FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
Universidad Nacional de La Pampa

Depto de Matemática.
Primer Cuatrimestre de 2022
Teoría de la Medida
Práctica 6: Espacios L^p

Ejercicio 1. La funcion sen$(nx)/x$ no es integrable Lebesgue en $(0,+\infty)$. Observar que

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n \frac{\text{sen}x}{x}dx$$

existe.

Ejercicio 2. Demostrar que $L^1(\mathbb{R}^n)$ es separable, o sea tiene un conjunto denso numerable.

Ejercicio 3. Demostrar el Teorema de Riemann-Lebesgue: si $L^1(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos nx dx = \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\text{sen}nx dx = 0.$$

Sugerencia: demostrar el resultado para una función escalera y luego usar la densidad de las mismas.

Ejercicio 4. Demostrar que:

1. $\|\cdot\|_\infty$ es una norma.
2. $L^\infty(E)$ es un álgebra.
3. $L^\infty(E)$ es un espacio de Banach.

Ejercicio 5. El espacio $L^\infty(0,1)$ con la norma $\|\cdot\|_\infty$ es un espacio de Banach no separable.

Ejercicio 6. Sea g una función medible tal que $fg \in L^1(E)\ \ \forall f \in L^1(E)$, entonces $g \in L^\infty(E)$.

Ejercicio 7. Probar que:

1. $\|T\|_{L(X,Y)} = \sup\limits_{\|x\|_X\leq 1}\{\|Tx\|_Y\}$ es una norma.
2. $\|T\|_{L(X,Y)} = \sup\limits_{\|x\|_X=1}\|Tx\|_Y = \sup\limits_{x\neq 0}\frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} =$
   $\inf\{M : \|Tx\|_Y \leq M\|x\|_X, x\in X\}$.
3. $L(X,Y)$ es un espacio de Banach siempre que Y sea un espacio de Banach.

Ejercicio 8. Sea H un espacio de Hilbert. Si $x,y\in H$ entonces vale la *Identidad del Paralelogramo:*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2+\|y\|^2).$$

Ejercicio 9. Demostrar que si $m(E)<\infty$ y $1\leq p\leq q\leq\infty$, entonces $L^q(E)\subset L^p(E)$.
Sugerencia: Si $q<\infty$, verificar

$$\left\|\frac{f}{|E|^{\frac{1}{p}}}\right\|_p \leq \left\|\frac{f}{|E|^{\frac{1}{q}}}\right\|_q$$

usando Jensen. También se puede probar el ejercicio usando la desigualdad de Hölder.

Ejercicio 10. Demostrar que la función $f(x)=1/x(\ln x)^2$ satisface que $f\in L^1([0,1])$ y $f\notin L^p([0,1])$ para todo $p>1$.