# Introducción al Análisis Matemático

(BORRADOR)

# Índice general

# 1 Los números reales

## 1.1 Axiomas

Hay dos ópticas para introducir los numeros reales, las denominaremos axiomática y constructiva. Describimos a continuación, y someramente, cada una de ellas.

Se pueden introducir los números reales a travez de un sistema axiomático. Como es conocido, un sistema axiomático consta de *términos primitivos*, que son, por decirlo así, los objetos iniciales, a travez de los cuales se construyen todos los demás objetos de la teoría. Pueden ser términos primitivos: conjuntos, operaciones, relaciones, etc. Es importante aclarar que los términos primitivos son objetos puramente hipotéticos, es decir no se afirma la existencia de estos objetos. Los términos primitivos para los números reales son: un conjunto, comunmente denotado por $\mathbb{R}$, dos funciones de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, usualmente denotadas por $+$ y $.$[1] y una relación $\leq$. Para completar el sistema axiomático, debemos dar los axiomas, estos son propiedades que se postulan para los términos primitivos. Los axiomas para los números reales los podemos dividir en cuatro grupos:

1) $\mathbb{R}$ es un cuerpo, es decir:
   1.1) $x + (y + z) = (x + y) + z$;
   1.2) $x + y = y + x$;
   1.3) Existe un elemento $0 \in \mathbb{R}$ tal que $x + 0 = x$;
   1.4) Para cada $x \in \mathbb{R}$ existe un $y \in \mathbb{R}$ tal que $x + y = 0$;
   1.5) $x(yz) = (xy)z$;
   1.6) $xy = yx$;
   1.7) Existe un elemento $1 \in \mathbb{R}$ tal que $1.x = x$;
   1.8) Para cada elemento $0 \neq x \in \mathbb{R}$ existe un elemento $y \in \mathbb{R}$ tal que $xy = 1$;
   1.9) $x(y + z) = xy + xz$;
2) $\mathbb{R}$ es un cuerpo ordenado.
   2.1) Si $x \leq y$ e $y \leq z$ entonces $x \leq z$;
   2.2) Si $x \leq y$ e $y \leq x$ entonces $x = y$;
   2.3) Si $x$ e $y$ pertenecen a $\mathbb{R}$ entonces $x \leq y$ o $y \leq x$;
   2.4) Si $x \leq y$ entonces $x + z \leq y + z$;
   2.5) Si $0 \leq x$ e $0 \leq y$ entonces $0 \leq xy$;

   Dentro de $\mathbb{R}$ se puede construir un conjunto, denotado por $\mathbb{Z}$. que corresponde a los enteros.
3) $\mathbb{R}$ es un cuerpo ordenado y arquimedeano. Esto es: para todo $y \geq 0$ y todo $x > 0$ existe un entero $n$ tal que $nx \geq y$.

   Por último tenemos el axioma de completitud. Hay varias formulaciones equivalentes para este axioma, ver el Ejercicio 3.6.41 en la página 54 nosotros elegimos la siguiente:
4) Todo subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ acotado superiormente, tiene supremo, es decir existe un $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que: 1) $\alpha$ es una cota superior de $A$, esto es $\alpha \geq x$ para todo $x \in A$ y 2) $\alpha$ es la más chica de las cotas superiores, esto es si $\beta$ es cota superior entonces $\alpha \leq \beta$. Observar que no es necesario que $\alpha \in A$.

[1]Estas operaciones se denominan suma y multiplicación, usualmente se omite el signo de multiplicación

Hay tres propiedades que serían deseables que un sistema axiomático tuviera: 1) *coherencia*, es decir que los axiomas no se “contradigan” 2)*independencia*, entendiendo por esto que los axiomas no sean redundantes, es decir que ninguno de ellos se obtenga a partir de los demás y 3) *completitud*[2], esto es que toda afirmación de la teoría o su negación se pueda deducir.

Destacamos, nuevamente, que los objetos postulados como términos primitivos en el sistema axiomatico y que satisfagan los axiomas podrían no existir. En particular esto ocurre si el sistema axiomático es contradictorio. Obviamente, en ese caso, nuestro sístema axiomático no serviría de mucho. Esto no sucede para el sístema de axiomas para los números reales. Este sístema tiene un modelo, es decir podemos encontrar un conjunto $\mathbb{R}$ y las funciones y relación postuladas de modo tal que se satisfagan todos los axiomas. Esto nos lleva a la otra óptica de introducción de los números reales, la que denominamos constructiva. Varios modelos fueron propuestos por diversos matemáticos, en particular Dedekind y Cantor. Estos modelos son construidos a partir de los números racionales.[3] A Dedekind le debemos el método de cortaduras y a Cantor el método de sucesiones fundamentales de Cauchy.

[2] No confundir este concepto con el de completitud de un e.m.

[3] Es bueno decir que también es posible construir los números racionales a partir de los naturales y estos a partir de la Teoría de Conjuntos; no obstante esto se aparta considerablemente de los objetivos de esta materia

# 2 Conjuntos

«Nadie nos expulsará del paraíso que Cantor ha creado para nosotros»

David Hilbert

«David Hilbert (Königsberg, Prusia Oriental; 23 de enero de 1862-Gotinga, Alemania; 14 de febrero de 1943) fue un matemático alemán, reconocido como uno de los más influyentes del siglo XIX y principios del XX. Estableció su reputación como gran matemático y científico inventando y/o desarrollando un gran abanico de ideas, como la teoría de invariantes, la axiomatización de la geometría y la noción de espacio de Hilbert, uno de los fundamentos del análisis funcional. Hilbert y sus estudiantes proporcionaron partes significativas de la infraestructura matemática necesaria para la mecánica cuántica y la relatividad general. Fue uno de los fundadores de la teoría de la demostración, la lógica matemática y la distinción entre matemática y metamatemática. Adoptó y defendió vivamente la teoría de conjuntos y los números transfinitos de Cantor. Un ejemplo famoso de su liderazgo mundial en la matemática es su presentación en 1900 de un conjunto de problemas abiertos que incidió en el curso de gran parte de la investigación matemática del siglo XX.» (Wikipedia)

En esta unidad estudiaremos el concepto de *cardinal* de un conjunto. Con este concepto se pretende dar un significado a la noción de cantidad de elementos de un conjunto, en especial cuando este es “infinito”. Como se verá, y por extraño que parezca, aunque el conjunto involucrado sea infinito de todas maneras podremos definir el cardinal de ese conjunto. Con esto implicitamente decimos que no todos los conjuntos infinitos tendrán el mismo cardinal. Empezaremos recordando algunas cuestiones básicas de teoría de conjuntos que, a la vez, nos servirán como referencia para las notaciones.

## 2.1 Repaso nociones básicas sobre conjuntos

La siguiente introducción está lejos de ser exhaustiva, solo recordaremos conceptos ya sabidos. Nos dentendremos algo más en aquellos puntos que puedan ser nuevos.

**Definición 2.1.1** Dados dos conjuntos $A$ y $B$ denotaremos su *unión, intersección y diferencia* por: $A \cup B$, $A \cap B$ y $A - B$ repectivamente. Estos nuevos conjuntos se definen por:

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\},$$

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$$

y

$$A - B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\},$$

respectivamente.

Por lo general, tendremos que los conjuntos con los que trabajaremos estarán contenidos en un conjunto que llamaremos el universo $\mathcal{U}$. Aceptado la existencia de este universo, frecuentemente usaremos la siguiente notación para el *complemento*

$$A^c = \mathcal{U} - A.$$

Además consideraremos la operación de *diferencia simétrica*, definiéndose por:

$$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A).$$

**Definición 2.1.2** [Kuratowski] Dados dos elementos arbitrarios $a$ y $b$ se define el *par ordenado* $(a, b)$, por la siguiente igualdad

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

La propiedad más relevante de pares ordenados es que si $(a, b) = (c, d)$ entonces $a = c$ y $b = d$. La demostración de este hecho la dejamos de ejercicio. Ahora consideramos el conjunto formado por todos los pares ordenados de elementos pertenecientes a conjuntos dados.

**Definición 2.1.3** Sean $A$ y $B$ conjuntos. El *producto cartesiano* de $A$ con $B$, denotado por $A \times B$, es el siguiente conjunto:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}.$$

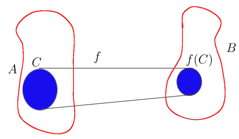
La siguiente definición es bien conocida.

**Definición 2.1.4** Una *función* $f$ de $A$ en $B$ (abreviaremos esta frase por el siguiente símbolo: $f : A \longrightarrow B$), es un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$ con la propiedad que: para todo $a \in A$ existe un único $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$.

Suponemos que ya todos conocemos estos conceptos, asi como los conceptos relacionados de: imagen, la notación $f(a)$, función inyectiva, suryectiva y biyectiva. Admitimos todo esto por sabido. Ahora introducimos una nueva notación.

**Definición 2.1.5** Por $B^A$ denotamos al conjunto de todas las funciones $f : A \longrightarrow B$.

Mas adelante daremos algunas explicaciones del porque de esta notación.
Seguidamente damos las definiciones de los conjuntos imagen y preimagen de un conjunto dado por una función.



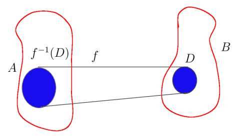
Conjunto $f(C)$

**Definición 2.1.6** Dada una función $f : A \longrightarrow B$ y subconjuntos $C \subset A$ y $D \subset B$ definimos:

$$f(C) = \{f(a) : a \in C\}$$

y

$$f^{-1}(D) = \{a \in A : f(a) \in C\}.$$



Conjunto $f^{-1}(D)$

Muy a menudo utilizaremos las propiedades que a continuación se enuncian. Las demostraciones, de las mismas, quedaran a cargo del alumno; ver Ejercicio 2.9.2 en la página 23.

**Proposición 2.1.1** Sea $f : A \longrightarrow B$ una función. Entonces

1. $f(C_1 \cup C_2) = f(C_1) \cup f(C_2)$.
2. $f^{-1}(D_1 \cup D_2) = f^{-1}(D_1) \cup f^{-1}(D_2)$.
3. $f(C_1 \cap C_2) \subset f(C_1) \cap f(C_2)$. Dar un ejemplo de que la igualdad no vale en general.
4. $f^{-1}(D_1 \cap D_2) = f^{-1}(D_1) \cap f^{-1}(D_2)$.

También vamos a considerar el *conjunto de partes* de un conjunto dado, esto es el conjunto de todos sus subconjuntos. Explícitamente:

$$\mathscr{P}(A) = \{C : C \subset A\}.$$

Se pueden efectuar uniones e intersecciones de una cantidad arbitraria de conjuntos. Para poder enunciarlas debemos definir antes lo que entendemos por una *familia subindicada de conjuntos* (o brevemente *familia de conjuntos*).

**Definición 2.1.7** Supongamos dado un conjunto $I$, al que nos referiremos como conjunto de índices, y una función $i : I \longrightarrow \mathscr{P}(A)$. Así tenemos que, para cada $i \in I$, existe un único subconjunto de $A$, que llamaremos $A_i$. Diremos entonces que $\{A_i\}_{i\in I}$ es una familia subindicada de conjuntos por el conjunto de índices $I$.

Ahora podemos definir la unión y la intersección de una familia de esta índole de la siguiente manera

**Definición 2.1.8** Definimos la unión e intersección de una familia $\{A_i\}_{i\in I}$ por:

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{a : \exists i \in I : a \in A_i\}$$

y

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{a : \forall i \in I : a \in A_i\}$$

respectivamente.

En el Ejercicio 2.9.1 en la página 22 podemos encontrar una serie de propiedades de uniones e intersecciones de familias de conjuntos. Estas propiedades las usaremos con frecuencia. Por último, en esta revisión de conjuntos, expondremos el axioma de elección. Este es un axioma de la teoría de conjuntos. Hay que aclarar que es posible axiomatizar la teoría de conjuntos. Ver por ejemplo Axiomas de Zermelo-Fraenkel y los Von Neumann-Bernays-Gödel. De estas axiomatizaciones el mencionado axioma forma parte. El axioma de elección ha ocasionado multitud de controversias en torno a su inserción o no en el restante conjunto de axiomas. No vamos a discutir aquí esta controversia ni tampoco la teoría axiomática de conjuntos pues esto nos desviaría de nuetros objetivos. Solo enunciaremos el *axioma de elección*, que usaremos frecuentemente.

**Axioma. (Elección)** Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de conjuntos no vacios. Entonces existe una función

$$f : I \longrightarrow \bigcup_{i\in I} A_i.$$

con la propiedad que:

$$\forall i \in I : f(i) \in A_i.$$

George Cantor
(1845-1918)

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (San Petersburgo, 3 de marzo de 1845-Halle, 6 de enero de 1918) fue un matemático y lógico nacido en Rusia. Fue inventor con Dedekind y Frege de la teoría de conjuntos, que es la base de las matemáticas modernas. Gracias a sus atrevidas investigaciones sobre los conjuntos infinitos fue el primero capaz de formalizar la noción de infinito bajo la forma de los números transfinitos (cardinales y ordinales). (Wikipedia)

## 2.2 Definición de conjuntos coordinables

En esta sección definimos el concepto clave de esta unidad, a saber el concepto de que dos conjuntos sean *coordinables*. Este concepto fue introducido y explotado por George Cantor. Damos una breve discución para motivar nuestra definición.

Cuando alguién cuenta algún conjunto de cosas, establece una correspondencia entre los objetos que cuenta y un subconjunto de números naturales. En el proceso de conteo, algún objeto fue el primero en contarse, y se habrá dicho: “uno” para ese objeto. El proceso continua asignando, sucesivamente, el número dos, tres, etc, a los restantes objetos a contar, hasta que no queden más por contarse. Así, si en este proceso llegamos hasta el 20, por ejemplo, decimos que hay 20 objetos. Aunque no haya que percatarse de eso a los fines prácticos, lo que también hicimos fue establecer una correspondencia o función entre los objetos y el conjunto $\{1, \ldots, 20\}$. Más aún, esta correspondencia fue biyectiva pues a cada número le correspondió solo uno de los objetos, es decir la función es inyectiva, y a cada objeto le correspondió algún número, es decir la función es suryectiva. En otras palabras contar un conjunto significa determinar el *intervalo inicial* del conjunto de los números naturales para el cual exista una correspondencia biyectiva con el conjunto que queremos contar. Conocer esto obviamente es inútil a los efectos de contar cosas de la vida cotidiana; no obstante, es una observación fundamental a los efectos de extender lo que llamamos “contar” a conjuntos infinitos. Lo que antecede sugiere la siguiente definición.

*Intervalo inicial:* un conjunto de la forma: $\{j \in \mathbb{N} : 1 \leq j \leq n\}$, para cierto $n \in \mathbb{N}$. De ahora en más, llamaremos a este conjunto: $\mathbb{N}_n$

**Definición 2.2.9** Dados dos conjuntos: $A$ y $B$, se dirá que ellos son coordinables, escribiremos $A \sim B$, si existe una función biyectiva $f : A \longrightarrow B$.

Esta es nuestra definición de que dos conjuntos, finitos o no, tengan la misma cantidad de elementos. Como veremos, no todos los conjuntos infinitos son coordinables entre si. Es bueno notar que no es difícil demostrar que $\sim$ es una relación de equivalencia (ver Ejercicio 2.9.3 en la página 23). Ahora veamos algunos ejemplos.

**Ejemplo 2.2.1** Consideremos la función $f : \mathbb{N} \longrightarrow \{x \in \mathbb{N} : x \text{ es par}\}$, definida por $f(x) = 2x$. Facilmente se ve que $f$ es una biyección entre los conjuntos indicados. De ahí que: $\mathbb{N} \sim \{x \in \mathbb{N} : x \text{ es par}\}$.

En este ejemplo observamos que, desde nuestro punto de vista, el conjunto de los naturales tiene la misma cantidad de elementos que el conjunto de los naturales pares. Es decir, según nuestra concepción de cantidad de elementos, el todo no es mayor que una de sus partes. Este ejemplo ya lo había mencionado Galileo Galilei.

**Ejemplo 2.2.2** Veamos que $\mathbb{R} \sim (0, 1)$. En este caso se puede considerar la función

$$f(x) := \tan\left(\frac{2\pi x - \pi}{2}\right).$$

Dejamos como ejercicio corroborar que la función dada establece una biyección entre los conjuntos involucrados.

Los dos ejemplos anteriores muestran una característica importante de los conjuntos infinitos; un subconjunto de ellos puede ser coordinable con el conjunto total. Mientras que, los conjuntos finitos carecen de esta característica. Ver Ejercicio 2.9.12 en la página 24

## 2.3 Conjuntos numerables

Hasta el momento hemos hablado de conjuntos finitos e infinitos. Apelamos a la idea que todos nos forjamos en nuestras vidas sobre el significado de estos términos . Pero en este momento estamos en condiciones, a partir de la noción de coordinalidad, de definir de forma matemáticamente precisa los anteriores significados.

**Definición 2.3.10** Diremos que un conjunto $A$ es:

1. **finito** si existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $A \sim \mathbb{N}_n$.
2. **infinito** si no es finito.
3. **numerable** si $A \sim \mathbb{N}$.
4. **a lo sumo numerable** si es finito o numerable.

En virtud de que $\sim$ es una realación de equivalencia, y especialmente por el carácter transitivo de esta, si $A \sim B$ y $B$ tiene alguna de las cuatro propiedades de la definición anterior entonces $A$ tendrá esa misma propiedad.

Recordemos que, por definición, una sucesión $\{a_i\}$ de elementos de un conjunto $A$ es una función $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$, donde $a_i = f(i)$. Vemos así que el concepto de numerabilidad está relacionado con el de sucesión. En efecto, si el conjunto $A$ es numerable entonces sus elementos se pueden disponer en una sucesión, donde ningún término se repita.

Es oportuno que observemos que un conjunto no puede ser numerable y finito a la vez; dicho de otra forma, los conjuntos numerables son infinitos. Esto, como hemos definido los conceptos numerable y finito de manera precisa, tiene que ser demostrado.

**Teorema 2.3.1** Un conjunto numerable es infinito.

*Dem.* Supongamos que, por lo contrario, existe un conjunto $A$ numerable y, a la vez, finito. Así tendríamos que: $A \sim \mathbb{N}$ y $A \sim \mathbb{N}_n$, para algún $n \in \mathbb{N}$. Como $\sim$ es una relación de equivalencia , deducimos que $\mathbb{N} \sim \mathbb{N}_n$. Sea, pues, $f$ una biyección: $f : \mathbb{N}_n \longrightarrow \mathbb{N}$. Ahora consideremos el natural[1]: $k := f(1) + \cdots + f(n) + 1$. Como $f$ es una biyección, existe algún $m$, con $1 \leq m \leq n$ tal que $f(m) = k$. Es decir

$$f(m) = f(1) + \cdots + f(n) + 1.$$

Seguramente, en el miembro derecho, uno de los términos es $f(m)$. Este se puede cancelar con el miembro de la izquierda, quedando

$$0 = f(1) + \cdots + f(m-1) + f(m+1) + \cdots + f(n) + 1.$$

Esta igualdad es absurda pues el miembro de la derecha es mayor que $1$. □

Vamos a ver algunos otros conjuntos que también son numerables. Empezamos por el siguiente.

**Proposición 2.3.2** Un subconjunto de un conjunto a lo sumo numerable es a lo sumo numerable.

*Dem*. Sea $A \subset B$, con $B$ a lo sumo numerable. Se puede suponer que $B \subset \mathbb{N}$. ¿Por qué? También podemos suponer que $A$ es infinito, puesto que si fuera finito no habría nada que probar. Definimos una función $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$ por inducción. Puesto que los números naturales son bien ordenados, tenemos que $A$ tiene un primer elemento, digamos, $a_1$. Definamos

$$f(1) = a_1.$$

Ahora definimos $f(j)$ por:

$$f(j) = \text{el primer elemento del conjunto: } A - \{f(i) : 1 \leq i \leq j-1\}. \tag{2.1}$$

Esta definición es posible pues $A - \{f(i) : 1 \leq i \leq j-1\} \neq \varnothing$, de lo contrario $A$ sería finito. Queda así definida la función $f$. Resta ver que es biyectiva.

Veamos, en primer lugar, que es inyectiva. Sea $i > j$. En virtud de (2.1), tenemos que $f(i) \notin \{f(k) : 1 \leq k \leq i-1\}$ de lo cual, y como $j < i$, deducimos que $f(i) \neq f(j)$.

Ahora veamos la suryectividad. Supongamos que existe un elemento $n \in A$ tal que $n \notin f(\mathbb{N})$. Recordemos la Definición (2.1). Ella nos dice, en virtud de que $n \notin f(\mathbb{N})$, que $f(i) < n$, para todo $i$. Esto es debido a que $f(i)$ es el mínimo del conjunto $A - \{f(k) : 1 \leq k \leq i-1\}$ y a que $n$ pertenece a ese conjunto. Tenemos, entonces, que $f(\mathbb{N}) \subset \mathbb{N}_n$. Como consecuencia del Ejercicio 2.9.6 en la página 23 concluímos que $f(\mathbb{N})$ es finito. Pero como $f$ es inyectiva $\mathbb{N} \sim f(\mathbb{N})$. Lo que es una contradicción pues $\mathbb{N}$ es infinito. □

**Proposición 2.3.3** El conjuntos $\mathbb{Z}$, de los enteros, es numerable.

*Dem.* Construímos una función que establece una biyección entre los enteros positivos y los naturales pares y entre los enteros negativos y los naturales impares. La función es la siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+2, & \text{si } x \geq 0; \\ -2x-1, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Dejamos como ejercicio demostrar que, efectivamente, la función $f$ es una biyección entre $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$. □

[1]El símbolo := se lee *igual por definición*. Esto es, el miembro de la izquierda es definido por el de la derecha

**Proposición 2.3.4** El conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es numerable.

*Dem.* La demostración de este enunciado ya no es tan sencilla. La idea se la debemos a G. Cantor. Primero presentaremos un razonamiento heurístico de la construcción de la biyección entre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ y $\mathbb{N}$. En rigor de verdad, a los efectos lógicos de la demostración, toda esta parte de la demostración se podría obviar; pudiéndose dar la fórmula (2.5) sin dar ninguna justificación de como se nos ocurrió. Elegimos el camino contrario, explicar como obtener la fórmula.

Dispongamos del conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ en un arreglo del tipo de una matríz infinita, como sigue:

$$\begin{tikzcd}
(1,1) \arrow[r] & (1,2) \arrow[dl] & (1,3) \arrow[dl] & (1,4) \arrow[dl] & \dots \\
(2,1) \arrow[urr] & (2,2) \arrow[dl] & (2,3) \arrow[dl] & & \\
(3,1) \arrow[uurrr] & (3,2) \arrow[dl] & & \ddots & \\
(4,1) & & \ddots & & \\
\vdots & & & &
\end{tikzcd}$$

Notar que, además de colocar los pares ordenados, hemos colocado algunas flechas. Estas flechas indican un camino. Este es el camino que seguiremos para enumerar los pares ordenados. Así, construiremos una función $f$ que hará las siguientes asignaciones:

$$\begin{aligned}
f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\
(1,1) &\longmapsto 1 \\
(1,2) &\longmapsto 2 \\
(2,1) &\longmapsto 3 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Observar que en nuestro camino vamos siguiendo diagonales de la matriz, de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo. Cuando llegamos al margen izquierdo de la matriz saltamos al borde superior, para luego descender por la siguiente diagonal. Estas diagonales tienen $1, 2, 3, \dots$ elementos. Agrupemos los números naturales de esa forma, es decir un primer grupo de uno, un segundo de dos y así sucesivamente:

$$\underbrace{1}_{1}\ \underbrace{2 \quad 3}_{2}\quad \underbrace{4 \quad 5 \quad 6}_{3}\quad \underbrace{7 \quad 8 \quad 9 \quad 10}_{4}\dots$$

Obsérvese que

$$\frac{j(j+1)}{2} = \text{número final del agrupamiento } j\text{-ésimo}. \tag{2.2}$$

Por ejemplo: el grupo cuarto tiene por su último elemento el 10, que es igual a 4.5/2. También tenemos que todos los pares ordenados sobre la misma diagonal, tienen la característica de que sus componentes suman lo mismo. Numeremos las diagonales, de izquierda a derecha, empezando por 1. Así tenemos que la diagonal 1 posee el elemento (1,1), la diagonal dos tiene los elementos $(1,2)$ y $(2,1)$, etc. Por lo observado, tenemos la siguiente fórmula, para cualquier par $(j,k)$

$$j+k-1 = \text{el número de la diagonal a la que pertenece } (j,k). \tag{2.3}$$

El objetivo es poner en correspondencia la diagonal $j$-ésima con el grupo $j$-ésimo de naturales. Notar que, en virtud de (2.2), tenemos que

$$\frac{(j+k-1)(j+k)}{2} = \begin{array}{l}\text{es el último número} \\ \text{del agrupamiento } j+k-1\text{-ésimo.}\end{array} \tag{2.4}$$

Así, si al primer miembro de (2.4) le restamos $(j-1)$, obtenemos el número que ocupa el lugar $j$ (contando de atrás para adelante) del agrupamiento $j+k-1$ de naturales. Con esto probamos que la función que queríamos construir es:

$$f(j,k) := \frac{(j+k-1)(j+k)}{2} - j + 1. \tag{2.5}$$

El resto de la demostración lo dejamos como ejercicio. Es decir la demostración que (2.5) es biyectiva (ver Ejercicio 2.9.7 en la página 23). □

Como consecuencia del Ejercicio 2.9.4 en la página 23 y de la Proposición anterior, podemos afirmar que si $A$ y $B$ son numerables, entonces $A \times B$ es numerable.

La siguiente propiedad también es útil para determinar si un conjunto es numerable.

**Proposición 2.3.5** Sean $A$ y $B$ conjuntos, con $B$ a lo sumo numerable.

1. Supongamos que existe una función inyectiva $f : A \longrightarrow B$. Entonces $A$ es a lo sumo numerable.

2. Supongamos que existe una aplicación suryectiva $f : B \longrightarrow A$. Entonces $A$ es a lo sumo numerable.

*Dem.* Veamos primero 1. La función $f$ es una biyección entre $A$ y su imagen $f(A)$. Como $B$ es a lo sumo numerable, y como consecuencia de la Proposición 2.3.2 en la página 8, tenemos que $f(A)$ es a lo sumo numerable. Ahora, como $A \sim f(A)$ tenemos que $A$ es a lo sumo numerable.

Ahora probemos 2. Como $f$ es suryectiva, tenemos que $\forall a \in A$: $f^{-1}(\{a\}) \neq \varnothing$. Ahora, por el axioma de elección sabemos que existe al menos una función $g : A \longrightarrow B$ tal que $\forall a \in A : g(a) \in f^{-1}(\{a\})$. Si pudiéramos probar que la función $g$ fuera inyectiva, entonces obtendríamos la tesis a partir del inciso 1, que ya fue demostrado. Veamos, pues, que $g$ es inyectiva. Supongamos que $a_1, a_2 \in A$ y que $a_1 \neq a_2$. Afirmamos que $f^{-1}(\{a_1\}) \cap f^{-1}(\{a_2\}) = \varnothing$. En efecto, si $b \in f^{-1}(\{a_1\}) \cap f^{-1}(\{a_2\})$ entonces por un lado $f(b) = a_1$ y por otro $f(b) = a_2$, lo que es una contradicción pues $a_1 \neq a_2$. Luego, como $g(a_1) \in f^{-1}(\{a_1\})$ y $g(a_2) \in f^{-1}(\{a_2\})$ se tiene que $a_1 \neq a_2$. □

Es interesante hacer notar que, utilizando el teorema anterior, podemos dar otra demostración, más concisa, de la Proposición 2.3.4 en la página anterior. En esta demostración hacemos uso del Teorema Fundamental de la Aritmética. Recordemos lo que este teorema nos dice:

**Teorema 2.3.2 (Fundamental de la Aritmética)** Todo entero positivo $n$ se representa, de manera única, de la forma $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_j^{\alpha_j}$, donde $p_1$, $p_2$,...,$p_j$ son números primos y $\alpha_1$, $\alpha_2$,...,$\alpha_j$ son enteros positivos.

*Dem. alternativa de la Proposición* 2.3.4 Definimos la siguiente función

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ (n, m) &\longrightarrow 2^n 3^m. \end{aligned}$$

Por el Teorema Fundamental de la Aritmética, y mas precisamente por la unicidad de la representación, tenemos, como $2$ y $3$ son primos, que si $2^n 3^m = 2^{n'} 3^{m'}$ entonces $n = n'$ y $m = m'$. Por consiguiente la función $f$ es inyectiva. Ahora, invocando la Proposición 2.3.5 en la página anterior concluímos que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es a lo sumo numerable. Lo que resta es, solo, ver que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ no es finito. Esto se puede probar observando que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ contiene el subconjunto $A = \{(1, n) : n \in \mathbb{N}\}$ que es coordinable con $\mathbb{N}$, ¿Cuál es la biyección?, y por consiguiente infinito. Así, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ no puede ser finito, si lo fuera, $A$ también lo sería, por ser un subconjunto de él. Lo que concluye la demostración. □

El influyente matemático Karl Weierstrass 1815-1897 fue de los primeros en reconocer la importancia del resultado que afirma la numerabilidad de $\mathbb{Q}$, observó que esto implicaba la existencia de una sucesión $\{a_n\}$ tal que dado cualquier número real $a$ existe una subsucesión $\{a_{n_k}\}$ tal que $\lim a_{n_k} = a$.

Ahora podemos demostrar uno de los resultados más interesantes de esta teoría.

**Teorema 2.3.3** El conjunto $\mathbb{Q}$ es numerable.

*Dem.* Sabemos que $\mathbb{Z}$ es numerable y dejamos como ejercicio demostrar que $\mathbb{Z} - \{0\}$ es numerable. Consecuentemente también $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\})$es numerable. Podemos definir la siguiente función:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} - \{0\} &\longrightarrow \mathbb{Q} \\ (n, m) &\longmapsto \frac{n}{m}. \end{aligned}$$

Esta aplicación es suryectiva. Por consiguiente, usando la parte 2. de la Proposición 2.3.5 en la página anterior, obtenemos que $\mathbb{Q}$ es a lo sumo numerable. Así $\mathbb{Q}$ es finito o numerable. Pero como $\mathbb{Q}$ es infinito, pues $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$, tenemos que $\mathbb{Q}$ es numerable. □

Traduciendo nuestra interpretación de que dos conjuntos coordinables tienen la misma cantidad de elementos, vemos que hay tantos racionales como naturales. Esta afirmación es un tanto desconcertante. Sabemos que los racionales son densos dentro de los reales. Esto quiere decir que dentro de cada intervalo abierto, por chico que este fuere, siempre hay números racionales dentro. Sin embargo, uno puede poner en correspondencia $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Q}$.

A esta altura pareciera que todos los conjuntos resultan ser numerables, pero ya veremos, en la sección siguiente, que no es así.

**Lema 2.3.1** Todo conjunto infinito tiene un subconjunto numerable.

*Dem.* Sea $A$ un conjunto infinito. Usaremos un argumento similar a la demostración de la Proposición 2.3.2 en la página 8. Definimos inductivamente una función $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$ de la siguiente manera. Puesto que $A$ es infinito, en particular, es no vacio, así podemos encontrar un elemento $a_1 \in A$. Ponemos entonces

$$f(1) = a_1.$$

Ahora, supongamos que tenemos definida la función $f$, de tal manera que sea inyectiva, para $j = 1, \ldots n$. Llamemos $f(j) = a_j$, para $j = 1, \ldots, n$. Como $A$ es infinito no puede ocurrir que $A - \{f(1), \ldots, f(n)\} = \varnothing$, de lo contrario $f$ además de ser inyectiva, de $\mathbb{N}_n$ en $A$, sería suryectiva; y de este modo $A \sim \mathbb{N}_n$ lo que implica que $A$ es finito, contrariando nuestra hipótesis. Por consiguiente, podemos encontrar $a_{n+1} \in A - \{f(1), \ldots, f(n)\}$. Definimos $f(n+1) = a_{n+1}$.

Ahora veamos que $f$ así definida es inyectiva. Sea $i \neq j$, podemos suponer que $i < j$. Sabemos que:

$$f(j) \notin \{f(1), \ldots, f(j-1)\}.$$

Seguramente $f(i)$ es un elemento del conjunto de la derecha, en la relación anterior, de modo que $f(j) \neq f(i)$, lo que demuestra la inyectividad. Ahora, $f$ es biyectiva de $\mathbb{N}$ en $f(\mathbb{N})$. Por consiguiente $f(\mathbb{N})$ es un subconjunto de $A$ numerable. $\square$

La siguiente proposición es útil para probar que algunos conjuntos son numerables. Antes de enunciarla, haremos una observación útil a la demostración. Afirmamos que si $A$ es un conjunto a lo sumo numerable, entonces existe una función suryectiva de $\mathbb{N}$ en $A$. En efecto, si $A$ es numerable, esto es claro puesto que existe una biyección de $\mathbb{N}$ en $A$. Si, por el contrario, $A$ es finito, entonces existe una biyección de $\mathbb{N}_n$, para algún $n \in \mathbb{N}$, en $A$; en este caso extendemos la biyección a todo $\mathbb{N}$ de cualquier forma[2], la función resultante es suryectiva, aunque ya no inyectiva.

**Proposición 2.3.6** Sea $I$ un conjunto de índices a lo sumo numerable. Supongamos que para cada $i \in I$ tenemos un conjunto $A_i$ que, también, es a lo sumo numerable. Entonces $\bigcup_{i \in I} A_i$ es a lo sumo numerable.

*Dem.* Como vimos, para cada $i \in I$ existe una función suryectiva $f_i : \mathbb{N} \longrightarrow A_i$. Definimos:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} \times I &\longrightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \\ (n, i) &\longmapsto f_i(n). \end{aligned}$$

Esta función es suryectiva, pues si

$$a \in \bigcup_{i \in I} A_i,$$

entonces $a \in A_{i_0}$, para algún $i_0$; ahora, utilizando la suryectividad de $f_{i_0}$, obtenemos un $n \in \mathbb{N}$ tal que $f_{i_0}(n) = a$. Es decir $f(n, i_0) = a$. Esto prueba que $f$ es suryectiva. Ahora, como $\mathbb{N} \times I$ es a lo sumo numerable, en rigor es numerable, y por la Proposición 2.3.5 en la página 10, obtenemos la tesis. $\square$

## 2.4 Un conjunto no numerable

Vimos que $\mathbb{N}$ es numerable, por definición, y que $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ son también numerables. Ahora mostraremos un conjunto que no es a lo sumo numerable. No será otro que el conjunto de los numeros reales.

**Teorema 2.4.4** El conjunto $\mathbb{R}$ no es a lo sumo numerable.

*Dem.* Supongamos, por el contrario, que $\mathbb{R}$ es a lo sumo numerable. En virtud de la Proposición 2.3.2 en la página 8, tendríamos que el intervalo $[0, 1)$ sería también a lo sumo numerable. Como él es infinito entonces $[0, 1)$ sería numerable. Sea, entonces, una función biyectiva $f : \mathbb{N} \longrightarrow [0, 1)$. Definamos $a_j := f(j)$.

Como es sabido, cada número real $r$ admite un desarrollo en expresión decimal infinita del tipo

$$r = 0.r_1 r_2 r_3 \ldots .$$

Un pequeño inconveniente lo presenta el hecho de que esta expresión decimal no es única, puesto que, por ejemplo: $2{,}000 \cdots = 1{,}999 \ldots$. Para abolir este problema convenimos que en nuestros desarrollos decimales no usaremos expresiones que tienen todos $9$ a partir de cierto momento. Con esta convención, el desarrollo decimal es único.

El arguemnto de esta demostración se conoce como argumento diagonal de Cantor. Es un técnica de demostración ideada por George Cantor. Actualmente es utilizada frecuentemente para resolver otros tipos problemas

[2] Por ejemplo: ponemos $f(j) = 1$ para $j > n$

A los fines de clarificar nuestra demostración, es útil poner a la sucesión $a_j$ de la siguiente manera :

$$\begin{aligned} a_1 &= 0.a_{1,1}a_{1,2}a_{1,3}\ldots \\ a_2 &= 0.a_{2,1}a_{2,2}a_{2,3}\ldots \\ &\vdots \\ a_n &= 0.a_{n,1}a_{n,2}a_{n,3}\ldots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Ahora definimos un número $r = 0.r_1r_2\cdots \in [0,1)$, tomando en cuenta los valores de $a_{i,j}$ sobre la digonal principal, que no será igual a ninguno de los $a_j$. La definición es la siguiente:

$$r_n := \begin{cases} 2, & \text{si } a_{n,n} < 2; \\ 1, & \text{si } a_{n,n} \geq 2. \end{cases}$$

Tenemos que $r \neq a_j$ para todo $j$, pues, estos números seguramente son distintos en el lugar $j$ de su desarrollo. Observar que si $a_j$ tiene un número menor que 2 en ese lugar, entonces $r_j = 2$, en cambio si un número mayor o igual que 2 ocupa el lugar $j$ de $a_j$, entonces $r_j = 1$. Por ende, como dijimos $r$ no es ningún $a_j$. Esto demuestra que la función $f$ no es suryectiva. $\square$

Utilizando el Ejemplo 2.2.2 en la página 7 y el Ejercicio 2.9.9 en la página 23, vemos que $\mathbb{R} \sim (0,1) \sim [0,1]$. Para cualquier intérvalo no trivial[3] $I$, ya sea abierto o cerrado, existe una biyección, de hecho una función lineal, de $I$ en el intérvalo $(0,1)$ o $[0,1]$, dependiendo de si $I$ es cerrado o abierto. Vemos así que todos los intérvalos no triviales son coordinables entre si y a su vez con $\mathbb{R}$.

## 2.5 Una aplicación: existencia de números trascendentes

En esta sección desarrollaremos una aplicación de los conceptos desarrollados en las secciones previas para demostrar un resultado de la matemática pura. Veremos como estos se pueden usar para demostrar la existencia de números trascendentes. Antes empezaremos con algunas definiciones.

Un polinomio es una expresión de la forma:

$$P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n,$$

donde $n \in \mathbb{N}$ se llama *grado* del polinomio y los $a_j$ *coeficientes* del polinomio. Escribiremos que $P \in \mathbb{Z}[X]$, $P \in \mathbb{Q}[X]$ o $P \in \mathbb{C}[X]$ si los coeficientes son enteros, racionales o complejos respectivamente. Una raíz del polinomio $P$ es un número $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que

$$P(\alpha) = 0.$$

Observar que un número racional $q = n/m$ es solución (o raíz del polinomio) de la siguiente ecuación:

$$P(X) := mX - n = 0.$$

Este polinomio $P$ es de primer grado y además $P \in \mathbb{Z}[X]$. Reciprocamente, si $q$ es solución de una ecuación polinomial $P(X) = 0$, donde $P$ es de primer grado y con coeficientes en $\mathbb{Z}$, entonces $q$ es racional.

Hemos aprendido que hay dos clases de reales, *racionales e irracionales*. En esta sección expondremos otros tipos de números reales, a saber los *trascendentes*.

[3] Por un intérvalo trivial entendemos un intérvalo que se reduce a un punto

Tomemos por caso el número $\sqrt{2}$, que como sabemos es irracional. A pesar de ello $\sqrt{2}$ es solución de una ecuación a coeficientes enteros de segundo grado. Nos referimos a:

$$X^2 - 2 = 0.$$

Vemos que $\sqrt{2}$ tiene, si se nos permite por el momento esta expresión, un grado de irracionalidad no muy grande, puesto que es solución de una ecuación de segundo grado a coeficientes enteros. A los números irracionales satisfaciendo esta propiedad se los llama *irracionales cuadráticos*. Nos preguntamos ahora si existiran números que, acorde con la perspectiva anterior, tengan el mayor grado de irracionalidad posible. Esto es que no sean solución de ninguna ecuación polinomial a coeficientes enteros, no importa del grado que fuere. Llamaremos a estos números, cuya existencia es hipotética por el momento, *trascendentes*. A los restantes números los llamaremos *algebraicos*. Denotaremos por $\mathbb{A}$ al conjunto de números algebraicos y por $\mathbb{T}$ al conjunto de números trascendentes. Cualquier número que sea obtenido por medio de raices, del grado que fuere, de números enteros son algebraicos. Esto indica que resolver el problema planteado puede no ser fácil.

En esta sección mostraremos el argumento usado por G. Cantor, en 1874, para demostrar la existencia de números trascendentes. La situación es la siguiente: Cantor demostró que el conjunto de los números algebraicos es numerable. Luego, si el conjunto de los trascendentes lo fuera, también lo sería el conjunto $\mathbb{R}$ (unión de dos numerables es numerable), lo cual no es cierto. Asi es que no solo los números trascendentes existen, sino que existen tantos como números reales hay. Dicho de otro modo, los números trascendentes son los más comunes entre los números reales. Los racionales, por el contrario, son una excepción, habiendo de ellos solo una cantidad numerable.

Es bueno comentar que hubo matemáticos que se opusieron a G.Cantor y a su Teoría de Conjuntos. Quizas la gota que rebalso el vaso fue la anterior demostración de la existencia de números trascendentes. Pues es una manifestación de que la teoría de Cantor podía ser utilizada para demostrar cuestiones matemáticas profundas que no aparentaban tener nada que ver con la teoría de conjuntos.

La clave de la demostración es el siguiente lema.

**Lema 2.5.2** El conjunto $\mathbb{Z}[X]$ es numerable.

*Dem.* Un polinomio en $\mathbb{Z}[X]$ y de grado $n$ se puede identificar con la $n+1$-upla de enteros formada por sus coeficientes. Teniendo en cuenta esto, definimos la siguiente función:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z}[X] &\longrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}^n \\ a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n &\longmapsto (a_0, a_1, \ldots, a_n) \end{aligned},$$

donde

$$\mathbb{Z}^n := \underbrace{\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}}_{n \text{ veces}}.$$

Por lo dicho con anterioridad, esta función es biyectiva.

Ahora bien, el conjunto $\mathbb{Z}^n$ es numerable. Podemos probar esto usando inducción y el hecho de que el producto cartesiano de conjuntos numerables es numerable. Así, como consecuencia de la Proposición 2.3.6 en la página 12 obtenemos que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}^n$$

es numerable. Como $f$ es una biyección, $\mathbb{Z}[X]$ es numerable. $\square$

Como corolario obtenemos que el conjunto de números algebraicos es numerable.

El problema de la existencia de números trascendentes fue resuelto por Carl Louis Ferdinand von Liouville en 1844. El demostró que el número

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}}$$

es trascendente. Posteriormente C. Hermite demostró en 1873 que $e = 2{,}7172\ldots$ es trascendente y Lindemann, en 1882, que $\pi$ también lo es.

Uno de los mayores opositores a la Teoría de Conjunto de Cantor fue Leopold Kronecker (1823-1891). Kronecker rechazó la demostración de existencia de números trascendentes de Cantor. Sostuvo que había que evitar los argumentos con conjunto infinitos y construir la matemática a partir de los números naturales por medio de argumentos finitistas.

**Corolario 2.5.1** El conjunto de números algebraicos es numerable.

*Dem.* Se tiene que
$$\mathbb{A} = \bigcup_{P \in \mathbb{Z}[X]} \{\alpha : P(\alpha) = 0\}.$$
Como es sabido de los cursos de álgebra, dado un polinomio $P$, de grado $n$, el conjunto $\{\alpha : P(\alpha) = 0\}$ es finito, es mas, tiene a lo sumo $n$ elementos. Ahora, en virtud de esto y la Proposición 2.3.6 en la página 12, obtenemos que $\mathbb{A}$ es a lo sumo numerable. Ciertamente, este conjunto es infinito, pues $\mathbb{N}$ está contenido en él, de modo que no tiene mas chance que la de ser numerable. □

Como otro corolario obtenemos que $\mathbb{T} \neq \varnothing$. Pues de lo contrario, como $\mathbb{R} = \mathbb{A} \cup \mathbb{T}$ y como la unión de a lo sumo numerables es a lo sumo numerable, tendríamos que $\mathbb{R}$ sería a lo sumo numerable, que es una contradicción. Pero en realidad podemos demostrar algo más fuerte que $\mathbb{T} \neq \varnothing$; podemos probar que $\mathbb{T} \sim \mathbb{R}$. Esto es consecuencia del siguiente teorema, que afirma que al sacarle un conjunto numerable a un conjunto coordinable con $\mathbb{R}$ no alteramos la cantidad de elementos del conjunto.

**Lema 2.5.3** Sean $A \sim \mathbb{R}$ y $B \sim \mathbb{N}$ tales que $B \subset A$. Entonces $A - B \sim \mathbb{R}$.

*Dem.* Tenemos que $A - B$ es infinito, de lo contrario, por la Proposición 2.3.6 en la página 12, $A = (A - B) \cup B$ sería a lo sumo numerable, contradiciendo nuestras hipótesis. Como $A - B$ es infinito, por el Lema 2.3.1 en la página 11, obtenemos un conjunto numerable $C \subset A - B$. Como $B \cup C$ y $C$ son numerables, existe una biyección $f : B \cup C \longrightarrow C$. Ahora definimos la siguiente función:

$$\begin{aligned} \hat{f} : A &\longrightarrow A - B \\ x \notin B \cup C &\longmapsto x \\ x \in B \cup C &\longmapsto f(x) \end{aligned} .$$

No es dificil demostar que $\hat{f}$ es una biyección, de donde $A - B \sim A \sim \mathbb{R}$. □

**Corolario 2.5.2** $\mathbb{T} \sim \mathbb{R}$.

*Dem.* Aplicando el lema anterior, con $A = \mathbb{R}$ y $B = \mathbb{A}$, obtenemos la tesis. □

## 2.6 Comparación de cardinales

En esta sección introduciremos una relación de orden entre conjuntos, esta, intuitivamente, corresponderá a la noción de: "tiene más elementos". Para conjuntos finitos todos estamos muy familiarizados con esta noción. También se suele decir que un conjuto tiene un cardinal mayor que el otro, para expresar esta idea de mayor cantidad de elementos. Informalmente ya hemos usado esta noción al decir que había más números reales que naturales. No obstante, en aquel momento, esa afirmación solo constituyó una interpretación de cierto resultado, otra manera de decirlo que fuera común a nuestra experiencia. En todo caso, no fue ni una definición ni nada que fuera plausible de ser demostrado. En esta sección, formalizaremos el concepto y posteriormente analizaremos algunas consecuencias de este.

Intuitivamente, decíamos que había más reales que naturales por que $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ y por que[4] $\mathbb{N} \nsim \mathbb{R}$. Si queremos comparar dos conjuntos cualesquiera, puede ocurrir que ninguno de ellos sea un subconjunto del otro, o más aún que estos conjuntos sean disjuntos. ¿Cómo procedemos en ese caso?. Veamos un ejemplo. Consideremos el conjunto

[4] Por $\nsim$ entendemos no coordinable

$\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \times \{0\} = \{(n, 0) : n \in \mathbb{N}\}$. ¿Cómo podríamos comparar este conjunto con $\mathbb{R}$?. Tenemos que $\mathbb{N}_0 \cap \mathbb{R} = \varnothing$, sin embargo, dentro de $\mathbb{R}$ tenemos un subconjunto, precisamente $\mathbb{N}$, que es coordinable con $\mathbb{N}_0$ a traves de la biyección definida por $f(n, 0) = n$. Podríamos decir entonces que, como $\mathbb{N}$ tiene menos elementos que $\mathbb{R}$ y $\mathbb{N}_0$ tiene la misma cantidad que $\mathbb{N}$, entonces $\mathbb{N}_0$ tiene menos que $\mathbb{R}$. Notemos que la función $f$, que es biyectiva de $\mathbb{N}_0$ en $\mathbb{N}$, es una aplicación inyectiva de $\mathbb{N}_0$ en $\mathbb{R}$. Esperemos que la discución de este ejemplo muestre la siguiente definición como natural.

**Definición 2.6.11** Dados dos conjuntos $A$ y $B$, diremos que $A \precsim B$ si existe una aplicación inyectiva $f : A \longrightarrow B$. Si, además, $A \nsim B$ diremos entonces que $A \prec B$.

**Ejemplo 2.6.3** Si $A$ es un conjunto infinito, entonces $\mathbb{N} \precsim A$. Esto es consecuencia del Lema 2.3.1 en la página 11
**Ejemplo 2.6.4** Si $A$ es un conjunto finito entonces $A \prec \mathbb{N}$. Esto es consecuencia de la definición y del Teorema 2.3.1 en la página 7.
**Ejemplo 2.6.5** Tenemos las siguientes relaciones

$$\mathbb{N} \sim \mathbb{Z} \sim \mathbb{Q} \sim \mathbb{A} \prec \mathbb{T} \sim \mathbb{R}.$$

**Ejemplo 2.6.6** Si $A \prec B$, $A \sim C$ y $B \sim D$, entonces $C \prec D$. A continuación justificamos esta afirmación. A causa de las hipótesis, existen: una función inyectiva $f : A \longrightarrow B$ y funciones biyectivas: $g : C \longrightarrow A$ y $h : B \longrightarrow D$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] & B \arrow[d, "h"] \\
C \arrow[u, "g"] \arrow[r, "h \circ f \circ g"] & D
\end{tikzcd}$$

La función $h \circ f \circ g$ es inyectiva, lo que demuestra que $C \precsim D$. Deberíamos ver que $C \nsim D$. Supongamos que, por el contrario, $C \sim D$. Sea $\phi : C \longrightarrow D$ una biyección entonces tendríamos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "h^{-1} \circ \phi \circ g^{-1}"] \arrow[d, "g^{-1}"'] & B \\
C \arrow[r, "\phi"] & D \arrow[u, "h^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

y, puesto que las funciones intervinientes son todas biyecciones, tendríamos que $A \sim B$, contradiciendo, esto, nuestras hipótesis.

En el siguiente teorema podemos ver que para cualquier conjunto $A$ hay otro conjunto que es mas grande, en el sentido de la Definición 2.6.11. Este conjunto será el conjunto de partes $\mathscr{P}(A)$.

**Teorema 2.6.5 (Cantor)** Para todo conjunto $A$, $A \prec \mathscr{P}(A)$.

*Dem.* Tenemos que probar que: $A \precsim \mathscr{P}(A)$ y $A \nsim \mathscr{P}(A)$. La siguiente función:

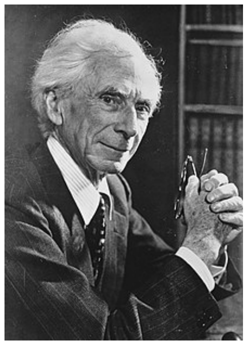
$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow \mathscr{P}(A) \\ a &\longmapsto \{a\} \end{aligned}$$

es inyectiva, de modo que $A \precsim \mathscr{P}(A)$.

Supongamos que existe una biyección $g : A \longrightarrow \mathscr{P}(A)$. Definimos el subconjunto $B$ de $A$ de la siguiente manera

$$B := \{a \in A : a \notin g(a)\}.$$

Como $g$ es suryectiva, existe un $b \in A$ tal que $g(b) = B$. ¿Será o no cierto que $b \in B$? Si es cierto, por definición de $B$, tendríamos que $b \notin g(b) = B$, lo que es una contradicción. Si fuera falso, es decir $b \notin B$, nuevamente por la definición de $B$, deducimos que $b \in g(b) = B$, otra contradicción. De modo que, no importando cual, todos los casos nos conducen a una contradicción que es fruto de suponer que $A \sim \mathscr{P}(A)$. □



Bertrand Russel (1872-1970), inspirado en la demostración de Cantor sobre la relación entre la cardinalidad de $A$ y $\mathscr{P}(A)$, construyo un *paradoja* (esto es un razonamiento aparentemente coprrecto que lleva a una contradicción) de la teoría de conjuntos. Esta paradoja consiste en definir

$$B = \{A : A \notin A\}.$$

Puede verse facilmente que cualquiera de las siguientes afirmaciones: $A \in A$ y $A \notin A$ lleva a una contradicción.

Una propiedad importante de $\precsim$ es su atisimetría, esta propiedad no es facil de probar.

**Teorema 2.6.6 (Schröder-Bernstein)** Si $A \precsim B$ y $B \precsim A$ entonces $A \sim B$.

*Dem.* Por las hipótesis, existen funciones inyectivas $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow A$. Si alguna de estas funciones fuera suryectiva, entonces el teorema ya estaría probado. De modo que podemos suponer que no son suryectivas. Notar que $g : B \longrightarrow g(B)$ es una función biyectiva. Existe por lo tanto una función inversa, que es biyectiva, $g^{-1} : g(B) \longrightarrow B$ . Construiremos una biyección de $\tilde{f} : A \longrightarrow B$, con el auxilio de $f$ y $g^{-1}$, de la siguiente manera: Buscamos un subconjunto $\tilde{A} \subset A$ de forma tal que la función:

$$\tilde{f}(a) := \begin{cases} f(a), & \text{si } a \in \tilde{A}; \\ g^{-1}(a), & \text{si } a \notin \tilde{A}. \end{cases} \tag{2.6}$$

sea biyectiva. Un primer requerimiento para esta función es que $\tilde{A}^c \subset g(B)$. Esto a causa de que si $a \in \tilde{A}^c$ entonces le aplicaremos $g^{-1}$ a ese $a$, por consiguiente $a$ debería estar en el dominio de $g^{-1}$, que es $g(B)$. Dicho de otro modo, se debe cumplir que $g(B)^c \subset \tilde{A}$. Por simplicidad pongamos $A_1 := g(B)^c$ y $B_1 := f(A_1)$. Ver la Figura 2.1 en la página siguiente

Una primera aproximación sería intentar la construcción con $\tilde{A} = g(B)^c$. Seguramente así la función $\tilde{f}$, ver (2.6), está bien definida. La función $\tilde{f}$ será suryectiva, pues $g^{-1}$ es suryectiva de $g(B)$ en $B$. No obstante, con esa elección de $\tilde{A}$, la función $\tilde{f}$ no es inyectiva pues cada elemento de $B_1$ es imágen, por esta $\tilde{f}$, de dos elementos, uno en $A_1$ y otro en $g(B)$. De modo que esta elección de $\tilde{A}$ todavía no nos sirve.

Lo que vamos a hacer ahora es agregarle a $\tilde{A}$ el conjunto de todos los elementos de $g(B)$ tales que $g^{-1}$ los lleva a $B_1$. Este conjunto es $A_2 := g(B_1)$. Definamos además $B_2 := f(A_2)$. Ahora $\tilde{f}$ llevará $A_1 \cup A_2$ en $B_1 \cup B_2$. Nos preguntamos, ahora, si la elección $\tilde{A} := A_1 \cup A_2$ nos servirá. Lamentablemente, la respuesta es no[5]. Al haber agrandado $\tilde{A}$ también se nos agrandó el conjunto de puntos en $B$ que son imagen de dos puntos, antes era el $B_1$, ahora apareció el $B_2$. De modo que continuamos el proceso, es decir, definimos $A_3 := g(B_2)$, $B_3 := f(A_3)$ y así sucesivamente, ver Figura 2.2 en la página 19 . Nunca llegaremos, en una cantidad finita de pasos, al conjunto $\tilde{A}$ con la propiedad deseada, puesto que al cabo de $n$ pasos se nos genera el conjunto $B_n$ donde las imagenes continuan superponiendosé. ¿Qué haremos entonces?. Lo que se hará es seguir este proceso indefinidamente, generando una sucesión de conjuntos $A_n$ y $B_n$, y luego definir:

$$\tilde{A} := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n. \tag{2.7}$$

Definimos inductivamente conjuntos $A_n$ y $B_n$ de la siguiente manera:

$$\begin{cases} A_1 = g(B)^c, & B_1 = f(A_1) \\ A_{n+1} = g(B_n), & B_{n+1} = f(A_{n+1}) \end{cases}.$$

[5]Podría ser que si, si la función $f$ hubiera sido biyectiva desde un principio, cosa que descartamos

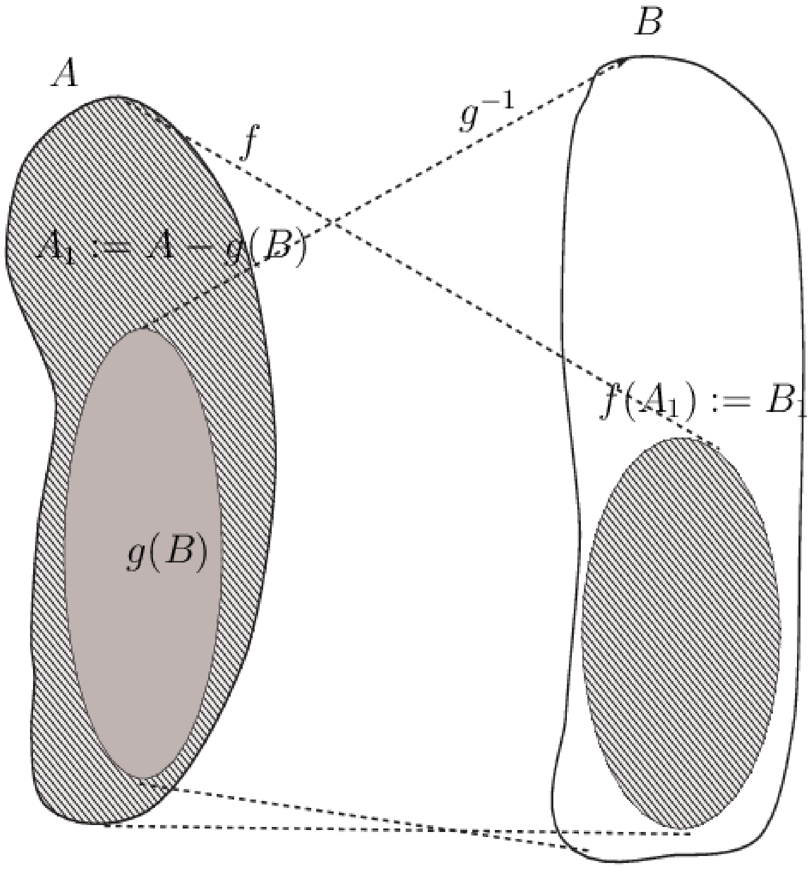



Figura 2.1: Las funciones $f$ y $g^{-1}$

Definamos $\tilde{A}$ como en (2.7) y $\tilde{f}$ como en (2.6). Veamos que $\tilde{f} : A \longrightarrow B$ es biyectiva.

Empecemos por la inyectividad. Sean $a, a' \in A$ dos puntos cualesquiera tales que $\tilde{f}(a) = \tilde{f}(a')$. Si $a$ y $a'$ están simultaneamente en $\tilde{A}$, o en $\tilde{A}^c$, tenemos que $a = a'$ como consecuencia de que $f$ y $g^{-1}$ son inyectivas. Consideremos entonces el caso $a \in \tilde{A}$ y $a' \notin \tilde{A}$. Debemos llegar a una contradicción pues estamos suponiendo indirectamente que $a \neq a'$, por estar en conjuntos disjuntos, y que $\tilde{f}(a) = \tilde{f}(a')$. Tenemos que, para algún $n \in \mathbb{N}$, $a \in A_n$. Además, por la definición de $\tilde{f}$, $f(a) = g^{-1}(a')$. Por consiguiente $g(f(a)) = a'$. Como $a \in A_n$, $f(a) \in B_n$ y $a' = g(f(a)) \in A_{n+1}$. Esto contradice que $a' \notin \tilde{A}$.

Veamos ahora la suryectividad. Sea $b \in B$ cualquier punto. Si $b \in B_n$, para algún $n$, como $B_n = f(A_n)$, ciertamente existe un elemento $a \in A_n$ tal que $f(a) = b$. Ahora, por la definición de $\tilde{f}$, $\tilde{f}(a) = f(a) = b$. Supongamos, pues, que $b$ no está en ningún $B_n$. Como una afirmación intermedia, probaremos que $g(b)$ no está en ningún $A_n$. Supongamos, por el contrario, que existe un $n$ tal que $g(b) \in A_n$. Tiene que ser $n > 1$, pues $A_1 = g(B)^c$ y $g(b) \in g(B)$. Así, por su definición y como $n > 1$, el conjunto $A_n$ es igual a $g(B_{n-1})$. De modo que $g(b) \in g(B_{n-1})$. Esto implica que existe un $b' \in B_{n-1}$ tal que $g(b) = g(b')$. Pero, como $g$ es inyectiva $b = b'$ y, por ende, $b \in B_{n-1}$. Contradiciendo esto que $b$ no estaba en ningún $B_n$. Probamos, así, que $g(b)$ no está en ningún $A_n$. Por lo tanto $\tilde{f}(g(b)) = g^{-1}(g(b)) = b$. Vale decir $b = \tilde{f}(a)$ con $a = g(b)$. Que era lo que queríamos probar. $\square$

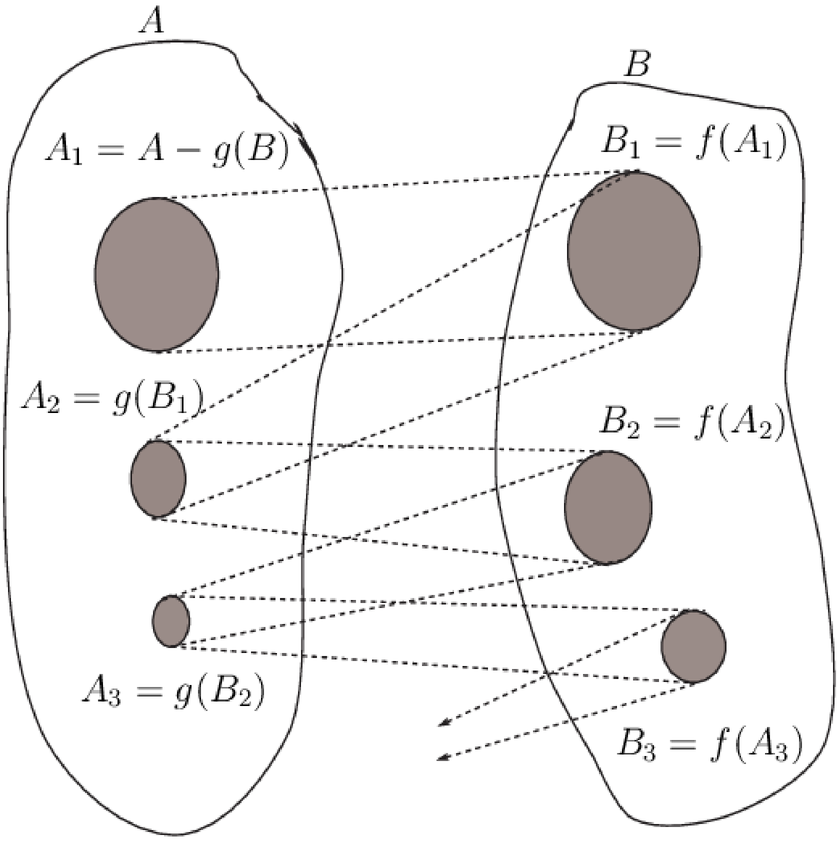
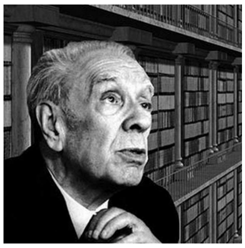



Figura 2.2: Demostración del teorema de Schröder-Berstein



«Borges y la matemática es un libro de ensayo de 2006 de Guillermo Martínez que relata como varias ideas en la matemática moderna se hallan en la obra literaria del autor argentino Jorge Luis Borges, incluyendo conceptos como la teoría de conjuntos, recursión, la teoría de caos, y sucesión matemática infinita. Aunque los enlaces más fuertes que Borges tuvo con la matemática son a través de la teoría de conjuntos infinitos de Georg Cantor. El título del cuento El Aleph se alude al uso de la letra hebrea de Cantor, álef ( ℵ ) por denotar cardinalidad de conjuntos transfinitos» (Wikipedia)

## 2.7 Números Cardinales

Hasta el momento hemos introducido la noción de cuando dos conjuntos tienen la misma cantidad de elementos. Pero no hemos definido el concepto de cantidad de elementos de un conjunto digamos $A$. A grandes rasgos esto debería ser una característica de todos los conjuntos coordinables con $A$ y se denominará *cardinal* del conjunto $A$ y lo denotaremos por $\#A$. La definición precisa demanda desarrollar la Teoría de números ordinales, que no es la intención de estas notas. Nos vamos a tomar la licencia de invocar el concepto de cardinal a partir de la idea intuitiva que dimos de este concepto.

Se sabe que los números cardinales están ordenados con la relación de orden definida en la sección anterior. Concretamente escribiremos $\#A < \#B$ cuando $A \prec B$. Se puede demostrar que este un buen orden, en el sentido que todo conjunto acotado inferiormente tiene primer elemento.

Desde George Cantor es costumbre denotar los números cardinales con letras del alfabeto hebreo. Así el primer *cardinal transfinito*[6] es el que le corresponde a los números naturales y se denota por $\aleph_0$. Como el conjunto de cardinales es bien ordenado existe un sucesor de $\aleph_0$ al que denominamos naturalmente $\aleph_1$. Al cardinal que corresponde a los números reales lo denominamos $c$. Sabemos que $\aleph_0 < \aleph_1 \leq c$ y George Cantor conjeturó que $c = \aleph_1$. Esta fue una de las más famosas conjeturas de la matemática y se denominó La Hipótesis del Continuo. George Cantor fracasó en hallar una demostración de la hipótesis del continuo. El gran matemático Kurt Gödel probó en 1938 que esta hipótesis es consistente con el sistema axiomático de la Teoría de conjuntos de Zermelo y Fraenkel, y por tanto puede ser tomado como un axioma nuevo para la teoría de conjuntos. Sin embargo, en 1963 Paul Cohen probó que la negación de la hipótesis del continuo también es consistente con los axiomas ZF, lo cual prueba que dicha hipótesis es totalmente independiente de los axiomas ZF. Esta situación es similar a la de

[6] Como es usual adoptaremos la denominación de transfinito en lugar de infinito como usamos hasta aquí

«Kurt Gödel; Brünn, Imperio austrohúngaro, actual República Checa, 28 de abril de 1906-Princeton, Estados Unidos; 14 de enero de 1978) fue un lógico, matemático y filósofo austríaco.
Se le considera uno de los lógicos más importantes de todos los tiempos. Su trabajo ha tenido un impacto inmenso en el pensamiento científico y filosófico del siglo XX. Gödel intentó emplear la lógica y la teoría de conjuntos para comprender los fundamentos de la matemática.
Se le conoce sobre todo por sus dos teoremas de la incompletitud, publicados en 1931. El más célebre establece que para todo sistema axiomático recursivo auto-consistente lo suficientemente poderoso como para describir la aritmética de los números naturales (la aritmética de Peano), existen proposiciones verdaderas sobre los naturales que no pueden demostrarse a partir de los axiomas. Para demostrar este teorema, desarrolló una técnica denominada ahora numeración de Gödel, que codifica expresiones formales como números naturales.
También demostró que la hipótesis del continuo no puede refutarse desde los axiomas aceptados de la teoría de conjuntos, si dichos axiomas son consistentes. » (Wikipedia)

las geometrías no euclídeas.

No contento con introducir los números cardinales transfinitos George Cantor introdujo una aritmética entre ellos. Así por ejemplo si $\aleph_a$ y $\aleph_b$ son dos cardinales, buscamos dos conjuntos disjuntos cualesquiera $A$ y $B$ tales que $\#A = \aleph_a$ y $\#B = \aleph_b$ y definimos

$$\begin{aligned}\aleph_a + \aleph_b &= \#A \cup B\\ \aleph_a \times \aleph_b &= \#A \times B\\ \aleph_a^{\aleph_b} &= \#A^B\\ 2^{\aleph_a} &= \#2^A\end{aligned}$$

Algunas relaciones que hemos demostrado

$$\begin{array}{lll}\forall\aleph : \aleph & < 2^{\aleph} & \text{(Por Teorema 2.6.5)}\\ \aleph_0 \times \aleph_0 & = \aleph_0 & \text{(Por Proposición 2.3.4)}\\ \aleph_0 + \aleph_0 & = \aleph_0 & \text{(Por Proposición 2.3.6)}\end{array}$$

## 2.8 Aplicaciones del Teorema de Schröder-Berstein

El teorema de Schröder-Berstein es una herramienta potente para probar coordinabilidad de conjuntos puesto que nos permite establecer coordinabilidad mostrando sólo que existen funciones inyectivas entre los conjuntos.

Habíamos visto que $\mathbb{R} \nsim \mathbb{N}$. ¿ Qué ocurre con $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$,...? ¿Serán estos conjuntos más "numerosos" que $\mathbb{R}$? Esto es: ¿Serán no coordinables con $\mathbb{R}$?. Recordando que $\#\mathbb{R} = c$ nos preguntamos si $c < c^2$. La respuesta a esta pregunta es negativa, es decir $\mathbb{R}^n \sim \mathbb{R}$ esto es $c^n = c$. Para ver esto basta demostrar que $(0,1)^2 \sim (0,1)$. El caso general es consecuencia del caso $n = 2$, usando inducción, el Ejemplo 2.2.2 en la página 7 y el Ejercicio 2.9.4 en la página 23.

**Teorema 2.8.7** $(0,1)^2 \sim (0,1)$. En otras palabras $c^2 = c$.

*Dem.* Observar que $(0,1) \precsim (0,1)^2$. Para demostrarlo considerar la función inyectiva $f(x) = (x, 1/2)$.

Veamos que $(0,1)^2 \precsim (0,1)$. Debemos construir una función inyectiva $f : (0,1)^2 \longrightarrow (0,1)$. Sea $(x,y) \in (0,1)^2$. Consideremos las expresiones decimales $x = 0.x_1x_2...$ e $y = 0.y_1y_2...$, donde $x_i$ e $y_i$ son enteros entre 0 y 9, y no son todos 9 a partir de un momento en adelante. Entonces escribimos:

$$f(x,y) := 0.x_1y_1x_2y_2....$$

Es decir $f$ intercala las expresiones decimales de $x$ e $y$. Esta función es inyectiva, puesto que dos expresiones decimales iguales tienen todos sus dígitos correspondientes iguales. Esto concluye la demostración. $\square$

Es bueno notar que la función $f$, definida en la demostración anterior, no es suryectiva. Un número que no es imagen de ningún par es $0{,}909090...$. ¿Por qué será esto?

Por el Teorema 2.6.5 en la página 16 tenemos que $\mathbb{N} \prec \mathscr{P}(\mathbb{N})$. Desmostramos, además, que $\mathbb{N} \prec \mathbb{R}$. Nos preguntamos, ahora, que relación unirá $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ con $\mathbb{R}$. Con el siguiente teorema probaremos que aquellos conjuntos son coordinables.

**Teorema 2.8.8** $\mathscr{P}(\mathbb{N}) \sim \mathbb{R}$. En otras palabras $2^{\aleph_0} = c$.

*Dem.* Probaremos que $\mathscr{P}(\mathbb{N}) \precsim \mathbb{R}$ y después que $\mathscr{P}(\mathbb{N}) \succsim \mathbb{R}$.

Como $\mathscr{P}(\mathbb{N}) \sim \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ ( Ejercicio 2.9.10 en la página 23), y por el Ejercicio 2.9.4 en la página 23 inciso 4, probaremos que $\mathscr{P}(\mathbb{N}) \precsim \mathbb{R}$ si podemos probar que $\mathbf{2}^{\mathbb{N}} \precsim \mathbb{R}$. Para este fin, consideremos la siguiente función:

$$\begin{aligned} T : \mathbf{2}^{\mathbb{N}} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto 0.f(1)f(2)f(3)... \end{aligned}.$$

Esto es la función $f$ se aplica en un número cuya expansión decimal tiene solo ceros y unos. Esta función es inyectiva, pues si

$$0.f(1)f(2)f(3)... = 0.g(1)g(2)g(3)...$$

Entonces, por la unicidad de la expansión decimal[7], tenemos que $f(1) = g(1)$, $f(2) = g(2)$,.... Por consiguiente las funciones son iguales. Lo que prueba la inyectividad. De este modo demostramos que $\mathbf{2}^{\mathbb{N}} \precsim \mathbb{R}$ y esto, por lo que explicamos anteriormente, implica que $\mathscr{P}(\mathbb{N}) \precsim \mathbb{R}$

Ahora debemos ver que $\mathscr{P}(\mathbb{N}) \succsim \mathbb{R}$. Utilizando los incisos 1. y 4. del Ejercicios 2.9.4 en la página 23, vemos que es suficiente probar que $\mathbb{R} \precsim \mathscr{P}(\mathbb{Q})$. Para hacer esto definimos la siguiente aplicación:

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathscr{P}(\mathbb{Q}) \\ r &\longmapsto \{q \in \mathbb{Q} : q < r\} \end{aligned}.$$

Veamos que la aplicación es inyectiva. Sean $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ números reales distintos, supongamos $r_1 < r_2$. Por la densidad de $\mathbb{Q}$, existe un $q_0 \in \mathbb{Q}$ tal que $q_0 \in (r_1, r_2)$. Así $q_0 \in \{q \in \mathbb{Q} : q < r_2\}$ y $q_0 \notin \{q \in \mathbb{Q} : q < r_1\}$. De modo que

$$\{q \in \mathbb{Q} : q < r_1\} \neq \{q \in \mathbb{Q} : q < r_2\}.$$

Es decir $T$ es inyectiva. □

Para finalizar demostraremos que $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \sim \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$. Mas que el resultado en sí, vamos a resaltar su demostración, pues contiene una idea interesante.

**Proposición 2.8.7** $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \sim \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$. En lenguaje de cardinales $\aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$.

*Dem.* Dado un conjunto $X$ cualquiera, podemos interpretar una función $f \in X^{\mathbb{N}}$ como una sucesión de elementos de $X$, a la que podemos disponer de la siguiente manera:

$$f = (f(1), f(2), f(3), ...). \tag{2.8}$$

Si $X = \mathbb{N}$ entonces la sucesión será de números naturales y si $X = \mathbf{2}$ entonces la sucesión será de ceros y unos.

Interpretemos el segundo miembro de (2.8) como una palabra infinita. Si $X = \mathbb{N}$, esta palabras se compone de "letras" que pueden ser cualquier número natural. Si $X = \mathbf{2}$, esta "palabra" se escribe con solo dos "letras" el 0 y el 1. La pregunta es: ¿Cómo podemos "traducir" una palabra escrita con un alfabeto de infitas letras, a uno con solo dos?. La solución a esto es ingeniosa. Sea $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, usaremos el signo 1 para denotar las comas en la sucesión $f$ y pondrémos tantos ceros como indiquen las cantidades $f(j)$.

$$\begin{array}{rcl} T \quad : \quad \mathbb{N}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbf{2}^{\mathbb{N}} \\ f = (f(1), f(2), f(3), ...) & \longmapsto & (\underbrace{0, ..., 0}_{f(1) \text{ ceros}}, 1, \underbrace{0, ..., 0}_{f(2) \text{ ceros}}, 1, ....) \end{array}$$

Veamos que esta función es inyectiva. Sean $f, g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, con $f \neq g$. Sea

$$j = \text{mín}\{i : f(i) \neq g(i)\}.$$

[7] Recordemos que puede haber expresiones decimales distintas que representan el mismo número, estas son las expresiones que tienen todos nueves a partir de un momento en adelante, como por ejemplo 1=0.999....No obstante este problema no se nos presenta aquí pues la expresiones decimales que consideramos tienen solo 0 y 1

Tenemos que $f(i) = g(i)$ para $i < j$. Escribamos las dos sucesiones

$$(\underbrace{0,...,0}_{f(1)\text{ ceros}},1,...,1,\underbrace{0,...,0}_{f(j-1)\text{ ceros}},1,\underbrace{0,...,0}_{f(j)\text{ ceros}},1,....)$$

y

$$(\underbrace{0,...,0}_{g(1)\text{ ceros}},1,...,1,\underbrace{0,...,0}_{g(j-1)\text{ ceros}},1,\underbrace{0,...,0}_{g(j)\text{ ceros}},1,....)$$

Notar que los primeros $j-1$ grupos de ceros son iguales, pues $f(i) = g(i)$ para $i < j$, por consiguiente los primeros $j-1$ unos estan en la misma posición en las dos sucesiones. Pero $f(j) \neq g(j)$ y, por consiguiente, el grupo $j$-ésimo de ceros debe diferir en las dos sucesiones. Esto fuerza que si, por ejemplo, $f(j) < g(j)$, entonces la sucesión $f$ tendrá un uno donde la $g$ tiene un cero.

Así $T(f) \neq T(g)$ y la función es inyectiva. Esto prueba que $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \precsim \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$. La otra desigualdad es más fácil de obtener pues

$$\begin{array}{rl} \mathbf{2} \precsim \mathbb{N} & \text{pues unos es finito y el otro no} \\ \mathbf{2}^{\mathbb{N}} \precsim \mathbb{N}^{\mathbb{N}} & \text{por el Ejercicio 2.9.5} \end{array}$$

□

Existe una demostración mucho más de que $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \precsim \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$. Sin embargo preferimos la dada arriba por la idea interesante y potencialmente útil que contiene. Expogamos esta segunda demostración.

$$\begin{array}{rl} \mathbb{N} \precsim \mathbf{2}^{\mathbb{N}} & \text{Teorema de Cantor} \\ \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \precsim (\mathbf{2}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}} & \text{Ejercicio 2.9.5} \\ \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \precsim \mathbf{2}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} & \text{Ejercicio 2.9.5} \\ \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \precsim \mathbf{2}^{\mathbb{N}} & \text{Proposición 2.3.4} \\ \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \precsim \mathbf{2}^{\mathbb{N}} & \text{Ejercicio 2.9.4 inciso 3.} \end{array}$$

## 2.9 Ejercicios

**Ejercicio 2.9.1** Sea $f : A \longrightarrow B$ una función cualquiera. Supongamos que $\{A_i\}_{i\in I}$ y $\{B_i\}_{i\in I}$ son familias subindicadas de conjuntos, donde los $A_i$ y $B_i$ son subconjuntos de $A$ y $B$ respectivamente. Demostrar las siguientes propiedades:

1. $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i\in I} A_i^c$.
2. $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i\in I} A_i^c$.
3. $f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$.
4. ¿Qué ocurre con $f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)$?
5. $f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$.

6. $f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$.

**Ejercicio 2.9.2** Demostrar las propiedades de la Proposición 2.1.1 en la página 5

**Ejercicio 2.9.3** Probar que $\sim$ es una relación de equivalencia.

**Ejercicio 2.9.4** Supongamos que $A \sim B$ y $C \sim D$.

1. Demostrar que $\mathscr{P}(A) \sim \mathscr{P}(B)$.
2. Demostrar que $A \times C \sim B \times D$.
3. Demostrar que $A^C \sim B^D$.
4. Si $A \precsim C$ entonces $B \precsim D$.

**Ejercicio 2.9.5** Sean $A$, $B$ y $C$ conjuntos no vacios. Demostrar que

1. $\left(A^B\right)^C \sim A^{B\times C}$.
2. Si $A \precsim B$ entonces $A^C \precsim B^C$.

**Ejercicio 2.9.6** Demostrar que un subconjunto de un conjunto finito es finito.

**Ejercicio 2.9.7** Demostrar que la función $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ definida por:

$$f(j,k) := \frac{(j+k-1)(j+k)}{2} - j + 1,$$

es una biyección.

**Ejercicio 2.9.8** Encontrar, de manera explícita, una cantidad numerable de subconjuntos de $\mathbb{N}$, mutuamente disjuntos y cada uno de ellos numerable. Usar esto para dar otra demostración de que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es numerable.

**Ejercicio 2.9.9** Demostrar, exhibiendo una biyección, que $(0,1) \sim [0,1]$

**Ejercicio 2.9.10** Demostrar que el conjunto $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ es coordinable con el conjunto $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$, donde $\mathbf{n} = \{0, 1, ..., n-1\}$. Recordar que, si $A$ y $B$ son conjuntos, $B^A := \{f : f : A \longrightarrow B\}$. De este modo $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ es el conjunto de funciones $f : \mathbb{N} \longrightarrow \{0,1\}$.

**Ejercicio 2.9.11** Demostrar que, para cualquier conjunto $A$, $\mathscr{P}(A) \sim \mathbf{2}^A$.

**Ejercicio 2.9.12** Demostrar que son equivalentes:

1. $A$ es infinito.
2. $A$ es coordinable con un subconjunto propio, es decir: Existe $B \subset A$, con $B \neq A$, tal que $A \sim B$.

**Ejercicio 2.9.13** Sea $A$ un conjunto infinito y $B \subset A$ numerable. Supongamos que $A - B$ es infinito. Demostrar que $A - B \sim A$.

**Ejercicio 2.9.14** Sean $A$ y $B$ conjuntos y supongamos que existe una funci'on $f$ de $A$ en $B$ suprayectiva. Demostrar que $\#B \leq \#A$.

**Ejercicio 2.9.15** Demostrar que el conjunto formado por todos los subconjuntos de $\mathbb{N}$ que son finitos, es numerable. ¿Qué ocurrira con el conjunto de todos los subconjuntos infinitos?

**Ejercicio 2.9.16** Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de intervalos de $\mathbb{R}$. Suponer que los conjuntos en la familia son mutuamente disjuntos, es decir: $A_i \cap A_j = \varnothing$ si $i \neq j$. Demostrar que el conjunto $\{A_i : i \in I\}$ es a lo sumo numerable.

**Ejercicio 2.9.17** Recordemos que una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice nodecreciente, si para todos $x, y \in \mathbb{R}$, tales que $x < y$, se tiene que $f(x) \leq f(y)$. Dada una función nodecreciente, demostrar que el conjunto de todos los puntos de discontinuidad es a lo sumo numerable. *Ayuda*: Demostrar en primera instancia que los límites laterales:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) \quad \text{y} \quad \lim_{x\to a^-} f(x)$$

existen para todo $a \in \mathbb{R}$. Luego aplicar el ejercicio anterior.

**Ejercicio 2.9.18** Demostrar que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{R}$ ($c^{\aleph_0} = c$).

**Ejercicio 2.9.19** Como aprendimos $\mathbb{N} \sim \mathbb{Q}$, esto significa que existe una aplicación biyectiva $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$, que nos permite enumerar $\mathbb{Q}$ como una suceción $r_j := f(j)$. Definimos la aplicación:

$$\begin{aligned} T : C(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ f &\longmapsto T_f \end{aligned}$$

donde

$$T_f(j) := f(r_j).$$

1. Demostrar que $T$ es inyectiva. Por consiguiente $C(\mathbb{R}) \precsim \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

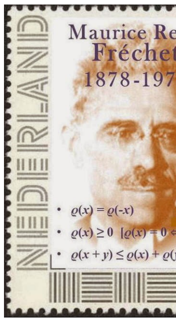
2. Usando el inciso anterior, demostrar que $C(\mathbb{R}) \sim \mathbb{R}$, donde $C(\mathbb{R})$ es el conjunto de las funciones continuas de $\mathbb{R}$ en si mismo.

# 3 Nociones Básicas de Topología

## 3.1 Espacios Métricos

### 3.1.1 Enfoque axiomático de las estructuras métricas

Uno de los conceptos fundamentales de la matemática es la noción de *distancia*. Esta noción está presente en multitud de actividades humanas, desde el comercio a la descripción del cosmos. En matemática medimos distancias en el plano y en el espacio y en las representaciones algebraicas de ellos $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$. Más generalmente en *espacios euclideanos* $n$-dimensionales $\mathbb{R}^n$. Desde comienzos del siglo XX los matemáticos fueron extendiendo la noción de distancia a conjuntos compuestos de los más diversos entes, matrices, funciones, funciones que actúan sobre funciones, etc. Esta ubicuidad y multiplicidad del concepto de distancia justifica un tratamiento axiomático de él.




Maurice René Fréch (Maligny, 2 de septi de 1878 - París, 4 de de 1973) fue un matemático francés Trabajó en topología de la probabilidad y estadística. Sus tra análisis funcional lo empujaron a buscar marco más general espacio euclídeo introduciendo la no espacio métrico.

**Definición 3.1.1** Sea $X$ un conjunto y $d : X \times X \to \mathbb{R}$ una función. Diremos que $d$ es una *métrica* o *distancia* sobre $X$ si satisface las siguientes propiedades:

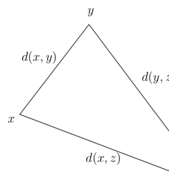
i) $\forall x \forall y : d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

ii) $\forall x \forall y : d(x, y) = d(y, x)$.

iii) $\forall x \forall y \forall z : d(x, z) \leq d(x, y) + d(x, z)$.

Si $d$ es una métrica sobre $X$ diremos, entonces, que el par $(X, d)$ es un *espacio métrico*.

La desigualdad iii) en la definición anterior se denomina *desigualdad triágular*, esto debido a que se la puede pensar como la relación entre un lado de un triágulo y la suma de los otros dos, ver figura en el margen.




Desigualdad tria

Veamos ahora algunos ejemplos de espacios métricos.

**Ejemplo 3.1.1** La función módulo $|.| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ induce una métrica sobre $\mathbb{R}$, a saber: para $x, y \in \mathbb{R}$ definimos

$$d(x, y) = |x - y|. \tag{3.1}$$

**Ejemplo 3.1.2** Sobre $\mathbb{R}^n$ consideremos la función distancia $d$ definida por

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}, \tag{3.2}$$

donde $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ e $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$. Dejamos al alumno la demostración de que $d$ es una métrica, ver Ejercicio 3.1.1 en la página 35. Esta métrica es conocida como *métrica euclidea* y es la métrica con la que estamos más familiarizados.

**Ejemplo 3.1.3** Dado cualquier conjunto no vacío $X$, la función definida por:

$$d(x, y) := \begin{cases} 1, & \text{si } x \neq y; \\ 0, & \text{si } x = y. \end{cases}$$

es una métrica. Esta métrica se denomina *métrica discreta*.

**Ejemplo 3.1.4** Dado un conjunto $X$, definamos $\mathcal{A}(X)$ como el conjunto de todas las funciones acotadas $f : X \to \mathbb{R}$. Entonces $(\mathcal{A}(X), d)$ es una métrica, donde:

$$d(f, g) := \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|. \tag{3.3}$$

**Ejemplo 3.1.5** Sea $\mathcal{C}([0,1])$ el conjunto de funciones continuas $f:[0,1]\to\mathbb{R}$. Entonces $(\mathcal{C}([0,1]),d)$ es un espacio métrico, donde:

$$d(f,g) := \int_0^1 |f(x)-g(x)|dx. \tag{3.4}$$

**Ejemplo 3.1.6** [Métrica caballo ajedrez] Sobre el conjunto $\mathbb{Z}^2$ definimos la métrica $d$ por $d((x_0,y_0),(x_1,y_1))$ como la menor cantidad de movidas necesarias dar con un caballo de ajedrez para ir desde $(x_0,y_0)$ a $(x_1,y_1)$.
**Ejemplo 3.1.7** [Métrica de las geodesias] Sobre el conjunto

$$S^2 := \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 | x^2+y^2+z^2=1\right\}.$$

definimos para $P,Q\in S^2$ por

$$d_g(P,Q) = \operatorname{arc\,cos}(\langle P,Q\rangle), \quad P,Q\in S^2,$$

donde $\langle P,Q\rangle$ denota el producto interno entre $P$ y $Q$ y para la función arc cos tomamos la rama con valores en el intervalo $[0,\pi]$. Entonces $d_g$ es una métrica, que se denomina *métrica geodésica*. La afirmación de que $d_g$ es métrica amerita justificación.

Recordemos que la *desigualdad de Cauchy Schwartz* afirma que

$$\langle P,Q\rangle \leq \|P\|\|Q\|, \tag{3.5}$$

donde $\|P\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Además la igualdad en la desigualdad de Cauchy-Schwartz sólo es posible cuando $P=\lambda Q$ con $\lambda\geq 0$.

Si $d_g(P,Q)=0$ significa que $\langle P,Q\rangle = 1$. Como $\|P\|=\|Q\|=1$ tendríamos la igualdad en la desigualdad de Cauchy-Schwartz, luego $P=\lambda Q$. Tomandos normas en la última igualdad $|\lambda|=1$, de lo que terminamos por deducir que $\lambda=1$, vale decir $P=Q$.

La afirmación $d_g(P,Q)=g(Q,P)$ es inmediata de la conmutatividad del producto interno.

Para la desigualdad triangular tomemos $P,Q$ y $R$ en $S^2$. Definamos los vectores

$$U = P-\langle P,Q\rangle Q, \quad V = R-\langle R,Q\rangle Q.$$

Entonces un cálculo sencillo muestra queda

$$\langle U,Q\rangle = 0 = \langle V,Q\rangle. \tag{3.6}$$

Además

$$\begin{aligned}\|U\|^2 &= \langle P-\langle P,Q\rangle Q, P-\langle P,Q\rangle Q\rangle \\ &= 1-\langle P,Q\rangle^2 = 1-\cos^2(d_g(P,Q)) = \operatorname{sen}^2(d_g(P,Q)).\end{aligned} \tag{3.7}$$

De manera similar

$$\|V\|^2 = \operatorname{sen}^2(d_g(R,Q)). \tag{3.8}$$

Entonces

$$\begin{array}{lll}\langle P,R\rangle & = \langle U+\langle P,Q\rangle Q, V+\langle R,Q\rangle Q\rangle & \\ & = \langle U,V\rangle + \langle P,Q\rangle\langle R,Q\rangle & \text{usando (3.6)} \\ & \geq -\|U\|\|V\| + \cos(d_g(P,Q))\cos(d_g(R,Q)) & \text{Cauchy-Schwartz} \\ & = -\operatorname{sen}(d_g(P,Q))\operatorname{sen}(d_g(R,Q)) & \\ & + \cos(d_g(P,Q))\cos(d_g(R,Q)) & \text{por (3.7) y (3.8)} \\ & = \cos(d_g(P,Q)+d_g(R,Q)) & \text{fórmula adición}\end{array}$$

Se puede asumir que $d_g(P,Q)+d_g(R,Q)\leq\pi$ de lo contrario la desigualdad triángular es inmediata. Tomando arc cos en el primer y último término de la cadena de igudades anteriores inferimos la desigualdad triangular.

### 3.1.2 Bolas, esferas y diámetro

Definido lo que es una métrica y un espacio métrico, pasamos a definir algunas entidades de carácter geométrico, esta son el concepto de *bola*, *esfera* y *diámetro*.

**Definición 3.1.2** Sea $(X,d)$ un espacio métrico, $x \in X$ y $r > 0$.

a) Definimos la bola abierta $B(x,r)$, con centro en $x$ y radio $r$, por:

$$B(x,r) := \{y \in X : d(x,y) < r\}.$$

b) Definimos la esfera $E(x,r)$, con centro en $x$ y radio $r$, por:

$$E(x,r) := \{y \in X : d(x,y) = r\}.$$

Todos tenemos una concepción de lo que entendemos por una bola, quizas se nos venga a la mente, y de hecho es un ejemplo, un círculo en $\mathbb{R}^2$. No obstante, debemos proceder con cuidado. Estamos considerando métricas generales, ocurrirá que en algunos espacios métricos las bolas no se parecen a lo que comunmente entendemos por este concepto. Esto es debido a que en nuestra vida cotidiana estamos habituados a considerar la métrica euclidea, pero en este curso trabajaremos con métricas muy generales.

En $\mathbb{R}$, con la métrica dada por el módulo, la bola centrada en $x \in \mathbb{R}$ y radio $r$, no es mas que el intervalo $(x-r, x+r)$. En la figura **??** en la página ?? mostramos varios ejemplos de bolas en diferentes métricas sobre $\mathbb{R}^2$, las demostraciones las desarrollaremos en la clase.

Todavía mas curiosas son las bolas respecto a la métrica discreta. Sea $(X,d)$ un espacio métrico discreto y $x \in X$, entonces:

$$B(x,r) = \begin{cases} \{x\}, & \text{si } r < 1; \\ X, & \text{si } r \geq 1. \end{cases}$$

La esfera la podemos pensar como el borde de la bola, que no está incluida en la bola abierta. También tenemos en este caso situaciones que, en un primer momento, nos pueden parecer extrañas. Como casi siempre, el mayor "grado de extrañamiento" se consigue con la métrica discreta. En este caso, si $(X,d)$ es un espacio métrico discreto, tenemos:

$$E(x,r) = \begin{cases} \{x\}, & \text{si } r = 0; \\ X - \{x\}, & \text{si } r = 1; \\ \varnothing, & \text{si } r \neq 0 \text{ y } r \neq 1. \end{cases}$$

Pasamos a definir, ahora, el concepto de diámetro de un conjunto.

**Definición 3.1.3** Sea $(X,d)$ un espacio métrico y $A \subset X$. Definimos el diámetro del conjunto $A$ por:

$$\delta(A) := \sup_{x,y \in A} d(x,y).$$

Eventualmente, podría ocurrir que $\delta(A) = +\infty$.

La figura **??** en la página ?? explica, por si sola, el significado del concepto de diámetro.

**Definición 3.1.4** Un conjunto no vacío $A$ se dirá acotado si $\delta(A) < \infty$.

Es oportuno aclarar que el concepto de acotación depende del conjunto en si mismo y de la métrica. Así puede ocurrir que un mismo conjunto sea acotado con una métrica y con otra no.

**Ejemplo 3.1.8** En el espacio $\mathbb{R}$, con la métrica del módulo, el conjunto $(0,+\infty)$ es no acotado. En cambio, con la métrica discreta todo conjunto, y en particular el dado, lo es.

También definiremos la distancia de un punto a un conjunto dado.

**Definición 3.1.5** En un espacio métrico $(X, d)$ se define la distancia de $x \in X$ a $A \subset X$ como
$$d(x, A) := \inf_{y \in A} d(x, y).$$

Demostremos que
$$\delta(B(x, r)) \leq 2r.$$
Efectivamente, dados $z$ e $y$ en la bola $B(x, r)$, tenemos, por la desigualdad triangular
$$d(y, z) \leq d(y, x) + d(x, z) \leq 2r.$$
Tomando supremo sobre $z$ e $y$ obtenemos la afirmación. Notar que ya no es cierto que $\delta(B(x, r)) = 2r$. En efecto, por ejemplo si $(X, d)$ es un espacio métrico discreto, entonces $\delta(B(x, 1/2)) = 0$.

Ahora probaremos que la unión de conjuntos acostados es, a la vez, un conjunto acotado.

**Proposición 3.1.1** Sean $(X, d)$ un espacio métrico, $A$ y $B$ subconjuntos acotados de $X$. Entonces $A \cup B$ es acotado.

*Dem.* Tenemos que probar que:
$$\delta(A \cup B) < \infty.$$
Para esto, es suficiente demostrar que $\forall x, y \in A \cup B$ existe una constante $M$, independiente de $x$ e $y$, tal que:
$$d(x, y) \leq M.$$
Sean $z \in A$ y $w \in B$ dos cualesquiera puntos en los conjuntos indicados. A travez de esta demostración estos puntos estaran fijos, no importandonos que puntos sean, cualquiera conduce al mismo argumento. Tomemos, ahora, $x, y \in A \cup B$ cualesquiera, pero ya no estaran fijos. Si ocurriera que $x$ e $y$ estuvieran simultaneamente en uno mismo de los conjuntos, supongamos $A$, entonces tenemos que:
$$d(x, y) \leq \delta(A),$$
de modo que, en este caso, existe una constante $M$ con la propiedad deseada. Debemos considerar el caso en que $x$ e $y$ esten en "conjuntos diferentes", digamos $x \in A$ e $y \in B$. Entonces tenemos:
$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, w) + d(w, y) \leq \delta(A) + d(z, w) + \delta(B).$$
El miembro derecho, de la desigualdad anterior, es independiente de $x$ e $y$, de modo que quedó demostrada la proposición. □

### 3.1.3 Conjuntos abiertos

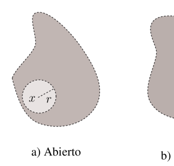
Uno de los conceptos más importantes, sino el más, de la Topología es el de conjunto abierto.

**Definición 3.1.6** Sea $(X, d)$ un e.m[a]. Diremos que $A \subset X$ es un conjunto abierto si $\forall x \in A \exists r > 0$ tal que:
$$B(x, r) \subset X.$$

[a] Abreviación para espacio métrico

En la figura **??** en la página ?? podemos ver un ejemplo de conjunto abierto, en $\mathbb{R}^2$ con la métrica euclidea, y otro que no lo es. La diferencia es que en el conjunto b) el borde (en la parte recta del conjunto) forma parte del mismo conjunto, entonces si $x$ está en este borde, toda bola centrada en $x$ contiene puntos fuera del conjunto.

Un ejemplo, esperable, de conjunto abierto lo constituyen las bolas abiertas.




Conjuntos abie
no abiertos

**Proposición 3.1.2** Toda bola abierta es un conjunto abierto.

*Dem.* Sea $x \in X$ y $r > 0$. Consideremos la bola abierta $B(x, r)$. Para demostrar que la bola es abierta, hay que encontrar, para todo $y \in B(x, r)$, un $r' > 0$ tal que

$$B(y, r') \subset B(x, r). \tag{3.9}$$

Sea, pues, $y \in B(x, r)$. Tomemos:

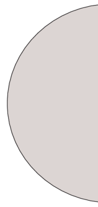
$$r' := r - d(x, y).$$

Ver la figura **??** en la página ?? para un gráfico de la situación. Este $r'$ es mayor que cero. En efecto, como $y$ está en la bola, tenemos que $d(x, y) < r$.

Ahora, veamos la inclusión 3.9. Sea $z \in B(y, r')$, entonces tenemos, por la desigualdad triangular, que:

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < d(x, y) + r' < r.$$

Así $z \in B(x, r)$, que es lo que queríamos demostrar. □



Construc

Ahora damos dos propiedades de conjuntos abiertos que tendrán mucha trascendencia más adelante.

**Teorema 3.1.1** Sea $I$ un conjunto de índices y $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia de conjuntos abiertos. Entonces:

a) La unión $\bigcup_{i \in I} A_i$ es un conjunto abierto.

b) Si $I$ es finito, la intersección $\bigcap_{i \in I} A_i$ es un conjunto abierto.

*Dem.* Empecemos por la propiedad a). Sea $x$ un punto en la unión, es decir existe algún índice $i_0$ tal que $x \in A_{i_0}$. Como este $A_{i_0}$ es un conjunto abierto, deberá existir $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset A_{i_0}$. Claramente la bola $B(x, r)$, al ser un subconjunto de $A_{i_0}$ es un subconjunto de la unión de todos los $A_i$, que es lo que teníamos que probar.

Ahora veamos b). Podemos suponer que, para algún $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $I = \{1, \ldots, n\}$. Sea $x$ un punto en la intersección. En este caso, $x \in A_i$, para todo $i$. Como cada $A_i$ es abierto, existen radios $r_i$ tales que $B(x, r_i) \subset A_i$. Definamos:

$$r := \text{mín}\{r_1, \ldots, r_n\}.$$

El mínimo existe, y es mayor que cero, pues hay una cantidad finita de radios. Ahora tenemos que, como $r \leq r_i$, $B(x, r) \subset B(x, r_i) \subset A_i$, para todo $i \in I$. Por consiguiente $B(x, r)$ es un subconjunto de la intersección de todos los $A_i$. □

Es interesante notar que, en un e.m. discreto $(X, d)$, todo subconjunto $A \subset X$ es abierto. Efectivamente, en un e.m. discreto $B(x, 1/2) = \{x\}$ para todo $x \in X$. En particular, si $x \in A$ entonces $B(x, 1/2) \subset A$.

### 3.1.4 Interior de un conjunto y entornos

Como es costumbre, empezamos con una definición.

**Definición 3.1.7** Sea $(X, d)$ un e.m. y $A \subset X$. Definimos el interior de $A$, denotaremos este conjunto $A^0$, como el conjunto de todos los puntos $x \in A$ tales que existe un $r > 0$ que satisface $B(x, r) \subset A$.

Hay una gran similitud de esta definición con la de conjunto abierto. De hecho se tiene que un conjunto $A$ es abierto si y solo si $A = A^0$.

En $\mathbb{R}^2$ con la métrica euclidea podemos visualizar el interior de un conjunto como la parte del conjunto que no está sobre el borde de él, ver figura 3.1.

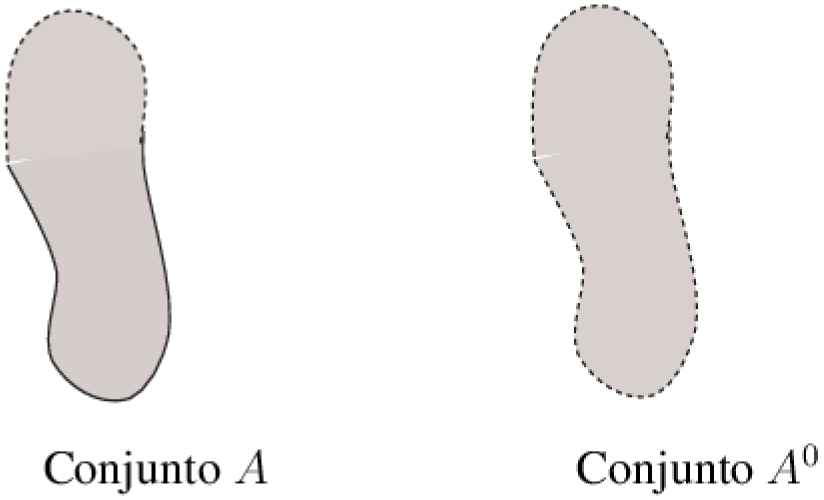



Figura 3.1: Interior de un conjunto

Tenemos una caracterización alternativa del interior de un conjunto.

**Teorema 3.1.2** El interior de un conjunto $A$, es el mayor abierto contenido en $A$.

*Dem.* El hecho de que $A^0$ es abierto y está contenido en $A$, es consecuencia inmediata de la definición y lo dejamos como ejercicio. Vamos a demostrar que es el mayor de los abiertos contenido en $A$. Vale decir, hay que demostrar que si $B$ es un abierto contenido en $A$, entonces $B \subset A^0$. Sea pues $B$ abierto y $B \subset A$. Tomemos $x \in B$. Como $B$ es abierto existe un $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset B \subset A$. Así, necesariamente $x \in A^0$. Lo que demuestra que $B \subset A^0$. □

Daremos algunas propiedades de la operación de tomar el interior de un conjunto.

**Teorema 3.1.3** Sea $(X, d)$ un e.m., $A$ y $B$ subconjuntos de $X$.

a) $(A^0)^0 = A^0$

b) Si $A \subset B$ entonces $A^0 \subset B^0$.

c) $(A \cap B)^0 = A^0 \cap B^0$.

*Dem.* a) Como dijimos, $A^0$ es abierto, por ende $(A^0)^0 = A^0$.

b)$A^0$ es un abierto y además está contenido en $B$, por consiguiente $A^0 \subset B^0$.

c) Como $A \cap B \subset A$ tenemos que, a acausa de b), $(A \cap B)^0 \subset A^0$. De la misma manera $(A \cap B)^0 \subset B^0$. Por consiguiente $(A \cap B)^0 \subset A^0 \cap B^0$. Para la otra inclusión, tener en cuenta que $A^0 \cap B^0$ es un abierto contenido en $A \cap B$, por lo tanto $A^0 \cap B^0 \subset (A \cap B)^0$. □

Introducimos otro concepto.

**Definición 3.1.8** En un e.m. el exterior de un conjunto $A$ es el interior de su complemento. En símbolos ponemos Ext$(A) = (A^c)^0$.

**Definición 3.1.9** Sea $(X, d)$ un e.m. y $x \in X$. Diremos que $V$ es un entorno de $x$ si $x \in V^0$. También denotaremos por $E(x)$ al conjunto de todos los entornos de $x$.

El anterior es otro de los conceptos claves de la topología. Observemos que un conjunto abierto es entorno de cada uno de sus puntos. La recíproca es también cierta, es decir si un conjunto es entorno de cada uno de sus puntos entonces es abierto.

**Proposición 3.1.3** La intersección de una cantidad finita de entornos de un punto $x$ en un e.m. $(X, d)$ es, a su vez, un entorno de $x$.

*Dem.* Sean $V_i$, $i = 1, ..., n$, entornos de $x \in X$. Por definición $x \in V_i^0$ para todo $i = 1, ..., n$. Entonces $x \in V_1^0 \cap \cdots \cap V_n^0 = (V_1 \cap \cdots \cap V_n)^0$. De modo que $V_1 \cap \cdots \cap V_n$ es un entorno de $x$. Así queda establecida la propiedad que expresa la proposición. □

### 3.1.5 Conjuntos cerrados y clausura de conjuntos

Ahora introduciremos el concepto de conjunto cerrado.

**Definición 3.1.10** Un conjunto es cerrado si su complemento es abierto.

Esta sencilla definición hace las nociones de conjunto cerrado y abierto duales[1], así veremos que cada propiedad de conjuntos abiertos induce una correspondiente propiedad sobre conjuntos cerrados. Tener en cuenta esto en la siguiente teorema.

**Teorema 3.1.4** Sea $I$ un conjunto de índices y $\{F_i\}_{i \in I}$ una familia de conjuntos cerrados. Entonces:

a) La intersección $\bigcap_{i \in I} F_i$ es un conjunto cerrado.

b) Si $I$ es finito, la unión $\bigcup_{i \in I} F_i$ es un conjunto cerrado.

*Dem.* La afirmaciones a) y b) de este teorema son duales de las a) y b) del Teorema 3.1.1 en la página 30. Por ejemplo, para demostrar a), observemos que, por definición, la siguiente es una familia de conjuntos abiertos: $\{F_i^c\}_{i \in I}$. De modo que por a) del Teorema 3.1.1 en la página 30 tenemos que:

$$\bigcup_{i \in I} F_i^c$$

es un conjunto abierto. De allí que el complemento de este conjunto es cerrado. Pero el complemento de este conjunto es, en virtud de las leyes de de Morgan, la intersección de todos los $F_i$. La propiedad b) se obtiene de la misma manera. □

[1] Dos tipos de conceptos son duales cuando cualquier afirmación sobre uno de ellos se convierte en una afirmación sobre el otro. En este proceso de "transformación de enunciados" hay que traducir cada concepto por su dual. Por ejemplo, en el caso que nos ocupa, un conjunto cerrado muta en abierto y las intersecciones mutan en uniones y viceversa. Uniones e intersecciones son duales como consecuencia de las leyes de de Morgan

Ejemplos de conjuntos cerrados son los intervalos cerrados de $\mathbb{R}$, con la métrica del módulo; las bolas cerradas en cualquier e.m., es decir los conjuntos de la forma:

$$B'(x,r) := \{y \in X : d(x,y) \leq r\}.$$

Las esferas también resultan ser conjuntos cerrados. Por otra parte, como en un e.m. discreto todo conjunto es abierto, todo conjunto, también, es cerrado. La demostración de que los anteriores son conjuntos cerrados las dejamos como ejercicios. A lo largo de esta materia veremos varios ejemplos mas de conjuntos cerrados, encomendamos al estudiante prestar atención a ellos, puesto que tan importante como aprender las definiciones y propiedades de determinado concepto, es conocer, y poder construir ejemplos de ese concepto.

El concepto de interior de un conjunto tiene su dual correspondiente.

**Definición 3.1.11** Sea $(X,d)$ un e.m.. La clausura de un conjunto $A \subset X$ se define y denota como se ve a continuación:

$$\overline{A} := (\text{Ext}(A))^c = \left[(A^c)^0\right]^c.$$

En $\mathbb{R}^2$ con la métrica euclidea podemos visualizar la clausura de un conjunto como el conjunto más su "borde", ver la figura 3.2.

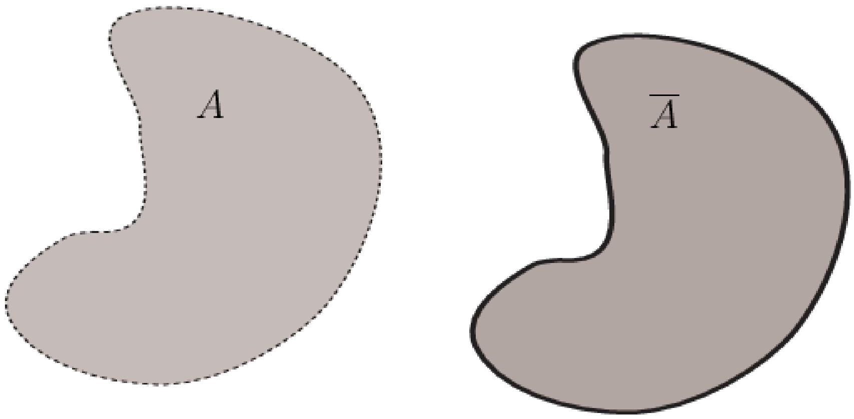



Figura 3.2: Clausura de un conjunto

Tenemos la siguiente caracterización alternativa de clausura de un conjunto.

**Proposición 3.1.4** Sea $(X,d)$ un e.m. y $A \subset X$. Son equivalentes:

a) $x \in \overline{A}$.

b) $\forall r > 0 : B(x,r) \cap A \neq \varnothing$.

*Dem.*Veamos primero que a)$\Rightarrow$b). Sea $x \in \overline{A}$. Por definición $x \notin (A^c)^0$. Así, por definición de conjunto interior, tenemos que para todo $r > 0$, $B(x,r) \not\subseteq A^c$. Es decir que para todo $r > 0$ existe $y = y_r \in B(x,r) \cap A$. Esto prueba b).

Veamos ahora que b)$\Rightarrow$a). Sea, pues, $x$ un punto satisfaciendo la propiedad b). Toda bola de radio $x$ y centro $r > 0$ corta al conjunto $A$. De modo que no existe una de tales bolas con la propiedad que este completamente contenida en el conjunto $A^c$. Esto nos dice, por definicion de conjunto interior, que $x$ no está en el interior de $A^c$. Dicho de otro modo $x \in \left[(A^c)^0\right]^c$. $\square$

Las propiedades del interior tienen propiedades duales correspondientes para la clausura.

**Teorema 3.1.5** Sean $(X,d)$ un e.m., $A$ y $B$ subconjuntos de $X$. Entonces tenemos que:

a) $A \subset \overline{A}$.

b) El conjunto $\overline{A}$ es el menor conjunto cerrado que contiene a $A$.

c) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

d) Si $A \subset B$ entonces $\overline{A} \subset \overline{B}$.

e) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

f) $x \in \overline{A} \Leftrightarrow d(x,A) = 0$

*Dem.* Veamos a) cuya propiedad dual es que $C^0 \subset C$. En efecto, tenemos que:

$$(A^c)^0 \subset A^c.$$

Ahora, tomando complementos a ambos miembros[2], obtenemos que:

$$\overline{A} = \left[(A^c)^0\right]^c \supset (A^c)^c = A.$$

Esto prueba a).

Veamos b). El conjunto $\overline{A}$ es cerrado pues es el complemento del abierto $(A^c)^0$. Sea $F$ un conjunto cerrado que contiene a $A$, hay que demostrar que $F \supset \overline{A}$. Entonces, tomando complemento, tenemos que $F^c$ es un abierto contenido en $A^c$. Como $(A^c)^0$ es el mayor abierto contenido en $A^c$, tenemos que $F^c \subset (A^c)^0$. Ahora tomemos complemento a esta última inclusión y obtenemos

$$F \supset \left[(A^c)^0\right]^c = \overline{A},$$

que es lo que queríamos demostrar.

Como corolario de b), obtenemos que $A$ es cerrado si, y solo si, $\overline{A} = A$. A su vez, como corolario de esto, obtemos c) y d).

Veamos e). Tenemos que:

$$\begin{aligned}
\overline{A \cup B} &= \left[((A \cup B)^c)^0\right]^c && \text{Definición clausura}\\
&= \left[(A^c \cap B^c)^0\right]^c && \text{Leyes de de Morgan}\\
&= \left[(A^c)^0 \cap (B^c)^0)\right]^c && \text{Propiedad dual del interior}\\
&= \left[(A^c)^0\right]^c \cup \left[(B^c)^0)\right]^c && \text{Leyes de de Morgan}\\
&= \overline{A} \cup \overline{B} && \text{Definición de clausura}
\end{aligned}$$

Que es lo que queríamos demostrar.

Por último demostremos f). Si $x \in \overline{A}$ entonces, como consecuancia de la proposición 3.1.4 en la página anterior, tenemos que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe un $y_n \in A$ tal que $d(x,y_n) < 1/n$, ver figura **??** en la página ??.

Tenemos asi que

$$d(x,A) = \inf_{y \in A} d(x,y) \leq d(x,y_n) \leq \frac{1}{n}.$$

Y como la desigualdad es válida para todo $n \in \mathbb{N}$, obtenemos que $d(x,A) = 0$.

Recíprocamente, si $d(x,A) = 0$ entonces, por definición del ínfimo, para todo $r > 0$ existe un $y = y_r \in A$ tal que $d(x,y) < r$. Así tenemos que $B(x,r) \cap A \neq \varnothing$, para todo

[2] La operación de complemento invierte las inclusiones

$r > 0$. Esto, como sabemos, es equivalente a afirmar que $x \in \overline{A}$. □

Por último estamos interesados en definir aquellos puntos que estan en lo que hemos denominado, sin ninguna precisión, borde de un conjunto.

**Definición 3.1.12** Diremos que $x$ pertenece a la *frontera* de un conjunto $A$ cuando $x$ está en la clausura de $A$ y en la clausura de $A^c$. Llamamos al conjunto de todos los puntos frontera de $A$ la *frontera* de $A$ y denotaremnos este conjunto por $\partial A$.

La costumbre de denotar la frontera de un conjunto con el signo de una derivada proviene, suponemos, del calculo sobre variedades donde se observa que cierta integral de una "derivada" sobre un conjunto es igual a la integral de la función sobre la frontera del conjunto. Este resultado se conoce como Teorema de Stokes. El Teorema fundamenteal del Cálculo es un caso particular de este teorema. Es en este contexto donde se consigue una conexión entre derivadas y fronteras.

### 3.1.6 Ejercicios

**Ejercicio 3.1.1** Demostrar que los siguientes son espacios métricos.

a) $(\mathbb{R}, d)$ donde $d$ está definida en 3.1 en la página 26.

b) $(\mathbb{R}^n, d)$ donde $d$ está definida en 3.2 en la página 26. *Ayuda:* Usar la desigueladad de Cauchy-Schwartz $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2}$$

c) $(\mathbb{R}^n, d)$, donde $d$ es la función definida en **??** en la página ??.

d) $(\mathbb{R}^n, d)$, donde $d$ es la función definida en **??** en la página ??.

e) Probar que la métrica discreta es, valga la redundancia, una métrica.

f) Demostrar que las ecuaciones 3.3 en la página 26 y 3.4 en la página 27 definen métricas.

**Ejercicio 3.1.2** Sea $(X, d)$ un espacio métrico. Demostrar que para todos $x$ , $y$ y $z$ en $X$ tenemos que:

$$|d(x, y) - d(x, z)| \leq d(y, z).$$

**Ejercicio 3.1.3** Sea $(X, d)$ un espacio métrico y $A \subset X$. Demostrar que:

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y).$$

**Ejercicio 3.1.4** Sea $(X, d)$ un e.m., probar que las siguientes funciones son métricas sobre $X$:

a) $d_1(x, y) :=$ mín$\{1, d(x, y)\}$.

b) $d_2(x, y) := \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$.

**Ejercicio 3.1.5** Sea $(X, d)$ un e.m.. Demostrar que $\forall x, y \in X$, existe entornos $U \in E(x)$ y $V \in E(y)$ tales que $U \cap V = \varnothing$.

**Ejercicio 3.1.6** Sea $(X, d)$ u e.m.. Demostrar las siguientes propiedades:

a) Si $A \subset X$ es finito, entonces $X - A$ es abierto.

b) Si $A \subset X$ es abierto, entonces para todo conjunto $B$ se tiene que $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$.

c) Si $A$ es abierto entonces $A \subset (\overline{A})^0$.

d) Si $A$ es cerrado entonces $(\overline{A})^0 \subset A$.

e) $(\overline{A})^0 = \overline{\left(\overline{((\overline{A})^0)}\right)}$.

f) $\overline{(A^0)} = \overline{\left(\overline{((A^0))}^0\right)}$.

g) $A^0 = \left(\overline{A^c}\right)^c$.

h) $\partial A = \overline{A} - A^0$.

i) Ext$(A) = (\overline{A})^c$.

j) $\partial A^0 \subset \partial A$ y $\partial \overline{A} \subset \partial A$.

k) $\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B$, Si $\overline{A} \cap \overline{B} = \varnothing$ entonces vale la igualdad en la anterior inclusión.

l) $d(A, B) = d(\overline{A}, \overline{B})$, donde por definición:

$$d(A, B) := \operatorname*{ínf}_{x \in A, y \in B} d(x, y).$$

**Ejercicio 3.1.7** Dar ejemplos de:

a) $A$ y $B$ abiertos de $\mathbb{R}$ tales que los siguientes conjuntos sean todos diferentes: $\overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A \cap B}$, $\overline{A} \cap B$, $A \cap \overline{B}$.

b) $A$ y $B$ intervalos de $\mathbb{R}$ tales que $A \cap \overline{B} \not\subseteq \overline{A \cap B}$.

c) $A \subset \mathbb{R}^2$ tal que $\partial A = A$.

d) $A$ y $B$ subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ tales que entre los siguientes conjuntos no valga ninguna inclusión: $\partial A \cup \partial B - \partial(A \cap B)$ y $\partial(A \cup B)$.

**Ejercicio 3.1.8** Demostrar que los siguientes conjuntos de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, son abiertos con la métrica euclidea:

a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : m < d\big((x, y), (0, 0)\big) < n\}$, donde $n, m \in \mathbb{N}$ y $m < n$.

b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1,\ 0 < y < 1,\ x \neq \frac{1}{n}\ \forall n \in \mathbb{N}\}$.

c) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x, y, z \in \mathbb{Z}\}^c$.

**Ejercicio 3.1.9** Hallar la frontera y el diámetro del conjunto $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$.

**Ejercicio 3.1.10** Demostrar que el diámetro de la dola unitaria en $\mathbb{R}^2$ con la métrica euclidea es 2.

**Ejercicio 3.1.11** Un e.m. $(X, d)$ se dice ultramétrico si $d$ verifica la desigualdad ultramétrica, es decir:

$$d(x, y) \leq \text{máx}\{d(x, z), d(z, y)\}.$$

Sea $X$ un e.m. ultramétrico. Demostrar que:

a) Si $d(x, y) \neq d(y, z)$ entonces $d(x, z) = \text{máx}\{d(x, y), d(y, z)\}$.

b) Si $y \in B(x, r)$ entonces $B(x, r) = B(y, r)$. Como consecuencia las bolas abiertas son también conjuntos cerrados.

c) Si $y \in \overline{B(x, r)}$ entonces $\overline{B(y, r)} = \overline{B(x, r)}$. Las bolas cerradas son, también, conjuntos abiertos.

d) Si dos bolas tienen intersección no vacía entonces una está contenidad en la otra.

e) La distancia de dos bolas abiertas distintas de radio $r$, contenidas en una bola cerrada de radio $r$, es igual a $r$.

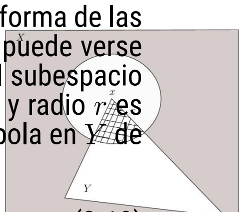
**Ejercicio 3.1.12** Si $(X, d)$ es un e.m. demostrar que

$$d'(x, y) = \log(1 + d(x, y))$$

define una nueva métrica sobre $X$. ¿Que tipo de conjunto son las bolas de esta métrica?

## 3.2 Subespacios de un espacio métrico

Sea $(X, d)$ un e.m. e $Y \subset X$. La métrica $d$ es una función definida sobre $X \times X$, luego podemos considerar su restricción a $Y \times Y$. Esta restricción también cumplirá, es inmediato verlo, los axiomas de una métrica. Por este motivo, el par $(Y, d)$ es un e.m., por una abuso de notación denotaremos la restricción de $d$ al conjunto $Y \times Y$ por el mismo símbolo $d$. Diremos que $Y$ es un subespacio de $X$. Observar que la forma de las bolas en un subespacio puede ser diferente que en el espacio total, como puede verse en la figura **??** en la página ??. En este gráfico $X$ es el espacio “total”, $Y$ el subespacio y $x$ es un punto sobre la frontera de $Y$, entonces la bola en $Y$ de centro $x$ y radio $r$ es la parte que quedo cuadriculada en el dibujo. Pongamos $B_Y(x, r)$ para la bola en $Y$ de centro $x$ y radio $r$, entonces tenemos la relación:



(3.10)

Una bola en un subespacio

$$B_Y(x, r) := \{y \in Y : d(x, y) < r\} = B(x, r) \cap Y,$$

donde $B(x, r)$ es la bola en el espacio total.

El siguiente teorema nos dá una relación de los abiertos y cerrados en $Y$ con los abiertos y cerrados en $X$.

**Teorema 3.2.6** Sea $(X, d)$ un e.m. e $Y \subset X$. Entonces:

a) El conjunto $A$ es abierto en $Y$ si y solo si existe un $G$ abierto en $X$ tal que $A = G \cap Y$.

b) El conjunto $C$ es cerrado en $Y$ si y solo si existe un cerrado $F$ en $X$ tal que $C = Y \cap F$.

*Dem.* Veamos, primero, la propiedad a). Sea $A$ un abierto en $Y$. Para cada $x \in A$ existe, de acuerdo a la Ecuación 3.10 en la página anterior, un radio $r_x > 0$ tal que:

$$B(x, r_x) \cap Y \subset A. \tag{3.11}$$

Definamos:

$$G := \bigcup_{x \in A} B(x, r_x).$$

El conjunto $G$ es abierto, pues la unión de conjuntos abiertos resulta abierto. Además

$$G \cap Y = \bigcup_{x \in A} B(x, r_x) \cap Y = A.$$

La última igualdad es cierta por la ecuación 3.11 y por que cada $x \in A$ está en el conjunto $B(x, r_x) \cap Y$. De modo que, encontramos el conjunto que cumple la propiedad a).

Ahora la demostración de b) es sencilla de obtener. Sea $C$ cerrado en $Y$, en particular $C \subset Y$, entonces $Y - C$ es abierto en $Y$. Por a) existe un abierto $G$ tal que:

$$Y - C = G \cap Y.$$

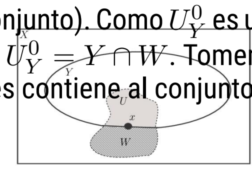
Entonces

$$C = Y \cap G^c.$$

Como el conjunto $G^c$ es cerrado, obtenemos la tesis con $F = G^c$. $\square$

**Proposición 3.2.5** Sea $(X, d)$ un e.m. e $Y \subset X$ un subespacio. El conjunto $U \subset Y$ es un entorno de $x \in Y$ en el espacio $(Y, d)$ si y solo si existe un entorno $V$ de $x$ en el e.m. $(X, d)$ tal que $U = V \cap Y$.

*Dem.* Si $U$ es un entorno de $x$ en $Y$, entonces $x$ está en el interior de $U$ relativo a $Y$ (pongamos $U^0_Y$ para este conjunto). Como $U^0_Y$ es un abierto en $Y$, por el teorema anterior, existe un abierto $W$ tal que $U^0_Y = Y \cap W$. Tomemos $V = W \cup U$. El conjunto $V$ es un entorno de $x$ en $(X, d)$, pues contiene al conjunto $W$ que lo es. Además $V \cap Y = U$, lo que demuestra la aserción. $\square$




Demostración de la

**Proposición 3.2.6** Sea $(X, d)$ un e.m. e $Y \subset X$ un subespacio. Supongamos que $A \subset Y$. Entonces la clausura de $A$ en el subespacio $Y$ (denotemos esto por $\overline{A}^Y$) es igual a $\overline{A}^Y = \overline{A} \cap Y$.

*Dem.* El conjunto $\overline{A} \cap Y$ es un cerrado en $Y$ que contiene al conjunto $A$, de modo que $\overline{A}^Y \subset \overline{A} \cap Y$. Veamos la otra inclusión. Sea $x \in \overline{A} \cap Y$. Como $x \in \overline{A}$ entonces para todo entorno $U$ de $x$, tenemos que $U \cap A \neq \varnothing$. Como $A \subset Y$ tenemos que $(U \cap Y) \cap A = U \cap A \neq \varnothing$. Así, como $U \cap Y$ es un entorno arbitrario de $X$ en el subespacio $Y$, tenemos que $x \in \overline{A}^Y$. $\square$

## 3.2.1 Ejercicios

**Ejercicio 3.2.13** Sea $(X, d)$ un e.m., $A \subset X$ y $B \subset A$. Demostrar que $B^0 \subset B_A^0$. Dar un ejemplo donde $B^0 \neq B_A^0$.

**Ejercicio 3.2.14** Sea $(X, d)$ un e.m., $B$ y $C$ subconjuntos de $X$ y $A \subset C \cap B$. Demostrar que $A$ es abierto (cerrado) en $B \cup C$ si, y solo si, es abierto (respectivamente cerrado) en $B$ y $C$.

**Ejercicio 3.2.15** Sea $\{G_i\}_{i \in I}$ un cubrimiento por abiertos de un e.m. $X$. Demostrar que $F \subset X$ es cerrado si, y solo si, $F \cap G_i$ es cerrado en $G_i$ para todo $i \in I$.

**Ejercicio 3.2.16** Dar un ejemplo de un subespacio $A$ de $\mathbb{R}^2$ tal que exista una bola abierta que es un conjunto cerrado, pero no una bola cerrada, y una bola cerrada que es un conjunto abierto, pero no una bola abierta. Ayuda: Considerar $A$ formado por los puntos $(0, 1)$, $(0, -1)$ y por un subconjunto apropiado del eje $x$.

## 3.3 Espacios separables

**Definición 3.3.13** Sea $(X, d)$ un e.m.. Un conjunto $A \subset X$ se dirá *denso en* $B \subset X$ si $\overline{A} \supset B$. Si el conjunto $A$ es denso en $X$ se dirá, brevemente, que $A$ *es denso*.

**Ejemplo 3.3.9** $\mathbb{R} - \{0\}$, $\mathbb{Q}$ son densos en $\mathbb{R}$. **Ejemplo 3.3.10** Sea $(X, d)$ un e.m discreto. Entonces $A$ es denso si y solo si $A = X$. En efecto, tenemos que $\overline{A} = X$, de modo que si $x \in X$ todo entorno de $x$ interseca al conjunto $A$. De modo que $B(x, 1/2) \cap A \neq \varnothing$. Pero, como se sabe, $B(x, 1/2) = \{x\}$, de modo que $x \in A$. Esto demuestra que $X = A$.

**Definición 3.3.14** Un e.m. $(X, d)$ se dirá separable si tiene un subconjunto denso y a lo sumo numerable.

**Ejemplo 3.3.11** Como se dijo $\mathbb{Q}$ es un conjunto denso, además es numerable, por consiguiente $\mathbb{R}$ es separable.
**Ejemplo 3.3.12** $\mathbb{R}^n$ con la métrica euclidea es separable. Afirmamos que $\mathbb{Q}^n$ es un conjunto denso y numerable. Para verlo, tomemos $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ y veamos que está en $\overline{\mathbb{Q}^n}$. Para ello es suficiente probar que $B(x, r) \cap \mathbb{Q}^n \neq \varnothing$, para todo $r > 0$. Sea $r > 0$ un radio, no es muy dificil demostrar, ver la figura **??** en la página ??, la siguiente inclusión de un "cubo" en la bola:

$$(x_1 - \frac{r}{\sqrt{n}}, x_1 + \frac{r}{\sqrt{n}}) \times \cdots \times (x_n - \frac{r}{\sqrt{n}}, x_n + \frac{r}{\sqrt{n}}) \subset B(x, r).$$

Como $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$ existen racionales $q_i \in (x_i - \frac{r}{\sqrt{n}}, x_i + \frac{r}{\sqrt{n}})$, $i = 1, ..., n$. En virtud de esto $(q_1, ..., q_n) \in \mathbb{Q}^n \cap B(x, r)$. Y así queda establecida la afirmación.
**Ejemplo 3.3.13** Un e.m. discreto $(X, d)$ es separable si y solo si $X$ es a lo sumo numerable. Como vimos en un ejemplo anterior el único conjunto denso que hay en un e.m. discreto es el total, de modo que si el espacio es separable $X$ debe ser a lo sumo numerable.

**Definición 3.3.15** En un e.m. $(X, d)$, una familia de conjuntos abiertos $\{G_i\}_{i\in I}$ se dirá *base* si todo abierto se puede obtener como unión de miembros de la familia. Más precisamente, si $G$ es un abierto cualquiera existe un subconjunto de subíndices $J \subset I$ tal que:

$$G = \bigcup_{i\in J} G_i.$$

**Ejemplo 3.3.14** En cualquier e.m. $(X, d)$ la familia de todas las bolas es una base. También es una base la familia de todas las bolas con radio igual a $1/n$ con $n \in \mathbb{N}$. En efecto, si $G$ es un abierto cualquiera, para todo $x \in G$ existe un $r_x > 0$ tal que $B(x, r_x) \subset G$. Así podemos ver que

$$G = \bigcup_{x\in G} B(x, r_x),$$

lo que demuestra que $G$ lo podemos escribir como unión de bolas. Para el otro caso elegimos un natural $n_x$ suficientemente grande para que $1/n_x < r_x$.

**Proposición 3.3.7** Una familia de abiertos $\{G_i\}_{i\in I}$ es una base si y solo si para todo $x \in X$ y para todo entorno $U \in E(x)$, existe un $i \in I$ tal que:

$$x \in G_i \subset U.$$

*Dem.* $\Rightarrow$). Sea $x \in X$ y $U \in E(x)$. Como la familia es base, tenemos que $U^0$ es unión de miembros de la familia. Además, por definición, tenemos que $x \in U^0$, estos dos hechos implican la tesis.

$\Leftarrow$) Sea $G$ un abierto. Por hipótesis, para cada $x \in G$ encontramos un $i_x \in I$ tal que $x \in G_{i_x} \subset G$. Así tenemos que:

$$G = \bigcup_{x\in G} G_{i_x}.$$

□

**Teorema 3.3.7** Un e.m. es separable si y solo si existe una base a lo sumo numerable.

*Dem.*$\Leftarrow$). Sea $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base numerable de abiertos (si hubiera una base finita el razonamiento es idéntico). Elijamos $a_n \in G_n$. El conjunto $D := \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ es, entonces, a lo sumo numerable (¿ Por qué?). Además, veamos que es denso. Efectivamente, sea $x \in X$ un punto arbitrario y $U \in E(x)$. Como consecuencia de la Proposición 3.3.7 existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in G_n \subset U$. Ahora tenemos el punto $a_n \in G_n$, y por ello $U \cap D \neq \varnothing$. Probamos así que todo entorno de $x$ interseca a $D$, en consecuencia $x \in \overline{D}$. Como el $x$ es arbitrario, aquello prueba que $D$ es un conjunto denso.

$\Rightarrow$). Sea $D$ un conjunto denso y a lo sumo numerable. Definamos la siguiente familia de bolas abiertas:

$$\mathcal{A} := \{B(x, \frac{1}{n}) : x \in D \wedge n \in \mathbb{N}\}.$$

Esta es una familia a lo sumo numerable, pues la siguiente función

$$\begin{aligned} T : \mathbb{N} \times D &\longrightarrow \mathcal{A} \\ (n, x) &\longmapsto B(x, \tfrac{1}{n}) \end{aligned} \tag{3.12}$$

es suryectiva.

Veamos que la familia propuesta es una base de abiertos usando la Proposición 3.3.7 en la página anterior. Sea $x \in X$ y $U \in E(x)$. Como $x \in U^0$, podemos elejir $r > 0$ tal que $B(x,r) \subset U$. Sea, ahora, $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, de modo que $2/n < r$. Como $D$ es denso debe existir un $a \in D$ tal que $a \in B(x, \frac{1}{n})$. Observesé que tenemos que $x \in B(a, 1/n)$, ver Figura **??**. Además, tenemos que $B(a,1/n) \subset B(x,r) \subset U$. Para demostrarlo, tomemos $y \in B(a,1/n)$. Entonces

$$d(x,y) \leq d(x,a) + d(a,y) < \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n} < r.$$

Tenemos así que $x \in B(a,1/n) \subset U$, como $B(a,1/n)$ es un elemento de la familia propuesta, tenemos probada la propiedad de la Proposicion 3.3.7 en la página anterior y, de este modo, la familia propuesta resulta una base. □

**Corolario 3.3.1** Un subespacio de un espacio separable es separable.

*Dem.* Sea $(X,d)$ un e.m. e $Y \subset X$. Sea $\{G_n\}_{n \in I}$ una base a lo sumo numerable de abiertos. Es fácil demostrar que la familia $\{G_n \cap Y\}_{n \in I}$ es una base de los abiertos de $Y$. □

### 3.3.1 Ejercicios

**Ejercicio 3.3.17** Sea $(X,d)$ un e.m. y $A \subset X$. Demostrar que $A \cup \text{Ext}(A)$ es denso en $A$. ¿Será cierto que $A^0 \cup \text{Ext}(A)$ es, siempre, denso?

**Ejercicio 3.3.18** Demostrar que $\mathbb{I} := \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ es separable. Exhibir un conjunto denso numerable.

**Ejercicio 3.3.19** Sea $A \subset \mathbb{R}$. Definamos $B := \{x \in A | \exists y > x : (x,y) \cap A = \varnothing\}$. Demostrar que $B$ es a lo sumo numerable.

**Ejercicio 3.3.20** Sea $(X,d)$ un e.m. y $A \subset X$. Diremos que $a \in A$ es un *punto aislado* de $A$ si existe un entorno $U$ de $a$ tal que $U \cap A = \{a\}$. En la Figura **??** en la página ?? el conjunto $A$ consiste de la parte sombreada y el punto $a$, este último es un punto aislado, pues el entorno $U$ satisface la definición.

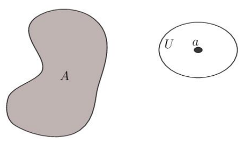
Por otra parte, un punto $a \in X$ es un *punto de acumulación* de $A$ si, para todo entorno $U$ de $a$ se tiene que $(U - \{a\}) \cap A \neq \varnothing$.

Sea $A$ un conjunto, $B$ el conjunto de puntos de acumulación de $A$ y $C$ el conjunto de puntos aislados de $A$. Demostrar los siguientes items:

a) $B$ es cerrado, y $\overline{A} = B \cup C$.

b) Si $X$ es separable entonces $C$ es numerable.

**Ejercicio 3.3.21** Demostrar que $(X,d)$ es separable si y solo si todo cubrimiento de $X$ por abiertos[a] tiene un subcubrimiento a lo sumo numerable[b]. *Ayuda:* Sea $\{U_i\}_{i \in I}$ un cubrimiento de $X$ y $\{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una base numerable. Para cada $n \in \mathbb{N}$ elegir un




Punto aislado

$i_n$ tal que $G_n \subset U_{i_n}$. Luego la familia $\{U_{i_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ será un cubrimiento.

[a] Un cubrimiento por abiertos de $X$ es una familia de conjuntos abiertos $\{G_i\}_{i\in I}$ tal que $X = \bigcup_{i\in I} G_i$.
[b] Es decir existe una subfamilia a lo sumo numerable de la familia $\{G_i\}$ que también es un cubrimiento.

## 3.4 Funciones Continuas

Vamos a ver que, en el contexto de los espacios métricos, podemos definir el concepto de que una función sea continua.

**Definición 3.4.16** Sean $(X, d)$, $(Y, d')$ dos e.m, $f : X \to Y$ una función y $x \in X$. Diremos que $f$ *es continua en* $x$ si para todo entorno $V \in E(f(x))$, existe un entorno de $U \in E(x)$ tal que $f(U) \subset V$ (ver Figura **??** en la página ??). Diremos que $f : X \to Y$ es *continua* si es continua en cada punto de $X$.

Algunas veces es más práctico emplear las siguientes equivalencias de la definición de función continua en un punto.

Definición de función continua

**Proposición 3.4.8** Sean $(X, d)$, $(Y, d')$ dos e.m, $f : X \to Y$ una función y $x \in X$. Entonces son equivalentes:

i) $f$ es continua en $x$.

ii) Para todo entorno $V$ de $f(x)$, $f^{-1}(V)$ es un entorno de $x$.

iii) Para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $d(x, y) < \delta$ entonces $d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

*Dem.* i)⇒ii). Sea $V$ un entorno de $f(x)$. En virtud de la definición, existe un entorno $U$ de $x$ tal que $f(U) \subset V$. Así tenemos que $U \subset f^{-1}(V)$ y como $U$ es un entorno de $x$, $f^{-1}(V)$ también lo és.

ii)⇒iii). Sea $\varepsilon > 0$. La bola $B(f(x), \varepsilon)$ es un entorno de $f(x)$, así, por ii), el conjunto $U := f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))$ es un entorno de $x$. Entonces $x \in U^0$, lo que implica que existe un $\delta > 0$ tal que $B(x, \delta) \subset f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))$. Esta inclusión es otra forma de afirmar iii).

iii)⇒i). Sea $V$ un entorno de $f(x)$. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(f(x), \varepsilon) \subset V$. Por iii), existe un $\delta > 0$ tal que si $d(x, y) < \delta$ entonces $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Esto afirma que $f(B(x, \delta)) \subset B(f(x), \varepsilon)$. Como $B(f(x), \varepsilon) \subset V$, tenemos que $f(B(x, \delta)) \subset V$. Pero $B(x, \delta)$ es un entorno de $x$, de modo que hemos establecido que $f$ es continua en $x$. □

**Ejemplo 3.4.15** Sea $f : X \to Y$ una función entre e.m.. Si $(X, d)$ es discreto entonces $f$ es continua. Vale decir si el dominio de una función es un e.m. discreto la función es continua, no importa que función sea ni, que sea el codominio. En efecto, sea $x \in X$ y $V$ un entorno de $f(x)$. Como todo conjunto en un e.m. es abierto, $f^{-1}(V)$ es un abierto, además contiene a $x$, de este modo es un entorno de $x$, lo que demuestra la condición ii) de la Proposición 3.4.8.

**Ejemplo 3.4.16** Sea $(X, d)$ un e.m. e $Y$ un subespacio de $X$. La *inyección natural* $j : Y \to X$, definida por $j(x) = x$ es una función continua, como se puede corroborar facilmente, quedando esta demostración como ejercicio.

**Ejemplo 3.4.17** Las funciones constantes son continuas, es decir: sea $(X, d)$ y $(Z, d')$ dos e.m. y $f : X \to Z$ definida por $f(x) = a$, donde $a$ es un punto de $Z$, entonces $f$ es continua. La demostración queda como ejercicio.

**Proposición 3.4.9** Sea $f : X \to Y$ continua en $x$. Supongamos que $x \in \overline{A}$ entonces $f(x) \in \overline{f(A)}$.

*Dem.* Sea $V$ un entorno de $f(x)$, hay que demostrar que $V \cap f(A) \neq \varnothing$. Pero, como $f$ es continua en $x$, $f^{-1}(V)$ es un entorno de $x$. Ahora, ya que $x \in \overline{A}$, tenemos que $f^{-1}(V) \cap A \neq \varnothing$. Sea, pues, $y \in f^{-1}(V) \cap A$. Así, tenemos que $f(y) \in V \cap f(A)$. Luego $V \cap f(A) \neq \varnothing$. $\square$

Ahora vamos a dar una serie de equivalencias a que una función sea globalmente continua.

**Teorema 3.4.8** Sean $(X, d)$ e $(Y, d')$ e.m. y $f : X \to Y$ una función. Los siguientes enunciados son equivalentes:

a) $f$ es continua.

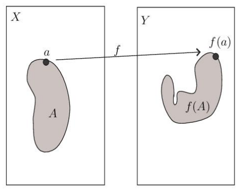
b) Si $A \subset Y$ es un abierto de $Y$, entonces $f^{-1}(A)$ es abierto de $X$.

c) Si $A \subset Y$ es un cerrado de $Y$, entonces $f^{-1}(A)$ es un cerrado de $X$.

d) Para todo subconjunto $A \subset X$ se tiene que $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

*Dem.* La Proposición 3.4.9 establece a)⇒d). Veamos que d)⇒c). Sea $A$ cerrado en $Y$ y $A' = f^{-1}(A)$. Entonces

$$\begin{aligned} f(\overline{A'}) &\subset \overline{f(A')} && \text{Hipótesis} \\ &\subset \overline{A} && \text{definición de } A' \\ &= A && A \text{ es cerrado} \end{aligned} \tag{3.13}$$



Interpretación del inciso d) del Teorema 3.4.8

Luego

$$\begin{aligned} \overline{A'} &\subset f^{-1}(f(\overline{A'})) && \text{Propiedad de la función imagen} \\ &\subset f^{-1}(A) && \text{Inclusión 3.13} \\ &= A' && \text{Definición de } A' \end{aligned}$$

Por otro lado, como es sabido, $A' \subset \overline{A'}$, luego $\overline{A'} = A'$, lo que implica que $A'$ es cerrado.

Ahora veamos que c)⇒b). Sea $A$ abierto en $Y$. Entonces $A^c$ es cerrado en $Y$. Entonces, por c), $f^{-1}(A^c)$ es cerrado en $X$. Pero, $f^{-1}(A^c) = \left(f^{-1}(A)\right)^c$.

Por último veamos que b)⇒a). Sea $x \in X$ y $V$ un entorno de $f(x)$, entonces $f(x) \in V^0$. Por hipótesis $f^{-1}(V^0)$ es un abierto que contiene a $x$. De este modo $f^{-1}(V^0)$ es un entorno de $x$. Como $f^{-1}(V^0) \subset f^{-1}(V)$ tenemos que $f^{-1}(V)$ es un entorno de $x$ también. Lo que prueba que $f$ es continua en $x$. $\square$

La propiedad d) tiene una interpretación gráfica. Expresa el hecho que si un punto $a$ está "pegado" a un conjunto $A$ (en el sentido que $a \in \overline{A}$) entonces $f(a)$ está "pegado" a $f(A)$, ver Figura **??**. Esto es así pues las funciones continuas aplican "puntos próximos" en "puntos próximos", y, al decir que $a \in \overline{A}$ estamos diciendo que $a$ "está próximo" al conjunto $A$.

Ahora veamos que la composición de funciones continuas es continua.

**Proposición 3.4.10** Sean $(X, d)$, $(Y, d')$, $(Z, d'')$ tres e.m., $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ funciones tales que $f$ es continua en $a \in X$ y $g$ es continua en $f(a) \in Y$.

Entonces $g \circ f : X \to Z$ es continua en $a$.

*Dem.* Sea $W$ un entorno de $g(f(a))$. Como $g$ es continua en $f(a)$ entonces $V := g^{-1}(W)$ es un entorno de $f(a)$. Luego, como $f$ es continua en $a$, $f^{-1}(V) = f^{-1}(g^{-1}(W))$ es un entorno de $a$. Esto implica la tesis, pues $f^{-1}(g^{-1}(W)) = (g \circ f)^{-1}(W)$. □

**Corolario 3.4.2** Sea $f : X \to Y$ una función continua en $a$. Supongamos que $Z \subset X$ es un subespacio con $a \in Z$. Entonces la restricción de $f$ al subespacio $Z$, con la métrica de subespacio, es continua en $a$.

*Dem.* La susodicha restricción es la composición de $f$ con la inyección natural $j : Z \to X$. Por lo tanto el resultado sigue del hecho que la composición de funciones continuas es continua. □

Otro concepto importante es el de función uniformemente continua.

**Definición 3.4.17** Sea $f$ una función entre dos e.m. $(X, d)$ e $(Y, d')$. Diremos que $f$ es *uniformemente continua* si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$, si $d(x, y) < \delta$.

No es facil entender la diferencia de esta definición con la que expresa que $f$ es continua en cada punto de $X$. La diferencia es que el $\delta$ de esta definición es el mismo para todos los puntos de $X$. Mientras que decir que $f$ es continua en cada punto de $X$ implicaría, en principio, la existencia de un delta que puede depender del punto. Los siguientes ejemplos aclararan más esta definición.

**Ejemplo 3.4.18** Las funciones constantes son uniformemente continuas. Dado un $\varepsilon > 0$ podemos tomar cualquier valor de $\delta$ que seguramente cumplirá la definición.

**Ejemplo 3.4.19** Una función puede ser continua en todo punto y, sin embargo, no ser uniformemente continua„ como muestra el siguiente ejemplo: Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$. Esta $f$ es continua en todo punto y no uniformemente continua. En efecto, la diferencia $(a+h)^2 - a^2 = 2ah + h^2$ tiende a $+\infty$ si $a$ tiende a $+\infty$. De modo que asegurar que $h < \delta$ no implica que las imagenes de $a + h$ y $a$ esten cerca, no importando, para ello, cuan chico sea $\delta$. Ver Figura **??**.

Si una función es uniformemente continua es continua en cada punto. La demostración de este hecho es bastante directa y simple.

**Ejemplo 3.4.20** Sea $(X, d)$ un e.m. y $A \subset X$. La función:

$$\begin{aligned} f : &X \longrightarrow \mathbb{R} \\ &x \longmapsto d(x, A). \end{aligned}$$

es uniformemente continua. Esto es consecuencia de la desigualdad probada en el Ejercicio 3.1.3 en la página 35, a saber:

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y).$$

### 3.4.1 Ejercicios

**Ejercicio 3.4.22** Sean $(X, d)$, $(Y, d')$ e.m., $A$ y $B$ subconjuntos de $X$ tales que $A \cup B = X$.

i) Sea $f : X \to Y$ una función tal que $f_{|A}$ [a] y $f_{|B}$ son ambas continuas en $x \in A \cap B$, probar que $f$ es continua en $x$.

ii) Dar un ejemplo de función tal que $f_{|A}$, $f_{|B}$ y $f_{|A\cap B}$ sean continuas pero $f$ no lo sea.

[a] $f_{|A}$ denota la restricción de $f$ al conjunto $A$

**Ejercicio 3.4.23** Sean $(X,d)$, $(Y,d')$ e.m. y $f : X \to Y$ una función. Demostrar que son equivalentes:

i) $f$ es continua.

ii) Para todo $B \subset Y$: $f^{-1}(B^0) \subset \left[f^{-1}(B)\right]^0$.

iii) Para todo $B \subset Y$: $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$.

Dar un ejemplo de función continua donde $\overline{f^{-1}(B)} \neq f^{-1}(\overline{B})$.

**Ejercicio 3.4.24** Sean $(X,d)$, $(Y,d')$ e.m. y $f,g : X \to Y$ funciones continuas. Demostrar que:

i) El conjunto $\{x \in X | f(x) = g(x)\}$ es cerrado.

ii) Si $f$ y $g$ coinciden en un conjunto denso entonces son iguales.

**Ejercicio 3.4.25** Sean $(X,d)$, $(Y,d')$ e.m.. Demostrar que son equivalentes

i) Toda función $f : X \to Y$ es continua.

ii) Todo punto de $X$ es aislado[a].

[a] Por abuso de lenguaje los e.m. con esta propiedad se denominan discretos

## 3.5 Homeomorfismos e isometrías

**Definición 3.5.18** Sean $(X,d)$, $(Y,d')$ dos e.m. y $f : X \to Y$ una función *biyectiva*. Diremos que $f$ es un *homeomorfismo* si $f$ y $f^{-1}$ son ambas continuas. Dos e.m. tales que exista un homeomorfismo entre ellos se denominaran homeomorfos.

**Ejemplo 3.5.21** Dos intervalos abiertos cualesquiera de $\mathbb{R}$ son homeomorfos, uno puede construir una función lineal, que son homeomorfismos, que aplique uno en el otro. Mientras que un intervalos abierto cualquiera $(a,b)$ es homeomorfo a $\mathbb{R}$. Un homeomorfismo entre ambos es la función:

$$\begin{aligned} f :&(a,b) \longrightarrow \mathbb{R} \\ &x \longmapsto \tan\left(\pi\frac{2x-(a+b)}{2(b-a)}\right) \end{aligned}$$

**Ejemplo 3.5.22** Un intervalo cerrado ya no es homeomorfo a $\mathbb{R}$, esto lo demostraremos más adelante. No obstante podemos definir la *recta real extendida* que será homeomorfa a los intervalos cerrados. Más precisamente, sea $f : \mathbb{R} \to (-1,1)$ la función $f(x) = x/(1+|x|)$. No es difícil demostrar que $f$ es biyectiva, de hecho analizando esta función con las herramientas aprendidas en Cálculo I vemos que tiene la forma de la Figura ?? en

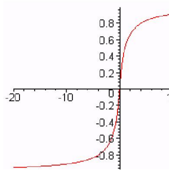



Grafico de la fur
$f(x) = x/(1 +$

la página ??. Definamos el conjunto $\overline{\mathbb{R}}$, al que llamaremos *recta extendida*, como la unión de $\mathbb{R}$ con dos nuevos elementos, a los que llamaremos $-\infty$ y $+\infty$. Ahora extendemos $f$ de $\overline{\mathbb{R}}$ al $[-1,1]$ por $f(+\infty)=1$ y $f(-\infty)=-1$. Definimos la función $d:\overline{\mathbb{R}}\times\overline{\mathbb{R}}\to\mathbb{R}$ por:

$$d(x,y)=|f(x)-f(y)|. \tag{3.14}$$

La función $d$ es una métrica en $\overline{\mathbb{R}}$ (la sencilla demostración la desarrollaremos en clase). Con esta métrica el conjunto $\mathbb{R}$ es acotado, de hecho $\delta(\mathbb{R})=2$. Además la función $f$ resulta un homeomorfismo de $\overline{\mathbb{R}}$ en $[-1,1]$ (este último con la métrica del módulo). En efecto, en virtud de la ecuación 3.14, dado $\varepsilon>0$ basta elegir $\delta=\varepsilon$ para verificar que $f$ es uniformemente continua. Si llamamos $g$ a la inversa de $f$ y reemplazamos $x$ e $y$ en 3.14 por $g(t)$ y $g(s)$ respectivamente, comprobamos que

$$d(g(t),g(s))=|t-s|. \tag{3.15}$$

Lo cual implica que $g$ es uniformemente continua, por razones similares a las que invocamos para $f$. En particular $f$ y su inversa son continuas, de modo que $f$ es un homeomorfismo.

En el ejemplo anterior las funciones $f$ y $g$ tienen una propiedad más fuerte que la de ser homeomorfismos, esta propiedad la definimos a continuación.

**Definición 3.5.19** Sean $(X,d)$, $(Y,d')$ dos e.m. y $f:X\to Y$ una función biyectiva. Se dirá que $f$ es una *isometría* si para todos $x$ e $y$ en $X$ se tiene que:

$$d'(f(x),f(y))=d(x,y).$$

Si, entre dos e.m. existe una isometría diremos que los espacios son *isométricos*.

Una isometría es un homeomorfismo, la idea central de la demostración de esta afirmación está en el ejemplo anterior. Igual que en aquel ejemplo, hay que demostrar que la inversa de una isometría es, a la vez, una isometría.

**Proposición 3.5.11** Sean $(X,d)$, $(Y,d')$ dos e.m. y $f:X\to Y$ una función biyectiva con inversa $g$. Entonces son equivalentes:

i) $f$ es un homeomorfismo.

ii) $A\subset X$ es abierto si, y solo si, $f(A)$ es abierto.

*Dem.* i)$\Rightarrow$ii). Sea $A\subset X$. Supongamos, en primer lugar, que $A$ es abierto. Como $g:Y\to X$ es continua, $g^{-1}(A)=f(A)$ es abierto. Supongamos, ahora, que $f(A)$ es abierto. Como $f$ es continua, $f^{-1}(f(A))=g(f(A))=A$ es abierto. Esto concluye la demostración de la primera implicación.

ii)$\Rightarrow$i). Tenemos que demostrar que $f$ y $g$ son continuas. Veamos, primero, que $f$ es continua. Sea $B$ un abierto de $Y$, hay que demostrar que $f^{-1}(B)=g(B)$ es un abierto de $X$. Pero $B=f(g(B))$ y $B$ es abierto, entonces, por ii), $g(B)$ es abierto. Veamos, ahora, que $g$ es continua. Sea $A$ abierto en $X$. Luego, por ii), $g^{-1}(A)=f(A)$ es abierto en $Y$, por lo cual, $g$ es continua. $\square$

Este teorema nos dice que si dos espacios son homeomorfos, entonces existe una correspondencia de los abiertos de uno con los del otro espacio.

El conjunto formado por todos los conjuntos abiertos, se denomina *topología*. Brevemente, digamos que un *espacio topológico* es un par $(X,\tau)$, donde $\tau\subset\mathcal{P}(X)$[3], que satisface los siguientes axiomas:

1) $\varnothing, X\in\tau$

2) Si $G_i\in\tau$, para $i\in I$, entonces $\bigcup_{i\in I}G_i\in\tau$.

[3] $\mathcal{P}(X)$ es el conjunto de partes de $X$, es decir $\tau$ es un conjunto cuyos elementos son subconjuntos de $X$

3) Si $G_i \in \tau$, para $i \in I$, e $I$ es finito, entonces $\bigcap_{i\in I} G_i \in \tau$.

En un espacio topológico uno puede construir la nociones, que hemos construido para e.m., por ejemplo conjunto cerrado, interior, clausura, entorno, función continua y espacio separable. Por tanto, estas propiedades se denominan topológicas. Las propiedades topológicas son invariantes por homeomorfismos, por ejemplo si un espacio es separable, cualquier homeomorfo a él también lo es. Algunas propiedades no son topológicas, por ejemplo que una función sea uniformemente continua, puesto que para definir este concepto necesitamos de una métrica.

Un mismo conjunto $X$, puede tener dos métricas distintas, por ejemplo en $\mathbb{R}$ tenemos la métrica euclidea y la discreta. Podemos plantearnos que estas métricas den origen a una misma topología, si esto sucede diremos que las dos *métricas son equivalentes*.

### 3.5.1 Ejercicios

**Ejercicio 3.5.26** Sean $(X, d)$, $(Y, d')$ e.m. y $f : X \to Y$ una función biyectiva. Demostrar que $f$ es un homeomorfismo si, y solo si, para todo $A \subset X$ tenemos que $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$.

**Ejercicio 3.5.27** Demostrar:

i) que las métricas sobre $\mathbb{R}^n$ definidas en los Ejemplos 3.1.2 en la página 26, **??** en la página ?? y **??** en la página ?? son todas equivalentes.

ii) que las distancias $d$ , $d_1$ y $d_2$ del Ejercicio 3.1.4 en la página 35 son equivalentes.

iii) Dados dos topologías $\tau_1$ y $\tau_2$ sobre el mismo espacio $X$ decimos que $\tau_1$ es más fina que $\tau_2$ si $\tau_2 \subset \tau_1$. Demostrar que, sobre $C([0, 1])$, la topología que genera la métrica del Ejemplo 3.1.4 en la página 26 es más fina que la topología que genera la métrica del Ejemplo 3.1.4 en la página 26 es más fina que la del Ejemplo 3.1.5 en la página 27.

## 3.6 Completitud

Una propiedad importante de los espacios métricos es la completitud. En esta unidad introducimos esta propiedad e indagamos algunas de sus consecuencias.

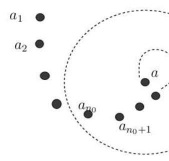
### 3.6.1 Sucesiones

**Definición 3.6.20** Una *sucesión* en un e.m. $(X, d)$ es una función $f : \mathbb{N} \to X$.

Esta el la definición formal de sucesión, no obstante cuando se trabaja con sucesiones no se hace alusión explícita a la función $f$ de la definición. Normalmente una sucesión se introduce con el símbolo $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ o, brevemente, $\{a_n\}$, asumiendo que los índices $n$ son naturales. Claro está que, implícitamente, estos símbolos conllevan la función $f$. Esta es la función tal que $f(n) = a_n$.

**Definición 3.6.21** Sea $\{a_n\}$ una sucesión en el e.m. $(X, d)$. Diremos que esta sucesión *converge* al punto $a \in X$ (denotaremos esto por $a_n \to a$) si, y solo si, para todo entorno $U$ de $a$ existe un $n_0 = n_0(U)$ tal que cuando $n \geq n_0$ se tiene que $a_n \in U$. Sinteticamente, dado cualquier entorno, salvo posiblemente una cantidad finita de términos de la sucesión todos los términos restantes están incluídos en el entorno, ver la Figura **??** en la página ??

La convergencia es una propiedad topológica. Confiamos en que el alumno tiene muchos ejemplos de sucesiones convergentes en $\mathbb{R}$, esto fué visto en Cálculo I. Vamos a ver que sucede en otros espacios métricos.




Definición 3.6.21 página anteri

**Ejemplo 3.6.23** En un e.m. discreto $(X, d)$ si una sucesión $\{a_n\}$ converge al punto $a$, entonces a partir de un $n_0$ en adelante se tiene que $a_n = a_{n_0}$. En efecto, esto es consecuencia de considerar el siguiente entorno: $U = B(a, 1/2) = \{a\}$.

**Ejemplo 3.6.24** Consideremos el e.m. $(C([0,1]), d)$, donde $C([0,1])$ representa al conjunto de funciones continuas $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ y $d$ es la métrica definida en el Ejemplo 3.1.5 en la página 27. Consideremos las funciones definidas por:

$$f(x) = \begin{cases} nx, & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n}; \\ 2 - nx, & \text{si } \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n}. \\ 0, & \text{si } \frac{2}{n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

En la Figura **??** en la página ??, se pueden observar los gráficos de estas funciones. Es un ejercicio de Cálculo I demostrar que $f_n \to 0$ con la métrica propuesta. Sin embargo, sobre $C([0,1])$ tenemos definida otra métrica, a saber: la del Ejemplo 3.1.4 en la página 26. Con esta métrica la sucesión $f_n$ no converge a ninguna función.

Es posible caracterizar algunos de los conceptos, que ya hemos visto, en términos de sucesiones. Por ejemplo, el concepto de clausura y continuidad.

**Proposición 3.6.12** Sea $(X, d)$ un e.m. y $A \subset X$. Entonces $a \in \overline{A}$ si, y solo si, existe una sucesion $a_n \in A$ tal que $a_n \to a$.

*Dem.* Supongamos que $a \in \overline{A}$, entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $B(a, 1/n) \cap A \neq \varnothing$. Sea, pues, $a_n \in B(a, 1/n) \cap A$. Se puede ver, sin dificultad, que $a_n \to a$. Recíprocamente, supongamos que existe la sucesión $\{a_n\}$. Si $U$ es un entorno arbitrario de $a$, entonces, puesto que $a \in \overline{A}$, tenemos que, para ciertos $n$, $a_n \in U$, luego, estos $a_n$, estan en la intersección de $U$ con $A$, lo que implica que esta es no vacía. Eso prueba que $a \in \overline{A}$. □

## 3.6.2 Sucesiones de Cauchy, espacios métricos completos

**Definición 3.6.22**

i) Dada una sucesión $\{a_n\}$ en un e.m. $(X, d)$, diremos que $\{a_n\}$ es una *sucesión de Cauchy* si: para todo $\varepsilon > 0$ existe un $n_0 = n_0(\varepsilon)$[a] tal que para $n, m \geq n_0$ tenemos que $d(a_n, a_m) < \varepsilon$. En otras palabras, para valores grandes de $n$ los términos $a_n$ están cerca entre si.

ii) Un e.m. se dirá *completo* si, y solo si, todo sucesión de Cauchy en él es convergente.

[a] Con $n_0 = n_0(\varepsilon)$ queremos decir que el número $n_0$ depende de $\varepsilon$ pero que normalmente no usaremos la notación $n_0(\varepsilon)$ sino, simplemente, $n_0$

Como acabamos de decir, en un e.m. completo toda sucesión de Cauchy converge. La reciproca de esta afirmación es siempre cierta, es decir en cualquier e.m. toda sucesión convergente es de Cauchy. En efecto, sea $\{a_n\}$ una sucesión convergente en $(X, d)$ al punto $a$ y sea $\varepsilon > 0$. Existe un $N = N(\varepsilon)$ tal que para $n > N$ se tiene que

$$d(a_n, a) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Luego, para $n, m > N$ y por la desigualdad triágular, tenemos que

$$d(a_n, a_m) \leq d(a_n, a) + d(a, a_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Esto prueba que la sucesión es de Cauchy, como queríamos.

Un ejemplo importante de e.m. completo es $\mathbb{R}$. Esta propiedad de $\mathbb{R}$ es enunciada, prácticamente, como un axióma. Hablaremos, mas no sea brevemente, de los "fundamentos" de los números reales en el apéndice al final de esta unidad, ver Sección en la página 2. Sabiendo que $\mathbb{R}$ con la métrica del módulo es completo podemos demostrar la completitud de otros e.m., como veremos más abajo. Antes de ver esto demostremos que toda sucesión convergente es de Cauchy

**Ejemplo 3.6.25** $\mathbb{R}^n$ con la métrica euclidea es un e.m. completo.[4] Vamos a demostrar esta afirmación. Denotemos por letras en negritas **x**, **y**, **z**, etc $n$-uplas en $\mathbb{R}^n$, es decir $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ con $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$. Consideremos una sucesión de Cauchy $\{\mathbf{x}_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}^n$. Esto nos determina $n$ sucesiones en $\mathbb{R}$, puesto que $\mathbf{x}_j = (x_1^j, \ldots, x_n^j)$. Veamos que, para cada $i$, $\{x_i^j\}_{j\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$. Se tiene que:

$$|x_i^j - x_i^k| \leq \sqrt{\sum_{s=1}^{n} (x_s^j - x_s^k)^2} \leq d(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_k).$$

Como el último miembro se puede hacer tan chico como queramos, puesto que $\{\mathbf{x}_j\}$ es de Cauchy, podemos conseguir lo mismo para el primer miembro, esto es $\{x_i^j\}$ es de Cauchy. Así, como $\mathbb{R}$ es completo, existe un $x_i$, para $i = 1, \ldots, n$ tal que $x_i^j \to x_i$, para $j \to \infty$. Definamos, pues, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ y veamos que $\mathbf{x}_j \to \mathbf{x}$. Sea $\varepsilon > 0$, para cada $i = 1, \ldots, n$ podemos hallar un $j(\varepsilon, i)$, es decir $j$ depende de $\varepsilon$ y de $i$, tal que para $j \geq j(\varepsilon, i)$ tenemos que:

$$|x_i^j - x_i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}.$$

Así, si:

$$j \geq \max_{1\leq i\leq n} j(\varepsilon, i)$$

entonces

$$d(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i^j - x_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon^2}{n}} = \varepsilon,$$

lo que demuestra que $\mathbf{x}_j \to \mathbf{x}$, como queríamos.

**Ejemplo 3.6.26** El e.m. $(C([0,1]), d)$, con $d$ como en el Ejemplo 3.6.24 en la página anterior, no es completo. Consideremos las siguientes funciones, para $n/geq2$:

$$f_n(x) := \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}; \\ -nx + \frac{n+2}{2n}, & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{n}; \\ 0, & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

en la Figura **??** en la página ?? graficamos estas funciones.

No es dificil convencerse que esta es una sucesi/ón de Cauchy, puesto que, para $j, k/geqn$ tenemos que:

$$d(f_j, f_k) = \frac{1}{2}|\frac{1}{j} - \frac{1}{k}| \leq \frac{1}{n} \to 0 \quad \text{cuando} \quad n \to \infty.$$

Sin embargo estas funciones no convergen a ninguna función en $C([0,1])$. Para ver esto, supongamos que, por el contrario, existe $f \in C([0,1])$ tal que $f_n \to f$. Vamos a demostrar que, necesariamente, $f$ debe valer 1 en el intervalo $[0, 1/2)$ y debe valer 0 en el intervalo $(1/2, 1)$, por tal motivo no podría ser continua contradiciendo las hipótesis.

[4] Observar que, en virtud del Ejercicio 3.6.39 en la página 53 $\mathbb{R}^n$ con cualquier métrica equivalente a la euclidea también resultará completo

Vamos a demostrar solo que $f$ es 0 en $(1/2, 1)$, la otra parte es similar y aun más facil. Supongamos que exista $1/2 < a < 1$ tal que $f(a) \neq 0$, podemos suponer que $f(a) > 0$. Elijamos $\delta_1 > 0$ suficientemente pequeño de modo que $1/2 < a - \delta_1$ y elijamos $\delta_2 > 0$ suficientemente pequeño de modo tal que $f(x) > f(a)/2$ para $x \in (a - \delta_2, a + \delta + 2)$ (esto es posible pues $f$ es continua en $a$). Ahora, el número $\delta :=$ mín$\{\delta_1, \delta_2\}$ satisface las dos propiedades anteriores simultaneamente. Podemos encontrar un $n_0$ suficientemente grande para que $1/2 + 1/n < a - \delta$, cuando $n > n_0$, esto implica que $f_n$ es idénticamente cero en el intervalo $(a - \delta, a + \delta)$, ver la Figura **??** en la página ??.

Juntando todas las propiedades vistas en el párrafo anterior, deducimos que, para $n > n_0$,

$$d(f_n, f) = \int_0^1 |f_n - f| dx \geq \int_{a-\delta}^{a+\delta} |f_n - f| dx \geq \delta f(a) > 0.$$

De modo que $f_n$ no converge a $f$, contradiciendo nuestras suposiciones.

Ahora veremos que subespacios, de un e.m. completo, son, a su vez, completos.

**Proposición 3.6.13** Sea $(X, d)$ un e.m. completo e $Y \subset X$. Son equivalentes:

i) $(Y, d)$ es un subespacio completo.

ii) $Y$ es cerrado en $X$.

### 3.6.3 Teorema de Cantor

**Teorema 3.6.9** [Teorema de la intersección de Cantor.] Sea $(X, d)$ un espacio métrico completo. Sea $\{F_n\}_1^\infty$ una secuencia decreciente de conjuntos cerrados en $X$. Es decir

$$F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_n \supset \cdots$$

Supongamos que:

$$\delta\left(F_n\right) \longrightarrow 0 \text{ as } n \rightarrow \infty$$

Entonces:

$$\exists x \in X : \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \{x\}.$$

*Demostración.* Primero demostramos que $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ tiene como máximo un elemento. De hecho, sea $x_0, \tilde{x}_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$. Entonces $x_0, \tilde{x}_0 \in F_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y por lo tanto

$$d\left(x_0, \tilde{x}_0\right) \leq \delta\left(F_n\right)$$

para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, tomando límite cuando $n \rightarrow \infty$ deducimos $d(x_0, \tilde{x}_0) = 0$, por lo cual $x_0 = \tilde{x}_0$. De allí que hay a lo sumo un elemento en la intersección.

Ahora probamos que $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ tiene al menos un elemento. Para cualquier $n \in \mathbb{N}$, elijamos algún elemento $x_n \in F_n$. Probamos que $\{x_n\}_1^\infty$ es una sucesión de Cauchy. De hecho, para cualquier $\varepsilon > 0$, elijamos $N \in \mathbb{N}$ tal que diam $(F_N) < \varepsilon$. Entonces, para cualquier $n, m \geq N$, tenemos que $x_n \in F_n \subseteq F_N$ y $x_m \in F_m \subseteq F_N$, por lo que

$$d\left(x_n, x_m\right) \leq \delta\left(F_N\right) < \varepsilon$$

Por lo tanto, $(x_n)_1^\infty$ es una sucesión de Cauchy. Como $(X, d)$ es completo, se sigue que existe $x_0 \in X$ tal que $x_n \longrightarrow x_0$ como $n \rightarrow \infty$. Afirmamos que $x_0 \in F_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. De hecho, para cualquier $k \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots \in F_k$$

y dado que $F_k$ es cerrado y $x_n \longrightarrow x_0$ como $n \rightarrow \infty$, se sigue que $x_0 \in F_k$. Por lo tanto, $x_0 \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} F_k$. Esto completa la prueba. $\square$

### 3.6.4 Teorema de Baire

**Definición 3.6.23** [Conjuntos nunca densos, categorías de Baire] Sea $(X,d)$ un espacio métrico.

1. Se dice que un subconjunto $Y \subset X$ es *nunca denso* o *magro* cuando $(\bar{Y})^\circ = \varnothing$.
2. Se dice que un subconjunto $Y \subset X$ es de *primera categoría* si es unión numerable de subconjuntos nunca densos.
3. Los subconjuntos que no son de primera categoria se denominan de *segunda categoria*.

**Observación:** i) Puesto que $\overline{\left(\overline{Y}\right)^c} = Y^{cocccoc} = Y^{cococ} = \left(\overline{Y}^\circ\right)^c$. Se concluye que $Y$ es magro si y sólo si $\left(\overline{Y}\right)^c$ es denso.
ii) El concepto de nunca denso no es lo mismo que lo contrario a denso. De hecho son conceptos bastantes diferentes. Por ejemplo un intervalo $(a,b)$ de $\mathbb{R}$ no es denso y tampoco nunca denso. La implicación contraria es verdadera, esto es si un conjunto es nunca denso entonces no es denso.
iii) Un subconjunto de un conjunto nunca denso resulta nunca denso. La misma aseveración vale con conjuntos de primera categoría.

**Ejercicio 3.6.28** Demostrar que el único conjunto magro en un espacio métrico discreto es $\varnothing$.

**Ejercicio 3.6.29** Demostrar que $\mathbb{Q}$ es de primera categoría.

**Teorema 3.6.10** [Baire] Todo espacio métrico completo es de segunda categoría.

*Demostración.* Suponemos que $(X,d)$ es un espacio métrico completo y

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \tag{3.16}$$

donde cada uno de los $E_n$ magro, o equivalentemente $V_n := \left(\overline{E_n}\right)^c$ es un abierto denso. Tomando complementos en la identidad (3.16) deducimos que $\varnothing = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n^c$. Y como $V_n \subset E_n^c$ deducimos

$$\varnothing = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n^c.$$

Probaremos que el conjunto del segundo miembro de la igualdad anterior es no vacío y así arribaremos a una contradicción. De hecho, vamos todavía más fuerte, esto es que $\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n^c$ es un conjunto denso. Esto es un resultado que merece destacarse. *En un espacio métrico completo la intersección de una cantidad numerable conjuntos abiertos y densos es un conjunto denso*.

Para demostrar que $\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n^c$ es denso es suficiente demostrar que:

$$x_0 \in X \text{ y } r > 0 \Rightarrow B(x_0,r) \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n^c\right) \neq \varnothing. \tag{3.17}$$

**Observación:** Vamos a usar repetidamente la siguiente propiedad: *Si $V$ es abierto y denso y $G$ es abierto entonces $G \cap V$ es abierto y no vacio, por ende existe $r > 0$ y $x \in G \cap V$ con $B'(x,r) \subset G \cap V$*

Por la observación existe $x_1 \in X$ y $r_1 > 0$ tal que

$$B'(x_1, r_1) \subset V_1 \cap B(x_0, r).$$

Nuevamente por la observación existe $x_2 \in X$ y $r_2 > 0$ tal que

$$B'(x_2, r_2) \subset V_2 \cap B(x_1, r_1)$$

Continuando de esta manera, usando el hecho de que para cada $n \in \mathbb{N}$, $V_n$ es abierto y denso y que $B(x_{n-1}, r_{n-1})$ es abierto, obtenemos $x_n \in X$ y $r_n > 0$ tal que

$$B'(x_n, r_n) \subset V_n \cap B(x_{n-1}, r_{n-1})$$

Además, en cada paso de esta construcción, podemos elegir $r_n$, achicándolo si fuese necesario, de modo que $0 < r_n \leq 1/n$.

Se tiene que

$$B'(x_1, r_1) \supset B'(x_2, r_2) \supset \cdots \supset B'(x_n, r_n) \supset \cdots$$

y

$$\text{diam}\left(B'(x_n, r_n)\right) \longrightarrow 0 \text{ cuando } n \to \infty$$

de modo que, por el Teorema 3.6.9, tenemos que existe $x \in X$ tal que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B'(x_n, r_n) = \{x\}$$

Notar que por lo prviamente probado

$$x \in B(x_0, r) \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n\right).$$

Por lo tanto se verifica (3.17). □

### 3.6.5 Ejercicios

**Ejercicio 3.6.30** Consideremos el conjunto $C([0,1])$ donde tenemos definidas las dos métricas $d_1$ y $d_2$ de los Ejemplos 3.3 en la página 26 y 3.4 en la página 27 respectivamente. Determinar si las siguientes sucesiones son convergentes con estas métricas y si son de Cauchy.

i) $f_n(x) := \frac{1}{n}\text{sen}(nx)$.

ii) $f_n(x) := x^n$.

iii) $f_n(x) := nx^n$.

**Ejercicio 3.6.31** Con la misma notación del ejercicio anterior demostrar que si $f_n \to f$ con la métrica $d_1$ entonces lo mismo ocurre con la métrica $d_2$.

**Ejercicio 3.6.32** Sean $(X, d)$ e $(Y, d')$ dos e.m. y $f : X \to Y$ un homeomorfismo. Demostrar que la sucesión $\{a_n\}$ es convergente en $X$ si, y solo si, $f(a_n)$ es convergente en $Y$.

**Ejercicio 3.6.33** Sea $(X, d)$ un e.m., $a \in A$ y $A \subset X$. Demostrar que existe un sucesión $\{a_n\}$, con $a_n \in A$, para todo $n$, y:

$$\lim_{n\to\infty} d(a, a_n) = d(a, A).$$

**Ejercicio 3.6.34** Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto acotado superiormente. Demostrar que existe una sucesión $\{a_n\}$, con $a_n \in A$, para todo $n$, y además:

$$\sup A = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

**Ejercicio 3.6.35** Demostrar que $(C([0, 1]), d_1)$, con $d_1$ como en el Ejercicio 3.6.30, es un e.m. completo.

**Ejercicio 3.6.36** Demostrar que un e.m. con una cantidad finita de elementos es completo.

**Ejercicio 3.6.37** Demostrar que una sucesión de Cauchy es acotada.

**Ejercicio 3.6.38** Sea $\{a_n\}$ una sucesión en un e.m. $(X, d)$, demostrar que cualquierqa de las dos condiciones implica que $\{a_n\}$ es de Cauchy.

i) $d(a_n, a_{n+1}) \leq \alpha^n$, con $0 < \alpha < 1$.

ii) La siguiente serie es convergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} d(a_n, a_{n+1}).$$

**Ejercicio 3.6.39** Sean $d$ y $d'$ dos métricas uniformemente equivalentes sobre el mismo espacio $X$. Demostrar que $(X, d)$ es completo si, y solo si, $(X, d')$ es completo.

**Ejercicio 3.6.40** Sea $f : X \to Y$ una función uniformemente continua entre dos e.m.. Demostrar que si $\{a_n\}$ es de Cauchy en $X$ entonces $\{f(a_n)\}$ es de Cauchy en $Y$. Dar un contraejemplo a la afirmación anterior suponiendo, solo, que $f$ es continua. *Ayuda:* Considerar la recta extendida.

**Ejercicio 3.6.41** Demostrar que el axioma de completitud de $\mathbb{R}$ dado, se puede sustituír por cualquiera de los siguientes:

i) Toda sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$ converge.

ii) *Principio de Encajes de Intervalos*. Sea $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de intervalos cerrados tales que $I_{n+1} \subset I_n$, para todo $n$, entonces $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \neq \varnothing$.

## 3.7 Compacidad

Es quizas con la noción de conjunto compacto donde encontraremos las diferencias más grandes entre la topología de $\mathbb{R}^n$ y la de un espacio métrico arbitrario. En particular, ya no será válida la carectización de compacto como cerrado y acotado. Para obtener una caracterización necesitaremos un concepto más fuerte que la acotación, este será el de conjunto **totalmente acotado** y, a la vez, un concepto más fuerte que el de conjunto cerrado y en este caso usaremos la de conjunto completo.

Es interesante hacer notar que, en topología, interesan aquellas propiedades que se preservan por homeomorfismos. En este sentido vemos que la noción de conjunto cerrado acotado no se preserva por este tipo de aplicaciones (claro está, los espacios métricos involucrados deberían ser distintos que $\mathbb{R}^n$ con la métrica euclidea). Por ejemplo, como ya hemos visto, la identidad es un homeomorfismo de $(\mathbb{R}^n, d)$, con $d$ la métrica euclidea, en $(\mathbb{R}^n, d_1)$, con

$$d_1(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}.$$

Ahora bien, como $0 \leq d_1 < 1$ cualquier conjunto de $\mathbb{R}^n$ tiene diámetro, respecto a $d_1$ menor o igual a $1$ y, por ende, cualquier conjunto es acotado. Sin embargo, no todo conjunto es acotado respecto a la métrica euclidea. Por otra parte $\mathbb{R}^n$ es cerrado en ambas métricas, pues es el conjunto total. Vemos así que el concepto de conjunto cerrado y acotado no necesariamente se preserva por homeomorfismos lo que relativiza su importancia.

**Definición 3.7.24** Diremos que un conjunto $A$ de un e.m. $(X,d)$ es totalmente acotado si para cada $\varepsilon > 0$ existe una cantidad finita de conjuntos de diámetro menor que $\varepsilon$ cuya unión contiene a $A$. En otras palabras existen conjuntos $A_i$, $i = 1,...,n$, con $\delta(A_i) < \varepsilon$ que satisfacen:

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i.$$

**Ejercicio 3.7.42** Demostrar que un subconjunto de un conjunto totalmente acotado es totalmente acotado.

Veamos algunos ejemplos de conjuntos totalmente acotados y de conjuntos que no lo son.

**Ejemplo 3.7.27** Cualquier intervalo acotado de $\mathbb{R}$ es totalmente acotado. Para justificar esta aseveración, tomemos $\varepsilon > 0$ y un intervalo cualquiera de extremos $a$ y $b$. Elijamos $n$ suficientemente grande para que $1/n < \varepsilon$. Entonces los conjuntos

$$I_k := \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right] \quad , k = 0, \ldots, n-1,$$

satisfacen la definición.

**Ejemplo 3.7.28** Cualquier conjunto acotado en el espacio euclideo $\mathbb{R}^n$ es totalmente acotado. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto acotado, entonces $A$ está contenido en un cubo de la forma $C := [-m,m] \times \cdots \times [-m,m] = [-m,m]^n$. En virtud del Ejercicio 3.7.49 en la página 59 es suficiente demostrar que $C$ es totalmente acotado. Sea $\varepsilon > 0$. Tomemos $k$ suficientemente grande para que

$$\frac{2\sqrt{n}m}{\varepsilon} < k \tag{3.18}$$

Ahora, partimos cada intervalo $[-m,m]$ en $k$ subintervalos de la misma longitud $1/k$.

Como puede observarse en la Figura **??**, nos quedan determinados $k^n$ cubos que cubren el cubo $C$. Cada uno de estos cubos más chicos tiene diámetro $2\sqrt{n}m/k$, por consiguiente, por la desigualdad 3.18, el diámetro de ellos es menor que $\varepsilon$.

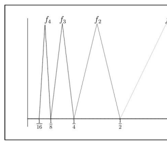
No es cierto, en general, que todo conjunto acotado en un e.m. sea totalmente acotado. Los siguientes ejemplos muestran esto.

**Ejemplo 3.7.29** Sea $(X,d)$ un e.m. discreto con $X$ infinito. El conjunto $X$ es acotado, de hecho $\delta(X) = 1$; sin embargo no podemos cubrir $X$ con conjuntos de diámetro menor que 1/2 (cualquier número menor que 1 serviría). Esto ocurre debido a que si un conjunto en un e.m. discreto tiene más de un elemento entonces su diámetro es 1. Así, si cubrimos $X$ con una cantidad finita de conjuntos, alguno de los conjuntos del cubrimiento necesariamente tiene más de un elemento, de lo contrario $X$ sería finito, por consiguiente el diámetro de este conjunto es 1 y no puede ser menor que $1/2$.

**Ejemplo 3.7.30** En $C([0,1])$, con la métrica del Ejemplo 3.1.4 en la página 26, la bola cerrada $K(0,1)$ (0 denota la función que es constantemente igual a 0) no es un conjunto totalmente acotado. Para ver esto definimos la siguiente función:

$$f(x) := \begin{cases} 4(x-\frac{1}{2}), & \text{si } \frac{1}{2} \le x \le \frac{3}{4}; \\ -4(x-1), & \text{si } \frac{3}{4} \le x \le 1; \\ 0, & \text{para los restantes } x; \end{cases}$$

y la siguiente sucesión de funciones $f_n(x) := f(2^n x)$. En la Figura **??** puede verse las gráficas de algunas de las funciones de la sucesión.



Funciones del Ej 3.7.30

Puede demostrarse que la distancia de cualquiera de las funciones de la sucesión a otra es igual a 1 y que $f_n \in K(0,1)$. Sea $C := \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$, observemos que como subespacio $C$ resulta ser un e.m. discreto, así, por el Ejemplo anterior y el Ejercicio 3.7.49 en la página 59, $\overline{B(0,1)}$ no puede ser totalmente acotado.

**Ejemplo 3.7.31** Hay una interesante conexión de la total acotación con la dimensión. Para introducirla, veamos cuantas bolas abiertas de radio $1/2$, en $\mathbb{R}^n$ con la métrica euclidea, se necesitan, al menos, para cubrir la bola cerrada $K(0,1)$. Denotemos por $e_j$ los vectores canónicos

$$e_j := (0, \ldots, 1, \ldots, 0),$$

donde el $1$ está en el lugar $j$. Notesé que $e_j \in K(0,1)$ y que:

$$d(e_j, e_i) = \sqrt{2} \quad i \neq j.$$

De modo que, si $i \neq j$ entonces $e_i$ y $e_j$ no pueden estar en una misma bola de radio $1/2$. De lo contrario, si $e_i, e_j \in B(x, 1/2)$, entonces

$$d(e_i, e_j) \le d(e_i, x) + d(x, e_j) < 1 < \sqrt{2},$$

que es una contradicción. De esta manera si cubrimos la bola cerrada $K(0,1)$ por bolas abiertas de radio $1/2$ necesitaremos, al menos, $n$ de estas bolas. Es decir, la cantidad de estas bolas crece cuando aumenta la dimensión $n$. Esta observación nos lleva a conjeturar que si buscamos un espacio vectorial de dimensión infinita[5] tenemos chances de construir conjuntos acotados, en particular la bola $K(0,1)$, que no son totalmente acotados.

**Ejercicio 3.7.43** Demostrar que en $l_2$ la bola cerrada $K(0,1)$ no es totalmente acotada.

[5] Esto significa que no tiene una base finita

Recordemos que, en un e.m. $(X,d)$, una familia de conjuntos abiertos $\{U_i\}_{i\in I}$ es un cubrimiento por abiertos de $A\subset X$ si

$$A\subset \bigcup_{i\in I} U_i.$$

**Definición 3.7.25** Un subconjunto $A$ de un e.m. $(X,d)$ se dirá **compacto** si, y solo si, todo cubrimiento por abiertos de $A$ tiene un subcubrimiento finito. Es decir, si $\{U_i\}_{i\in I}$ es un cubrimiento de $A$, existe un conjunto finito $F\subset I$ tal que $\{U_i\}_{i\in F}$ es un cubrimiento de $A$.

**Teorema 3.7.11 (Caracterización de compacidad en espacios métricos)** Sea $(X,d)$ un espacio métrico. Entonces son equivalentes:

1. $X$ es compacto;
2. $X$ es totalmente acotado y completo.
3. Toda sucesión en $X$ tiene una subsucesión convergente.

*Dem.* Veamos que 1⇒3. Por el absurdo supongamos que existe una sucesión $\{a_n\}$ en $X$ que no tiene ninguna subsucesión convergente. Definamos $\Gamma$ como la colección de todos los conjuntos abiertos $G$ de $X$ tales que $G$ tiene una cantidad finita de elementos de la sucesión, es decir:

$$G\in\Gamma \Leftrightarrow \#\{n : a_n\in G\}<\infty.$$

Vamos a probar que $\Gamma$ es un cubrimiento de $X$. Supongamos que $x\in X$ y $x\notin G$ para todo $G\in\Gamma$. De modo que, por definición, cada abierto que contiene a $x$ contiene infinitos términos de la sucesión $\{a_n\}$. En particular, podemos encontrar $n_1$ tal que $a_{n_1}\in B(x,1)$. Ahora podemos encontrar $n_2>n_1$ tal que $a_{n_2}\in B(x,\frac{1}{2})$. Y así continuamos, construímos una subsucesión $a_{n_k}$ tal que $a_{n_k}\in B(x,\frac{1}{k})$. Lo que implica que $a_{n_k}$ converge a $x$, contradiciendo nuestra suposición. De esta manera, $\Gamma$ es un cubrimiento de $X$. Sea $G_i$, $i=1,\dots,n$, un subcubrimiento finito de $X$. Es decir

$$X=G_1\cup\cdots\cup G_n.$$

Como cada $G_i$, $i=1,\dots,n$, tiene una cantidad finita de términos de la sucesión, concluímos que $X$ contiene una cantidad finita de términos de la sucesión, lo que, claro está, no puede ocurrir. Esto finaliza la demostración de 1⇒3.

Demostremos ahora que 3⇒ 2 empezando por ver que $X$ es totalmente acotado. Nuevamente procedemos por el absurdo, suponiendo que $X$ no es totalmente acotado. Esto implica que existe un $\varepsilon>0$ tal que $X$ no se puede cubrir con una cantidad finita de conjuntos de diámetro $\varepsilon$. Sea $a_1$ cualquier punto de $X$. Como $B(a_1,\varepsilon)$ no cubre $X$, existe $a_2\in X-B(a_1,\varepsilon)$. Como $B(a_i,\varepsilon)$, $i=1,2$, no cubren $X$, existe un $a_3\in X-\big(B(a_1,\varepsilon)\cup B(a_2,\varepsilon)\big)$. Continuando de esta forma, contruímos una sucesión $a_n$ tal que

$$a_n\in X-\big(B(a_1,\varepsilon)\cup\cdots\cup B(a_{n-1},\varepsilon)\big).$$

De esta forma tendremos que:

$$d(a_i,a_j)\geq\varepsilon \quad \text{para } i\neq j.$$

Por hipótesis la sucesión $a_n$ tiene una subsucesión convergente, en particular esta subsucesión será de Cauchy. No obstante la desigualdad anterior implica que ninguna subsucesión de $\{a_n\}$ puede ser de Cauchy, contradicción que prueba que $X$ es totalmente acotado.

Veamos ahora que $X$ es completo. Sea $\{a_n\}$ una sucesión de Cauchy en $X$. Podemos extraer una subsucesión $\{a_{n_k}\}$ convergente a un $a \in X$. Sea $\varepsilon > 0$. Puesto que $\{a_n\}$ es de Cauchy, pondemos encontrar $N > 0$ tal que si $n, m > N$ entonces:

$$d(a_n, a_m) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.19}$$

Como $a_{n_k}$ converge a $a$, podemos encontrar un $n_k$ lo suficientemente grande para que $n_k > N$ y:

$$d(a_{n_k}, a) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Así, usando (3.19), tenemos que para $n > N$:

$$d(a_n, a) \leq d(a_n, a_{n_k}) + d(a_{n_k}, a) < \varepsilon.$$

Por último veamos que 2 ⇒1. Para este fin elijamos un cubrimiento $\{G_\lambda\}_{\lambda \in L}$ arbitrario de $X$. Supongamos que este cubrimiento no tiene un subcubrimiento finito. Como $X$ es totalmente acotado, acorde al Ejercicio 3.7.46, podemos cubrir a $X$ por una cantidad finita de bolas de radio $1$. Alguna de estas bolas no se podrá cubrir por una cantidad finita de $G_\lambda$, de lo contrario, si todas se cubren por una cantidad finita, como hay una cantidad finita de estas bolas, podríamos cubrir $X$ por una cantidad finita de $G_\lambda$. Llamemos $B(x_1, 1)$ a la bola que no se cubre por finitos $G_\lambda$. Como $B(x_1, 1)$ es totalmente acotado, podemos aplicar la construcción anterior a $B(x_1, 1)$ en lugar de $X$ y con bolas de radio $1/2$, en lugar de $1$, obteniendo de esta forma una bola $B(x_2, 1/2)$ que no se cubre por una cantidad finita de $G_\lambda$. Además podemos suponer que $B(x_2, 1/2) \cap B(x_1, 1) \neq \varnothing$, de lo contrario no hubiera tenido sentido usar la bola $B(x_2, 1/2)$ para cubrir $B(x_1, 1)$. Continuamos de esta forma y producimos una sucesión $B(x_n, 1/2^n)$ (aquí no basta que los radios tiendan a cero, sino que es necesario que la serie de radios converja) de bolas tales que ninguna de ellas se puede cubrir por una cantidad finita de $G_\lambda$. Veamos que la sucesión $x_n$ es de Cauchy. Para esto tomemos

$$z_n \in B\Big(x_n, \frac{1}{2^n}\Big) \cap B\Big(x_{n+1}, \frac{1}{2^{n+1}}\Big).$$

Entonces

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq d(x_n, z_n) + d(z_n, x_{n+1}) < \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} < \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Lo que permite utilizar el criterio de comparación para la convergencia de series para demostrar que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} d(x_n, x_{n+1}) < \infty.$$

Acorde a un ejercicio de la práctica, esto implica que $\{x_n\}$ es de Cauchy, por ende converge a algún $x_0 \in X$. Como $G_\lambda$ es un cubrimiento, existe $\lambda_0$ tal que $x_0 \in G_{\lambda_0}$. Como $G_{\lambda_0}$ es abierto, existe un $r > 0$ tal que

$$B(x_0, r) \subset G_{\lambda_0}. \tag{3.20}$$

Puesto que $x_n$ converge a $x_0$ y $1/2^{n-1}$ converge a 0, podemos hallar $n$ lo suficientemente grande para que:

$$d(x_n, x_0) < \frac{r}{2} \quad \text{y} \quad \frac{1}{2^{n-1}} < \frac{r}{2}. \tag{3.21}$$

Veamos que esto, (3.21) y (3.20) implica que:

$$B\Big(x_n, \frac{1}{2^n}\Big) \subset B(x_0, r) \subset G_{\lambda_0}. \tag{3.22}$$

En efecto, si:

$$y \in B\Big(x_n, \frac{1}{2^n}\Big),$$

entonces

$$d(y,x_0) \leq d(y,x_n) + d(x_n,x_0) < \frac{1}{2^n} + \frac{r}{2} < r,$$

lo que prueba (3.22), siendo, además, esta inclusión una contradicción puesto que estamos cubriendo la bola $B(x_n, 1/2^n)$ por un sólo $G_\lambda$, recordemos que estas bolas no se cubrían por finitos $G_\lambda$. (ya terminamos, ¡por fin!) □

Ojo! está repetido

**Lema 3.7.1** [Cubrimiento de Lebesgue] Sea $(X,d)$ un espacio métrico compacto, $\{G_i\}_{i\in\mathscr{I}}$ un cubrimiento de $X$ por conjuntos abiertos: i.e.

$$X = \bigcup_{i\in\mathscr{I}} G_i.$$

Entonces existe un $\delta > 0$ tal que si $A \subset X$ es un conjunto con diam$(A) < \delta$ entonces existe $i \in \mathscr{I}$ tal que $A \subset G_i$. El número $\delta$ se suele llama *número de Lebesgue número de Lebesgue* del cubrimiento.

*Demostración.* Sea $x \in X$. Existe $i_x \in \mathscr{I}$ tal que $x \in G_{i_x}$. Como $G_{i_x}$ es abierto, existe $r_x$ tal que $B(x;r_x) \subset G_{i_x}$. La colección de bolas $\{B(x;r_x/2)\}_{x\in X}$ es un cubrimiento de $X$. Como $X$ es compacto, existen una cantidad finita $\{x_1,\ldots,x_n\}$ de puntos tales que

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i; r_{x_i}/2).$$

Tomemos

$$\delta = \min_{i=1,\ldots,n} \frac{r_{x_i}}{2}.$$

Sea ahora $A \subset X$ con diam$(A) < \delta$. Tomemos cualquier $x \in A$. Debe existir $k = 1,\ldots,n$ tal que $x \in B(x_k; r_{x_k}/2) \subset B(x_k; r_{x_k}) \subset G_j$, donde por simplicidad pusimos $j = i_{x_k}$. Sea ahora $y$ otro punto en $A$. Entonces tenemos

$$d(y,x_k) \leq d(y,x) + d(x,x_k) \leq \delta + \frac{r_{x_k}}{2} \leq \frac{r_{x_k}}{2} + \frac{r_{x_k}}{2} = r_{x_k}$$

Entonces $y \in B(x_k; r_{x_k}) \subset G_j$. Hemos probado $A \subset G_j$. □

### 3.7.1 Ejercicios

**Ejercicio 3.7.44** Demostrar que un espacio métrico discreto es compacto si, y solo si, es finito.

**Ejercicio 3.7.45** Demostrar que un conjunto totalmente acotado es acotado.

**Ejercicio 3.7.46** Demostrar que $X$ es totalmente acotado si, y solo si, para cada $\varepsilon > 0$ podemos cubrir $X$ por una cantidad finita de bolas de radio $\varepsilon$.

**Ejercicio 3.7.47** Demostrar que un conjunto compacto es cerrado y acotado.

**Ejercicio 3.7.48** Demostrar que si $f : (X, d) \to (Y, d')$ es continua y $X$ compacto entonces $f(X)$ es compacto. Como corolario, demostrar que si $f : X \to \mathbb{R}$ y $X$ es compacto entonces $f$ alcanza un máximo y un mínimo.

**Ejercicio 3.7.49** Demostrar que un subconjunto de un conjunto precompacto es precompacto.

**Ejercicio 3.7.50** Sea $(X, d)$ un e.m., $A$ y $B$ subconjuntos compactos de $X$. Demostrar que

i) Existen puntos $x$ e $y$ en $A$ tales que $d(x, y) = \delta(A)$.

ii) Existe un $x \in A$ e $y \in B$ tales que $d(x, y) = d(A, B)$.

iii) Si $A \cap B = \varnothing$, entonces $d(A, B) > 0$.

**Ejercicio 3.7.51** Sea $\{a_n\}$ una sucesión en un e.m. $(X, d)$ tal que $a_n \to a$. Demostrar que el conjunto $\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{a\}$ es compacto.

**Ejercicio 3.7.52** Sean $(X, d)$ e $(Y, d')$ dos e.m. y $f : X \to Y$ una función. Demostrar que $f$ es continua si, y solo si, $f_{|K} : K \to Y$ es continua para cada compacto $K$.

**Ejercicio 3.7.53** Como se desprende de la teoría, el intervalo $(0, 1)$ no es cerrado en $\mathbb{R}$. Encontrar un cubrimiento de $(0, 1)$ que no tenga un subcubrimiento finito.

**Ejercicio 3.7.54** Sea $(X, d)$ un e.m. compacto y $f : X \to X$ una función continua. Supongamos que, para todo $x \in X$, se tiene que $f(x) \neq x$. Demostrar que existe $\varepsilon > 0$ tal que $d(f(x), x) > \varepsilon$.

**Ejercicio 3.7.55** Sea $A \subset \mathbb{R}$ no compacto, demostrar que existe una función continua $f : A \to \mathbb{R}$ que no es acotada. *Sugerencia* Como $A$ es no compacto y $A \subset \mathbb{R}$ entonces o $A$ es no acotado o $A$ es no cerrado, considerar estos dos casos.

**Ejercicio 3.7.56** Sea $\{K_n\}$ una sucesión de conjuntos compactos no vacios, tales que $K_n \supset K_{n+1}$. Demostrar que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n \neq \varnothing$.

**Ejercicio 3.7.57** Sea $(X, d)$ un e.m. compacto y $\{U_i\}_{i\in I}$ un cubrimiento por abiertos de $X$. Demostrar que existe un $\varepsilon > 0$ tal que toda bola de radio $\varepsilon$ está contenida en, al menos, un $U_i$. *Sugerencia* Para cada $x \in X$ elegir $r_x$ tal que $B(x, r_x)$ esta contenida en algún $U_i$. Tomar un subcubrimiento finito de estas bolas y luego considerar $\varepsilon$ como el mínimo de las mitades de los radios de las bolas del subcubrimiento.

**Ejercicio 3.7.58** Utilizar la siguiente "idea" para dar una demostración alternativa de que compacto implica completo. Tomar una suseción de Cauchy $\{a_n\}$ en $X$. De la desigualdad

$$|d(x, a_n) - d(x, a_m)| \leq d(a_n, a_m) \quad n, m \in \mathbb{N}\ x \in X$$

concluír que $d(x, a_n)$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$ y de esto que la siguiente función esta bien definida:

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} d(x, a_n).$$

Notar que $f : X \to \mathbb{R}$ y por ende $f$ alcanza un mínimo en algún $a \in X$. Por último demostrar que $a$ es el límite de $a_n$.

## 3.8 Conexión

La definición de conjunto **conexo**, **arco conexo** es idéntica a la que ya hemos estudiado. Los conjuntos conexos, así definidos, satisfacen las mismas propiedades que ya observamos para la métrica euclidea, con una excepción. El hecho que valga las mismas propiedades nos permite definir el concepto de **componente conexa** de la misma forma que lo hicimos para $\mathbb{R}^n$.

La propiedad que no continua valiendo, en espacios métricos en general, es aquella que afirmaba que las componentes conexas de conjuntos abiertos eran abiertas. Esto es así pues en la demostración de tal propiedad utilizamos que una bola era un conjunto conexo y por el siguiente ejercicio:

**Ejercicio 3.8.59** Encontrar un ejemplo de espacio métrico que tenga bolas disconexas.

Para conservar tal propiedad podríamos "pedir" la hipótesis que las bolas sean conexas. No obstante observaremos que en tal demostración podríamos haber utilizado cualquier entorno conexo que fuera bola o no. Esto nos lleva a la siguiente definición:

**Definición 3.8.26** Un espacio métrico $(X, d)$ se llama **localmente conexo** si para todo $x \in X$ y $r > 0$ existe un entorno conexo $V$ de $x$ tal que $V \subset B(x, r) \subset X$.

$\mathbb{R}^n$ es localmente conexo, podemos utilizar como $V$ la misma bola que aparece en la definición anterior. Lo curioso del caso es que hay espacios métricos $(X, d)$ tales que $X$ es conexo y, sin embargo, $X$ no es localmente conexo.

**Ejemplo 3.8.32** Sea $X = \mathbb{Q} \times \mathbb{R} \cup \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ y consideremos este $X$ como subespacio de $\mathbb{R}^2$. En la figura 3.3 hemos hecho un bosquejo, está claro que es imposible lograr exactitud, del gráfico $X$.

Notesé que si tomamos un punto en $X$ pero no sobre el eje horizontal y consideramos una bola de centro $x$ y un radio suficientemete chico de modo que la bola no interseque el mencionado eje, entonces $B(x, r) \cap X$ está compuesto de un conjunto de segmentos verticales disconexos entre si. Si ahora buscamos un conjunto conexo $V$ tal que

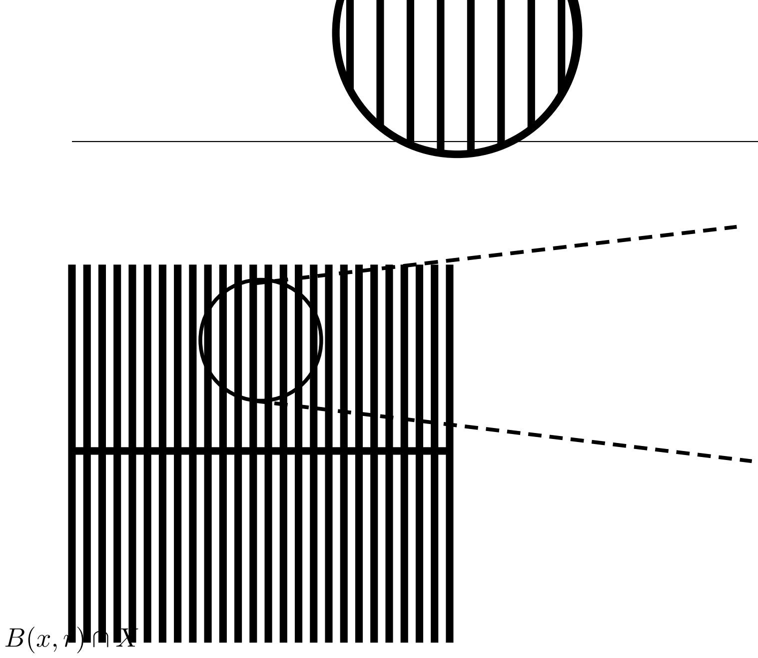



Figura 3.3: El subespacio $X$

$V \subset B(x,r)$ notaremos que $V$ debería ser un subconjunto de alguno de los segmentos verticales, precisamente de aquel segmento que tenga el $x$ dentro de si, pero tal $V$ no será un entorno. Lo que prueba que el espacio $(X.d)$ no es localmente conexo.

### 3.8.1 Ejercicios

**Ejercicio 3.8.60** Demostrar que los siguientes conjuntos son disconexos:

1. $(0,3) \cup [4,6)$.
2. $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$.
3. $\{1/n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$.

**Ejercicio 3.8.61** ¿ Cuáles de los siguientes conjuntos son conexos? Justificar la respuesta.

i) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{(x, \frac{1}{n}x) : x \in \mathbb{R}\}$.

ii) $\mathbb{R} \times \mathbb{R} - \mathbb{I} \times \mathbb{I}$, donde $\mathbb{I}$ son los números irracionales.

iii) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 1\}$.

iv) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 1\} \cup \{(1,0)\}$.

**Ejercicio 3.8.62** Supongamos que $A$ y $B$ son conjuntos conexos de un e.m.. Demostrar, dando contraejemplos, que no necesariamente deben ser conexos los siguientes conjuntos $A \cap B$, $A \cup B$, $\partial A$ y $A^0$.

**Ejercicio 3.8.63** Sea $(X,d)$ un e.m. conexo e $(Y,d)$ un e.m. discreto. Demostrar que una función $f : X \to Y$ continua es constante.

**Ejercicio 3.8.64** Sean $A$ y $B$ subconjuntos conexos de un e.m. Demostra que si $\overline{A} \cap B \neq \varnothing$ entonces $A \cup B$ es conexo.

**Ejercicio 3.8.65** Probar que todo espacio ultramétrico es totalmente disconexo.

**Ejercicio 3.8.66** Sea $\{K_n\}$ una sucesión de conjuntos compactos y conexos de un e.m., supongamos que la sucesión es decreciente, es decir $K_n \supset K_{n+1}$. Demostrar que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$ es conexo. Dar un ejemplo de una sucesión como la anterior, cambiando compacto por cerrado, tal que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$ no sea conexo.

**Ejercicio 3.8.67** Dado un conjunto $A$ de un e.m. $(X, d)$ definimos la función característica del conjunto $A$ por:

$$1_A(x) := \begin{cases} 1, & \text{si } x \in A; \\ 0, & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

Demostrar que $X$ es conexo si, y solo si, no existe una función característica $1_A$, con $A \neq \varnothing$ y $A \neq X$, continua.

**Ejercicio 3.8.68** Demostrar que el espacio métrico $(X, d)$ es localmente conexo si, y sólo si, las componentes conexas de conjuntos abiertos son abiertas.

**Ejercicio 3.8.69** Sea $(X, d)$ un espacio métrico localmente conexo y compacto. Demostrar que $X$ tiene, a lo sumo, una cantidad finita de componentes.

**Ejercicio 3.8.70** Sea $X, d$ un espacio métrico homeomorfo a $\mathbb{Z}$ demostrar que las componentes conexas de $X$ son conjuntos unitarios. Este tipo de espacios se llaman totalmente disconexos.

# 4 Sucesiones, series de funciones y sus amigos

## 4.1 Sucesiones de funciones

Sea $K$ un espacio métrico, usualmente $K \subset \mathbb{R}^n$ para algún $n$.

Una colección $f_n : K \to \mathbb{R}$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$ se llama sucesión de funciones.

Dada una sucesión de funciones $f_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ y $x \in K$, $f_n(x)$ es una sucesión de números reales y como tal puede o no converger a cierto límite.

La mayor diferencia entre una sucesión de números reales y una sucesión de funciones es el hecho que en una sucesión de funciones los términos de la sucesión cambian cuando la variable $x$ cambia. Por lo tanto el límite también puede cambiar, en caso de existir, y por consiguiente el límite también es una función de $x$. De manera que es necesario tener presente que cuando una sucesión de funciones es evaluada en un valor de $x$ particular resulta una sucesión de números reales.

Supongamos que para todo $x \in K$ la sucesión de números reales $f_n(x)$ converge, es decir que existe el $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ y lo denotaremos $f(x)$. En este caso diremos que $f_n$ converge puntualmente a $f$.

**Ejemplo 4.1.1** La sucesión $f_n(x) = \frac{1}{1+nx^2}$ converge puntualmente

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

**Justificación:**

Claramente si $x = 0$ tenemos que $f_n(0) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y entonces $\lim_{n\to\infty} f_n(0) = 1$.

Si $x \neq 0$ entonces $nx^2 \to \infty$ cuando $n \to \infty$ y por lo tanto $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+nx^2} = 0$.

Como vemos, la determinación de la convergencia puntual suele reducirse al cálculo de un límite. Para este propósito es lícito usar todas las técnicas estudiadas en cursos anteriores como puede ser la Regla de L'Hôpital.

**Ejemplo 4.1.2** La sucesión $f_n(x) = \frac{n^2x-n^2}{1+n^2x}$ converge a $f(x) = \frac{x-1}{x}$ si $x \neq 0$.

Si $x = 0$ no converge.

Es necesario ser cuidadoso con la justificación. Por ejemplo, la Regla de L'Hôpital sólo puede usarse en casos de indeterminaciones.

Si $x = 0$ no hay indeterminación pues $f_n(0) = -n^2$ y $\lim_{n\to\infty} f_n(0) = \lim_{n\to\infty}(-n^2) = -\infty$.

Es lícito decir $\lim_{n\to\infty} f_n(0) = -\infty$ en lugar de que $f_n$ no converge en $x = 0$.

Cuando $x = 1$ tampoco hay indeterminación pues $f_n(1) = \frac{0}{1+n^2}$ y por tanto $\lim_{n\to\infty} f_n(1) = 0$.

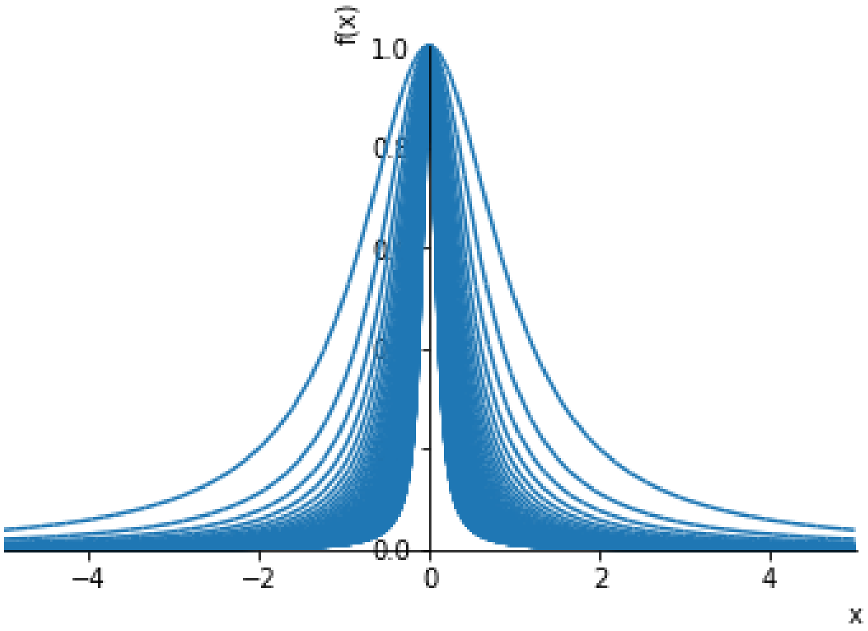
Si $x \neq 0$ y $x \neq 1$ podemos usar la Regla de L'Hôpital dado que se tiene la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$. En efecto, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2x-n^2}{1+n^2x} = \lim_{n\to\infty} \frac{2nx-2n}{2nx} = \lim_{n\to\infty} \frac{2x-2}{2x} = \frac{1-x}{x}$. Observemos que si $f(x) = \frac{1-x}{x}$ entonces $f(1) = 0$ y por tanto $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ $\forall x \neq 0$.

Suele ser útil graficar algunas funciones de la sucesión y la función límite, ya sea empleando los procedimientos aprendidos en materias anteriores o usando sympy.

Para el Ejemplo 4.1.1 APARECE MAL LA REFERENCIA DEL EJEMPLO!!!!!!!!!!

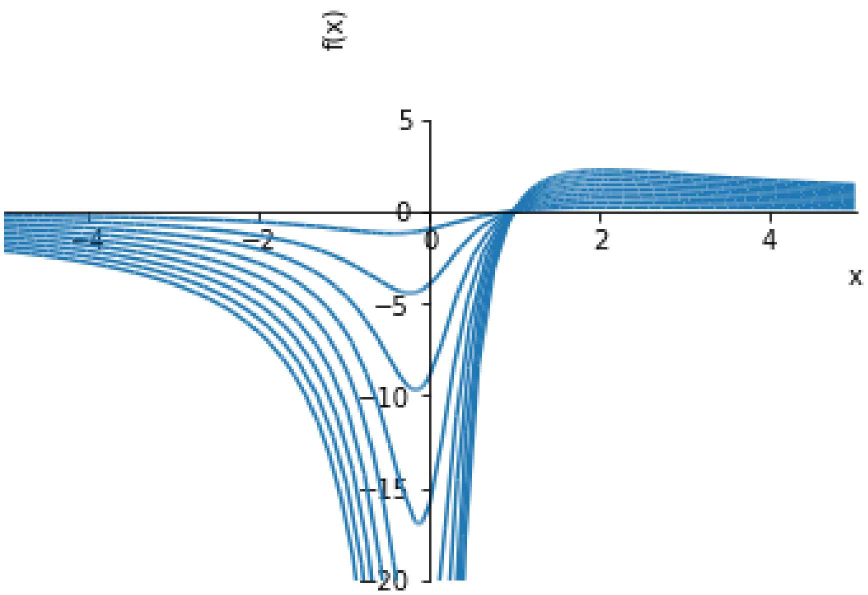
[1]:
```
from sympy import *
init_printing()
```

[2]:
```
x,n=symbols('x,n')
fn=1/(1+n*x**2)
p=plot(fn.subs(n,1), (x,-5,5),show=false)
for k in range(2,100):
    p.append(plot(fn.subs(n,k), (x,-5,5),show=false)[0])
p.show()
```




Para el Ejemplo 4.1.2

[3]:
```
x,n=symbols('x,n')
fn=(n**2*x-n**2)/(1+n*x**2)
p=plot(fn.subs(n,1), (x,-5,5),show=false,ylim=(-20,10))
for k in range(2,10):
    p.append(plot(fn.subs(n,k), (x,-5,5),show=false)[0])
p.show()
```



En los ejemplos anteriores se forma una "montaña" alrededor de un punto *fijo* ($x = 0$). Pero, puede ocurrir otro comportamiento que observaremos los siguientes ejemplos.

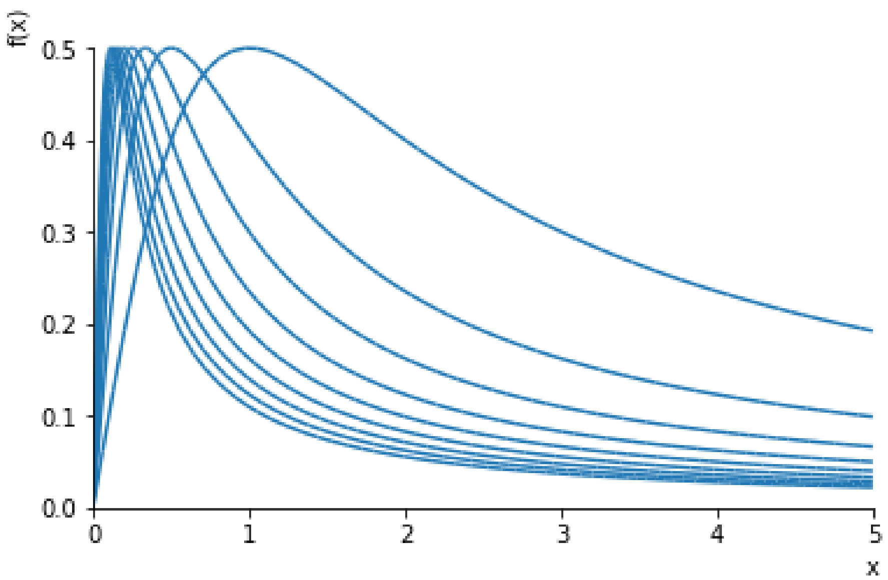
**Ejemplo 4.1.3** Si $f_n(x) = \begin{cases} 1 & n \leq x \leq n+1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0.$

GRAFICAR CON SYMPY!!!

A partir del gráfico vemos que los términos de la sucesión $f_n(x)$ son "montañas móviles" de altura 1.

**Ejemplo 4.1.4** Si $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ en $[0,\infty)$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{nx}{1+n^2x^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x}{x}\frac{x}{\frac{1}{n}+nx^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x}{\frac{1}{n}+nx^2} = 0.$

[4]:
```
x,n=symbols('x,n')
fn=n*x/(1+n**2*x**2)
p=plot(fn.subs(n,1), (x,0,5),show=false)
for k in range(2,10):
    p.append(plot(fn.subs(n,k), (x,0,5),show=false)[0])
p.show()
```



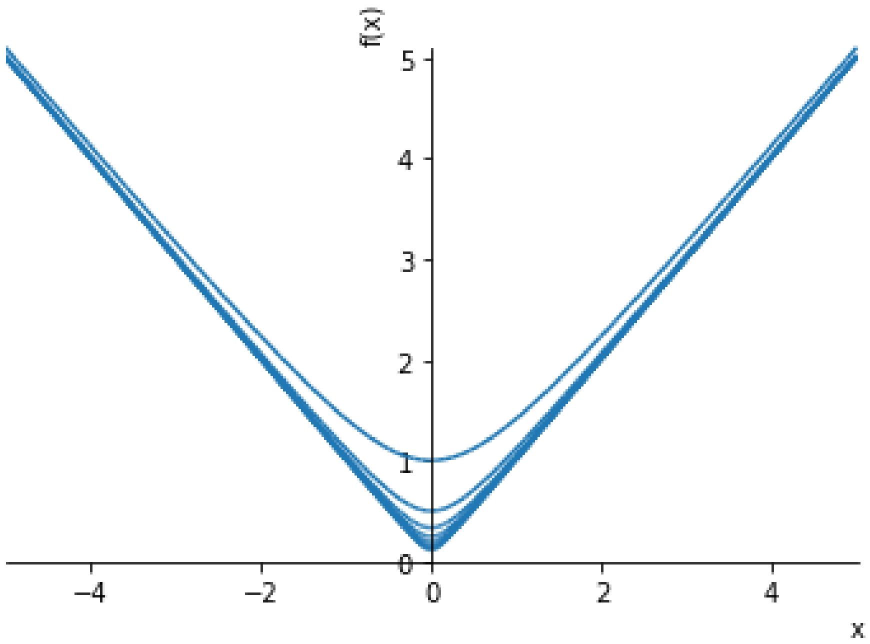

En este caso también se observa una montaña móvil.

**HACER EL ANÁLISIS CON LA DERIVADA!!!**

**Ejemplo 4.1.5** Si $f_n(x) = \sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}$, $x \in \mathbb{R}$ luego $f_n^{'}(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}}$. Entonces $f_n^{'}(x) > 0$ en $(0,+\infty)$ y $f_n^{'}(x) < 0$ en $(0,+\infty)$, de donde $(0,+\infty)$ es intervalo de crecimiento para cada $f_n(x)$ y $(-\infty,0)$ es intervalo de decrecimiento para cada $f_n(x)$. Luego cada $f_n(x)$ tiene un mínimo en $x=0$ y el valor mínimo es $f_n(0) = \frac{1}{n}$.

Por otra parte, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}} = \sqrt{x^2} = |x|$.

[5]:
```
def grafica(f,x1,x2,m):
    p=plot(f.subs(n,1), (x,x1,x2),show=false)
    for k in range(2,m):
        p.append(plot(f.subs(n,k), (x,x1,x2),show=false)[0])
    p.show()
f=sqrt(x**2+1.0/n**2)
grafica(f,-5,5,10)
```




En el Análisis Matemático, además de límites tenemos conceptos como continuidad, derivadas, integrales, etc. Es común operar expresiones conjugando varios de ellos y queremos contar con relaciones entre ellos que permitan transformar las expresiones.

Por ejemplo, ¿es importante el orden en que se realizan las operaciones? ¿Es lo mismo tomar límite y luego derivar que hacerlo en el orden inverso? Si se tienen dos límites, ¿se pueden permutar?

**Ejemplo 4.1.6** Si $f_n(x) = \operatorname{sen}(nx)$ para $x \in [0, \pi]$ entonces $f_n(0) = f_n(\pi) = 0$ y la sucesión converge en estos valores.

Veamos que la sucesión de funciones dada no converge en ningún otro valor.

Supongamos que $x \neq 0$, $x \neq \pi$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{sen}(nx) = \alpha$.

Si se tuviese $\alpha \neq 0$ entonces

$$1 = \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}(2nx)}{\operatorname{sen}(x)} = 2 \lim_{n\to\infty} \cos(nx)$$

de donde $\lim\limits_{n\to\infty} \cos(nx) = \frac{1}{2}$. Sin embargo,

$$\lim_{n\to\infty} \cos(2nx) = \lim_{n\to\infty} 2\cos^2(nx) - 1 = -\frac{1}{2}$$

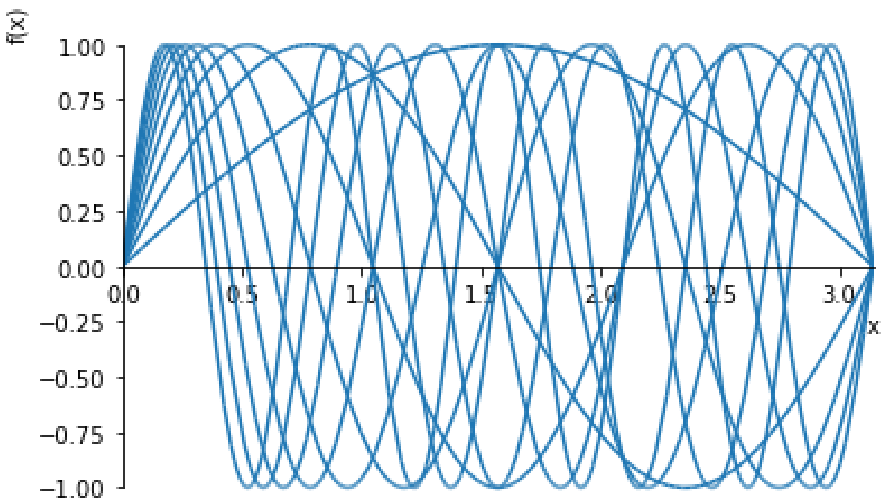
lo que nos lleva a una contradicción.

Por lo tanto, $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{sen}(nx) = 0$. Entonces $\lim\limits_{n\to\infty} |\cos(2nx)| = 1$ y

$$0 = \lim_{n\to\infty} |\operatorname{sen}[(n+1)x]| = \lim_{n\to\infty} |\operatorname{sen}(nx)\cos x + \cos(nx)\operatorname{sen} x| = |\operatorname{sen} x|$$

y necesariamente $x = 0$ ó $x = \pi$.

[6]:
```
f=sin(n*x)
grafica(f,0,pi,10)
```




**Ejemplo 4.1.7** En el Ejemplo 4.1.1 0.1 OJO CON LA REFERENCIA!!!! vimos que la sucesión $f_n(x) = \frac{1}{1+nx^2}$ converge puntualmente

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{array} \right.$$

Si calculamos

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to 0} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$$

y a continuación permutamos los límites obtenemos

$$\lim_{x\to 0} \lim_{n\to\infty} f(x) = \lim_{x\to 0} = 0$$

Por lo tanto, la permutación de los límites produce resultados **distintos**.

También vemos que la función límite es discontinua a pesar de que cada $f_n(x)$ es continua para cada $n$.

**Ejemplo 4.1.8** Con las funciones del Ejemplo 4.1.4 3 tenemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{n\to\infty} f_n(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} 0\, dx = 0$$

mientras que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_{n}^{n+1} dx = 1$$

En este caso, la permutación entre la operación de integración y la de límite también produce resultados **distintos**.

**Ejemplo 4.1.9** Cada $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$ del Ejemplo 4.1.6 4 ó 5 **OJO CON LA REFERENCIA!!!!** es derivable y las derivadas son $f_n'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}}$. Si computamos

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \frac{x}{|x|} = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{array} \right.$$

cuando $x \neq 0$. Entonces la función límite $f(x) = \frac{x}{|x|}$ no es derivable en 0. Luego

$$0 = \lim_{n\to\infty} f_n'(0) \neq \frac{d}{dx}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) |_{x=0}$$

pues ni siquiera tiene sentido el miembro de la derecha.

Es así que tenemos

Encontrar condiciones que permitan permutar las operaciones anteriores.

Antes de atacar este problema vamos a presentar varios ejemplo *famosos* de sucesiones.
**OJO!!!! LO QUE SIGUE EN EL APUNTE NO TIENE EJEMPLOS FAMOSOS, VIENEN LAS SERIES!!!!!**

## 4.2 Series de funciones

Dada una sucesión de funciones $f_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$ podemos formar otra sucesión tomando las sumas acumuladas o sumas parciales

$$\begin{aligned} s_1(x) &= f_1(x), \\ s_2(x) &= f_1(x) + f_2(x), \\ &\vdots \\ s_n(x) &= f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x). \end{aligned}$$

Si la nueva sucesión $\{s_n(x)\}$ converge a $f$ se dice que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge a $f$ ó que

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x).$$

En pocas ocasiones se puede determinar que una serie converge hallando una expresión simple para $s_n(x)$ y calculando su límite.
**Ejemplo 4.2.10** Si $f_n(x) = c$ con $c \in \mathbb{R}$ un número independiente de $n$, entonces

$$\begin{aligned} s_1(x) &= f_1(x) = c, \\ s_2(x) &= f_1(x) + f_2(x) = 2c, \\ &\vdots \\ s_n(x) &= f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) = nc. \end{aligned}$$

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = \begin{cases} 0 & si \quad c = 0, \\ \infty & si \quad c \neq 0. \end{cases}$$

y por lo tanto la series converge sólo cuando $c = 0$.
**Ejemplo 4.2.11** Si $f_n(z) = z^n$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$, luego
$s_n(z) = f_0(z) + \ldots + f_n(z) = 1 + z + \ldots + z^n$ y $zs_n(z) = z + z^2 + \ldots + z^n + z^{n+1}$
entonces $zs_n(z) - s_n(z) = z^{n+1} - 1$ y por tanto $s_n(z) = \frac{z^{n+1}-1}{z-1}$.
De este modo, logramos expresar $s_n(z)$ en una fórmula relativamente sencilla. Ahora,

$$\lim_{n\to\infty} s_n(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{z^{n+1}-1}{z-1} = \begin{cases} \frac{1}{1-z} & |z| < 1, \\ \text{no converge} & |z| \geq 1. \end{cases}$$

Es interesante ver qué ocurre en $|z| = 1$.
Si $|z| = 1$ entonces $z = e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$ y

$$\begin{aligned} s_n(z) &= \frac{z^{n+1}-1}{z-1} = \frac{z^{n+1}}{z-1} - \frac{1}{z-1} \\ &= \frac{z^{n+1}(\overline{z}-1)}{|z-1|^2} - \frac{1}{z-1} \\ &= \frac{[\cos(n+1)\theta + i \operatorname{sen}(n+1)\theta](\overline{z}-1)}{|z-1|^2} - \frac{1}{z-1} \\ &= \cos(n+1)\theta \frac{\overline{z}-1}{|z-1|^2} + i \operatorname{sen}(n+1)\theta \frac{(\overline{z}-1)}{|z-1|^2} - \frac{1}{z-1} \end{aligned}$$

son funciones oscilantes como en el Ejemplo 4.1.6 5 y 1/2. **VER GRÁFICOS!!!**

En los ejemplos anteriores pudimos justificar la convergencia calculando explícitamente el límite. Ésto es posible las menos de las veces. En materias anteriores se estudiaron criterios para la convergencia de series numéricas. Estos criterios establecen condiciones, algunas necesarias, otras suficientes y algunas necesarias y suficientes para que la serie converja. Recordaremos algunos de ellos.

**Teorema 4.2.1 (Criterio del Resto)** Si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Como es una condición necesaria sólo sirve para decir cuándo una serie no converge.

**Ejemplo 4.2.12** Si $f_n(x) = \operatorname{sen}(nx)$ para $x \in [0, \pi]$.

Como ya vimos, $\operatorname{sen}(nx)$ no converge excepto para $x = 0$ ó $x = \pi$.

Luego, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}(nx)$ no converge.

Como veremos más adelante, la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ no converge y sin embargo $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Entonces el *Criterio del Resto* no sirve para determinar la convergencia de una serie.

**Teorema 4.2.2 (Convergencia Absoluta)** Si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge entonces $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

**Ejemplo 4.2.13** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n z^n$ converge cuando $|z| < 1$.

**Teorema 4.2.3 (Criterio de Comparación)** i $0 \le a_n \le b_n$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ converge entonces $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. Dicho de otro modo, si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge (su suma es $+\infty$) entonces $\sum\limits_{n=1}^{\infty}$ diverge.

**Ejemplo 4.2.14**

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \operatorname{sen}(nx)$ converge pues $|\frac{1}{2^n} \operatorname{sen}(nx)| \le \frac{1}{2^n}$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin(nx)$ converge pues para $n > 1$ tenemos

$$\left|\frac{1}{n^2}\sin(nx)\right| \le \frac{1}{n^2} \le \frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

y

$$\sum_{n=2}^{m} \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{m} \to 1 \text{ cuando } m \to \infty.$$

Luego $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \operatorname{sen}(nx)$ también.

**Teorema 4.2.4 (Criterio del Cociente)** Si $0 < a_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ existe y es igual a $r$ entonces:

1. si $r < 1$ entonces $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge;
2. si $r > 1$ entonces $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge;
3. si $r = 1$ no se sabe nada sobre la convergencia o divergencia de $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

La situación planteada por el item 3 ocurre en una cantidad exasperante de casos.

**Ejemplo 4.2.15** Consideramos la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z^n$ con $z \in \mathbb{C}$ y calculamos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|n||z|^{n+1}}{|n+1||z|^n} = |z| \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = |z|.$$

La serie converge cuando $|z| < 1$, diverge cuando $|z| > 1$ y nada se sabe cuando $|z| = 1$.

**Teorema 4.2.5 (Criterio del Cociente)** Si $a_n \geq a_{n+1} \geq 0$ para todo $n$ y $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, entonces $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge.

**Ejemplo 4.2.16** La series $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ converge en $z = -1$ pues $f(-1) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$ para todo $n \geq 1$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

## 4.3 Series de Potencias

Las series de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad a_n \in \mathbb{C}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad z_0 \in \mathbb{C},$$

se llaman series de potencias.

Veremos para qué valores de $z$ esta serie converge. Por simplicidad asumiremos que $z_0 = 0$.

**Lema 4.3.1** Si $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge en $z_1 \in \mathbb{C}$ entonces la serie converge uniformemente para todo $z$ tal que $|z| < |z_1|$.

*Demostración.* Como $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z_1^n$ converge entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n z_1^n = 0$. En particular, existe $M > 0$ tal que $|a_n z_1^n| \geq M$. Sea $|z| < |z_1|$ luego

$$|a_n z^n| < |a_n z_1^n| \left|\frac{z}{z_1}\right|^n \leq M \left|\frac{z}{z_1}\right|^n.$$

Como $|\frac{z}{z_1}| < 1$ entonces $\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{z}{z_1})^n$ converge y por el Criterio de Comparación obtenemos que $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n|$ converge siempre que $|z| < |z_1|$. □

**Corolario 4.3.1** Dada una serie de funciones $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ existe $R \geq 0$ tal que la serie converge en $|z-z_0| < R$ y no converge en $|z-z_0| > R$.

El criterio del cociente suele ser útil para determinar el valor de $R$ que se denomina *radio de convergencia*.

**Ejemplo 4.3.17** La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ converge si

$$1 > \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{|z|^{n+1}}{n+1}}{\frac{|z|^n}{n}} = |z| \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = |z|,$$

y no converge si $|z| > 1$. Luego, el radio de convergencia es $1$.

¿Qué pasa en el borde $|z| = 1$?

Si $|z| = 1 \Leftrightarrow z = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$ y $z^n = \cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)$. Luego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n\theta)}{n}.$$

Esto nos lleva a considerar otras series.

## 4.4 Series de Fourier

Una serie de Fourier es una expresión de la forma

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx).$$

Las series de Fourier tiene la capacidad de aproximar funciones $2\pi$-periódicas. En primer lugar, es necesario saber elegir los coeficientes y para ello se usa la propiedad que se presenta a continuación.

**Lema 4.4.2**

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(mx)\,dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \pi & n = m \neq 0 \\ 2\pi & n = m = 0, \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(nx)\operatorname{sen}(mx)\,dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \pi & n = m \neq 0 \\ 2\pi & n = m = 0, \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\operatorname{sen}(mx)\,dx = 0.$$

Luego, si nos permitimos permutar integrales son sumas de series, tenemos

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}(kx)\,dx \\
&= \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{sen}(kx)\,dx \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\,\mathrm{sen}(kx)\,dx \\
&+ b_n \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{sen}(nx)\,\mathrm{sen}(kx)\,dx \\
&= \pi b_k
\end{aligned}
$$

**Definición 4.4.1** Dada una función $2\pi$-periódica $f(x)$ definimos los coeficientes de Fourier por

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi} \pi f(x)\cos(nx)\,dx, \quad n \geq 0 \tag{4.1}$$

y

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi} \pi f(x)\,\mathrm{sen}(nx)\,dx, \quad n \geq 1. \tag{4.2}$$

En la notebook de Sympy indagamos las facultades aproximativas de la serie de Fourier.

[10]:
```
x=symbols('x',real=True)
n,m=symbols('n,m',integer=True,positive=True)
Integral(cos(n*x)*cos(m*x),(x,-pi,pi)).doit()
```

[10]:

$$\begin{cases} 0 & \text{for } m \neq n \\ \pi & \text{otherwise} \end{cases}$$

[11]:
```
Integral(sin(n*x)*sin(m*x),(x,-pi,pi)).doit()
```

[11]:

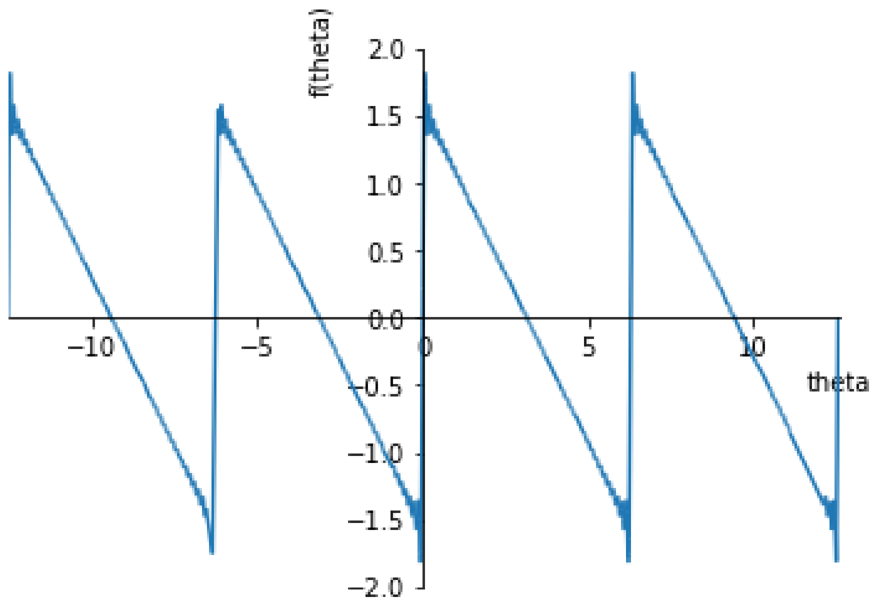
$$\begin{cases} 0 & \text{for } m \neq n \\ \pi & \text{otherwise} \end{cases}$$

[12]:
```
Integral(cos(n*x)*sin(m*x),(x,-pi,pi)).doit()
```

[12]:

$$0$$

[13]:
```
S=sum([sin(n*theta)/n for n in range(1,50)])
plot(S,(theta,-4*pi,4*pi))
```

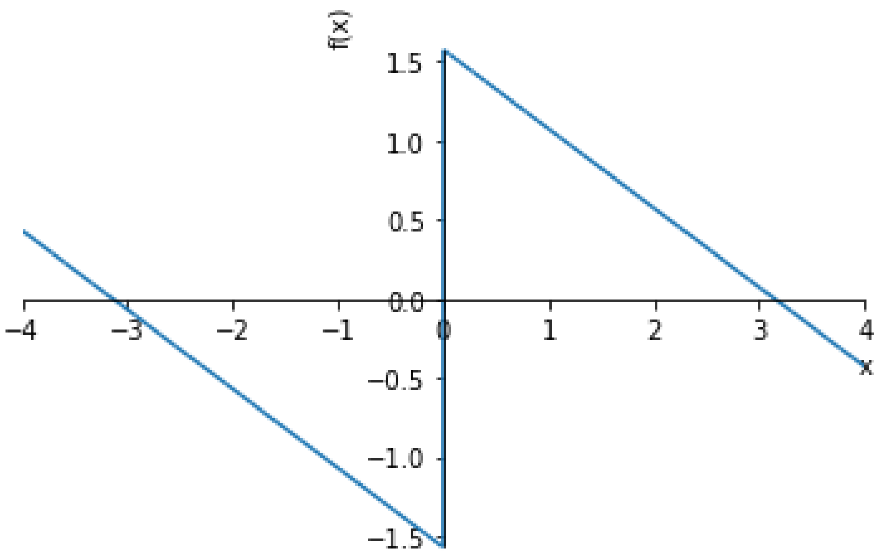



[13]: <sympy.plotting.plot.Plot at 0x7f413f16afd0>

Ejemplo

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi - x}{2}, & \text{si } x \in [0, \pi] \\ -\frac{\pi + x}{2}, & \text{si } x \in [-\pi, 0) \end{cases}$$

[14]:
```
f=Piecewise(((pi-x)/2, x>=0  ),(-(pi+x)/2,x<0 ))
plot(f,(x,-4,4))
```




[14]: <sympy.plotting.plot.Plot at 0x7f413f019b50>

[15]:
```
def a(g,k):
    return 1/pi*Integral(g*cos(k*x),(x,-pi,pi)).doit()
def b(g,k):
    return 1/pi*Integral(g*sin(k*x),(x,-pi,pi)).doit()
```

[16]:
```
[a(f,k) for k in range(1,10)]
```

[16]:

$$[0, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad 0]$$

[17]:
```
[b(f,k) for k in range(1,10)]
```

[17]:

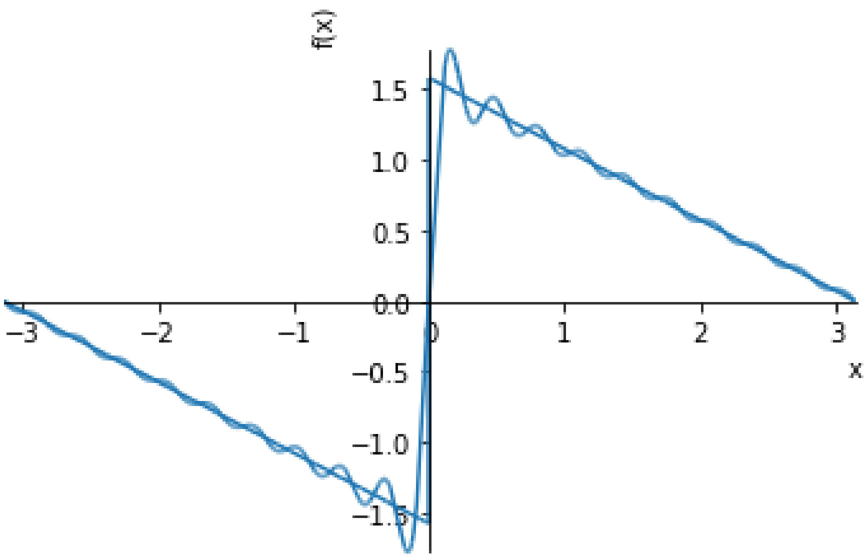
$$\left[1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{5}, \quad \frac{1}{6}, \quad \frac{1}{7}, \quad \frac{1}{8}, \quad \frac{1}{9}\right]$$

[18]:
```
S=sum([b(f,k)*sin(k*x) for k in range(1,20)])
S
```

[18]:

$$\sin(x) + \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(4x)}{4} + \frac{\sin(5x)}{5} + \frac{\sin(6x)}{6} + \frac{\sin(7x)}{7} + \frac{\sin(8x)}{8} + \frac{\sin(9x)}{9} + \frac{\sin(10x)}{10} + \frac{\sin(11x)}{11} + \frac{\sin(12x)}{12} + \frac{\sin(13x)}{13} + \frac{\sin(14x)}{14} + \frac{\sin(15x)}{15} + \frac{\sin(16x)}{16} + \frac{\sin(17x)}{17} + \frac{\sin(18x)}{18} + \frac{\sin(19x)}{19}$$

[19]:
```
S=sum([b(f,k)*sin(k*x) for k in range(1,20)])
plot(f,S, (x,-pi,pi))
```




[19]: <sympy.plotting.plot.Plot at 0x7f413f1ae210>

Deberíamos justificar el uso de propiedades como

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx,$$

que se justificaría si

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \int_a^b \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} f_n(x)$$
$$\underset{?}{=} \lim_{N\to\infty} \int_a^b \sum_{n=1}^{N} f_n(x)\,dx = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \int_a^b f_n(x)\,dx$$

Pero, ya hemos visto ejemplos de que éste no es siempre el caso. Vamos a identificar otro modo de convergencia que hace esta regla posible.

Si $f_n(x)$ converge puntualmente a $f$ entonces

$$\forall x \forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon, x) > 0 : n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

**Definición 4.4.2** $f_n$ converge uniformemente a $f$ si y sólo si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) > 0 \forall x : n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

**IDEA GRÁFICA**
**Ejemplo 4.4.18**

1. $f_n(x) = \frac{1}{n} x e^{-n^2x^2}$ converge uniformemente a cero.

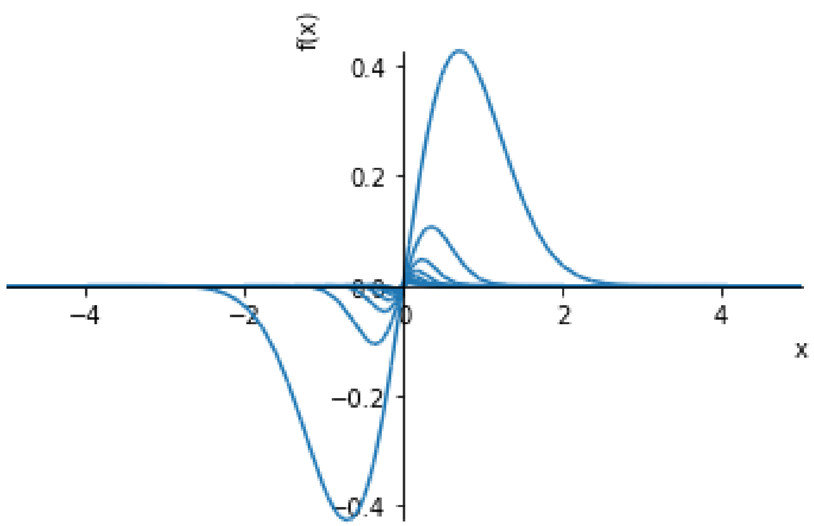
   Se tiene que $f_n'(x) = \frac{1}{n} e^{-n^2x^2} - n2x^2 e^{-n^2x^2}$ y

   $$f_n'(x) = 0 \Longleftrightarrow 0 = e^{-n^2x^2}\left(\frac{1}{n} - 2nx^2\right) \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}n}.$$

   Luego $f_n'(x) > 0$ en $|x| < \frac{1}{\sqrt{2}n}$ y $f_n'(x) < 0$ en $|x| > \frac{1}{\sqrt{2}n}$. Y, $f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}n}\right) = \frac{1}{n}(\pm\frac{1}{\sqrt{2}n})e^{-\frac{1}{2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{n^2}$.

   Luego, dado $\varepsilon > 0$ existe $N \geq \left(\frac{e^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}$.

[20]:
```
x,n=symbols('x,n')
fn=1/n*exp(-n**2*x**2)*x
p=plot(fn.subs(n,1), (x,-5,5),show=false)
for k in range(2,10):
    p.append(plot(fn.subs(n,k), (x,-5,5),show=false)[0])
p.show()
```

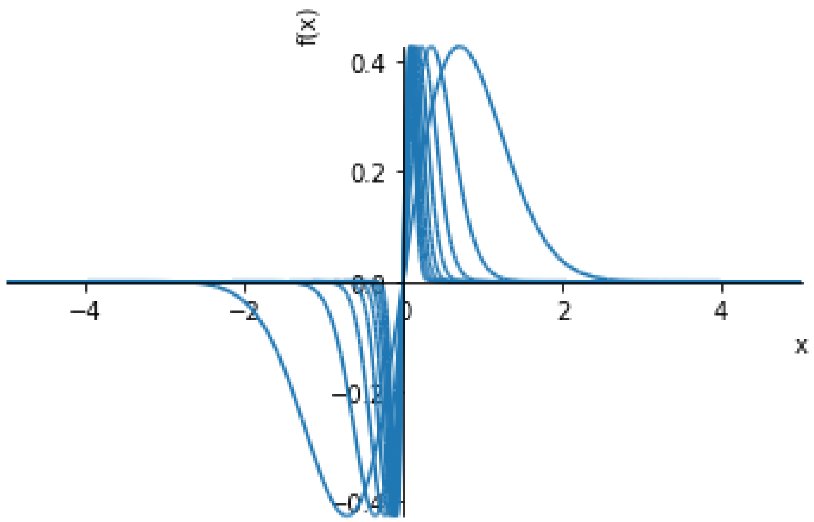


2. $f_n(x) = nxe^{-n^2x^2}$ converge puntualmente pero no uniformemente a cero.
   Si $x \neq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{nx}{e^{n^2x^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x}{2ne^{n^2x^2}} = 0$.
   Por otra parte,

$$0 = f_n'(x) = -n^2e^{-n^2x^2}2x^2 + e^{-n^2x^2} \Leftrightarrow 1 - 2n^2x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2n}}.$$

   Y, $f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2n}}\right) = \pm e^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}$.

[21]:
```
fn=n*exp(-n**2*x**2)*x
p=plot(fn.subs(n,1), (x,-5,5),show=false)
for k in range(2,10):
    p.append(plot(fn.subs(n,k), (x,-5,5),show=false)[0])
p.show()
```




**Teorema 4.4.6** Si $f_n : A \to B$ (aquí $A, B \subset \mathbb{R}^n$ ó $A, B \subset \mathbb{C}$) son continuas y convergen uniformemente a $f$, entonces $f$ es continua y

$$\lim_{x\to a}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(a) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to a} f_n(x).$$

*Demostración.* Sea $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ y $a \in A$.
Sea $\varepsilon > 0$, entonces $\forall x \exists N : n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$.
Fijamos un $n$ cualquiera que satisfaga la desigualdad anterior.
Como $f_n$ es continua en $a$ $\exists \delta = \delta(\varepsilon, a)$ tal que $|x - a| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$.
Entonces

$$|f(x) - f(a)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)| < \varepsilon.$$

□

**Ejemplo 4.4.19** $x^n$ converge puntualmente en $[0, 1]$ pero no uniformemente.

**Teorema 4.4.7** Si $f_n$ converge uniformemente a $f$ en $[a,b]$ entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

*Demostración.* La prueba se deja como ejercicio. □

**Teorema 4.4.8 (M-test Weiertrass)** Si $f_n : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $|f_n(x)| \leq M_n$ independientemente de $x$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$ entonces la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente en $A$.

*Demostración.* La serie converge puntualmente por aplicación del *Criterio de Comparación*.

Sea $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ y sea $\varepsilon > 0$. Entonces $\exists N > 0$ tal que $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} M_n < \varepsilon$.

Luego,

$$\left| f(x) - \sum_{n=1}^{N} f_n(x) \right| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x) \right|$$

$$= \left| \lim_{M\to\infty} \sum_{n=N+1}^{M} f_n(x) \right| \leq \lim_{M\to\infty} \sum_{n=N+1}^{M} M_n < \varepsilon.$$

□

**Corolario 4.4.2** Si la serie de potencias $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ tiene radio de convergencia $R > 0$, entonces converge uniformemente en $|z - z_0| \leq r \; \forall r < R$.

*Demostración.* Supongamos $z_0 = 0$.

Sea $0 < r < R$ entonces la serie converge abasolutamente en $|z| = r$ y por tanto

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n < \infty.$$

Luego si $|z| < r$ entonces $|a_n z^n| \leq |a_n| r^n$ y se verifican las hipótesis del M-Test de Weierstrass. □

**Ejemplo 4.4.20** Analizar con Sympy la convergencia de $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$.

**Corolario 4.4.3** Si $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n| + |b_n| < \infty$ entonces la serie de Fourier

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx),$$

converge uniformemente a una función $f$ en $[-\pi,\pi]$ y

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx,$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(nx)\,dx.$$

**Problema:** Hallar $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

## 4.5 Productos infinitos

Si un polinomio

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + 1,$$

tiene raíces reales $x_1, x_2, \ldots, x_n$ entonces

$$x_1^{-1} + x_2^{-1} + \ldots + x_n^{-1} = -a_1.$$

*Demostración.* Tenemos que $p(x) = a_n(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$ entonces $1 = p(0) = (-1)^n x_1 \ldots x_n$ y

$$p'(0) = a_1 = a_n(-1)^{n-1}(x_1x_3\ldots x_n + x_2x_3\ldots x_n + \ldots + x_1x_2\ldots x_{n-1}).$$

Luego

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{p'(0)}{p(0)} \\ &= \frac{a_n(-1)^{n-1}(x_1x_3\ldots x_n + x_2x_3\ldots x_n + \ldots + x_1x_2\ldots x_{n-1})}{(-1)^n x_1\ldots x_n} \\ &= -\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right). \end{aligned}$$

Además

$$p(x) = (-1)^n x_1x_2\ldots x_n\left(1-\frac{x}{x_1}\right)\left(1-\frac{x}{x_2}\right)\ldots\left(1-\frac{x}{x_n}\right).$$

□

**Teorema 4.5.9 (Euler(1748))**

$$\operatorname{sen} x = x\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right).$$

*Demostración.*

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sen} x}{x} &= \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots}{x} \\ &= \left(1-\frac{x}{\pi}\right)\left(1+\frac{x}{\pi}\right)\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)\left(1+\frac{x}{2\pi}\right)\ldots \qquad (4.3) \\ &= \left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\ldots\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)\ldots \end{aligned}$$

□

Tomando $x^2 = y$ en (4.3) llegamos a

$$1 - \frac{y}{3!} + \frac{y^2}{5!} + \frac{y^4}{7!} + \ldots = \left(1 - \frac{y}{\pi^2}\right) \ldots \left(1 - \frac{y}{k^2\pi^2}\right).$$

Luego

$$\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \ldots = \frac{1}{6}$$

y

$$1 + \frac{1}{4} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}.$$

Evaluando en $x = \frac{\pi}{2}$ obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\pi} &= \left(1 - \frac{(\frac{\pi}{2})^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{(\frac{\pi}{2})^2}{4\pi^2}\right) \ldots \left(1 - \frac{(\frac{\pi}{2})^2}{k^2\pi^2}\right) \ldots \\
&= \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4k^2}\right) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{4k^2 - 1}{4k^2} \\
&= \prod_{k=1}^{\infty} \frac{2k-1}{2k}\frac{2k+1}{2k} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2}\frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 4} \ldots
\end{aligned}$$

y por lo tanto obtenemos la fórmula de Wallis

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3}\frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \ldots$$

## 4.6 Aproximación de funciones

**Teorema 4.6.10 (Weierstrass)** Si $f$ es continua en $[0, 1]$ entonces $f$ es límite uniforme de polinomios.

**Definición 4.6.3** Si $f$ es una función se define su polinomio de Berstein de grado n por

$$B_n(f) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}.$$

Si $f \equiv 1$ entonces

$$B_n(f) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = [x + (1-x)]^n = 1.$$

Si $f \equiv x$ entonces

$$\begin{aligned}
B_n(f) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{k}{n} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= x \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)![n-1-(k-1)]!} x^{k-1} (1-x)^{[n-1-(k-1)]} \\
&= x B_{n-1}(1) = x.
\end{aligned}$$

Si $f \equiv x^2$ entonces

$$\begin{aligned}
B_n(f) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{k^2}{n^2} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= x \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)![n-1-(k-1)]!} \frac{k}{n} x^{k-1} (1-x)^{n-k} \\
&= x \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{n} \binom{n-1}{k-1} x^{k-1} (1-x)^{n-k} + \frac{x}{n} \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} x^{k-1} (1-x)^{n-k} \\
&= x \frac{n-1}{n} B_{n-1}(x) + \frac{x}{n} B_{n-1}(1) = \frac{n-1}{n} x^2 + \frac{x}{n}.
\end{aligned}$$

Luego, tenemos que $B_n(x^2) \to x^2$ uniformemente.

Dado que $f$ es continua, para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|x-y| < \delta$ entonces $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Sean $I_x = \{k | \left|\frac{k}{n} - x\right| < \delta\}$ y $J_x = \{1, \ldots, n\} - I_x$, luego

$$\begin{aligned}
&|f(x) - B_n(f)(x)| \\
=&\left| \sum_{k=0}^{n} f(x) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} - \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right| \\
\leq& \sum_{k=0}^{n} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
\leq& \sum_{I_x} + \sum_{J_x} < \varepsilon + 2M \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}
\end{aligned}$$

siendo $M = \sup |f|$.

Ahora,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq& \frac{1}{\delta^2} \sum_{k=0}^{n} \left( x - \frac{k}{n} \right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
=& \frac{1}{\delta^2} \left( x^2 - 2x^2 + \frac{n-1}{n} x^2 + \frac{x}{n} \right).
\end{aligned}$$

Luego

$$\left| \sum_{J_x} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right| \leq \frac{1}{\delta^2} \left\{ \frac{|x|^2 + |x|}{n} \right\} \leq \frac{1}{n\delta^2},$$

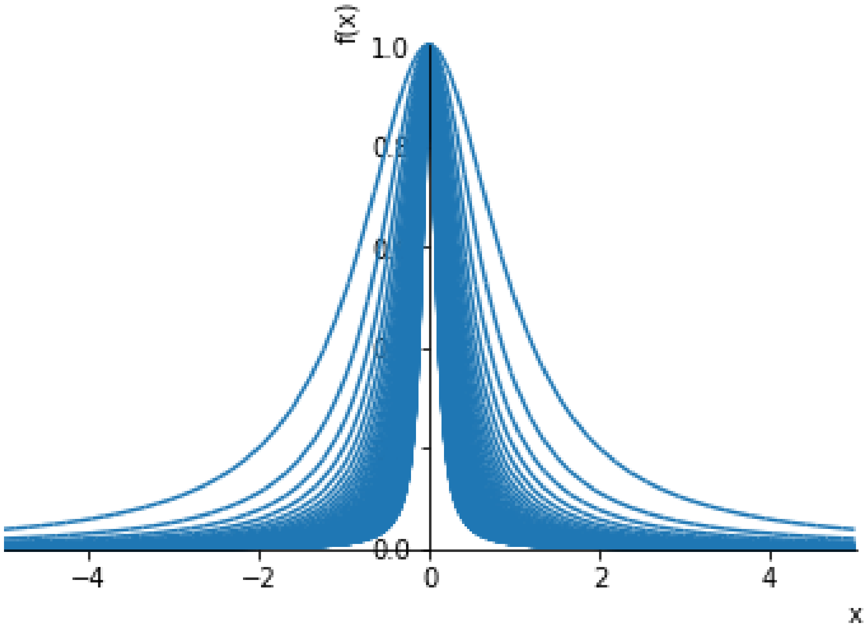
y podemos elegir $n$ tal que $\frac{1}{n\delta^2} < \varepsilon$.

Ejemplos unidad 2

[1]:
```
from sympy import *
init_printing()
```

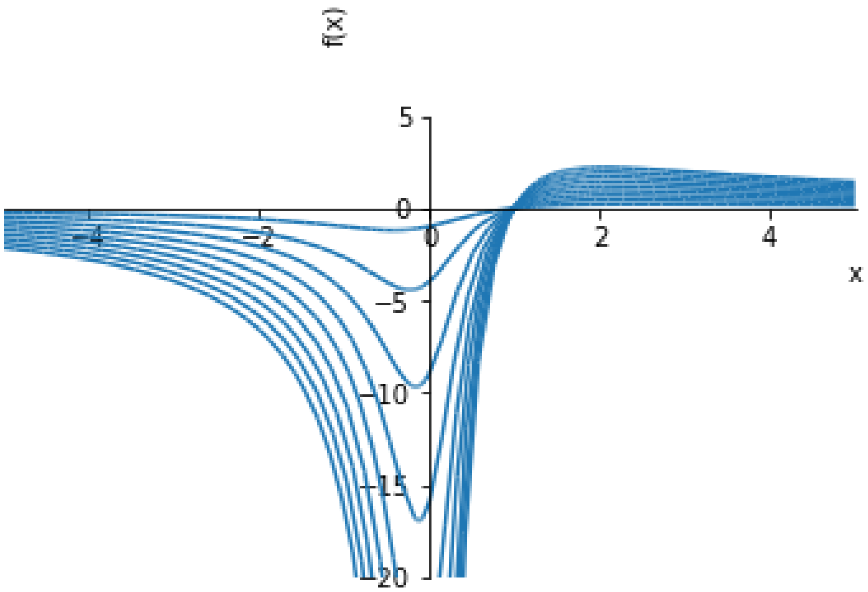
Ejemplo $f_n(x) = \frac{1}{1+nx^2}$

[2]:
```
x,n=symbols('x,n')
fn=1/(1+n*x**2)
p=plot(fn.subs(n,1), (x,-5,5),show=false)
for k in range(2,100):
    p.append(plot(fn.subs(n,k), (x,-5,5),show=false)[0])
p.show()
```



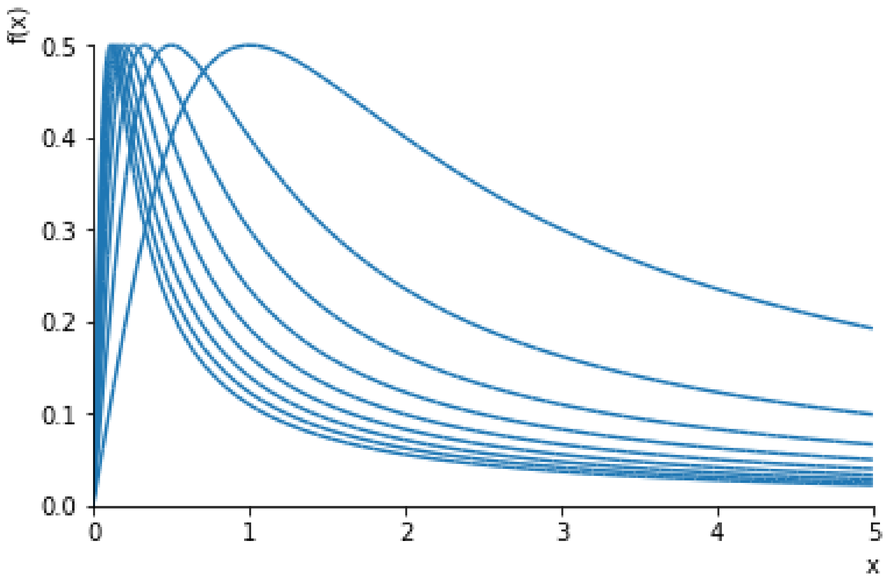

Ejemplo $f_n(x) = \frac{n^2x-n^2}{1+nx^2}$

[3]:
```
x,n=symbols('x,n')
fn=(n**2*x-n**2)/(1+n*x**2)
p=plot(fn.subs(n,1), (x,-5,5),show=false,ylim=(-20,10))
for k in range(2,10):
    p.append(plot(fn.subs(n,k), (x,-5,5),show=false)[0])
p.show()
```




Ejemplo $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$

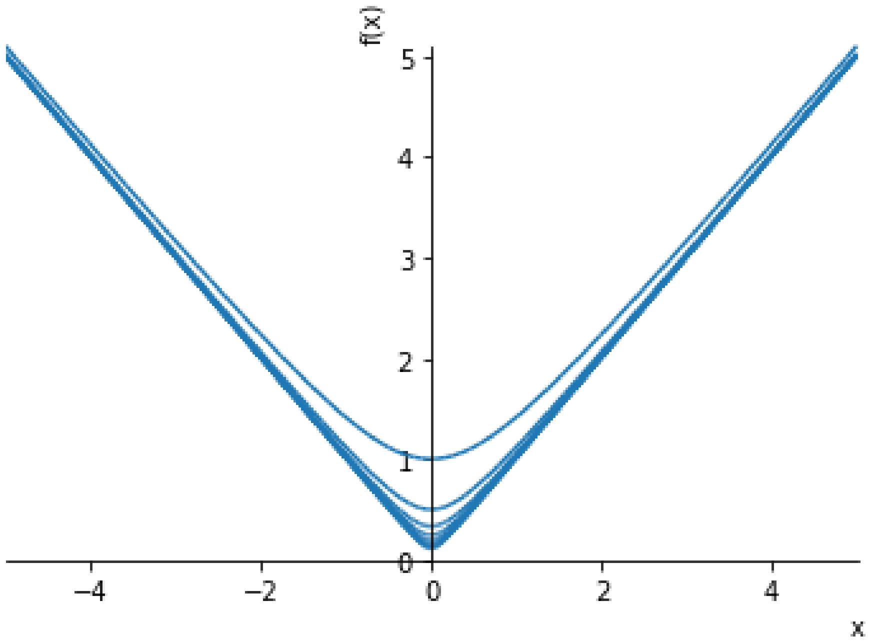
[4]:
```
x,n=symbols('x,n')
fn=n*x/(1+n**2*x**2)
p=plot(fn.subs(n,1), (x,0,5),show=false)
for k in range(2,10):
    p.append(plot(fn.subs(n,k), (x,0,5),show=false)[0])
p.show()
```




Ejemplo $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$

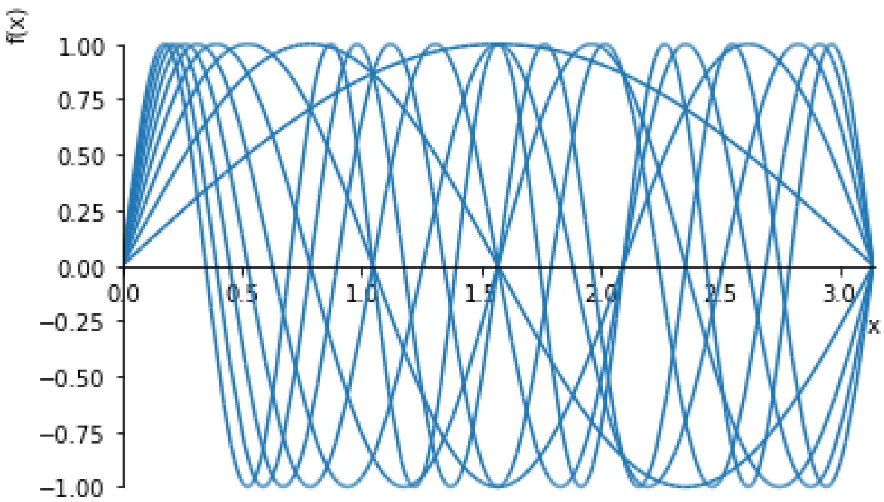
[5]:
```
def grafica(f,x1,x2,m):
    p=plot(f.subs(n,1), (x,x1,x2),show=false)
    for k in range(2,m):
        p.append(plot(f.subs(n,k), (x,x1,x2),show=false)[0])
```

```
    p.show()
f=sqrt(x**2+1.0/n**2)
grafica(f,-5,5,10)
```




Ejemplo $f_n(x) = \sin(nx)$

[6]:
```
f=sin(n*x)
grafica(f,0,pi,10)
```




Series de Potencias

Ejemplo $S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n$

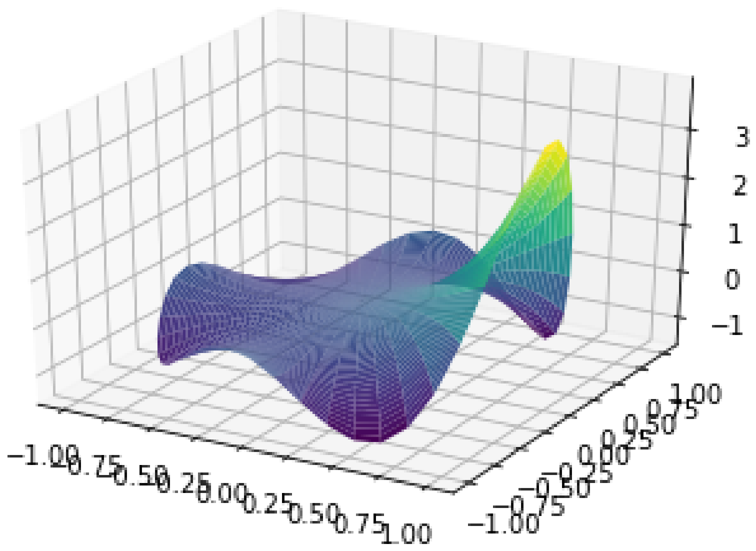
Serie geométrica converge $|z| < 1$. Ponemos $z = re^{i\theta}$. Luego $z^j = r^j e^{j\theta i}$.

[7]:
```
n,theta,r=symbols('n,theta,r',real=True)

S=sum([r**j*exp(j*theta*I) for j in range(1,5)])
SS=re(S)
```

[8]:
```
from sympy.plotting import plot3d_parametric_surface
```

[9]:
```
plot3d_parametric_surface(r*cos(theta),r*sin(theta),SS,(theta,-pi,pi),(r,0,1))
```




[9]: <sympy.plotting.plot.Plot at 0x7f413ec776d0>

Series de Fourier

[10]:
```
x=symbols('x',real=True)
n,m=symbols('n,m',integer=True,positive=True)
Integral(cos(n*x)*cos(m*x),(x,-pi,pi)).doit()
```

[10]:

$$\begin{cases} 0 & \text{for}\ m \neq n \\ \pi & \text{otherwise} \end{cases}$$

[11]:
```
Integral(sin(n*x)*sin(m*x),(x,-pi,pi)).doit()
```

[11]:

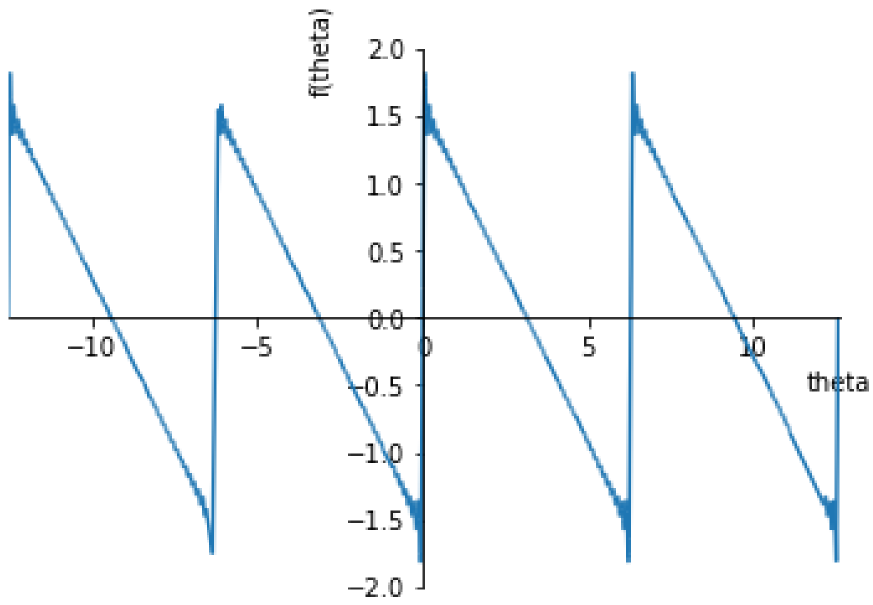
$$\begin{cases} 0 & \text{for}\ m \neq n \\ \pi & \text{otherwise} \end{cases}$$

[12]:
```
Integral(cos(n*x)*sin(m*x),(x,-pi,pi)).doit()
```

[12]:

$$0$$

[13]:
```
S=sum([sin(n*theta)/n for n in range(1,50)])
plot(S,(theta,-4*pi,4*pi))
```

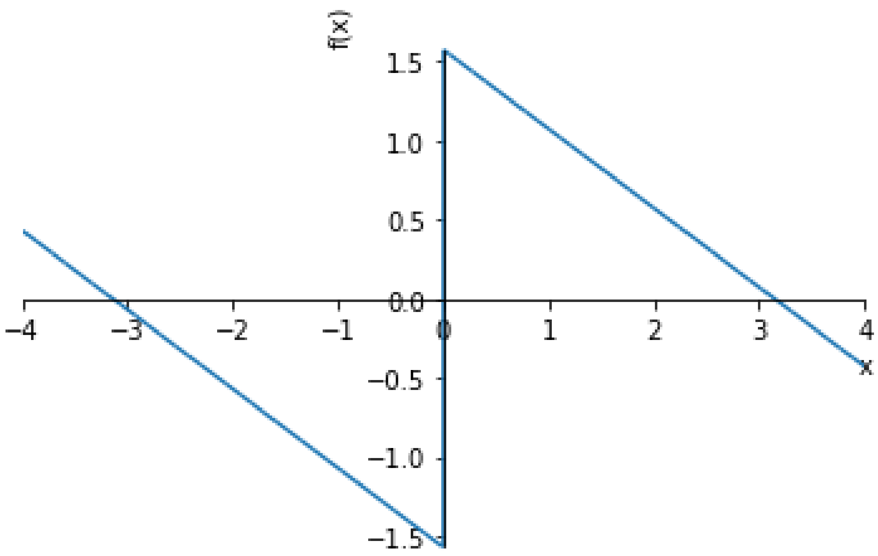



[13]: <sympy.plotting.plot.Plot at 0x7f413f16afd0>

Ejemplo

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi - x}{2}, & \text{si } x \in [0, \pi] \\ -\frac{\pi + x}{2}, & \text{si } x \in [-\pi, 0) \end{cases}$$

[14]:
```
f=Piecewise(((pi-x)/2, x>=0  ),(-(pi+x)/2,x<0 ))
plot(f,(x,-4,4))
```




[14]: <sympy.plotting.plot.Plot at 0x7f413f019b50>

[15]:
```
def a(g,k):
    return 1/pi*Integral(g*cos(k*x),(x,-pi,pi)).doit()
def b(g,k):
    return 1/pi*Integral(g*sin(k*x),(x,-pi,pi)).doit()
```

[16]:
```
[a(f,k) for k in range(1,10)]
```

[16]:

$$[0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0]$$

[17]:
```
[b(f,k) for k in range(1,10)]
```

[17]:

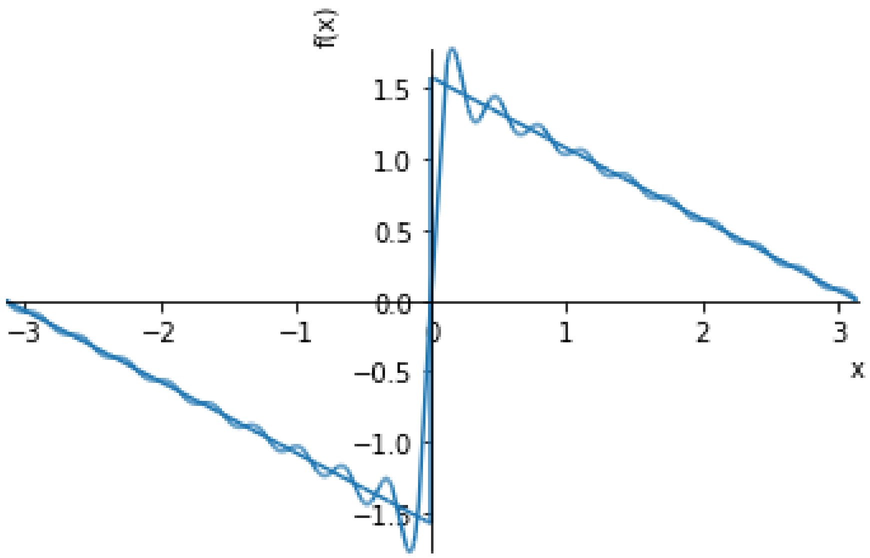
$$\left[1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{7},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{9}\right]$$

[18]:
```
S=sum([b(f,k)*sin(k*x) for k in range(1,20)])
S
```

[18]:

$$\sin(x)+\frac{\sin(2x)}{2}+\frac{\sin(3x)}{3}+\frac{\sin(4x)}{4}+\frac{\sin(5x)}{5}+\frac{\sin(6x)}{6}+\frac{\sin(7x)}{7}+\frac{\sin(8x)}{8}+\frac{\sin(9x)}{9}+\frac{\sin(10x)}{10}+\frac{\sin(11x)}{11}+\frac{\sin(}{1}$$

[19]:
```
S=sum([b(f,k)*sin(k*x) for k in range(1,20)])
plot(f,S, (x,-pi,pi))
```

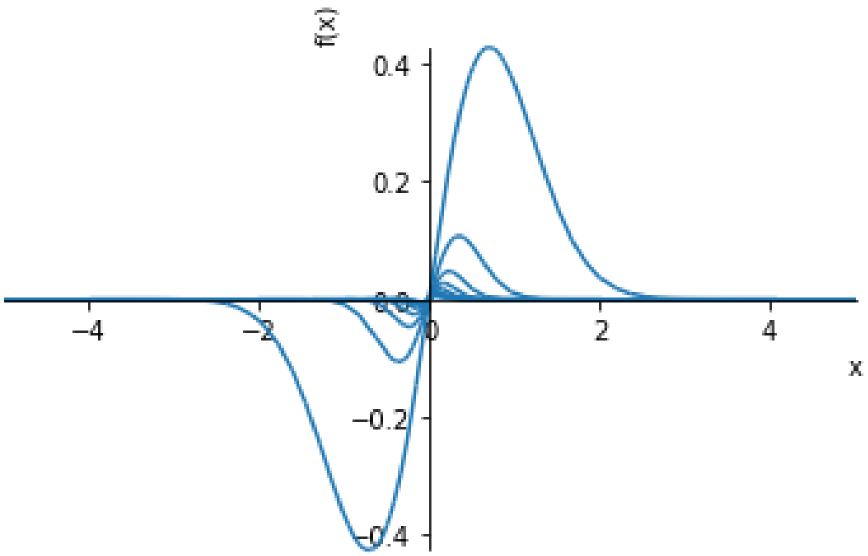



[19]: <sympy.plotting.plot.Plot at 0x7f413f1ae210>

Convergencia uniforme

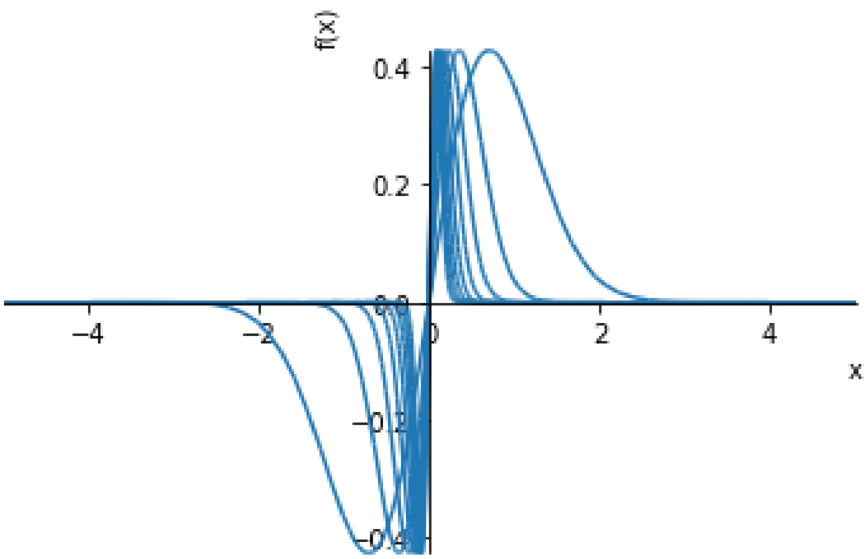
Ejemplo $f\_n(x) = \frac{1}{n}e^{-n2x^2}x$

[20]:
```
x,n=symbols('x,n')
fn=1/n*exp(-n**2*x**2)*x
p=plot(fn.subs(n,1), (x,-5,5),show=false)
for k in range(2,10):
    p.append(plot(fn.subs(n,k), (x,-5,5),show=false)[0])
p.show()
```




Ejemplo $ f_n(x)=ne^{-n}2x^2}x $

[21]:
```
fn=n*exp(-n**2*x**2)*x
p=plot(fn.subs(n,1), (x,-5,5),show=false)
for k in range(2,10):
    p.append(plot(fn.subs(n,k), (x,-5,5),show=false)[0])
p.show()
```



====SE PODRÍA COLOCAR EL MATERIAL DE LA 1RA UNIDAD DE COMPLEMENTOS DE ANÁLISIS QUE ESTÁ BASADO EN TUS APUNTES, EL RUDIN CHICO Y OTROS LIBROS QUE USAMOS EN TOP II..

# 5 Integral de Riemann

Bernhard Riemann 1826-1866. Fue un matemático alemán que realizó contribuciones muy importantes al análisis y la geometría diferencial, algunas de las cuales allanaron el camino para el desarrollo más avanzado de la relatividad general. Su nombre está conectado con la función zeta, la hipótesis de Riemann, la integral de Riemann, el lema de Riemann, las variedades de Riemann, las superficies de Riemann y la geometría de Riemann.

Wikipedia

Jean G. Darboux 1842-1917. Matemático frances. Su trabajo se desarrolló en el análisis (integración, ecuaciones diferenciales parciales) y geometría diferencial (estudio de curvas y superficies).

Wikipedia

## 5.1 Introducción

> « Bernard Riemann recibió su doctorado en 1851, su *Habilitación* en 1854. La habilitación confiere el reconocimiento de la capacidad de crear sustanciales contribuciones en la investigación más allá de la tesis doctoral, y es un prerequisito necesario para ocupar un cargo de profesor en una universidad Alemana. Riemann eligió como tema de habilitación el problema de las series de Fourier. Su tesis fue titulada *Über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reine* (Sobre la representación de una función por series trigonométricas) y respondía la pregunta: Cuándo una función definida en el intervalo $(-\pi, \pi)$ puede ser respresentada por la serie trigonométrica $a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)]$? En este trabajo es donde hallamos la Integral de Riemann, introducida en una sección corta antes del nucleo principal de la tesis, como parte del trabajo preparatorio que él necesitó desarrollar antes de abordar el problema de representabilidad por series trigonométricas. »

David M. Bressoud
A Radical Approach to Lebesgue's Theory of Integration.

En este capítulo vamos a desarrollar el concepto de la integral de Riemman. Vamos a exponer la definición de esta integral dada por J. G. Darboux. Discutiremos las propiedades de la intergal, sus alcances y límites. Preparamos así el camino para la introducción de la integral de Lebesgue.

Debemos advertir al alumno que en este curso dejaremos un poco de lado las cuestiones procedimentales de cómo calcular integrales, aspecto que seguramente abordó en cursos anteriores y del cual nos vamos a valer. Tampoco debe esperar que las actividades prácticas se centren en esa dirección. El objetivo del capítulo es recordar y profundizar nuestro conocimiento de la integral de Riemann. No es nuestra intención que el material sea auto contenido. Algunas propiedades sólo las enunciaremos sin demostración pues seguramente estas demostraciones faltantes son parte de curso previos. Nuestro principal objetivo aquí es discutir la materia conceptual ligada a la integral y cómo es previsible las actividades prácticas estarán orientadas con ese propósito. Por ejemplo, un problema que nos planteamos y que guiará la exposición es el de caracterizar las funciones integrables Riemann. Nos interesa este problema pues resolverlo entraña el desarrollo de la noción de medida de Lebesgue, que es el principal concepto abordado en este libro.

La integral encuentra su motivación en diversos problemas. Aparece cuando se busca el centro de masas de un determinado cuerpo, cuando se quieren hallar longitudes de arco, volúmenes, cuando se quiere reconstruir el movimiento de cuerpo conocida su velocidad. En general, cuando se quiere reconstruir determinada propiedad de un conjunto, cuando es conocida esta proiedad sobre regiones infinitesimales. La integral es utilizada en incontables teorías matemáticas, como ser el mencionado már arriba relativo a las series de Fourier.

Quizás el problema más simple donde aparece la integral es el que utilizaremos como motivación para introducirla y es el concepto de área. Vamos a tratar de reconstruir este concepto desde su base, esto es analizando la noción de área de figuras tan simples como rectángulos, triángulos, etc.

## 5.2 Área de figuras elementales planas

El cálculo de áreas es necesario en multitud de actividades humanas, por ejemplo con el comercio. La cantidad de muchos productos y servicios se estima en medidas de área, por ejemplo: las telas, el trabajo de un colocador de pisos, el precio de la construcción, el valor de las extensiones de tierra, etc.

Por *figuras elementales* planas nos referimos a rectángulos, triángulos, trapecios, etc. Sin duda el alumno debe estar muy familiarizado con las áreas de estas figuras, el área de un rectángulo viene dada por la conocida fórmula $b \times h$, donde $b$ es la base del rectángulo y $h$ su altura. Ahora bien, ¿Cómo se llega a esta fórmula? Porque esta fórmula es apropiada para calcular el precio de un terreno por ejemplo. En esta sección vamos a justificar esta fórmula a partir de algunos hechos elementales.

Vamos a considerar un plano $\mathcal{P}$. En este plano $\mathcal{P}$ supondremos fijada una unidad de longitud. Pretendemos asignar un área a las figuras, es decir a los subconjuntos, de $\mathcal{P}$. De ahora en más, cómo es usual en esta materia nos referiremos a *medida* en lugar de área. La medida es un concepto más general que el concepto de área. No obstante en el contexto en que estamos actualmente son sinónimos.

Queremos construir pues una función $m$ tal que $m(A)$ represente la medida de $A \subset \mathcal{P}$. Ahora bien ¿qué podemos usar de guía con ese objetivo? Si, como dijimos, desconocemos todas las fórmulas previamente aprendidas, sobre que partimos para construir la medida o área. La respuesta es que tomaremos como principio rector ciertas propiedades que son deseables que una medida satisfaga. Ellas son las siguientes.

**Positividad.** debería ser una magnitud no negativa.

**Invariancia por movimientos rígidos.** Si una región es transformada en otra por medio de un movimiento rígido, ambas regiones deberían tener la misma área. Otra manera de expresar esta propiedad es diciendo que dos figuras *congruentes* tienen la misma área.

**Aditividad.** Si una región $A$ es la unión de cierta cantidad de regiones más chicas mutuamente disjuntas $A_i$, $i = 1, \ldots, n$, la medida de $A$ es la suma de las medidas de los $A_i$.

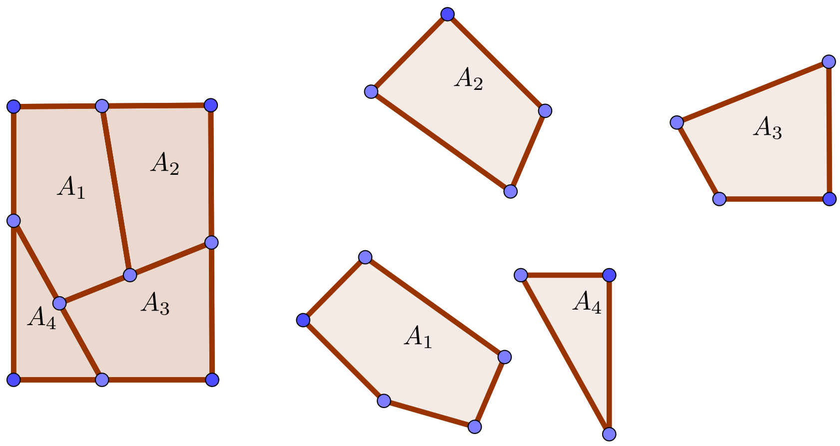



Figura 5.1: El área del rectángulo es la suma de sus partes

Utilizando la segunda y tercer propiedad se pueden relacionar el área del rectángulo de la figura 5.1 con las cuatro regiones en la que es dividido.

Como veremos a lo largo de la materia la propiedad de aditividad debe ser estudiada con cuidado, esto ocurre por las intrincadas maneras en que una región puede ser unión de otras regiones. A lo largo de esta materia elaboraremos una teoría que nos dará una descripción precisa de a que conjuntos podemos asignarle una medida de modo que las propiedades previas sean consistentes.

Por el momento veamos como las propiedades anteriores determinan practicamente de manera unívoca la medida de regiones elementales planas.

Hablando de propiedades de la medida, supongamos que $A$ y $B$ son dos regiones con $A \subset B$. Entonces como $B = A \cup (B - A)$ y por la propiedad de aditividad y positividad

$$m(B) = m(A) + m(B - A) \geq m(A).$$

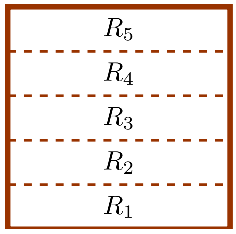
Descubrimos así que nuestra medida deberá tener adicionalmente la siguiente propiedad:

**Monotonía.** Si $A \subset B$ entonces $m(A) \leq m(B)$.

Es claro que si logramos construir una medida que satisfaga las propiedades anteriores cualquier multiplo por un número real positivo de ella seguirá cumpliendo las propiedades. Esto es una manera de expresar el hecho que podemos usar diferentes unidades de medición. Esta cuestión se sortea proponiendo la unidad de medida. Esta unidad es completamente arbitraria, ud. podría elegir su figura plana preferida como unidad de área. Cómo es habitual, elijamos el cuadrado cuyos lados miden la unidad de longitud supuesto que esta unidad fue previamente establecida.

Podríamos por ejemplo elegir el círculo de radio uno como unidad de área. Así ya no tendríamos el problema de ese número raro $\pi$ que aparece en la fórmula del área del círculo. ¡El área de cualquier círculo sería igual a su radio al cuadrado! Claro que aparecería $\pi$ en la fórmula del área del cuadrado de lado 1. Nos tapamos los pies y se destapa el cuerpo.

Supongamos ahora que tenemos un rectángulo $R$ de un lado igual a la unidad y el otro de longitud racional $n/m$, $n, m \in \mathbb{N}$. Veamos que las propiedades de las medidas determinan el área de este rectángulo. Sea $Q$ un cuadrado de lados iguales a 1. Luego $m(Q) = 1$, por suposición. Primero observar que si dividimos un lado de $Q$ en $m$ segmentos iguales de longitud $1/m$, queda dividido el cuadrado en $m$ rectángulos $R_1, \ldots, R_m$ (ver figura en el margen), todos ellos congruentes entre si, de modo que todos tienen la misma medida, digamos $m(R_1)$. De modo que por la aditividad debe ocurrir que $m(R_1) = \cdots = m(R_m)) = 1/m$. Recordemos nuestra pretención de inferir la medida de un rectángulo $R$ de lado 1 y otro $n/m$. Este rectángulo esta compuesto de $n$ rectángulos congruentes a los $R_i$, $i = 1, \ldots, m$, nuevamente por la aditividad inferimos que $m(R) = n/m$. Notar que $n/m$ es la base por la altura de $R$.




Descomposición del cuadrado $Q$

Sea ahora una rectángulo $R$ con un lado unidad y el otro un real cualquiera $l > 0$. Existen sendas sucesiones $0 < q_k, p_k \in \mathbb{Q}$, $k \in \mathbb{N}$, tales que $q_1 \leq q_2 \leq \cdots \leq l \leq \cdots \leq p_2 \leq p_1$ y $\lim_{k\to\infty} q_k = \lim_{k\to\infty} p_k = l$. Consideremos una dos sucesiones de rectángulos $R_k$ y $S_k$ que comparten el lado de $R$ igual a la unidad, mientras que los otros lados de $R_k$ y $S_k$ son iguales a $q_k$ y $p_k$ respectivamente. Luego por la monotonía

$$q_k = m(R_k) \leq m(R) \leq m(S_k) \leq p_k.$$

Tomando límite cuando $k \to \infty$ inferimos que $m(R) = l$.

A partir de las propiedades fundamentales que postulamos para la medida o área inferimos la famosa fórmula del área de un rectángulo en el caso que uno de los lados sea igual a la unidad. Si ahora tenemos un rectángulo arbitrario, hay que fijar un lado y repetir el análisis previo con el segundo lado. Se llega de este modo a justificar la fórmula del área para un rectángulo arbitrario.

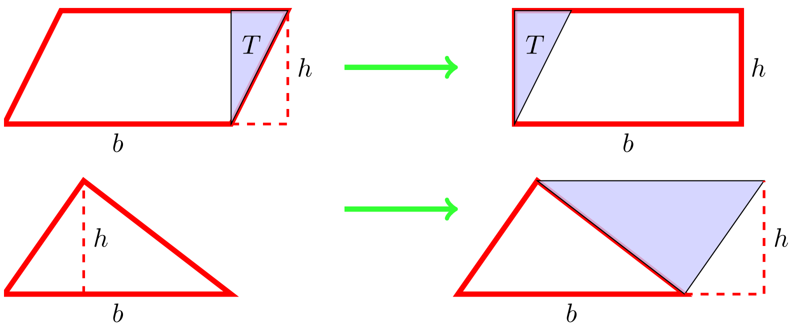



Figura 5.2: Áreas de otras figuras elementales.

En la figura 5.4 se muestra como relacionar el área de un paralelepípedo con la de un rectángulo y la de un triángulo con la de un paralelepípedo para inferir las conocidas fórmulas para estas figuras.

## 5.3 Integral de Riemann

En esta sección abordaremos el problema del área de regiones planas. Vamos a contextualizarnos dentro del marco conceptual que nos brinda la geometría analítica. Mediante coordenadas cartesianas ortogonales los puntos del plano se identifican con pares ordenados $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ y el plano con el conjunto $\mathbb{R}^2$. Nuestro propósito es entonces definir la medida de subconjuntos de $\mathbb{R}^2$. La geometría analítica abre así nuevas posibilidades para abordar el problema del área.

Nuestra primera aproximación será la que propuso Bernhard Riemann en 1854, pero seguiremos el enfoque de Jean Darboux. En esta parte de nuestra exposición consideraremos subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ de un tipo especial, concretamente a conjuntos que quedan encerrados entre la gráfica de una función y del eje coordenadas $x$. Esto nos lleva alconcepto de integral.

**Definición 5.3.1 (Partición)** Sea $[a, b]$ un intervalo. Una *partición* $P$ es un conjunto ordenado y finito de puntos, donde el primer elemento es $a$ y el último $b$. Es decir $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, donde $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.

**Definición 5.3.2 (Sumas de Darboux)** Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada y $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ una partición de $[a, b]$. Consideremos las siguientes magnitudes

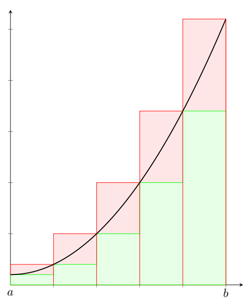
$$\begin{aligned} m_i &:= \text{ínf}\{f(x) | x \in [x_{i-1}, x_i]\} \\ M_i &:= \text{sup}\{f(x) | x \in [x_{i-1}, x_i]\} \end{aligned} \tag{5.1}$$

Definimos la *Suma superior de Darboux* como

$$\overline{S}(P, f) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}),$$

y la *Suma inferior de Darboux* como

$$\underline{S}(P, f) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}),$$



Sumas de Darboux.

**Lema 5.3.1 (Monotonía sumas de Darboux)** Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada y $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ una partición de $[a, b]$. Supongamos que $P'$ es otra partición que tiene un punto más que $P$. Entoces

$$\underline{S}(P', f) \geq \underline{S}(P, f) \quad \text{y} \quad \overline{S}(P', f) \leq \overline{S}(P, f)$$

*Demostración.* Supongamos que

$$P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\},$$

$$P' = \{x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x^*, x_i, x_n\}.$$

Sean $m_i, M_i$ como en (5.1) y es escribamos

$$\begin{aligned} m_i' &:= \text{ínf}\{f(x) | x \in [x_{i-1}, x^*]\} \\ M_i' &:= \text{sup}\{f(x) | x \in [x_{i-1}, x^*]\} \\ m_i'' &:= \text{ínf}\{f(x) | x \in [x^*, x_i]\} \\ M_i'' &:= \text{sup}\{f(x) | x \in [x^*, x_i]\} \end{aligned}$$

Valen las relaciones $m_i \leq m'_i$, $m_i \leq m''_i$, $M'_i \leq M_i$ y $M''_i \leq M_i$. Entonces

$$\begin{aligned}
&\underline{S}(P, f) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \\
&= m_1(x_1 - x_0) + \cdots + m_i(x^* - x_{i-1}) + m_i(x_i - x^*) + \cdots + +m_n(x_n - x_{n-1}) \\
&\leq m_1(x_1 - x_0) + \cdots + m'_i(x^* - x_{i-1}) + m''_i(x_i - x^*) + \cdots + +m_n(x_n - x_{n-1}) \\
&\hfill \leq \underline{S}(P', f).
\end{aligned}$$

Obviamente la demostración para las sumas superiores es completamente análoga. □

Usando inducción podemos generalizar el resultado anterior como muestra el siguiente ejercicio.

**Ejercicio 5.3.1** Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada y $P, P'$ particiones de $[a, b]$ con $P \subset P'$. Demostrar que

$$\underline{S}(P, f) \leq \underline{S}(P', f) \quad \text{y} \quad \overline{S}(P', f) \leq \overline{S}(P, f).$$

Inferir que para cualesquiera $P, P'$ (sin importar que una este o no contenida dentro de la otra)

$$\underline{S}(P, f) \leq \overline{S}(P, f).$$

**Definición 5.3.3 (Funciones integrables)** Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Diremos que $f$ es *integrable Riemann* si

$$\sup \{\underline{S}(P, f) | P \text{ partición de } [a, b]\} = \text{ínf} \left\{\overline{S}(P, f) | P \text{ partición de } [a, b]\right\} \quad (5.2)$$

En caso que $f$ sea integrable Riemann llamamos *integral de Riemann* entre $a$ y $b$ de $f$ al valor de los dos miembros de (5.2) y este número se denota

$$(R) \int_a^b f(x)dx.$$

Cuando no haya lugar a confusión, por ejemplo a lo largo de este capítulo, omitiremos el símbolo $(R)$ en la integral.

**Teorema 5.3.1 (Propiedades elementales de la integral)** Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrables, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $c \in (a, b)$. Entonces

**Linealidad** $\alpha f + \beta g$ es integrable y

$$\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx.$$

**Monotonía** Si $f(x) \leq g(x)$ para $x \in [a, b]$ entonces

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

**Aditividad del Intervalo**

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

*Demostración.* Fue dada en cursos previos y la omitiremos aquí. □

**Observación:** Las propiedadades anteriores son compatibles con las propiedades que habíamos propuesto para el concepto de área en la sección .

Es útil tener un símbolo que nos represente el supremo y el ínfimo en la Definición 5.3.3.

**Definición 5.3.4 (Integrables de Darboux)** Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Definimos la integral *superior e inferior de Darboux* como

$$(D)\overline{\int_a^b} f(x)dx = \text{ínf}\left\{\overline{S}(P,f) | P \text{ partición de } [a,b]\right\}. \tag{5.3}$$

y

$$(D)\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup\left\{\underline{S}(P,f) | P \text{ partición de } [a,b]\right\}. \tag{5.4}$$

Apelando a estos conceptos se tiene que $f$ es integrable Riemann si y sólo si

$$(D)\overline{\int_a^b} f(x)dx = (D)\underline{\int_a^b} f(x)dx. \tag{5.5}$$

**Teorema 5.3.2 (Primer criterio de integrabilidad)** Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Entonces $f$ es integrable si y solo si para todo $\varepsilon > 0$ existe una partición $P$ tal que

$$\overline{S}(P;f) - \underline{S}(P;f) < \varepsilon. \tag{5.6}$$

*Dem.* Veamos la parte “solo si”. Si $f$ es integrable satisface (5.2). Si $\varepsilon > 0$, usando la caracterización (**??**) (debería haber una intro con estas propiedades) tenemos que existen particiones $P'$ y $P''$ tales que:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx \quad &\leq \overline{S}(P';f) &< \int_a^b f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2}, \\ \int_a^b f(x)dx - \frac{\varepsilon}{2} \quad &< \underline{S}(P'';f) &\leq \int_a^b f(x)dx. \end{aligned}$$

Sea ahora la partición $P = P' \cup P''$. Por el ejercicio (5.3.1) tenemos que:

$$\overline{S}(P;f) - \frac{\varepsilon}{2} \leq \overline{S}(P';f) - \frac{\varepsilon}{2} < \int_a^b f(x)dx < \underline{S}(P'';f) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \underline{S}(P;f) + \frac{\varepsilon}{2}$$

Así tenemos (5.7).

Asumamos ahora que se satisface (5.7). Entonces

$$(D)\overline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{S}(P;f) < \underline{S}(P;f) + \varepsilon < (D)\underline{\int_a^b} f(x)dx + \varepsilon.$$

□

**Ejemplo 5.3.1** Sea $0 \le a < b$ veamos que

$$\int_a^b x dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}.$$

*Dem.* Sea $n \in \mathbb{N}$. Consideramos particiones uniformes $P_n = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ tales que

$$x_k = a + \frac{k}{n}(b-a), \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Definimos

$$m_i = \inf_{[x_{i-1},x_i]} f(x) = x_{i-1} = a + \frac{i-1}{n}(b-a),$$
$$M_i = \sup_{[x_{i-1},x_i]} f(x) = x_i = a + \frac{i}{n}(b-a).$$

Luego

$$\overline{S}(f, P_n) - \underline{S}(f, P_n) = \sum_{i=0}^{n-1}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{b-a}{n}\frac{b-a}{n} = \frac{(b-a)^2}{n}$$

y tomando $n$ suficientemente grande vemos que $\overline{S}(f, P_n) - \underline{S}(f, P_n)$ es menor que $\varepsilon$.
Hasta aquí, por aplicación del Primer Criterio de Integrabilidad, hemos probado que $f(x) = x$ es integrable.
Para justificar el valor de la integral operamos del siguiente modo

$$\begin{aligned}
\overline{S}(f, P_n) =& \sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_i - x_{i-1}) \\
=& \sum_{i=0}^{n-1} x_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(a + \frac{i}{n}(b-a)\right) \frac{b-a}{n} \\
=& a(b-a) + \left(\frac{b-a}{n}\right)^2 \sum_{i=0}^{n-1} i \\
=& a(b-a) + \left(\frac{b-a}{n}\right)^2 \frac{n(n+1)}{2} \\
=& (b-a)\left(a + \frac{n+1}{2n}(b-a)\right).
\end{aligned}$$

Ahora observamos que $\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, P_n) = \frac{b^2-a^2}{2}$ Se llega a la misma conclusión con $\underline{S}(f, P_n)$.
Luego, como

$$\underline{S}(f, P_n) \le \int_a^b f(x)\, dx \le \overline{S}(f, P_n),$$

haciendo $n \to \infty$ obtenemos el valor buscado. □

**Ejercicio 5.3.2** Sea $0 \le a < b$ veamos que

$$\int_a^b x^2 dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}.$$

*Ayuda:* Usar particiones uniformes y la fórmula $\sum_{i=1}^n n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$.

**Ejemplo 5.3.2** Sea $0 < a < b$ y $m \in \mathbb{Z}$, $m \neq -1$, veamos que

$$\int_a^b x^m \, dx = \frac{b^{m+1}}{m+1} - \frac{a^{m+1}}{m+1}.$$

*Dem.* Podríamos usar particiones uniformes, pero eso nos obligaría a hallar fórmulas para $\sum_{i=0} i^m$. Usando particiones no uniformes evitamos ese inconveniente.

Tomamos $n \in \mathbb{N}$ y

$$q = \sqrt[n]{\frac{b}{a}} > 1.$$

Consideramos $P_n = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ tal que

$$x_i = aq^i, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

entonces se tiene

$$x_i - x_{i-1} = aq^{i-1}(q-1).$$

Supongamos que $m > 0$, entonces

$$m_i = \inf_{[x_{i-1}, x_i]} x^m = x_{i-1}^m = a^m q^{m(i-1)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Similarmente,

$$M_i = a^m q^{mi}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Ahora,

$$\begin{aligned}
\overline{S}(f, P_n) =& \sum_{i=1}^{n} a^m q^{mi} a q^{i-1}(q-1) \\
=& \frac{a^{m+1}(q-1)}{q} \sum_{i=1}^{n} (q^{m+1})^i \\
=& \frac{a^{m+1}(q-1)}{q} q^{m+1} \sum_{i=0}^{n-1} (q^{m+1})^i \\
=& a^{m+1}(q-1)q^m \frac{q^{(m+1)n} - 1}{q^{m+1} - 1} \\
=& a^{m+1} \frac{q-1}{q^{m+1}-1} q^m \left[ \left(\frac{b}{a}\right)^{m+1} - 1. \right]
\end{aligned}$$

Ahora, como $\lim_{n\to\infty} q = 1$ y $\lim_{n\to\infty} \frac{q^{m+1}-1}{q-1} = m+1$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, P_n) = a^{m+1} \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{m+1} - 1}{m+1} = \frac{b^{m+1}}{m+1} - \frac{a^{m+1}}{m+1}.$$

Procediendo de manera similar, se obtiene

$$\lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, P_n) = \frac{b^{m+1}}{m+1} - \frac{a^{m+1}}{m+1}.$$

El razonamiento se completa con

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, P_n) - \underline{S}(f, P_n) = 0.$$

Luego, $\forall \varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$ entonces

$$\overline{S}(f, P_n) - \underline{S}(f, P_n) < \varepsilon.$$

Si $m < 0$ y $m \neq -1$, trabajando de manera análoga obtenemos el mismo resultado. Finalmente, $f(x) = x^m$ es integrable y, como en el Ejemplo 5.3.1, se tiene

$$\int_a^b x^m dx = \frac{b^{m+1}}{m+1} - \frac{a^{m+1}}{m+1}.$$

□

**Ejercicio 5.3.3** Sea $0 < a < b$ y $f(x) = 1/x$. Como en el ejemplo 5.3.2 para $n \in \mathbb{N}$ tomamos $q = (b/a)^{1/n}$ y

$$P_n = \{a, qa, q^2a, \ldots, aq^{n-1}, b\}.$$

Demostrar que

$$\underline{S}(P_n; f) = n\frac{q-1}{q}$$
$$\overline{S}(P_n; f) = n(q-1)$$

Inferir que $f$ es integrable en $[a, b]$ y

$$\int_a^b \frac{1}{x} dx = \ln(b) - \ln(a)$$

**Ejemplo 5.3.3** Sea $0 \leq a < b \leq \pi/2$, veamos que

$$\int_a^b \operatorname{sen} x dx = -(\cos(b) - \cos(a)).$$

*Dem.* Usamos particiones equiespaciadas $P_n = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ tal que

$$x_i = a + \frac{i}{n}(b-a), \quad i = 0, 1, \ldots, n;$$

entonces

$$x_i - x_{i-1} = \frac{1}{n},$$

y como $f(x) = \operatorname{sen} x$ es creciente en $[a, b]$ se tiene que

$$M_i = \operatorname{sen} x_i \quad \text{y} \quad m_i = \operatorname{sen} x_{i-1}.$$

Definimos $h := \frac{b-a}{n}$ y obtenemos

$$\overline{S}(f, P_n) = h\sum_{i=1}^{n} \operatorname{sen}\left(a + \frac{i}{n}(b-a)\right) = h\sum_{i=1}^{n} \operatorname{sen}(a + ih).$$

Una técnica usual para calcular sumas consiste en expresar los términos de la suma como diferencia de otras expresiones. Es así que, a continuación usaremos la fórmula

$$2 \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v = \cos(u - v) - \cos(u + v)$$

con $u = a + ib$ y $v = h/2$, de donde obtenemos

$$2 \operatorname{sen}(a + ib) \operatorname{sen}\frac{h}{2} = \cos\left[a + \left(i - \frac{1}{2}\right)h\right] - \cos\left[a + \left(i + \frac{i}{2}\right)h\right].$$

Luego, podemos re-escribir $\overline{S}(f,P_n)$ como

$$\begin{aligned}
\overline{S}(f,P_n) =& h\frac{1}{2\,\text{sen}\,\frac{h}{2}}\sum_{i=1}^{n}\cos\left[a+\left(i-\frac{1}{2}\right)h\right]-\cos\left[a+\left(i+\frac{i}{2}\right)h\right]\\
=&\frac{h}{2\,\text{sen}\,\frac{h}{2}}\left\{\cos\left(a+\frac{h}{2}\right)-\cos\left(a+\frac{3}{2}h\right)+\cos\left(a+\frac{3}{2}h\right)\right.\\
&-\cos\left(a+\frac{5}{2}h\right)+\cos\left(a+\frac{5}{2}h\right)-\cos\left(a+\frac{7}{2}h\right)+\dots\\
&\left.-\cos\left[a+\left(n-\frac{1}{2}\right)h\right]+\cos\left[a+\left(n-\frac{1}{2}\right)h\right]-\cos\left(a+nh+\frac{h}{2}\right)\right\}\\
=&\frac{h}{2\,\text{sen}\,\frac{h}{2}}\left\{\cos\left(a+\frac{h}{2}\right)-\cos\left(b+\frac{h}{2}\right)\right\}.
\end{aligned}$$

Cuando $n\to\infty$, se tiene que $h\to 0$ y

$$\lim_{n\to\infty}\frac{h}{2\,\text{sen}\,\frac{h}{2}}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\frac{\text{sen}\,\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}}=1.$$

Así, llegamos a

$$\lim_{n\to\infty}\overline{S}(f,P_n)=\cos a-\cos b.$$

De manera similar, se consigue

$$\lim_{n\to\infty}\underline{S}(f,P_n)=\cos a-\cos b.$$

Por el argumento empleado en los ejemplos anteriores, la función $f(x)=\text{sen}\,x$ resulta integrable y

$$\int_a^b \text{sen}\,x\,dx=\cos a-\cos b=-\left[\cos x\right|_a^b.$$

La fórmula vale para cualesquiera valores de $a$ y $b$. La limitación $0\le a<b\le\pi/2$ se puso para simplificar el razonamiento. En otro caso, habría que distinguir los subintervalos de $[a,b]$ donde $f(x)=\text{sen}\,x$ es creciente de donde es decreciente. □

**Ejercicio 5.3.4** Sea $0\le a<b\le\pi$. Demostrar que

$$\int_a^b \cos x dx=\text{sen}(b)-\text{sen}(a).$$

**Observación:** Notar que en todos los ejemplos anteriores

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a),$$

donde $F$ es una función que satisface $F'=f$.

## 5.4 2° Criterio de integrabilidad

**Teorema 5.4.3 (Segundo criterio de integrabilidad)** Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Entonces $f$ sea integrable si y solo si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para cualquier partición $P$ que satisface

$$\max_i \{x_i - x_{i-1}\} < \delta,$$

se tiene que

$$\overline{S}(P; f) - \underline{S}(P; f) < \varepsilon. \tag{5.7}$$

*Dem.* La suficiencia de la condición es trivial. Para la necesidad tomemos $\varepsilon > 0$. Por el primer criterio de integrabilidad existe una partición $P^* = \{y_0, \dots, y_m\}$ tal que se satisface

$$\overline{S}(f; P^*) - \underline{S}(f; P^*) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como $f$ es integrable es acotada, por consiguiente existe $M > 0$ tal que

$$|f| \leq M.$$

Elijamos

$$\delta < \min\left\{ \frac{\varepsilon}{8Mm}, \min_{j=1,\dots,m} (y_j - y_{j-1}) \right\}.$$

Sea ahora $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ una partición que satisface

$$x_i - x_{i-1} < \delta, \quad i = 1, \dots, n.$$

Definimos los conjuntos de índices $I_j$ para $j = 1, \dots, m$ por

$$I_j := \{ i \in I \,|\, [x_{i-1}, x_i] \subset [y_{j-1}, y_j] \}.$$

Ahora ponemos

$$I = I_1 \cup \cdots \cup I_m,$$

Pongamos

$$\begin{aligned} m_i &:= \inf\{f(x) | x \in [x_{i-1}, x_i]\}, & M_i &:= \sup\{f(x) | x \in [x_{i-1}, x_i]\} \\ m_j^* &:= \inf\{f(x) | x \in [y_{j-1}, y_j]\} & M_j^* &:= \sup\{f(x) | x \in [y_{j-1}, y_j]\} \end{aligned}$$

Observar que

$$i \in I_j \Rightarrow [x_{i-1}, x_i] \subset [y_{j-1}, y_j] \Rightarrow m_i \geq m_j^* \wedge M_i \leq M_j^*.$$

Entonces, tomando en consideración la figura 5.3:

$$\begin{aligned} &\sum_{i \in I_j} m_i (x_i - x_{i-1}) \geq \sum_{i \in I_j} m_j^* (x_i - x_{i-1}) \geq m_j^* (y_j - y_{j-1} - 2\delta) \\ &\sum_{i \in I_j} M_i (x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i \in I_j} M_j^* (x_i - x_{i-1}) \leq M_j^* (y_j - y_{j-1}) \end{aligned} \tag{5.8}$$

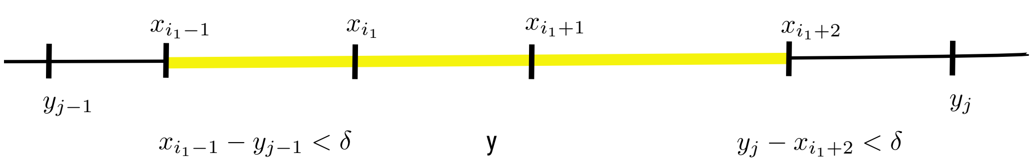



Figura 5.3: Demostración 2° criterio

Cuando $i \notin I$ existe $j$ tal que $x_{i-1} < y_j < x_i$.
Así finalmente

$$\begin{aligned}\overline{S}(P;f) - \underline{S}(P;f) &= \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{j=1}^{m}\sum_{i\in I_j}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i\notin I}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1})\end{aligned}$$

.

En la segunda sumatoria usamos las acontaciones $M_i - m_i \le 2M$ y $(x_i - x_{i-1}) < \delta$ y tomamos en cuenta que la cantidad de términos es a lo sumo $m$. En la primer sumatoria usamos las estimaciones (5.8). Así obtenemos

$$\begin{aligned}\overline{S}(P;f) - \underline{S}(P;f) &\le \sum_{j=1}^{m} M_j^*(y_j - y_{j-1}) - \sum_{j=1}^{m} m_j^*(y_j - y_{j-1} - 2\delta) + 2M\delta m \\ &= \sum_{j=1}^{m} M_j^*(y_j - y_{j-1}) - \sum_{j=1}^{m} m_j^*(y_j - y_{j-1}) + \sum_{j=1}^{m} m_j^* 2\delta + 2M\delta m \\ &= \overline{S}(P^*;f) - \underline{S}(P^*;f) + 4Mm\delta < \varepsilon\end{aligned}$$

□

## 5.5 Integrabilidad y continuidad

**Definición 5.5.5** [Uniforme continuidad] Sean $(X,d)$ e $(Y,d')$ espacios métricos con $X$ compacto. Diremos que $f : X \to Y$ es uniformememnte continua si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : d(x,y)\delta \Rightarrow d'(f(x),f(y)) < \varepsilon.$$

**Teorema 5.5.4** [Uniforme continuidad] Sean $(X,d)$ e $(Y,d')$ espacios métricos con $X$ compacto. Si $f : X \to Y$ es continua entonces es uniformemente continua.

**Teorema 5.5.5 (Continuidad implica integrabilidad)** Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función continua entonces es integrable.

*Dem.* Apliquemos la definición de continuidad uniforme con $\varepsilon/(b-a)$ en lugar de $\varepsilon$. Sea $P = \{x_1, \dots, x_n\}$ una partición tal que

$$\max_{i=1,\dots,n}(x_i - x_{i-1}) < \delta.$$

Como $f$ es continua $f$ alcanza su máximo y mínimo en $[x_{i-1}, x_i]$. Luego existen $x^*, x_* \in [x_{i-1}, x_i]$ con $M_i^* = f(x^*)$ y $m_i^* = f(x_*)$. Luego

$$M_i - m_i = f(x^*) - f(x_*) < \varepsilon/(b-a).$$

Entonces

$$\overline{S}(P;f) - \underline{S}(P;f) = \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \frac{\varepsilon}{(b-a)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) = \varepsilon.$$

□

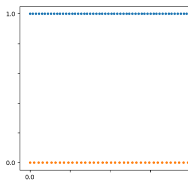
¿Qué ocurre con las funciones discontinuas?
**Ejemplo 5.5.4** [Función de Heavside] Es la función

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

Es discontinua en $[-1,1]$ pero integrable. JUSTIFICAR
**Ejemplo 5.5.5** [Función de Dirichlet] Es la función $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Veamos que $f$ es discontinua en todo punto y no integrable. JUSTIFICAR



Función de Diric

## 5.6 Criterio integrabilidad de Riemann

**Definición 5.6.6 (Oscilación)** Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ acotada y $E\subset[a,b]$. Definimos la *oscilación* de $f$ en $E$ por

$$w(f,E) = \sup\{f(x)|x\in E\} - \inf\{f(x)|x\in E\}.$$

**Ejemplo 5.6.6**

1. Para la función de Dirichlet $w(f,I)=1$ para todo $I$ con interior no vacío.
2. Para la función de Heavside e $I=[\alpha,\beta]$

$$w(f,I) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0\in(\alpha,\beta] \\ 0 & \text{si } 0\notin(\alpha,\beta] \end{cases}$$

**Ejemplo 5.6.7** [Función de Thomae] Es la función $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q}, p,q\in\mathbb{Z}, \text{m.c.d}(p,q)=1 \\ 0 & \text{si } x\notin\mathbb{Q} \end{cases}$$

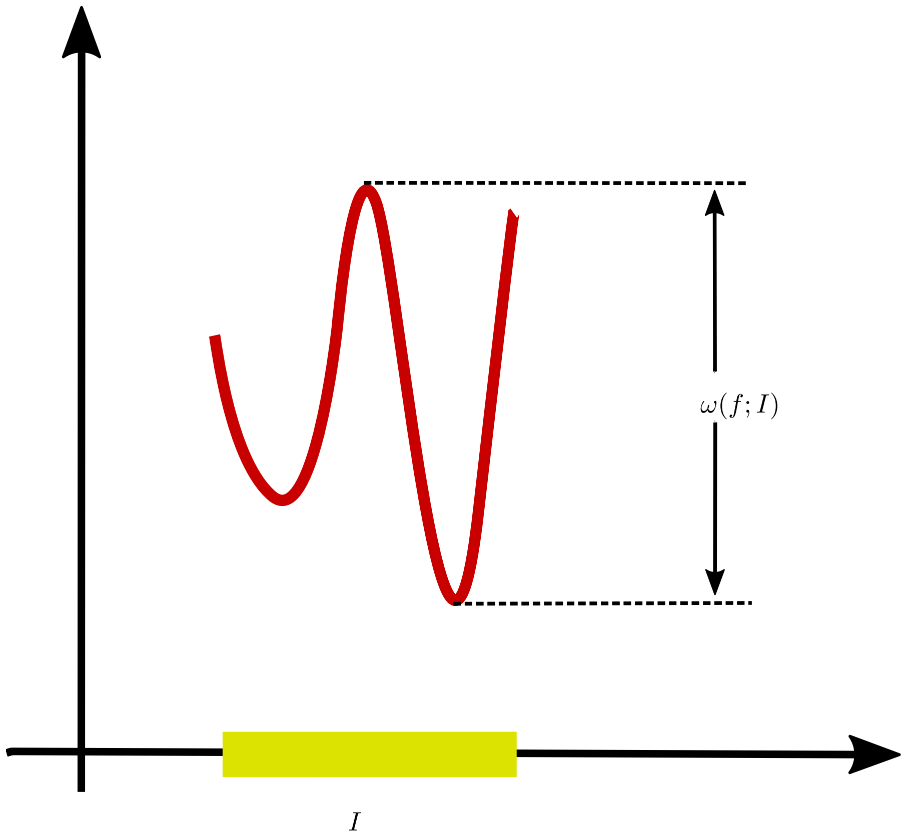



Figura 5.4: Áreas de otras figuras elementales.

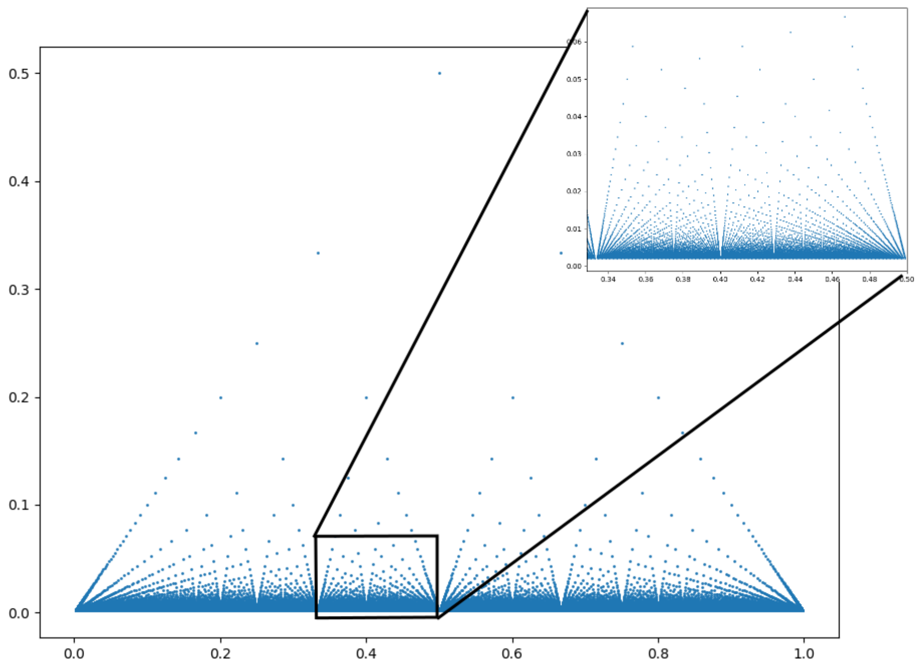


Figura 5.5: Función de Thomae

Si $I^o \neq \varnothing$, $f$ la función de Thomae e $I \subset [0,1]$ entonces $w(f,I) = 1/q^*$, donde $q^*$ es el mínimo valor de $q$ para el que existe $p \leq q$ tal que $p/q \in I$. Justificar

**Ejemplo 5.6.8** [Escalera discontinua] Sea $\mathbb{Q} \cap [0,1] = \{q_1, q_2, \ldots\}$ una numeración de los racionales del $[0,1]$. Definamos $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ como

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}H(x-q_n),$$

donde $H$ es la función de *Heavside*.

Veamos que $f$ es monotona no decreciente y discontinua en todo punto de $[0,1]\cap\mathbb{Q}$. Para la función escalera discontinua e $I\subset[0,1]$ abierto

$$w(f,I)=\sum_{q_n\in I}\frac{1}{2^n}.$$

JUSTIFICAR

**Definición 5.6.7** [Oscilación en un punto] Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ y $x\in[a,b]$, definimos la *oscilación* de $f$ en $x$ como

$$\omega(f;x)=\inf_{x\in G}\omega(f;G).$$

Donde el ínf se toma sobre todos los $G$ abiertos relativos a $[a,b]$ con $x\in G$.

**Ejercicio 5.6.5** Demostrar que $f$ es continua en $x$ si y sólo si $\omega(f;x)=0$.

**Definición 5.6.8** Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ acotada, $\sigma>0$ y $P=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ una partición. Definimos

$$I_\sigma:=\{i\in\{1,\ldots,n\}|w(f,[x_{i-1},x_i])\geq\sigma\}.$$

y

$$R(P,f,\sigma)=\sum_{i\in I_\sigma}(x_i-x_{i-1}).$$

**Proposición 5.6.1** Si $f$ es continua en $[a,b]$ para todo $\sigma>0$ existe $\delta>0$ tal que

$$\max_i(x_i-x_{i-1})<\delta\Rightarrow I_\sigma=\varnothing\Rightarrow R(P,f,\sigma)=0.$$

**Ejemplo 5.6.9** Para la función de Dirichlet y para todo $0<\sigma<1$ y para toda partición de $[0,1]$ tenemos $I_\sigma=\{x_1,\ldots,x_n\}$ y $R(P,f,\sigma)=[0,1]$
**Ejemplo 5.6.10** Para la función de Heavside, para todo $0<\sigma<1$ y para toda partición de $[0,1]$ tenemos $I_\sigma=i$, donde $i$ es el índice para el que $i\in(x_{i-1},x_i]$ y $R(P,F,\sigma)=x_i-x_{i-1}$.

**Teorema 5.6.6 (Criterio de integrabilidad de Riemann)** Sea $f$ acotada en $[a,b]$ entonces $f$ es integrable si y sólo si para todo $\varepsilon>0$ y $\sigma>0$ existe $\delta>0$ tal que que para cualquier partición $P$ que satisface

$$\max_i\{x_i-x_{i-1}\}<\delta,$$

se tiene que

$$R(P,f,\sigma)<\varepsilon.$$

*Demostración.* Supongamos $f$ integrable y $\varepsilon, \sigma > 0$. Por el 2° criterio de integrabilidad aplicado a $\varepsilon\sigma$ en lugar de $\varepsilon$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\max_i\{x_i - x_{i-1}\} < \delta \Rightarrow \overline{S}(P; f) - \underline{S}(P; f) < \varepsilon\sigma.$$

Pero

$$\begin{aligned}\varepsilon\sigma > \overline{S}(P; f) - \underline{S}(P; f) &= \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \\ &\geq \sum_{i\in I_\sigma}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \geq \sigma \sum_{i\in I_\sigma}(x_i - x_{i-1}) = \sigma R(P, f, \sigma)\end{aligned}$$

Deducimos

$$R(P, f, \sigma) = \sum_{i\in I_\sigma}(x_i - x_{i-1}) < \varepsilon.$$

Para el recíproco, tomemos $\varepsilon > 0$. Como $f$ es acotada, existe $M > 0$ tal que $|f| \leq M$. Observar que $M$ satisface $M_i - m_i \leq 2M$. Vamos a tomar $\sigma = \varepsilon/2(b - a)$ y tomamos $\delta > 0$ que satisface la condición necesaria del teorema para ese $\sigma$ y con $\varepsilon/4M$ en lugar de $\varepsilon$. Definimos

$$I = \{i\,|f\; w(f, [x_{i-1}, x_i]) \geq \sigma\}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\overline{S}(P; f) - \underline{S}(P; f) &= \sum_{i\in I}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i\notin I}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \\ &\leq 2M\sum_{i\in I}(x_i - x_{i-1}) + \sigma\sum_{i\in I}(x_i - x_{i-1}) < \varepsilon\end{aligned}$$

□

**Ejemplo 5.6.11** Discutir los ejemplos Dirichlet, Heavside, Continuas, escalera discontinua

**Ejemplo 5.6.12** Definimos

$$((x)) = x - [x + 0{,}5]$$

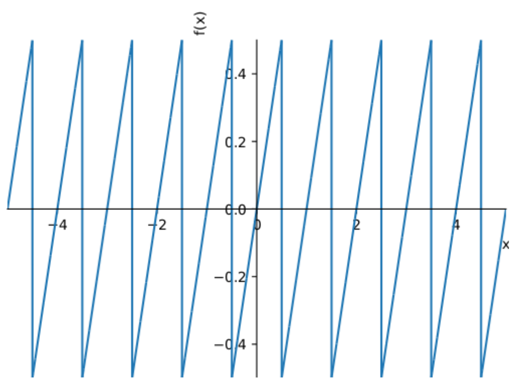



Figura 5.6: Función serrucho

Definimos la función de Riemann:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{((x))}{n^2}.$$

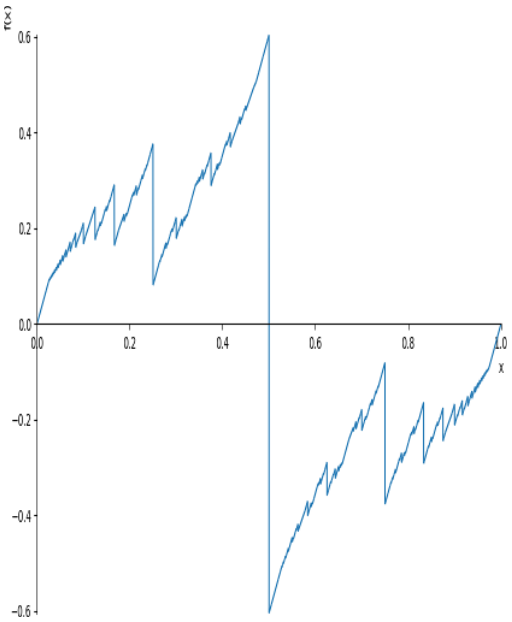



Figura 5.7: Función de Riemann

Demostramos que la función de Riemann es discontinua en los racionales $p/q$ donde m.c.d$(p,q)=1$ y $q$ par. Es integrable en $[0,1]$.

## 5.7 Criterio de Hankel

**Lema 5.7.2** [Cubrimiento de Lebesgue] Sea $(X,d)$ un espacio métrico compacto, $\{G_i\}_{i\in\mathscr{I}}$ un cubrimiento de $X$ por conjuntos abiertos: i.e.

$$X=\bigcup_{i\in\mathscr{I}} G_i.$$

Existe un $\delta>0$ tal que si $A\subset X$ es un conjunto con diam$(A)<\delta$ entonces existe $i\in\mathscr{I}$ tal que $A\subset G_i$. El número $\delta$ se suele llama *número de Lebesgue número de Lebesgue* del cubrimiento.

*Demostración.* Sea $x\in X$. Existe $i_x\in\mathscr{I}$ tal que $x\in G_{i_x}$. Como $G_{i_x}$ es abierto, existe $r_x$ tal que $B(x;r_x)\subset G_{i_x}$. La colección de bolas $\{B(x;r_x/2)\}_{x\in X}$ es un cubrimiento de $X$. Como $X$ es compacto, existen una cantidad finita $\{x_1,\ldots,x_n\}$ de puntos tales que

$$X=\bigcup_{i=1}^{n} B(x_i;r_{x_i}/2).$$

Tomemos

$$\delta=\min_{i=1,\ldots,n}\frac{r_{x_i}}{2}.$$

Sea ahora $A\subset X$ con diam$(A)<\delta$. Tomemos cualquier $x\in A$. Debe existir $k=1,\ldots,n$ tal que $x\in B(x_k;r_{x_k}/2)\subset B(x_k;r_{x_k})\subset G_j$, donde por simplicidad pusimos $j=i_{x_k}$. Sea ahora $y$ otro punto en $A$. Entonces tenemos

$$d(y,x_k)\le d(y,x)+d(x,x_k)\le\delta+\frac{r_{x_k}}{2}\le\frac{r_{x_k}}{2}+\frac{r_{x_k}}{2}=r_{x_k}$$

Entonces $y\in B(x_k;r_{x_k})\subset G_j$. Hemos probado $A\subset G_j$. $\square$

**Lema 5.7.3** Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada y supongamos que $w(f,x) < \varepsilon$, con $\varepsilon > 0$. Entonces existe una partición $P$ tal que

$$\overline{S}(P;f) - \underline{S}(P;f) < \varepsilon(b-a). \tag{5.9}$$

*Demostración.* Si $x \in [a,b]$, debe existir un intervalo abierto relativo a $[a,b]$, $I_x$ tal que $w(f,I_x) < \varepsilon$. La colección $\{I_x\}_{x\in[a,b]}$ forma un cubrimiento del compacto $[a,b]$. Sea $\delta$ un número de Lebesgue de este cubrimiento, que lo tiene en virtud del Lema 5.7.2. Sea una partición $P = \{x_0,\dots,x_n\}$ tal que $(x_i - x_{i-1}) < \delta$. Dicho de otra forma diam$([x_{i-1},x_i]) < \delta$. De modo que para cada subintervalo $[x_{i-1},x_i]$ de la partición existe un $I_x$ con $[x_{i-1},x_i] \subset I_x$. Entonces

$$M_i - m_i := \sup_{[x_{i-1},x_i]} f - \operatorname{ínf}_{[x_{i-1},x_i]} f = w(f,[x_{i-1},x_i]) \le w(f,I_x) < \varepsilon.$$

Finalmente

$$\overline{S}(P;f) - \underline{S}(P;f) = \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) < \varepsilon \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) = \varepsilon(b-a).$$

□

**Definición 5.7.9 (Contenido exterior)** Sea $S \subset \mathbb{R}$. Un *cubrimiento finito* de $S$ es una colección de intervalos $\{(x_{i-1},x_i)\}_{i=1,\dots,n}$ tal que $S \subset \cup_{i=1}^{n}(x_{i-1},x_i)$.

El *contenido exterior* de $S$ se define por

$$c_e(S) = \operatorname{ínf} \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}),$$

donde el ínfimo es tomado sobre todos los cubrimientos finitos de $S$.

**Ejemplo 5.7.13** Si $S$ es un conjunto finito $c_e(S) = 0$.
**Ejemplo 5.7.14** Si $S = [a,b]$ entonces $c_e(S) = b - a$. JUSTIFICAR
**Ejemplo 5.7.15** Sa $\{x_n\}$ una sucesión convergente al punto $x$. Si $S = \{x_n | n = 1,\dots\} \cup \{x\}$ entonces $c_e(S) = 0$. JUSTIFICAR

**Teorema 5.7.7 (Criterio de integrabilidad de Hankel)** Sea $f$ acotada en $[a,b]$ entonces $f$ es integrable si y sólo si para todo $\sigma > 0$ el conjunto

$$S_\sigma := \{x \in [a,b] | w(f,x) > \sigma\}$$

tiene contenido exterior igual a $0$

$$c_e(S_\sigma) = 0.$$

*Demostración.* Supongamos $|f| \le M$. Veamos que la condición es suficiente. Vamos a verificar que se satisface el primer criterio de integrabilidad. Sea $\varepsilon > 0$ y aplicaremos la condición suficiente a $\sigma = \varepsilon/4(b-a)$. Como $c_e(S_\sigma) = 0$ existen intervalos $I_i = (a_i,b_i)$, $i = 1,\dots,n$, tales que:

$$S_\sigma \subset \bigcup_{i=1}^{n}(a_i,b_i) \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) < \frac{\varepsilon}{4M}.$$

Se tiene que $[a,b] - \bigcup_{i=1}^{n}(a_i,b_i)$ es una unión finita de intervalos cerrados

$$[a,b] - \bigcup_{i=1}^{n}(a_i,b_i) = \bigcup_{j=1}^{m}[c_j,d_j] := \bigcup_{j=1}^{m} I_j.$$

Se tiene que cada $I_j \subset (S_\sigma)^c$, por lo tanto si $x \in I_j$ entonces $w(f,x) \leq \sigma < 2\sigma$. Podemos aplicar el Lema 5.7.3 sobre cada intervalo $I_j$, obteniendo particiones $P_j$ de ellos tales que

$$\overline{S}(P_j;f) - \underline{S}(P_j;f) < 2\sigma(d_j - c_j).$$

Sea ahora la partición que resulta de reunir todas

$$P := \{a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n\} \cup P_1 \cup \cdots \cup P_m.$$

Entonces si $M_i = \sup_{[a_i,b_i]} f$ y $m_i = \inf_{[a_i,b_i]} f$

$$\begin{aligned}\overline{S}(P;f) - \underline{S}(P;f) &= \sum_{j=1}^{m} \overline{S}(P_j;f) - \underline{S}(P_j;f) + \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)(b_i - a_i)\\ &\leq 2\sigma \sum_{j=1}^{m}(d_j - c_j) + 2M\frac{\varepsilon}{4M} < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Lo que termina estableciendo el primer criterio de integrabilidad, que es lo que queríamos hacer.

Para ver que la condición es necesaria vamos a ver que para todo $\sigma > 0$ y para todo $\varepsilon > 0$ se tiene que

$$c_e(S_\sigma) < \varepsilon. \tag{5.10}$$

Como $\varepsilon$ es arbitrario no que mas opción que $c_e(S_\sigma) = 0$. Tomemos pues $\sigma, \varepsilon > 0$. Por el criterio de integrabilidad de Riemann Teorema 5.6.6, aplicado a $\sigma/2$ en lugar de $\sigma$, encontramos una partición $P$ tal que si

$$I_{\sigma/2} := \{i | w(f, [x_{i-1}, x_i]) \geq \sigma/2\},$$

entonces

$$\sum_{i \in I_{\sigma/2}} (x_i - x_{i-1}) < \varepsilon.$$

Si $i \notin I_{\sigma/2}$ entonces $w(f, [x_{i-1}, x_i]) < \sigma/2$. De esto se deduce que si $i \notin I_{\sigma/2}$ y $x$ estuviese en el interior relativo a $[a,b]$ del intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ entonces $w(f,x) < \sigma/2$. Vamos a probar que

$$\{x | w(f,x) > \sigma\} \subset \bigcup_{i \in I_{\sigma/2}} [x_{i-1}, x_i]. \tag{5.11}$$

Si esta afirmación fuese falsa existiría $x$ con $w(f,x) > \sigma$ y $x \notin [x_{i-1}, x_i]$ para ningún $i \in I_{\sigma/2}$. De modo que debe ocurrir que $x \in [x_{i-1}, x_i]$ con $i \notin I_{\sigma/2}$. Si fuese el caso que $x \in (x_{i-1}, x_i)$ entonces $w(f,x) < \sigma/2 < \sigma$ que es una contradicción. De modo que $x$ sólo puede pertenecer a puntos extremos de intervalos $[x_{i-1}, x_i]$ con $i \notin I_{\sigma/2}$. Debería ser la situación que $x = x_i$ con $i, (i+1) \notin I_{\sigma/2}$. Entonces si $y, z \in (x_{i-1}, x_{i+1})$ Pueden ocurrir esencialmente dos situaciones i) que $y, z$ esten en el mismo subintervalo, digamos $y, z \in (x_{i-1}, x_i]$ en cuyo caso

$$f(y) - f(z) \leq w(f, [x_{i-1}, x_i]) < \sigma/2.$$

ii) o que esten en diferentes, digamos $y \in (x_{i-1}, x_i]$ y $z \in [x_i, x_{i+1})$. En cuyo caso

$$\begin{aligned}f(y) - f(z) &= f(y) - f(x) + f(x) - f(z)\\ &\leq w(f, [x_{i-1}, x_i]) + w(f, [x_i, x_{i+1}]) \leq \frac{\sigma}{2} + \frac{\sigma}{2} = \sigma.\end{aligned}$$

En cualquier situación $f(y) - f(z) \leq \sigma$. Tomando supremo sobre $y$ e infimo sobre $z$ concluímos que $w(f,x) \leq w(f, (x_{i-1}, x_{i+1})) < \sigma$, que es una contradicción que termina por probar la inclusión (5.11).

Aplicando (5.11)

$$c_e(S_\sigma) \leq \sum_{i \in I_{\sigma/2}} (x_i - x_{i-1}) < \varepsilon.$$

□

## 5.8 Integrales impropias

Se denomina *integrales impropias* a la integral de funciones no acotadas o a integrales sobre intervalos no acotados. Tales integrales requieren de una definición especial.

**Definición 5.8.10** [Integral impropia función no-acotada] Supongamos $a < c < b$ y que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función integrable sobre $[a, c - \varepsilon]$ y sobre $[c + \varepsilon]$ para todo $\varepsilon > 0$. Si los siguientes límites existen

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx, \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx,$$

definimos

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx. \tag{5.12}$$

**Definición 5.8.11** [Integral impropia sobre región no-acotada] Supongamos que $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ es una función integrable sobre $[a, b]$ para todo $b > a$. Si el siguiente límite existe

$$\lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx,$$

definimos

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx. \tag{5.13}$$

Análogamente se definen integrales sobre intervalos no-acotados de la forma $(-\infty, a]$ y $(-\infty, +\infty)$.

## 5.9 Teorema Fundamental de Cálculo

**Teorema 5.9.8** [Teorema Fundamental del Cálculo] Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable Riemann. Definimos

$$\phi(x) = \int_a^x f(x)dx.$$

Etonces $\phi$ es derivable en cada punto de continuidad de $f$ y vale que

$$\phi'(x) = f(x). \tag{5.14}$$

**Corolario 5.9.1** [Regla de Barrow] Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua y $\phi$ una función que satisface $\phi'(x) = f(x)$. Entonces

$$\int_a^x f(x)dx = \phi(b) - \phi(a). \tag{5.15}$$

Etonces $\phi$ es derivable en cada punto de continuidad de $f$ y vale que

$$\phi'(x) = f(x).$$

## 5.10 Función de Volterra

```
import numpy as np
import scipy.optimize
from matplotlib import pyplot as plt
```

Consideramos la función $f(x) = x^2 \operatorname{sen}(1/x)$.

```
def G(x):
    return x**2*np.sin(1/x)
x=np.arange(0,.15,0.0000001)
y=G(x)
plt.plot(x,y)
```

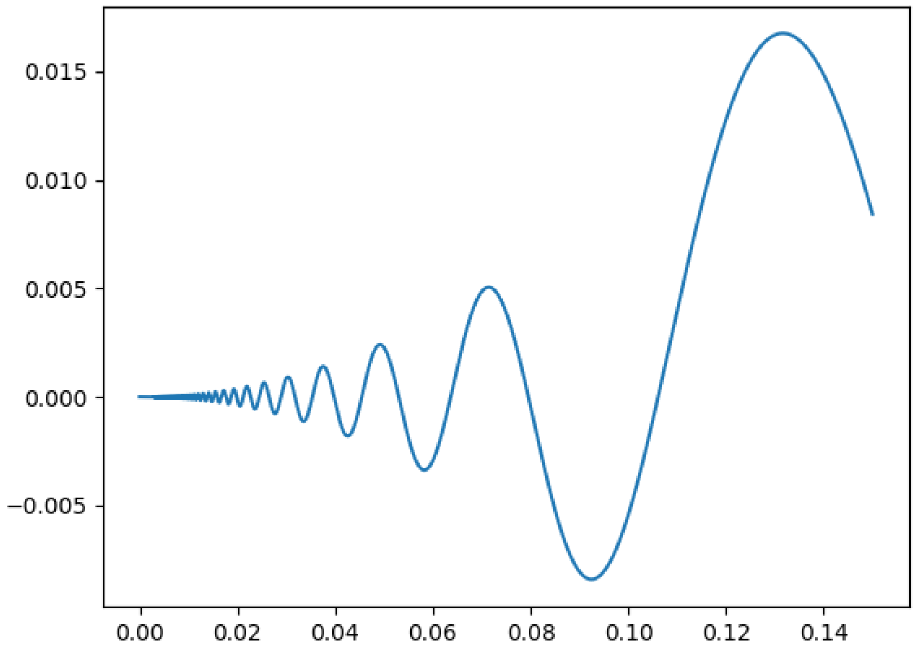



Figura 5.8: Función precursora de Volterra

```
def F(x):
    return 2*x*np.sin(1/x) - np.cos(1/x)
x = scipy.optimize.broyden2(F, .13, f_tol=1e-14)
x,1-x, G(x)
```

Se alcanza un máximo en $x = 0{,}13163878$ y toma el valor $G(x) = 0{,}016757715$. Hay que utilizar el punto simétrico a $x$, es decir $1 - x = 0{,}86836123$.

Definimos la función "madre".

```
def f0(x):
    x1=x[x<=0]
    x2=x[(x<=0.13163877)*(x>0)]
    x3=x[(x>0.13163877)*(x<0.868361226)]
    x4=x[(x>=0.868361226)*(x<1)]
```

```
    x5=x[x>=1]
    y1=np.zeros(np.shape(x1))
    y2=x2**2*np.sin(1/x2)
    y3=0.016757715410548755*np.ones(np.shape(x3))
    y4=(1-x4)**2*np.sin(1/(1-x4))
    y5=np.zeros(np.shape(x5))
    return np.concatenate((y1,y2,y3,y4,y5), axis=None)
```

Definimos la función de Volterra

```
def volterra(x,n,a=0,b=1):
    if n == 0:
        return 0

    a1,b1 = 2.*a/3. + b/3., a/3. + 2.*b/3.
    pto_med = .5*(a+b)
    return volterra(x,n-1,a,a1) + (b1-a1)*f0((x-a1)/(b1-a1))\
    + volterra(x,n-1,b1,b)
```

Graficamos

```
x=np.arange(0,1,0.0000001)
y=volterra(x,12)
plt.plot(x,y)
```

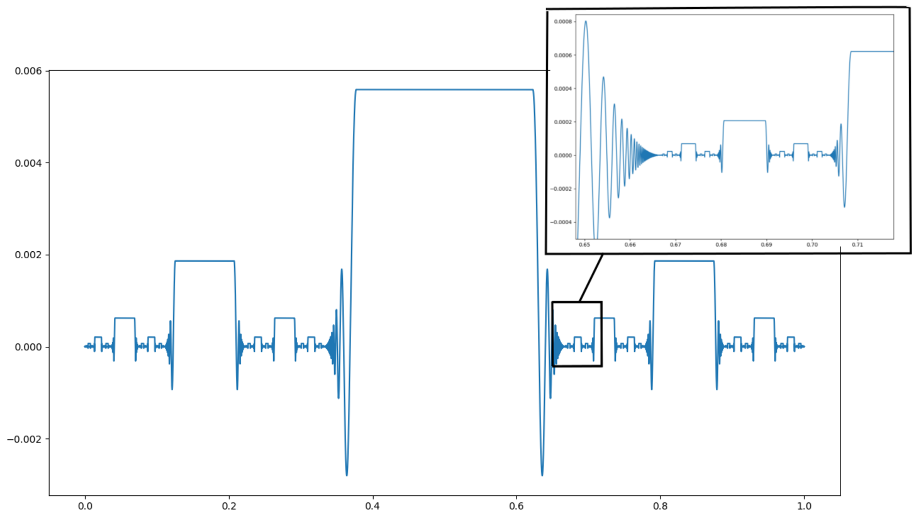



Figura 5.9: Función de Volterra

## 5.11 Integral de Riemann y pasos al límite

# 6 Medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$

## 6.1 Longitud de intervalos

## 6.2 Contexto

Medida exterior
Volúmen de rectángulos Sea $R = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^d$ un rectángulo cerrado

$$|R| := (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n).$$

Medida exterior, definición Sea $E \subset \mathbb{R}^d$,

$$\boxed{m_*(E) := \text{ínf} \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j| \,\middle|\, E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j, Q_j \text{ cubo cerrado }, j \in \mathbb{N} \right\}}$$

Medida exterior, propiedades
Propiedades

**Monotonía:** $E_1 \subset E_2 \Rightarrow m_*(E_1) \leq m_*(E_2)$

**$\sigma$-subaditividad:** $E_j \in \mathbb{R}^d$, $j = 1, 2, \ldots$, $\Rightarrow \boxed{m_* \left( \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m_*(E_j)}$

**$\sigma$-aditividad:** *No se pudo demostrar la igualdad cuando los $E_j$ son mutuamente disjuntos*

**Regularidad:** $m_*(E) = \text{ínf}\{m_*(G) | G \text{ es abierto } G \supset E\}$.

Conjuntos medibles
Definición $E \subset \mathbb{R}^d$ se llama *medible Lebesgue* si para todo $\varepsilon > 0$ existe $G \subset \mathbb{R}^d$ abierto, $G \supset E$ tal que

$$\boxed{m_*(G - E) < \varepsilon}.$$

Si $E$ es medible

$$m(E) := m_*(E).$$

Conjuntos medibles, propiedades
Propiedades

1. Los conjuntos abiertos son medibles
2. Los conjuntos nulos ($m_*(Z) = 0$) son medibles
3. Las uniones e intersecciones numerables y las diferencias de conjuntos medibles resultan en conjuntos medibles.
4. **$\sigma$-aditividad.** $E_j \in \mathbb{R}^d$, $j = 1, 2, \ldots$, son medibles y $E_j \cap E_i = \varnothing$, $j \neq i$,

   $\Rightarrow \boxed{m \left( \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \right) = \sum_{j=1}^{\infty} m(E_j)}$

Problema Problema Podemos describir un conjunto medible como una estructura integrada por partes? Idealmente estas partes deberían ser más familiares y fáciles de caracterizar.

### 6.2.1 Aproximación

Aproximación por "estructuras" específicas Teorema (Aproximación de conjuntos medibles) Si $E$ es medible Lebesgue y $\varepsilon$ es cualquier número real positivo:

1. **Abiertos por exceso.** Existe un abierto $G$ con $E \subset G$ y $m(G - E) < \varepsilon$.
2. **Cerrados por defecto.** Existe un cerrado $F$ con $F \subset E$ y $m(E - F) < \varepsilon$.
3. **Compacto por defecto.** Si $m(E) < \infty$, existe un compacto $K$ con $E \supset K$ y $m(E - K) < \varepsilon$.
4. **Elementales** Si $m(E) < \infty$, existe una unión finita de cubos cerrados $K = \bigcup_{j=1}^{N} Q_j$ tal que $m(E \triangle K) < \varepsilon$.

Demostración Teorema Aproximación 1) Definición de conjunto medible.
2) Aplicando 1), existe un abierto $G$ con $G \supset E^c$ y

$$\varepsilon > m(G - E^c) = m(E \cap G) = m(E - G^c).$$

Debemos tomar $F = G^c$, que es cerrado y $F \subset E$.
3) Por 2) Sea $F$ cerrado que aproxima a $E$ por defecto con error a lo sumo $\varepsilon$:

$$m(E - F) < \varepsilon.$$

Sea $K_n$, $n = 1, \ldots$,su colección favorita de compactos con

$$K_1 \subset K_2 \subset \cdots \quad \text{y} \quad \mathbb{R}^d = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n.$$

Mi favorito: $K_n := \{x : |x| \leq n\}$.
Demostración Teorema Aproximación 3) (continuación) Entonces $F_n := F \cap K_n$ es compacto y

$$E - F_1 \supset E - F_2 \supset \cdots \quad \text{y} \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} (E - F_n) = E - F.$$

Como $m(E - F_1) \leq m(E) < \infty$, el teorema de convergencia monótona de conjuntos

$$\lim_{n\to\infty} m(E - F_n) = m(E - F) < \varepsilon.$$

Luego existe un $n$ suficientemente grande para que

$$m(E - F_n) < \varepsilon.$$

Demostración Teorema Aproximación 4) Sean $Q_j$, $j = 1, 2, \ldots$, cubos con

$$E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j, \quad \sum_{j=1}^{\infty} m(Q_j) < m(E) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como $m(E) < \infty$ la serie converge $\Rightarrow$ existe $N > 0$ con

$$\sum_{j=N+1}^{\infty} m(Q_j) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sea el cerrado

$$F = \bigcup_{j=1}^{N} Q_j$$

Demostración Teorema Aproximación
Entonces

$$\begin{aligned} m(E \triangle F) &= m(E-F) + m(F-E) \\ &\leq m\left(\bigcup_{j=N+1}^{\infty} Q_j\right) + m\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j - E\right) \\ &\leq \sum_{j=N+1}^{\infty} m(Q_j) + \sum_{j=1}^{\infty} m(Q_j) - m(E) \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

### 6.2.2 Conjuntos $G_\delta$ y $F_\sigma$

Definición $G_\delta$ y $F_\sigma$ Hasta el momento no hemos expresado un conjunto medible como una estructura, sino que lo hemos aproximado, en un cierto sentido, por conjuntos con estructuras determinadas. Para lograr el objetivo necesitamos introducir nuevos tipos de conjuntos.

Definición $G_\delta$ y $F_\sigma$ Un conjunto que es una intersección numerable de abiertos se denomina de clase $G_\delta$. El complemento de un conjunto de clase $G_\delta$ se denomina de clase $F_\sigma$.

**Observación:** $F$ es $F_\sigma$ si es unión numerable de conjunto cerrados.

Ejemplos $G_\delta$ y $F_\sigma$ **Ejemplo 6.2.1** Obviamente todo abierto es $G_\delta$. **Ejemplo 6.2.2** Si $-\infty < a < b < \infty$, $[a,b] = \bigcap_{n=1}^{\infty}(a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n})$. Así todo intervalo compacto es $G_\delta$. **Ejemplo 6.2.3** $\mathbb{Q}$ es $F_\sigma$ pues es la unión numerable de conjuntos unitarios, que son cerrados. Por consiguiente, los irracionales $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ es $G_\delta$. **Ejemplo 6.2.4** $\mathbb{Q}$ no es $G_\delta$. Este hecho no es sencillo de demostrar y requiere un teorema profundo

Ejemplos $G_\delta$ y $F_\sigma$

Teorema de Baire Si $(X,d)$ es un espacio métrico completo y $U_n \subset X$, $n = 1, 2, \ldots$, son abiertos y densos de $X$, entonces $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ es denso.

Si $\mathbb{Q}$ fuese $G_\delta$ y $U_n$ fuesen abiertos con $\mathbb{Q} = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$, entonces cada $U_n$ es denso. Si ahora $\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, \ldots\}$ y ponemos $W_n = \mathbb{R} - \{q_n\}$, entonces cada $W_n$ es abierto y denso. Si ponemos $\{V_n\}_{n=1}^{\infty} = \{U_n\}_{n=1}^{\infty} \cup \{W_n\}_{n=1}^{\infty}$, entonces $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una colección de abiertos densos de $\mathbb{R}$ que contradice el teorema de Baire pues

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} W_n = \mathbb{Q} \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) = \varnothing.$$

Teorema estructura conjuntos medibles
Teorema Sea $E \subset \mathbb{R}^d$. Son equivalentes

1. $E$ es medible,
2. Existe $H \subset \mathbb{R}^d$ de clase $G_\delta$ y $Z$ nulo tal que $E = H - Z$.
3. Existe $F \subset \mathbb{R}^d$ de clase $F_\sigma$ y $Z$ nulo tal que $E = F \cup Z$.

Demostración teorema estructura conjuntos medibles
Claramente items 2 y 3 implican el 1.
1⇒ 2. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $G_n \supset E$ abiertos tales que

$$m(G_n - E) < \frac{1}{n}.$$

y sean

$$H = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \quad \text{y} \quad Z = H - E.$$

$H$ es $G_\delta$, $E \subset H$ y

$$m(Z) = m(H - E) \leq m(G_n - E) < \frac{1}{n}.$$

Como $n$ es arbitrario $m(Z) = 0$.

Demostración teorema estructura conjuntos medibles Restaría ver 1 $\Rightarrow$ 3. Si $E$ es medible, $E^c$ es medible y, por 1 $\Rightarrow$ 2,

$$E^c = H - Z, \quad m(Z) = 0.$$

Si $F = H^c$, tomando complementos tenemos

$$E = F \cup Z.$$

□

### 6.2.3 Conjuntos de Borel

$\sigma$-álgebras

Definición Una colección de subconjuntos de un conjunto dado $X$, $\mathscr{A} \subset \mathcal{P}(X)$ se denomina $\sigma$-algebra si

1. $\varnothing \in \mathscr{A}$,
2. $A \in \mathscr{A} \Rightarrow A^c \in \mathscr{A}$,
3. $A_i \in \mathscr{A}$, $i = 1, 2, \ldots$, $\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{A}$

**Observaciones:** Si $\mathscr{A}$ es una $\sigma$-algebra

1. $X = \varnothing^c \in \mathscr{A}$,
2. $A_i \in \mathscr{A}$, $i = 1, 2, \ldots$, $\Rightarrow A_i^c \in \mathscr{A}$, $i = 1, 2, \ldots$, $\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c \in \mathscr{A} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{A}$

$\sigma$-álgebras, ejemplos **Ejemplo 6.2.5**

1. Triviales $\mathscr{A} = \mathcal{P}(X)$ y $\mathscr{A} = \{\varnothing, X\}$.
2. El conjunto $\mathscr{M} = \mathscr{M}(\mathbb{R}^d)$ de todos los subconjuntos medibles Lebesgue de $\mathbb{R}^d$
3. El conjunto de los abiertos, cerrados, las clases $G_\delta$ y $F_\sigma$ no forman $\sigma$-algebras. Es decir, no tenemos clases caracterizadas por propiedades topológicas que sean ejemplos de $\sigma$-algebras Cómo remediarlo?

$\sigma$-álgebra generada

Ejercicio Si $\{\mathscr{A}_i\}_{i \in I}$ es una colección de $\sigma$-álgebras (reparar en que $I$ es arbitrario) del conjunto $X$, entonces $\bigcap_{i \in I} \mathscr{A}_i$ es $\sigma$-álgebra.

Definicion Dado un subconjunto $\mathcal{C}$ de subconjuntos de $X$, $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$, definimos la $\sigma$-álgebra generada por $\mathcal{C}$ como

$$\langle \mathcal{C} \rangle = \bigcap \{\mathscr{A} | \mathcal{C} \subset \mathscr{A} \text{ y } \mathscr{A} \text{ es } \sigma\text{-algebra}\}.$$

Ejercicio $\langle \mathcal{C} \rangle$ es la menor $\sigma$-algebra que contiene a $\mathcal{C}$.

Definición Definición Sea $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\mathbb{R}^d)$ la colección de todos los conjuntos abiertos de $\mathbb{R}^d$. Definimos la $\sigma$-algebra de Borel $\mathscr{B} = \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ como $\mathscr{B} = \langle \mathcal{G} \rangle$

Ejercicio Demostrar que la $\sigma$-algebra $\mathscr{B}$ es también generada por:

1. Los subconjuntos cerrados de $\mathbb{R}^d$.

2. Los subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^d$.
3. Las bolas abiertas (o cerradas) de $\mathbb{R}^d$.
4. Los cubos de $\mathbb{R}^d$.

Observaciones

1. Claramente $G_\delta, F_\sigma \subset \mathscr{B}$.
2. La definición de conjuntos de Borel es notable, pues definimos los conjuntos de Borel, definiendo la estructura que los contiene. Esto se manifiesta cuando se intenta demostrar alguna propiedad de los borelianos.

**Ejemplo 6.2.6** Si $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ es continua y $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ entonces $f^{-1}(B) \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$.
**Dem.** Definimos

$$\mathscr{A} = \{A \subset \mathbb{R} | f^{-1}(A) \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)\}.$$

**Ejercicio 6.2.1** $\mathscr{A}$ es una $\sigma$-algebra que contiene a los abiertos.

Entonces $\mathscr{B}(\mathbb{R}) \subset \mathscr{A}$, que equivale a lo que queremos demostrar.
Borelianos y medibles
Corolario Sea $E \subset \mathbb{R}^d$. Son equivalentes

1. $E$ es medible,
2. Existe $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ y $Z$ nulo tal que $E = B \cup Z$.

### 6.2.4 Preguntas

Pregunta 1 ¿$\boxed{\mathscr{B} = \mathscr{M}}$?
**Respuesta:** no.
Se justifica más adelante, depende de la construcción de un $A \subset \mathbb{R}$ con $A \notin \mathscr{M}$ y usa la función de Cantor.
Pregunta 2 Así como definimos los conjuntos $G_\delta$ y $F_\sigma$ podemos considerar

1. Uniones numerables de conjuntos de clase $G_\delta$: $G_{\delta\sigma}$,
2. Intersecciones numerables de conjuntos de clase $F_\sigma$: $F_{\sigma\delta}$,
3. $\vdots$

¿Podríamos continuando este proceso construir $\mathscr{B}$?
**Respuesta:** Si, con muchas sutilesas lógicas. Se necesita el concepto de ordinal e inducción transfinita. Estamos en el terreno de la teoría descriptiva de conjuntos.

# 7 Medida de Lebesgue - versión 2022

COMPLETAR CON DATA DE LA VERSION PDF DE LAS NOTAS DE CLASES QUE TIENEN AGREGADOS EN COLORES!!!

## 7.1 Preliminares

Sea $\mathbb{R}^d$ el espacio euclídeo de dimensión $d$.
Si $x \in \mathbb{R}^d$, entonces $x = (x_1, x_2, \ldots, x_d)$ siendo $x_i \in \mathbb{R}$.
La *norma* de $x$ se define como $|x| = \left(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_d^2\right)^{1/2}$ y la *distancia* de $x$ a $y$ se calcula mediante $d(x, y) = |x - y|$.
Si $E \subset \mathbb{R}^d$, el *complemento* de $E$ es $E^C = \{x : x \notin E\}$.
Si $E, F \subset \mathbb{R}^d$, se tiene que

$$E - F = E \cap F^C = \{x : x \in E \wedge x \notin F\}$$

y

$$d(E, F) = \text{ínf}\,\{d(x, y) : x \in E, y \in F\}\,.$$

Si $E \subset \mathbb{R}^d$, entonces $\text{diam}(E) = \sup\{d(x, y) : x, y \in E\}$.
Ahora, la *bola abierta* de centro $x$ y radio $r$ está dada por

$$B_r(x) = \left\{y \in \mathbb{R}^d : d(x, y) < r\right\}.$$

Si $E \subset\in \mathbb{R}^d$ se dice *abierto* si $\forall x \in E, \exists r > 0 :\ B(x, r) \subset E$.
Y $F \subset \mathbb{R}^d$ se denomina *cerrado* si y sólo si $F^C$ es abierto.

- Si $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ son abiertos $\Rightarrow \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda$ es abierto.
- Si $\Lambda$ es finito $\Rightarrow \bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda$ es abierto.
- Si los conjuntos $E_\lambda$ son cerrados, se obtienen conjuntos cerrados *intercambiando* uniones por intersecciones.

Si $E \subset \mathbb{R}^d$ se dice *acotado* si $E \subset B$ para alguna bola $B$.
Y, $E \subset \mathbb{R}^d$ es *compacto* si es cerrado y acotado.

**Teorema 7.1.1** [Cubrimiento Heine-Borel] Si $E \subset \mathbb{R}^d$ es compacto y $E \subset \bigcup\limits_{\alpha} \mathcal{O}_\alpha$ con $\mathcal{O}_\alpha$ abiertos $\forall \alpha$, entonces existen finitos $\alpha\ :\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$, tal que $E \subset \bigcup\limits_{i=1}^{N} \mathcal{O}_{\alpha_i}$.

- $x \in \mathbb{R}^d$ es un *punto límite* ó *punto de clausura* de $E \subset \mathbb{R}^d$ si $\forall r > 0,\ B(x, r) \cap E \neq \varnothing$.
- $x \in \mathbb{R}^d$ es un *punto aislado* de $E \subset \mathbb{R}^d$ si $\exists r > 0$ tal que $B(x, r) \cap E = \{x\}$.
- $x \in \mathbb{R}^d$ es *interior* a $E$ si $\exists r > 0$ tal que $B(x, r) \subset E$.

Luego, se definen los siguientes conjuntos

- $E^\circ = \{x | x \text{ es interior a } E\}$.

- $\overline{E} = \{x | x$ es punto límite de $E\}$.
- $\partial E = \overline{E} - E^{\circ}$.

**Ejercicio 7.1.1**

1. $\overline{E}$ es cerrado;
2. $E$ es cerrado si y sólo su $E = \overline{E}$;
3. $E$ es abierto si sólo su $E = E^{\circ}$;
4. $\partial E = \partial E^{C}$;
5. $E^{\circ} = \overline{E^{C}}$.

Por último, un conjunto $E \subset \mathbb{R}^d$ se llama *perfecto* si no tiene puntos aislados.

## 7.2 Rectángulos y cubos

**Definición 7.2.1** $R \subset \mathbb{R}^d$ es un *rectángulo* si

$$R = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n],$$

donde $a_j \leq b_j$, para $j = 1, 2, \ldots, d$.

**Observacion 7.2.1** Por definición un rectángulo $R$ es cerrado y tiene lados paralelos a los ejes. Si

- $d = 1$, $R$ es un intervalo cerrado;
- $d = 2$, $R$ es un rectángulo cerrado con lados paralelos a los ejes;
- $d = 3$. $R$ es un paralelepípedo.

Si $R$ es rectángulo tal que la longitud de lado es $b_i - a_i$, $i = 1, \ldots, d$, entonces el *Volumen* de $R$ está dado por

$$|R| = (b_1 - a_1) \ldots (b_d - a_d).$$

- Un *rectángulo abierto* se define del modo natural.
- Un *cubo* es un rectángulo con todos los lados de la misma longitud $l$.
  Si $Q$ es un cubo con lados de longitud $l$, entonces $|Q| = l^d$.

Una familia de rectángulos $\{R_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ se dice *casi disjunta* si

$$R_{\lambda_1}^{\circ} \cap R_{\lambda_2}^{\circ} = \varnothing, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda.$$

Para $N > 0$, consideramos el conjunto

$$\frac{1}{N}\mathbb{Z} = \left\{ \frac{m}{N} : m \in \mathbb{Z} \right\}.$$

**AGREGAR DIBUJITO DE LOS VALORES DEL CONJUNTO.**
Sea $I$ un intervalo de $\mathbb{R}$ con longitud $l$. Queremos estimar

$$\# \left( I \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z} \right).$$

**Lema 7.2.1**

$$Nl - 1 \leq \#\left(I \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z}\right) \leq Nl + 1.$$

*Dem.*

Supongamos que $k = \#\left(I \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z}\right)$.

Si $k > 0$ y $a_1, \ldots, a_k \in I \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z}$ tales que $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$ y $a_1 = \frac{J}{N}, a_2 = \frac{J+1}{N}, \ldots, a_k = \frac{J+k-1}{N}$, con $I = [a, b]$.

Por un lado, se tiene que

$$a \leq \frac{J}{N} \leq \frac{J+k-1}{N} \leq b \Rightarrow \frac{k-1}{N} \leq b - a = l.$$

Por otro,

$$\frac{J-1}{N} < a \leq b < \frac{J+k}{N} \Rightarrow l = b - a < \frac{k+1}{N}.$$

$\square$

**Ejercicio 7.2.2** Probar el Lema 7.2.1 para el caso $k = 0$.

**Corolario 7.2.1** Si $I$ es un intervalo de longitud $l$, entonces

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\#\left(I \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z}\right) = l = |I|.$$

Si $R$ es un rectángulo de $\mathbb{R}^d$ con

$$R = \underbrace{[a_1, b_1]}_{I_1} \times \ldots \times \underbrace{[a_d, b_d]}_{I_d},$$

entonces

$$\#\left(R \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z}^d\right) = \#\left(I_1 \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z}\right) \ldots \#\left(I_d \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z}\right)$$

y por tanto

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^d}\#\left(R \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z}^d\right) = |R|.$$

Como

$$\#\left(R^\circ \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z}^d\right) \leq \#\left(R \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z}^d\right) \leq \#\left(R^\circ \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z}^d\right) + 2^d.$$

**EN LA HOJA 7B DE LAS NOTAS DE CLASE HAY UNA DEDUCCIÓN DEL $2^d$. AGREGAR!!!**

También tenemos que

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^d}\#\left(R^\circ \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z}^d\right) = |R|.$$

**Corolario 7.2.2** Si $R$ es un rectángulo y $R = \bigcup_{j=1}^{M} R_j$ con $\{R_j\}_{j=1}^{M}$ una familia casi disjunta de rectángulos, entonces

$$|R| = \sum_{j=1}^{M} |R_j|.$$

*Dem.* $\leq$)

$$\begin{aligned}
|R| &= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^d} \# \left( R \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z}^d \right) \\
&\leq \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^d} \sum_{j=1}^{M} \# \left( R_j \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z}^d \right) \\
&= \sum_{j=1}^{M} \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^d} \# \left( R_j \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z}^d \right) \\
&= \sum_{j=1}^{M} |R_j|.
\end{aligned}$$

$\geq$)

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{M} |R_j| &= \sum_{j=1}^{M} \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^d} \# \left( R_j^\circ \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z}^d \right) \\
&= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^d} \sum_{j=1}^{M} \# \left( R_j^\circ \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z}^d \right) \\
&= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^d} \# \left( \left( \bigcup_{j=1}^{M} R_j^\circ \right) \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z}^d \right) \\
&\leq |R|.
\end{aligned}$$

□

**Lema 7.2.2** Si $R$ es rectángulo y $R \subset \bigcup_{j=1}^{M} R_j$ donde $R_j$ son rectángulos, entonces

$$|R| \leq \sum_{j=1}^{M} |R_j|.$$

*Dem.* La prueba de este lema que como ejercicio para el lector. □

**Ejercicio 7.2.3** Demostrar el Lema 7.2.2.

**Teorema 7.2.2** Todo conjunto abierto $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}$ es unión numerable *única* de intervalos abiertos disjuntos.

*Dem.* Sea $x \in \mathcal{O}$ y definimos

$$I_x = \bigcup \{ I : \ I \text{ es intervalo abierto, } I \subset \mathcal{O}, x \in I \}.$$

1. $I_x$ es abierto.
2. $I_x$ es intervalo. En efecto, si $y, z \in I \Rightarrow \exists\, I_1, I_2$ intervalos tales que $I_1, I_2 \subset \mathcal{O}$, $x \in I_1 \cap I_2$, $y \in I_1$ y $z \in I_2$. Entonces $I_1 \cup I_2$ es intervalo e $I_1 \cup I_2 \in \mathcal{O}$. Luego $[y, z] \subset I_x$.
3. Si $I_x \cap I_y \neq \varnothing \Rightarrow I_x = I_y$. Ésto se obtiene a partir de que $I_x \cup I_y$ es intervalo.
4. Hay a lo sumo una cantidad numerable de intervalos disjuntos.
5. La descomposición en intervalos abiertos disjuntos es única.

□

**Ejercicio 7.2.4** Demostrar los apartados 4 y 5 de la prueba del Teorema 7.2.2.

La generalización a $\mathbb{R}^d$ con $d > 1$ presenta algunas dificultades.

**Teorema 7.2.3** Todo conjunto abierto de $\mathbb{R}^d$ puede escribirse como unión numerable de cubos casi disjuntos.

*Dem.* Sea $\mathcal{O} \in \mathbb{R}^d$ abierto. Vamos a construir una familia $\mathcal{G}$ de cubos casi disjuntos con $\mathcal{O} = \bigcup_{Q \in \mathcal{G}} Q$.

Procedemos inductivamente en etapas,

Primera etapa. Consideremos la familia de cubos con vértices en $\mathbb{Z}^d$ que cubre $\mathbb{R}^d$. Todos aquellos cubos que quedan contenidos en $\mathcal{O}$ se agregan a $\mathcal{G}$. Los cubos que son disjuntos con $\mathcal{O}$ se tiran y los que tienen parte en $\mathcal{O}$ y en $\mathcal{O}^C$ se dejan como candidatos.

$k$-ésima etapa. Tomamos los candidatos de la etapa $k-1$, dividimos sus lados en $2$ y procedemos como en la primera etapa.

**AGREGAR DIBUJITOS!!!!**

La familia $\mathcal{G}$ es numerable y casi disjunta.

Sea $x \in \mathcal{O}$. Luego, $x$ pertenece a un cubo $Q$ de cada etapa $N$ cuyos lados miden $2^{-N}$. Si $N$ es suficientemente grande, se tiene $Q \subset \mathcal{O}$. Entonces, o bien, $Q$ es agregado a $\mathcal{G}$ en la etapa $N$ o un padre de $Q$ fue agregado en una etapa anterior. □

## 7.3 Expresiones s-ádicas

El objetivo de esta sección es representar números reales mediante series numéricas.

Sea $d = 2, 3, \ldots$.

Supongamos que $x \in [0, 1)$. Dividamos el intervalo $[0, 1]$ en $d$ partes iguales, o sea,

$$0 < \frac{1}{d} < \frac{2}{d} < \ldots < \frac{d-1}{d} < 1.$$

Ahora, existe un único $j$ tal que

$$x \in \left[\frac{j}{d}, \frac{j-1}{d}\right).$$

A ese valor de $j$ lo llamamos $a_1$. Y, observamos que

$$\left|x - \frac{a_1}{d}\right| < \frac{1}{d}.$$

A continuación, dividimos $\left[\frac{a_1}{j}, \frac{a_1+1}{j}\right)$ en $d$ partes iguales y obtenemos

$$\frac{a_1}{d} < \frac{a_1}{d} + \frac{1}{d^2} < \frac{a_1}{d} + \frac{2}{d^2} < \ldots < \frac{a_1}{d} + \frac{d-1}{d^2} < \frac{a_1+1}{d}.$$

Nuevamente, hay un único $j$ tal que

$$x \in \left[\frac{a_1}{d} + \frac{j}{d^2}, \frac{a_1}{d} + \frac{j+1}{d^2}\right).$$

Ahora, llamamos $a_2$ a ese valor de $j$. Y notamos que

$$\left|x - \left(\frac{a_1}{d} + \frac{a_2}{d^2}\right)\right| < \frac{1}{d^2}.$$

Continuando con este procedimiento, obtenemos una sucesión $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tal que

$$\left|x - \left(\frac{a_1}{d} + \frac{a_2}{d^2} + \ldots + \frac{a_n}{d^n}\right)\right| < \frac{1}{d^n}.$$

De este modo, habremos encontrado $a_j \in \{0, 1, 2, \ldots, d-1\}$ tales que

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{d^j}. \tag{7.1}$$

El desarrollo dado por (7.1) se denomina *expresión d-ádica* de $x$.

Cuando $d = 10$, (7.1) se llama *expresión decimal*.

Mientras que si $d = 2$, (7.1) se denomina *expresión binaria*.

La expresión d-ádica (7.1) suele escribirse

$$x = (0.a_1a_2\ldots)_d\,.$$

Lamentablemente, la expresión d-ádica de $x$ no es única. El problema se presenta con las sucesiones que toman el valor $d-1$ de un momento en adelante, pues

$$\sum_{j=k}^{\infty} \frac{d-1}{d^j} = \frac{d-1}{d^k} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{d^j} = \frac{d-1}{d^k} \frac{1}{1-\frac{1}{d}} = \frac{1}{d^{k-1}}.$$

Luego

$$(0.a_1a_2\ldots a_{k-1}(d-1)(d-1)\ldots)_d = (0.a_1a_2\ldots(a_{k-1}+1)0\ldots)_d\,.$$

Si $a_{k-1}+1 = d$, entonces

$$(0.a_1a_2\ldots(a_{k-1}+1)\ldots)_d = (0.a_1a_2\ldots(a_{k-2}+1)0\ldots)_d\,.$$

Si $a_{k-2}+1 = d$, se procede de la misma manera.

### 7.3.1 Conjunto de Cantor

Sea $\mathscr{C}_0 = [0,1]$. Entonces

$$\begin{aligned}
\mathscr{C}_1 &= [0,1] - \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \\
\mathscr{C}_2 &= \mathscr{C}_1 - \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right) - \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right) \\
&\vdots \\
\mathscr{C} &= \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathscr{C}_k.
\end{aligned}$$

**Proposición 7.3.1** $\mathscr{C}$ es compacto, totalmente disconexo y perfecto. Además, $\#\mathscr{C} = \#\mathbb{R}$.

**Ejercicio 7.3.5** Demostrar la Proposición 7.3.1.

## 7.4 Medida exterior

**Definición 7.4.2** Dado $E \subset \mathbb{R}^d$, su *medida exterior* está dada por

$$m_*(E) = \text{ínf} \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j|,$$

donde el ínfimo se toma obre todos los cubrimientos $E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$ de $E$ por medio de cubos.

Claramente $0 \leq m_*(E) \leq +\infty$

**Observacion 7.4.2**

1. Es importante permitir uniones infinitas.
2. Se pueden usar cubrimientos por rectángulos o bolas.

**Ejemplo 7.4.1** La medida exterior de un punto es cero.

**Ejemplo 7.4.2** Si $Q$ es un cubo, entonces

$$m_*(Q) = |Q|.$$

$\leq$) Como $Q$ se cubre a sí mismo, se tiene que $m_*(Q) \leq |Q|$.

$\geq$) Sea $\{Q_j\}_{j=1}^{\infty}$ un cubrimiento por cubos de $Q$. Construyamos cubos abiertos $S_j \supset Q_j$ tal que

$$|S_j| \leq (1+\varepsilon)|Q_j|.$$

Como $Q$ es compacto, hay finitos $S_j$ que cubren $Q$, entonces

$$Q \subset \bigcup_{j=1}^{N} S_j \subset \bigcup_{j=1}^{N} \overline{S_j}.$$

Por el Lema 7.2.2, tenemos

$$\begin{aligned} |Q| \leq \sum_{j=1}^{N} |\overline{S_j}| &= \sum_{j=1}^{N} |S_j| \\ &\leq (1+\varepsilon) \sum_{j=1}^{N} |Q_j| \\ &\leq (1+\varepsilon) \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j|. \end{aligned}$$

Como $\varepsilon$ es arbitrario, obtenemos

$$|Q| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j|.$$

**Ejemplo 7.4.3** Si $R \subset \mathbb{R}^d$ es un rectángulo, entonces

$$m_*(R) = |R|.$$

$\geq$) Como en el Ejemplo 7.4.2, se tiene que $|R| \leq m_*(R)$.
$\leq$) Sea $R = I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_d$. Entonces

$$\begin{aligned} |R| &= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^d} \# \left( R \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z}^d \right) \\ &= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \# \left( I_1 \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z} \right) \ldots \left( I_d \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z} \right). \end{aligned}$$

Si $I_j \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z} = \left\{ \frac{\alpha_j}{N}, \frac{\alpha_j+1}{N}, \ldots, \frac{\alpha_j+\beta_j-1}{N} \right\}$, entonces

$$\# \left( I_j \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z} \right) = \beta_j.$$

Sea $\mathscr{G}_N$ la familia de rectángulos que generan

$$\frac{\alpha_j - 1}{N}, \frac{\alpha_j}{N}, \ldots, \frac{\alpha_j + \beta_j}{N}.$$

Hay $(\beta_1 + 2), \ldots, (\beta_d + 2)$ de ellos y miden $\frac{1}{N^d}$. Luego,

$$|R| = \lim_{N\to\infty} \frac{\beta_1}{N} \ldots \frac{\beta_d}{N}.$$

Pero

$$\begin{aligned} m_*(R) &\leq \lim_{N\to\infty} \sum_{Q\in\mathscr{G}_N} |Q| \\ &= \lim_{N\to\infty} \frac{(\beta_1+2)\ldots(\beta_N+2)}{N^d} \\ &= \lim_{N\to\infty} \left\{ \frac{\beta_1\beta_2\ldots\beta_d}{N^d} \right. \\ &+ \frac{2}{N^d}(\beta_2\ldots\beta_d + \beta_1\beta_3\ldots\beta_d + \ldots + \beta_1\beta_2\ldots\beta_{d-1}) \\ &+ \left. \frac{4}{N^d}(\beta_3\ldots\beta_d + \ldots + \beta_1\ldots\beta_{d-2}) \right\} \\ &= |R| \end{aligned}$$

**Ejemplo 7.4.4** $m_*(\mathbb{R}^d) = +\infty$.
Un cubrimiento de $\mathbb{R}^d$ es un cubrimiento de cualquier cubo $Q$ de modo que

$$|Q| = m_*(Q) \leq m_*(\mathbb{R}^d).$$

Podemos encontrar un cubo $Q_k$ de $\mathbb{R}^d$ tal que $|Q_k| \xrightarrow[k\to\infty]{} +\infty$.
Por ejemplo, $Q_k = [0,k]^d = \underbrace{[0,k] \times [0,k] \times \ldots \times [0,k]}_{d \text{ intervalos de } \mathbb{R}}$ con $|Q_k| = k^d$.

**Ejemplo 7.4.5** Si $\mathscr{C}$ es el conjunto de Cantor, entonces $m_*(\mathscr{C}) = 0$. *Dem.* Se tiene que $\mathscr{C} \subset \mathscr{C}_k$ donde $\mathscr{C}_k$ es una unión de $2^k$ intervalos de longitud $\frac{1}{3^k}$. Luego,

$$m_*(\mathscr{C}) \leq \left(\frac{2}{3}\right)^k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

□

$\mathscr{C}$ es un conjunto *infinito no numerable* de $\mathbb{R}$ con medida exterior nula.

**Ejemplo 7.4.6** $m_*(\mathbb{Q}) = 0$. **LA JUSTIFICACION ESTA EN EL PDF!!!**

### 7.4.1 Propiedades de la medida exterior

**Observacion 7.4.3** Sea $E \subset \mathbb{R}^d$ tal que $m_*(E) < +\infty$. Entonces, dado $\varepsilon > 0$, existe un cubrimiento por cubos tal que $E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$ y

$$\sum_{j=1}^{\infty} m_*(Q_j) < m_*(E) + \varepsilon.$$

Si $m_*(E) = +\infty$, se tiene

$$\sum_{j=1}^{\infty} m_*(Q_j) \leq m_*(E) + \varepsilon.$$

**Observacion 7.4.4** [Monotonía] Si $E_1 \subset E_2$, entonces $m_*(E_1) \leq m_*(E_2)$.
El resultado se obtiene a partir de que

$$\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j| : E_2 \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j \right\} \subset \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j| : E_1 \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j \right\}.$$

**Observacion 7.4.5** [Numerable $\sigma$-sub-aditividad] Si $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$, entonces

$$m_*(E) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m_*(E_j).$$

*Dem.* Podemos suponer que $m_*(E_j) < \infty$.
Sean $\{Q_{j,k}\}_{k=1}^{\infty}$ las familias de cubos tales que

$$\sum_{k=1}^{\infty} |Q_{jk}| < m_*(E_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}.$$

Luego $\{Q_{jk}\}_{j,k=1}^{\infty}$ es un cubrimiento por cubos de $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ y por ende de $E$. Luego,

$$m_*(E) \leq \sum_{j,k=1}^{\infty} |Q_{jk}| = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |Q_{jk}| \leq \sum_{j=1}^{\infty} m_*(E_j) + \varepsilon.$$

□

Recordar que: si $\alpha_{jk} \geq 0$ y $\sum_{j,k=1}^{\infty} \alpha_{jk} < \infty$, entonces

$$\sum_{j,k=1}^{\infty} \alpha_{jk} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{jk}.$$

**Observacion 7.4.6** Si $R \subset \mathbb{R}^d$, entonces

$$m_*(E) = \text{ínf}\{m_*(\mathcal{O}) : \mathcal{O} \supset E \text{ y } \mathcal{O} \text{ abierto}\}.$$

*Dem.* $\leq$) Sale a partir de la monotonía pues $E \subset \mathscr{O}$ implica $m_*(E) \leq m_*(\mathscr{O})$.

$\geq$) Sea $\varepsilon > 0$. Luego, existen cubos $Q_j$ tales que $E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$ y

$$\sum_{j=1}^{\infty} m_*(Q_j) < m_*(E) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sean $\widetilde{Q}_j$ cubos abiertos tales que $Q_j \subset \widetilde{Q}_j$ y

$$m_*(Q_j) \leq m_*(\widetilde{Q}_j) < m_*(Q_j) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Entonces $\mathcal{O} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \widetilde{Q}_j$ es abierto y

$$\begin{aligned} m_*(\mathscr{O}) &\leq \sum_{j=1}^{\infty} m_*(\widetilde{Q}_j) \\ &< \sum_{j=1}^{\infty} m_*(Q_j) + \frac{\varepsilon}{2} \\ &< m_*(E) + \varepsilon. \end{aligned}$$

$\square$

**Observacion 7.4.7** Si $E = E_1 \cup E_2$ con $d(E_1, E_2) > 0$, entonces

$$m_*(E) = m_*(E_1) + m_*(E_2).$$

*Dem.* $\leq$) Inmediata a partir de la Observación 7.4.5.

$\geq$) Si $m_*(E) = \infty$, la desigualdad es trivial.

Supongamos que $m_*(E) < \infty$.

Sea $0 < \delta < d(E_1, E_2)$ y sea $\varepsilon > 0$. Consideremos un cubrimiento de $E$ tal que

$$E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j \ \text{ y } \ \sum_{j=1}^{\infty} m_*(Q_j) < m_*(E) + \varepsilon.$$

Podemos suponer que diam$(Q_j) < \delta$, porque de no presentarse el caso, dividimos en más cubos hasta lograr el diámetro requerido.

Entonces, cada cubo $Q_j$ puede intersecar a sólo uno de los conjuntos $E_1$ ó $E_2$.

Sean

$$J_1 = \{j | Q_j \cap E_1 \neq \varnothing\}$$

y

$$J_2 = \mathbb{N} - J_1.$$

Entonces

$$E_1 \subset \bigcup_{j \in J_1} Q_j \ \text{ y } \ E_2 \subset \bigcup_{j \in J_2} Q_j.$$

Luego, obtenemos

$$m_*(E) + \varepsilon > \sum_{j=1}^{\infty} m_*(Q_j) = \sum_{j \in J_1} m_*(Q_j) + \sum_{j \in J_2} m_*(Q_j) \geq m_*(E_1) + m_*(E_2).$$

$\square$

**Observacion 7.4.8** Si $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$ con los $Q_j$ casi disjuntos, entonces

$$m_*(E) = \sum_{j=1}^{\infty} m_*(Q_j).$$

*Dem.* $\leq$) Inmediata a partir de la Observación 7.4.5.

$\geq$) Sea $\varepsilon > 0$ y sean $\widetilde{Q}_j \subset Q_j^\circ$ cubos cerrados tales que

$$m_*(\widetilde{Q}_j) > m_*(Q_j^\circ) - \frac{\varepsilon}{2^j}.$$

Entonces $d(\widetilde{Q}_{j_1}, \widetilde{Q}_{j_2}) > 0$. Luego,

$$m_*(E) = m_*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j\right) \geq m_*\left(\bigcup_{j=1}^{N} Q_j\right) \geq m_*\left(\bigcup_{j=1}^{N} \widetilde{Q}_j\right) = \sum_{j=1}^{N} m_*(\widetilde{Q}_j),$$

a partir de lo cual tenemos

$$m_*(E) \geq \lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{N} m_*(\widetilde{Q}_j) = \sum_{j=1}^{\infty} m_*(\widetilde{Q}_j) \geq \sum_{j=1}^{\infty}\left(m_*(Q_j^\circ) - \frac{\varepsilon}{2^j}\right) = \sum_{j=1}^{\infty} m_*(Q_j) - \varepsilon.$$

La desigualdad buscada se consigue haciendo $\varepsilon \to 0$. $\square$

La demostración de la Observación 7.4.8 se aplica a los conjuntos abiertos pues si $\mathcal{O}$ es abierto, entonces

$$\mathcal{O} = \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j,$$

donde los cubos $Q_j$ son casi disjuntos.

## 7.5 Conjuntos medibles y medida de Lebesgue

**Definición 7.5.3** Un conjunto $E \subset \mathbb{R}^d$ se llama medible si $\forall \varepsilon > 0$ existe un abierto $\mathcal{O} \supset E$ con

$$m_*(\mathcal{O} - E) < \varepsilon.$$

Si $E$ es medible, se define $m(E) := m_*(E)$.

**Proposición 7.5.2** Si $\mathcal{O}$ es abierto, entonces $\mathcal{O}$ es medible.

**Proposición 7.5.3**

1. Si $m_*(E) = 0$, entonces $E$ es medible.
2. Si $F \subset E$ y $m_*(E) = 0$, entonces $F$ es medible.

*Dem.*

1. Por la Observación 7.4.6, dado $\varepsilon > 0$, existe $\mathcal{O}$ abierto tal que
$$m_*(\mathcal{O}) < m_*(E) + \varepsilon.$$
Ahora, como $\mathcal{O} - E \subset \mathcal{O}$ y $m_*(E) = 0$, entonces
$$m_*(\mathcal{O} - E) < \varepsilon.$$

2. A partir de que $F \subset E$ y $m_*(E) = 0$, se tiene que $m_*(F) = 0$. Luego, por 1, $F$ es medible.

□

**Observacion 7.5.9** $\mathscr{C}$ es medible.

**Proposición 7.5.4** Si $E_j$, $j = 1, 2, \dots,$ son medibles, entonces $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ es medible.

*Dem*. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\mathcal{O}_j$ abiertos tal que $\mathcal{O}_j \supset E_j$, para $j = 1, 2, \dots$ y
$$m_*(\mathcal{O}_j - E_j) < \frac{\varepsilon}{2^j}.$$

Ahora, $\bigcup_{j=1}^{\infty} \mathcal{O}_j$ es abierto y $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathcal{O}_j$.

Además,
$$\bigcup_{j=1}^{\infty} \mathcal{O}_j - \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} (\mathcal{O}_j - E_j).$$

Entonces
$$\begin{aligned} m_*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} \mathcal{O}_j - \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j)\right) &\leq m_*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} (\mathcal{O}_j - E_j)\right) \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} m_*(\mathcal{O}_j - E_j) < \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^j} = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

**Ejercicio 7.5.6** Sea $(X, d)$ un espacio métrico. Si $E$ es compacto, $F$ cerrado y $E \cap F = \varnothing$, entonces $d(E, F) > 0$.

**Proposición 7.5.5** Los conjuntos cerrados son medibles.

*Dem*. En primer lugar, supongamos que $E$ es cerrado y acotado, entonces $m_*(E) < \infty$.

Sea $\varepsilon > 0$. Luego, existe un abierto $\mathcal{O}$ tal que $E \subset \mathcal{O}$ y
$$m_*(\mathcal{O}) < m_*(E) + \varepsilon.$$

A su vez, $\mathcal{O} - E$ es abierto y
$$\mathcal{O} - E = \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$$

siendo $Q_j$ cubos disjuntos.

El conjunto

$$K = \bigcup_{j=1}^{N} Q_j$$

es compacto para todo $N \in \{1, 2, \dots\}$ y $K \cap E = \varnothing$ con $E$ cerrado. Entonces, por el Ejercicio 7.5.6, $d(K, E) > 0$. Luego,

$$m_*(\mathcal{O}) \geq m_*(K \cup E) = m_*(K) + m_*(E) = \sum_{j=1}^{N} m_*(Q_j) + m_*(E),$$

de donde

$$\sum_{j=1}^{N} m_*(Q_j) \leq m_*(\mathcal{O}) - m_*(E) < \varepsilon.$$

Haciendo $\varepsilon \to 0$, conseguimos

$$\sum_{j=1}^{\infty} m_*(Q_j) \leq \varepsilon.$$

Por último,

$$m_*(\mathcal{O} - E) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m_*(Q_j) \leq \varepsilon.$$

Si $E$ no es acotado, construímos los conjuntos $E_k = E \cap \overline{B(0,k)}$ que son cerrados y acotados y, por lo demostrado en primer lugar, resultan medibles. Finalmente, por aplicación de la Proposición 7.5.4, $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ es medible, . $\square$

**Proposición 7.5.6** Si $E$ es medible y $F \subset E$ con $m_*(F) = 0$, entonces $E - F$ es medible.

*Dem.* Sean $\varepsilon > 0$ y $\mathcal{O}$ abierto con

$$m_*(\mathcal{O} - E) < \varepsilon.$$

Como

$$\mathcal{O} - (E - F) \subset (\mathcal{O} - E) \cup F,$$

por la monotonía de $m_*$ y la hipótesis sobre la medida de $F$, llegamos a

$$m_*\left(\mathcal{O} - (E - F)\right) \leq m_*(\mathcal{O} - E) + m_*(F) < \varepsilon.$$

$\square$

**Corolario 7.5.3** Si $E$ es medible y $m_*(E \Delta F) = 0$, entonces $F$ es medible.

*Dem.* La prueba se obtiene expresando al conjunto $F$ como unión de conjuntos medibles. A saber,

$$F = \underbrace{(F - E)}_{\text{medible}} \cup \left( \overbrace{E - \underbrace{(E - F)}_{\text{medible}}}^{\text{medible}} \right)$$

donde $F - E$ y $E - F$ son conjuntos de medida exterior nula y $E - (E - F)$ es medible por aplicación de la Proposición 7.5.6. $\square$

**Proposición 7.5.7** $E$ es medible, entonces $E^C$ es medible.

*Dem.* Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un conjunto abierto $\mathcal{O}_n \supset E$ y tal que

$$m_*(\mathcal{O}_n - E) < \frac{1}{n}.$$

Los conjuntos $\mathcal{O}_n^C$ son cerrados y por ende medibles.
Sea $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{O}_n^C$, entonces $S$ es medible y $S \subset E^C$ pues $\mathcal{O}_n^C \subset E^C \; \forall n \in \mathbb{N}$.

Además,

$$m_*(E^C - S) \leq m_*(\mathcal{O}_n - E) < \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Es así que, $m_*(E^c - S) = 0$. Luego, por la Proposición 7.5.6, $E^C$ es medible. □

**Proposición 7.5.8** Si los conjuntos $E_j$, para $j = 1, 2, \ldots,$ son medibles, entonces $\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j$ es medible.

*Dem.* Cada $E_j$ es medible, entonces $E_j^C$ es medible para cada $j = 1, 2, \ldots$. Luego $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j^C$ es medible y también lo es su complemento $\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j^C\right)^C$.

Por otra parte, a partir de las Leyes de De Morgan, se tiene la siguiente igualdad

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j = \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j^C\right)^C,$$

y por lo tanto, la intersección numerable de conjuntos medibles resulta medible. □

No consideraremos uniones ni intersecciones no numerables.

**Proposición 7.5.9** Si $E$ es medible, $\forall \varepsilon > 0$ existe un conjunto cerrado $F \subset E$ con

$$m_*(E - F) < \varepsilon.$$

*Dem.* $E^C$ es medible, entonces dado $\varepsilon > 0$ existe un abierto $\mathcal{O}$ tal que $E^C \subset \mathcal{O}$ y

$$m_*(\mathcal{O} - E^C) < \varepsilon.$$

A su vez, $\mathcal{O}^C$ es cerrado y $\mathcal{O}^C \subset E$. Y, como $\mathcal{O} - E^C = E - \mathcal{O}^C$, entonces

$$m_*(E - \mathcal{O}^C) < \varepsilon.$$

Basta tomar $F = \mathcal{O}^C$ para obtener el resultado propuesto. □

**Teorema 7.5.4** Si $E_j$, para $j = 1, 2, \ldots$ son conjuntos medibles y disjuntos, entonces

$$m(E) = \sum_{j=1}^{\infty} m(E_j).$$

*Dem.* $\leq$) Inmediata a partir de la $\sigma$-subaditividad de $m_*$.
$\geq$) Supongamos que cada $E_j$ es acotado y sea $F_j \subset E_j$ cerrado con

$$m_*(E_j - F_j) < \frac{\varepsilon}{2^j}.$$

A partir de la subaditividad de $m_*$ y que $E_j = (E_j - F_j) \cup F_j$, se deduce que

$$m_*(E_j) < m_*(F_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}.$$

Los conjuntos $F_j$ son compactos y disjuntos, entonces $d(E_j, F_k) > 0$ si $j \neq k$ y se tiene que

$$m\left(\bigcup_{j=1}^{N} F_j\right) = \sum_{j=1}^{N} m(F_j).$$

Luego,

$$m(E) \geq m\left(\bigcup_{j=1}^{N} F_j\right) = \sum_{j=1}^{N} m(F_j) \geq \sum_{j=1}^{N} m(E_j) - \varepsilon.$$

Haciendo $N \to \infty$ y como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, se consigue

$$\sum_{j=1}^{\infty} m(E_j) \leq m(E).$$

En el caso general, consideramos cubos $Q_j$ tales que $Q_j \subset Q_{j+1}$ y

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j.$$

Ahora, ponemos $E_{jk} = E_j \cap (Q_k - Q_{k+1})$ para $k \geq 2$. Los conjuntos $E_{jk}$ son acotados, medibles, disjuntos y permiten expresar

$$E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=2}^{\infty} E_{jk}.$$

Luego, aplicando el resultado obtenido para conjuntos acotados obtenemos

$$m(E) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=2}^{\infty} m(E_{jk}) = \sum_{j=1}^{\infty} m(E_j).$$

□

**Corolario 7.5.4** Si $F \subset E$ son medibles y $m(F) < \infty$, entonces

$$m(E - F) = m(E) - m(F).$$

**Definición 7.5.4** Si $E_j \subset \mathbb{R}^n$, $E_j \subset E_{j+1}$ y $E = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} E_j$, escribiremos $E_j \nearrow E$.

Si en cambio, $E_j \supset E_{j+1}$ y $E = \bigcap\limits_{j=1}^{\infty} E_j$, pondremos $E_j \searrow E$.

**Corolario 7.5.5** Sean $E_j$, para $j = 1, 2, \ldots$, conjuntos medibles en $\mathbb{R}^d$.

1. Si $E_j \nearrow E$, entonces $m(E) = \lim_{j\to\infty} m(E_j)$.
2. Si $E_j \searrow E$ y $m(E_j) < \infty$ para algún $j$, entonces $m(E) = \lim_{j\to\infty} m(E_j)$.

*Dem.*

1. Sean $G_1 = E_1,\ G_2 = E_2 - E_1$, ...
   Los conjuntos $G_j$ son medibles y mutuamente disjuntos. Además,
$$\bigcup_{j=1}^{N} G_j = E_N \quad \text{y} \quad \bigcup_{j=1}^{\infty} G_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j = E.$$
   Entonces,
$$\begin{aligned} m(E) = \sum_{j=1}^{\infty} m(G_j) &= \lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{N} m(G_j) \\ &= \lim_{N\to\infty} m\left(\bigcup_{j=1}^{N} G_j\right) = \lim_{N\to\infty} m(E_N). \end{aligned}$$
2. Asumamos que $m(E_1) < \infty$.
   Sean $G_j = E_1 - E_j$ para $j \geq 1$. Entonces $G_j \subset G_{j+1}$ y
$$\bigcup_{j=1}^{\infty} G_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_1 \cap E_j^C = E_1 \cap \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j^C = E_1 \cap \left(\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j\right)^C = E_1 - \bigcap_{j=1}^{\infty} E_j.$$
   Luego, por el item 1 y el Corolario 7.5.4, tenemos
$$m(E_1) - \lim_{j\to\infty} m(E_j) = \lim_{j\to\infty} m(G_j) = m\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} G_j\right) = m(E_1) - m\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j\right).$$
   Por último, como $m(E_1) < \infty$, llegamos a
$$\lim_{j\to\infty} m(E_j) = m\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j\right).$$

□

**Observacion 7.5.10** El item 2 del Corolario 7.5.5 es falso si se quita la hipótesis $m(E_j) < \infty$. Por ejemplo, si $E_j = (j, +\infty)$, con $j \in \mathbb{N}$.

**Teorema 7.5.5** Sea $E \subset \mathbb{R}^d$ medible. Entonces, dado $\varepsilon > 0$

1. existe $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ abierto tal que $m(\mathcal{O} - E) < \varepsilon$;
2. existe $F \subset \mathbb{R}^d$ cerrado tal que $m(E - F) < \varepsilon$;
3. si $m(E) < \infty$, existe $K \subset E$ compacto tal que $m(E - K) < \varepsilon$;

4. si $m(E) < \infty$, existen cubos $Q_j$, $j = 1, 2, \ldots$ tal que
$$m\left(E \Delta \bigcup_{j=1}^{N} Q_j\right) < \varepsilon.$$

*Dem.*

1. Definición 7.5.3.
2. Proposición 7.5.9.
3. Sea $F \subset E$ cerrado tal que $m(E - F) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.
   Sean $Q_n = [-n, n]^d$ cubos de $\mathbb{R}^d$. Entonces,
   $$Q_n \cap F \nearrow F \quad \text{y} \quad E - Q_n \cap F \searrow E - F.$$
   y tenemos
   $$\lim_{n\to\infty} m\left(E - Q_n \cap F\right) = m(E - F) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$
   Luego, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $m(E - Q_n \cap F) < \varepsilon$, siendo $Q_n \cap F$ compacto de $\mathbb{R}^d$.
4. Sean $Q_j$ cubos de $\mathbb{R}^d$ con
   $$E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j \quad \text{y} \quad \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j| < m(E) + \frac{\varepsilon}{2}.$$
   Como $m_*(E) < \infty$, la serie $\sum_{j=1}^{\infty} |Q_j|$ converge y por tanto existe $N \in \mathbb{N}$ tal que
   $$\sum_{N+1}^{\infty} |Q_j| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$
   Luego,
   $$\begin{aligned} m\left(E\Delta \bigcup_{j=1}^{N} Q_j\right) &\leq m\left(\bigcup_{j=N+1}^{\infty} Q_j\right) + m\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j - E\right) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j| - m(E) < \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Ahora, dado $h \in \mathbb{R}^d$, pondremos
$$T_h(x) = x + h \quad \text{y} \quad T_h(E) = E + h.$$
Y, si $\delta \in \mathbb{R}^+$, notaremos $\delta x = \delta . x$.

**Teorema 7.5.6** $E$ es medible si y sólo si $E + h$ y $\delta E$ son medibles. Además,

1. $m(E + h) = m(E)$;
2. $m(\delta E) = \delta^d m(E)$.

*Dem.* La prueba queda como ejercicio. □

**Ejercicio 7.5.7** Probar el Teorema 7.5.6.

## 7.6 $\sigma$-Álgebras

**Definición 7.6.5** Sea $X$ un conjunto.
Un conjunto $\mathscr{A}$ de subconjuntos de $X$, $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$, se llama una $\sigma$-álgebra si

1. $\varnothing \in \mathscr{A}$;
2. si $E_j \in \mathscr{A}$, para $j = 1, 2, \ldots$, entonces $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} E_j \in \mathscr{A}$;
3. si $E \in \mathscr{A}$ entonces $E^c \in \mathscr{A}$.

**Ejemplo 7.6.7**

1. $\mathscr{A} = \mathscr{P}(X)$ es $\sigma$-álgebra.
2. El conjunto de los conjuntos medibles $\mathscr{M}$ es una $\sigma$-álgebra.
3. $\mathscr{A} = \{E \subset \mathbb{R} |\ E$ es a lo sumo numerable ó $E^C$ es a lo sumo numerable$\}$ es $\sigma$-álgebra.

**Ejercicio 7.6.8** Probar que $\mathscr{A}$ definida en el item 3 del Ejemplo 7.6.7 es $\sigma$-álgebra.

Sea $I$ un conjunto de índices. Si $\mathscr{A}_i$, $i \in I$, son $\sigma$-álgebras de subconjuntos de $X$, entonces $\bigcap\limits_{i \in I} \mathscr{A}_i$ es $\sigma$-álgebra.

Dado $\mathscr{C} \subset \mathscr{P}(X)$, la *$\sigma$-álgebra generada* por $\mathscr{C}$ se define como

$$\sigma(\mathscr{C}) = \bigcap \{\mathscr{A} : \ \mathscr{A} \ \text{ es } \sigma \text{ álgebra }, \mathscr{C} \subset \mathscr{A}\}$$

Sea $\mathscr{G} = \{\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d : \mathcal{O}$ es abierto$\}$, se define la *$\sigma$- algebra de Borel* como

$$\sigma(\mathscr{G}) =: \mathscr{B}(\mathbb{R}^d).$$

Como el conjunto de los conjuntos medibles $\mathscr{M}$ es una $\sigma$-álgebra, entonces $\sigma(\mathscr{G}) \subset \mathscr{M}$. Pero, $\sigma(\mathscr{G}) \neq \mathscr{M}$.

Si $\mathcal{O}_n$, para $n = 1, 2, \ldots$ son abiertos, el conjunto $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{O}_n$ no es necesariamente abierto. Pero, sí ocurre que $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{O}_n \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$. A la clase de estos conjuntos se la llama $G_\delta$. O sea,

$$G_\delta = \left\{ G : \ G = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{O}_n, \ \mathcal{O}_n \text{ abiertos} \right\}.$$

De manera dual, se define la clase $F_\sigma$ por

$$F_\sigma = \left\{ F : \ F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n, \ F_n \text{ cerrados} \right\}.$$

Luego, $G_\delta, F_\sigma \subset \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$.

**Definición 7.6.6** Si $\mathscr{A}$ es $\sigma$-álgebra y $\mu : \mathscr{A} \to \mathbb{R}^+$ satisface

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j),$$

siendo $E_j$ conjuntos mutuamente disjuntos, entonces se dice que $\mu$ es una *medida*.
Además, se supone que $\mu(\varnothing) = 0$.

**Teorema 7.6.7** Son equivalentes

1. $E \subset \mathbb{R}^d$ es medible.
2. $E = G - Z$, con $G \in G_\delta$ y $m(Z) = 0$.
3. $E = F \cup Z$, con $F \in F_\sigma$ y $m(Z) = 0$.

*Dem.* 1.$\Rightarrow$ 2. Sean $\mathcal{O}_n$ abiertos tales que $E \subset \mathcal{O}_n$ y

$$m(\mathcal{O}_n - E) \leq \frac{1}{n}.$$

Luego, $G = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{O}_n \in G_\delta$, y si llamamos $Z = G - E$, se tiene que

$$m(Z) = m(G - E) \leq m(\mathcal{O}_n - E) \leq \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

2.$\Rightarrow$ 3. Si $E$ es medible, entonces $E^C$ es medible. Ahora bien, por el item 2., $E^C = G - Z$ con $G \in G_\delta$ y $m(Z) = 0$.

Supongamos que $G = \bigcap\limits_{j=1}^{\infty} \mathcal{O}_j$ con $\mathcal{O}_j$ abiertos. Luego,

$$E^C = \bigcap_{j=1}^{\infty} \mathcal{O}_j \cap Z^C;$$

tomando complemento miembro a miembro, obtenemos

$$E = \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathcal{O}_j^C \cup Z = F \cup Z,$$

siendo $F \in F_\sigma$ y $m(Z) = 0$.

3.$\Rightarrow$ 1. $F$ y $Z$ son conjuntos medibles, entonces $E$ es medible. $\square$

## 7.7 Conjuntos no medibles

Sea $E = [0, 1]$. Definimos una relación en $E$ mediante

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}.$$

$\sim$ es una relación de equivalencia.

Por el axioma de elección, formamos un conjunto $\mathcal{N}$ que se obtiene eligiendo un elemento de cada clase de equivalencia de la relación $\sim$.

Sea ahora
$$\mathbb{Q} \cap [-1, 1] = \{r_1, r_2, \ldots\}.$$
Si $(\mathcal{N} + r_1) \cap (\mathcal{N} + r_2) \neq \varnothing$, existen $x, y \in \mathcal{N}$ tal que $x + r_1 = y + r_2$. Entonces $x \sim y \Rightarrow x = y \Rightarrow r_1 = r_2$. Luego, $\mathcal{N} + r_k$ son mutuamente disjuntos.

Sea $a = m_*(\mathcal{N})$. Se tiene

$$E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{N} + r_k \subset [-1, 2].$$

Si $\mathcal{N}$ fuese medible, cada $\mathcal{N} + r_k$ también lo sería y

$$1 = m(E) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(\mathcal{N} + r_k) = a + a + \ldots \leq 3.$$

¡Absurdo! Puesto que $a + a + \ldots = +\infty$.

# 8 Funciones medibles

## 8.1 Introducción???

**Copiado de acuerdo al orden de las notas manuscritas...parece que falta algo para el contexto...**

**Definición 8.1.1** $f$ es medible si y sólo si $f^{-1}((a,\infty)) \in \mathscr{M}$.

**Teorema 8.1.1** Si $H$ es boreliano y $f$ es medible, entonces $f^{-1}(H)$ es medible.

*Dem.* Sea $\mathscr{M}' = \{H : f^{-1}(H) \text{ es medible}\}$.
$\mathscr{M}'$ es $\sigma$-álgebra y $\mathscr{I} \subset \mathscr{M}'$. Por lo tanto, $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{M}$. □

**Definición 8.1.2** Diremos que $H \subset \overline{R}$ es boreliano de la recta extendida si $H - \{-\infty,\infty\} \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$.

**Teorema 8.1.2** Si $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ es medible si y sólo si $f^{-1}(H) \in \mathscr{M}$ cada vez que $H$ es boreliano de $\overline{\mathbb{R}}$.

*Dem.* $\Leftarrow$) Inmediata a partir de la definición de función medible.
$\Rightarrow$) Se tiene que

$$\{f = +\infty\} = \bigcap_{k=1}^{\infty}\{f \geq k\} \quad \text{y} \quad \{f = -\infty\} = \bigcap_{k=1}^{\infty}\{f \leq -k\}.$$

Si $H$ es boreliano de $\mathbb{R}$, supongamos que $H = H' \cup \{+\infty\}$ y $H'$ es conjunto medible de $\mathbb{R}$. Luego, $f^{-1}(H) = f^{-1}(H') \cup \{f = +\infty\}$ es medible. □

## 8.2 Funciones medibles sobre una $\sigma$-álgebra

**Definición 8.2.3** Si $\Sigma$ es una $\sigma$-álgebra de $\mathbb{R}^n$, diremos que $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ es $\sigma$-medible si

$$\{f > a\} \in \Sigma \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

**Proposición 8.2.1** $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ es $\Sigma$-medible si y sólo si $f^{-1}(H) \in \Sigma$ cuando $H$ es boreliano de $\overline{\mathbb{R}}$.

Cuando $\Sigma = \mathscr{M}$, decimos que $f$ es *medible*.
Cuando $\Sigma = \mathscr{B}$, llamamos a $f$ *medible Borel* o función *boreliana*.

**Ejercicio 8.2.1** Si $f$ es semicontinua inferiormente, entonces $f$ es medible.

Ahora, estudiaremos $g \circ f$ cuando $\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \overline{\mathbb{R}} \xrightarrow{g} \overline{\mathbb{R}}$.

**Definición 8.2.4** Diremos que $g : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ es boreliana si $g^{-1}(M)$ es boreliano de $\overline{\mathbb{R}}$ cuando $M$ lo es.

Luego, si $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ es medible y $g : \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$ es boreliana, entonces $g \circ f$ es medible.

También, se tiene que si $f$ es medible entonces $|f|$, $|f|^2$, log $|f|$ y $e^f$ son medibles.

Si $f$ y $g$ son medibles, entonces $\{f < g\}$ es medible pues

$$\{f < g\} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{f < q\} \cap \{g > q\}.$$

**Teorema 8.2.3** Si $f$ y $g$ son medibles con respecto a $\Sigma$ y si $c \in \mathbb{R}$, entonces $f + g$, $cf$ y $fg$ son medibles.

*Dem.* Supondremos que todas las funciones son finitas.

Veamos que

$$\{f + g > a\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \{a > r\} \cap \{q > a - r\}.$$

Si $f(x) + g(x) > a$, entonces existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que

$$f(x) > r > a - g(x), \quad \text{es decir} \quad f(x) > r \ \text{ y } \ g(x) > a - r.$$

Recíprocamente, si para algún $r \in \mathbb{Q}$ se tiene que $f(x) > r$ y $g(x) > a - r$, luego $f(x) + g(x) > a$.

Si $c \in \mathbb{R}$, entonces

$$\{cf > a\} = \begin{cases} f > \frac{a}{c} & c > 0 \\ f < \frac{a}{c} & c < 0 \\ \varnothing \text{ ó } \mathbb{R}^n & c = 0. \end{cases}$$

Ahora, como

$$fg = \frac{1}{4}\left[(f+g)^2 - (f-g)^2\right],$$

luego $fg$ es medible con respecto a $\Sigma$.

Para estudiar el cociente entre funciones medibles, denotamos por $\frac{1}{f}$ la función que toma el valor $\frac{1}{f(x)}$ si $f(x) \neq 0$ y el valor $0$ si $f(x) = 0$.

Ahora, como

$$\left\{\frac{1}{f} > a\right\} = \begin{cases} \{f > 0\} \cap \{f < \frac{1}{a}\} & a > 0 \\ \{f > 0\} \cup (\{f < \frac{1}{a}\} \cap \{f < 0\}) \cup \{f = 0\} & a < 0, \end{cases}$$

a partir de que $f$ es medible se tiene que $1/f$ es medible. □

## 8.3 Sucesiones de funciones medibles

**Proposición 8.3.2** Si $\{f_k\}$ es una sucesión de funciones medibles con respecto a $\Sigma$, entonces
$$g(x) = \inf_k f_k(x) \quad \text{y} \quad h(x) = \sup_k f_k(x)$$
son $\Sigma$-medibles.

La demostración se deduce de las fórmulas
$$\{h > a\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{f_k > a\} \quad \text{y} \quad \{g < a\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{f_k < a\}.$$

**Proposición 8.3.3** Si $\{f_k\}$ es una sucesión de funciones $\Sigma$-medibles, entonces
$$g(x) = \liminf_{k\to\infty} f_k(x) \quad \text{y} \quad h(x) = \limsup_{k\to\infty} f_k(x)$$
son medibles con respecto a $\Sigma$.

La prueba resulta de aplicar la Proposición 8.3.2 a las relaciones
$$g(x) = \sup_j \inf_{k\geq j} f_k(x) \quad \text{y} \quad h(x) = \inf_j \sup_{k\geq j} f_k(x).$$

**Corolario 8.3.1** Si $f_k(x) \to f(x)$ y $\{f_k\}$ es una sucesión de funciones $\Sigma$-medibles, entonces $f$ es medible con respecto a $\Sigma$.

A continuación, completamos la demostración del Teorema 8.2.3 que se relizó suponiendo que tanto $f$ como $g$ son finitas. Para evitar esa restricción, ahora consideramos la sucesión de funciones $\varphi_k : \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$ definidas por
$$\varphi_k(t) = \begin{cases} t & \text{si } |t| \leq k \\ k & \text{si } t > k \\ -k & \text{si } t < -k. \end{cases}$$
Cada $\varphi_k$ es una función boreliana pues la restricción de $\varphi$ a $\mathbb{R}$ es continua. Además, para cada $t \in \overline{\mathbb{R}}$, se tiene que $\varphi_k \to t$ cuando $k \to \infty$. Entonces, las funciones
$$f_k = \varphi_k \circ f \quad \text{y} \quad g_k = \varphi_k \circ g,$$
son medibles con respecto a $\Sigma$, finitas y convergen puntualmente a $f$ y $g$ respectivamente, cuando $k \to \infty$. Luego, las funciones
$$f + g = \lim_{k\to\infty} (f_k + g_k) \quad \text{y} \quad fg = \lim_{k\to\infty} f_k g_k,$$
resultan medibles a partir de la aplicación de la Proposición 8.3.3.

## 8.4 Funciones simples

Definimos la función característica $\chi_E$ de un conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$ mediante
$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E \\ 0 & \text{si } x \notin E. \end{cases}$$

Se tiene la siguiente propiedad

- $\chi_E$ es medible si y sólo si $E$ es medible.

**Definición 8.4.5** Una función medible y finita $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se llama *simple* si el conjunto de todos sus valores es finito, es decir, si $\varphi$ es medible y la imagen $\varphi(\mathbb{R}^n)$ es un subconjunto finito de $\mathbb{R}$.

A partir de la Definición 8.4.5, se tiene que si $\varphi, \psi$ son funciones simples y $c \in \mathbb{R}$, entonces $\varphi + \psi$, $c\varphi$, $\varphi\psi$ son simples.

Si $\varphi(\mathbb{R}^n) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_N\}$, entonces $E_i = \varphi^{-1}(\{\alpha_i\})$ son medibles y

$$\varphi = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \chi_{E_i}.$$

Las funciones simples desempeñan un papel muy importante en la teoría de integración en virtud del siguiente teorema.

**Teorema 8.4.4** Si $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ es una función medible no negativa, entonces existe una sucesión $\{\varphi_k\}$ de funciones simples tal que

$$\varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \varphi_3 \leq \ldots \quad \text{y} \quad f(x) = \lim_{k\to\infty} \varphi_k(x)$$

en cada punto $x \in \mathbb{R}^n$.

*Dem.* Para $k \in \mathbb{N}$, dividimos $[0, 2^k)$ en $k2^k$ intervalos disjuntos

$$\left[\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k}\right), \quad i = 1, 2, \ldots, k2^k.$$

Definimos $g_k : \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$ por

$$g_k(x) = \begin{cases} \frac{i-1}{2^k} & \text{si } 0 \leq t \leq k, \ \ (i-1)/2^k \leq t < i/2^k, \\ k & \text{si } t \geq k \\ 0 & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

Las funciones $g_k$ son borelianas, no negativas y verifican

$$0 \leq g_1 \leq g_2 \leq \ldots, \quad \text{y} \quad \lim_{k\to\infty} g_k(t) = t, \quad \text{en } [0, +\infty].$$

Las funciones $\varphi_k = g_k \circ f$ son simples y verifican el teorema. □

**Observacion 8.4.1**

1. Si $f$ es medible con respecto a una $\sigma$-álgebra $\Sigma$, entonces las funciones $\varphi_k$ del Teorema 8.4.4 son también medibles con respecto a $\Sigma$.
2. Multiplicando a las $\varphi_k$ por $\chi_{B(0,k)}$ se obtiene una sucesión de funciones $\psi_k$ que verifican las hipótesis del Teorema 8.4.4 y que tienen soporte compacto.
3. Si $f$ es acotada y positiva, la convergencia es uniforme.

## 8.5 Partes positiva y negativa

Si $f$ es medible, también lo son

$$f^+ = \sup\{0, f\} \quad \text{y} \quad f^- = \sup\{0, -f\}$$

llamadas *parte positiva* y *parte negativa* de $f$.

Se verifica que

$$f = f^+ - f^- \quad \text{y} \quad |f| = f^+ + f^-.$$

**Teorema 8.5.5** Si $f$ es medible y $f = f_1 - f_2$, con $f_i \geq 0$ para $i = 1, 2$, entonces $f^+ \leq f_1$ y $f^- \leq f_2$.

*Dem.* Se tiene que $f \leq f_1$ de donde $f^+ = \sup\{f, 0\} \leq f_1$.
Además, $-f \leq f_2$. Luego, $f^- \leq f_2$ □

Si $f$ es medible, aplicando el Teorema 8.4.4 a $f^+$ y $f^-$, existen funciones simples $\varphi_k, \psi_k$ tales que $\varphi_k \to f^+$ y $\psi_k \to f^-$. Luego, $\varphi_k - \psi_k \to f$, y además, $|\varphi_k - \psi_k| \leq \varphi_k + \psi_k \leq f^+ + f^- = |f|$.

## 8.6 Propiedades verdaderas en casi todo punto

Si $P$ es una propiedad sobre puntos de $\mathbb{R}^n$ ($P(x)$) diremos que $P$ es verdadera en casi todo punto si $P(x)$ es verdadera excepto, posiblemente, en un conjunto de medida cero.

Así, por ejemplo:

1. Casi todo número es irracional.
2. Si $f$ y $g$ son funciones definidas sobre todo $\mathbb{R}^n$, diremos que $f = g$ en casi todo punto si $f(x) = g(x)$ para todo $x \notin E$ siendo la $m(E) = 0$.

**Teorema 8.6.6** Si $h = 0$ en c.t.p., entonces $h$ es medible.

*Dem.* Sea $Z = \{h \neq 0\}$.
Si $a \geq 0$, entonces $\{h > a\} \subset Z$ y por tanto $m(\{h > a\}) = 0$. Luego, $\{h > a\} \in \mathscr{M}$.
Si $a < 0$, se tiene que $\{h \leq a\} \subset Z$. Ahora, como $\{h > a\} = \mathbb{R}^n - \{h \leq a\}$, entonces $\{h > a\} \in \mathscr{M}$ por ser complemento de un conjunto medible. □

**Corolario 8.6.2** Si $f$ es medible y $f = g$ en c.t.p., entonces $g$ es medible.

Será frecuente decir que $f_k(x) \to f(x)$ en c.t.p.

**Teorema 8.6.7** Si $f_k \to f$ en c.t.p. y las funciones $f_k$ son medibles, entonces $f$ es medible.

*Dem.* La función $g = \liminf_{k \to \infty} f_k$ es medible y $g = f$ en c.t.p. □

Si $f$ y $g$ son medibles, definimos $f \sim g$ si $f = g$ en c.t.p.
Entonces, $\sim$ es una relación de equivalencia. Además, si $f \sim h$ y $g \sim g$, entonces $f + g \sim h + g$ y $fg \sim hg$.
Si $f = g$ en c.t.p., entonces $f$ es esencialmente igual a $g$.

## 8.7 Convergencia en medida

Si para cada $x \in \mathbb{R}^n$ tenemos una propiedad, enunciado o afirmación $P(x)$ que puede ser tildada de verdadera o falsa, escribiremos $E(P)$ para denotar $E \cap \{x : P(x)\}$.

**Definición 8.7.6** Sean $f_k$ y $f$ medibles sobre $E$.
Se dice que $f_k$ converge en medida a $f$ si $\forall\delta > 0$ se tiene que

$$m(E(|f_k - f| \geq \delta)) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

Notaremos: $f_k \xrightarrow{m} f$.

**Teorema 8.7.8** Si $f_k \xrightarrow{m} f$ y $f_k \xrightarrow{m} g$, entonces $f = g$ en c.t.p.

*Dem.* A partir de que

$$\{|f-g| \geq \delta\} \subset \left\{|f - f_k| \geq \frac{\delta}{2}\right\} \cup \left\{|f_k - g| \geq \frac{\delta}{2}\right\},$$

se tiene que

$$m\left(E\left(|f-g| \geq \delta\right)\right) \leq$$
$$m\left(E\left(|f - f_k| \geq \frac{\delta}{2}\right)\right) + m\left(E\left(|f_k - g| \geq \frac{\delta}{2}\right)\right) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

Luego,

$$m(\{f \neq g\}) = m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\left\{|f-g| \geq \frac{1}{k}\right\}\right) = 0.$$

Así, $f = g$ en c.t.p. □

**Teorema 8.7.9** Si $m(E) < \infty$ y $f_k \to f$ en c.t.p. de $E$, entonces $f_k \xrightarrow{m} f$.

*Dem.* Sea $Z$ el conjunto de puntos donde $f_k$ no tiende a $f$. Entonces $m(z) = 0$.
Dado $\delta > 0$, definimos

$$B_j = \bigcup_{k=j}^{\infty} E(|f_k - f| \geq \delta).$$

y se tiene que $\bigcap_{j=1}^{\infty} B_j = Z$. Luego, $m(B_j) \to 0$ cuando $j \to \infty$.

Como si $k \geq j$, se tiene que $E(|f_k - f| \geq \delta) \subset B_j$. Luego $m(E(|f_k - f| \geq \delta)) \to 0$ cuando $k \to \infty$ y por lo tanto $f_k \xrightarrow{m} f$. □

**Observacion 8.7.2**

1. Si $m(E) = +\infty$, el Teorema 8.7.9 no es cierto. Por ejemplo, $f_k = \chi_{B(0,k)} \to 1$ en c.t.p., mientras que $m(E(|f_k - 1| = 1)) = m(\mathbb{R}^n - B(0,k)) = +\infty \quad \forall k \in \mathbb{N}$.
2. La recíproca del Teorema 8.7.9 no es cierta. Basta tomar $f_{k_n} = \chi_{\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)}$ con $k = 0, 1, \ldots, 2^{n-1}$ y $n = 1, 2, \ldots$

**Definición 8.7.7** Diremos que $f_k$ es fundamental en medida sobre $E$ si $\forall\delta > 0$ se tiene que

$$m\left(E\left(|f_k - f| \geq \delta\right)\right) \xrightarrow[k,j\to\infty]{} 0.$$

**Observacion 8.7.3** Si $f_k \xrightarrow{m} f$ y $f$ es finita, entonces $f_k$ es fundamental en medida.

**Teorema 8.7.10** Si $f_k$ es fundamental en medida sobre $E$, entonces existe una subsucesión $k_j$ y una función $f$ medible sobre $E$ tal que $f_{k_j} \to f$ en c.t.p. de $E$. Además, $f$ es finita y $f_k \xrightarrow{m} f$.

*Dem.* Para cada $i > 0$, existe $k_i \in \mathbb{N}$ tal que

$$m\left(E\left(|f_k - f| \geq \frac{1}{2^i}\right)\right) \leq \frac{1}{2^i},$$

para $k_j \geq k_i$. Podemos suponer que $k_1 < k_2 < \ldots$. Sea

$$E_i = E\left(|f_i - f_{i+1}| \geq \frac{1}{2^i}\right)$$

y tenemos que $m(E_i) < \frac{1}{2^i}$.

Sea

$$Z = \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{i=j}^{\infty} E_i = \limsup_{i\to\infty} E_i.$$

Ahora, $m(Z) = 0$.

Si $x \in E - Z$, existe un $j$ tal que $x \notin E_i$ para $i \geq j$, es decir,

$$x \in E\left(|f_{k_i} - f_{k_{i+1}}| < \frac{1}{2^i}\right).$$

Luego, la serie

$$f_{k_1}(x) + (f_{k_2}(x) - f_{k_1}(x)) + \ldots \tag{8.1}$$

converge absolutamente en $E - Z$.

Sea $f(x)$ la suma de (8.1) en $E - Z$ y sea $f(x) = 0$ en $Z$. A partir de la definición de $f$ es claro que $f$ es finita. Además, pasando a sumas parciales, tenemos

$$f(x) = \lim_{i\to\infty} f_{k_i}(x) \quad \text{en c.t.p. de } E.$$

A continuación, veamos que $f_{k_i} \xrightarrow{m} f$.

Sea $\delta > 0$ y elijamos $j$ tal que $\frac{1}{2^{j-1}} < \delta$. Si $x \notin Z$, entonces

$$f(x) = f_{k_j}(x) + \left(f_{k_{j+1}}(x) - f_{k_j}(x)\right) + \ldots.$$

Así

$$E\left(\left|f(x) - f_{k_j}(x)\right| \geq \delta\right) \subset Z \cup \left(\bigcup_{i\geq j} E_i\right)$$

de donde

$$m\left(E\left(\left|f(x) - f_{k_j}(x)\right| \geq \delta\right)\right) \leq \sum_{i\geq j} m(E_i) = \frac{1}{2^{j-1}}.$$

De este modo, obtenemos $f_{k_j} \xrightarrow{m} f$.

Por último, a partir de

$$E\left(|f_k - f|\right) \subset E\left(|f_k - f_{k_j}| \geq \frac{\delta}{2}\right) \cup E\left(|f_{k_j} - f| \geq \frac{\delta}{2}\right),$$

tomando $k$ y $k_j$ grandes, deducimos

$$m\left(E\left(|f_k - f| \geq \delta\right)\right) < \varepsilon$$

para valores de $k$ grandes. En consecuencia, $f_k \xrightarrow{m} f$. □

## 8.8 Función singular de Cantor

El conjunto de Cantor se define como

$$P = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n,$$

donde $F_n$ es la unión de $2^n$ intervalos cerrados y disjuntos contenidos en el $[0,1]$.

El conjunto $[0,1] - F_n$ es la unión de $2^n - 1$ intervalos abiertos disjuntos. Si los numeramos de izquierda a derecha, formamos los intervalos abiertos $J_{n,i}$, para $i = 1, 2, \ldots, 2^n - 1$ y se tiene la relación

$$J_{n,i} = J_{n+1,2i}.$$

Sea $\varphi_n$ la función que toma los siguientes valores $\varphi_n(0) = 0$, $\varphi_n(1) = 1$, $\varphi_n(x) = \frac{i}{2^n}$ en $J_{n,i}$, es lineal entre los $F_n$ y es continua.

Tenemos que $\varphi_{n+1} = \varphi_n$ en $J_{n,i}$ y además

$$|\varphi_{n+1} - \varphi_n| < \frac{1}{2^{n+1}},$$

en cada punto de $[0,1]$. Luego, la serie

$$\varphi_1 + (\varphi_2 - \varphi_1) + (\varphi_3 - \varphi_2) + \ldots$$

converge uniformemente a una función continua $\varphi$ que se llama *función singular de Cantor*.

Es claro que $\varphi$ es monótona creciente y su restricción a cualquiera de los intervalos $J_{n,i}$ es constante.

# 9 Integral de Lebesgue

## 9.1 Definición y propiedades inmediatas

**Definición 9.1.1** Sean $E \subset \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ y $f \geq 0$ sobre $E$ medible.
La integral de Lebesgue de $f$ se define mediante

$$\int_E f(x)dx = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{N} m(E_i) \right\},$$

donde el supremo se toma sobre toda descomposición del conjunto $E$ en unión de conjuntos medibles $E_i$ y mutuamente disjuntos, siendo

$$\alpha_i = \inf_{E_i} f.$$

Se usa la convención $0.(+\infty) = +\infty.0 = 0$.
De la Definición 9.1.1 se deduce que si $f \equiv c \in \mathbb{R}$ sobre $E$, entonces

$$\int f\,dx = cm(E).$$

**Teorema 9.1.1** Si $E = A \cup B$ y $f \geq 0$ en $E$, entonces

$$\int_E f = \int_A f + \int_B f.$$

*Dem.* Sean $E = \bigcup_{i=1}^{N} E_i$ y $\alpha_i = \inf_{E_i} f$. $A_i = A \cap E_i$ y $B_i = B \cap E_i$ y llamamos $\beta_i = \inf_{A_i} f$ y $\gamma_i = \inf_{B_i} f$. Entonces $\alpha_i \leq \beta_i$, $\alpha_i \leq \gamma_i$ y

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N} \alpha_i m(E_i) &= \sum_{i=1}^{N} \alpha_i (m(A_i) + m(B_i)) \\ &\leq \sum_{i=1}^{N} \beta_i m(A_i) + \sum_{i=1}^{N} \gamma_i m(B_i) \\ &\leq \int_A f\,dx + \int_B f\,dx. \end{aligned}$$

Luego

$$\int_E f \leq \int_A f + \int_B f.$$

Sean $A = \bigcup_{i=1}^{N} A_i$, $B = \bigcup_{i=1}^{M} B_i$, $\beta_i$ y $\gamma_i$ como antes. Entonces

$$\sum_{i=1}^{N} \beta_i m(A_i) + \sum_{i=1}^{M} \gamma_i m(B_i) \leq \int_E f.$$

Luego
$$\int_A f + \int_B f \leq \int_E f.$$

□

- Si $0 \leq f \leq g$, entonces
$$\int_E f \leq \int_E g,$$
pues $\inf_{E_i} f \leq \inf_{E_i} g$.
- Si $f \geq 0$ sobre $E$ y $A \subset E$, entonces
$$\int_A f \leq \int_E f,$$
pues $\int_E f = \int_A f + \int_{E-A} f$.
- Si $m(E) = 0$ y $f \geq 0$ sobre $E$, entonces
$$\int_E f = 0.$$
- Si $f = g$ en c.t.p. de $E$, entonces
$$\int_E f = \int_E g.$$
*Dem.* Sea $A = \{f \neq g\}$ entonces $m(A) = 0$ y
$$\int_E f = \int_{E-A} f = \int_{E-A} g = \int_E g.$$

□

- Si $f \geq 0$ en $E$, entonces
$$\int_E f = \int_{\mathbb{R}^n} f\chi_E \, dx.$$
- Cuando $E = \mathbb{R}^n$, escribimos
$$\int_{\mathbb{R}^n} f = \int f.$$
- Si $E = (a, b) \subset \mathbb{R}$, ponemos
$$\int_E f = \int_a^b f.$$

## 9.2 Integral de funciones simples

**Teorema 9.2.2** Sean $E = E_1 \dot\cup E_2 \dot\cup \ldots \dot\cup E_N$ y $\beta_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, \ldots, N$, $\beta_i \geq 0.$ Luego,

$$\int_E \sum_{i=1}^{N} \beta_i \chi_{E_i} = \sum_{i=1}^{N} \beta_i m(E_i)$$

*Dem.*

$$\int_E \sum_{i=1}^{N} \beta_i \chi_{E_i} = \sum_{j=1}^{N} \int_{E_j} \sum_{i=1}^{N} \beta_i \chi_{E_i} = \sum_{j=1}^{N} \beta_j m(E_j).$$

□

**Teorema 9.2.3** Si $\varphi$ y $\psi$ son funciones simples no negativas y $c \in \mathbb{R}^+$, entonces

$$\int_E (\varphi + \psi) = \int_E \varphi + \int_E \psi \quad \text{y}$$

$$\int_E c\varphi = c \int_E \varphi.$$

*Dem.* Sean $\varphi = \sum\limits_{i=1}^{N} \alpha_i \chi_{E_i}$ y $\psi = \sum\limits_{j=1}^{M} \beta_j \chi_{F_j}$. Tenemos

$$\varphi + \psi = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} (\alpha_i + \beta_j) \chi_{E_i \cap F_j},$$

y entonces

$$\begin{aligned}
\int_E \varphi + \psi &= \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} (\alpha_i + \beta_j) m(E_i \cap F_j) \\
&= \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \sum_{j=1}^{M} m(E_i \cap F_j) + \sum_{j=1}^{M} \beta_j \sum_{i=1}^{N} m(E_i \cap F_j) \\
&= \int_E \varphi + \int_E \psi.
\end{aligned}$$

Como $c\varphi = \sum\limits_{i=1}^{N} c\alpha_i \chi_{E_i}$, luego

$$\int_E c\varphi = \sum_{i=1}^{N} c\alpha_i m(E_i) = \alpha \int_E \varphi.$$

□

**Teorema 9.2.4** Si $f \geq 0$, entonces

$$\int_E f = \sup_{0 \leq \varphi \leq f} \int_E \varphi.$$

*Dem.* Sean $E = E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_N$ y $\alpha_i = \inf_{E_i} f$. Supongamos que $\alpha_i < \infty$. Luego, si $\varphi = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \chi_{E_i}$ tenemos

$$\int_E \varphi = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i m(E_i) \quad \text{y} \quad 0 \leq \varphi \leq f.$$

En general, para $k \in \mathbb{N}$ definamos

$$\alpha_{ik} = \min\{k, \alpha_i\}$$

y

$$\varphi_k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ik} \chi_{E_i}.$$

Ahora, $0 \leq \varphi_k \leq f$ y $\alpha_{i1} \leq \alpha_{i2} \leq \ldots \nearrow \alpha_i$. LUego

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N} \alpha_i m(E_i) &= \lim_{k \to \infty} \sum_{i=1}^{N} \alpha_{ik} m(E_i) \\ &= \lim_{k \to \infty} \int_E \varphi_k \leq \sup_{0 \leq \varphi \leq f} \int_E \varphi. \end{aligned}$$

Luego

$$\int_E f \leq \sup_{0 \leq \varphi \leq f} \int_E \varphi.$$

La otra desigualdad es inmediata. □

**Lema 9.2.1** Sean $f_1 \leq f_2 \leq \ldots$ funciones no negativas y $\varphi$ función simple no negativa tal que

$$\varphi \leq \lim_{k \to \infty} f_k.$$

*Dem.* Sean $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_N$ los distintos valores ordenados que toma $\varphi$ y sea

$$A_i = \{\varphi = \alpha_i\}.$$

Supongamos probado el lema cuando $\alpha_1 > 0$. Entonces, sale para $\alpha_1 = 0$, pues aplicando el caso probado en $E - A_1$ tenemos

$$\int_E \varphi = \int_{E-A_1} \varphi \leq \lim_{k \to \infty} \int_{E-A_1} f_k \leq \lim_{k \to \infty} \int_E f_k.$$

Supongamos ahora que $\alpha_1 > 0$.
Sea $0 < \varepsilon$ con $0 < \varepsilon < \alpha_1$. Luego $\varphi - \varepsilon$ es una función simple que toma los valores $\alpha_i - \varepsilon$ sobre $A_i$. Poniendo

$$E_k = \{\alpha \in E : f_k(x) > \varphi(x) - \varepsilon\}.$$

Por hipótesis

$$E_k \subset E_{k+1} \text{ y } \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = E.$$

Luego $m(E_k) \to m(E)$ cuando $k \to \infty$.
Se presentan dos casos

1. Si $m(E) < \infty$, tenemos $m(E - E_k) \xrightarrow{k\to\infty} 0$ y
$$\begin{aligned}\int_E f_k \geq \int_{E_k} f_k \geq \int_{E_k} \varphi(x) - \varepsilon \\ &= \int_E \varphi(x) - \varepsilon - \int_{E-E_k} \varphi(x) - \varepsilon \\ &\geq \int_E \varphi - \varepsilon m(E) - (\alpha_N - \varepsilon) m(E - E_k).\end{aligned}$$
Luego
$$\text{lím}_{k\to\infty} \int_E f_k \geq \int_E \varphi - \varepsilon m(E).$$
Como $\varepsilon$ es arbitrario, se obtiene la desigualdad del lema.
2. Si $m(E) = \infty$, consideramos $m(E_k) \nearrow +\infty$ y obtenemos
$$\int_E f_k \geq \int_{E_k} f_k \geq \int_{E_k} \varphi - \varepsilon \geq (\alpha_1 - \varepsilon) m(E_k) \nearrow +\infty,$$
lo cual lleva a la desigualdad del lema.

□

## 9.3 Paso al límite bajo el signo de integral

**Teorema 9.3.5** [Beppo-Levi] Sea $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \ldots \nearrow f$. Entonces
$$\int_E f = \text{lím}_{k\to\infty} \int_E f_k.$$

*Dem.* Sea $\varphi$ función simple tal que $0 \leq \varphi \leq f$. Luego
$$\varphi \leq \text{lím}_{k\to\infty} f_k,$$
y por tanto
$$\int_E \varphi \leq \text{lím}_{k\to\infty} \int_E f_k.$$
Así, llegamos a
$$\int_E f = \sup_{0\leq\varphi\leq f} \int_E \varphi \leq \text{lím}_{k\to\infty} \int_E f_k.$$
La otra desigualdad es inmediata. □

**Teorema 9.3.6** Si $f, g \geq 0$ y $c \in \mathbb{R}$, entonces
$$\int_E (f+g) = \int_E f + \int_E g \quad \text{y} \quad \int_E cf = c\int_E f.$$

*Dem.* Sean $\varphi_k$ y $\psi_k$ funciones simples tales que $\varphi_k \nearrow f$ y $\psi_k \nearrow g$. Luego $\varphi_k + \psi_k \nearrow f + g$ y entonces

$$\begin{aligned}\int_E f + g &= \lim_{k\to\infty} \int_E \varphi_k + \psi_k \\ &= \lim_{k\to\infty} \int_E \varphi_k + \lim_{k\to\infty} \int_E \psi_k \\ &= \int_E f + \int_E g.\end{aligned}$$

□

**Corolario 9.3.1** Si $f_k \geq 0$, $k = 1, 2, \ldots$, entonces

$$\int_E \sum_{k=1}^{\infty} f_k = \sum_{k=1}^{\infty} \int_E f_k.$$

*Dem.* Sean $S_N = \sum_{k=1}^{N} f_k$ y $s = \sum_{k=1}^{\infty} f_k = \lim_{N\to\infty} S_N$.
Luego $0 \leq S_1 \leq S_2 \leq \ldots \nearrow s$. De este modo,

$$\begin{aligned}\int_E s &= \lim_{N\to\infty} \int_E S_N \\ &= \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \int_E f_k = \sum_{k=1}^{\infty} \int_E f_k.\end{aligned}$$

□

**Lema 9.3.2** [Lema de Fatou] Si $f_k \geq 0$, entonces

$$\int_E \liminf_{k\to\infty} f_k \leq \liminf_{k\to\infty} \int_E f_k.$$

*Dem.* Sean

$$g(x) = \liminf_{k\to\infty} f_k \quad \text{y} \quad g_k(x) = \inf_{j\geq k} f_j.$$

Así, $g_1 \leq g_2 \leq \ldots \nearrow g$ y

$$g(x) = \sup_k g_k(x) = \lim_{k\to\infty} g_k(x).$$

Por el Teorema 9.3.5 y como $g_k \leq f_k$, se tiene

$$\int_E g = \lim_{k\to\infty} \int_E g_k = \liminf_{k\to\infty} \int_E g_k \leq \liminf_{k\to\infty} \int_E f_k.$$

□

**Corolario 9.3.2** Si $f_k \to f$ en $E$, entonces

$$\int_E f \leq \liminf_{k\to\infty} \int_E f_k.$$

## 9.4 Integrales de funciones de distinto signo

**Definición 9.4.2** Si $f = f^+ - f^-$, diremos que $f$ es integrable sobre $E$ si y sólo si

$$\int_E f^+ \quad \text{y} \quad \int_E f^-$$

son finitas.

En este caso, escribimos

$$\int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^-.$$

**Teorema 9.4.7** $f$ es integrable sobre $E$ si y sólo si $|f|$ lo es. Y, en este caso, vale

$$\left|\int_E f\right| \leq \int_E |f|.$$

*Dem.* $\Rightarrow$) Como $|f| = f^+ + f^-$, si $f$ es integrable entonces $|f|$ también los es.

$\Leftarrow$) Si $|f|$ es integrable, como $f^+ \leq |f|$ y $f^- \leq |f|$, entonces $f$ también resulta integrable. □

**Teorema 9.4.8** Si $f_1, f_2 \geq 0$ son integrables sobre $E$ y $f = f_1 - f_2$, entonces $f$ es integrable y

$$\int_E f_1 - f_2 = \int_E f_1 - \int_E f_2.$$

*Dem.* A partir de que $f^+ \leq f_1$ y $f^- f_2$ se deduce que $f$ es integrable.
Como $f = f^+ - f^- = f_1 - f_2$ entonces $f^+ + f_2 = f_1 + f^-$ y

$$\int_E f^+ + \int_E f_2 = \int_E f_1 + \int_E f^-.$$

□

**Teorema 9.4.9** Si $f \geq 0$ es integrable y $|g| \leq f$, entonces $g$ es integrable.

*Dem.* La prueba sale a partir de que $g^+ \leq f$ y $g^- \leq f$. □

**Teorema 9.4.10** Si $f$ y $g$ son integrables sobre $E$ y $c \in \mathbb{R}$, entonces $f + g$ y $cf$ son integrables sobre $E$. Además,

$$\int_E f + g = \int_E f + \int_E g \quad \text{y} \quad \int_E cf = c \int_E f.$$

*Dem*. Como $f+g=f^{+}+g^{+}-(f^{-}+g^{-})$, aplicando el Teorema 9.4.8 se obtiene que $f+g$ es integrable y

$$\begin{aligned}\int_E f+g &= \int_E f^{+}+g^{+}-\int_E f^{-}+g^{-}\\ &= \int_E f^{+}+\int_E g^{+}-\int_E f^{-}-\int_E g^{-}\\ &= \int_E f+\int_E g.\end{aligned}$$

Si $c\geq 0$, entonces $cf=cf^{+}-cf^{-}$ y el resultado se obtiene por el Teorema 9.4.8. Si $c<0$, el resultado se obtiene a partir de que $cf=(-c)f^{-}-(-c)f^{+}$. $\square$

**Corolario 9.4.3** Si $f$ y $g$ son integrables tales que $f\leq g$, entonces

$$\int_E f\leq\int_E g.$$

Así,

$$L(E)=\{f : f \text{ es integrable sobre } E\}$$

es un espacio vectorial y la aplicación

$$f\longmapsto\int_E f$$

es una aplicación lineal.

## 9.5 Convergencia Mayorada

Si $f_k$ son integrables sobre $E$ y $f_k\to f$ en c.t.p. de $E$ siendo $f$ integrable en $E$, **en general no es cierto** que

$$\int_E f_k\to\int_E f.$$

**Ejemplo 9.5.1** Si $f_k=k\chi_{(0,\frac{1}{k})}$ entonces $f_k\to 0$ puntualmente en $(0,1)$. Sin embargo,

$$\int_{(0,1)} f_k=1,\quad\forall k\in\mathbb{N}.$$

y por lo tanto

$$\int_{(0,1)} f_k\nrightarrow\int_{(0,1)} f.$$

**Teorema 9.5.11** [Convergencia Mayorada de Lebesgue] Sea $\Phi$ funcíon integrable sore $E$. Si $f_k$ son funciones integrables tales que

$$|f_k|\leq\Phi \text{ en } E,$$

entonces $g=$ lím inf $f_k$, $h=$ lím sup $f_k$ son integrables sobre $E$ y

$$\int_E \text{lím inf } f_k\leq\text{lím inf}\int_E f_k\leq\text{lím sup}\int_E f_k\leq\int_E h.$$

*Dem.* Por hipótesis se tiene que $-\Phi \le f_k \le \Phi$, a partir de lo cual se deduce que $-\Phi \le g \le \Phi$ y $-\Phi \le h \le \Phi$ y por lo tanto $g$ y $h$ resultan integrables sobre $E$.

Por otra parte, $f_k + \Phi \ge 0$ y $\Phi - f_k \ge 0$ y

$$\liminf_{k\to\infty}(f_k + \Phi) = g + \Phi$$
$$\liminf_{k\to\infty}(\Phi - f_k) = \Phi - h.$$

Ahora, por el Lema de Fatou (Lema 9.3.2) tenemos

$$\int_E g + \int_E \Phi = \int_E g + \Phi \le \liminf_{k\to\infty} \int_E f_k + \Phi = \liminf_{k\to\infty} \int_E f_k + \int_E \Phi.$$

Luego

$$\int_E g \le \liminf \int_E f_k.$$

La otra desigualdad se obtiene de manera análoga. □

**Corolario 9.5.4** Si $f_k \to f$ en cada punto de $E$ y $|f_k| \le \Phi \in L(E)$, entonces $f \in L(E)$ y

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k = \int_E f.$$

## 9.6 La integral y los conjuntos de medida nula

Si $f, g \ge 0$ y $f = g$ en c.t.p de $E$, entonces

$$\int_E f = \int_E g.$$

En particular, sobre un conjunto de medida nula cualquier $f$ medible e integrable con integral que vale 0.

Usaremos la **desigualdad de Chebyshev** que establece que si $f$ es medible sobre $E$ se cumple

$$m\left(\{x \in E : |f(x)| > \lambda\}\right) \le \frac{1}{\lambda}\int_E |f|.$$

La prueba de la desigualdad de Chebyshev es sencilla, a saber,

$$\int_E |f| \ge \int_{\{|f|\ge\lambda\}} |f| \ge \lambda m\left(\{|f| \ge \lambda\}\right).$$

**Teorema 9.6.12** Si $f \ge 0$ sobre $E$ y $\int_E f = 0$, entonces $f = 0$ en c.t.p. de $E$.

*Dem.* Sean $Z_k = \{f > \frac{1}{k}\}$ y $Z = \{f > 0\}$, entonces

$$Z = \bigcup_{k=1}^{\infty} Z_k.$$

Ahora,

$$m(Z_k) = m\left(\left\{f > \frac{1}{k}\right\}\right) \le k \int_E f = 0,$$

y en consecuencia $m(Z) = 0$. □

## 9.7 Invariancia bajo traslaciones

**Teorema 9.7.13** Sea $f \geq 0$, entonces $\forall h \in \mathbb{R}^n$ se tiene

1. $\int f(x+h) = \int f(x)$,
2. $\int_E f(x+h) = \int_{E+h} f(x)$.

*Dem.*

1. - Si $f = \chi_E$, entonces $f(x+h) = \chi_E(x+h) = \chi_{E-h}(x)$. Así,
   $$\int f(x+h) = \int \chi_{E-h}(x) = m(E-h)$$
   y
   $$\int f(x) = \int \chi_E(x) = m(E),$$
   y son iguales
   - Si $f$ es simple, entonces
   $$f = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i f_i, \quad \alpha_i \geq 0, \; f_i = \chi_{E_i}.$$
   Luego,
   $$\int f(x+h) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \int f_i(x+h) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \int_{E_i} f_i = \int f.$$
   - Sea $f$ arbitraria no negativa y sean $\varphi_k$ funciones simples no negativas tales que $\varphi_k \nearrow f$. Luego,
   $$\varphi_k(x+h) \to f(x+h), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$
   Por el Teorema de Beppo-Levi (Teorema 9.3.5), se tiene
   $$\int f(x+h)\,dx = \lim_{k\to\infty} \int \varphi_k(x+h)\,dx = \lim_{k\to\infty} \int \varphi_k(x) = \int f(x)\,dx.$$

   Así queda demostrado el item 1.
2. es consecuencia del item 1. En efecto,
$$\begin{aligned}\int_E f(x+h)\,dx &= \int \chi_{E+h}(x+h) f(x+h)\,dx \\ &= \int \chi_{E+h}(x) f(x)\,dx \\ &= \int_{E+h} f(x)\,dx.\end{aligned}$$

Por último, los item 1 y 2 son ciertos para $f \in L(E)$, a partir de la usual descomposición de $f$ dada por $f = f^+ - f^-$. □

## 9.8 La integral como función de conjunto

**FALTA DEFINIR $\mathcal{M}$ o RECORDARLO!!!**
Sea $f \in L(\mathbb{R})$ y definimos $\Phi : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ por

$$\Phi(E) = \int_E f.$$

$\Phi$ se llama integral indefinida de $f$.

**Teorema 9.8.14** Si $E_j \in \mathcal{M}$ son mutuamente disjuntos y sea $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$, entonces

$$\Phi(E) = \sum_{j=1}^{\infty} \Phi(E_j).$$

*Dem.* Si $f \geq 0$, tenemos $\sum_{j=1}^{\infty} \chi_{E_j} = \chi_E$ y luego

$$\Phi(E) = \int_E f = \int f\chi_E = \int \sum_j f\chi_{E_j} = \sum_j \int f\chi_{E_j} = \sum_j \Phi(E_j).$$

Si $f \in L(E)$, trabajamos con $f = f^+ - f^-$ donde $f^+$ y $f^-$ son funciones medibles no negativas. □

**Definición 9.8.3** Si $X$ es un conjunto y $\Sigma$ es una sigma-álgebra de subconjuntos de $X$. Una función $\mu : \Sigma \to \mathbb{R}^+$ se llama medida si

1. $\mu(\varnothing) = 0$,
2. $\mu(\bigcup_j E_j) = \sum_j \mu(E_j)$, donde $E_j \in \Sigma$ y son mutuamente disjuntos.

Para una medida valen los teoremas de convergencia monótona de conjuntos, se puede definir una integral y *casi todo* lo visto para la medida de Lebesgue es válido. Una propiedad que no siempre es cierta es la invariancia por traslaciones.
Ahora bien, $\Phi$ es una medida. La pregunta que surge es ¿será toda medida sobre $\mathcal{M}$ de la forma de $\Phi$ para alguna $f$?
La respuesta a esta pregunta será dada por el **Teorema de Radom-Nikodim**.
La siguiente propiedad se llama *continuidad absoluta*.

**Teorema 9.8.15** Sea $f \in L(\mathbb{R}^n)$, entonces $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tal que

$$m(E) < \delta \Longrightarrow |\Phi(E)| < \varepsilon.$$

*Dem.* Se puede suponer que $f \geq 0$.
Sea $f_k = \text{mín}\{f, k\}$, entonces $f_k \nearrow f$. Por el Teorema de Beppo-Levi (Teorema 9.3.5) se tiene que $\int_E f_k \nearrow \int_E f$ y por tanto $\int_E f - f_k \to 0$. Así, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_E f - f_k < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sea $\delta < \frac{\varepsilon}{2k}$. Luego, si $m(E) < \delta$ entonces

$$\int_E f = \int_E f - f_k + \int_E f_k < \frac{\varepsilon}{2} + km(E) < \varepsilon.$$

□

## 9.9 Comparación con la integral de Riemann

Sea $f$ acotada en $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Si $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_N = b$, llamamos suma inferior de Riemann $s$ y suma superior de Riemann $S$ a

$$s = \sum_{i=1}^{N} m_i(x_i - x_{i-1}) \quad \text{y} \quad S = \sum_{i=1}^{N} M_i(x_i - x_{i-1}),$$

respectivamente, donde

$$m_i = \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f \quad \text{y} \quad M_i = \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f.$$

Una función $f$ se llama integrable según Riemann si y sólo si $\forall \varepsilon > 0$ existe una partición para la cual

$$S - s < \varepsilon.$$

La integral de Riemann se define

$$\text{(R)} \int_a^b f = \sup s = \inf S.$$

**Teorema 9.9.16** Si $f$ es integrable Riemann sobre $[a, b]$, entonces $f$ es medible e integrable Lebesgue. Además,

$$\text{(R)} \int_a^b f = \int_a^b f.$$

*Dem.* Si $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_N = b$, definimos las funciones escalonadas

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{N} m_i \chi_{J_i} \quad \text{y} \quad \psi(x) = \sum_{i=1}^{N} M_i \chi_{J_i}$$

donde $J_i = [x_{i-1}, x_i]$. Entonces $\varphi \leq f \leq psi$ en c.t.p. de $[a, b]$.

Si $f$ es integrable Riemann, existen dos sucesiones de funciones escaleras $\varphi_k$ y $\psi_k$ tales que $\varphi_k \leq f \leq \psi_k$ y

$$\int_a^b \psi_k - \varphi_k < \frac{1}{k}.$$

Además, si $g = \sup \varphi_k$ y $h = \inf \psi_k$, entonces $g$ y $h$ son borelianas y $g \leq f \leq h$. Además

$$\int_a^b \varphi_k \leq \int_a^b f \leq \int_a^b \psi_k$$

y

$$\text{(R)} \int_a^b \varphi_k \leq \text{(R)} \int_a^b f \leq \text{(R)} \int_a^b \psi_k,$$

de donde

$$\left|\int_a^b f - \text{(R)} \int_a^b f\right| \leq \int_a^b \psi_k - \varphi_k < \frac{1}{k}.$$

□

## 9.10 Integración parcial: Teorema de Fubini

Si $u \in \mathbb{R}^{n+m}$, pondremos $u = (x, y)$ con $x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}^m$.
Si $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$ e $y \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$E_x = \{y \in \mathbb{R}^m : (x, y) \in E\},$$

se llama la *sección* de $E$ en $x$. Análogamente, se define $E_y$.
Se puede demostrar que

$$\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right)_x = \bigcup_{k=1}^{\infty} (E_k)_x$$

y

$$\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right)_x = \bigcap_{k=1}^{\infty} (E_k)_x \,,$$

para cualquier sucesión de conjuntos $E_k$ contenidos en $\mathbb{R}^{n+m}$.
Si $E_1 \subset E_2$ entonces

$$(E_1)_x \subset (E_2)_x \quad \text{y} \quad (E_1 - E_2)_x = (E_1)_x - (E_2)_x \,.$$

**Teorema 9.10.17** [Principio de Cavalieri] Sea $E$ medible en $\mathbb{R}^{n+m}$, entonces

1. $E_x$ es medible de $\mathbb{R}^{n+m}$ en c.t.p. $x \in \mathbb{R}^n$;
2. $m\left(E_x\right)$ es medible como función de $x$;
3. $m(E) = \int m\left(E_x\right)\, dx$.

*Dem. Primer Paso)* Si $E$ es un intervalo de $\mathbb{R}^{n+m}$, supongamos que $E = I \times J$ con $I$ intervalo de $\mathbb{R}^n$, $J$ intervalo de $\mathbb{R}^m$, entonces $E_x = J\ \forall x \in I$ y $E_x = \varnothing$ si $x \notin I$. Así, $E_x$ es conjunto medible $\forall x \in I$, $m(E_x) = \chi_I m(J)$ es función medible en $x$ y

$$\int m(E_x)\, dx = m(J)m(I) = m(E).$$

*Segundo Paso)* Si $E$ es abierto, entonces $E_x = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} (I_k)_x$ con $I_k$ intervalos mutuamente disjuntos y donde $E_x = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} (I_k)_x$. Así $E_x$ es conjunto medible. Además,

$$m(E_x) = \sum_{k=1}^{\infty} m\left((I_k)_x\right)$$

es una función medible de $x$ y

$$\int m(E_x) = \sum_{k=1}^{\infty} \int m\left((I_k)_x\right)\, dx = \sum_{k=1}^{\infty} m(I_k) = m(E).$$

*Tercer Paso)* Si $E$ es un conjunto acotado y de tipo $G_\delta$, entonces existe una bola $B$ y una sucesión de conjuntos abiertos $G_k$ tales que

$$E \subset B \text{ y } E = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k.$$

Tomando $G_k' = B \cap G_1 \cap \ldots \cap G_k$, podemos suponer

$$B \supset G_1 \supset \ldots \supset E.$$

Ahora, se tiene que

$$E_x = \bigcap_{k=1}^{\infty} (G_k)_x$$

es conjunto medible y

$$m(E_x) = \lim_{k\to\infty} m\left((G_k)_x\right)$$

es función medible de $x$. Además,

$$m\left((G_k)_x\right) \leq m(B_x) \in L(\mathbb{R}^n).$$

A continuación, por aplicación de Convergencia Mayorada (Corolario 9.5.4), se obtiene

$$\int m(E_x)\, dx = \lim_{k\to\infty} \int m\left((G_k)_x\right)\, dx = \lim_{k\to\infty} m(G_k) = m(E).$$

*Cuarto Paso)* Supongamos que $E$ es un conjunto de tipo $G_\delta$. Sean $B_k = B(0,k)$ y $E_k = E \cap B_k \in G_\delta$, entonces $E = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$ y $E_1 \subset E_2 \subset \ldots$ Luego

$$E_x = \bigcup_{k=1}^{\infty} (E_k)_x \text{ y } (E_1)_x \subset (E_2)_x \subset \ldots$$

De este modo, resulta que $E_x$ es conjunto medible y

$$m(E_x) = \lim_{k\to\infty} m((E_k)_x).$$

Como $m((E_k))_x$ es una sucesión monótona creciente de funciones medibles, por el Teorema de Beppo-Levi (Teorema 9.3.5) llegamos a

$$\int m(E_x)\, dx = \lim_{k\to\infty} \int m\left((E_k)_x\right)\, dx = \lim_{k\to\infty} m(E_k) = m(E).$$

*Quinto Paso)* Sea $E$ un conjunto de medida nula. Luego, existe $H \in G_\delta$ tal que $E \subset H$ y $m(H) = 0$. A partir de

$$\int m(H_x)\, dx = m(H) = 0,$$

se tiene que $0 \leq m(E_x) \leq m(H_x) = 0$ en c.t.p. $x$. Luego, $m(E_x) = 0$ en c.t.p. $x$ y por lo tanto es función medible en $x$. Además,

$$\int m(E_x)\, dx \leq \int m(H_x)\, dx = 0 = m(E).$$

*Sexto Paso)* Sea $E$ medible. Entonces existen $H \in G_\delta$ y $Z$ de medida nula tal que $E = H - Z$. Luego

$$E_x = H_x - Z_x$$

y $m(Z_x) = 0$ en c.t.p. $x$, de donde $E_x$ es un conjunto medible en c.t.p. $X$ y

$$m(E_x) = m(H_x) - m(Z_x) = m(H_x) \text{ en c.t.p. } x.$$

Es así que, $m(E_x)$ es función medible siempre que $E_x$ sea medible y definimos $m(E_x) = 0$ para el caso en que $E_x$ no sea medible. Por último,

$$\int m(E_x)\,dx = \int m(H_x)\,dx = m(H) = m(E).$$

$\square$

**Ejemplo 9.10.2**

1. Sea $H$ un hiperplano de ecuación $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = a$.
   Veamos por inducción que $m(H) = 0$.
   El caso $n = 1$ es trivial. Supongamos que $(a_2, a_3, \ldots, a_n) \neq 0$, luego
   $$H_{x_1} = \{(x_2, \ldots, x_n) | a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = a - a_1x_1\}$$
   y
   $$m(H) = \int m(H_{x_1})\,dx_1 = 0.$$
2. El simple $S$ de altura $a$ es $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leq a$ con $x_i \geq 0$.
   Veamos por inducción que $m(S) = \frac{a^n}{n!}$.
   El caso $n = 1$ es trivial. Para $n > 1$, se tiene que $S_{x_1} = \varnothing$ si $x_1 \notin [0, a]$ y si $x_1 \in [0, a]$ entonces $S_{x_1} = \{(x_2, \ldots, x_n) | x_2 + \cdots + x_n \leq a - x_1\}$ es el simple de altura $a - x_1$. Luego,
   $$m(S) = \int_0^a m(S_{x_1})\,dx_1 = \int_0^a \frac{(a - x_1)^{n-1}}{(n-1)!}\,dx_1 = \frac{a^n}{n!}.$$

**Teorema 9.10.18** [Fubini-Tonelli] Si $f(u) = f(x, y)$ es medible no negativa sobre $\mathbb{R}^{n+m}$, entonces

1. $f(x, y)$ es medible en $y$ para c.t.p. $x$;
2. $g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x, y)\,dy$ es medible sobre $\mathbb{R}^n$;
3. $$\int g(x)\,dx = \int dx \int f(x, y)\,dy = \int f(u)\,du.$$

*Dem. Paso 1)* Si $f = \chi_E$, vale

$$\chi_E(x, y) = \chi_{E_x}(y).$$

$E_x$ es medible en c.t.p. $x$. Así, $f$ es medible en $y$ para c.t.p. $x$. Además

$$\int dx \int \chi_{E_x}(y)\,dy = \int m(E_x)\,dx = m(E) = \int f(u)\,du.$$

*Paso 2)* Si $f$ es simple, entonces

$$f(x, y) = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k f_k(x, y),$$

donde $\alpha_k \geq 0$ y $f_k$ son funciones características $\chi_{E_k}$.

Por el *Paso 1)*, $f_k(x,y)$ es medible en $y$ y $x$ está en un conjunto de la forma $\mathbb{R}^n - Z_k$, donde $m(Z_k) = 0$. Ahora, llamando $Z = \bigcup_{k=1}^{N} Z_k$, $f$ es medible en $y$ siempre que $x \in \mathbb{R}^n - Z$. O sea, $f$ resulta medible en $y$ para c.t.p. $x \in \mathbb{R}^n$.

Si $x \in \mathbb{R}^n - Z$, la función

$$g(x) = \int f(x,y)\,dy = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \int f_k(x,y)\,dy$$

es medible. Además, por el *Paso 1)*,

$$\int g(x)\,dx = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \int dx \int f_k(x,y)\,dy = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \int f_k(u)\,du = \int f(u)\,du.$$

*Paso 3)* Si $f$ es medible no negativa, existe una sucesión de funciones simples $f_k : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}$ tales que $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \ldots$ y $f_k(u) \nearrow f(u)$ $\forall u \in \mathbb{R}^{n+m}$. Dado que $f_k$ es simple, existe $Z_k$ tal que $f_k(x,y)$ es medible en $y$ si $x \notin Z_k$.

Sea $Z = \bigcup_{k=1}^{N} Z_k$, entonces $m(Z) = 0$ y cada $f_k(x,y)$ es medible en $y$ si $x \notin Z$. Así, $f$ es medible en $y$ $\forall x \notin Z$. Aplicando el Teorema de Beppo-Levi (Teorema 9.3.5), si $x \notin Z$ se tiene que

$$g(x) = \int f(x,y)\,dy = \lim_{k\to\infty} \int f_k(x,y)\,dy,$$

y $g$ es medible tomando la precaución de definir $g = 0$ en $Z$.

Por último, aplicando nuevamente el Teorema de Beppo-Levi (Teorema 9.3.5), obtenemos

$$\int g(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} \int dx \int f_k(x,y)\,dy = \lim_{k\to\infty} \int f_k(u)\,du = \int f(u)\,du.$$

□

**Teorema 9.10.19** [Fubini] Si $f(u) = f(x,y) \in L(\mathbb{R}^{n+m})$, entonces

1. para casi todo $x$, $f(x,y)$ es integrable en $y$;
2. la función $g(x) = \int f(x,y)\,dy$ es integrable en $x$;
3. $$\int g(x)\,dx = \int dx \int f(x,y)\,dy = \int f(u)\,du$$

*Dem.* Por aplicación del Teorema de Fubini-Tonelli (Teorema 9.10.18) se tiene que

$$\int dx \int f^+(x,y)\,dy = \int f^+(u)\,du < \infty$$

y

$$\int dx \int f^-(x,y)\,dy = \int f^-(u)\,du < \infty.$$

Las funciones no negativas

$$g_1(x) = \int f^+(x,y)\,dy \text{ y } g_2(x) = \int f^-(x,y)\,dy$$

son integrables y por ende finitas en casi todo punto. Luego,

$$g(x) = \int f(x,y)\,dy = g_1(x) - g_2(x)$$

es integrable en $y$ para casi todo $x$. Además, $g \in L(\mathbb{R}^n)$ y

$$\begin{aligned}\int g(x)\,dx &= \int g_1(x)\,dx - \int g_2(x)\,dx \\ &= \int f^+(u)\,du - \int f^-(u)\,du = \int f(u)\,du.\end{aligned}$$

$\square$

**Corolario 9.10.5** Si $f$ satisface que

$$\int dx \int |f(x,y)|\,dy < \infty \text{ ó } \int dy \int |f(x,y)|\,dx < \infty,$$

vale el Teorema de Fubini.

Si $f$ es integrable sobre un conjunto $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$, la integral de $f$ sobre $E$ se calcula por medio de la fórmula

$$\int_E f(u)\,du = \int dx \int_{E_x} f(x,y)\,dy.$$

En efecto, $f\chi_E$ es integrable sobre todo el espacio $\mathbb{R}^{n+m}$ y por consiguiente

$$\begin{aligned}\int_E f(u)\,du &= \int\int_E f(x,y)\,dx\,dy \\ &= \int\int \chi_E(x,y) f(x,y)\,dx\,dy \\ &= \int dx \int \chi_{E_x(y)} f(x,y)\,dy \\ &= \int dx \int_{E_x} f(x,y)\,dy.\end{aligned}$$

# 10 Espacios $L^p$

## 10.1 Espacio de funciones integrables

Sea $L^1 = L^1(E) = \{f : f \text{ es integrable en } E\}$.
$L^1(E)$ es un espacio vectorial donde se define la relación de equivalencia

$$f \sim g \iff f = g \text{ en c.t.p. de } E.$$

La clase de equivalencia de $f$ que suele notarse con "$(f)$", pero en un abuso de notación, se indicará $f$ y $L^1(E)/_\sim$ se denotará con $L^1(E)$.
Para $f \in L^1(E)$, definimos

$$\|f\|_1 = \int_E |f(x)|\, dx.$$

$\|\cdot\|_1$ es una función no negativa sobre $L^1(E)$ que cumple

H1) $\|f+g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$.

H2) $\|\lambda f\|_1 = |\lambda| \|f\|_1$.

H3) $\|f\|_1 = 0$ si y sólo si f=0.

Así $(L^1(E), \|\cdot\|_1)$ es un espacio normado. Y se define

$$d(f,g) = \|f-g\|_1.$$

Si un espacio normado es completo se denomina espacio de *Banach*.

**Teorema 10.1.1** $L^1(E)$ es un espacio de Banach.

*Dem.* En la prueba usaremos el siguiente ejercicio.

**Ejercicio 10.1.1** Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado.
$(X, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach si y sólo si cada vez que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty,$$

existe $x \in X$ tal que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$.

Sea pues $f_i \in L^1(E)$ tal que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|f_i\|_1 < \infty.$$

Sea

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} |f_i(x)|.$$

$\Phi \in L^1(E)$ y entonces $\Phi$ es finita en casi todo punto. Por lo tanto,

$$S(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x),$$

está bien definida excepto sobre un conjunto de medida nula. Además $|S| \leq \Phi$ y $S \in L^1(E)$. Ahora, si

$$S_j(x) = \sum_{i=1}^{j} f_i(x),$$

tenemos que $S_j \to S$ en c.t.p. y $|S_j - S| \leq 2\Phi \in L^1(E)$ y por lo tanto, por Convergencia Mayorada de Lebesgue (Corolario 9.5.4),

$$\|S_j - S\|_1 = \int_E |S_j - S|\, dx \to 0 \text{ cuando } j \to \infty.$$

□

**Teorema 10.1.2** Sea $f_i \in L^1(E)$ tal que $f_i \xrightarrow{L^1(E)} f$, entonces existe una subsucesión $f_{i_k}$ tal que $f_{i_k} \to f$ en c.t.p.

*Dem.* Por la desigualdad de Chebyshev, se tiene

$$m(\{x : |f(x) - f_i(x)| > \varepsilon\}) \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_E |f(x) - f_i(x)|\, dx \xrightarrow{i\to\infty} 0.$$

Ésto muestra que si $f_i \xrightarrow{L^1(E)} f$ entonces $f_i \xrightarrow{m} f$. Luego, existe una subsucesión $f_{i_k} \to f$ en c.t.p. □

### 10.1.1 Conjuntos densos en $L^1(E)$

**Teorema 10.1.3 (Simples $\Rightarrow$ densas en $L^1(E)$)** El conjunto de las funciones simples es denso en $L^1(E)$.

*Dem.* Sea $f \in L^1(E)$. Existe una sucesión $\{f_i\}$ de funciones simples tal que $|f_i| \leq |f|$ y $f_i \to f$. Luego, $f_i \in L^1(E)$ y $|f - f_i| \leq 2|f|$. Así, por Convergencia Mayorada de Lebesgue (Corolario 9.5.4), $f_i \to f$ en $L^1(E)$. □

**Definición 10.1.1** Diremos que $\varphi$ es una función escalonada si $\varphi = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \chi_{I_i}$ con $I_i$ intervalos.

**Teorema 10.1.4 (Escalonadas $\Rightarrow$ densas en $L^1(E)$)** El conjunto de las funciones escalonadas es denso en $L^1(E)$.

*Dem.* Bastaría ver que $\chi_{E_0}$ es límite de funciones simples para cada $E_0 \subset E$ con $m(E_0) < \infty$. Ahora bien, ya se demostró que existe una sucesión de conjuntos elementales $A_k$, i.e. $A_k = \bigcup_{j=1}^{N_k} I_j^k$ tales que

$$m\left(E_0 \Delta A_k\right) \to 0,$$

siendo

$$m\left(E_0 \Delta A_k\right) = \int \left|\chi_E - \chi_{A_k}\right| dx = \int \left|\chi_E - \sum_{j=1}^{N_k} \chi_{I_j^k}\right| dx.$$

□

**Ejercicio 10.1.2** El conjunto de las funciones continuas con soporte compacto es denso en $L^1(\mathbb{R}^n)$.

**Ejercicio 10.1.3** $L^1(E)$ es separable.

## 10.2 Espacio de funciones esencialmente acotadas

La función medible $f$ es esencialmente acotada sobre $E$ si existe $M > 0$ tal que

$$|f(x)| \leq M \text{ en c.t.p. de } E. \tag{10.1}$$

$M$ se llama cota esencial de $f$. Si $f$ es esencialmente acotada sobre $E$, denotamos por $\|f\|_\infty$ al ínfimo de los $M$ que satisfacen (10.1).

**Ejercicio 10.2.4** $\|f\|_\infty$ es cota esencial de $f$ y de hecho es la má chica de las cotas.

Si $f$ no es esencialmente acotada ponemos $\|f\|_\infty = \infty$.
Notamos con $L^\infty(E)$ al conjunto de todas las funciones esencialmente acotadas.

**Ejercicio 10.2.5**

1. $L^\infty(E)$ es espacio vectorial.
2. $(L^\infty(E), \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio de Banach.
3. Las funciones simples son densas en $L^\infty(E)$.

**Ejemplo 10.2.1** Las funciones escalonadas no son densas en $L^\infty(E)$.
Por ejemplo, si $\varphi$ es escalera en $\mathbb{R}$ se tiene $\|\chi_{\mathbb{Q}} - \varphi\|_\infty \geq \frac{1}{2}$.
**EN LAS NOTAS MANUSCRITAS APARECE ALGO ASI...QUE NO SE VE BIEN..FALTA ALGO...!!!**
En efecto, si tomamos un abierto $G$ tal que $\mathbb{Q} \subset G$ y $|G| < \frac{1}{2}$.

$$\left|\frac{1}{2} - \alpha_n\right| \leq \|f - \varphi_n\|_\infty < \frac{1}{2}$$

Si $f \in L^1(E)$ y $g \in L^\infty(E)$ entonces $fg \in L^\infty(E)$ y

$$\int_E |fg|\,dx \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty.$$

Así está bien definida la función

$$\ell_g : L^1(E) \to \mathbb{R}$$
$$\ell_g(f) = \int_E fg\,dx.$$

$\ell_g$ es lineal y verifica

$$|\ell_g(f)| \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty.$$

Diremos que una función lineal $T$ de un espacio normado $X$ en un espacio normado $Y$ es acotada si existe $M > 0$ tal que

$$\|Tx\|_Y \leq M\|x\|_X.$$

**Proposición 10.2.1** $T$ es acotada si y sólo si $T$ es continua.

*Dem.* $\Rightarrow$) Sean $\varepsilon > 0$, $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$ y $\|x-y\|_X < \varepsilon$. Entonces

$$\|Tx - Ty\|_Y = \|T(x-y)\|_Y \leq M\|x-y\|_X < \varepsilon.$$

$\Leftarrow$) $T(0) = 0$ y $T$ es continua en cero. Luego, existe $\delta > 0$ tal que si

$$\|x\|_X \Rightarrow \|Tx\|_Y < 1.$$

Sea $x$ cualquiera, entonces $\left\|\frac{\delta}{2}\frac{x}{\|x\|_X}\right\|_X < \delta$. Luego,

$$\left\|T\left(\frac{\delta}{2}\frac{x}{\|x\|_X}\right)\right\|_Y$$

entonces

$$\|Tx\|_Y \leq \frac{2}{\delta}\|x\|_X.$$

□

Al conjunto de todas las funciones lineales y acotadas entre $X$ e $Y$ se lo denota $L(X,Y)$.

$L(X,Y)$ es espacio vectorial y podemos definir la norma

$$\begin{aligned}\|T\| &= \sup\{\|Tx\| : \|x\| \leq 1\}\\ &= \sup\{\|Tx\| : \|x\| = 1\}\\ &= \sup\left\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|} : x \in X\right\}\\ &= \inf\{M : \|Tx\| \leq M\|x\|\ \forall x \in X\}.\end{aligned}$$

**Ejercicio 10.2.6** Probar la equivalencia entre las definiciones de $\|T\|$.

**Ejercicio 10.2.7** Si $Y$ es completo, entonces $L(X,Y)$ también lo es.

Así $L(X,\mathbb{R})$ es un espacio de Banach que se llama *dual* de $X$ y se denota por $X^*$,

Diremos que $X$ e $Y$ son isométricos si existe un isomorfismo $T : X \to Y$ tal que $\|Tx\|_Y = \|x\|_X$.

Escribiremos $X \cong Y$.

**Teorema 10.2.5** $(L^1)^* \cong L^\infty$.
Comúnmente se escribe, por abuso de notación, $(L^1)^* = L^\infty$.

*Dem.* Consideremos

$$\begin{aligned} \ell : L^\infty &\longrightarrow (L^1)^* \\ g &\longmapsto \ell_g. \end{aligned}$$

Ahora

$$\|\ell(g)\|_{(L^1)^*} = \|\ell_g\|_{(L^1)^*} = \sup_{\|f\|_1=1} |\ell_g(f)| \leq \sup_{\|f\|_1=1} \|g\|_\infty \|f\|_1 = \|g\|_\infty.$$

Sea ahora $g$ no nula, entonces dado $\varepsilon > 0$ tenemos

$$m\left(\{x : |g| > \|g\|_\infty - \varepsilon|\}\right) > 0.$$

Si $A \subset \big(\{x|\ |g| > \|g\|_\infty - \varepsilon|\}\big)$ con $0 < m(A) < \infty$ y definimos

$$f = \operatorname{sgn}(g) \frac{1}{m(A)} \chi_A,$$

entonces

$$\begin{aligned} \|\ell_g\|_{(L^1)^*} \geq & \ell_g(f) = \int_E gf\,dx \\ &= \frac{1}{m(A)} \int_A |g|\,dx \geq \|g\|_\infty - \varepsilon. \end{aligned}$$

Luego, $\|\ell_g\|_{(L^1)^*} = \|g\|_\infty$.

La prueba de la segunda parte del teorema se verá más adelante. □

## 10.3 Espacio de funciones de cuadrado integrable

Denotamos por $L^2(E)$ al conjunto de todas las funciones $f$ medibles sobre $E$ tales que

$$\int_E |f|^2\,dx < \infty.$$

Si $f, g \in L^2(E)$ entonces $fg \in L^1(E)$ pues

$$fg \leq \frac{1}{2}\left(f^2 + g^2\right).$$

Luego, $(f+g)^2 \in L^1(E)$ y entonces se dice que $L^2(E)$ es espacio vectorial.

Para $f, g \in L^2(E)$, definimos

$$(f,g) = \int_E fg\,dx.$$

$(\ ,\ )$ es un producto escalar o interno sobre $\mathbb{R}$, ésto es, $(\ ,\ )$ satisface

1. $(f, g+h) = (f, g) + (f, h)$,
2. $(f, g) = (g, f)$,
3. $(f, f) \geq 0$,
4. $(f, f) = 0$ si y sólo si $f = 0$.

Si ponemos $\|f\|_2 = (f, f)^{1/2}$, obtenemos una norma y se satisface la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$(f, g) \leq \|f\|_2 \|g\|_2.$$

Un espacio vectorial $H$ sobre el que se tiene definido un producto escalar $(\ ,\ )$ el cual da origen a una norma que hace a $H$ completo se llama espacio de *Hilbert*.

**Teorema 10.3.6** $L^2(E)$ es espacio de Hilbert.

*Dem.* Resta ver la completitud.

Sea $f_n$ una sucesión de Cauchy, entonces dado $\varepsilon > 0$ tenemos que

$$m\left(\{x : |f_n(x) - f_m(x)| > \varepsilon\}\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \int_E |f_n(x) - f_m(x)|^2 \, dx.$$

Así, $\{f_n\}$ es fundamental en medida. Por lo tanto, existe $f$ tal que $f_n \xrightarrow{m} f$ y existe una subsucesión $\{n_k\}$ tal que $f_{n_k} \to f$ en c.t.p.de $E$.

A continuación veremos que $f \in L^2(E)$ y $f_n \to f$ en $L^2(E)$.

Como $\{f_n\}$ es sucesión de Cauchy en $L^2(E)$, entonces está acotada en $L^2(E)$, o sea, existe $M > 0$ tal que $\|f\|_2 \leq M$. Luego, por el Lema de Fatou (Lema 9.3.2),

$$\int_E |f|^2 \, dx \leq \liminf_{k\to\infty} \int_E |f_{n_k}|^2 \, dx \leq M^2.$$

Nuevamente, por el Lema de Fatou (Lema 9.3.2), llegamos a

$$\int_E |f_n - f|^2 \, dx \leq \liminf_{k\to\infty} \int_E |f_n - f_{n_k}|^2 \, dx \leq \varepsilon,$$

si $n$ es grande. □

### 10.3.1 Algunos hechos sobre espacios de Hilbert

**Teorema 10.3.7** Sean $H$ un espacio de Hilbert, $M$ un subsespacio cerrado de $H$ y $x \in H$. Entonces existe $m \in M$ tal que

$$\|x - m\| \leq \|x - h\| \ \forall h \in M.$$

*Dem.* Sea $m_k \in M$ tal que **CHEQUEAR LA SIGUIENTE FORMULA!!!, en el pdf NO SE VE BIEN!!!**

$$\|x - m_k\| \leq d\|x_1\| + \frac{1}{k}.$$

Utilizamos la *Identidad del Paralelogramo*

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right),$$

con los vectores $x - m_k$

$$\left\| \frac{x - m_k + x - m_j}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{x - m_k - (x - m_j)}{2} \right\|^2 = \frac{1}{2} \left( \|x + m_k\|^2 + \|x - m_j\|^2 \right),$$

y obtenemos

$$\left\| \frac{m_j - m_k}{2} \right\|^2 \leq \frac{1}{2} \left( d_k^2 + d_j^2 \right) - d^2 \xrightarrow{k,j \to \infty} 0.$$

De este modo, resulta que $\{m_j\}$ es una sucesión de Cauchy, entonces $m_j \to m$ y se satisface lo pedido. $\square$

**Definición 10.3.2** $m$ del Teorema 10.3.7 se llama la proyección de $x$ sobre $M$ y se denota $P_M(x)$.

**Teorema 10.3.8** Sean $H$ y $M$ como en el Teorema 10.3.7. Entonces son equivalentes

1. $m = P_M(x)$,
2. $x - m \perp M$, o sea $(x - m, h = 0)$ $\forall h \in M$.

*Dem.* $1) \Rightarrow 2)$ Sea $h \in M$. Entonces

$$\|x - (m + \lambda h)\|^2 \geq \|x - m\|^2 \Leftrightarrow$$
$$\|x - m\|^2 - 2\lambda(x - m, h) + \lambda^2 \|h\|^2 \geq \|x - m\|^2.$$

A partir de aquí, se deduce que $(x - m, h) \geq 0$. Luego, como ésto vale para $-h$ se concluye $2)$.

$2) \Rightarrow 1)$ Sea $h \in M$. Luego

$$\|x - m\|^2 = (x - m, x - m) = (x - m, x - h) \leq \|x - m\| \|x - h\|.$$

Si $v \in H$ entonces $\ell_v : H \to \mathbb{R}$ definida por $\ell_v(u) = (u, v)$ satisface $l_v \in H^*$. $\square$

**Teorema 10.3.9** [Representación de Riesz] La aplicación $v \longmapsto \ell_v$ es una isometría suryectiva de $H$ en $H^*$.

*Dem.* Se tiene

$$\|\ell_v\| = \sup_{\|u\| \leq 1} \ell_v(u) = \sup_{\|v\| \leq 1} (u, v) \leq \|v\|.$$

Además

$$\|\ell_v\| \geq \left\| \ell_v \left( \frac{v}{\|v\|} \right) \right\| = \|v\|.$$

Claramente, $\ell$ es lineal. Resta ver que $\ell$ es suryectiva.

Sea $\ell \in H^*$ y supongamos que $\ell \neq 0$. Definimos

$$N = \{x \in H : \ell(x) = 0\}.$$

Como $\ell$ es lineal y continua, $N$ es un subespacio cerrado y $N \neq H$. Sea $y_0 \notin N$. Existe $x \in N$ tal que

$$y := y_0 - x \perp N.$$

Podemos suponer $\|y\| = 1$. Sea $x \in H$ entonces

$$x = \left(x - \frac{\ell(x)}{\ell(y)}y\right) + \frac{\ell(x)}{\ell(y)}y =: u + \alpha y.$$

Notar que $u \in N$. Sea $v = \ell(y)y$ entonces

$$\ell(\alpha y) = (\alpha y, v).$$

Si $x \in N$ entonces $(v, x) = 0$. Luego, $\forall x \in H$ tenemos

$$\ell(x) = \ell(u) + \ell(\alpha y) = (u, v) + (\alpha y, v) = (x, v).$$

□

**Lema 10.3.1** Si $\int_E |fg|\,dx < \infty$ para toda $f \in L^1(E)$, entonces $g \in L^\infty(E)$.

*Dem.* Supongamos que $g \notin L^\infty(E)$. Sea $A_i$ tal que $0 < m(A_i) < \infty$ y

$$A_i \subset \left\{x : 2^i < |g(x)|\right\}.$$

Consideramos

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i m(A_i)} \chi_{A_i}$$

tal que $f \in L^1(E)$. Luego, $|fg| \notin L^1(E)$. □

Ahora completaremos la demostración de $(L^1)^* = L^\infty$.
*Dem.*[Segunda parte de la prueba del Teorema 10.2.5] Sea $\ell \in (L^1)^*$. Supongamos que $m(E) < \infty$. Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos

$$|\ell(f)| \leq \|\ell\|\|f\|_1 = \|\ell\| \int_E |f|\,dx \leq \|\ell\|\,[m(E)]^{1/2}\,\|f\|_2,$$

si $f \in L^2(E)$. Entonces $\ell$ define un elemento de $(L^2)^*$. Luego, existe $g \in L^2(E)$ con

$$\ell(f) = \int_E fg\,dx = \ell_g(f),\ \forall f \in L^2(E).$$

Como $\ell$ es lineal y continua,

$$\int_E |fg|\,dx \leq \|\ell\|\|f\|_1,\ \forall f \in L^2(E).$$

Si $f \in L^1(E)$, definimos $f_n = \text{mín}\{n, |f|\}$. Luego, se tiene que $f_n \in L^2(E)$ y $f_n \nearrow |f|$. Entonces, por el Teorema de Beppo-Levi (Teorema 9.3.5), se obtiene

$$\int_E |f||g|\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n g\,dx \leq \lim_{n\to\infty} \|\ell\|\|f_n\|_1 = \|\ell\|\|f\|_1.$$

Por el Lema 10.3.1, resulta que $g \in L^\infty(E)$. Como $L^2 \cap L^1$ es denso en $L^1$ tenemos $\ell - \ell_g \in L^1$.

Si $m(E) = \infty$, escribimos $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ con $m(E_k) < \infty$ y $E_k \cap E_j = \varnothing$ si $k \neq j$.

□

## 10.4 Finalmente...los espacios $L^p$

Sea $1 \leq p < \infty$. Dado $E$ medible y $f : E \to \mathbb{R}$, definimos

$$\|f\|_p = \left\{ \int_E |f(x)|^p \, dx \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Las funciones que verifican $\|f\|_p < \infty$ forman la clase $L^p(E)$.

$L^p(E)$ es un espacio normado con $\|\cdot\|_p$ como norma. A continuación, demostraremos la desigualdad triangular.

Supondremos que $\|f\|_p, \|g\|_p > 0$. Como $t^p$ es convexa para $1 \leq < \infty$ tenemos

$$\left( \frac{|f(x)| + |g(x)|}{\|f\|_p + \|g\|_p} \right)^p \leq \frac{\|f\|_p}{\|f\|_p + \|g\|_p} \frac{|f|^p}{\|f(x)\|_p} + \frac{\|g\|_p}{\|f\|_p + \|g\|_p} \frac{|g(x)|^p}{\|g\|_p}.$$

Integrando sobre $E$ obtenemos

$$\int_E \left( \frac{|f(x)| + |g(x)|}{\|f\|_p + \|g\|_p} \right)^p dx \leq 1.$$

A partir de aquí, despejando se deduce la desigualdad triangular también llamada *desigualdad de Minkowski*.

**Ejercicio 10.4.8** $L^p(E)$ es espacio de Banach.

Sean $1 < p < \infty$ y $q$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
$q$ se llama exponente conjugado de $p$ y satisface $1 < q < \infty$.

**Lema 10.4.2** Si $a, b \geq 0$ se cumple que

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

*Dem.* Empleando propiedades de las funciones exponenciales y logarítmicas se puede escribir

$$ab = e^{\ln a} e^{\ln b} = e^{\frac{\ln a^p}{p}} e^{\frac{\ln b^p}{p}} = e^{\frac{\ln a^p}{p} + \frac{\ln b^p}{p}}.$$

Dado que $e^x$ es función convexa, se tiene que

$$e^{\frac{\ln a^p}{p} + \frac{\ln b^p}{p}} \leq \frac{1}{p} e^{\ln a^p} + \frac{1}{q} e^{\ln b^q} = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

□

Si ahora $f \in L^p$ y $g \in L^q$, reemplazamos $a$ por $\frac{|f(x)|}{\|f\|_p}$ y $b$ por $\frac{|g(x)|}{\|g\|_p}$, integramos sobre $E$ y obtenemos

$$\int_E \frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \frac{|g(x)|}{\|g\|_p} \, dx \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

A partir de aquí, deducimos que $fg \in L^1(E)$ y se satisface

$$\int_E fg \, dx \leq \|f\|_p \|g\|_q, \quad \textbf{Desigualdad de Hölder.}$$

Otra desigualdad importante es la que se presenta a continuación.

**Lema 10.4.3** [Desigualdad de Jensen] Sea $f \in L^1(E)$ con $0 < m(E) < \infty$ y sea $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexa. Entonces

$$\varphi\left(\frac{1}{m(E)} \int_E f(x)\, dx\right) \leq \frac{1}{m(E)} \int_E \varphi(f)\, dx.$$

*Dem.* Como $\varphi$ es función convexa, para todo $x_0 \in \mathbb{R}$ existe $a \in \mathbb{R}$ tal que

$$\varphi(x) \geq \varphi(x_0) + a(x - x_0).$$

Luego,

$$\begin{aligned}\frac{1}{m(E)} \int_E \varphi(f)\, dx &\geq \frac{1}{m(E)} \int_E \varphi(x_0) + a(f(x) - x_0)\, dx \\ &= \varphi(x_0) + a\frac{1}{m(E)} \int_E f(x)\, dx - ax_0.\end{aligned}$$

Ahora, tomamos $x_0 = \frac{1}{m(E)} \int_E f(x)\, dx$ y conseguimos la desigualdad buscada. □

**Teorema 10.4.10** Sea $f$ medible sobre $E$ y $1 \leq p \leq \infty$. Entonces

1. Si $f \in L^p$, entonces

$$\|f\|_p = \sup_g \int_E fg\, dx, \tag{10.2}$$

   donde el supremo se toma sobre todas las funciones $g$ tales que $\|g\|_q \leq 1$.

2. Si el supremo en (10.2) es finito entonces $f \in L^p$ y dicho supremo es $\|f\|_p$.

*Dem.* El caso $p = \infty$ ya fue analizado, así que veremos el caso $1 \leq p < \infty$.

1. Por la desigualdad de Hölder tenemos

$$\sup_{\|g\|_q \leq 1} \int_E fg\, dx \leq \|f\|_p.$$

   Supongamos que $f \neq 0$, pues $f = 0$ es trivial. Sea $g = \frac{|f|^{p-1}}{\|f\|_p^{p-1}}$ sgn $f$, entonces $g \in L^q$ y $\|g\|_q \leq 1$ y

$$\int_E fg\, dx = \|f\|_p.$$

2. Supongamos que $f \geq 0$ tal que $\|f\|_p = \infty$. Definimos

$$f_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \geq k \\ \text{mín}\{f(x), k\} & \text{si } |x| \leq k, \end{cases}$$

   entonces $f_k \in L^p$ y por el Teorema de Beppo-Levi (Teorema 9.3.5), tenemos $\|f_k\|_p \nearrow \|f\|_p = \infty$. Sea $g_k \in L^q$ con $\|g_k\|_q = 1$ y

$$\int_E f_g g_k\, dx = \|f_k\|_p.$$

   Luego,

$$\sup_{\|g_k\|_q \leq 1} \int_E fg\, dx \geq \int_E fg_k\, dx \geq \int_E f_k g_k\, dx = \|f\|_p \nearrow \infty.$$

□

Notar que si $g \in L^q$, entonces

$$\begin{aligned} \ell_g : L^p &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \int_E fg\,dx, \end{aligned}$$

es una funcional lineal acotada.

**Teorema 10.4.11** [Representación de Riesz]

$$[L^p(E)]^* = L^q(E).$$

# 10.5 Función maximal de Hardy-Littlewood y teorema de difrenciación de Lebesgue

## 10.5.1 Un lema de cubrimiento

**Lema 10.5.4** Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ medible y supongamos que $E$ es cubierto por una unión de bolas $B_i$, con $i \in I$, de diámetro acotado. Entonces existe una subfamilia de bolas $B_1, B_2, \ldots,$ de la familia dada, disjuntas dos a dos y tal que

$$\sum_k m(B_k) \leq Cm(E),$$

donde $C$ depende de la dimensión $n$ ($5^- n$ funciona).

*Dem.* Sea $B_1$ tal que

$$\text{diam } B_1 \geq \frac{1}{2} \sup_{i \in I} \text{diam } B_i.$$

Una vez que hemos elegido $B_k$, seleccionamos $B_{k+1}$ de modo que

$$\text{diam } B_{b_1} \geq \frac{1}{2} \text{diam } B_i,$$

para toda $B_i$ que .... □

**LAS NOTAS MANUSCRITAS SUBIDAS AL MOODLE LLEGAN HASTA ACÁ!!!!**

# 11 Medidas abstractas

«Me gustaría enfatizar nuevamente, antes de comenzar esta presentación, que la nueva definición será aplicable no solo a un espacio con $n$ dimensiones sino a un conjunto abstracto. Es decir, ni siquiera es necesario, por ejemplo, suponer que sabemos cuál es el límite de elementos en este conjunto»

M. Frechet
Sur l'intégrale d'une fonctionnelle étendueà un ensemble abstrait
Bulletin de la S. M. F., tome 43 (1915), p. 248-265.

En todos los capítulos anteriores hemos tratado de fundar los conceptos que fuimos introduciendo relacionándolos con conceptos que juzgamos los precedían. cuando decimos "preceder"contemplamos tanto el orden lógico de la construcción como el grado de abstracción de los objetos de estudio.

En esta unidad planteamos un salto cualitativo. Vamos abstraernos de la problemática que dió origen a la construcción de la medida en itengral de Lebesgue, esto es la noción de área, y consideraremos una teoría axiomática, donde postularemos como axiomas aquellas propiedades que se revelaron trascendentes en los capítulos anteriores. Este enfoque axiomático se abstrae a su vez de las entidades a las que pretendemos medir, en el sentido que ya no formularemos el concepto de medida para subconjuntos de $\mathbb{R}$, o el espacio euclideano $\mathbb{R}^n$. Introducieremos el concepto de *espacio de medida* como una abstracción y veremos como este concepto induce un consecuente concepto de integral.

Las nociones introducidas aquí fueron presentadas por primera vez por M. Frechet en el artículo del cual fue extraída la cita con la que comensamos el presente capítulo.

La noción de medida abstracta es muy fructífera pues unifica multitud de instancias particulares de esta noción que aparecen en distintas áres de la matemática además de contemplar la medida de Lebesgue.

## 11.1 Algebras, $\sigma$-álgebras y clases monótonas

**Definición 11.1.1 (Algebra de conjuntos)** Sea $X$ un conjunto y $\mathscr{A} \subset \mathcal{P}(X)$. Diremos que $\mathscr{A}$ es un *álgebra* si:

1. $\varnothing \in \mathscr{A}$.
2. $A \in \mathscr{A} \Rightarrow A^c \in \mathscr{A}$.
3. $A_i \in \mathscr{A}$, $i = 1, \ldots, n$, $\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathscr{A}$.

**Ejercicio 11.1.1** Demostrar que los siguientes ejemplos definen álgebras de conjuntos.

1. La colección de todas las uniones de una cantidad finita de intervalos de $\mathbb{R}$, donde por intervalo inlcuímos tanto acotados como no y tanto abiertos como cerrados como ninguno de ambos.
2. Como en el ejemplo anterior, pero con los extremos de los intervalos en $\mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\}$ o $\mathbb{Q} \cup \{\pm\infty\}$.
3. Más generalmente aún, como en los ejemplos anteriores, pero con los extremos de los intervalos en $A \cup \{\pm\infty\}$, donde $A \subset \mathbb{R}$.

**Ejercicio 11.1.2** Demostrar que $\mathscr{A}$ es un álgebra si y solo si

1. $\varnothing \in \mathscr{A}$.
2. $A \in \mathscr{A} \Rightarrow A^c \in \mathscr{A}$.
3. $A_i \in \mathscr{A}$, $i = 1, \ldots, n$, $\Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathscr{A}$.

**Definición 11.1.2 (Clases monótonas)** Sea $X$ un conjunto y $\mathscr{A} \subset \mathcal{P}(X)$. El conjunto $\mathscr{A}$ se llamará *clase monótona* si

1. $A_i \in \mathscr{A}$, $A_i \subset A_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{A}$.
2. $A_i \in \mathscr{A}$, $A_i \supset A_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{A}$.

**Ejercicio 11.1.3** Demostrar que los siguientes ejemplos definen clases monótonas.

1. La colección de todos los intervalos de $\mathbb{R}$ de la forma $(a, +\infty)$ o $[a, +\infty)$ con $a \in [-\infty, +\infty)$.
2. En $\mathbb{R}^n$ la colección de de todas las bolas, tanto cerradas o abiertas, de centro $0$ y radio $r \in [0, +\infty]$.
3. La colección de todos los subgrupos de un grupo dado $G$.

Recordemos del capítulo anterior.

**Definición 11.1.3 ($\sigma$-álgebra de conjuntos)** Sea $X$ un conjunto y $\mathscr{A} \subset \mathcal{P}(X)$. Diremos que $\mathscr{A}$ es una *$\sigma$-álgebra* si:

1. $\varnothing \in \mathscr{A}$.
2. $A \in \mathscr{A} \Rightarrow A^c \in \mathscr{A}$.
3. $A_i \in \mathscr{A}$, $i = 1, \ldots$, $\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{A}$.

**Ejercicio 11.1.4** Demostrar que $\mathscr{A}$ es $\sigma$-álgebra si y sólo si es clase monótona y álgebra.

**Ejercicio 11.1.5** Demostrar que $\mathscr{A}$ es $\sigma$-álgebra si y sólo si es álgebra y satisface que

- $E_n \in \mathscr{A}$, $n = 1, 2, \ldots$ y $E_i \cap E_j = \varnothing$, cuando $i \neq j$ implican que $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathscr{A}$.

## 11.2 Medidas

**Definición 11.2.4** Sea $X$ un conjunto y $\mathscr{A}$ una $\sigma$-álgebra. Una funcion $\mu : \mathscr{A} \to [0, +\infty]$ se llama una *medida* si para toda colección numerable de subconjuntos $A_i \in \mathscr{A}$, $i = 1, 2, \ldots$, mutuamente disjuntos entre si, se satisface que

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Al triplete $(X, \mathscr{A}, \mu)$ se lo denomina *espacio de medida*..

**Ejercicio 11.2.6** Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ espacio de medida. Demostrar que se satisface las siguientes relaciones

1. $\mu(\varnothing) = 0$.
2. $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$.
3. Si $\mu(B) < \infty$ y $B \subset A$ entonces $\mu(A - B) = \mu(A) - \mu(B)$.

**Ejemplo 11.2.1** $(\mathbb{R}, \mathscr{M}, m)$, donde $\mathscr{M}$ denota la $\sigma$-algebra de los conjuntos medibles Lebesgue y $m$ la medida de Lebesgue, es un espacio de medida. Si en lugar de considerar la $\sigma$-álgebra $\mathscr{M}$ consideramos la $\sigma$-álgebra $\mathscr{B}$ de conjuntos medibles Borel, resulta en otro espacio de medida $(\mathbb{R}, \mathscr{B}, m)$, que no es más que la restricción de la medida a una sub-$\sigma$-álgebra.

**Ejercicio 11.2.7 (Medida de conteo)** Sea $X$ es un conjunto y $\mathscr{A} = \mathcal{P}(X)$ la colección de todos los subconjuntos de $X$. Para $A \in \mathscr{A}$ escribamos $\mu(A) = \#A$, cuando $A$ es finito, y $\mu(A) = +\infty$ cuando $A$ no es finito. Demostrar que el triple $(X, \mathscr{A}, \mu)$ es espacio de medida.

**Ejercicio 11.2.8** Sea $X = \mathbb{N}$ y $\mathscr{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ la colección de todos los subconjuntos de $\mathbb{N}$. Supongamos dada una función $f : \mathbb{N} \to [0, +\infty]$. Para $A \in \mathscr{A}$ escribamos

$$\mu(A) = \sum_{n \in A} f(n),$$

Demostrar que el triple $(\mathbb{N}, \mathscr{A}, \mu)$ es espacio de medida. ¿Qué resulta $\mu$ si $f(n) = 1$ para todo $n$? ¿Qué condición debe satisfacer $f$ para que $\mu(A) < \infty$ para todo $A \subset \mathbb{N}$?

**Ejercicio 11.2.9** Sea $X = \mathbb{N}$ y $\mathscr{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ la colección de todos los subconjuntos de $\mathbb{N}$. Sea $k$ un natural fijo. Para $A \subset \mathbb{N}$ escribir

$$\mu(A) = \#\{n \in A : k|n\},$$

es decir $\mu(A)$ cuenta cuantos multiplos de $k$ hay en $A$. Demostrar que $\mu$ es medida. Demostrar que esta medida es una instancia de las medidas introducidas en (11.2.8).

Un ejemplo muy importante es provisto por la siguiente proposición

**Proposición 11.2.1** Sea $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ una función integrable y no negativa. El triplete $(\mathbb{R}, \mathscr{M}, \mu_f)$ es espacio de medida, donde $\mathscr{M}$ denota la $\sigma$-algebra de los conjuntos medibles Lebesgue y

$$\mu_f(A) = \int_A f(x)dx.$$

*Dem.* Sólo hay que demostrar que $\mu_f$ es una medida. Sean $A_i \in \mathscr{A}$, $i = 1, \ldots$, mutuamente disjuntos.

**Ejercicio 11.2.10** Verificar la siguiente relación

$$\chi_{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} = \sum_{i=1}^{\infty} \chi_{A_i}.$$

Luego por la intercambiabilidad entre integral y series de términos positivos

$$\begin{aligned} \mu_f\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) &= \int_{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} f(x)dx = \int \chi_{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} f(x)dx \\ &= \int \sum_{i=1}^{\infty} \chi_{A_i} dx = \sum_{i=1}^{\infty} \int \chi_{A_i} dx = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_f(A_i). \end{aligned}$$

□

**Ejercicio 11.2.11 (Delta de dirac)** Sea $X$ un conjunto no vacío cualquiera, $a \in X$ un punto fijo y $\mathscr{A} = \mathcal{P}(X)$. Definimos $\delta_a : \mathscr{A} \to [0, +\infty]$ por

$$\delta_a(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \in A \\ 0 & \text{si } a \notin A \end{cases}$$

Demostrar que $(X, \mathscr{A}, \delta)$ es un espacio de medida. La medida $\delta_a$ se denomina *$\delta$ de Dirac*.

**Definición 11.2.5 (Completitud de medidas)** Un espacio de medida se llama *completo* si $A \subset B \in \mathscr{A}$ y $\mu(B) = 0$ implican $A \in \mathscr{A}$.

**Ejemplo 11.2.2** $(\mathbb{R}, \mathscr{M}, m)$ es un espacio de medida completo, mientras que $(\mathbb{R}, \mathscr{B}, m)$ no lo es.

Paul Adrien Maurice
(Brístol, Reino Unido
agosto de
1902-Tallahassee, E
Unidos, 20 de octub
1984) fue un ingenie
eléctrico, matemátic
físico teórico britán
contribuyó de forma
fundamental al desa
de la mecánica cuán
electrodinámica cuá

## 11.3 Medida exterior

**Definición 11.3.6 (Medida exterior)** Sea $X$ un conjunto no vacío. Una función $\mu^\star : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ se denomina una *medida exterior* si satisface que

$\mu^\star(\varnothing) = 0.$

**Monotonía.** $A_1 \subset A_2 \Rightarrow \mu^\star(A_1) \leq \mu^\star(A_2)$

$\sigma$**-subaditividad.** $A_j \subset X$, $j = 1, 2, \ldots, \Rightarrow \mu^\star\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^\star(A_j)$.

**Ejemplo 11.3.3** La medida exterior que definimos sobre subconjuntos de $\mathbb{R}$ es obviamente una medida exterior en el sentido de la definición anterior.

**Definición 11.3.7 (Conjuntos medibles de Caratheódory)** Sea $\mu^\star$ una medida exterior sobre $X$ y $E \subset X$. Diremos que $E$ es *medible en el sentido de Charathéodory* si para todo $A \subset X$ se cumple que

$$\mu^\star(A) = \mu^\star(A \cap E) + \mu^\star(A - E). \tag{11.1}$$

**Observacion 11.3.1** A los efectos de chequear si un conjunto es medible es suficiente probar que se satisface la desigualdad

$$\mu^\star(A) \geq \mu^\star(A \cap E) + \mu^\star(A - E). \tag{11.2}$$

para todo $A$ con medida exterior finita.

**Teorema 11.3.1** Si $\mu^\star$ es una medida exterior sobre $X$ y $\mathscr{A}$ el conjunto de todos los subconjuntos de $X$ que son medibles según Carathéodory. Entonces $\mathscr{A}$ es una $\sigma$-álgebra y $\mu^\star$ restringido a $\mathscr{A}$ es una medida. El espacio de medida $(X, \mathscr{A}, \mu^\star)$ es completo

*Dem.* Que $\varnothing \in \mathscr{A}$ es una afirmación inmediata.

Si uno escribe la condición de Carathéodory para $E^c$ queda exactamente igual que la respectiva condición para $E$. Esta observación justifica que $E \in \mathscr{A}$ implica que $E^c \in \mathscr{A}$.

Sean $E_1, E_2 \in \mathscr{A}$ y $A \subset X$. Entonces

$$\begin{aligned}
\mu^\star(A) \geq \mu^\star(A \cap E_2) + \mu^\star(A \cap E_2^c) \\
\geq \mu^\star(A \cap E_1 \cap E_2) + \mu^\star(A \cap E_2 \cap E_1^c) \\
+ \mu^\star(A \cap E_2^c \cap E_1) + \mu^\star(A \cap E_2^c \cap E_1^c)
\end{aligned}$$

Ahora los conjuntos $E_2 \cap E_1, E_2 \cap E_1^c$ y $E_1 \cap E_2^c$ son mutuamente disjuntos y su unión es $E_1 \cup E_2$. Esta observación aplicada a los tres primeros términos del último miembro de la desigualdad anterior implica

$$\mu^\star(A) \geq \mu^\star(A \cap (E_1 \cup E_2)) + \mu^\star(A \cap (E_1 \cup E_2)^c).$$

De esta desiguldad concluímos que $E_2 \cup E_2 \in \mathscr{A}$. Esto a su vez implica que $\mathscr{A}$ es (al menos) un álgebra. Queremos ver que en realidad es $\sigma$-álgebra.

Supongamos que $E_1 \cap E_2 = \varnothing$. Tomando $A = E_1 \cup E_2$ en (11.2) obtenemos

$$\mu^\star(E_1 \cup E_2) \geq \mu^\star(E_1) + \mu^\star(E_2).$$

**Ejercicio 11.3.12** Generalizar la desigualdad anterior de la siguiente forma. Si $E_j$, $j = 1, \ldots, n$ son mutuamente disjuntos entonces

$$\mu^\star(E_1 \cup \cdots \cup E_2) \geq \mu^\star(E_1) + \cdots + \mu^\star(E_n).$$

Siguiendo con la demostración, sean $E_n \in \mathscr{A}$, $n = 1, 2, \ldots$ una colección numerables de conjuntos mutuamente disjuntos en $\mathscr{A}$. Tomemos $G_n = \bigcup_{j=1}^{n} E_j$ y $G = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$.

Como $\mathscr{A}$ es un álgebra, $G_n \in \mathscr{A}$. Además usando sucesivamente la condición de Carathéodory

$$\begin{aligned}
\mu^\star(G_n \cap A) &\geq \mu^\star(G_n \cap A \cap E_n) + \mu^\star(G_n \cap A \cap E_n^c) \\
&= \mu^\star(A \cap E_n) + \mu^\star(G_{n-1} \cap A) \\
&\geq \mu^\star(A \cap E_n) + \mu^\star(A \cap E_{n-1}) + \mu^\star(G_{n-2} \cap A) \\
&\quad \vdots \\
&\geq \sum_{j=1}^{n} \mu^\star(A \cap E_j).
\end{aligned} \tag{11.3}$$

Ahora deducimos que para todo $A \subset X$

$$\begin{aligned}
\mu^\star(A) &\geq \mu^\star(A \cap G_n) + \mu^\star(A \cap G_n^c) && (G_n \in \mathscr{A}) \\
&\geq \sum_{j=1}^{n} \mu^\star(A \cap E_j) + \mu^\star(A \cap G^c) && (\text{Ecuación (11.3)}, G_n \subset G)
\end{aligned}$$

Tomando límite cuando $n \to \infty$

$$\begin{aligned}
\mu^\star(A) &\geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^\star(A \cap E_j) + \mu^\star(A \cap G^c) \\
&\geq \mu^\star\left(A \cap \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) + \mu^\star(A \cap G^c) && (\sigma - \text{subaditividad de } \mu^\star) \\
&\geq \mu^\star(A \cap G) + \mu^\star(A \cap G^c)
\end{aligned}$$

Luego $G \in \mathscr{A}$. Ahora el Ejercicio 11.1.5 implican que $\mathscr{A}$ es $\sigma$-álgebra. Además por el Ejercio11.3.12, para $E_j, j = 1, \ldots$ mutuamente disjuntos en $\mathscr{A}$.

$$\begin{aligned}
\mu^\star\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) &\geq \mu^\star\left(\bigcup_{j=1}^{n} E_j\right) && (\text{monotonía de } \mu^\star) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \mu^\star(E_j) && (\text{Ejercicio 11.1.5})
\end{aligned}$$

Tomando límite cuando $n \to \infty$ obtenemos

$$\mu^\star\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^\star(E_j)$$

Como la desigualdad inversa a la anterior es siempre cierta por la $\sigma$-subaditividad queda demostrado que $\mu^\star$ es medida sobre $\mathscr{A}$ y finalizada la demostración del teorema. □

## 11.4 Premedidas

**Definición 11.4.8 (Premedida)** Sea $X$ un cojunto no vacío y $\mathscr{A}_0$ un álgebra de subconjuntos de $X$. Diremos que una función $\mu_0 : \mathscr{A}_0 \to [0, +\infty]$ es una **premedida** si satisface que

- Si $E_j \in \mathscr{A}_0, j = 1, 2, \ldots$ son mutuamente disjuntos y $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} E_j \in \mathscr{A}_0$ entonces

$$\mu_0\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(E_j)$$

Podemos construir medidas a partir de premedidas.

**Lema 11.4.1** Sea $\mu_0$ una premedida sobre el álgebra $\mathscr{A}_0$ de subconjuntos de $X$. Definimos $\mu^\star : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ por

$$\mu^\star(E) = \text{ínf}\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(E_j) \mid E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j, E_j \in \mathcal{A}_0\right\} \tag{11.4}$$

Entonces $\mu^\star$ es una medida exterior que satisface que $\mu^\star(E) = \mu_0(E)$ para todo $E \in \mathcal{A}_0$ y que todo conjunto $E \in \mathcal{A}_0$ es medible en el sentido de Carathéodory.

*Dem.*

**Ejercicio 11.4.13** Probar que $\mu^\star$ definida en (11.4) define en efecto una medida exterior.

Veamos que la restricción de $\mu_*$ to $\mathcal{A}$ coincide con $\mu_0$. Supongamos que $E \in \mathcal{A}$. Siempre $\mu_*(E) \le \mu_0(E)$ pues $E$ se cubre a si mismo. Probemos la desigualdad recíproca. Supongamos $E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$, con $E_j \in \mathcal{A}$ para todo $j$. Definimos

$$E_k' = E \cap \left(E_k - \bigcup_{j=1}^{k-1} E_j\right).$$

Los conjuntos $E_k'$ son mutuamente disjuntos, $E_k' \in \mathcal{A}$, $E_k' \subset E_k$ y $E = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k'$. Por la definición de premedida:

$$\mu_0(E) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_0(E_k') \le \sum_{k=1}^{\infty} \mu_0(E_k)$$

Luego $\mu_0(E) \le \mu_*(E)$.

Por último probemos que los conjuntos en $\mathcal{A}$ son medibles para $\mu_*$. Sea $A \subset X$, $E \in \mathcal{A}$ y $\varepsilon > 0$. Por definición existen $E_1, E_2, \ldots$ en $\mathcal{A}$ con $A \subset \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} E_j$ y

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(E_j) \le \mu_*(A) + \varepsilon$$

Como $\mu_0$ finitamente aditiva en $\mathcal{A}$

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(E_j) &= \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(E \cap E_j) + \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(E^c \cap E_j)\\ &\ge \mu_*(E \cap A) + \mu_*(E^c \cap A)\end{aligned}$$

$\varepsilon$ es arbitrario, $\mu_*(A) \geq \mu_*(E \cap A) + \mu_*(E^c \cap A)$ que termina por probar el teorema. □

**Teorema 11.4.2 (Extensión premedidas)** Sea $\mu_0$ una premedida sobre el álgebra $\mathscr{A}_0$ de subconjuntos de $X$. Entonces existe una extensión $\mu$ de $\mu_0$ a la $\sigma$-algebra $\mathscr{A}$ generada por $\mathscr{A}_0$.

*Demostración.* La medida exterior $\mu_*$ inducida por $\mu_0$ define una medida $\mu$ sobre la $\sigma$-álgebra de los conjuntos medibles según Carathéodory. Por el Lema anterior $\mu$ es medida sobre $\mathscr{A}$ que extiende $\mu_0$.
□

## 11.5 Medidas $\sigma$-finitas

**Definición 11.5.9** Un espacio de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$ se llama $\sigma$-*finita* si existen conjuntos medibles $E_n$, $n = 1, \ldots$, de medida finita tales que $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$.

**Ejercicio 11.5.14** Demostrar que la medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}$ es $\sigma$-finita. Demotrar que la medida de conteo del ejercicio 11.2.8 es $\sigma$-finita si y sólo si $X$ es a lo sumo numerable.

## 11.6 Medida de Lebesgue-Stieltjes

Haremos una construcción más general que produce una gran familia de medidas en $\mathbb{R}$ cuyo dominio es el $\sigma$-álgebra de Borel $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. Tales medidas se denominan *medidas de Borel* en $\mathbb{R}$.

Para motivar las ideas, supongamos que $\mu$ es una medida de Borel finita en $\mathbb{R}$, y sea $F(x) = \mu((-\infty, x])$ . La función $F$ se llama la *función de distribución* de $\mu$. Entonces $F$ es creciente a y continua a la derecha, ya que $(-\infty, x] = \bigcap_{n=1}^{\infty} (-\infty, x_n]$ siempre que $x_n \searrow x$. Además, si $b > a, (-\infty, b] = (-\infty, a] \cup (a, b]$, entonces $\mu((a, b]) = F(b) - F(a)$. Nuestro procedimiento será darle la vuelta a este proceso y construir una medida $\mu$ a partir de una función creciente continua por la derecha $F$. El caso especial $F(x) = x$ producirá la medida habitual de Lebesgue.

Los bloques de construcción de nuestra teoría serán los intervalos abiertos por la izquierda y cerrados por la derecha en $\mathbb{R}$, es decir, conjuntos de la forma $(a, b]$ o $(a, \infty)$ o $\varnothing$, donde $-\infty \leq a < b < \infty$. En esta sección nos referiremos a tales conjuntos como intervalos semi-abiertos. Claramente, la intersección de dos intervalos semi-abiertos es un intervalo semi-abierto, y el complemento de un intervalo semi-abierto es un intervalo semi-abierto o la unión disjunta de dos intervalos semi-abiertos. La colección $\mathcal{A}$ de uniones disjuntas finitas de intervalos semi-abiertos es un álgebra, y la $\sigma$-álgebra generada por $\mathcal{A}$ es la $\sigma$-algebra de Borel $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

**Proposición 11.6.2** Sea $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ creciente y continua por la derecha. Si $(a_j, b_j]$ $(j = 1, \ldots, n)$ son intervalos semi-abiertos disjuntos, sea

$$\mu_0 \left( \bigcup_1^n (a_j, b_j] \right) = \sum_1^n [F(b_j) - F(a_j)]$$

y sea $\mu_0(\varnothing) = 0$. Entonces $\mu_0$ es una premedida en el álgebra $\mathcal{A}$.

*Demostración.* Primero debemos verificar que $\mu_0$ esté bien definida, ya que los elementos de $\mathcal{A}$ se pueden representar en más de una forma como uniones disjuntas de intervalos semi-abiertos. Si $\{(a_j, b_j]\}_{j=1}^n$ son disjuntos y $\bigcup\limits_{j=1}^n (a_j, b_j] = (a, b]$, entonces, quizás después de volver a etiquetar el índice $j$, debemos tener $a = a_1 < b_1 = a_2 < b_2 = \ldots < b_n = b$, entonces $\sum\limits_{j=1}^n [F(b_j) - F(a_j)] = F(b) - F(a)$. Más generalmente, si $\{I_i\}_{j=1}^n$ y $\{J_j\}_{j=1}^m$ son dos familias finitas de intervalos semi-abiertos disjuntos tales que $\bigcup\limits_{j=1}^n I_i = \bigcup\limits_{j=1}^n J_j$:

$$\sum_i \mu_0(I_i) = \sum_{i,j} \mu_0(I_i \cap J_j) = \sum_j \mu_0(J_j).$$

Por lo tanto, $\mu_0$ está bien definida y es finitamente aditiva por construcción. Queda por demostrar que si $\{I_j\}_{j=1}^\infty$ es una secuencia de intervalos semi-abiertos disjuntos con $\bigcup\limits_{j=1}^\infty I_j \in \mathcal{A}$ entonces $\mu_0\left(\bigcup\limits_{j=1}^\infty I_j\right) = \sum\limits_{j=1}^\infty \mu_0(I_j)$. Dado que $\bigcup\limits_{j=1}^\infty I_j$ es una unión finita de intervalos semi-abiertos, la sucesión $\{I_j\}_{j=1}^\infty$ se puede dividir en un número finito de subsucesiones de modo que la unión de los intervalos en cada subsucesión sea un único intervalo semi-abierto. Al considerar cada subsucesión por separado y usar la aditividad finita de $\mu_0$, podemos suponer que $\bigcup\limits_{j=1}^\infty I_j$ es un intervalo semi-abierto $I = (a, b]$. En este caso, tenemos

$$\mu_0(I) = \mu_0\left(\bigcup_1^n I_j\right) + \mu_0\left(I \backslash \bigcup_1^n I_j\right) \geq \mu_0\left(\bigcup_1^n I_j\right) = \sum_1^n \mu_0(I_j).$$

Haciendo $n \to \infty$, obtenemos $\mu_0(I) \geq \sum\limits_{j=1}^\infty \mu_0(I_j)$.

Para probar la desigualdad inversa, supongamos primero que $a$ y $b$ son finitos, y fijemos $\varepsilon > 0$. Como $F$ es continua por la derecha, existe $\delta > 0$ tal que $F(a+\delta) - F(a) < \varepsilon$, y si $I_j = (a_j, b_j]$, para cada $j$ existe $\delta_j > 0$ tal que $F(b_j + \delta_j) - F(b_j) < \varepsilon 2^{-j}$ Los intervalos abiertos $(a_j, b_j + \delta_j)$ cubren el conjunto compacto $[a + \delta, b]$, por lo que hay un sub-cubrimiento finito. Al descartar cualquier $(a_j, b_j + \delta_j)$ que esté contenido en uno más grande y reetiquetando el índice $j$, podemos suponer que

- los intervalos $(a_1, b_1 + \delta_1), \ldots, (a_N, b_N + \delta_N)$ cubren $[a + \delta, b]$,
- $b_j + \delta_j \in (a_{j+1}, b_{j+1} + \delta_{j+1})$ para $j = 1, \ldots, N - 1$.

Pero entonces

$$\begin{aligned}
\mu_0(I) &< F(b) - F(a+\delta) + \varepsilon \\
&\le F(b_N + \delta_N) - F(a_1) + \varepsilon \\
&= F(b_N + \delta_N) - F(a_N) + \sum_{j=1}^{N-1} [F(a_{j+1}) - F(a_j)] + \varepsilon \\
&\le F(b_N + \delta_N) - F(a_N) + \sum_{j=1}^{N-1} [F(b_j + \delta_j) - F(a_j)] + \varepsilon \\
&< \sum_{j=1}^{N} \left[F(b_j) + \varepsilon 2^{-j} - F(a_j)\right] + \varepsilon \\
&< \sum_{j=1}^{\infty} \mu(I_j) + 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Dado que $\varepsilon$ es arbitrario, demostramos el resultado cuando $a$ y $b$ son finitos.

Si $a = -\infty$, para cualquier $M < \infty$ los intervalos $(a_j, b_j + \delta_j)$ cubren $[-M, b]$ , por lo que el mismo razonamiento da $F(b) - F(-M) \le \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(I_j) + 2\varepsilon$, mientras que si $b = \infty$, para cualquier $M < \infty$ obtenemos igualmente $F(M) - F(a) \le \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(I_j) + 2\varepsilon$. El resultado deseado sigue entonces dejando $\varepsilon \to 0$ y $M \to \infty$. □

## 11.7 Integración en espacio de medida

**Definición 11.7.10 (Funciones medibles)** Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida. Una función $f : X \to \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ se llama *medible* si para todo $a \in \mathbb{R}$

$$f^{-1}([-\infty, a)) = \{x \in X \mid f(x) < a\}.$$

La mayoría de los resultados y definiciones establecidos en el contexto de la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$ se extienden si cambios al contexto de medidas abstractas. Enumeremos los más importantes.

- El concepto de propiedad válida en casi todo punto.
- Funciones simples. son funciones de la forma

$$\phi(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{E_k},$$

con $a_k \in \mathbb{R}$ y $E_k \in \mathcal{A}$, $k = 1, \ldots, n$.

**Ejercicio 11.7.15** Demostrar que si $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ es medibles entonces si

- Integral de funciones medibles no-negativas.
- Teorema de Beppo-Levi.
- Lema Fatou.

- Teorema de la convergencia mayorada de Lebesgue

## 11.8 Medidas producto

Hemos sido capaces de definir una medida sobre subconjuntos de $\mathbb{R}$ que posee las propiedades que a priori queríamos que tuviese, particularmente la invariancia por traslaciones y tal que $\mu([0,1]) = 1$. El conjunto $\mathbb{R}$ es importante pues es el modelo del espacio euclideano unidimensional. Pero tan naturales como este conjunto son los espacios euclideanos $n$-dimensionales $\mathbb{R}^n$, sobre los cuales no tenemos definidas medidas, más que aquella definida en el ejemplo 11.2.8. En estos espacios es util tener una medida invariante por traslaciones y tal que $\mu([0,1]^n) = 1$. Vamos a construit tales medidas en esta sección. Como $\mathbb{R}^n$ es elproducto cartesiano de $n$ copias de $\mathbb{R}$, seremos capaces de construir una medida allí si somo capaces de construir medidas sobre productos cartesianos de espacios de medidas.

**Definición 11.8.11 (Rectángulos medibles)** Dados dos espacios de medida $(X_i, \mathscr{A}_i, \mu_i)$, $i = 1, 2$, un *rectángulo medible* es un conjunto de la forma $R = A_1 \times A_2$, con $A_i \in \mathscr{A}_i$, $i = 1, 2$. Sea $\mathscr{A}_0$ la colección de todos los conjuntos que se pueden expresar como unión de una cantidad finita de restángulos medibles.

**Ejercicio 11.8.16** Demostrar que $\mathscr{A}_0$ es una álgebra.

**Definición 11.8.12** Si $A \times B$ es un rectángulo medible definimos

$$\mu_0(A \times B) = \mu_1(A)\mu_2(B).$$

**Ejercicio 11.8.17** Supongamos que $A \times B$ es un rectángulo medible que es unión disjunta $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \times B_j$ de otros rectángulos medibles $A_j \times B_j$, $j = 1, \ldots$. Demostrar que

$$\chi_A \chi_B = \sum_{j=1}^{\infty} \chi_{A_j} \chi_{B_j} \tag{11.5}$$

**Proposición 11.8.3** Supongamos que $A \times B$ es un rectángulo medible que es unión disjunta $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \times B_j$ de otros rectángulos medibles $A_j \times B_j$, $j = 1, \ldots$. Entonces

$$\mu_0(A \times B) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(A_j \times B_j). \tag{11.6}$$

**Definición 11.8.13** Si $C \in \mathscr{A}_0$ con $C = \bigcup_{j=1}^{n} A_j \times B_j$, $A_j \times B_j = \varnothing$, si $i \neq j$, definimos

$$\mu_0(C) = \sum_{j=1}^{n} \mu_0(A_j \times B_j)$$

**Proposición 11.8.4( Buena definición)** La función $\mu_0$ esta bien definida, i.e. si $C$ admite dos representaciones distintas $C = \bigcup_{j=1}^{n} A_j \times B_j = \bigcup_{j=1}^{n} A'_j \times B'_j$ como unión de rectángulos medibles mutuamente disjuntos entonces

$$\sum_{j=1}^{n} \mu_0(A_j \times B_j) = \sum_{j=1}^{n} \mu_0(A'_j \times B'_j)$$

**Proposición 11.8.5** La función $\mu_0$ es una premedida para el algebra $\mathscr{A}_0$.

# Bibliografía

# Indice Conceptos

# Indice de Personas

# Indice Símbolos