Repaso sobre integral de Riemann

Sumas de Darboux Sea $[a,b] \subset \mathbb{R}$ y $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ partición $(a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b)$

Sea

$$m_i = \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f(x) \ ; \ M_i = \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f(x).$$

Definimos

$$\underline{S}(P; f) = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1}).$$

$$\overline{S}(P; f) = \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1}).$$

Definición (Integral de Riemann) Si

$$\sup_P \underline{S}(P; f) = \inf_P \overline{S}(P; f)$$

f se dice integrable Riemann. El valor del supremo y el ínfimo coincidente se llama integral de f en $[a,b]$

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Propiedades Elementales $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

- $\int_a^b \alpha f\,dx = \alpha\int_a^b f(x)dx$,
- $\int_a^b f(x)+g(x)\,dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.
- Si $c\in\mathbb{R}$: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

Teorema (1^er Criterio integrabilidad)

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es integrable si y solo si $\forall\varepsilon>0$ $\exists P$ (partición) tal que.

$$\overline{S}(P,f)-\underline{S}(P,f)<\varepsilon.$$

Teorema (Integrabilidad y continuidad)

Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es continua es integrable

¿Pueden ser integrables las funciones discontinuas? (3)

Ejemplo (Heaviside)

$$f(x)=\begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Integrable

Ejemplo (Dirichlet).

$$f(x)=\begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

no integrable

Problema Caracterizar la integrabilidad

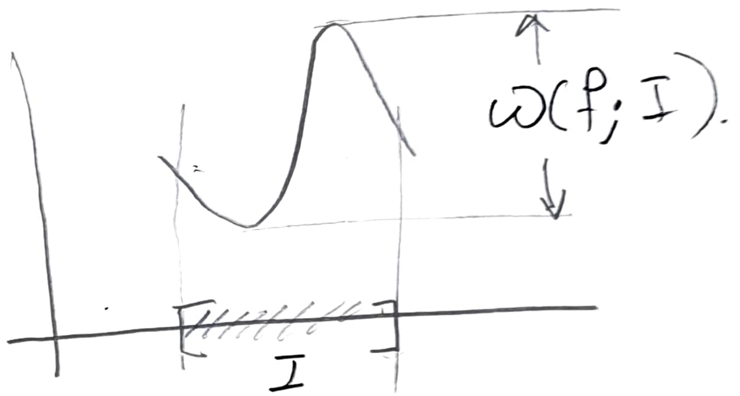
Teorema (2^{do} Criterio de Integrabilidad)

Sea $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ acotada. f es integrable Riemann si y solo si $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ tal que toda partición $P=\{x_0, \dots, x_n\}$ satisface que:

si $\max\limits_{i=1,\dots,n} (x_i - x_{i-1}) < \delta \Rightarrow \overline{S}(P,f) - \underline{S}(P,f) < \varepsilon$

Definición (Oscilación). Sea f una función e I un intervalo. La oscilación de f sobre I se define

$$\omega(f;I) = \sup\{f(x) \mid x \in I\} - \inf\{f(x) \mid x \in I\}$$



La oscilación de f en un punto x se define por:

$$\omega(f;x) = \inf_{x \in I^{o}} \omega(f;I)$$

Ejercicio f es continua en $x \iff \omega(f;x) = 0$

Teorema (3er Criterio de integrabilidad)

$f:[a,b] \to \mathbb{R}$ acotada. f es integrable Riemann sii $\forall \sigma > 0$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ para toda partición P

$$\max_{i=1,\dots,n} (x_i - x_{i-1}) < \delta \Rightarrow \sum_{\omega(f;[x_{i-1},x_i]) > \sigma} (x_i - x_{i-1}) < \varepsilon$$

Ejemplos a)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{si } x = p/q \quad m.c.d(q,p)=1 \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

$f:[0,1] \to \mathbb{R}$.

~~Sea $\sigma > 0$ cualquiera. y elijamos $q^* \in \mathbb{N}$ con $\frac{1}{q^*} < \sigma$. Hay una cantidad finita de racionales p/q en $[0,1]$ con $q < q^*$. A saber~~

No corresponde

$$\underbrace{\tfrac{1}{2}}_{q=2}, \underbrace{\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}}_{q=3}, \underbrace{\tfrac{1}{4}, \tfrac{3}{4}}_{q=4}, \underbrace{\tfrac{1}{5}, \tfrac{2}{5}, \tfrac{3}{5}, \tfrac{4}{5}}_{q=5} \dots \underbrace{\tfrac{1}{q^*-1}, \dots, \tfrac{q^*-2}{q^*-1}}_{q=q^*-1}$$

Sea $I=[a,b]\subset(0,1)$. $a<b$

¿Cuál es $\omega(f,I)$?

$f(x)=0$ en un conjunto denso.

Entonces $\inf\{f(x) \mid x\in I\}=0$.

Por otro lado

$$\sup\{f(x) \mid x\in I\} = \frac{1}{q_0}.$$

con $q_0=\min\{q \mid \exists p<q : \frac{p}{q}\in I\}$.

Luego $\omega(f;I)>\sigma \iff \exists q,p \ \frac{1}{q}>\sigma$

y $\frac{p}{q}\in I \iff q<\frac{1}{\sigma}$ y $\frac{p}{q}\in I$.

Hay una cantidad finita de estas fracciones $\frac{p}{q}$, $q=1,\dots,\left[\frac{1}{\sigma}\right]$ y $p=1,\dots,q-1$

sea δ la distancia más chica entre dos de estas cantidad finita de fracciones y lo elegimos de modo que $\delta N < \varepsilon$.

sea $P = \{t_0, \dots, t_n\}$ una partición con

$$\min (x_i - x_{i-1}) < \delta$$

En cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ puede haber a lo sumo una fracción $\frac{p}{q}$ con $\frac{1}{q} > \sigma$.

Por lo tanto

$$\# I_\sigma = \# \{ i \mid \omega(f, [x_{i-1}, x_i]) > \sigma \} \leq N.$$

Así

$$\sum_{i \in I_\sigma} (x_i - x_{i-1}) \leq \delta N < \varepsilon$$

Aplicar el criterio de Hankel es más fácil. (ojo, no lo vi todavía).

$$\omega(f, x) = \begin{cases} 0 & x \notin \mathbb{Q} \\ 1/q & x = p/q \quad \text{m.c.d}(p,q) = 1 \end{cases}$$

Lema Si $L_1 = \lim_{x \to a^+} f(x)$ y $L_2 = \lim_{x \to a^-} f(x)$ existen y $f(a)$ pertenece al intervalo de extremos L_1 y L_2 entonces

$$\omega(f,a) = |L_1 - L_2|.$$

Dem Sea $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 :$

$$0 < (x-a) < \delta \Rightarrow |L_1 - f(x)| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow L_1 - \varepsilon < f(x) < L_1 + \varepsilon.$$

Además podemos asumir.

$$0 < a - x < \delta \Rightarrow L_2 - \varepsilon < f(x) < L_2 + \varepsilon.$$

Supongamos $L_1 \leq L_2$. Luego

$$L_1 - \varepsilon < f(x) < L_2 + \varepsilon$$

Así

$$L_1 - \varepsilon < \inf f \leq \sup f < L_2 + \varepsilon.$$

$$\Rightarrow \omega(f, a) < L_2 - L_1 + 2\varepsilon.$$

Como ε arbitrario

$$\omega(f,a) \leq L_2 - L_1$$

Pero $\sup f > L_2 - \varepsilon$ $\quad \inf f < L_1 + \varepsilon$. en $(x-\delta, x+\delta)$

$$\Rightarrow \omega(f, x) > L_2 - L_1 - 2\varepsilon.$$

Definición (contenido exterior).
Dado $S \subset \mathbb{R}$ definimos el **contenido exterior**

$$C_e(S) = \inf\left\{ \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \;\middle|\; S \subset \bigcup_{i=1}^{n} [x_{i-1}, x_i] \right\}$$

Ejemplo a) Un conjunto finito S, $C_e(S) = 0$.

b) Si $S = [a,b] \Rightarrow C_e(S) = b-a$.

Como puedo usar el $[a,b]$ en la definición $C_e([a,b]) \leq b-a$.

Si $[a,b] \subset \bigcup_{i=1}^{n} [x_{i-1}, x_i]$. Vamos a demostrar que $b-a \leq \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})$

Por inducción sobre n. Si $n=1$ y $[a,b] \subset [x_1, x_2] \Rightarrow x_1 \leq a < b \leq x_2 \Rightarrow b-a \leq x_2 - x_1$. Si vale para $n-1$

Como $a \in \bigcup_{i=1}^{n} [x_{i-1}, x_i] \Rightarrow \exists i_0 : a \in [x_{i_0 - 1}, x_{i_0}]$.

Si $x_{i_0} \geq b$ estaríamos en el caso $n=1$.

Si $x_{i_0} < b$. Entonces $[x_{i_0}, b] \subset \bigcup_{i \neq i_0}^{n} [x_{i-1}, x_i]$

Como $\bigcup_{i \neq i_0} [x_{i-1}, x_i]$ es cerrado entonces

$$[x_{i_0}, b] = \overline{(x_{i_0}, b]} \subset \bigcup_{i \neq i_0} [x_{i-1}, x_i].$$

Como en la unión hay uno menos

$$b - x_{i_0} \leq \sum_{i \neq i_0}^{n} (x_i - x_{i-1}).$$

Luego

$$b - a \leq b - x_{i_0 - 1} = b - x_{i_0} + x_{i_0} - x_{i_0 - 1}$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}).$$

c) Si $x_n \in \mathbb{R}$ es una sucesión y $x_\infty = \lim_{n \to \infty} x_n$. Entonces $S = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{x_\infty\}$ tiene contenido cero.

Dem Sea $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists N : n \geq N \Rightarrow x_n \in [x_\infty - \frac{\varepsilon}{2}, x_\infty + \frac{\varepsilon}{2}]$

Sea $I_1 = [x_1 - \frac{\varepsilon}{2N}, x_1 + \frac{\varepsilon}{2N}], \dots, I_{N-1} = [x_{N-1} - \frac{\varepsilon}{2N}, x_{N-1} + \frac{\varepsilon}{2N}]$.

$I_N = [x_\infty - \frac{\varepsilon}{2}, x_\infty + \frac{\varepsilon}{2}]$. Luego $S \subset \bigcup I_i$

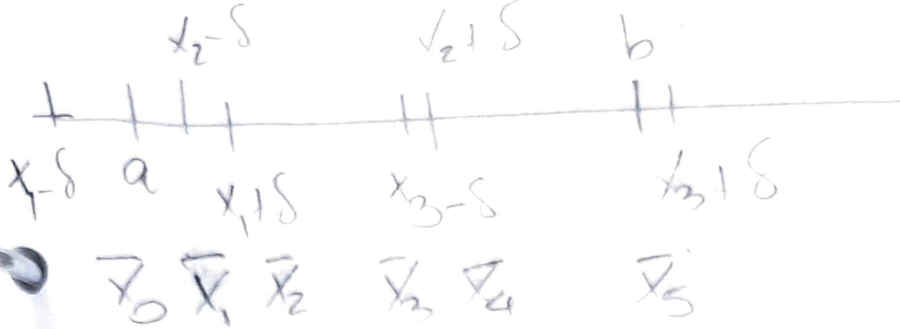
y $\sum l(I_i) < \varepsilon$.

Teorema (Hankel). Sea $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada y $S_\sigma = \{x \mid \omega(f,x) > \sigma\}$. Entonces f es integrable sii $c_e(S_\sigma) = 0$ $\forall \sigma > 0$.

Lema Sea $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ con $\omega(f,x) < \varepsilon$ $\forall x \in [a,b]$. Entonces existe una partición P tal que

$$\overline{S}(P,f) - \underline{S}(P,f) \leq \varepsilon (b-a).$$

Dem Sea $x \in [a,b]$. Como $\omega(f,x) < \varepsilon$, $\exists I_x = [x - \delta_x, x + \delta_x]$ con $\omega(f, I_x) < \varepsilon$. Tenemos $[a,b] \subset \bigcup_{x \in [a,b]} I_x$. Saquemos un subcubrimiento finito $[a,b] \subset \bigcup_{i=1} I_{x_i}$. Pongamos todos los puntos $x_i \pm \delta_{x_i}$ junto con a, b sobre la recta, ordenémoslo en una secuencia $a = \overline{x}_0 < \overline{x}_1 < \cdots \overline{x}_n = b$.



Entonces $[\overline{x}_{j-1}, \overline{x}_j] \subset I_{x_i}$ para algún i

Luego $\omega(f, [\overline{x}_{j-1}, \overline{x}_j]) \leq \omega(f, I_i) < \varepsilon$.

Luego si $P = \{\overline{x}_0, \dots \overline{x}_n\}$.

$$\overline{S}(P,f) - \underline{S}(P,f) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(\overline{x}_i - \overline{x}_{i-1})$$

$$< \varepsilon \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \leq \varepsilon(b-a).$$

Dem Teorema Hankel

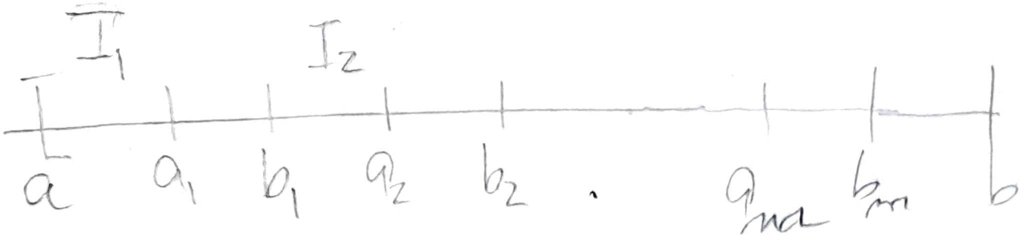
$\Leftarrow$) Sea $\varepsilon > 0$ y $\sigma > 0$ $= \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ cualesquiera

Como $C_e(S_\sigma) = 0$ existen

$a_i < b_i$, $i = 1, \dots m$ con $S_\sigma \subset \bigcup^{m} (a_i, b_i)$ y

$\sum_i (b_i - a_i) < \varepsilon / 2M$ llamados sobre la recta

$\rightsquigarrow |f| \leq M$.



Se puede suponer $a < a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \dots < b_m$

Sea $I_1 = [a, a_1]$, $I_2 = [b_1, a_2]$, ... $I_m = [b_{m-1}, a_m]$

$I_{m+1} = [b_m, b]$.

En cada I_j $\omega(f, I_j) \leq \sigma < 2\sigma$.

Existen particiones de I_j, P_j

con $\overline{S}(P_j, f) - \underline{S}(P_j, f) < 2\sigma\,\ell(I_j)$

Consideremos la partición P que resulta de unir las P_j, $j=1,\dots,m+1$

y $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_m, b_m$. Luego

$$\overline{S}(P,f) - \underline{S}(P,f) = \sum_{j=1}^{m+1} \overline{S}(P_j,f) - \sum_{j=1}^{m+1} \underline{S}(P_j,f)$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} (M_j - m_j)(b_j - a_j) \leq 2\sigma(b-a) + 2M\frac{\delta}{2M}$$

$$< \varepsilon$$

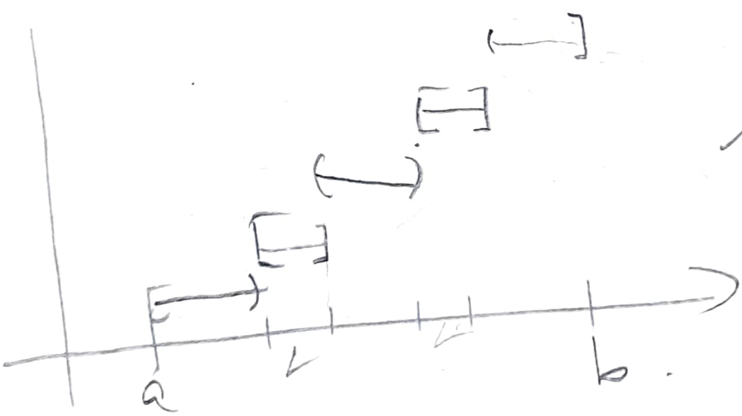
$\Rightarrow$) ~~Sea~~ f integrable, $\varepsilon>0$ y $\sigma>0$

Por el tercer criterio de integrabilidad $\exists \delta>0$ tal que si P es una partición con $\max(x_i - x_{i-1}) < \delta$ entonces

$$\sum_{i\in I_{\sigma/2}} (x_i - x_{i-1}) < \varepsilon$$

si $i \notin I_{\sigma/2} \Rightarrow \omega(f, I_i) \leq \sigma/2$. Luego

si $x \in I_i^{\circ} \xRightarrow{i\notin I_{\sigma/2}} \omega(f, x) \leq \sigma/2$.



Veamos que si $\omega(f,x)>\sigma$ entonces $x \in \bigcup_{i\in I_{\sigma/2}} [x_{i-1}, x_i]$.

De no ser así $x \in \partial I_i$ en dos distintos i (i_1, i_2) tales que $i \notin I_\sigma$. Entonces si $y \in I_{i_1}$ y $z \in I_{i_2}$ con $x \in I_{i_1} \cap I_{i_2}$ tenemos $f(z) - f(y) \leq f(z) - f(x) + f(x) - f(y) \leq \sigma/2 + \sigma/2 \leq \sigma$.

Así

$$c_e(\{x \mid \omega(f,x) > \sigma\}) \le \sum_{i \in I_0} (x_i - x_{i-1}) < \varepsilon \qquad \square$$

Ejemplos a) Sea $\mathbb{Q} \cap [0,1] = \{q_1, \dots\}$

y $$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} H(x - q_n).$$

f es integrable. f es continua en $x \notin \mathbb{Q}$; si $x \in \mathbb{Q}$, $x = q_n$.

si $x < y$

$$f(y) - f(x) = \sum_{\substack{n=1 \\ q_n \in (x,y]}}^{\infty} \frac{1}{2^n} H(x - q_n).$$

Hay que tomar un $\delta > 0$ tal que en $(x, x+\delta]$ sólo haya q_n con n grande. Hay que tomar

$$\delta < d(x, \{q_1, \dots, q_n\} \setminus \{q_n\}).$$

Hay una cantidad finita de x con $\omega(f,x) > \sigma$.

$x_0 < \dots < x_n$ ... $x_n = b$.

b) Función de Thomae.

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{q} & x=p/q \quad m.c.d(p,q) \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Integrales impropias

Definición: supongamos $a<c\leq b$. Si f es acotada en $[a,c-\varepsilon]$ y $[c+\varepsilon,b]$ para todo $\varepsilon>0$. Podemos definir

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Lo definimos como

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx+\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{c+\varepsilon}^{a} f(x)\,dx$$

Ejemplo $f(x)=|x|^{\alpha}$.

Similarmente $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$.

Propiedades elementales de la Integral

1) $\int_a^b f(x)+\alpha g(x)\,dx = \int_a^b f(x)+\alpha\int_a^b g(x)\,dx$

2) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

3) Definición: si $b<a$. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$.

3') $f\leq g \Rightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b g$. $a<b$

4) Si f_n son integrables Riemann. y $f_n \to f$ unif. en $[a,b] \Rightarrow f$ es int. y $\int_a^b f_n \to \int_a^b f$

Teorema Fundamental del Cálculo

Dada f integrable en $[a,b]$ definimos.

$$\phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad x\in[a,b]$$

Ejemplos a) $\phi(x) = \int_0^x t\,dt = \frac{x^2}{2}$. nótese $\phi'(t) = t$

b) $\phi(x) = \int_0^x t^n dt = \frac{x^{n+1}}{n+1}$. Lo mismo

c) $\phi(x) = \int_0^x \sin t\,dt = -\cos x$

Teorema (Fundamental del Cálculo).
Si f es integrable en $[a,b]$
ϕ es diferenciable en cada punto
de continuidad de f y.

$$\phi'(x) = f(x).$$

Dem Supongamos f continua en x
$\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tal que

$$|y-x| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon$$

$$\Longrightarrow f(x) - \varepsilon < f(y) < f(x) + \varepsilon$$

Luego ya sea $h > 0$ o $h < 0$

$$h f(x) - \varepsilon|h| < \int_x^{x+h} f(y) < h f(x) + \varepsilon|h|$$

Luego

$$\frac{\phi(x+h)-\phi(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

Entonces si $h>0$

$$f(x)-\varepsilon < \frac{\phi(x+h)-\phi(x)}{h} < f(x)+\varepsilon$$

Entonces

$$\lim_{h\to 0} \frac{\phi(x+h)-\phi(x)}{h} = f(x) \quad \square$$

Corolario Si f es continua en $[a,b]$ y $F'(x) = f(x)$ $x \in [a,b]$

Entonces

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,dt = F(b)-F(a)}$$

Problema que funciones tiene una derivada F' integrable y

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b)-F(a)$$

1

Ejemplo 1.3.1 $0 \leq a < b$

$$\int_a^b x\,dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}.$$

Dem Consideramos particiones uniformes (igual longitud). sea $n \in \mathbb{N}$

$$x_k = a + \frac{k}{n}(b-a) \quad k = 0, \dots, n.$$

$$m_i = \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f. \quad f(x) = x_{i-1} = a + \frac{i-1}{n}(b-a)$$

$$M_i = \sup_{[x_{i-1}, x_i]} \quad f(x) = x_i = a + \frac{i}{n}(b-a)$$

$P_n = \{x_0, \dots, x_n\}$

$$\overline{S}(f, P_n) - \underline{S}(f, P) = \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1})$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} \cdot \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n}.$$

Que se hace $< \varepsilon$ tomando n suficientemente grande.

Esto prueba que $f(x)=x$ es integrable (2)
por el primer criterio de integrabilidad.
Para justificar el valor de la integral.
Hacemos lo siguiente

$$\overline{S}(f, P_n) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i (x_i - x_{i-1}) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} x_i (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(a + \frac{i}{n}(b-a)\right) \frac{b-a}{n}$$

$$= a(b-a) + \left(\frac{b-a}{n}\right)^2 \sum_{i=0}^{n-1} i$$

$$= a(b-a) + \left(\frac{b-a}{n}\right)^2 \cdot \frac{n \; n+1}{2}.$$

$$= (b-a)\left(a + \frac{n+1}{2n}(b-a)\right)$$

Observar que $\lim_{n \to \infty} \overline{S}(f, P_n) = \frac{b^2 - a^2}{2}$

A la misma conclusión se llega con $\underline{S}(f, P_n)$

Luego, como

$$\underline{S}(f, P_n) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \overline{S}(f, P_n)$$

tomando $n \to \infty$ sale. □

<u>Ejemplo 1.3.2</u> Podríamos usar particiones uniformes, pero eso nos obligaría a hallar fórmulas para $\sum_{i=0}^{n-1} i^m$. Usando particiones no uniformes evitamos este inconveniente.

Tomamos $n \in \mathbb{N}$ y

$$q = \sqrt[n]{\frac{b}{a}} > 1$$

Consideramos

$$x_i = aq^i \quad i = 0, \dots, n$$

$P_n = \{x_0, \dots, x_n\}$

se tiene

$$x_i - x_{i-1} = aq^{i-1}(q-1)$$

Supongamos $m>0$ (+)

$$m_i = m \quad \ell \quad x_i^m = x_{i}^m = a^m q^{m(i-1)}$$

$[x_{i-1}, x_i]$

$i=1,\dots,n.$

Similarmente

$$M_i = a^m q^{mi} \quad i=1,\dots,n$$

Si $m<0$ queda al revés (Lo desarrollamos?)

$$\bar{S}(f,P_n) = \sum_{i=1}^{n} a^m q^{mi} a q^{i-1}(q-1)$$

$$= \frac{a^{m+1}(q-1)}{q} \sum_{i=1}^{n} (q^{m+1})^i \leftarrow \text{geométrica}$$

$$= \frac{a^{m+1}(q-1)}{q} \left[\frac{q^{(m+1)(n+1)}-1}{q^{m+1}-1} - 1 \right] = \frac{a^{m+1}(q-1)}{q} \left[\frac{q\left(\frac{b}{a}\right)^{m+1}-1}{q^{m+1}-1} - 1 \right]$$

Ahora $\lim_{n\to\infty} q = 1.$

y: $$\lim_{n\to\infty} \frac{q^{m+1}-1}{q-1} = \lim_{q\to 1} \frac{q^{m+1}-1}{q-1} = m+1$$

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, P_n) = a^{n+1}\left[\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{n+1} - 1}{n+1}\right]$$

$$= \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

Similarmente $\lim\limits_{n\to\infty} \underline{S}(f, P_n) = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}$

Ahora el razonamiento se completa diciendo:

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, P_n) - \underline{S}(f, P_n) = 0$$

Luego $\forall \varepsilon > 0$ $\exists M$

$$\overline{S}(f, P_n) - \underline{S}(f, P_n) < \varepsilon$$

Luego f es integrable y como en el ejemplo 1.3.1

$$\int_a^b x^n \, dx = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

Ejemplo 1.3.3 Usamos particiones equiespaciadas

$$x_i = a + \frac{i}{n}(b-a) \quad i=0,\dots,n$$

$$P_n = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$$

$$x_i - x_{i-1} = \frac{1}{n}$$

$$\left.\begin{array}{l} M_i = \operatorname{sen} x_i \\ m_i = \operatorname{sen} x_{i-1} \end{array}\right\} \text{ sen es creciente en } [a,b].$$

$h := \frac{b-a}{n}$

$$\overline{S}(f, P_n) = h \sum_{i=1}^{n} \operatorname{sen}\left(a + \frac{i}{n}(b-a)\right) = h \sum_{i=1}^{n} \operatorname{sen}(a+ih)$$

Un truco para calcular sumas es expresar los términos de la suma como diferencia. Usamos la fórmula

$$2 \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v = \cos(u-v) - \cos(u+v)$$

con $u = a+ih \quad v = h/2$

$$2 \operatorname{sen}(a+ih) \operatorname{sen} \frac{h}{2} = \cos\left(a + \left(i-\frac{1}{2}\right)h\right) - \cos\left(a + \left(i+\frac{1}{2}\right)h\right)$$

Luego

$$\overline{S}(f, P_n) = h \frac{1}{2 \operatorname{sen} \frac{h}{2}} \sum_{i=1}^{n} \cos\left(a+\left(i-\tfrac{1}{2}\right)h\right) - \cos\left(a+\left(i+\tfrac{1}{2}\right)h\right)$$

$$= h \frac{1}{2 \operatorname{sen} \frac{h}{2}} \left\{ \cos\left(a+\frac{h}{2}\right) - \cancel{\cos\left(a+\frac{3}{2}h\right)} + \cancel{\cos\left(a+\frac{3}{2}h\right)} \right.$$

$$\left. - \cancel{\cos\left(a+\frac{5}{2}h\right)} + \ldots\ldots, - \cos\left(a+\left(n+\tfrac{1}{2}\right)h\right) \right\}$$

$$= h \frac{1}{2 \operatorname{sen} \frac{h}{2}} \left\{ \cos\left(a+\frac{h}{2}\right) - \cos\left(b+\frac{h}{2}\right) \right\}$$

Cuando $n \to \infty$, $h \to 0$ y $h = \frac{b-a}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{h}{2 \operatorname{sen} \frac{h}{2}} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\frac{\operatorname{sen} h/2}{h/2}} \qquad \left(\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \right)$$

$$= 1$$

Así

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, P_n) = \cos a - \cos b.$$

De manera similar

$$\lim_{n \to \infty} \underline{S}(f, P_n) = \cos(a) - \cos(b)$$

Por el argumento empleado en los otros ejemplos $\operatorname{sen} x$ es integrable y

$$\int_a^b \operatorname{sen} x \, dx = \cos(a) - \cos(b) = \left[-\cos x \Big|_a^b \right]$$

La fórmula vale $\forall a, b$. La limitación $0 \leq a < b \leq \frac{\pi}{2}$ la pusimos para simplificar el razonamiento. De lo contrario hay que distinguir los intervalos donde $\operatorname{sen} x$ es creciente de donde es decreciente.