3) se debe cumplir que

$$\frac{\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} f(x)}{\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y} f(x)} = f(\xi)$$

Parece que debemos hacer las elecciones

$$\boxed{\xi = x}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial \xi}{\partial x}.$$

Luego

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = 1 \Rightarrow \boxed{\eta = y + \lambda}$$

con λ constante arbitraria.

ENCONTRAR SIMETRÍAS

Hallamos que el

$$P_\lambda(x, y) = (x, y + \lambda)$$

es un grupo uniparamétrico de simetrías. De manera similar

$$P_\lambda(x, y) = (x + \lambda, y)$$

es un grupo uniparamétrico de simetrías para

$$\frac{dy}{dx} = f(y).$$

ENCONTRAR SIMETRÍAS

Demostrar que las rotaciones alrededor del origen es un grupo uniparamétrico de simetrías de

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^3 + x^2y - x - y}{x^3 + xy^2 - x + y}.$$

Sea P_λ la transformación que rota un ángulo λ alrededor del origen. Era un ejercicio demostrar que $\{P_\lambda | \lambda \in \mathbb{R}\}$ es un grupo uniparamétrico de simetrías. Se tiene la representación matricial

$$P_\lambda(x, y) = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\lambda) & -\operatorname{sen}(\lambda) \\ \operatorname{sen}(\lambda) & \cos(\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$P_\lambda^{-1}(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\lambda) & \operatorname{sen}(\lambda) \\ -\operatorname{sen}(\lambda) & \cos(\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

ENCONTRAR SIMETRÍAS

Para el cálculo recurrimos a SymPy

```
from sympy import *
x, theta = symbols('x, theta')
y = Function('y')(x)
xi = cos(theta) * x - sin(theta) * y
eta = -sin(theta) * x + cos(theta) * y
Expr2 = eta.diff(x) / xi.diff(x)
Expr3 = Expr2.subs(y.diff(), \
    (y**3 + x**2 * y - x - y) / (x**3 + x * y**2 - x + y))
xi, eta = symbols('xi, eta')
Expr4 = Expr3.subs([(y, -sin(theta) * xi + cos(theta) * eta),
    (x, cos(theta) * xi + sin(theta) * eta)])
Expr5 = simplify(Expr4)
Expr6 = simplify(Expr5)
Expr7 = Expr6.subs([(sin(2 * theta) + pi / 4), sin(2 * the
```

ENCONTRAR SIMETRÍAS

??