Análisis Real

Una introducción usando Python

Sonia Acinas y Fernando Mazzone

20 de agosto de 2019

Índice general

1. Conjuntos **3**
1.1. Repaso nociones básicas sobre conjuntos . . . 3
1.2. Definición de conjuntos coordinables . . . 6
1.3. Conjuntos numerables . . . 7
1.4. Un conjunto no numerable . . . 12
1.5. Una aplicación . . . 13
1.6. Comparación de cardinales . . . 15
1.7. Números Cardinales . . . 19
1.8. Aplicaciones del Teorema de Schröder-Berstein . . . 20
1.9. Ejercicios . . . 22

2. Nociones Básicas de Topología **26**
2.1. Enfoque axiomático de las estructuras métricas . . . 26
2.2. Bolas, esferas y diámetro . . . 27
2.3. Conjuntos abiertos . . . 29
2.4. Interior de un conjunto y entornos . . . 30
2.5. Conjuntos cerrados y clausura de conjuntos . . . 32
2.6. Ejercicios . . . 35

3. Sucesiones, series de funciones y sus amigos **38**
3.1. Sucesiones de funciones . . . 38
3.2. Series de funciones . . . 40
3.3. Series de Fourier . . . 42

4. Integral de Riemann **43**
4.1. Introducción . . . 43
4.2. Área de figuras elementales planas . . . 43
4.3. Integral de Riemann . . . 45
4.4. Integrabilidad y continuidad . . . 49
4.5. Teorema Fundamental de Cálculo . . . 52
4.6. Función de Volterra . . . 52
4.7. Integral de Riemann y pasos al límite . . . 53

5. Medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$ **55**
5.1. Longitud de intervalos . . . 55
5.2. Topología . . . 56

Prólogo

El significado de las imágenes en los margenes es el siguiente:

↗	*Enlace de Internet*
ϟ	*Prestar atención*
📖	*Lectura adicional*
⚙	*Actividad práctica*

Capítulo 1

Conjuntos

«Nadie nos expulsará del paraíso que Cantor ha creado para nosotros»

David Hilbert

En esta unidad estudiaremos el concepto de cardinal *de un conjunto. Con este concepto se pretende dar un significado a la noción de cantidad de elementos de un conjunto, en especial cuando este es "infinito". Como se verá, y por extraño que parezca, aunque el conjunto involucrado sea infinito de todas maneras podremos definir el cardinal de ese conjunto. Con esto implicitamente decimos que no todos los conjuntos infinitos tendrán el mismo cardinal. Empezaremos recordando algunas cuestiones básicas de teoría de conjuntos que, a la vez, nos servirán como referencia para las notaciones.*

«David Hilbert (Königsberg, Prusia Oriental; 23 de enero de 1862-Gotinga, Alemania; 14 de febrero de 1943) fue un matemático alemán, reconocido como uno de los más influyentes del siglo XIX y principios del XX. Estableció su reputación como gran matemático y científico inventando y/o desarrollando un gran abanico de ideas, como la teoría de invariantes, la axiomatización de la geometría y la noción de espacio de Hilbert, uno de los fundamentos del análisis funcional. Hilbert y sus estudiantes proporcionaron partes significativas de la infraestructura matemática necesaria para la mecánica cuántica y la relatividad general. Fue uno de los fundadores de la teoría de la demostración, la lógica matemática y la distinción entre matemática y metamatemática. Adoptó y defendió vivamente la teoría de conjuntos y los números transfinitos de Cantor. Un ejemplo famoso de su liderazgo mundial en la matemática es su presentación en 1900 de un conjunto de problemas abiertos que incidió en el curso de gran parte de la investigación matemática del siglo XX.» (Wikipedia)

1.1 Repaso nociones básicas sobre conjuntos

La siguiente introducción está lejos de ser exhaustiva, solo recordaremos conceptos ya sabidos. Nos dentendremos algo más en aquellos puntos que puedan ser nuevos.

Definición 1

Dados dos conjuntos A y B denotaremos su unión, intersección y diferencia *por: $A \cup B$, $A \cap B$ y $A - B$ repectivamente. Estos nuevos conjuntos se definen por:*

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\},$$

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$$

y

$$A - B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\},$$

respectivamente.

Por lo general, tendremos que los conjuntos con los que trabajaremos estarán contenidos en un conjunto que llamaremos el universo $\mathcal{U}$. Aceptado la existencia de este universo, frecuentemente usaremos la siguiente notación para el complemento

$$A^c = \mathcal{U} - A.$$

Además consideraremos la operación de diferencia simétrica, *definiéndose por:*

$$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A).$$

Definición 2

Dados dos elementos arbitrarios a y b se define el par ordenado *(a, b), por la siguiente igualdad*

$$(a, b) = \{a, \{a, b\}\}.$$

La propiedad más relevante de pares ordenados es que si $(a, b) = (c, d)$ entonces $a = c$ y $b = d$. Eso se infiere de la demostración y queda como ejercicio. Ahora consideramos el conjunto formado por todos los pares ordenados de elementos pertenecientes a conjuntos dados.

Definición 3

Sean A y B conjuntos. El producto cartesiano *de A con B, denotado por $A \times B$, es el siguiente conjunto:*

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}.$$

La siguiente definición es bien conocida.

Definición 4

Una función *f de A en B (abreviaremos esta frase porel siguiente símbolo: $f : A \longrightarrow B$), es un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$ con la propiedad que: para todo $a \in A$ existe un único $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$.*

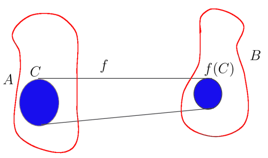
Suponemos que ya todos conocemos estos conceptos, asi como los conceptos relacionados de: imagen, la notación $f(a)$, función inyectiva, suryectiva y biyectiva. Admitimos todo esto por sabido. Ahora introducimos una nueva notación.

Definición 5

Por B^A denotamos al conjunto de todas las funciones $f : A \longrightarrow B$.

Mas adelante daremos algunas explicaciones del porque de esta notación.

Seguidamente damos las definiciones de los conjuntos imagen y preimagen de un conjunto dado por una función.



Conjunto $f(C)$

Definición 6

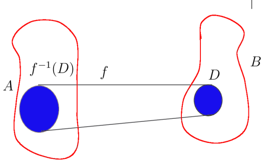
Dada una función $f : A \longrightarrow B$ y subconjuntos $C \subset A$ y $D \subset B$ definimos:

$$f(C) = \{f(a) : a \in C\}$$

y

$$f^{-1}(D) = \{a \in A : f(a) \in C\}.$$

Muy a menudo utilizaremos las propiedades que a continuación se enuncian. Las demostraciones, de las mismas, quedaran a cargo del alumno; ver Ejercicio 1.9 en la página 23.



Conjunto $f^{-1}(D)$

Proposición 1

Sea $f : A \longrightarrow B$ una función. Entonces

1. $f(C_1 \cup C_2) = f(C_1) \cup f(C_2)$.
2. $f^{-1}(D_1 \cup D_2) = f^{-1}(D_1) \cup f^{-1}(D_2)$.
3. $f(C_1 \cap C_2) \subset f(C_1) \cap f(C_2)$.
4. $f^{-1}(D_1 \cap D_2) = f^{-1}(D_1) \cap f^{-1}(D_2)$.

También vamos a considerar el conjunto de partes *de un conjunto dado, esto es el conjunto de todos sus subconjuntos. Explícitamente:*

$$\mathcal{P}(A) = \{C : C \subset A\}.$$

Se pueden efectuar uniones e intersecciones de una cantidad arbitraria de conjuntos. Para poder enunciarlas debemos definir antes lo que entendemos por una familia subindicada de conjuntos *(o brevemente* familia de conjuntos*).*

Definición 7

Supongamos dado un conjunto I, al que nos referiremos como conjunto de índices, y una función $i : I \longrightarrow \mathcal{P}(A)$. Así tenemos que, para cada $i \in I$, existe un único subconjunto de A, que llamaremos A_i. Diremos entonces que $\{A_i\}_{i\in I}$ es una familia subindicada de conjuntos por el conjunto de índices I.

Ahora podemos definir la unión y la intersección de una familia de esta índole de la siguiente manera

Definición 8

Definimos la unión e intersección de una familia $\{A_i\}_{i\in I}$ por:

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{a : \exists i \in I : a \in A_i\}$$

y

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{a : \forall i \in I : a \in A_i\}$$

respectivamente.

En el Ejercicio 1.9 en la página 22 podemos encontrar una serie de propiedades de uniones e intersecciones de familias de conjuntos. Estas propiedades las usaremos con frecuencia. Por último, en esta revisión de conjuntos, expondremos el axioma de elección. Este es un axioma de la teoría de conjuntos. Hay que aclarar que es posible axiomatizar la teoría de conjuntos, de esta axiomatización el mencionado axioma puede formar parte. Decimos "puede" por que este axioma ha despertado multitud de controversias en torno a su inserción o no en el restante conjunto de axiomas. No vamos a discutir aquí esta controversia ni tampoco la teoría axiomática de conjuntos pues esto nos desviaría de nuetros objetivos. Solo enunciaremos el axioma de elección*, que usaremos frecuentemente.*

Axioma 1

Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de conjuntos no vacios. Entonces existe una función

$$f : I \longrightarrow \bigcup_{i\in I} A_i.$$

con la propiedad que:

$$\forall i \in I : f(i) \in A_i.$$

1.2 Definición de conjuntos coordinables

En esta sección definimos el concepto clave de esta unidad, a saber el concepto de que dos conjuntos sean coordinables. *Este concepto fue introducido y explotado por George Cantor. Damos una breve discución para motivar nuestra definición.*

Cuando alguién cuenta algún conjunto de cosas, establece una correspondencia entre los objetos que cuenta y un subconjunto de números naturales. En el proceso de conteo, algún objeto fue el primero en contarse, y se habrá dicho: "uno" para ese objeto. El proceso continua asignando, sucesivamente, el número dos, tres, etc, a los restantes objetos a contar, hasta que no queden más por contarse. Así, si en este proceso llegamos hasta el 20, por ejemplo, decimos que hay 20 objetos. Aunque no haya que percatarse de eso a los fines prácticos, lo que también hicimos fue establecer una correspondencia o función entre los objetos y el conjunto $\{1, \dots, 20\}$. Más aún, esta correspondencia fue biyectiva pues a cada número le correspondió solo uno de los objetos, es decir la función es inyectiva, y a cada objeto le correspondió algún número, es decir la función es suryectiva. En otras palabras contar un conjunto significa determinar el intervalo inicial *del conjunto de los números naturales para el cual exista una correspondencia biyectiva con el conjunto que queremos contar. Conocer esto obviamente es inútil a los efectos de contar cosas de la "vida cotidiana"; no obstante, es una observación fundamental a los efectos de extender lo que llamamos "contar" a conjuntos infinitos. Lo que antecede sugiere la siguiente definición.*

Definición 9

Dados dos conjuntos: A y B, se dirá que ellos son coordinables, escribiremos $A \sim B$, si existe una función biyectiva $f : A \longrightarrow B$.

Esta es nuestra definición de que dos conjuntos, finitos o no, tengan la misma cantidad de elementos. Como veremos, no todos los conjuntos infinitos son coordinables entre si. Es bueno notar que no es difícil demostrar que $\sim$ es una relación de equivalencia (ver Ejercicio 1.9 en la página 23). Ahora veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 1.0. *Consideremos la función $f : \mathbb{N} \longrightarrow \{x \in \mathbb{N} : x \text{ es par}\}$, definida por $f(x) = 2x$. Facilmente se ve que f es una biyección entre los conjuntos indicados. De ahí que: $\mathbb{N} \sim \{x \in \mathbb{N} : x \text{ es par}\}$.*

En este ejemplo observamos que, desde nuestro punto de vista, el conjunto de los naturales tiene la misma cantidad de elementos que el conjunto de los naturales pares. Es decir, según nuestra concepción de cantidad de elementos, el todo no es mayor que una de sus partes. Este ejemplo ya lo había mencionado Galileo Galilei.

Ejemplo 1.1. *Veamos que $\mathbb{R} \sim (0, 1)$. En este caso se puede considerar la función*

$$f(x) := \tan\left(\frac{2\pi x - \pi}{2}\right).$$

Dejamos como ejercicio corroborar que la función dada establece una biyección entre los conjuntos involucrados.

George Cantor
(1845-1918)

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (San Petersburgo, 3 de marzo de 1845-Halle, 6 de enero de 1918) fue un matemático y lógico nacido en Rusia. Fue inventor con Dedekind y Frege de la teoría de conjuntos, que es la base de las matemáticas modernas. Gracias a sus atrevidas investigaciones sobre los conjuntos infinitos fue el primero capaz de formalizar la noción de infinito bajo la forma de los números transfinitos (cardinales y ordinales). (Wikipedia)

Intervalo inicial: *un conjunto de la forma: $\{j \in \mathbb{N} : 1 \le j \le n\}$, para cierto $n \in \mathbb{N}$. De ahora en más, llamaremos a este conjunto: $\mathbb{N}_n$*

Los dos ejemplos anteriores muestran una característica importante de los conjuntos infinitos; un subconjunto de ellos puede ser coordinable con el conjunto total. Mientras que, los conjuntos finitos carecen de esta característica. Ver Ejercicio 1.9 en la página 24

1.3 Conjuntos numerables

Hasta el momento hemos hablado de conjuntos finitos e infinitos. Apelamos a la idea que todos nos forjamos en nuestras vidas sobre el significado de estos términos . Pero en este momento estamos en condiciones, a partir de la noción de coordinalidad, de definir de forma matemáticamente precisa los anteriores significados.

Definición 10

Diremos que un conjunto A es:

1. **finito** si existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $A \sim \mathbb{N}_n$.
2. **infinito** si no es finito.
3. **numerable** si $A \sim \mathbb{N}$.
4. **a lo sumo numerable** si es finito o numerable.

En virtud de que $\sim$ es una realción de equivalencia, y especialmente por el carácter transitivo de esta, si $A \sim B$ y B tiene alguna de las cuatro propiedades de la definición anterior entonces A tendrá esa misma propiedad.

Recordemos que, por definición, una sucesión $\{a_i\}$ de elementos de un conjunto A es una función $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$, donde $a_i = f(i)$. Vemos así que el concepto de numerabilidad está relacionado con el de sucesión. En efecto, si el conjunto A es numerable entonces sus elementos se pueden disponer en una sucesión, donde ningún término se repita.

Es oportuno que observemos que un conjunto no puede ser numerable y finito a la vez; dicho de otra forma, los conjuntos numerables son infinitos. Esto, como hemos definido los conceptos numerable y finito de manera precisa, tiene que ser demostrado.

Teorema 1

Un conjunto numerable es infinito.

Dem. Supongamos que, por lo contrario, existe un conjunto A numerable y, a la vez, finito. Así tendríamos que: $A \sim \mathbb{N}$ y $A \sim \mathbb{N}_n$, para algún $n \in \mathbb{N}$. Como $\sim$ es una relación de equivalencia , deducimos que $\mathbb{N} \sim \mathbb{N}_n$. Sea, pues, f una biyección: $f : \mathbb{N}_n \longrightarrow \mathbb{N}$. Ahora consideremos el natural[1]: $k := f(1) + \cdots + f(n) + 1$. Como f es una biyección, existe algún m, con $1 \leq m \leq n$ tal que $f(m) = k$. Es decir

$$f(m) = f(1) + \cdots + f(n) + 1.$$

Seguramente, en el miembro derecho, uno de los términos es $f(m)$. Este se puede cancelar con el miembro de la izquierda, quedando

$$0 = f(1) + \cdots + f(m-1) + f(m+1) + \cdots + f(n) + 1.$$

Esta igualdad es absurda pues el miembro de la derecha es mayor que 1. □

Vamos a ver algunos otros conjuntos que también son numerables. Empezamos por el siguiente.

[1] El símbolo $:=$ se lee igual por definición. Esto es, el miembro de la izquierda es definido por el de la derecha

Proposición 2

Un subconjunto de un conjunto a lo sumo numerable es a lo sumo numerable.

Dem. *Sea $A \subset B$, con B a lo sumo numerable. Se puede suponer que $B \subset \mathbb{N}$. ¿Por qué? Y, también podemos suponer que A es infinito, puesto que si fuera finito no habría nada que probar. Definimos una función $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$ por induccion. Puesto que los números naturales son bien ordenados, tenemos que A tiene un primer elemento, digamos, a_1. Definamos*

$$f(1) = a_1.$$

Ahora definimos $f(j)$ por:

$$f(j) = \text{el primer elemento del conjunto: } A - \{f(i) : 1 \leq i \leq j-1\}. \tag{1.1}$$

Esta definición es posible pues $A - \{f(i) : 1 \leq i \leq j-1\} \neq \emptyset$, de lo contrario A sería finito. Queda así definida la función f. Resta ver que es biyectiva.

Veamos, en primer lugar, que es inyectiva. Sea $i > j$. En virtud de (1.1), tenemos que $f(i) \notin \{f(k) : 1 \leq k \leq i-1\}$ de lo cual, y como $j < i$, deducimos que $f(i) \neq f(j)$.

Ahora veamos la suryectividad. Supongamos que existe un elemento $n \in A$ tal que $n \notin f(\mathbb{N})$. Recordemos la Definición (1.1). Ella nos dice, en virtud de que $n \notin f(\mathbb{N})$, que $f(i) < n$, para todo i. Esto es debido a que $f(i)$ es el mínimo del conjunto $A - \{f(k) : 1 \leq k \leq i-1\}$ y a que n pertenece a ese conjunto. Tenemos, entonces, que $f(\mathbb{N}) \subset \mathbb{N}_n$. Como consecuencia del Ejercicio 1.9 en la página 23 concluímos que $f(\mathbb{N})$ es finito. Pero como f es inyectiva $\mathbb{N} \sim f(\mathbb{N})$. Lo que es una contradicción pues $\mathbb{N}$ es infinito. □

Proposición 3

El conjuntos $\mathbb{Z}$, de los enteros, es numerable.

Dem. *Construímos una función que establece una biyección entre los enteros positivos y los naturales pares y entre los enteros negativos y los naturales impares. La función es la siguiente:*

$$f(x) = \begin{cases} 2x+2, & \text{si } x \geq 0; \\ -2x-1, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Dejamos como ejercicio demostrar que, efectivamente, la función f es una biyección entre $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$. □

Proposición 4

El conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es numerable.

Dem. *La demostración de este enunciado ya no es tan sencilla. La idea se la debemos a G. Cantor. Primero presentaremos un razonamiento heurístico de la construcción de la biyección entre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ y $\mathbb{N}$. En rigor de verdad, a los efectos lógicos de la demostración, toda esta parte de la demostración se podría obviar; pudiéndose dar la fórmula (1.5) sin dar ninguna justificación de como se nos ocurrió. Elegimos el camino contrario, explicar como obtener la fórmula.*

Dispongamos del conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ en un arreglo del tipo de una "matríz infinita", como sigue:

$$
\begin{tikzcd}
(1,1) \arrow[r] & (1,2) \arrow[dl] & (1,3) \arrow[dl] & (1,4) \arrow[dl] & \cdots \\
(2,1) \arrow[urr] & (2,2) \arrow[dl] & (2,3) \arrow[dl] & \ddots & \\
(3,1) \arrow[uurrr] & (3,2) \arrow[dl] & \ddots & & \\
(4,1) & & & & \\
\vdots & & & &
\end{tikzcd}
$$

Notar que, además de colocar los pares ordenados, hemos colocado algunas flechas. Estas flechas indican un camino. Este es el camino que seguiremos para enumerar los pares ordenados. Así, construiremos una función f que hará las siguientes asignaciones:

$$
\begin{array}{rl}
f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \longrightarrow \mathbb{N} \\
(1,1) & \longmapsto 1 \\
(1,2) & \longmapsto 2 \\
(2,1) & \longmapsto 3 \\
\vdots &
\end{array}
$$

Observar que en nuestro camino vamos siguiendo diagonales de la matriz, de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo. Cuando llegamos al margen izquierdo de la matriz saltamos al borde superior, para luego descender por la siguiente diagonal. Estas diagonales tienen $1, 2, 3, \ldots$ elementos. Agrupemos los números naturales de esa forma, es decir un primer grupo de uno, un segundo de dos y así sucesivamente:

$$\underbrace{1}_{1}\underbrace{2 \quad 3}_{2} \quad \underbrace{4 \quad 5 \quad 6}_{3} \quad \underbrace{7 \quad 8 \quad 9 \quad 10}_{4}\ldots$$

Obsérvese que

$$\frac{j(j+1)}{2} = \textit{número final del agrupamiento } j\textit{-ésimo}. \tag{1.2}$$

Por ejemplo: el grupo cuarto tiene por su último elemento el 10, que es igual a 4.5/2. Tambien tenemos que todos los pares ordenados sobre la misma diagonal, tienen la característica de que sus componentes suman lo mismo. Numeremos las diagonales, de izquierda a derecha, empezando por 1. Así tenemos que la diagonal 1 posee el elemento (1,1), la diagonal dos tiene los elementos $(1,2)$ y $(2,1)$, etc. Por lo observado, tenemos la siguiente fórmula, para cualquier par (j,k)

$$j + k - 1 = \textit{el número de la diagonal a la que pertenece } (j,k). \tag{1.3}$$

El objetivo es poner en correspondencia la diagonal j-ésima con el grupo j-ésimo de naturales. Notar que, en virtud de (1.2), tenemos que

$$\frac{(j+k-1)(j+k)}{2} = \text{es el último número del agrupamiento } j+k-1\text{-ésimo}. \tag{1.4}$$

Así, si al primer miembro de (1.4) le restamos $(j-1)$, obtenemos el número que ocupa el lugar j (contando de atras para adelante) del agrupamiento $j+k-1$ de naturales. Con esto probamos que la función que queriamos construir es:

$$f(j,k) := \frac{(j+k-1)(j+k)}{2} - j + 1. \tag{1.5}$$

El resto de la demostración lo dejamos como ejercicio. Es decir la demostración que (1.5) es biyectiva (ver Ejercicio 1.9 en la página 23). □

Como consecuencia del Ejercicio 1.9 en la página 23 y de la Proposición anterior, podemos afirmar que si A y B son numerables, entonces $A \times B$ es numerable.

La siguiente propiedad también es útil para determinar si un conjunto es numerable.

Proposición 5

Sean A y B conjuntos, con B a lo sumo numerable.

1. Supongamos que existe una función inyectiva $f : A \longrightarrow B$. Entonces A es a lo sumo numerable.
2. Supongamos que existe una aplicación suryectiva $f : B \longrightarrow A$. Entonces A es a lo sumo numerable.

Dem. Veamos primero 1. La función f es una biyección entre A y su imagen $f(A)$. Como B es a lo sumo numerable, y como consecuencia de la Proposición 2 en la página 8, tenemos que $f(A)$ es a lo sumo numerable. Ahora, como $A \sim f(A)$ tenemos que A es a lo sumo numerable.

Ahora probemos 2. Como f es suryectiva, tenemos que $\forall a \in A$: $f^{-1}(\{a\}) \neq \emptyset$. Ahora, por el axioma de elección sabemos que existe al menos una función $g : A \longrightarrow B$ tal que $\forall a \in A$: $g(a) \in f^{-1}(\{a\})$. Si pudiéramos probar que la función g fuera inyectiva, entonces obtendríamos la tesis a partir del inciso 1, que ya fue demostrado. Veamos, pues, que g es inyectiva. Supongamos que $a_1, a_2 \in A$ y que $a_1 \neq a_2$. Afirmamos que $f^{-1}(\{a_1\}) \cap f^{-1}(\{a_2\}) = \emptyset$. En efecto, si $b \in f^{-1}(\{a_1\}) \cap f^{-1}(\{a_2\})$ entonces por un lado $f(b) = a_1$ y por otro $f(b) = a_2$, lo que es una contradicción pues $a_1 \neq a_2$. □

Es interesante hacer notar que, utilizando el teorema anterior, podemos dar otra demostración, más concisa, de la Proposición 4 en la página 8.

En esta demostración hacemos uso del Teorema Fundamental de la Aritmética. Recordemos lo que este teorema nos dice:

Teorema 2 (Fundamental de la Aritmética)

Todo entero positivo n se representa, de manera única, de la forma $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_j^{\alpha_j}$, donde p_1, p_2,...,p_j son números primos y α_1, α_2,...,α_j son enteros positivos.

Dem. alternativa de la Proposición 4 Definimos la siguiente función

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ (n,m) &\longrightarrow 2^n 3^m. \end{aligned}$$

Por el Teorema Fundamental de la Aritmética, y mas precisamente por la unicidad de la representación, tenemos, como 2 y 3 son primos, que si $2^n 3^m = 2^{n'} 3^{m'}$ entonces $n = n'$ y $m = m'$. Por consiguiente la función f es inyectiva. Ahora, invocando la Proposición 5 en la página anterior concluímos que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es a lo sumo numerable. Lo que resta es, solo, ver que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ no es finito. Esto se puede probar observando que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ contiene el subconjunto $A = \{(1, n) : n \in \mathbb{N}\}$ que es coordinable con $\mathbb{N}$, ¿Cuál es la biyección?, y por consiguiente infinito. Así, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ no puede ser finito, si lo fuera, A también lo sería, por ser un subconjunto de él. Lo que concluye la demostración. $\square$

Ahora podemos demostrar uno de los resultados más interesantes de esta teoría.

Teorema 3

El conjunto $\mathbb{Q}$ es numerable.

Dem. *Sabemos que $\mathbb{Z}$ es numerable y dejamos como ejercicio demostrar que $\mathbb{Z} - \{0\}$ es numerable. Consecuentemente también $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} - \{0\}$ es numerable. Podemos definir la siguiente función:*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} - \{0\} &\longrightarrow \mathbb{Q} \\ (n, m) &\longmapsto \frac{n}{m}. \end{aligned}$$

Esta aplicación es suryectiva. Por consiguiente, usando la parte 2. de la Proposición 5 en la página anterior, obtenemos que $\mathbb{Q}$ es a lo sumo numerable. Así $\mathbb{Q}$ es finito o numerable. Pero como $\mathbb{Q}$ es infinito, pues $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$, tenemos que $\mathbb{Q}$ es numerable. $\square$

Traduciendo nuestra interpretación de que dos conjuntos coordinables tienen la misma cantidad de elementos, vemos que hay tantos racionales como naturales. Esta afirmación es un tanto desconcertante. Sabemos que los racionales son densos dentro de los reales. Esto quiere decir que dentro de cada intervalo abierto, por chico que este fuere, siempre hay números racionales dentro. Sin embargo, uno puede poner en correspondencia $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Q}$.

A esta altura pareciera que todos los conjuntos resultan ser numerables, pero ya veremos, en la sección siguiente, que no es así.

Lema 1

Todo conjunto infinito tiene un subconjunto numerable.

Dem. *Sea A un conjunto infinito. Usaremos un argumento similar a la demostración de la Proposición 2 en la página 8. Definimos inductivamente una función $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$ de la siguiente manera. Puesto que A es infinito, en particular, es no vacio, así podemos encontrar un elemento $a_1 \in A$. Ponemos entonces*

$$f(1) = a_1.$$

Ahora, supongamos que tenemos definida la función f, de tal manera que sea inyectiva, para $j = 1, \ldots n$. Llamemos $f(j) = a_j$, para $j = 1, \ldots, n$. Como A es infinito no puede ocurrir que $A - \{f(1), \ldots, f(n)\} = \emptyset$, de lo contrario f además de ser inyectiva, de $\mathbb{N}_n$ en A, sería suryectiva; y de este modo $A \sim \mathbb{N}_n$ lo que implica que A es finito, contrariando nuestra hipótesis. Por consiguiente, podemos encontrar $a_{n+1} \in A - \{f(1), \ldots, f(n)\}$. Definimos $f(n + 1) = a_{n+1}$.

Ahora veamos que f así definida es inyectiva. Sea $i \neq j$, podemos suponer que $i < j$. Sabemos que:

$$f(j) \notin \{f(1), \ldots, f(j - 1)\}.$$

Seguramente $f(i)$ es un elemento del conjunto de la derecha, en la relación anterior, de modo que $f(j) \neq f(i)$, lo que demuestra la inyectividad. Ahora, f es biyectiva de $\mathbb{N}$ en $f(\mathbb{N})$. Por consiguiente $f(\mathbb{N})$ es un subconjunto de A numerable. $\square$

La siguiente proposición es útil para probar que algunos conjuntos son numerables. Antes de enunciarla, haremos una observación útil a la demostración. Afirmamos que si A es un conjunto a lo sumo numerable, entonces existe una función suryectiva de $\mathbb{N}$ en A. En efecto, si A es numerable, esto es claro puesto que existe una biyección de $\mathbb{N}$ en A. Si, por el contrario, A es finito, entonces existe una biyección de $\mathbb{N}_n$, para algún $n \in \mathbb{N}$, en A; en este caso extendemos la biyección a todo $\mathbb{N}$ de cualquier forma[2], la función resultante es suryectiva, aunque ya no inyectiva.

Proposición 6

Sea I un conjunto de índices a lo sumo numerable. Supongamos que para cada $i \in I$ tenemos un conjunto A_i que, también, es a lo sumo numerable. Entonces

$$\bigcup_{i \in I} A_i$$

es a lo sumo numerable. Brevemente: "Una unión a lo sumo numerable de conjuntos a lo sumo numerables es a lo sumo numerable".

Dem. Como vimos, para cada $i \in I$ existe una función suryectiva $f_i : \mathbb{N} \longrightarrow A_i$. Definimos:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} \times I &\longrightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \\ (n, i) &\longmapsto f_i(n). \end{aligned}$$

Esta función es suryectiva, pues si

$$a \in \bigcup_{i \in I} A_i,$$

entonces $a \in A_{i_0}$, para algún i_0; ahora, utilizando la suryectividad de f_{i_0}, obtenemos un $n \in \mathbb{N}$ tal que $f_{i_0}(n) = a$. Es decir $f(n, i_0) = a$. Esto prueba que f es suryectiva. Ahora, como $\mathbb{N} \times I$ es a lo sumo numerable, en rigor es numerable, y por la Proposición 5 en la página 10, obtenemos la tesis. □

1.4 Un conjunto no numerable

Vimos que $\mathbb{N}$ es numerable, por definición, y que $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ son también numerables. Ahora mostraremos un conjunto que no es a lo sumo numerable. No será otro que el conjunto de los numeros reales.

Teorema 4

El conjunto $\mathbb{R}$ no es a lo sumo numerable.

Dem. Supongamos, por el contrario, que $\mathbb{R}$ es a lo sumo numerable. En virtud de la Proposición 2 en la página 8, tendríamos que el intervalo $[0, 1)$ sería también a lo sumo numerable. Como él es infinito entonces $[0, 1)$ sería numerable. Sea, entonces, una función biyectiva $f : \mathbb{N} \longrightarrow [0, 1)$. Definamos $a_j := f(j)$.

Como es sabido, cada número real r admite un desarrollo en expresión decimal infinita del tipo

$$r = 0.r_1r_2r_3 \ldots .$$

[2] Por ejemplo: ponemos $f(j) = 1$ para $j > n$

Un pequeño inconveniente lo presenta el hecho de que esta expresión decimal no es única, puesto que, por ejemplo: $2{,}000\cdots = 1{,}999\ldots$. Para avolir este problema convenimos que en nuestros desarrollos decimales no usaremos expresiones que tienen todos 9 a partir de cierto momento. Con esta convención, el desarrollo decimal es único.

A los fines de clarificar nuestra demostración, es útil poner a la sucesión a_j de la siguiente manera :

$$\begin{aligned} a_1 &= 0.a_{1,1}a_{1,2}a_{1,3}\ldots \\ a_2 &= 0.a_{2,1}a_{2,2}a_{2,3}\ldots \\ &\vdots \\ a_n &= 0.a_{n,1}a_{n,2}a_{n,3}\ldots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Ahora definimos un número $r = 0.r_1r_2\cdots \in [0,1)$, tomando en cuenta los valores de $a_{i,j}$ sobre la digonal principal, que por fuerza no será ninguno de los a_j. La definición es la siguiente:

$$r_n := \begin{cases} 2, & \text{si } a_{n,n} < 2; \\ 1, & \text{si } a_{n,n} \geq 2. \end{cases}$$

Tenemos que $r \neq a_j$ para todo j, pues, estos números seguramente son distintos en el lugar j de su desarrollo. Observar que si a_j tiene un número menor que 2 en ese lugar, entonces $r_j = 2$, en cambio si un número mayor o igual que 2 ocupa el lugar j de a_j, entonces $r_j = 1$. Por ende, como dijimos r no es ningún a_j. Esto demuestra que la función f no es suryectiva. □

Utilizando el Ejemplo 1.2 en la página 6 y el Ejercicio 1.9 en la página 24, vemos que $\mathbb{R} \sim (0,1) \sim [0,1]$. Para cualquier intérvalo no trivial[3] I, ya sea abierto o cerrado, existe una biyección, de hecho una función lineal, de I en el intérvalo $(0,1)$ o $[0,1]$, dependiendo de si I es cerrado o abierto. Vemos así que todos los intérvalos no triviales son coordinables entre si y a su vez con $\mathbb{R}$.

1.5 Una aplicación

En esta sección daremos una aplicación de los conceptos desarrollados en las secciones previas. Veremos como estos se pueden usar para demostrar la existencia de números trascendentes. Antes empezaremos con algunas definiciones.

Un polinomio es una expresión de la forma:

$$P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n,$$

donde $n \in \mathbb{N}$ se llama grado del polinomio y los a_j coeficientes del polinomio. Escribiremos que $P \in \mathbb{Z}[X]$, $P \in \mathbb{Q}[X]$ o $P \in \mathbb{C}[X]$ si los coeficientes son enteros, racionales o complejos respectivamente. Una raíz del polinomio P es un número $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que

$$P(\alpha) = 0.$$

Observar que un número racional $q = n/m$ es solución (o raíz del polinomio) de la siguiente ecuación:

$$P(X) := mX - n = 0.$$

Notar que este polinomio P es de primer grado y además $P \in \mathbb{Z}[X]$. Reciprocamente, si q es solución de una ecuación polinomial $P(X) = 0$, donde P es de primer grado y con coeficientes en $\mathbb{Z}$, entonces q es racional.

Hemos aprendido que hay dos clases de reales, racionales e irracionales. En esta sección expondremos otros tipos de números reales, a saber los trascendentes.

[3] Por un intérvalo trivial entendemos un intérvalo que se reduce a un punto

Tomemos por caso el número $\sqrt{2}$, que como sabemos es irracional. A pesar de ello $\sqrt{2}$ es solución de una ecuación a coeficientes enteros de segundo grado. Nos referimos a siguiente:

$$X^2 - 2 = 0.$$

Vemos que $\sqrt{2}$ tiene, si se nos permite por el momento esta expresión, un grado de irracionalidad no muy grande, puesto que es solución de una ecuación de segundo grado a coeficientes enteros. A estos números se los llama irracionales cuadráticos.

Nos preguntamos ahora si existiran números que acorde con la perspectiva anterior tengan el mayor grado de irracionalidad posible. Esto es que no sean solución de ninguna ecuación polinomial a coeficientes enteros, no importa del grado que fuere. Llamaremos a estos números, cuya existencia es hipotética por el momento, trascendentes. A los restantes números los llamaremos algebraicos. Denotaremos por $\mathbb{A}$ al conjunto de números algebraicos y por $\mathbb{T}$ al conjunto de números trascendentes. Cualquier número que sea obtenido por medio de raices, del grado que fuere, de números enteros son algebraicos. Esto indica que resolver el problema planteado puede no ser fácil.

El problema de la existencia de números trascendentes fue resuelto por Liouville en 1844. El demostró que el número

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}}$$

es trascendente. Posteriormente C. Hermite demostró en 1873 que $e = 2{,}7172\ldots$ es trascendente y Lindemann, en 1882, que π también lo es.

En esta sección mostraremos el argumento usado por G. Cantor, en 1874, para demostrar la existencia de números trascendentes. La situación es la siguiente: Cantor demostró que el conjunto de los números algebraicos es numerable. Luego, si el conjunto de los trascendentes lo fuera, también lo sería el conjunto $\mathbb{R}$ (unión de dos numerables es numerable), lo cual no es cierto. Asi es que no solo los números trascendentes existen, sino que existen tantos como números reales hay. Dicho de otro modo, los números trascendentes son los más comunes entre los números reales. Los racionales, por el contrario, son una excepción, habiendo de ellos solo una cantidad numerable.

Es bueno comentar que hubo matemáticos que se opusieron a G.Cantor y a su Teoría de Conjuntos. Quizas la gota que rebalso el vaso fue la anterior demostración de la existencia de números trascendentes. Pues es una manifestación de que la teoría de Cantor podía ser utilizada para demostrar cuestiones matemáticas profundas que no aparentaban tener nada que ver con la teoría de conjuntos.

La clave de la demostración es el siguiente lema.

Lema 2

El conjunto $\mathbb{Z}[X]$ es numerable.

Dem. Un polinomio en $\mathbb{Z}[X]$ y de grado n se puede identificar con la $n+1$-upla de enteros formada por sus coeficientes. Teniendo en cuenta esto, definimos la siguiente función:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z}[X] &\longrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}^n \\ a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n &\longmapsto (a_0, a_1, \ldots, a_n) \end{aligned},$$

donde

$$\mathbb{Z}^n := \underbrace{\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}}_{n \text{ veces}}.$$

Por lo dicho con anterioridad, esta función es biyectiva.

Ahora bien, el conjunto $\mathbb{Z}^n$ es numerable. Podemos probar esto usando inducción y el hecho de que el producto cartesiano de conjuntos numerables es numerable. Así, como consecuencia de la Proposición 6 en la página 12 obtenemos que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}^n$$

es numerable. Como f es una biyección, $\mathbb{Z}[X]$ es numerable. □

Como corolario obtenemos que el conjunto de números algebraicos es numerable.

Corolario 1

El conjunto de números algebraicos es numerable.

Dem. Se tiene que

$$\mathbb{A} = \bigcup_{P \in \mathbb{Z}[X]} \{\alpha : P(\alpha) = 0\}.$$

Como es sabido de los cursos de álgebra, dado un polinomio P, de grado n, el conjunto $\{\alpha : P(\alpha) = 0\}$ es finito, es mas, tiene a lo sumo n elementos. Ahora, en virtud de esto y la Proposición 6 en la página 12, obtenemos que $\mathbb{A}$ es a lo sumo numerable. Ciertamente, este conjunto es infinito, pues $\mathbb{N}$ está contenido en él, de modo que no tiene mas chance que la de ser numerable. □

Como otro corolario obtenemos que $\mathbb{T} \neq \emptyset$. Pues de lo contrario, como $\mathbb{R} = \mathbb{A} \cup \mathbb{T}$ y como la unión de a lo sumo numerables es a lo sumo numerable, tendríamos que $\mathbb{R}$ sería a lo sumo numerable, que es una contradicción. Pero en realidad podemos demostrar algo más que $\mathbb{T} \neq \emptyset$; podemos probar que $\mathbb{T} \sim \mathbb{R}$. Esto es consecuencia del siguiente teorema, que afirma que al sacarle un conjunto numerable a un conjunto coordinable con $\mathbb{R}$ no alteramos la cantidad de elementos del conjunto.

Lema 3

Sean $A \sim \mathbb{R}$ y $B \sim \mathbb{N}$ tales que $B \subset A$. Entonces $A - B \sim \mathbb{R}$.

Dem. Tenemos que $A - B$ es infinito, de lo contrario, por la Proposición 6 en la página 12, $A = (A - B) \cup B$ sería a lo sumo numerable, contradiciendo nuestras hipótesis. Como $A - B$ es infinito, por el Lema 1 en la página 11, obtenemos un conjunto numerable $C \subset A - B$. Como $B \cup C$ y C son numerables, existe una biyección $f : B \cup C \longrightarrow C$. Ahora definimos la siguiente función:

$$\begin{aligned} \hat{f} : A &\longrightarrow A - B \\ x \notin B \cup C &\longmapsto x \\ x \in B \cup C &\longmapsto f(x) \end{aligned}.$$

No es difícil demostar que $\hat{f}$ es una biyección, de donde $A - B \sim A \sim \mathbb{R}$. □

Corolario 2

$\mathbb{T} \sim \mathbb{R}$.

Dem. Aplicando el lema anterior, con $A = \mathbb{R}$ y $B = \mathbb{A}$, obtenemos la tesis. □

1.6 Comparación de cardinales

En esta sección introduciremos una relación de orden entre conjuntos, esta, intuitivamente, corresponderá a la noción de: "tiene más elementos". Para conjuntos finitos todos estamos muy familiarizados con esta noción. También se suele decir que un conjuto tiene un cardinal mayor que el otro, para expresar esta idea de mayor cantidad de elementos. Informalmente ya hemos usado esta noción al decir que había más números reales que naturales. No obstante, en aquel momento, esa afirmación solo constituyó una interpretación de cierto resultado, otra manera de decirlo que fuera común a nuestra experiencia. En todo caso, no fue ni una definición, ni un teorema, ni nada que fuera plausible de ser demostrado. En esta sección, formalizaremos el concepto de y posteriormente analizaremos algunas consecuencias de este.

Intuitivamente, decíamos que había más reales que naturales por que $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ y por que[4] $\mathbb{N} \nsim \mathbb{R}$. Si queremos comparar dos conjuntos cualesquiera, puede ocurrir que ninguno de ellos sea un subconjunto del otro, o más aún que estos conjuntos sean disjuntos. ¿Cómo procedemos en ese caso?. Veamos un ejemplo. Consideremos el conjunto $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \times \{0\} = \{(n, 0) : n \in \mathbb{N}\}$. ¿Cómo podríamos comparar este conjunto con $\mathbb{R}$?. Tenemos que $\mathbb{N}_0 \cap \mathbb{R} = \emptyset$, sin embargo, dentro de $\mathbb{R}$ tenemos un subconjunto, precisamente $\mathbb{N}$, que es coordinable con $\mathbb{N}_0$ a traves de la biyección definida por $f(n, 0) = n$. Podríamos decir entonces que, como $\mathbb{N}$ tiene menos elementos que $\mathbb{R}$ y $\mathbb{N}_0$ tiene la misma cantidad que $\mathbb{N}$, entonces $\mathbb{N}_0$ tiene menos que $\mathbb{R}$. Notemos que la función f, que es biyectiva de $\mathbb{N}_0$ en $\mathbb{N}$, es una aplicación inyectiva de $\mathbb{N}_0$ en $\mathbb{R}$. Esperemos que la discución de este ejemplo muestre la siguiente definición como natural.

Definición 11

Dados dos conjuntos A y B, diremos que $A \precsim B$ si existe una aplicación inyectiva $f : A \longrightarrow B$. Si, además, $A \nsim B$ diremos entonces que $A \prec B$.

Ejemplo 1.2. Si A es un conjunto infinito, entonces $\mathbb{N} \precsim A$. Esto es consecuencia del Lema 1 en la página 11

Ejemplo 1.3. Si A es un conjunto finito entonces $A \prec \mathbb{N}$. Esto es consecuencia de la definición y del Teorema 1 en la página 7.

Ejemplo 1.4. Tenemos las siguientes relaciones

$$\mathbb{N} \sim \mathbb{Z} \sim \mathbb{Q} \sim \mathbb{A} \prec \mathbb{T} \sim \mathbb{R}.$$

Ejemplo 1.5. Si $A \prec B$, $A \sim C$ y $B \sim D$, entonces $C \prec D$. A continuación justificamos esta afirmación. A causa de las hipótesis, existen: una función inyectiva $f : A \longrightarrow B$ y funciones biyectivas: $g : C \longrightarrow A$ y $h : B \longrightarrow D$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \arrow[d, "h"] \\ C \arrow[u, "g"] \arrow[r, "h \circ f \circ g"] & D \end{tikzcd}$$

La función $h \circ f \circ g$ es inyectiva, lo que demuestra que $C \precsim D$. Deberíamos ver que $C \nsim D$. Supongamos que, por el contrario, $C \sim D$. Sea $\phi : C \longrightarrow D$ una biyección entonces tendríamos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h^{-1} \circ \phi \circ g^{-1}"] \arrow[d, "g^{-1}"'] & B \\ C \arrow[r, "\phi"] & D \arrow[u, "h^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

y, puesto que las funciones intervinientes son todas biyecciones, tendríamos que $A \sim B$, contradiciendo, esto, nuestras hipótesis.

[4] Por $\nsim$ entendemos no coordinable

En el siguiente teorema podemos ver que para cualquier conjunto A hay otro conjunto que es mas grande, en el sentido de la Definición 11 en la página anterior. Este conjunto será el conjunto de partes $\mathcal{P}(A)$.

Teorema 5 (Cantor)

Para todo conjunto A, $A \prec \mathcal{P}(A)$.

Dem. *Tenemos que probar que:* $A \precsim \mathcal{P}(A)$ y $A \nsim \mathcal{P}(A)$. La siguiente función:

$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow \mathcal{P}(A) \\ a &\longmapsto \{a\} \end{aligned}$$

es inyectiva, de modo que $A \precsim \mathcal{P}(A)$.

Supongamos que existe una biyección $g : A \longrightarrow \mathcal{P}(A)$. Definimos el subconjunto B de A de la siguiente manera

$$B := \{a \in A : a \notin g(a)\}.$$

Como g es suryectiva, existe un $b \in A$ tal que $g(b) = B$. ¿Será o no cierto que $b \in B$? Si es cierto, por definición de B, tendríamos que $b \notin g(b) = B$, lo que es una contradicción. Si fuera falso, es decir $b \notin B$, nuevamente por la definición de B, deducimos que $b \in g(b) = B$, otra contradicción. De modo que, no importando cual, todos los casos nos conducen a una contradicción que es fruto de suponer que $A \sim \mathcal{P}(A)$. □

Una propiedad importante de $\precsim$ es su atisimetría, esta propiedad no es facil de probar.

Teorema 6 (Schröder-Bernstein)

Si $A \precsim B$ y $B \precsim A$ entonces $A \sim B$.

Idea de la demostración *Como dijimos, la demostración de este teorema no es tan sencilla. En primer lugar, trataremos de explicar la idea que subyace en ella, y posteriormente la expondremos acabadamente.*

Por las hipótesis, existen funciones inyectivas $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow A$. Si alguna de estas funciones fuera suryectiva, entonces el teorema ya estaría probado. De modo que podemos suponer que no son suryectivas. Notar que $g : B \longrightarrow g(B)$ es una función biyectiva. Existe por lo tanto una función inversa, que es biyectiva, $g^{-1} : g(B) \longrightarrow B$. Construiremos una biyección de $\tilde{f} : A \longrightarrow B$, con el auxilio de f y g^{-1}, de la siguiente manera: Buscamos un subconjunto $\tilde{A} \subset A$ de forma tal que la función:

$$\tilde{f}(a) := \begin{cases} f(a), & \text{si } a \in \tilde{A}; \\ g^{-1}(a), & \text{si } a \notin \tilde{A}. \end{cases} \tag{1.6}$$

sea biyectiva. Un primer requerimiento para esta función es que $\tilde{A}^c \subset g(B)$. Esto a causa de que si $a \in \tilde{A}^c$ entonces le aplicaremos g^{-1} a ese a, por consiguiente a debería estar en el dominio de g^{-1}, que es $g(B)$. Dicho de otro modo, se debe cumplir que $g(B)^c \subset \tilde{A}$. Por simplicidad pongamos $A_1 := g(B)^c$ y $B_1 := f(A_1)$. Ver la Figura 1.1 en la página siguiente

Una primera aproximación sería intentar la construcción con $\tilde{A} = g(B)^c$. Seguramente así la función $\tilde{f}$, ver (1.6), está bien definida. La función $\tilde{f}$ será suryectiva, pues g^{-1} es suryectiva de $g(B)$ en B. No obstante, con esa elección de $\tilde{A}$, la función $\tilde{f}$ no es inyectiva pues cada elemento de B_1 es imágen, por esta $\tilde{f}$, de dos elementos, uno en A_1 y otro en $g(B)$. De modo que esta elección de $\tilde{A}$ todavía no nos sirve. Lo que vamos a hacer ahora es agregarle a $\tilde{A}$ el conjunto de todos los

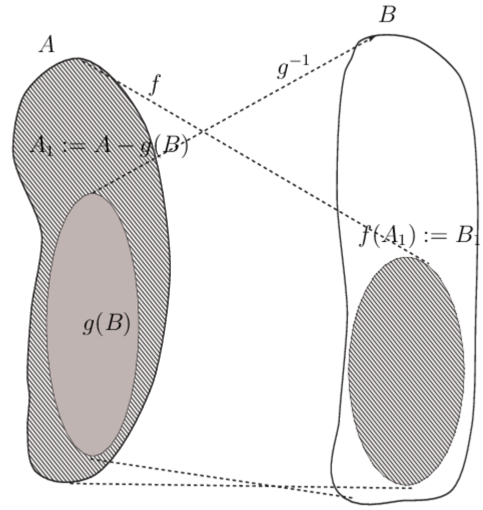


Figura 1.1: Las funciones f y g^{-1}

elementos de $g(B)$ tales que g^{-1} los lleva a B_1. Este conjunto es $A_2 := g(B_1)$. Definamos además $B_2 := f(A_2)$. Ahora $\tilde{f}$ llevará $A_1 \cup A_2$ en $B_1 \cup B_2$. Nos preguntamos, ahora, si la elección $\tilde{A} := A_1 \cup A_2$ nos servirá. Lamentablemente, la respuesta es no[5]. Al haber agrandado $\tilde{A}$ también se nos agrandó el conjunto de puntos en B que son imagen de dos puntos, antes era el B_1, ahora apareció el B_2. De modo que continuamos el proceso, es decir, definimos $A_3 := g(B_2)$, $B_3 := f(A_3)$ y así sucesivamente, ver Figura 1.2 . Nunca llegaremos, en una cantidad finita de pasos, al conjunto $\tilde{A}$ con la propiedad deseada, puesto que al cabo de n pasos se nos genera el conjunto B_n donde las imagenes continuan superponiendosé. ¿Qué haremos entonces?. Lo que se hará es seguir este proceso indefinidamente, generando una sucesión de conjuntos A_n y B_n, y luego definir:

$$\tilde{A} := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n. \tag{1.7}$$

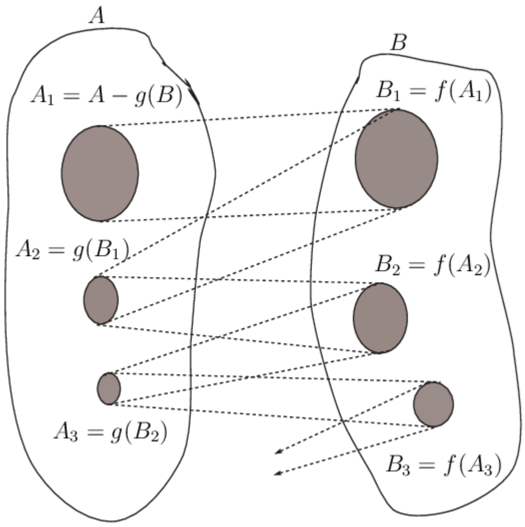


Figura 1.2: Demostración del teorema de Schröder-Berstein

[5]Podría ser que si, si la función f hubiera sido biyectiva desde un principio, cosa que descartamos

Intuitivamente, este conjunto debería funcionar, es decir no hay más superposición de f con g^{-1}. Esto es pues si $a \in \tilde{A}$ entonces $a \in A_n$, para algún n, y $f(a) \in B_n$; eventualmente $f(a)$ podría ser igual a algún $g^{-1}(a')$, pero a' tendría que estar en A_{n+1} y por consiguiente está en $\tilde{A}$. Y así $\tilde{f}(a') = f(a')$, y no $\tilde{f}(a') = g^{-1}(a')$, evitando la superposición de imagenes.

Dem.Teorema 6 *Estamos en condiciones de hacer la demostración propiamente dicha del teorema. Hasta ahora solo tratamos de explicar la demostración. Definimos inductivamente conjuntos A_n y B_n de la siguiente manera:*

$$\begin{cases} A_1 = g(B)^c, & B_1 = f(A_1) \\ A_{n+1} = g(B_n), & B_{n+1} = f(A_{n+1}) \end{cases} .$$

Definamos $\tilde{A}$ como en (1.7) y $\tilde{f}$ como en (1.6). Veamos que $\tilde{f} : A \longrightarrow B$ es biyectiva, empezando por la inyectividad.

Sean $a, a' \in A$ dos puntos cualesquiera tales que $\tilde{f}(a) = \tilde{f}(a')$. Si a y a' están simultaneamente en $\tilde{A}$, o en $\tilde{A}^c$, tenemos que $a = a'$ como consecuencia de que f y g^{-1} son inyectivas. Consideremos entonces el caso $a \in \tilde{A}$ y $a' \notin \tilde{A}$. Debemos llegar a una contradicción pues estamos suponiendo indirectamente que $a \neq a'$, por estar en conjuntos disjuntos, y que $\tilde{f}(a) = \tilde{f}(a')$. Tenemos que, para algún $n \in \mathbb{N}$, $a \in A_n$. Además, por la definición de $\tilde{f}$, $f(a) = g^{-1}(a')$. Por consiguiente $g(f(a)) = a'$. Como $a \in A_n$, $f(a) \in B_n$ y $a' = g(f(a)) \in A_{n+1}$. Esto contradice que $a' \notin \tilde{A}$.

Veamos ahora la suryectividad. Sea $b \in B$ cualquier punto. Si $b \in B_n$, para algún n, como $B_n = f(A_n)$, ciertamente existe un elemento $a \in A_n$ tal que $f(a) = b$. Ahora, por la definición de $\tilde{f}$, $\tilde{f}(a) = f(a) = b$. Supongamos, pues, que b no está en ningún B_n. Como una afirmación intermedia, probaremos que $g(b)$ no está en ningún A_n. Supongamos, por el contrario, que existe un n tal que $g(b) \in A_n$. Tiene que ser $n > 1$, pues $A_1 = g(B)^c$ y $g(b) \in g(B)$. Así, por su definición y como $n > 1$, el conjunto A_n es igual a $g(B_{n-1})$. De modo que $g(b) \in g(B_{n-1})$. Esto implica que existe un $b' \in B_{n-1}$ tal que $g(b) = g(b')$. Pero, como g es inyectiva $b = b'$ y, por ende, $b \in B_{n-1}$. Contradiciendo esto que b no estaba en ningún B_n. Probamos, así, que $g(b)$ no está en ningún A_n. Por lo tanto $\tilde{f}(g(b)) = g^{-1}(g(b)) = b$. Vale decir $b = \tilde{f}(a)$ con $a = g(b)$. Que era lo que queríamos probar. □

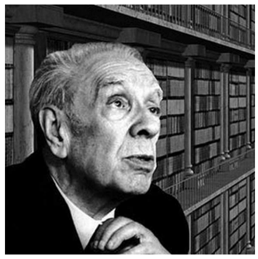
1.7 Números Cardinales

Hasta el momento hemos introducido la noción de cuando dos conjuntos tienen la misma catidad de elementos. Pero no hemos definido el concepto de cantidad de elementos de un conjunto digamos A. A grandes rasgos esto debería ser una característica de todos los conjuntos coordinables con A y se denominará cardinal *del conjunto A y lo denotaremos por $\#A$. George Cantor defininió este concepto. La definición precisa demanda desarrollar la Teoría de números ordinales, que no es la intención de estas notas. Permítasenos pues invocar el concepto de cardinal a partir de la definición matemáticamente no satisfactoria que dimos, pero creemos que es bastante clara al entendimiento.*

Se sabe que los números cardinales están ordenados bajo el orden es el definido en la sección anterior. Concretamente escribiremos $\#A < \#B$ cuando $A \prec B$. Se puede demostrar que este un buen orden, en el sentido que todo conjunto acotado inferiormente tiene primer elemento.

Desde George Cantor es costumbre denotar los números cardinales con letras del alfabeto hebreo. Así el primer cardinal transfinito[6] *es el que le corresponde a los números naturales y se denota por $\aleph_0$. Como el conjunto de cardinales es bien ordenado existe un sucesor de $\aleph_0$ al que denominamos naturalmente $\aleph_1$. Al cardinal que corresponde a los números reales lo denominamos c. Sabemos que $\aleph_0 < \aleph_1 \leq c$ y George Cantor conjeturó que $c = \aleph_1$. Esta fue una de las más famosas conjeturas de la matemática y se denominó La Hipótesis del Continuo. George Cantor fracasó en hallar una demostración de la hipótesis del continuo. El gran marem ático Kurt Gödel probó en 1938 que esta hipótesis es consistente con el sistema axiomático de la Teoría de conjuntos de Zermelo y Fraenkel, y por tanto*

[6] *Como es usual adoptaremos la denominación de transfinito en lugar de infinito como usamos hasta aquí*



«Borges y la matemática es un libro de ensayo de 2006 de Guillermo Martínez que relata como varias ideas en la matemática moderna se hallan en la obra literaria del autor argentino Jorge Luis Borges, incluyendo conceptos como la teoría de conjuntos, recursión, la teoría de caos, y sucesión matemática infinita,1 aunque los enlaces más fuertes que Borges tuvo con la matemática son a través de la teoría de conjuntos infinitos de Georg Cantor. El título del cuento El Aleph se alude al uso de la letra hebrea de Cantor, álef (ℵ) por denotar cardinalidad de conjuntos transfinitos» (Wikipedia)

puede ser tomado como un axioma nuevo para la teoría de conjuntos. Sin embargo, en 1963 Paul Cohen probó que la negación de la hipótesis del continuo también es consistente con los axiomas ZF, lo cual prueba que dicha hipótesis es totalmente independiente de los axiomas ZF. Esta situación es similar a la de las geometrías no euclídeas.

No contento con introducir los números cardinales transfinitos George Cantor introdujo una aritmética entre ellos. Así por ejemplo si $\aleph_a$ y $\aleph_b$ son dos cardinales, buscamos dos conjuntos disjuntos cualesquiera A y B tales que $\#A = \aleph_a$ y $\#B = \aleph_b$ y definimos

$$\begin{aligned} \aleph_a + \aleph_b &= \#A \cup B \\ \aleph_a \times \aleph_b &= \#A \times B \\ \aleph_a^{\aleph_b} &= \#A^B \\ 2^{\aleph_a} &= \#2^A \end{aligned}$$

Algunas relaciones que hemos demostrado

$$\begin{array}{lll} \forall \aleph : 2^{\aleph} & < \aleph & \text{(Por Teorema 5)} \\ \aleph_0 \times \aleph_0 & = \aleph_0 & \text{(Por Proposición 4)} \\ \aleph_0 + \aleph_0 & = \aleph_0 & \text{(Por Proposición 6)} \end{array}$$

1.8 Aplicaciones del Teorema de Schröder-Berstein

El teorema de Schröder-Berstein es una herramienta potente para probar coordinabilidad de conjuntos puesto que nos permite establecer coordinabilidad mostrando sólo que existen funciones inyectivas entre los conjuntos.

Habíamos visto que $\mathbb{R} \nsim \mathbb{N}$. ¿ Qué ocurre con $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$,...? ¿Serán estos conjuntos más "numerosos" que $\mathbb{R}$? Esto es: ¿Serán no coordinables con $\mathbb{R}$?. Recordando que $\#\mathbb{R} = c$ nos preguntamos si $c < c^2$. La respuesta a esta pregunta es negativa, es decir $\mathbb{R}^n \sim \mathbb{R}$ esto es$c^n = c$. Para ver esto basta demostrar que $(0,1)^2 \sim (0,1)$. El caso general es consecuencia del caso $n = 2$, usando inducción, el Ejemplo 1.2 en la página 6 y el Ejercicio 1.9 en la página 23.

Teorema 7

$(0,1)^2 \sim (0,1)$. En otras palabras $c^2 = c$.

Dem. Observar que $(0,1) \precsim (0,1)^2$. Para demostrarlo considerar la función inyectiva $f(x) = (x, 1/2)$.

Veamos que $(0,1)^2 \precsim (0,1)$. Debemos construir una función inyectiva $f : (0,1)^2 \longrightarrow (0,1)$. Sea $(x,y) \in (0,1)^2$. Consideremos las expresiones decimales $x = 0.x_1x_2\ldots$ e $y = 0.y_1y_2\ldots$, donde x_i e y_i son enteros entre 0 y 9, y no son todos 9 a partir de un momento en adelante. Entonces escribimos:

$$f(x,y) := 0.x_1y_1x_2y_2\ldots.$$

Es decir f intercala las expresiones decimales de x e y. Esta función es inyectiva, puesto que dos expresiones decimales iguales tienen todos sus dígitos correspondientes iguales. Esto concluye la demostración. □

Es bueno notar que la función f, definida en la demostración anterior, no es suryectiva. Un número que no es imagen de ningún par es $0{,}909090\ldots$ ¿Por qué será esto?

Por el Teorema 5 en la página 17 tenemos que $\mathbb{N} \prec \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Desmostramos, además, que $\mathbb{N} \prec \mathbb{R}$. Nos preguntamos, ahora, que relación unirá $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ con $\mathbb{R}$. Con el siguiente teorema probaremos que aquellos conjuntos son coordinables.

«Kurt Gödel; Brünn, Imperio austrohúngaro, actual República Checa, 28 de abril de 1906-Princeton, Estados Unidos; 14 de enero de 1978) fue un lógico, matemático y filósofo austríaco.
Se le considera uno de los lógicos más importantes de todos los tiempos. Su trabajo ha tenido un impacto inmenso en el pensamiento científico y filosófico del siglo XX. Gödel intentó emplear la lógica y la teoría de conjuntos para comprender los fundamentos de la matemática.
Se le conoce sobre todo por sus dos teoremas de la incompletitud, publicados en 1931. El más célebre establece que para todo sistema axiomático recursivo auto-consistente lo suficientemente poderoso como para describir la aritmética de los números naturales (la aritmética de Peano), existen proposiciones verdaderas sobre los naturales que no pueden demostrarse a partir de los axiomas. Para demostrar este teorema, desarrolló una técnica denominada ahora numeración de Gödel, que codifica expresiones formales como números naturales.
También demostró que la hipótesis del continuo no puede refutarse desde los axiomas aceptados de la teoría de conjuntos, si dichos axiomas son consistentes.» (Wikipedia)

Teorema 8

$\mathcal{P}(\mathbb{N}) \sim \mathbb{R}$. En otras palabras $2^{\aleph_0} = c$.

Dem. *Probaremos que $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \precsim \mathbb{R}$ y después que $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \succsim \mathbb{R}$.*

Como $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \sim \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ (Ejercicio 1.9 en la página 24), y por el Ejercicio 1.9 en la página 23 inciso 4, probaremos que $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \precsim \mathbb{R}$ si podemos probar que $\mathbf{2}^{\mathbb{N}} \precsim \mathbb{R}$. Para este fin, consideremos la siguiente función:

$$\begin{aligned} T : \mathbf{2}^{\mathbb{N}} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto 0.f(1)f(2)f(3)... \end{aligned}.$$

Esto es la función f se aplica en un número cuya expansión decimal tiene solo ceros y unos. Esta función es inyectiva, pues si

$$0.f(1)f(2)f(3)... = 0.g(1)g(2)g(3)...$$

Entonces, por la unicidad de la expansión decimal[7], tenemos que $f(1) = g(1)$, $f(2) = g(2)$,.... Por consiguiente las funciones son iguales. Lo que prueba la inyectividad. De este modo demostramos que $\mathbf{2}^{\mathbb{N}} \precsim \mathbb{R}$ y esto, por lo que explicamos anteriormente, implica que $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \precsim \mathbb{R}$

Ahora debemos ver que $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \succsim \mathbb{R}$. Utilizando los incisos 1. y 4. del Ejercicios 1.9 en la página 23, vemos que es suficiente probar que $\mathbb{R} \precsim \mathcal{P}(\mathbb{Q})$. Para hacer esto definimos la siguiente aplicación:

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{Q}) \\ r &\longmapsto \{q \in \mathbb{Q} : q < r\} \end{aligned}.$$

Veamos que la aplicación es inyectiva. Sean $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ números reales distintos, supongamos $r_1 < r_2$. Por la densidad de $\mathbb{Q}$, existe un $q_0 \in \mathbb{Q}$ tal que $q_0 \in (r_1, r_2)$. Así $q_0 \in \{q \in \mathbb{Q} : q < r_2\}$ y $q_0 \notin \{q \in \mathbb{Q} : q < r_1\}$. De modo que

$$\{q \in \mathbb{Q} : q < r_1\} \neq \{q \in \mathbb{Q} : q < r_2\}.$$

Es decir T es inyectiva. □

Para finalizar demostraremos que $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \sim \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$. Mas que el resultado en sí, vamos a resaltar su demostración, pues contiene una idea interesante.

Proposición 7

$\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \sim \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$. En lenguaje de cardinales $\aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$.

Dem. *Dado un conjunto X cualquiera, podemos interpretar una función $f \in X^{\mathbb{N}}$ como una sucesión de elementos de X, a la que podemos disponer de la siguiente manera:*

$$f = (f(1), f(2), f(3), ...). \tag{1.8}$$

Si $X = \mathbb{N}$ entonces la sucesión será de números naturales y si $X = \mathbf{2}$ entonces la sucesión será de ceros y unos.

Interpretemos el segundo miembro de (1.8) como una palabra infinita. Si $X = \mathbb{N}$, esta palabras se compone de "letras" que pueden ser cualquier número natural. Si $X = \mathbf{2}$, esta "palabra" se escribe con solo dos "letras" el 0 y el 1. La pregunta es: ¿Cómo podemos "traducir" una palabra escrita con un alfabeto de infitas letras, a uno con solo dos?. La solución a esto es ingeniosa. Sea $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, usaremos el signo 1 para denotar las comas en la sucesión f y pondrémos tantos ceros como indiquen las cantidades $f(j)$.

[7] Recordemos que puede haber expresiones decimales distintas que representan el mismo número, estas son las expresiones que tienen todos nueves a partir de un momento en adelante, como por ejemplo 1=0.999....No obstante este problema no se nos presenta aquí pues la expresiones decimales que consideramos tienen solo 0 y 1

$$\begin{array}{cccc} T & : & \mathbb{N}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbf{2}^{\mathbb{N}} \\ f = (f(1), f(2), f(3), ...) & \longmapsto & (\underbrace{0, ..., 0}_{f(1) \text{ ceros}}, 1, \underbrace{0, ..., 0}_{f(2) \text{ ceros}}, 1, ...) \end{array}$$

Veamos que esta función es inyectiva. Sean $f, g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, con $f \neq g$. Sea

$$j = \text{mín}\{i : f(i) \neq g(i)\}.$$

Tenemos que $f(i) = g(i)$ para $i < j$. Escribamos las dos sucesiones

$$(\underbrace{0, ..., 0}_{f(1) \text{ ceros}}, 1, ..., 1, \underbrace{0, ..., 0}_{f(j-1) \text{ ceros}}, 1, \underbrace{0, ..., 0}_{f(j) \text{ ceros}}, 1, ...)$$

y

$$(\underbrace{0, ..., 0}_{g(1) \text{ ceros}}, 1, ..., 1, \underbrace{0, ..., 0}_{g(j-1) \text{ ceros}}, 1, \underbrace{0, ..., 0}_{g(j) \text{ ceros}}, 1, ...)$$

Notar que los primeros $j - 1$ grupos de ceros son iguales, pues $f(i) = g(i)$ para $i < j$, por consiguiente los primeros $j - 1$ unos estan en la misma posición en las dos sucesiones. Pero $f(j) \neq g(j)$ y, por consiguiente, el grupo j-ésimo de ceros debe diferir en las dos sucesiones. Esto fuerza que si, por ejemplo, $f(j) < g(j)$, entonces la sucesión f tendrá un uno donde la g tiene un cero.

Así $T(f) \neq T(g)$ y la función es inyectiva. Esto prueba que $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \precsim \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$. La otra desigualdad es más fácil de obtener pues

$$\begin{array}{ll} \mathbf{2} \precsim \mathbb{N} & \text{pues unos es finito y el otro no} \\ \mathbf{2}^{\mathbb{N}} \precsim \mathbb{N}^{\mathbb{N}} & \text{por el Ejercicio 1.9} \end{array}$$

□

Existe una demostración más sucinta de que $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \precsim \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$. No la preferimos debido a que no muestra una biyección, es una demostración indirecta. Ahora la exponemos.

$$\begin{array}{ll} \mathbb{N} \precsim \mathbf{2}^{\mathbb{N}} & \text{Teorema de Cantor} \\ \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \precsim (\mathbf{2}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}} & \text{Ejercicio 1.9} \\ \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \precsim \mathbf{2}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} & \text{Ejercicio 1.9} \\ \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \precsim \mathbf{2}^{\mathbb{N}} & \text{Proposición 4} \\ \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \precsim \mathbf{2}^{\mathbb{N}} & \text{Ejercicio 1.9 inciso 3.} \end{array}$$

1.9 Ejercicios

Ejercicio

Sea $f : A \longrightarrow B$ una función cualquiera. Supongamos que $\{A_i\}_{i\in I}$ y $\{B_i\}_{i\in I}$ son familias subindicadas de conjuntos, donde los A_i y B_i son subconjuntos de A y B respectivamente. Demostrar las siguientes propiedades:

1. $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i\in I} A_i^c$.
2. $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i\in I} A_i^c$.

3. $f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$.
4. ¿Qué ocurre con $f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)$?
5. $f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$.
6. $f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$.

Ejercicio

Demostrar las propiedades de la Proposición 1 en la página 5

Ejercicio

Probar que $\sim$ es una relación de equivalencia.

Ejercicio

Supongamos que $A \sim B$ y $C \sim D$.

1. *Demostrar que $\mathcal{P}(A) \sim \mathcal{P}(B)$.*
2. *Demostrar que $A \times C \sim B \times D$.*
3. *Demostrar que $A^C \sim B^D$.*
4. *Si $A \precsim C$ entonces $B \precsim D$.*

Ejercicio

Sean A, B y C conjuntos no vacios. Demostrar que

1. $\left(A^B\right)^C \sim A^{B\times C}$.
2. *Si $A \precsim B$ entonces $A^C \precsim B^C$.*

Ejercicio

Demostrar que un subconjunto de un conjunto finito es finito.

Ejercicio

Demostrar que la función $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ *definida por:*

$$f(j,k) := \frac{(j+k-1)(j+k)}{2} - j + 1,$$

es una biyección.

Ejercicio

Demostrar, exhibiendo una biyección, que $(0,1) \sim [0,1]$

Ejercicio

Demostrar que el conjunto $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ *es coordinable con el conjunto* $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$*, donde* $\mathbf{n} = \{0, 1, ..., n-1\}$*. Recordar que, si* A *y* B *son conjuntos,* $B^A := \{f : f : A \longrightarrow B\}$*. De este modo* $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ *es el conjunto de funciones* $f : \mathbb{N} \longrightarrow \{0,1\}$*.*

Ejercicio

Demostrar que, para cualquier conjunto A*,* $\mathcal{P}(A) \sim \mathbf{2}^A$*.*

Ejercicio

Demostrar que son equivalentes:

1. A *es infinito.*
2. A *es coordinable con un subconjunto propio, es decir: Existe* $B \subset A$*, con* $B \neq A$*, tal que* $A \sim B$*.*

Ejercicio

Demostrar que el conjunto formado por todos los sub-conjuntos de $\mathbb{N}$ *que son finitos, es numerable. ¿Qué ocurrira con el conjunto de todos los subconjuntos infinitos?*

Ejercicio

Sea $\{A_i\}_{i \in I}$ *una familia de intervalos de* $\mathbb{R}$*. Suponer que los conjuntos en la familia son mutuamente disjuntos, es decir:* $A_i \cap A_j = \emptyset$ *si* $i \neq j$*. Demostrar que el conjunto* $\{A_i : i \in I\}$ *es a lo sumo numerable.*

Ejercicio

Recordemos que una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice nodecreciente, si para todos $x, y \in \mathbb{R}$, tales que $x < y$, se tiene que $f(x) \leq f(y)$. Dada una función nodecreciente, demostrar que el conjunto de todos los puntos de discontinuidad es a lo sumo numerable. Ayuda: *Demostrar en primera instancia que los límites laterales:*

$$\lim_{x \to a^+} f(x) \quad \text{y} \quad \lim_{x \to a^-} f(x)$$

existen para todo $a \in \mathbb{R}$. Luego aplicar el ejercicio anterior.

Ejercicio

Demostrar que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{R}$.

Ejercicio

Como aprendimos $\mathbb{N} \sim \mathbb{Q}$, esto significa que existe una aplicación biyectiva $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$, que nos permite enumerar $\mathbb{Q}$ como una suceción $r_j := f(j)$. Definimos la aplicación:

$$\begin{aligned} T : C(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ f &\longmapsto T_f \end{aligned}$$

donde

$$T_f(j) := f(r_j).$$

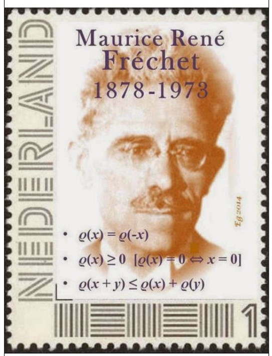
1. *Demostrar que T es inyectiva. Por consiguiente $C(\mathbb{R}) \precsim \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.*
2. *Usando el inciso anterior, demostrar que $C(\mathbb{R}) \sim \mathbb{R}$, donde $C(\mathbb{R})$ es el conjunto de las funciones continuas de $\mathbb{R}$ en si mismo.*

Capítulo 2

Nociones Básicas de Topología

2.1 Enfoque axiomático de las estructuras métricas

Uno de los conceptos fundamentales de la matemática es la noción de distancia. Esta noción está presente en multitud de actividades humanas, desde el comercio a la descripción del cosmos. En matemática medimos distancias en el plano y en el espacio y en las representaciones algebraicas de ellos $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$. Más generalmente en espacios euclideanos n-dimensionales $\mathbb{R}^n$. Desde comienzos del siglo XX los matemáticos fueron extendiendo la noción de distancia a conjuntos compuestos de los más diversos entes, matrices, funciones, funciones que actúan sobre funciones, etc. Esta ubicuidad y multiplicidad del concepto de distancia justifica un tratamiento axiomático de él.



Maurice René Fréchet; (Maligny, 2 de septiembre de 1878 - París, 4 de junio de 1973) fue un matemático francés. Trabajó en topología, teoría de la probabilidad y la estadística. Sus trabajos en análisis funcional lo empujaron a buscar un marco más general que el espacio euclídeo introduciendo la noción de espacio métrico.

Definición 1

Sea X un conjunto y $d : X \times X \to \mathbb{R}$ una función. Diremos que d es una métrica *o* distancia *sobre X si satisface las siguientes propiedades:*

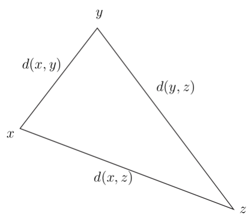
i) $\forall x \forall y : d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

ii) $\forall x \forall y : d(x, y) = d(y, x)$.

iii) $\forall x \forall y \forall z : d(x, z) \leq d(x, y) + d(x, z)$.

Si d es una métrica sobre X diremos, entonces, que el par (X, d) es un espacio métrico.

La desigualdad iii) en la definición anterior se denomina desigualdad triágular, esto debido a que se la puede pensar como la relación entre un lado de un triágulo y la suma de los otros dos, ver figura en el margen.



Desigualdad triangular

Veamos ahora algunos ejemplos de espacios métricos.

Ejemplo 2.0. La función módulo $|.| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ induce una métrica sobre $\mathbb{R}$, a saber: para $x, y \in \mathbb{R}$ definimos

$$d(x, y) = |x - y|. \tag{2.1}$$

Ejemplo 2.1. Sobre $\mathbb{R}^n$ consideremos la función distancia d definida por

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}, \tag{2.2}$$

donde $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ e $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$. Dejamos al alumno la demostración de que d es una métrica, ver Ejercicio 2.6 en la página 35. Esta métrica es conocida como métrica euclidea y es la métrica usual que estamos habituados a considerar.

Ejemplo 2.2. *Dado cualquier conjunto no vacío X, la función definida por:*

$$d(x,y) := \begin{cases} 1, & \text{si } x \neq y; \\ 0, & \text{si } x = y. \end{cases}$$

es una métrica. Esta métrica se denomina métrica discreta.

Ejemplo 2.3. *Dado un conjunto X, definamos $\mathcal{A}(X)$ como el conjunto de todas las funciones acotadas $f : X \to \mathbb{R}$. Entonces $(\mathcal{A}(X), d)$ es una métrica, donde:*

$$d(f,g) := \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|. \tag{2.3}$$

Ejemplo 2.4. *Sea $\mathcal{C}([0,1])$ el conjunto de funciones continuas $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Entonces $(\mathcal{C}([0,1]), d)$ es un espacio métrico, donde:*

$$d(f,g) := \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx. \tag{2.4}$$

2.2 Bolas, esferas y diámetro

Definido lo que es una métrica y un espacio métrico, pasamos a definir algunas entidades de carácter geométrico, esta son el concepto de bola, esfera y diámetro.

Definición 2

Sea (X,d) un espacio métrico, $x \in X$ y $r > 0$.

a) Definimos la bola abierta $B(x,r)$, con centro en x y radio r, por:

$$B(x,r) := \{y \in X : d(x,y) < r\}.$$

b) Definimos la esfera $E(x,r)$, con centro en x y radio r, por:

$$E(x,r) := \{y \in X : d(x,y) = r\}.$$

Todos tenemos una concepción de lo que entendemos por una bola, quizas se nos venga a la mente, y de hecho es un ejemplo, un círculo en $\mathbb{R}^2$. No obstante, debemos proceder con cuidado. Estamos considerando métricas generales, ocurrirá que en algunos espacios métricos las bolas no se parecen a lo que comunmente entendemos por este concepto. Esto es debido a que en nuestra vida cotidiana estamos habituados a considerar la métrica euclidea, pero en este curso trabajaremos con métricas muy generales.

En $\mathbb{R}$, con la métrica dada por el módulo, la bola centrada en $x \in \mathbb{R}$ y radio r, no es mas que el intervalo $(x-r, x+r)$. En la figura **??** *en la página ?? mostramos varios ejemplos de bolas en diferentes métricas sobre $\mathbb{R}^2$, las demostraciones las desarrollaremos en la clase.*

Todavía mas curiosas son las bolas respecto a la métrica discreta. Sea (X,d) un espacio métrico discreto y $x \in X$, entonces:

$$B(x,r) = \begin{cases} \{x\}, & \text{si } r < 1; \\ X, & \text{si } r \geq 1. \end{cases}$$

La esfera la podemos pensar como el borde de la bola, que no está incluida en la bola abierta. También tenemos en este caso situaciones que, en un primer momento, nos pueden parecer extrañas. Como casi siempre, el mayor "grado de extrañamiento" se consigue con la métrica discreta. En este caso, si (X,d) es un espacio métrico discreto, tenemos:

$$E(x,r) = \begin{cases} \{x\}, & \text{si } r = 0; \\ X - \{x\}, & \text{si } r = 1; \\ \emptyset, & \text{si } r \neq 0 \text{ y } r \neq 1. \end{cases}$$

Pasamos a definir, ahora, el concepto de diámetro de un conjunto.

Definición 3

Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$. Definimos el diámetro del conjunto A por:

$$\delta(A) := \sup_{x,y \in A} d(x, y).$$

Eventualmente, podría ocurrir que $\delta(A) = +\infty$.

La figura **??** en la página ?? explica, por si sola, el significado del concepto de diámetro.

Definición 4

Un conjunto no vacío A se dirá acotado si $\delta(A) < \infty$.

Es oportuno aclarar que el concepto de acotación depende del conjunto en si mismo y de la métrica. Así puede ocurrir que un mismo conjunto sea acotado con una métrica y con otra no.

Ejemplo 2.5. En el espacio $\mathbb{R}$, con la métrica del módulo, el conjunto $(0, +\infty)$ es no acotado. En cambio, con la métrica discreta todo conjunto, y en particular el dado, lo es.

También definiremos la distancia de un punto a un conjunto dado.

Definición 5

En un espacio métrico (X, d) se define la distancia de $x \in X$ a $A \subset X$ como

$$d(x, A) := \inf_{y \in A} d(x, y).$$

Demostremos que

$$\delta(B(x, r)) \leq 2r.$$

Efectivamente, dados z e y en la bola $B(x, r)$, tenemos, por la desigualdad triangular

$$d(y, z) \leq d(y, x) + d(x, z) \leq 2r.$$

Tomando supremo sobre z e y obtenemos la afirmación. Notar que ya no es cierto que $\delta(B(x, r)) = 2r$. En efecto, por ejemplo si (X, d) es un espacio métrico discreto, entonces $\delta(B(x, 1/2)) = 0$.

Ahora probaremos que la unión de conjuntos acostados es, a la vez, un conjunto acotado.

Proposición 1

Sean (X, d) un espacio métrico, A y B subconjuntos acotados de X. Entonces $A \cup B$ es acotado.

Dem. Tenemos que probar que:

$$\delta(A \cup B) < \infty.$$

Para esto, es suficiente demostrar que $\forall x, y \in A \cup B$ existe una constante M, independiente de x e y, tal que:

$$d(x, y) \leq M.$$

Sean $z \in A$ y $w \in B$ dos cualesquiera puntos en los conjuntos indicados. A travez de esta demostración estos puntos estaran fijos, no importandonos que puntos sean, cualquiera conduce al mismo argumento. Tomemos, ahora, $x, y \in A \cup B$ cualesquiera, pero ya no estaran fijos. Si ocurriera que x e y estuvieran simultaneamente en uno mismo de los conjuntos, supongamos A, entonces tenemos que:

$$d(x, y) \leq \delta(A),$$

de modo que, en este caso, existe una constante M con la propiedad deseada. Debemos considerar el caso en que x e y esten en "conjuntos diferentes", digamos $x \in A$ e $y \in B$. Entonces tenemos:

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, w) + d(w, y) \leq \delta(A) + d(z, w) + \delta(B).$$

El miembro derecho, de la desigualdad anterior, es independiente de x e y, de modo que quedó demostrada la proposición. □

2.3 Conjuntos abiertos

Uno de los conceptos más importantes, sino el más, de la Topología es el de conjunto abierto.

Definición 6

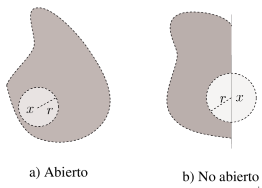
Sea (X, d) un e.m[a]. Diremos que $A \subset X$ es un conjunto abierto si $\forall x \in A \exists r > 0$ tal que:

$$B(x, r) \subset X.$$

[a] Abreviación para espacio métrico

*En la figura **??** en la página ?? podemos ver un ejemplo de conjunto abierto, en $\mathbb{R}^2$ con la métrica euclidea, y otro que no lo es. La diferencia es que en el conjunto b) el borde (en la parte recta del conjunto) forma parte del mismo conjunto, entonces si x está en este borde, toda bola centrada en x contiene puntos fuera del conjunto.*

Un ejemplo, esperable, de conjunto abierto lo constituyen las bolas abiertas.



Conjuntos abiertos y no abiertos.

Proposición 2

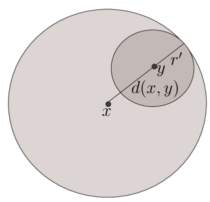
Toda bola abierta es un conjunto abierto.

Dem. *Sea $x \in X$ y $r > 0$. Consideremos la bola abierta $B(x, r)$. Para demostrar que la bola es abierta, hay que encontrar, para todo $y \in B(x, r)$, un $r' > 0$ tal que*

$$B(y, r') \subset B(x, r). \tag{2.5}$$

Sea, pues, $y \in B(x, r)$. Tomemos:

$$r' := r - d(x, y).$$


Construcción de r'.

*Ver la figura **??** en la página ?? para un gráfico de la situación. Este r' es mayor que cero. En efecto, como y está en la bola, tenemos que $d(x, y) < r$.*

Ahora, veamos la inclusión 2.5. Sea $z \in B(y, r')$, entonces tenemos, por la desigualdad triangular, que:

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < d(x, y) + r' < r.$$

Así $z \in B(x, r)$, que es lo que queríamos demostrar. □

Ahora damos dos propiedades de conjuntos abiertos que tendrán mucha trascendencia más adelante.

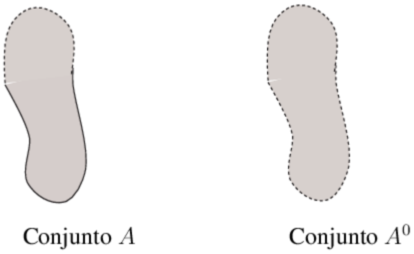


Figura 2.1: Interior de un conjunto

Teorema 1

Sea I un conjunto de índices y $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de conjuntos abiertos. Entonces:

a) La unión $\bigcup_{i\in I} A_i$ es un conjunto abierto.

b) Si I es finito, la intersección $\bigcap_{i\in I} A_i$ es un conjunto abierto.

Dem. *Empecemos por la propiedad a). Sea x un punto en la unión, es decir existe algún índice i_0 tal que $x \in A_{i_0}$. Como este A_{i_0} es un conjunto abierto, deberá existir $r > 0$ tal que $B(x,r) \subset A_{i_0}$. Claramente la bola $B(x,r)$, al ser un subconjunto de A_{i_0} es un subconjunto de la unión de todos los A_i, que es lo que teníamos que probar.*

Ahora veamos b). Podemos suponer que, para algún $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $I = \{1,\ldots,n\}$. Sea x un punto en la intersección. En este caso, $x \in A_i$, para todo i. Como cada A_i es abierto, existen radios r_i tales que $B(x,r_i) \subset A_i$. Definamos:

$$r := \text{mín}\{r_1,\ldots,r_n\}.$$

El mínimo existe, y es mayor que cero, pues hay una cantidad finita de radios. Ahora tenemos que, como $r \le r_i$, $B(x,r) \subset B(x,r_i) \subset A_i$, para todo $i \in I$. Por consiguiente $B(x,r)$ es un subconjunto de la intersección de todos los A_i. □

Es interesante notar que, en un e.m. discreto (X,d), todo subconjunto $A \subset X$ es abierto. Efectivamente, en un e.m. discreto $B(x,1/2) = \{x\}$ para todo $x \in X$. En particular, si $x \in A$ entonces $B(x,1/2) \subset A$.

2.4 Interior de un conjunto y entornos

Como es costumbre, empezamos con una definición.

Definición 7

Sea (X,d) un e.m. y $A \subset X$. Definimos el interior de A, denotaremos este conjunto A^0, como el conjunto de todos los puntos $x \in A$ tales que existe un $r > 0$ que satisface $B(x,r) \subset A$.

Hay una gran similitud de esta definición con la de conjunto abierto. De hecho se tiene que un conjunto A es abierto si y solo si $A = A^0$.

En $\mathbb{R}^2$ con la métrica euclidea podemos visualizar el interior de un conjunto como la parte del conjunto que no está sobre el borde de él, ver figura 2.1.

Tenemos una caracterización alternativa del interior de un conjunto.

Teorema 2

El interior de un conjunto A, es el mayor abierto contenido en A.

Dem. *El hecho de que A^0 es abierto y está contenido en A, es consecuencia inmediata de la definición y lo dejamos como ejercicio. Vamos a demostrar que es el mayor de los abiertos contenido en A. Vale decir, hay que demostrar que si B es un abierto contenido en A, entonces $B \subset A^0$. Sea pues B abierto y $B \subset A$. Tomemos $x \in B$. Como B es abierto existe un $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset B \subset A$. Así, necesariamente $x \in A^0$. Lo que demuestra que $B \subset A^0$.* □

Daremos algunas propiedades de la operación de tomar el interior de un conjunto.

Teorema 3

Sea (X, d) un e.m., A y B subconjuntos de X.

a) $(A^0)^0 = A^0$

b) Si $A \subset B$ entonces $A^0 \subset B^0$.

c) $(A \cap B)^0 = A^0 \cap B^0$.

Dem. *a) Como dijimos, A^0 es abierto, por ende $(A^0)^0 = A^0$.*

b)A^0 es un abierto y además está contenido en B, por consiguiente $A^0 \subset B^0$.

c) Como $A \cap B \subset A$ tenemos que, a acausa de b), $(A \cap B)^0 \subset A^0$. De la misma manera $(A \cap B)^0 \subset B^0$. Por consiguiente $(A \cap B)^0 \subset A^0 \cap B^0$. Para la otra inclusión, tener en cuenta que $A^0 \cap B^0$ es un abierto contenido en $A \cap B$, por lo tanto $A^0 \cap B^0 \subset (A \cap B)^0$. □

Introducimos otro concepto.

Definición 8

En un e.m. el exterior de un conjunto A es el interior de su complemento. En símbolos ponemos Ext$(A) = (A^c)^0$.

Definición 9

Sea (X, d) un e.m. y $x \in X$. Diremos que V es un entorno de x si $x \in V^0$. También denotaremos por $E(x)$ al conjunto de todos los entornos de x.

El anterior es otro de los conceptos claves de la topología. Observemos que un conjunto abierto es entorno de cada uno de sus puntos. La recíproca es también cierta, es decir si un conjunto es entorno de cada uno de sus puntos entonces es abierto.

Proposición 3

La intersección de una cantidad finita de entornos de un punto x en un e.m. (X, d) es, a su vez, un entorno de x.

Dem. *Sean V_i, $i = 1, ..., n$, entornos de $x \in X$. Por definición $x \in V_i^0$ para todo $i = 1, ..., n$. Entonces $x \in V_1^0 \cap \cdots \cap V_n^0 = (V_1 \cap \cdots \cap V_n)^0$. De modo que $V_1 \cap \cdots \cap V_n$ es un entorno de x. Así queda establecida la propiedad que expresa la proposición.* □

2.5 Conjuntos cerrados y clausura de conjuntos

Ahora introduciremos el concepto de conjunto cerrado.

Definición 10

Un conjunto es cerrado si su complemento es abierto.

Esta sencilla definición hace las nociones de conjunto cerrado y abierto duales[1]*, así veremos que cada propiedad de conjuntos abiertos induce una correspondiente propiedad sobre conjuntos cerrados. Tener en cuenta esto en la siguiente teorema.*

Teorema 4

Sea I un conjunto de índices y $\{F_i\}_{i \in I}$ una familia de conjuntos cerrados. Entonces:

a) La intersección $\bigcap_{i \in I} F_i$ es un conjunto cerrado.

b) Si I es finito, la unión $\bigcup_{i \in I} F_i$ es un conjunto cerrado.

Dem. *La afirmaciones a) y b) de este teorema son duales de las a) y b) del Teorema 1 en la página 30. Por ejemplo, para demostrar a), observemos que, por definición, la siguiente es una familia de conjuntos abiertos: $\{F_i^c\}_{i \in I}$. De modo que por a) del Teorema 1 en la página 30 tenemos que:*

$$\bigcup_{i \in I} F_i^c$$

es un conjunto abierto. De allí que el complemento de este conjunto es cerrado. Pero el complemento de este conjunto es, en virtud de las leyes de de Morgan, la intersección de todos los F_i. La propiedad b) se obtiene de la misma manera. □

Ejemplos de conjuntos cerrados son los intervalos cerrados de $\mathbb{R}$, con la métrica del módulo; las bolas cerradas en cualquier e.m., es decir los conjuntos de la forma:

$$B'(x, r) := \{y \in X : d(x, y) \leq r\}.$$

Las esferas también resultan ser conjuntos cerrados. Por otra parte, como en un e.m. discreto todo conjunto es abierto, todo conjunto, también, es cerrado. La demostración de que los anteriores son conjuntos cerrados las dejamos como ejercicios. A lo largo de esta materia veremos varios ejemplos mas de conjuntos cerrados, encomendamos al estudiante prestar atención a ellos, puesto que tan importante como aprender las definiciones y propiedades de determinado concepto, es conocer, y poder construir ejemplos de ese concepto.

El concepto de interior de un conjunto tiene su dual correspondiente.

[1] *Dos tipos de conceptos son duales cuando cualquier afirmación sobre uno de ellos se convierte en una afirmación sobre el otro. En este proceso de "transformación de enunciados" hay que traducir cada concepto por su dual. Por ejemplo, en el caso que nos ocupa, un conjunto cerrado muta en abierto y las intersecciones mutan en uniones y viceverza. Uniones e intersecciones son duales como consecuencia de las leyes de de Morgan*

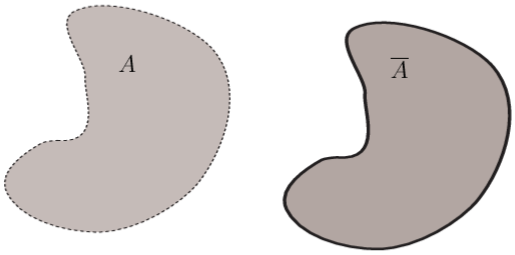


Figura 2.2: Clausura de un conjunto

Definición 11

Sea (X, d) un e.m.. La clausura de un conjunto $A \subset X$ se define y denota como se ve a continuación:

$$\overline{A} := (\text{Ext}(A))^c = \left[(A^c)^0\right]^c.$$

En $\mathbb{R}^2$ con la métrica euclidea podemos visualizar la clausura de un conjunto como el conjunto más su "borde", ver la figura 2.2.

Tenemos la siguiente caracterización alternativa de clausura de un conjunto.

Proposición 4

Sea (X, d) un e.m. y $A \subset X$. Son equivalentes:

a) $x \in \overline{A}$.

b) $\forall r > 0 : B(x, r) \cap A \neq \emptyset$.

Dem.Veamos primero que a)⇒b). Sea $x \in \overline{A}$. Por definición $x \notin (A^c)^0$. Así, por definición de conjunto interior, tenemos que para todo $r > 0$, $B(x, r) \not\subseteq A^c$. Es decir que para todo $r > 0$ existe $y = y_r \in B(x, r) \cap A$. Esto prueba b).

Veamos ahora que b)⇒a). Sea, pues, x un punto satisfaciendo la propiedad b). Toda bola de radio x y centro $r > 0$ corta al conjunto A. De modo que no existe una de tales bolas con la propiedad que este completamente contenida en el conjunto A^c. Esto nos dice, por definicion de conjunto interior, que x no está en el interior de A^c. Dicho de otro modo $x \in \left[(A^c)^0\right]^c$. □

Las propiedades del interior tienen propiedades duales correspondientes para la clausura.

Teorema 5

Sean (X, d) un e.m., A y B subconjuntos de X. Entonces tenemos que:

a) $A \subset \overline{A}$.

b) El conjunto $\overline{A}$ es el menor conjunto cerrado que contiene a A.

c) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

d) Si $A \subset B$ entonces $\overline{A} \subset \overline{B}$.

e) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

f) $x \in \overline{A} \Leftrightarrow d(x, A) = 0$

Dem. *Veamos a) cuya propiedad dual es que $C^0 \subset C$. En efecto, tenemos que:*

$$(A^c)^0 \subset A^c.$$

Ahora, tomando complementos a ambos miembros[2], obtenemos que:

$$\overline{A} = \left[(A^c)^0\right]^c \supset (A^c)^c = A.$$

Esto prueba a).

Veamos b). El conjunto $\overline{A}$ es cerrado pues es el complemento del abierto $(A^c)^0$. Sea F un conjunto cerrado que contiene a A, hay que demostrar que $F \supset \overline{A}$. Entonces, tomando complemento, tenemos que F^c es un abierto contenido en A^c. Como $(A^c)^0$ es el mayor abierto contenido en A^c, tenemos que $F^c \subset (A^c)^0$. Ahora tomemos complemento a esta última inclusión y obtenemos

$$F \supset \left[(A^c)^0\right]^c = \overline{A},$$

que es lo que queríamos demostrar.

Como corolario de b), obtenemos que A es cerrado si, y solo si, $\overline{A} = A$. A su vez, como corolario de esto, obtemos c) y d).

Veamos e). Tenemos que:

$$\begin{aligned}
\overline{A \cup B} &= \left[((A \cup B)^c)^0\right]^c && \text{Definición clausura}\\
&= \left[(A^c \cap B^c)^0\right]^c && \text{Leyes de de Morgan}\\
&= \left[(A^c)^0 \cap (B^c)^0)\right]^c && \text{Propiedad dual del interior}\\
&= \left[(A^c)^0\right]^c \cup \left[(B^c)^0)\right]^c && \text{Leyes de de Morgan}\\
&= \overline{A} \cup \overline{B} && \text{Definición de clausura}
\end{aligned}$$

Que es lo que queríamos demostrar.

*Por último demostremos f). Si $x \in \overline{A}$ entonces, como consecuancia de la proposición 4 en la página anterior, tenemos que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe un $y_n \in A$ tal que $d(x, y_n) < 1/n$, ver figura **??** en la página ??.*

Tenemos asi que

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y) \leq d(x, y_n) \leq \frac{1}{n}.$$

Y como la desigualdad es válida para todo $n \in \mathbb{N}$, obtenemos que $d(x, A) = 0$.

Recíprocamente, si $d(x, A) = 0$ entonces, por definición del ínfimo, para todo $r > 0$ existe un $y = y_r \in A$ tal que $d(x, y) < r$. Así tenemos que $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$, para todo $r > 0$. Esto,

[2] La operación de complemento invierte las inclusiones

como sabemos, es equivalente a afirmar que $x \in \overline{A}$. □

Por último estamos interesados en definir aquellos puntos que estan en lo que hemos denominado, sin ninguna precisión, borde de un conjunto.

Definición 12

Diremos que x pertenece a la frontera *de un conjunto A cuando x está en la clausura de A y en la clausura de A^c. Llamamos al conjunto de todos los puntos frontera de A la* frontera *de A y denotaremnos este conjunto por ∂A.*

La costumbre de denotar la frontera de un conjunto con el signo de una derivada proviene, suponemos, del calculo sobre variedades donde se observa que cierta integral de una "derivada" sobre un conjunto es igual a la integral de la función sobre la frontera del conjunto. Este resultado se conoce como Teorema de Stokes. El Teorema fundamenteal del Cálculo es un caso particular de este teorema. Es en este contexto donde se consigue una conexión entre derivadas y fronteras.

2.6 Ejercicios

Ejercicio

Demostrar que los siguientes son espacios métricos.

a) $(\mathbb{R}, d)$ donde d está definida en 2.1 en la página 26.

b) $(\mathbb{R}^n, d)$ donde d está definida en 2.2 en la página 26. Ayuda: Usar la desigueladad de Cauchy-Schwartz $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2}$$

c) $(\mathbb{R}^n, d)$, donde d es la función definida en **??** en la página ??.

d) $(\mathbb{R}^n, d)$, donde d es la función definida en **??** en la página ??.

e) Probar que la métrica discreta es, valga la redundancia, una métrica.

f) Demostrar que las ecuaciones 2.3 en la página 27 y 2.4 en la página 27 definen métricas.

Ejercicio

Sea (X, d) un espacio métrico. Demostrar que para todos x , y y z en X tenemos que:

$$|d(x, y) - d(x, z)| \leq d(y, z).$$

Ejercicio

Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$. Demostrar que:

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y).$$

Ejercicio

Sea (X, d) un e.m., probar que las siguientes funciones son métricas sobre X:

a) $d_1(x, y) := \min\{1, d(x, y)\}$.

b) $d_2(x, y) := \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$.

Ejercicio

Sea (X, d) un e.m.. Demostrar que $\forall x, y \in X$, existe entornos $U \in E(x)$ y $V \in E(y)$ tales que $U \cap V = \emptyset$.

Ejercicio

Sea (X, d) u e.m.. Demostrar las siguientes propiedades:

a) Si $A \subset X$ es finito, entonces $X - A$ es abierto.

b) Si $A \subset X$ es abierto, entonces para todo conjunto B se tiene que $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$.

c) Si A es abierto entonces $A \subset (\overline{A})^0$.

d) Si A es cerrado entonces $(\overline{A})^0 \subset A$.

e) $(\overline{A})^0 = \overline{\left(\overline{((\overline{A})^0)}\right)}$.

f) $\overline{(A^0)} = \overline{\left(\overline{((A^0))}^0\right)}$.

g) $A^0 = (\overline{A^c})^c$.

h) $\partial A = \overline{A} - A^0$.

i) $\text{Ext}(A) = (\overline{A})^c$.

j) $\partial A^0 \subset \partial A$ y $\partial \overline{A} \subset \partial A$.

k) $\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B$, Si $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$ entonces vale la igualdad en la anterior inclusión.

l) $d(A, B) = d(\overline{A}, \overline{B})$, donde por definición:

$$d(A, B) := \inf_{x \in A, y \in B} d(x, y).$$

Ejercicio

Dar ejemplos de:

a) A y B abiertos de $\mathbb{R}$ tales que los siguientes conjuntos sean todos diferentes: $\overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A \cap B}$, $\overline{A} \cap B$, $A \cap \overline{B}$.

b) A y B intervalos de $\mathbb{R}$ tales que $A \cap \overline{B} \not\subseteq \overline{A \cap B}$.

c) $A \subset \mathbb{R}^2$ tal que $\partial A = A$.

d) A y B subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ tales que entre los siguientes conjuntos no valga ninguna inclusión: $\partial A \cup \partial B - \partial(A \cap B)$ y $\partial(A \cup B)$.

Ejercicio

Demostrar que los siguientes conjuntos de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, son abiertos con la métrica euclidea:

a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : m < d\big((x,y),(0,0)\big) < n\}$, donde $n, m \in \mathbb{N}$ y $m < n$.

b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1,\ 0 < y < 1,\ x \neq \frac{1}{n}\ \forall n \in \mathbb{N}\}$.

c) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x,y,z \in \mathbb{Z}\}^c$.

Ejercicio

Hallar la frontera y el diámetro del conjunto $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$.

Ejercicio

Demostrar que el diámetro de la dola unitaria en $\mathbb{R}^2$ con la métrica euclidea es 2.

Ejercicio

Un e.m. (X,d) se dice ultramétrico si d verifica la desigualdad ultramétrica, es decir:

$$d(x,y) \leq \text{máx}\{d(x,z), d(z,y)\}.$$

Sea X un e.m. ultramétrico. Demostrar que:

a) Si $d(x,y) \neq d(y,z)$ entonces $d(x,z) = \text{máx}\{d(x,y), d(y,z)\}$.

b) Si $y \in B(x,r)$ entonces $B(x,r) = B(y,r)$. Como consecuencia las bolas abiertas son también conjuntos cerrados.

c) Si $y \in \overline{B(x,r)}$ entonces $\overline{B(y,r)} = \overline{B(x,r)}$. Las bolas cerradas son, también, conjuntos abiertos.

d) Si dos bolas tienen intersección no vacía entonces una está contenidad en la otra.

e) La distancia de dos bolas abiertas distintas de radio r, contenidas en una bola cerrada de radio r, es igual a r.

Capítulo 3

Sucesiones, series de funciones y sus amigos

3.1 Sucesiones de funciones

Sea K un espacio métrico, usualmente $K \subset \mathbb{R}^n$ para algún n.

Una colección $f_n : K \to \mathbb{R}$ para $n = 1, 2, 3, \dots$ se llama sucesión de funciones.

Dada una sucesión de funciones f_n, $n = 1, 2, 3, \dots$ y $x \in K$, $f_n(x)$ es una sucesión de números reales y como tal puede o no converger a cierto límite.

La mayor diferencia entre una sucesión de números reales y una sucesión de funciones es el hecho que en una sucesión de funciones los términos de la sucesión cambian cuando la variable x cambia. Por lo tanto el límite también puede cambiar, en caso de existir, y por consiguiente el límite también es una función de x. De manera que es necesario tener presente que cuando una sucesión de funciones es evaluada en un valor de x particular resulta una sucesión de números reales.

Supongamos que para todo $x \in K$ la sucesión de números reales $f_n(x)$ converge, es decir que existe el $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ y lo denotaremos $f(x)$. En este caso diremos que f_n converge puntualmente a f.

Ejemplo 3.0. *La sucesión $f_n(x) = \frac{1}{1+nx^2}$ converge puntualmente*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

Justificación:

Claramente si $x = 0$ tenemos que $f_n(0) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y entonces $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(0) = 1$.

Si $x \neq 0$ entonces $nx^2 \to \infty$ cuando $n \to \infty$ y por lo tanto $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1+nx^2} = 0$.

Como vemos, la determinación de la convergencia puntual suele reducirse al cálculo de un límite. Para este propósito es lícito usar todas las técnicas estudiadas en cursos anteriores como puede ser la Regla de L'Hôpital.

Ejemplo 3.1. *La sucesión $f_n(x) = \frac{n^2x - n^2}{1+n^2x}$ converge a $f(x) = \frac{x-1}{x}$ si $x \neq 0$.*

Si $x = 0$ no converge.

Es necesario ser cuidadoso con la justificación. Por ejemplo, la Regla de L'Hôpital sólo puede usarse en casos de indeterminaciones.

Si $x = 0$ no hay indeterminación pues $f_n(0) = -n^2$ y $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(0) = \lim\limits_{n\to\infty}(-n^2) = -\infty$.

Es lícito decir $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(0) = -\infty$ en lugar de que f_n no converge en $x = 0$.

Cuando $x = 1$ tampoco hay indeterminación pues $f_n(1) = \frac{0}{1+n^2}$ y por tanto $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(1) = 0$.

Si $x \neq 0$ y $x \neq 1$ podemos usar la Regla de L'Hôpital dado que se tiene la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$. En efecto, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2x-n^2}{1+n^2x} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2nx-2n}{2nx} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2x-2}{2x} = \frac{1-x}{x}$ Observemos que si $f(x) = \frac{1-x}{x}$ entonces $f(1) = 0$ y por tanto $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)\ \forall x \neq 0$.

Suele ser útil graficar algunas funciones de la sucesión y la función límite, ya sea empleando los procedimientos aprendidos en materias anteriores o usando sympy.

Para el Ejemplo 1.....COPIAR TEXTO DE SYMPY Y GRÁFICOS!!!!

En los ejemplos anteriores se forma una "montaña" alrededor de un punto fijo ($x = 0$). Pero, puede ocurrir otro comportamiento que observaremos los siguientes ejemplos.

Ejemplo 3.2. *Si* $f_n(x) = \begin{cases} 1 & n \leq x \leq n+1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$ *entonces* $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$.

GRAFICAR CON SYMPY!!!

A partir del gráfico vemos que los términos de la sucesión $f_n(x)$ son "montañas móviles" de altura 1.

Ejemplo 3.3. *Si* $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ *en* $[0, \infty)$ *entonces* $\lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1+n^2x^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{x}\frac{x}{\frac{1}{n}+nx^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{\frac{1}{n}+nx^2} = 0$.

GRAFICAR CON SYMPY!!! En este caso también se observa una montaña móvil.

HACER EL ANÁLISIS CON LA DERIVADA!!!

Ejemplo 3.4. *Si* $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$, $x \in \mathbb{R}$ *luego* $f_n'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}}$. *Entonces* $f_n'(x) > 0$ *en* $(0, +\infty)$ *y* $f_n'(x) < 0$ *en* $(0, +\infty)$, *de donde* $(0, +\infty)$ *es intervalo de crecimiento para cada* $f_n(x)$ *y* $(-\infty, 0)$ *es intervalo de decrecimiento para cada* $f_n(x)$. *Luego cada* $f_n(x)$ *tiene un mínimo en* $x = 0$ *y el valor mínimo es* $f_n(0) = \frac{1}{n}$.

Por otra parte, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} = \sqrt{x^2} = |x|$.

GRAFICO!!!!

En el Análisis Matemático, además de límites tenemos conceptos como continuidad, derivadas, integrales, etc. Es común operar expresiones conjugando varios de ellos y queremos contar con relaciones entre ellos que permitan transformar las expresiones. Por ejemplo, ¿es importante el orden en que se realizan las operaciones? ¿Es lo mismo tomar límite y luego derivar que hacerlo en el orden inverso? Si se tienen dos límites, ¿se pueden permutar?

Ejemplo 3.5. *Si* $f_n(x) = \text{sen}(nx)$ *para* $x \in [0, \pi]$ *entonces* $f_n(0) = f_n(\pi) = 0$ *y la sucesión converge en estos valores.*

Veamos que la sucesión de funciones dada no converge en ningún otro valor.

Supongamos que $x \neq 0$, $x \neq \pi$ *y* $\lim_{n\to\infty} \text{sen}(nx) = \alpha$.

Si se tuviese $\alpha \neq 0$ *entonces*

$$1 = \lim_{n\to\infty} \frac{\text{sen}(2nx)}{\text{sen}(x)} = 2 \lim_{n\to\infty} \cos(nx)$$

de donde $\lim_{n\to\infty} \cos(nx) = \frac{1}{2}$. *Sin embargo,*

$$\lim_{n\to\infty} \cos(2nx) = \lim_{n\to\infty} 2\cos^2(nx) - 1 = -\frac{1}{2}$$

lo que nos lleva a una contradicción.

Por lo tanto, $\lim_{n\to\infty} \text{sen}(nx) = 0$. *Entonces* $\lim_{n\to\infty} |\cos(2nx)| = 1$ *y*

$$0 = \lim_{n\to\infty} |\text{sen}[(n+1)x]| = \lim_{n\to\infty} |\text{sen}(nx)\cos x + \cos(nx)\,\text{sen}\, x| = |\text{sen}\, x|$$

y necesariamente $x = 0$ *ó* $x = \pi$.

Ejemplo 3.6. *En el Ejemplo**??**1 vimos que la sucesión* $f_n(x) = \frac{1}{1+nx^2}$ *converge puntualmente*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

Si calculamos

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to 0} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$$

y a continuación permutamos los límites obtenemos

$$\lim_{x\to 0}\lim_{n\to\infty} f(x) = \lim_{x\to 0} = 0$$

Por lo tanto, la permutación de los límites produce resultados ***distintos****.*

También vemos que la función límite es discontinua a pesar de que cada $f_n(x)$ es continua para cada n.

Ejemplo 3.7. *Con las funciones del Ejemplo**??** 3 tenemos*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} 0\,dx = 0$$

mientras que

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_{n}^{n+1} dx = 1$$

En este caso, la permutación entre la operación de integración y la de límite también produce resultados ***distintos****.*

Ejemplo 3.8. *Cada $f_n(x) = \sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}$ del Ejemplo**??** 4/5 es derivable y las derivadas son $f_n'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}}$. Si computamos*

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & x>0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$$

cuando $x \neq 0$. Entonces la función límite $f(x) = \frac{x}{|x|}$ no es derivable en 0. Luego

$$0 = \lim_{n\to\infty} f_n'(0) \neq \frac{d}{dx}(\lim_{n\to\infty} f_n(x))|_{x=0}$$

pues ni siquiera tiene sentido el miembro de la derecha.

Es así que tenemos ***Problema: Encontrar condiciones que permitan permutar las operaciones anteriores.***

HABRÍA QUE PONER EL PROBLEMA ANTERIOR EN UN CUADRITO. BUSCAR EL COMANDO!!!

Antes de atacar este problema vamos a presentar varios ejemplo famosos *de sucesiones.*

OJO!!!! LO QUE SIGUE EN EL APUNTE NO TIENE EJEMPLOS FAMOSOS, VIENEN LAS SERIES!!!!!

3.2 Series de funciones

Dada una sucesión de funciones $f_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$ podemos formar otra sucesión tomando las sumas acumuladas o sumas parciales

$$\begin{aligned} s_1(x) &= f_1(x) \\ s_2(x) &= f_1(x) + f_2(x) \\ &\vdots \\ s_n(x) &= f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) \end{aligned}$$

Si la nueva sucesión $\{s_n(x)\}$ converge a f se dice que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge a f o que

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x).$$

En pocas ocasiones se puede determinar que una serie converge hallando una expresión simple para $s_n(x)$ y calculando su límite.

Ejemplo 3.9. *Si $f_n(x) = c$ con $c \in \mathbb{R}$ un número independiente de n, entonces*

$$\begin{aligned} s_1(x) &= f_1(x) = c \\ s_2(x) &= f_1(x) + f_2(x) = 2c \\ &\vdots \\ s_n(x) &= f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) = nc. \end{aligned}$$

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = \begin{cases} 0 & si \quad c = 0 \\ \infty & si \quad c \neq 0 \end{cases}$$

y por lo tanto la series converge sólo cuando $c = 0$.

Ejemplo 3.10. *Si $f_n(z) = z^n$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$, luego $s_n(z) = f_0(z) + \cdots + f_n(z) = 1 + z + \cdots + z^n$ y $zs_n(z) = z + z^2 + \cdots + z^n + z^{n+1}$ entonces $zs_n(z) - s_n(z) = z^{n+1} - 1$ y por tanto $s_n(z) = \frac{z^{n+1}-1}{z-1}$. De este modo, logramos expresar $s_n(z)$ en una fórmula relativamente sencilla. Ahora,*

$$\lim_{n\to\infty} s_n(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{z^{n+1}-1}{z-1} = \begin{cases} \frac{1}{1-z} & |z| < 1 \\ \text{no converge} & |z| \geq 1 \end{cases}$$

Es interesante ver qué ocurre en $|z| = 1$.
Si $|z| = 1$ entonces $z = e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$ y

$$\begin{aligned} s_n(z) = \frac{z^{n+1}-1}{z-1} = \frac{z^{n+1}}{z-1} - \frac{1}{z-1} = \\ \frac{z^{n+1}(\overline{z}-1)}{|z-1|^2} - \frac{1}{z-1} = \frac{[\cos(n+1)\theta + i \operatorname{sen}(n+1)\theta](\overline{z}-1)}{|z-1|^2} - \frac{1}{z-1} = \\ \cos(n+1)\theta \frac{\overline{z}-1}{|z-1|^2} + i \operatorname{sen}(n+1)\theta \frac{(\overline{z}-1)}{|z-1|^2} - \frac{1}{z-1} \end{aligned}$$

*son funciones oscilantes como en el Ejemplo **??*** 5 y medio. VER GRÁFICOS!!!

En los ejemplos anteriores pudimos justificar la convergencia calculando explícitamente el límite. Ésto es posible las menos de las veces. En materias anteriores se estudiaron criterios para la convergencia de series numéricas. Estos criterios establecen condiciones, algunas necesarias, otras suficientes y algunas necesarias y suficientes para que la serie converja. Recordaremos algunos de ellos.

QUIZÁS EN ALGÚN RECUADRO!!! Criterio del Resto *Si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.*

Coomo es una condición necesaria sólo sirve para decir cuándo una serie no converge.

Ejemplo 3.11. *Si $f_n(x) = \operatorname{sen}(nx)$ para $x \in [0, \pi]$. Como ya vimos, $\operatorname{sen}(nx)$ no converge excepto para $x = 0$ ó $x = \pi$. Luego, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}(nx)$ no converge.*

Como veremos más adelante, la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ no converge y sin embargo $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Entonces el Criterio del Resto *no sirve para determinar la convergencia de una serie.*

Convergencia Absoluta *Si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge entonces $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.*

Ejemplo 3.12. *$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n z^n$ converge cuando $|z| < 1$.*

Cirterio de Comparación *Si $0 \leq a_n \leq b_n$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ converge entonces $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. Dicho de otro modo, si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge (su suma es $+\infty$) entonces $\sum\limits_{n=1}^{\infty}$ diverge.*

Ejemplo 3.13.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ sen(nx) converge pues $|\frac{1}{2^n}$ sen$(nx)| \leq \frac{1}{2^n}$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sin(nx) converge pues para $n > 1$ tenemos

$$\left|\frac{1}{n^2}\,\text{sin}(nx)\right| \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

y

$$\sum_{n=2}^{m} \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{m} \to 1 \text{ cuando } m \to \infty$$

Luego $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sen(nx) también.

3.3 Series de Fourier

Capítulo 4

Integral de Riemann

4.1 Introducción

> *« Bernard Riemann recibió su doctorado en 1851, su* Habilitación *en 1854. La habilitación confiere el reconocimiento de la capacidad de crear sustanciales contribuciones en la investigación más allá de la tesis doctoral, y es un prerequisito necesario para ocupar un cargo de profesor en una universidad Alemana. Riemann eligió como tema de habilitación el problema de las series de Fourier. Su tesis fue titulada* Über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reine *(Sobre la representación de una función por series trigonométricas) y respondía la pregunta: Cuándo una función definida en el intervalo $(-\pi, \pi)$ puede ser respresentada por la serie trigonométrica $a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)]$? En este trabajo es donde hallamos la Integral de Riemann, introducida en una sección corta antes del nucleo principal de la tesis, como parte del trabajo preparatorio que él necesitó desarrollar antes de abordar el problema de representabilidad por series trigonométricas. »*

David M. Bressoud
A Radical Approach to Lebesgue's Theory of Integration.

Bernhard Riemann
1826-1866

En este capítulo vamos a desarrollar el concepto de la integral de Riemman. Vamos a exponer la definición de la integral debida a Riemann y la ideada por J. G. Darboux. Mostraemos la equivalencia de las dos definiciones y discutiremos las propiedades de la intergal, sus alcances y límites. Preparamos así el camino para la introducción de la integral de Lebesgue.

Debemos advertir al alumno que en este curso dejaremos un poco de lado las cuestiones procedimentales de cómo calcular integrales, aspecto que seguramente abordó en cursos anteriores y del cual nos vamos a valer. Tampoco debe esperar que las actividades prácticas se centren en esa dirección. Nuestro principal objetivo aquí es discutir la materia conceptual ligada a la integral y cómo es previsible las actividades prácticas estarán orientadas con ese propósito.

El concepto de integral encuentra su motivación en diversos problemas. Aparece cuando se busca el centro de masas de un determinado cuerpo, cuando se quieren hallar longitudes de arco, volúmenes, cuando se quiere reconstruir el movimiento de cuerpo conocida su velocidad, etc. La integral es utilizada en incontables otros conceptos matemáticos, como ser el mencionado már arriba relativo a las series de Fourier.

Jean G. Darboux
1842-1917

Quizás el problema más simple donde aparece la integral es el que utilizaremos como motivación para introducirla y es el concepto de área. Vamos a tratar de reconstruir este concepto desde su base, esto es analizando la noción de área de figuras tan simples como rectángulos, triángulos, etc.

4.2 Área de figuras elementales planas

El cálculo de áreas es necesario en multitud de actividades humanas, por ejemplo con el comercio. La cantidad de muchos productos y servicios se estima en medidas de área, por ejemplo: las telas, el trabajo de un colocador de pisos, el precio de la construcción, el valor de las extensiones de tierra, etc.

Por figuras elementales planas nos referimos a rectángulos, triángulos, trapecios, etc. Sin duda el alumno debe estar muy familiarizado con las áreas de estas figuras, el área de un rectángulo viene dada por la conocida fórmula $b \times h$, donde b es la base del rectángulo y h su altura. Ahora bien, ¿Cómo se llega a esta fórmula? Porque esta fórmula es apropiada para calcular el precio de un terreno por ejemplo. En esta sección vamos a justificar esta fórmula a partir de algunos hechos elementales.

Vamos a considerar un plano $\mathcal{P}$. En este plano $\mathcal{P}$ supondremos fijada una unidad de longitud. Pretendemos asignar un área a las figuras, es decir a los subconjuntos, de $\mathcal{P}$. De ahora en más, cómo es usual en esta materia nos referiremos a medida *en lugar de área. La medida es un concepto más general que el concepto de área. No obstante en el contexto en que estamos actualmente son sinónimos.*

Queremos construir pues una función m tal que $m(A)$ reppresente la medida de $A \subset \mathcal{P}$. Ahora bien ¿qué podemos usar de guía con ese objetivo? Si, como dijimos, desconocemos todas las fórmulas previamente aprendidas, sobre que partimos para construir la medida o área. La respuesta es que tomaremos como principio rector ciertas propiedades que son deseables que una medida satisfaga. Ellas son las siguientes.

Positividad. *debería ser una magnitud no negativa.*

Invariancia por movimientos rígidos. *Si una región es transformada en otra por medio de un movimiento rígido, ambas regiones deberían tener la misma área. Otra manera de expresar esta propiedad es diciendo que dos figuras* congruentes *tienen la misma área.*

Aditividad. *Si una región es la unión de cierta cantidad de regiones más chicas mutuamente disjuntas*

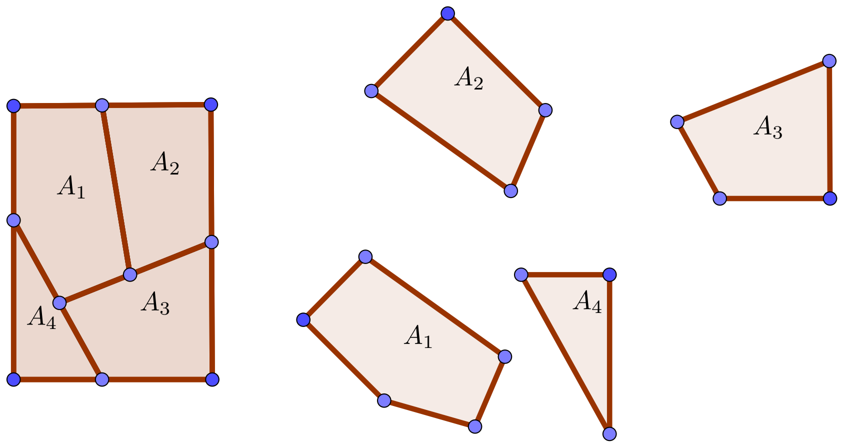


Figura 4.1: El área del rectángulo es la suma de sus partes

Utilizando la segunda y tercer propiedad se pueden relacionar el área del rectángulo de la figura 4.1 con las cuatro regiones en la que es dividido.

Como veremos a lo largo de la materia la propiedad de aditividad debe ser estudiada con cuidado, esto ocurre por las intrincadas maneras en que una región puede ser unión de otras regiones. A lo largo de esta materia elaboraremos una teoría que nos dará una descripción precisa de a que conjuntos podemos asignarle una medida de modo que las propiedades previas sean ciertas.

Por el momento veamos como las propiedades anteriores determinan practicamente de manera unívoca la medida de regiones elementales planas.

Hablando de propiedades de la medida, supongamos que A y B son dos regiones con $A \subset B$. Entonces como $B = A \cup (B - A)$ y por la propiedad de aditividad y positividad

$$m(B) = m(A) + m(B - A) \geq m(A).$$

Descubrimos así que nuestra medida deberá tener adicionalmente la siguiente propiedad:

Monotonía. *Si $A \subset B$ entonces $m(A) \leq m(B)$.*

Es claro que si logramos construir una medida que satisfaga las propiedades anteriores cualquier múltiplo por un número real positivo de ella seguirá cumpliendo las propiedades. Esto es una manera de expresar el hecho que podemos usar diferentes unidades de medición. Esta cuestión se sortea proponiendo la unidad de medida. Esta unidad es completamente arbitraria, ud. podría elegir su figura plana preferida como unidad de área. Cómo es habitual, elijamos el cuadrado cuyos lados miden la unidad de longitud previamente fijada.

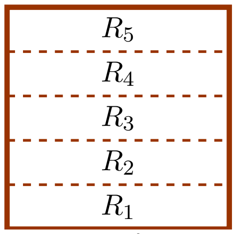
Supongamos ahora que tenemos un rectángulo de un lado igual a la unidad y el otro de lado un racional n/m, $n, m \in \mathbb{N}$. Veamos que la aditividad, la invariancia por movimientos rígidos y el hecho que decidimos que el cuadrado de lados igual a la unidad determinan el área de este rectángulo. Primero observar que si dividimos el lado de cuadrado unidad en m segmentos iguales de longitud. Queda dividido el cuadrado en m rectángulos $R_1, \ldots, R_m$ (ver figura en el margen), todos ellos congruentes entre si, de modo que todos tienen la misma medida, digamos $m(R_1)$. La unión de ellos es el cuadrado que por convención dijimos que tiene medida 1. De modo que por la aditividad debe ocurrir que $m(R_1) = \cdots = m(R_m)) = 1/m$. Recordemos nuestra pretención de inferir la medida de un rectángulo R de lado 1 y otro n/m. Este rectángulo esta compuesto de n rectángulos congruentes a los R_i, $i = 1, \ldots, m$, nuevamente por la aditividad inferimos que $m(R) = n/m$.

Sea ahora una rectángulo R con un lado unidad y el otro un real cualquiera $l > 0$. Existen sendas sucesiones $0 < q_k, p_k \in \mathbb{Q}$, $k \in \mathbb{N}$, tales que $q_1 \le q_2 \le \cdots \le l \le \cdots \le p_2 \le p_1$ y $\lim_{k\to\infty} q_k = \lim_{k\to\infty} p_k = l$. Consideremos una dos sucesiones de rectángulos R_k y S_k que comparten el lado de R igual a la unidad, mientras que el otro lado de R_k y S_k es igual a q_k y p_k respectivamente. Luego por la monotonía

$$q_k = m(R_k) \le m(R) \le m(S_k) \le p_k.$$

Tomando límite cuando $k \to \infty$ inferimos que $m(R) = l$.

Podríamos por ejemplo elegir el círculo de radio uno como unidad de área. Así ya no tendríamos el problema de ese número raro π que aparece en la fórmula del área del círculo. ¡El área de cualquier círculo sería igual a su radio al cuadrado! Claro que aparecería π en la fórmula del área del cuadrado de lado 1. Nos tapamos los pies y se destapa el cuerpo.



Descomposición rectángulo R

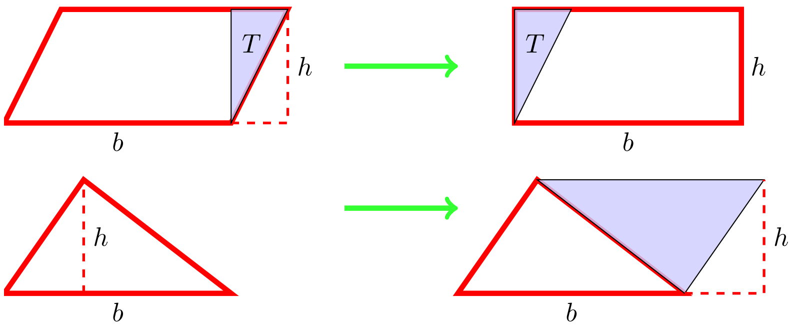


Figura 4.2: Áreas de otras figuras elementales.

A partir de las propiedades fundamentales que postulamos para la medida o área inferimos la famosa fórmula del área de un rectángulo en el caso que uno de los lados sea igual a la unidad. Para un rectángulo arbitrario. En la figura 4.2 se muestra como relacionar el área de un paralelepípedo con la de un rectángulo y la de un triángulo con la de un paralelepípedo para inferir las conocidas fórmulas para estas figuras.

4.3 Integral de Riemann

En esta sección abordaremos el problema del área de regiones planas. Vamos a contextualizarnos dentro del marco conceptual que nos brinda la geometría analítica. Mediante coordenadas cartesianas ortogonales los puntos del plano se identifican con pares ordenados $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ y el plano con el conjunto $\mathbb{R}^2$. Nuestro propósito es entonces definir la medida de subconjuntos de $\mathbb{R}^2$. La geometría analítica abre así nuevas posibilidades para abordar el problema del área.

Nuestra primera aproximación será la que propuso Bernhard Riemann en 1854, pero seguiremos el enfoque de Jean Darboux. En esta parte de nuestra exposición consideraremos subconjuntos de $\mathbb{R}^2$

de un tipo especial, concretamente a conjuntos que quedan encerrados entre la gráfica de una función y del eje coordenadas x. Esto nos lleva alconcepto de integral.

Definición 1 *(Partición)*

Sea $[a, b]$ un intervalo. Una partición *P es un conjunto ordenado y finito de puntos, donde el primer elemento es a y el último b. Es decir $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, donde $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.*

Definición 2 *(Sumas de Darboux)*

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada y $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una partición de $[a, b]$. Consideremos las siguientes magnitudes

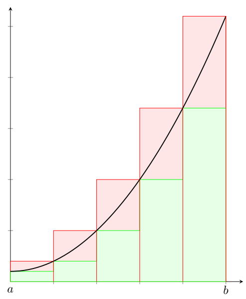
$$m_i := \inf\{f(x) | x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$
$$M_i := \sup\{f(x) | x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

Definimos la Suma superior de Darboux *como*

$$\overline{S}(P, f) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}),$$

y la Suma inferior de Darboux *como*

$$\underline{S}(P, f) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}),$$



Sumas de Darboux.

Lema 1 *(Monotonía sumas de Darboux)*

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada y $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una partición de $[a, b]$. Supongamos que P' es otra partición que tiene un pnto más que P. Entoces

$$\underline{S}(P', f) \geq \underline{S}(P, f) \quad \text{y} \quad \overline{S}(P', f) \leq \overline{S}(P, f)$$

Ejercicio

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada y P, P' particiones de $[a, b]$ con $P \subset P'$. Demostrar que

$$\underline{S}(P, f) \leq \underline{S}(P', f) \quad \text{y} \quad \overline{S}(P', f) \leq \overline{S}(P, f).$$

Inferir que para cualesquiera P, P' (sin importar que una este o no contenida dentro de la otra)

$$\underline{S}(P, f) \leq \overline{S}(P, f).$$

Definición 3 (Funciones integrables)

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Diremos que f es integrable Riemann si

$$\sup\left\{\underline{S}(P,f) | P \text{partición de } [a,b]\right\} = \text{ínf}\left\{\overline{S}(P,f) | P \text{partición de } [a,b]\right\} \quad (4.1)$$

En caso que f sea integrable llamamos integral entre a y b de f al valor de los dos miembros de (4.1) y este número se denota

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Teorema 1 (Primer criterio de integrabilidad)

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Entonces f sea integrable si para todo $\varepsilon > 0$ existe una partición P tal que

$$\overline{S}(P;f) - \underline{S}(P;f) < \varepsilon. \quad (4.2)$$

Dem. *La demo*

□

Ejemplo 4.0. Sea $0 \leq a < b$ veamos que

$$\int_a^b x dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}.$$

Ejercicio

Sea $0 \leq a < b$ veamos que

$$\int_a^b x^2 dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}.$$

Ayuda: *Usar particiones uniformes y la fórmula* $\sum_{i=1}^n n^2 = n(n+1)(2n+1)/6.$

Ejemplo 4.1. Sea $0 \leq a < b$ y $n \in \mathbb{N}$, veamos que

$$\int_a^b x^n dx = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}.$$

Usamos particiones no uniformes

Ejercicio

Sea $0 \leq a < b$ y n un entero negativo, veamos que

$$\int_a^b x^n dx = \begin{cases} \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1} & \text{si } n \neq -1 \\ \ln(b) - \ln(a) & \text{si } n = -1 \end{cases}$$

Ejemplo 4.2. Sea $0 \le a < b \le \pi/2$, veamos que

$$\int_a^b \operatorname{sen} x dx = -(\cos(b) - \cos(a)).$$

Ejercicio

Sea $0 \le a < b \le \pi$, veamos que

$$\int_a^b \operatorname{sen} x dx = -(\cos(b) - \cos(a)).$$

Ejemplo 4.3. Usamos SymPy y sumas de Darboux aproximar el valor de π. Utilizamos el hecho que $\pi/4$ es el área de un cuarto de círculo de radio 1. Entonces

$$\pi = 4\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx.$$

```
from sympy import *
N=1000.0
lim=int(N+1)
x=symbols('x')
f=sqrt(1-x**2)
Sinf=sum([ f.subs(x,i/N)*1/N for i in range(1,lim)])
Ssup=sum([f.subs(x,(i-1)/N)*1/N for i in range(1,lim)])
```

Encontramos la estimación

$$3{,}13955546691103 \le \pi \le 3{,}14355546691103$$

Ejercicio

Usando SymPy estimar las siguientes integrales

$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx,$$

comparar con $\ln(2)$,

$$\int_{-1}^1 x^2 dx$$

¿A qué parece aproximarse las sumas inferiores y superiores?

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx,$$

¿Por qué el resultado puede usarse para aproximar π ?

Teorema 2 (Propiedades elementales de la integral)

Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrables, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $c \in (a,b)$. Entonces

Linealidad $\alpha f + \beta g$ es integrable y

$$\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x) dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx.$$

Monotonía Si $f(x) \leq g(x)$ para $x \in [a,b]$ entonces

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

Aditividad del Intervalo

$$\int_a^b \alpha f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Observación: *Las propiedadades anteriores son compatibles con las propiedades que habíamos propuesto para el concepto de área en la sección 4.2.*

4.4 Integrabilidad y continuidad

Teorema 3 (Segundo criterio de integrabilidad)

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Entonces f sea integrable si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para cualquier partición P que satisface

$$\max_i \{x_i - x_{i-1}\} < \delta,$$

se tiene que

$$\overline{S}(P; f) - \underline{S}(P; f) < \varepsilon. \quad (4.3)$$

Dem. *Agarrate catalina* □

Teorema 4 (Continuidad implica integrabilidad)

Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función continua entonces es integrable.

Dem. *hacer* □

¿Qué ocurre con las funciones discontinuas?

Ejemplo 4.4. *[Función de Heavside] Es la función*

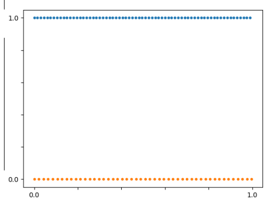
$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

Es discontinua en $[-1,1]$ pero integrable.

Ejemplo 4.5. *[Función de Dirichlet] Es la función $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ definida por*

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x\in\mathbb{Q}\\ 0 & \text{si } x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

Veamos que f es discontinua en todo punto y no integrable.



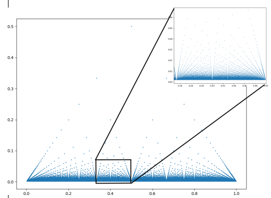
Función de Dirichlet

Ejemplo 4.6. *[Función de Thomae] Es la función $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ definida por*

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{q} & \text{si } x=\frac{p}{q}, p,q\in\mathbb{Z}, \text{m.c.d}(p,q)=1\\ 0 & \text{si } x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

Para graficarla

```
from matplotlib import pyplot as plt
total=500
q=[]
f=[]
for i in range(1,total):
    for j in range(1,i):
        if gcd(j,i)==1:
            q.append(Rational(j,i))
            f.append(1.0/i)
plt.plot(q,f,'.',markersize=12)
```



Función de Thomae

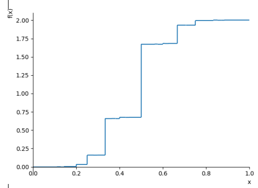
Veamos que es discontinua en todo punto racional y es integrable integrable.

Ejemplo 4.7. *[Escalera discontinua] Sea $\mathbb{Q}\cap[0,1]=\{q_1,q_2,\ldots\}$ una numeración de los racionales del $[0,1]$. Definamos $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ como*

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}H(x-q_n),$$

donde H es la función de Heavside.

```
q=[]
f=[]
total=20
for i in range(1,total):
    for j in range(1,i):
        if gcd(j,i)==1:
            q.append(float(Rational(j,i)))
x=symbols('x')
Heavside=Piecewise((0,x<0),(1,x>=0))
f=sum([Heavside.subs(x,x-q[n])/2**n for n in range(len(q))])
plot(f,(x,0,1))
```



Función creciente y discontinua en $\mathbb{Q}\cap[0,1]$

Veamos que f es monotona no decreciente y discontinua en todo punto de $[0,1]\cap\mathbb{Q}$. Además f es integrable.

Definición 4 (Oscilación sobre un intervalo)

Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ acotada y $I=[\alpha,\beta]\subset[a,b]$. Definimos la oscilación *de f en I por*

$$w(f,I)=\sup\{f(x)|x\in I\}-\inf\{f(x)|x\in I\}.$$

Ejemplo 4.8.

1. *Para la función de Dirichlet $w(f,I)=1$ para todo I con interior no vacío.*

2. Para la función de Heavside e $I = [\alpha, \beta]$
$$w(f,I) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \in (\alpha,\beta] \\ 0 & \text{si } 0 \notin (\alpha,\beta] \end{cases}$$

3. Si $I^o \neq \emptyset$, f la función de Thomae e $I \subset [0,1]$ entonces $w(f,I) = 1/q^*$, donde q^* es el mínimo valor de q para el que existe $p \leq q$ tal que $p/q \in I$.

4. Para la función escalera discontinua e $I \subset [0,1]$
$$w(f,I) = \sum_{q_n \in I} \frac{1}{2^n}.$$

Definición 5

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada, $\sigma > 0$ y $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una partición. Definimos
$$I_\sigma := \{i \in \{1,\ldots,n\} | w(f,[x_{i-1},x_i]) > \sigma\}.$$
y
$$R(P,f,\sigma) = \sum_{i \in I_\sigma} (x_i - x_{i-1}).$$

Proposición 1

Si f es continua en $[a,b]$ para todo $\sigma > 0$ existe $\delta > 0$ tal que
$$\max_i (x_i - x_{i-1}) < \delta \Rightarrow I_\sigma = \emptyset \Rightarrow R(P,f,\sigma) = 0.$$

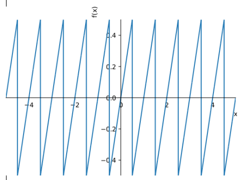
Ejemplo 4.9. Para la función de Dirichlet y para todo $0 < \sigma < 1$ y para toda partición de $[0,1]$ tenemos $I_\sigma = \{x_1,\ldots,x_n\}$ y $R(P,f,\sigma) = [0,1]$
Ejemplo 4.10. Para la función de Heavside, para todo $0 < \sigma < 1$ y para toda partición de $[0,1]$ tenemos $I_\sigma = i$, donde i es el índice para el que $i \in (x_{i-1}, x_i]$ y $R(P,F,\sigma) = x_i - x_{i-1}$.

Teorema 5 (Criterio de integrabilidad de Riemann)

Sea f acotada en $[a,b]$ entonces f es integrable si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ y $\sigma > 0$ existe $\delta > 0$ talque $R(P,f,\sigma) < \varepsilon$.

Ejemplo 4.11. Discutir los ejemplos Dirichlet, Heavside, Continuas, escalera discontinua
Ejemplo 4.12. [Función de Riemann] Definimos
$$((x)) = x - [x + 0{,}5]$$

```
x=symbols('x')
g=x-floor(x+.5)
plot(g,(x,-5,5))
```

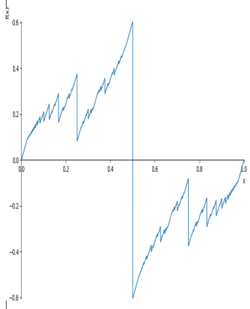


Función serrucho

Definimos la función de Riemann Porque
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{((x))}{n^2}.$$

```
f=sum([g.subs(x,n*x)/n**2 for n in range(1,20)])
plot(f,(x,0,1))
```

Demostramos que la función de Riemann es discontinua en los racionales p/q donde m.c.d$(p,q)=1$ y q par. Es integrable en $[0,1]$.



Función de Riemann

Definición 6 (Oscilación de una función en un punto)

Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ y $x\in[a,b]$ acotada definimos la oscilación de f en x como

$$w(f;x)=\inf_{x\in I^o} w(f,I),$$

donde el ínfimo se toma sobre todos los intervalos que contienen a x en su interior.

Ejercicio

f es continua en x si y solo si $w(f;x)=0$.

Definición 7 (Contenido exterior)

Sea $S\subset\mathbb{R}$. Un cubrimiento finito de S es una colección de intervalos $\{[x_{i-1},x_i]\}_{i=1,\ldots,n}$ tal que $S\subset\cup_{i=1}^n[x_{i-1},x_i]$.
El contenido exterior de S se define por

$$c_e(S)=\inf\sum_{i=1}^n(x_i-x_{i-1}),$$

donde el ínfimo es tomado sobre todos los cubrimientos finitos de S.

Teorema 6 (Criterio de integrabilidad de Hankel)

Sea f acotada en $[a,b]$ entonces f es integrable si y sólo si para todo $\sigma>0$ el conjunto $S_\sigma:=\{x\in[a,b]|w(f,x)>\sigma\}$ tiene contenido exterior igual a 0 ($c_e(S_\sigma)=0$).

4.5 Teorema Fundamental de Cálculo

4.6 Función de Volterra

```
import numpy as np
import scipy.optimize
from matplotlib import pyplot as plt
```

Consideramos la función $f(x)=x^2\operatorname{sen}(1/x)$.

```
def G(x):
    return x**2*np.sin(1/x)
x=np.arange(0,.15,0.0000001)
y=G(x)
plt.plot(x,y)
```

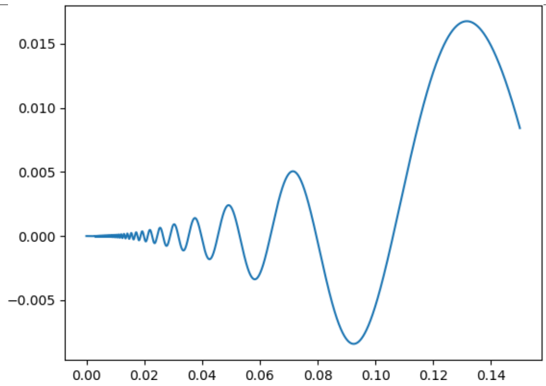


Figura 4.3: Función precursora de Volterra

```
def F(x):
    return 2*x*np.sin(1/x) - np.cos(1/x)
x = scipy.optimize.broyden2(F, .13, f_tol=1e-14)
x,1-x, G(x)
```

Se alcanza un máximo en $x = 0{,}13163878$ *y toma el valor* $G(x) = 0{,}016757715$. *Hay que utilizar el punto simétrico a* x, *es decir* $1 - x = 0{,}86836123$.

Definimos la función "madre".

```
def f0(x):
    x1=x[x<=0]
    x2=x[(x<=0.13163877)*(x>0)]
    x3=x[(x>0.13163877)*(x<0.868361226)]
    x4=x[(x>=0.868361226)*(x<1)]
    x5=x[x>=1]
    y1=np.zeros(np.shape(x1))
    y2=x2**2*np.sin(1/x2)
    y3=0.01675771541054875*np.ones(np.shape(x3))
    y4=(1-x4)**2*np.sin(1/(1-x4))
    y5=np.zeros(np.shape(x5))
    return np.concatenate((y1,y2,y3,y4,y5), axis=None)
```

Definimos la función de Volterra

```
def volterra(x,n,a=0,b=1):
    if n == 0:
        return 0

    a1,b1 = 2.*a/3. + b/3., a/3. + 2.*b/3.
    pto_med = .5*(a+b)
    return volterra(x,n-1,a,a1) + (b1-a1)*f0((x-a1)/(b1-a1))\
    + volterra(x,n-1,b1,b)
```

Graficamos

```
x=np.arange(0,1,0.0000001)
y=volterra(x,12)
plt.plot(x,y)
```

4.7 Integral de Riemann y pasos al límite

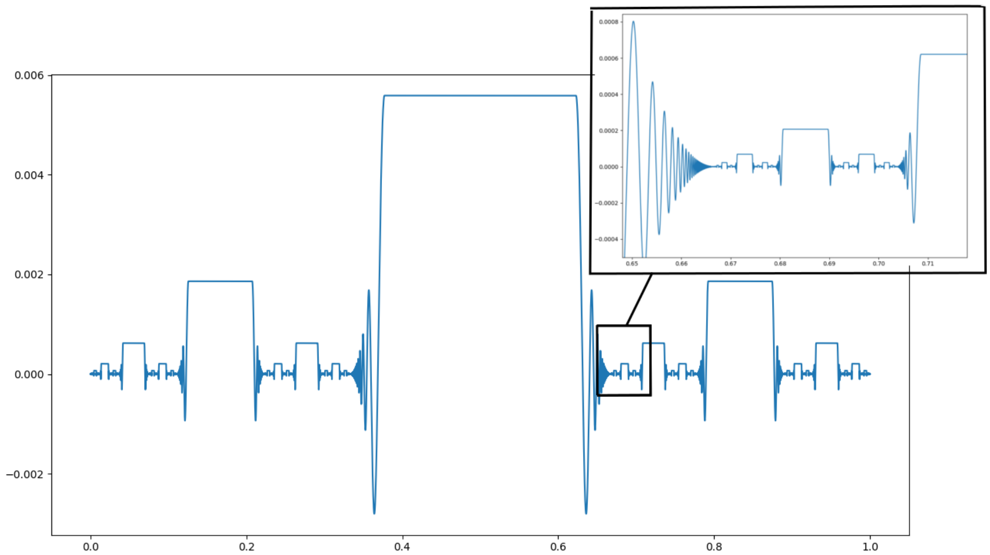


Figura 4.4: Función de Volterra

Capítulo 5

Medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$

5.1 Longitud de intervalos

En el present

swdasd

Apéndice

5.2 Topología

Teorema 1 (Principio de encaje de intervalos)

Sea $I_n = [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}$ una sucessión de intervalos con las siguientes propiedades

1. $\forall n \in \mathbb{N} : I_n \subset I_{n+1}$,
2. $\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$.

Entonces $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ consiste de uno, y solo un, punto $x \in \mathbb{R}$.

Demostración. □

Teorema 2 (Heine-Borel)

Toda sucesión acotada de $\mathbb{R}$ tiene una subsucesión convergente.

Demostración. *Uso encajes de intervalos.*

□

Definición 1 (Continuidad uniforme)

Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Diremos que f es uniformemente continua si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in A : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Ejemplo 5.0. *Varios ilustrando diferencia con continuidad*

Teorema 3

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Entonces f es uniformemente continua.

Demostración. *Uso Heine-Borel* □

Indice Conceptos

Axioma de elección, 5

bola, 27

Cadinal
    transfinito, 19
Cardinal, 19
congruencia, 44
Conjuntos, 3
    a lo sumo numerables, 7
    cardinal, 3
    coordinabilidad, 6
    diferencia, 3
    diferencia simétrica, 3
    finitos, 7
    infinitos, 7
    intersección, 3
    numerables, 7
    partes, 5
    producto cartesiano, 4
    union, 3
Conjuntos;no numerables, 12
Contenido exterior, 52
Continuidad uniforme, 56
cubrimiento finito, 52

desigualdad triágular, 26
Distancia, 26
diámetro, 27

esfera, 27

Espacio métrico, 26

Función, 4

Heavside, 50

Integrable Riemann, 47
Integral, 47
intervalo inicial, 6
Intervalos encajados, 56

medida, 44
Métrica, 26
métrica discreta, 27
métrica euclidea, 26

Números
    algebraicos, 14
    irracionales, 13
    irracionales cuadráticos, 14
    racionales, 13
    trascendentes, 13

oscilación, 50, 52

par ordenado, 4
Partición, 46

Suma inferiorr, 46
Suma superior, 46

Indice de Personas

Berstein, 18
Borel, 56

Cantor, 3
Cohen, 20

Dedekind, 6

Fraenkel, 19
Frechet, 26
Frege, 6

Heine, 56
Hermite, 14
Hilbert, 3

Lindemann, 14
Liouville, 14

Schröder, 18

Zermelo, 19

Indice Símbolos

(a, b), 4
$A - B$, 3
$A \triangle B$, 3
$A \cap B$, 3
$A \cup B$, 3
$A \sim B$, 6
A^c, 3
B^A, 4
$\aleph_0$, 19
$\bigcap_{i \in I} A_i$, 5
$\bigcup_{i \in I} A_i$, 5
$f : A \longrightarrow B$, 4