FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
Universidad Nacional de La Pampa

Depto de Matemática.
Primer Cuatrimestre de 2022
Teoría de la Medida
Práctica 3: Medida de Lebesgue

Ejercicio 1. Sean R y R_j, $j = 1, \ldots, M$, rectángulos de $\mathbb{R}^d$ con $R \subset \bigcup_{j=1}^{M} R_j$. Probar que $|R| \leq \sum_{j=1}^{N} |R_j|$, donde $|R|$ es el volumen del rectángulo R y $|R_j|$ es el volumen de cada rectángulo R_j para $j = 1, 2, \ldots, M$.

Ejercicio 2. Demostrar que $m_*(A) = 0$ cuando $A \subset \mathbb{R}^d$ es numerable.

Ejercicio 3. Mostrar que cualquier conjunto con medida exterior positiva contiene un conjunto acotado con medida exterior positiva.

Ejercicio 4. Probar que si $m_*(E) > 0$ y $0 < \alpha < 1$, entonces existe un cubo Q, tal que $m_*(E \cap Q) > \alpha m(Q)$.
Sugerencia: suponiendo primero que $0 < m_*(E) < \infty$, considerar un conjunto $U = \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k$, tal que $U \supset E$ y $\sum_{k=1}^{\infty} m(Q_k) < \alpha^{-1} m_*(E)$; entonces al menos uno de los cubos Q_k debe satisfacer la desigualdad del enunciado.

Ejercicio 5. En la teoría se demostró que el disco abierto de $\mathbb{R}^2$ definido por $x^2 + y^2 < 1$ se puede escribir como una unión numerable de cubos casi-disjuntos. Demostrar que esta afirmación es falsa si consideramos el disco cerrado $x^2 + y^2 \leq 1$.

Ejercicio 6. *Decimos que un conjunto $E \subset \mathbb{R}^d$* **satisface la condición de Caratheodory** *si para cualquier conjunto $S \subset \mathbb{R}^d$ se verifica*

$$m_*(S \cap E) + m_*(S - E) = m_*(S).$$

1. Probar que todo conjunto medible E satisface la condición de Caratheodory.
   Sugerencia: basta probar que para cualquier conjunto S se cumple

   $$m_*(S \cap E) + m_*(S - E) \leq m_*(S),$$

   en vista de que la desigualdad opuesta se cumple en cualquier caso.

2. Probar que si E_1 y E_2 satisfacen la condición de Caratheodory, entonces la intersección de ambos conjuntos también la satisface.
   Sugerencia: el conjunto $S - E_1 \cap E_2$ es la unión de los conjuntos disjuntos $S \cap E_1 - E_2$, $(S - E_1) \cap E_2$ y $(S - E_1) - E_2$.

3. Probar que si E satisface la condición de Caratheodory, entonces E es medible.
   Sugerencia: en virtud de los incisos 1. y 2. se puede suponer que E es acotado.

La moraleja del problema es que **"los conjuntos medibles son exactamente los que satisfacen la condición de Caratheodory."**

Ejercicio 7. Para cualquier conjunto $E \subset \mathbb{R}^d$, probar que:

1. existe un conjunto H de clase G_δ, tal que $E \subset H$ y $m_*(E) = m(H)$.

2. existe un conjunto H de clase G_δ, tal que $E \subset H$ y para cualquier conjunto medible M se cumple

   $$m_*(E \cap M) = m(H \cap M).$$

   Sugerencia: suponiendo primero que $m_*(E) < \infty$, considérese un conjunto H de clase G_δ como en el inciso 17. El conjunto M satisface la condición de Caratheodory con respecto a E.

Ejercicio 8. Probar que si E_1 y E_2 son conjuntos medibles disjuntos, entonces para cualquier conjunto $S \subset \mathbb{R}^d$ se cumple
$$m_*(S \cap E_1) + m_*(S \cap E_2) = m_*(S \cap (E_1 \cup E_2)).$$
Generalizar a cualquier sucesión (E_k) de conjuntos medibles disjuntos.

Ejercicio 9. Si E y F son conjuntos medibles cualesquiera, entonces
$$m(E \cup F) + m(E \cap F) = m(E) + m(F).$$

Ejercicio 10. Probar que $G \in G_\delta$ si y sólo si $G^c \in F_\sigma$.

Ejercicio 11. Probar que para cualquier conjunto medible E vale la fórmula
$$m(E) = \sup\{m(K) : K \subset E\},$$
donde el supremo se toma sobre todos los conjuntos compactos $K \subset E$.

Ejercicio 12. Sea (E_k) una sucesión de conjuntos medibles. Probar que

1. $m(\liminf E_k) \leq \liminf m(E_k)$;
2. si para algún j, $m\left(\bigcup_{k\geq j} E_k\right) < \infty$, luego $\limsup m(E_k) \leq m(\limsup E_k)$;
3. si la sucesión (E_k) tiende a un límite y todos los E_k son subconjuntos de un conjunto fijo A de medida finita, entonces $m(\lim E_k) = \lim m(E_k)$.
4. Exhibir una sucesión de conjuntos E_k en el intervalo unitario $[0,1]$, tal que $m(\liminf E_k) < \liminf m(E_k) < \limsup m(E_k) < m(\limsup E_k)$ (todas las desigualdades estrictas).

Ejercicio 13. Mostrar que existe un conjunto H incluido en el intervalo unitario $[0,1]$, de clase F_σ, de medida uno, formado exclusivamente por puntos irracionales.
Mostrar que H es unión numerable de conjuntos cerrados con interior vacío.

Ejercicio 14. * Demostrar que $\mathscr{O}$ es σ-álgebra si:
$$\mathscr{O} = \{Z \subset \Omega |\, m(Z) = 0 \text{ ó } m(Z^c) = 0\}.$$

Ejercicio 15. Mostrar que el conjunto $\mathscr{O} = \{G |\ G \text{ es un conjunto abierto o cerrado de } \mathbb{R}\}$ no es una σ-álgebra.

Ejercicio 16. Si (A_k) es una sucesión de conjuntos en una σ-álgebra $\mathscr{O}$, entonces

1. $\limsup A_k = \bigcap_{k\geq 1}\left(\bigcup_{n\geq k} A_n\right)$ pertenece a $\mathscr{O}$.
2. * $\liminf A_k = \bigcup_{k\geq 1}\left(\bigcap_{n\geq k} A_n\right)$ pertenece a $\mathscr{O}$.

Ejercicio 17. Sea $f : A \to B$ una función.

1. Supóngase $\mathscr{O}_2$ es una σ-álgebra en B. Probar que el conjunto de imágenes inversas de los conjuntos en $\mathscr{O}_2$ forman una σ-álgebra en A.

2. Supóngase que $\mathscr{O}_1$ es una σ-álgebra en A. Probar que los conjuntos de B cuyas imágenes inversas pertenecen a $\mathscr{O}_1$ forman una σ-álgebra en B.

Probar que el conjunto de imágenes inversas de los conjuntos en $\mathscr{O}$ forman una σ-álgebra en A.

Ejercicio 18. Demostrar que si A, B son borelianos de $\mathbb{R}$ entonces $A \times B$ es boreliano de $\mathbb{R}^2$.

Ejercicio 19. ¿Cómo son los subconjuntos medibles del conjunto de Vitali?