Introducción al Análisis Matemático

(BORRADOR)

Índice general

1 Funciones medibles

1.1 Introducción

Definición 1.1.1 Definimos la recta extendida $\overline{\mathbb{R}}$ como el conjunto $\mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$. Diremos que $H \subset \overline{\mathbb{R}}$ es boreliano de la recta extendida si $H - \{-\infty, \infty\} \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$.

Si $f : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$, y $a \in \mathbb{R}$, definimos

$$\{f > a\} = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > a\} = f^{-1}((a, \infty]).$$

Análogamente se definen los conjuntos

$$\{f \geq a\}, \quad \{f < a\}, \quad \{f \leq a\},$$

que corresponden, respectivamente, a las desigualdades $f(x) \geq a$, $f(x) < a$ y $f(x) \leq a$. El símbolo $\{f = a\}$ indica el conjunto formado por todos los puntos donde f toma el valor a.

Definición 1.1.2 Diremos que $f : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ es una función medible si $\{f \geq a\}$ es un subconjunto medible del espacio $\mathbb{R}^d$ es decir, si para cada número real a, se verifica que $f^{-1}([a, \infty]) \in \mathscr{M}$.

Teorema 1.1.1 Si H es boreliano de $\mathbb{R}$ y f es medible, entonces $f^{-1}(H)$ es medible.

Dem. Sea $\mathscr{M}' = \{H : f^{-1}(H) \text{ es medible}\}$.
$\mathscr{M}'$ es σ-álgebra y $\mathscr{I} \subset \mathscr{M}'$. Por lo tanto, $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{M}$. □

Teorema 1.1.2 Si $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ es medible si y sólo si $f^{-1}(H) \in \mathscr{M}$ cada vez que H es boreliano de $\overline{\mathbb{R}}$.

Dem. $\Leftarrow$) Inmediata a partir de la definición de función medible.
$\Rightarrow$) Se tiene que

$$\{f = +\infty\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{f \geq k\} \quad \text{y} \quad \{f = -\infty\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{f \leq -k\}.$$

Si H es boreliano de $\overline{\mathbb{R}}$, supongamos que $H = H' \cup \{+\infty\}$ y H' es conjunto medible Borel de $\mathbb{R}$. Luego, $f^{-1}(H) = f^{-1}(H') \cup \{f = +\infty\}$ es medible. □

1.2 Funciones medibles sobre una σ-álgebra

Definición 1.2.3 Si Σ es una σ-álgebra de $\mathbb{R}^n$, diremos que $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ es Σ-medible si
$$\{f > a\} \in \Sigma \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

Proposición 1.2.1 $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ es Σ-medible si y sólo si $f^{-1}(H) \in \Sigma$ cuando H es boreliano de $\overline{\mathbb{R}}$.

Cuando $\Sigma = \mathscr{M}$, decimos que f es *medible*.
Cuando $\Sigma = \mathscr{B}$, llamamos a f *medible Borel* o función *boreliana*.

Ejercicio 1.2.1 Si f es semicontinua inferiormente, entonces f es medible.

Ahora, estudiaremos $g \circ f$ cuando $\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \overline{\mathbb{R}} \xrightarrow{g} \overline{\mathbb{R}}$.

Definición 1.2.4 Diremos que $g : \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$ es boreliana si $g^{-1}(M)$ es boreliano de $\overline{\mathbb{R}}$ cuando M lo es.

Luego, si $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ es medible y $g : \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$ es boreliana, entonces $g \circ f$ es medible.
También, se tiene que si f es medible entonces $|f|$, $|f|^2$, log $|f|$ y e^f son medibles.
Si f y g son medibles, entonces $\{f < g\}$ es medible pues
$$\{f < g\} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{f < q\} \cap \{g > q\}.$$

Teorema 1.2.3 Si f y g son medibles con respecto a Σ y finitas y si $c \in \mathbb{R}$, entonces $f + g$, cf y fg son medibles.

Dem. Supondremos que todas las funciones son finitas.
Veamos que
$$\{f + g > a\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \{f > r\} \cap \{g > a - r\}.$$
Si $f(x) + g(x) > a$, entonces existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que
$$f(x) > r > a - g(x), \quad \text{es decir} \quad f(x) > r \;\text{ y }\; g(x) > a - r.$$
Recíprocamente, si para algún $r \in \mathbb{Q}$ se tiene que $f(x) > r$ y $g(x) > a - r$, luego $f(x) + g(x) > a$.
Si $c \in \mathbb{R}$, entonces
$$\{cf > a\} = \begin{cases} \{f > \frac{a}{c}\} & c > 0 \\ \{f < \frac{a}{c}\} & c < 0 \\ \varnothing \text{ ó } \mathbb{R}^n & c = 0. \end{cases}$$
Ahora, como
$$fg = \frac{1}{4}\left[(f+g)^2 - (f-g)^2\right],$$
luego fg es medible con respecto a Σ.
Para estudiar el cociente entre funciones medibles, denotamos por $\frac{1}{f}$ la función que toma el valor $\frac{1}{f(x)}$ si $f(x) \neq 0$ y el valor 0 si $f(x) = 0$.

Ahora, como

$$\left\{\frac{1}{f} > a\right\} = \begin{cases} \{f > 0\} \cap \{f < \frac{1}{a}\} & a > 0 \\ \{f > 0\} \cup (\{f < \frac{1}{a}\} \cap \{f < 0\}) \cup \{f = 0\} & a < 0, \end{cases}$$

a partir de que f es medible se tiene que $1/f$ es medible. □

1.3 Sucesiones de funciones medibles

Proposición 1.3.2 Si $\{f_k\}$ es una sucesión de funciones medibles con respecto a Σ, entonces

$$g(x) = \operatorname*{ínf}_k f_k(x) \quad \text{y} \quad h(x) = \sup_k f_k(x)$$

son Σ-medibles.

La demostración se deduce de las fórmulas

$$\{h > a\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{f_k > a\} \quad \text{y} \quad \{g < a\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{f_k < a\}.$$

Proposición 1.3.3 Si $\{f_k\}$ es una sucesión de funciones Σ-medibles, entonces

$$g(x) = \operatorname*{lím\,inf}_{k\to\infty} f_k(x) \quad \text{y} \quad h(x) = \operatorname*{lím\,sup}_{k\to\infty} f_k(x)$$

son medibles con respecto a Σ.

La prueba resulta de aplicar la Proposición 1.3.2 a las relaciones

$$g(x) = \sup_j \operatorname*{ínf}_{k\geq j} f_k(x) \quad \text{y} \quad h(x) = \operatorname*{ínf}_j \sup_{k\geq j} f_k(x).$$

Corolario 1.3.1 Si $f_k(x) \to f(x)$ y $\{f_k\}$ es una sucesión de funciones Σ-medibles, entonces f es medible con respecto a Σ.

A continuación, completamos la demostración del Teorema 1.2.3 que se relizó suponiendo que tanto f como g son finitas. Para evitar esa restricción, ahora consideramos la sucesión de funciones $\varphi_k : \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$ definidas por

$$\varphi_k(t) = \begin{cases} t & \text{si } |t| \leq k \\ k & \text{si } t > k \\ -k & \text{si } t < -k. \end{cases}$$

Cada φ_k es una función boreliana pues la restricción de φ a $\mathbb{R}$ es continua. Además, para cada $t \in \overline{\mathbb{R}}$, se tiene que $\varphi_k \to t$ cuando $k \to \infty$. Entonces, las funciones

$$f_k = \varphi_k \circ f \quad \text{y} \quad g_k = \varphi_k \circ g,$$

son medibles con respecto a Σ, finitas y convergen puntualmente a f y g respectivamente, cuando $k \to \infty$. Luego, las funciones

$$f + g = \lim_{k\to\infty} (f_k + g_k) \quad \text{y} \quad fg = \lim_{k\to\infty} f_k g_k,$$

resultan medibles a partir de la aplicación de la Proposición 1.3.3.

1.4 Funciones simples

Definimos la función característica χ_E de un conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$ mediante

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E \\ 0 & \text{si } x \notin E. \end{cases}$$

Se tiene la siguiente propiedad

- χ_E es medible si y sólo si E es medible.

Definición 1.4.5 Una función medible y finita $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se llama *simple* si el conjunto de todos sus valores es finito, es decir, si φ es medible y la imagen $\varphi(\mathbb{R}^n)$ es un subconjunto finito de $\mathbb{R}$.

A partir de la Definición 1.4.5, se tiene que si φ, ψ son funciones simples y $c \in \mathbb{R}$, entonces $\varphi + \psi$, $c\varphi$, $\varphi\psi$ son simples.

Si $\varphi(\mathbb{R}^n) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_N\}$, entonces $E_i = \varphi^{-1}(\{\alpha_i\})$ son medibles y

$$\varphi = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \chi_{E_i}.$$

Las funciones simples desempeñan un papel muy importante en la teoría de integración en virtud del siguiente teorema.

Teorema 1.4.4 Si $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ es una función medible no negativa, entonces existe una sucesión $\{\varphi_k\}$ de funciones simples tal que

$$\varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \varphi_3 \leq \dots \quad \text{y} \quad f(x) = \lim_{k\to\infty} \varphi_k(x)$$

en cada punto $x \in \mathbb{R}^n$.

Dem. Para $k \in \mathbb{N}$, dividimos $[0,k)$ en $k2^k$ intervalos disjuntos

$$\left[\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k}\right), \quad i = 1, 2, \dots, k2^k.$$

Definimos $g_k : \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$ por

$$g_k(x) = \begin{cases} \frac{i-1}{2^k} & \text{si } \ 0 \leq t \leq k, \ \ (i-1)/2^k \leq t < i/2^k, \\ k & \text{si } \ t \geq k \\ 0 & \text{si } \ t < 0. \end{cases}$$

Las funciones g_k son borelianas, no negativas y verifican

$$0 \leq g_1 \leq g_2 \leq \dots, \quad \text{y} \quad \lim_{k\to\infty} g_k(t) = t, \quad \text{en } [0, +\infty].$$

Las funciones $\varphi_k = g_k \circ f$ son simples y verifican el teorema. □

Observacion 1.4.1

1. Si f es medible con respecto a una σ-álgebra Σ, entonces las funciones φ_k del Teorema 1.4.4 son también medibles con respecto a Σ.

2. Multiplicando a las φ_k por $\chi_{B(0,k)}$ se obtiene una sucesión de funciones ψ_k que verifican las hipótesis del Teorema 1.4.4 y que tienen soporte compacto.

3. Si f es acotada y positiva, la convergencia es uniforme.

1.5 Partes positiva y negativa

Si f es medible, también lo son

$$f^+ = \sup\{0, f\} \quad \text{y} \quad f^- = \sup\{0, -f\}$$

llamadas *parte positiva* y *parte negativa* de f.

Se verifica que

$$f = f^+ - f^- \quad \text{y} \quad |f| = f^+ + f^-.$$

Teorema 1.5.5 Si f es medible y $f = f_1 - f_2$, con $f_i \geq 0$ para $i = 1, 2$, entonces $f^+ \leq f_1$ y $f^- \leq f_2$.

Dem. Se tiene que $f \leq f_1$ de donde $f^+ = \sup\{f, 0\} \leq f_1$.

Además, $-f \leq f_2$. Luego, $f^- \leq f_2$ □

Si f es medible, aplicando el Teorema 1.4.4 a f^+ y f^-, existen funciones simples φ_k, ψ_k tales que $\varphi_k \to f^+$ y $\psi_k \to f^-$. Luego, $\varphi_k - \psi_k \to f$, y además, $|\varphi_k - \psi_k| \leq \varphi_k + \psi_k \leq f^+ + f^- = |f|$.

1.6 Propiedades verdaderas en casi todo punto

Si P es una propiedad sobre puntos de $\mathbb{R}^n$ ($P(x)$) diremos que P es verdadera en casi todo punto si $P(x)$ es verdadera excepto, posiblemente, en un conjunto de medida cero.

Así, por ejemplo:

1. Casi todo número es irracional.

2. Si f y g son funciones definidas sobre todo $\mathbb{R}^n$, diremos que $f = g$ en casi todo punto si $f(x) = g(x)$ para todo $x \notin E$ siendo la $m(E) = 0$.

Teorema 1.6.6 Si $h = 0$ en c.t.p., entonces h es medible.

Dem. Sea $Z = \{h \neq 0\}$.

Si $a \geq 0$, entonces $\{h > a\} \subset Z$ y por tanto $m(\{h > a\}) = 0$. Luego, $\{h > a\} \in \mathscr{M}$.

Si $a < 0$, se tiene que $\{h \leq a\} \subset Z$. Ahora, como $\{h > a\} = \mathbb{R}^n - \{h \leq a\}$, entonces $\{h > a\} \in \mathscr{M}$ por ser complemento de un conjunto medible. □

Corolario 1.6.2 Si f es medible y $f = g$ en c.t.p., entonces g es medible.

Será frecuente decir que $f_k(x) \to f(x)$ en c.t.p.

Teorema 1.6.7 Si $f_k \to f$ en c.t.p. y las funciones f_k son medibles, entonces f es medible.

Dem. La función $g = \liminf\limits_{k\to\infty} f_k$ es medible y $g = f$ en c.t.p. □

Si f y g son medibles, definimos $f \sim g$ si $f = g$ en c.t.p.
Entonces, $\sim$ es una relación de equivalencia. Además, si $f_1 \sim f_2$ y $g_1 \sim g_2$, entonces $f_1 + g_1 \sim f_2 + g_2$ y $f_1 g_1 \sim f_2 g_2$.
Si $f = g$ en c.t.p., entonces f es esencialmente igual a g.

1.7 Convergencia en medida

Si para cada $x \in \mathbb{R}^n$ tenemos una propiedad, enunciado o afirmación $P(x)$ que puede ser tildada de verdadera o falsa, escribiremos $E(P)$ para denotar $E \cap \{x : P(x)\}$.

Definición 1.7.6 Sean f_k y f medibles sobre E.
Se dice que f_k converge en medida a f si $\forall \delta > 0$ se tiene que

$$m(E(|f_k - f| \geq \delta)) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

Notaremos: $f_k \xrightarrow{m} f$.

Teorema 1.7.8 Si $f_k \xrightarrow{m} f$ y $f_k \xrightarrow{m} g$, entonces $f = g$ en c.t.p.

Dem. A partir de que

$$\{|f-g| \geq \delta\} \subset \left\{|f - f_k| \geq \frac{\delta}{2}\right\} \cup \left\{|f_k - g| \geq \frac{\delta}{2}\right\},$$

se tiene que

$$\begin{aligned} &m\left(E\left(|f-g| \geq \delta\right)\right) \leq \\ &m\left(E\left(|f - f_k| \geq \frac{\delta}{2}\right)\right) + m\left(E\left(|f_k - g| \geq \frac{\delta}{2}\right)\right) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0. \end{aligned}$$

Luego,

$$m(\{f \neq g\}) = m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{|f-g| \geq \frac{1}{k}\right\}\right) = 0.$$

Así, $f = g$ en c.t.p. □

Teorema 1.7.9 Si $m(E) < \infty$ y $f_k \to f$ en c.t.p. de E, entonces $f_k \xrightarrow{m} f$.

Dem. Sea Z el conjunto de puntos donde f_k no tiende a f. Entonces $m(Z) = 0$.
Dado $\delta > 0$, definimos

$$B_j = \bigcup_{k=j}^{\infty} E(|f_k - f| \geq \delta).$$

y se tiene que $\bigcap_{j=1}^{\infty} B_j \subset Z$. Luego, $m(B_j) \to 0$ cuando $j \to \infty$.

Como si $k \geq j$, se tiene que $E(|f_k - f| \geq \delta) \subset B_j$. Luego $m(E(|f_k - f| \geq \delta)) \to 0$ cuando $k \to \infty$ y por lo tanto $f_k \xrightarrow{m} f$. □

Observacion 1.7.2

1. Si $m(E) = +\infty$, el Teorema 1.7.9 no es cierto. Por ejemplo, $f_k = \chi_{B(0,k)} \to 1$ en c.t.p., mientras que $m(E(|f_k - 1| = 1)) = m(\mathbb{R}^n - B(0,k)) = +\infty \ \ \forall k \in \mathbb{N}$.
2. La recíproca del Teorema 1.7.9 no es cierta. Basta tomar $f_{k_n} = \chi_{[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n})}$ con $k = 0, 1, \ldots, 2^{n-1}$ y $n = 1, 2, \ldots$

Definición 1.7.7 Diremos que f_k es fundamental en medida sobre E si $\forall \delta > 0$ se tiene que

$$m\left(E\left(|f_k - f_j| \geq \delta\right)\right) \xrightarrow[k,j\to\infty]{} 0.$$

Observacion 1.7.3 Si $f_k \xrightarrow{m} f$ y f es finita, entonces f_k es fundamental en medida.

Teorema 1.7.10 Si f_k es fundamental en medida sobre E, entonces existe una subsucesión k_j y una función f medible sobre E tal que $f_{k_j} \to f$ en c.t.p. de E. Además, f es finita y $f_k \xrightarrow{m} f$.

Dem. Para cada $i > 0$, existe $k_i \in \mathbb{N}$ tal que

$$m\left(E\left(|f_k - f_j| \geq \frac{1}{2^i}\right)\right) \leq \frac{1}{2^i},$$

para $k, j \geq k_i$. Podemos suponer que $k_1 < k_2 < \ldots$. Sea

$$E_i = E\left(|f_{k_i} - f_{k_{i+1}}| \geq \frac{1}{2^i}\right)$$

y tenemos que $m(E_i) < \frac{1}{2^i}$.

Sea

$$Z = \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{i=j}^{\infty} E_i = \limsup_{i\to\infty} E_i.$$

Ahora, $m(Z) = 0$.

Si $x \in E - Z$, existe un j tal que $x \notin E_i$ para $i \geq j$, es decir,

$$x \in E\left(\left|f_{k_i} - f_{k_{i+1}}\right| < \frac{1}{2^i}\right).$$

Luego, la serie

$$f_{k_1}(x) + (f_{k_2}(x) - f_{k_1}(x)) + \ldots \tag{1.1}$$

converge absolutamente en $E - Z$.

Sea $f(x)$ la suma de (1.1) en $E - Z$ y sea $f(x) = 0$ en Z. A partir de la definición de f es claro que f es finita. Además, pasando a sumas parciales, tenemos

$$f(x) = \lim_{i\to\infty} f_{k_i}(x) \quad \text{en c.t.p. de } E.$$

A continuación, veamos que $f_{k_i} \xrightarrow{m} f$.

Sea $\delta > 0$ y elijamos j tal que $\frac{1}{2^{j-1}} < \delta$. Si $x \notin Z$, entonces

$$f(x) = f_{k_j}(x) + \big(f_{k_{j+1}}(x) - f_{k_j}(x)\big) + \dots .$$

Así

$$E\left(\big|f(x) - f_{k_j}(x)\big| \geq \delta\right) \subset Z \cup \left(\bigcup_{i \geq j} E_i\right)$$

de donde

$$m\left(E\left(\big|f(x) - f_{k_j}(x)\big| \geq \delta\right)\right) \leq \sum_{i \geq j} m(E_i) = \frac{1}{2^{j-1}}.$$

De este modo, obtenemos $f_{k_j} \xrightarrow{m} f$.

Por último, a partir de

$$E\left(|f_k - f| \geq \delta\right) \subset E\left(|f_k - f_{k_j}| \geq \frac{\delta}{2}\right) \cup E\left(|f_{k_j} - f| \geq \frac{\delta}{2}\right),$$

tomando k y k_j grandes, deducimos

$$m\left(E\left(|f_k - f| \geq \delta\right)\right) < \varepsilon$$

para valores de k grandes. En consecuencia, $f_k \xrightarrow{m} f$. □

1.8 Función singular de Cantor

El conjunto de Cantor se define como

$$P = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n,$$

donde F_n es la unión de 2^n intervalos cerrados y disjuntos contenidos en el $[0,1]$.

El conjunto $[0,1] - F_n$ es la unión de $2^n - 1$ intervalos abiertos disjuntos. Si los numeramos de izquierda a derecha, formamos los intervalos abiertos $J_{n,i}$, para $i = 1, 2, \dots, 2^n - 1$ y se tiene la relación

$$J_{n,i} = J_{n+1,2i}.$$

Sea φ_n la función que toma los siguientes valores $\varphi_n(0) = 0$, $\varphi_n(1) = 1$, $\varphi_n(x) = \frac{i}{2^n}$ en $J_{n,i}$, es lineal entre los F_n y es continua.

Tenemos que $\varphi_{n+1} = \varphi_n$ en $J_{n,i}$ y además

$$|\varphi_{n+1} - \varphi_n| < \frac{1}{2^{n+1}},$$

en cada punto de $[0,1]$. Luego, la serie

$$\varphi_1 + (\varphi_2 - \varphi_1) + (\varphi_3 - \varphi_2) + \dots$$

converge uniformemente a una función continua φ que se llama *función singular de Cantor*.

Es claro que φ es monótona creciente y su restricción a cualquiera de los intervalos $J_{n,i}$ es constante.

2 Integral de Lebesgue

2.1 Definición y propiedades inmediatas

Definición 2.1.1 Sean $E \subset \mathbb{R}^n$, $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ y $f \geq 0$ sobre E medible.
La integral de Lebesgue de f se define mediante

$$\int_E f(x)dx = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{N} \alpha_i m(E_i) \right\},$$

donde el supremo se toma sobre toda descomposición del conjunto E en unión de conjuntos medibles E_i y mutuamente disjuntos, siendo

$$\alpha_i = \inf_{E_i} f.$$

Se usa la convención $0.(+\infty) = +\infty.0 = 0$.
De la Definición 2.1.1 se deduce que si $f \equiv c \in \mathbb{R}$ sobre E, entonces

$$\int f\,dx = cm(E).$$

Teorema 2.1.1 Si $E = A \cup B$, $A \cap B = \varnothing$ y $f \geq 0$ en E, entonces

$$\int_E f = \int_A f + \int_B f.$$

Dem. Sean $E = \bigcup_{i=1}^{N} E_i$ y $\alpha_i = \inf_{E_i} f$. $A_i = A \cap E_i$ y $B_i = B \cap E_i$ y llamamos $\beta_i = \inf_{A_i} f$ y $\gamma_i = \inf_{B_i} f$. Entonces $\alpha_i \leq \beta_i$, $\alpha_i \leq \gamma_i$ y

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N} \alpha_i m(E_i) &= \sum_{i=1}^{N} \alpha_i (m(A_i) + m(B_i)) \\
&\leq \sum_{i=1}^{N} \beta_i m(A_i) + \sum_{i=1}^{N} \gamma_i m(B_i) \\
&\leq \int_A f\,dx + \int_B f\,dx.
\end{aligned}$$

Luego

$$\int_E f \leq \int_A f + \int_B f.$$

Sean $A = \bigcup_{i=1}^{N} A_i$, $B = \bigcup_{i=1}^{M} B_i$, β_i y γ_i como antes. Entonces

$$\sum_{i=1}^{N} \beta_i m(A_i) + \sum_{i=1}^{M} \gamma_i m(B_i) \leq \int_E f.$$

Luego
$$\int_A f + \int_B f \leq \int_E f.$$
□

- Si $0 \leq f \leq g$, entonces
$$\int_E f \leq \int_E g,$$
pues $\inf_{E_i} f \leq \inf_{E_i} g$.
- Si $f \geq 0$ sobre E y $A \subset E$, entonces
$$\int_A f \leq \int_E f,$$
pues $\int_E f = \int_A f + \int_{E-A} f$.
- Si $m(E) = 0$ y $f \geq 0$ sobre E, entonces
$$\int_E f = 0.$$
- Si $f = g$ en c.t.p. de E, entonces
$$\int_E f = \int_E g.$$
Dem. Sea $A = \{f \neq g\}$ entonces $m(A) = 0$ y
$$\int_E f = \int_{E-A} f = \int_{E-A} g = \int_E g.$$
□

- Si $f \geq 0$ en E, entonces
$$\int_E f = \int_{\mathbb{R}^n} f\chi_E \, dx.$$
- Cuando $E = \mathbb{R}^n$, escribimos
$$\int_{\mathbb{R}^n} f = \int f.$$
- Si $E = (a, b) \subset \mathbb{R}$, ponemos
$$\int_E f = \int_a^b f.$$

2.2 Integral de funciones simples

Teorema 2.2.2 Sean $E = E_1 \dot\cup E_2 \dot\cup \ldots \dot\cup E_N$ y $\beta_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, \ldots, N$, $\beta_i \geq 0$. Luego,

$$\int_E \sum_{i=1}^{N} \beta_i \chi_{E_i} = \sum_{i=1}^{N} \beta_i m(E_i)$$

Dem.

$$\int_E \sum_{i=1}^{N} \beta_i \chi_{E_i} = \sum_{j=1}^{N} \int_{E_j} \sum_{i=1}^{N} \beta_i \chi_{E_i} = \sum_{j=1}^{N} \beta_j m(E_j).$$

□

Teorema 2.2.3 Si φ y ψ son funciones simples no negativas y $c \in \mathbb{R}^+$, entonces

$$\int_E (\varphi + \psi) = \int_E \varphi + \int_E \psi \quad \text{y}$$
$$\int_E c\varphi = c \int_E \varphi.$$

Dem. Sean $\varphi = \sum\limits_{i=1}^{N} \alpha_i \chi_{E_i}$ y $\psi = \sum\limits_{j=1}^{M} \beta_j \chi_{F_j}$. Tenemos

$$\varphi + \psi = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} (\alpha_i + \beta_j) \chi_{E_i \cap F_j},$$

y entonces

$$\begin{aligned}
\int_E \varphi + \psi &= \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} (\alpha_i + \beta_j) m(E_i \cap F_j) \\
&= \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \sum_{j=1}^{M} m(E_i \cap F_j) + \sum_{j=1}^{M} \beta_j \sum_{i=1}^{N} m(E_i \cap F_j) \\
&= \int_E \varphi + \int_E \psi.
\end{aligned}$$

Como $c\varphi = \sum\limits_{i=1}^{N} c\alpha_i \chi_{E_i}$, luego

$$\int_E c\varphi = \sum_{i=1}^{N} c\alpha_i m(E_i) = \alpha \int_E \varphi.$$

□

Teorema 2.2.4 Si $f \geq 0$, entonces

$$\int_E f = \sup_{0 \leq \varphi \leq f} \int_E \varphi.$$

Dem. Sean $E = E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_N$ y $\alpha_i = \inf_{E_i} f$. Supongamos que $\alpha_i < \infty$. Luego, si $\varphi = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \chi_{E_i}$ tenemos

$$\int_E \varphi = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i m(E_i) \quad \text{y} \quad 0 \le \varphi \le f.$$

En general, para $k \in \mathbb{N}$ definamos

$$\alpha_{ik} = \min\{k, \alpha_i\}$$

y

$$\varphi_k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ik} \chi_{E_i}.$$

Ahora, $0 \le \varphi_k \le f$ y $\alpha_{i1} \le \alpha_{i2} \le \ldots \nearrow \alpha_i$. LUego

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N} \alpha_i m(E_i) &= \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \alpha_{ik} m(E_i) \\ &= \lim_{k\to\infty} \int_E \varphi_k \le \sup_{0\le\varphi\le f} \int_E \varphi. \end{aligned}$$

Luego

$$\int_E f \le \sup_{0\le\varphi\le f} \int_E \varphi.$$

La otra desigualdad es inmediata. □

Lema 2.2.1 Sean $f_1 \le f_2 \le \ldots$ funciones no negativas y φ función simple no negativa tal que

$$\varphi \le \lim_{k\to\infty} f_k.$$

Dem. Sean $0 \le \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_N$ los distintos valores ordenados que toma φ y sea

$$A_i = \{\varphi = \alpha_i\}.$$

Supongamos probado el lema cuando $\alpha_1 > 0$. Entonces, sale para $\alpha_1 = 0$, pues aplicando el caso probado en $E - A_1$ tenemos

$$\int_E \varphi = \int_{E-A_1} \varphi \le \lim_{k\to\infty} \int_{E-A_1} f_k \le \lim_{k\to\infty} \int_E f_k.$$

Supongamos ahora que $\alpha_1 > 0$.
Sea $0 < \varepsilon$ con $0 < \varepsilon < \alpha_1$. Luego $\varphi - \varepsilon$ es una función simple que toma los valores $\alpha_i - \varepsilon$ sobre A_i. Poniendo

$$E_k = \{\alpha \in E : f_k(x) > \varphi(x) - \varepsilon\}.$$

Por hipótesis

$$E_k \subset E_{k+1} \ \text{y} \ \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = E.$$

Luego $m(E_k) \to m(E)$ cuando $k \to \infty$.

Se presentan dos casos

1. Si $m(E) < \infty$, tenemos $m(E - E_k) \xrightarrow{k\to\infty} 0$ y

$$\begin{aligned}\int_E f_k \geq \int_{E_k} f_k \geq \int_{E_k} \varphi(x) - \varepsilon \\ &= \int_E \varphi(x) - \varepsilon - \int_{E-E_k} \varphi(x) - \varepsilon \\ &\geq \int_E \varphi - \varepsilon m(E) - (\alpha_N - \varepsilon) m(E - E_k).\end{aligned}$$

   Luego

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k \geq \int_E \varphi - \varepsilon m(E).$$

   Como ε es arbitrario, se obtiene la desigualdad del lema.

2. Si $m(E) = \infty$, consideramos $m(E_k) \nearrow +\infty$ y obtenemos

$$\int_E f_k \geq \int_{E_k} f_k \geq \int_{E_k} \varphi - \varepsilon \geq (\alpha_1 - \varepsilon) m(E_k) \nearrow +\infty,$$

   lo cual lleva a la desigualdad del lema.

□

2.3 Paso al límite bajo el signo de integral

Teorema 2.3.5 [Beppo-Levi] Sea $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \ldots \nearrow f$. Entonces

$$\int_E f = \lim_{k\to\infty} \int_E f_k.$$

Dem. Sea φ función simple tal que $0 \leq \varphi \leq f$. Luego

$$\varphi \leq \lim_{k\to\infty} f_k,$$

y por tanto

$$\int_E \varphi \leq \lim_{k\to\infty} \int_E f_k.$$

Así, llegamos a

$$\int_E f = \sup_{0\leq\varphi\leq f} \int_E \varphi \leq \lim_{k\to\infty} \int_E f_k.$$

La otra desigualdad es inmediata. □

Teorema 2.3.6 Si $f, g \geq 0$ y $c \in \mathbb{R}$, entonces

$$\int_E (f+g) = \int_E f + \int_E g \quad \text{y} \quad \int_E cf = c \int_E f.$$

Dem. Sean φ_k y ψ_k funciones simples tales que $\varphi_k \nearrow f$ y $\psi_k \nearrow g$. Luego $\varphi_k + \psi_k \nearrow f + g$ y entonces

$$\begin{aligned}\int_E f + g &= \lim_{k\to\infty} \int_E \varphi_k + \psi_k \\ &= \lim_{k\to\infty} \int_E \varphi_k + \lim_{k\to\infty} \int_E \psi_k \\ &= \int_E f + \int_E g.\end{aligned}$$

□

Corolario 2.3.1 Si $f_k \geq 0$, $k = 1, 2, \ldots$, entonces

$$\int_E \sum_{k=1}^{\infty} f_k = \sum_{k=1}^{\infty} \int_E f_k.$$

Dem. Sean $S_N = \sum_{k=1}^{N} f_k$ y $s = \sum_{k=1}^{\infty} f_k = \lim_{N\to\infty} S_N$.
Luego $0 \leq S_1 \leq S_2 \leq \ldots \nearrow s$. De este modo,

$$\begin{aligned}\int_E s &= \lim_{N\to\infty} \int_E S_N \\ &= \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \int_E f_k = \sum_{k=1}^{\infty} \int_E f_k.\end{aligned}$$

□

Lema 2.3.2 [Lema de Fatou] Si $f_k \geq 0$, entonces

$$\int_E \liminf_{k\to\infty} f_k \leq \liminf_{k\to\infty} \int_E f_k.$$

Dem. Sean

$$g(x) = \liminf_{k\to\infty} f_k \quad \text{y} \quad g_k(x) = \inf_{j\geq k} f_j.$$

Así, $g_1 \leq g_2 \leq \ldots \nearrow g$ y

$$g(x) = \sup_k g_k(x) = \lim_{k\to\infty} g_k(x).$$

Por el Teorema 2.3.5 y como $g_k \leq f_k$, se tiene

$$\int_E g = \lim_{k\to\infty} \int_E g_k = \liminf_{k\to\infty} \int_E g_k \leq \liminf_{k\to\infty} \int_E f_k.$$

□

Corolario 2.3.2 Si $f_k \to f$ en E, entonces

$$\int_E f \leq \liminf_{k\to\infty} \int_E f_k.$$

2.4 Integrales de funciones de distinto signo

Definición 2.4.2 Si $f = f^+ - f^-$, diremos que f es integrable sobre E si y sólo si

$$\int_E f^+ \quad \text{y} \quad \int_E f^-$$

son finitas.
En este caso, escribimos

$$\int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^-.$$

Teorema 2.4.7 f es integrable sobre E si y sólo si $|f|$ lo es. Y, en este caso, vale

$$\left|\int_E f\right| \leq \int_E |f|.$$

Dem. $\Rightarrow$) Como $|f| = f^+ + f^-$, si f es integrable entonces $|f|$ también los es.
$\Leftarrow$) Si $|f|$ es integrable, como $f^+ \leq |f|$ y $f^- \leq |f|$, entonces f también resulta integrable. □

Teorema 2.4.8 Si $f_1, f_2 \geq 0$ son integrables sobre E y $f = f_1 - f_2$, entonces f es integrable y

$$\int_E f_1 - f_2 = \int_E f_1 - \int_E f_2.$$

Dem. A partir de que $f^+ \leq f_1$ y $f^- f_2$ se deduce que f es integrable.
Como $f = f^+ - f^- = f_1 - f_2$ entonces $f^+ + f_2 = f_1 + f^-$ y

$$\int_E f^+ + \int_E f_2 = \int_E f_1 + \int_E f^-.$$

□

Teorema 2.4.9 Si $f \geq 0$ es integrable y $|g| \leq f$, entonces g es integrable.

Dem. La prueba sale a partir de que $g^+ \leq f$ y $g^- \leq f$. □

Teorema 2.4.10 Si f y g son integrables sobre E y $c \in \mathbb{R}$, entonces $f+g$ y cf son integrables sobre E. Además,

$$\int_E f + g = \int_E f + \int_E g \quad \text{y} \quad \int_E cf = c \int_E f.$$

Dem. Como $f+g=f^+ + g^+ - (f^- + g^-)$, aplicando el Teorema 2.4.8 se obtiene que $f+g$ es integrable y

$$\begin{aligned}\int_E f+g &= \int_E f^+ + g^+ - \int_E f^- + g^- \\ &= \int_E f^+ + \int_E g^+ - \int_E f^- - \int_E g^- \\ &= \int_E f + \int_E g.\end{aligned}$$

Si $c \geq 0$, entonces $cf = cf^+ - cf^-$ y el resultado se obtiene por el Teorema 2.4.8. Si $c < 0$, el resultado se obtiene a partir de que $cf = (-c)f^- - (-c)f^+$. □

Corolario 2.4.3 Si f y g son integrables tales que $f \leq g$, entonces

$$\int_E f \leq \int_E g.$$

Así,

$$L(E) = \{f : f \text{ es integrable sobre } E\}$$

es un espacio vectorial y la aplicación

$$f \longmapsto \int_E f$$

es una aplicación lineal.

2.5 Convergencia Mayorada

Si f_k son integrables sobre E y $f_k \to f$ en c.t.p. de E siendo f integrable en E, **en general no es cierto** que

$$\int_E f_k \to \int_E f.$$

Ejemplo 2.5.1 Si $f_k = k\chi_{(0,\frac{1}{k})}$ entonces $f_k \to 0$ puntualmente en $(0,1)$. Sin embargo,

$$\int_{(0,1)} f_k = 1, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

y por lo tanto

$$\int_{(0,1)} f_k \nrightarrow \int_{(0,1)} f.$$

Teorema 2.5.11 [Convergencia Mayorada de Lebesgue] Sea Φ funcíon integrable sore E. Si f_k son funciones integrables tales que

$$|f_k| \leq \Phi \text{ en } E,$$

entonces $g = \text{lím inf } f_k$, $h = \text{lím sup } f_k$ son integrables sobre E y

$$\int_E \text{lím inf } f_k \leq \text{lím inf} \int_E f_k \leq \text{lím sup} \int_E f_k \leq \int_E h.$$

Dem. Por hipótesis se tiene que $-\Phi \leq f_k \leq \Phi$, a partir de lo cual se deduce que $-\Phi \leq g \leq \Phi$ y $-\Phi \leq h \leq \Phi$ y por lo tanto g y h resultan integrables sobre E.

Por otra parte, $f_k + \Phi \geq 0$ y $\Phi - f_k \geq 0$ y

$$\liminf_{k\to\infty}(f_k + \Phi) = g + \Phi$$
$$\liminf_{k\to\infty}(\Phi - f_k) = \Phi - h.$$

Ahora, por el Lema de Fatou (Lema 2.3.2) tenemos

$$\int_E g + \int_E \Phi = \int_E g + \Phi \leq \liminf_{k\to\infty} \int_E f_k + \Phi = \liminf_{k\to\infty} \int_E f_k + \int_E \Phi.$$

Luego

$$\int_E g \leq \liminf \int_E f_k.$$

La otra desigualdad se obtiene de manera análoga. □

Corolario 2.5.4 Si $f_k \to f$ en cada punto de E y $|f_k| \leq \Phi \in L(E)$, entonces $f \in L(E)$ y

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k = \int_E f.$$

2.6 La integral y los conjuntos de medida nula

Si $f, g \geq 0$ y $f = g$ en c.t.p de E, entonces

$$\int_E f = \int_E g.$$

En particular, sobre un conjunto de medida nula cualquier f medible e integrable con integral que vale 0.

Usaremos la **desigualdad de Chebyshev** que establece que si f es medible sobre E se cumple

$$m\left(\{x \in E : |f(x)| > \lambda\}\right) \leq \frac{1}{\lambda}\int_E |f|.$$

La prueba de la desigualdad de Chebyshev es sencilla, a saber,

$$\int_E |f| \geq \int_{\{|f|\geq\lambda\}} |f| \geq \lambda m\left(\{|f| \geq \lambda\}\right).$$

Teorema 2.6.12 Si $f \geq 0$ sobre E y $\int_E f = 0$, entonces $f = 0$ en c.t.p. de E.

Dem. Sean $Z_k = \{f > \frac{1}{k}\}$ y $Z = \{f > 0\}$, entonces

$$Z = \bigcup_{k=1}^{\infty} Z_k.$$

Ahora,

$$m(Z_k) = m\left(\left\{f > \frac{1}{k}\right\}\right) \leq k\int_E f = 0,$$

y en consecuencia $m(Z) = 0$. $\square$

2.7 Invariancia bajo traslaciones

Teorema 2.7.13 Sea $f \geq 0$, entonces $\forall h \in \mathbb{R}^n$ se tiene

1. $\int f(x+h) = \int f(x)$,
2. $\int_E f(x+h) = \int_{E+h} f(x)$.

Dem.

1. - Si $f = \chi_E$, entonces $f(x+h) = \chi_E(x+h) = \chi_{E-h}(x)$. Así,
   $$\int f(x+h) = \int \chi_{E-h}(x) = m(E-h)$$
   y
   $$\int f(x) = \int \chi_E(x) = m(E),$$
   y son iguales
   - Si f es simple, entonces
   $$f = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i f_i, \quad \alpha_i \geq 0, \;\; f_i = \chi_{E_i}.$$
   Luego,
   $$\int f(x+h) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \int f_i(x+h) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \int_{E_i} f_i = \int f.$$
   - Sea f arbitraria no negativa y sean φ_k funciones simples no negativas tales que $\varphi_k \nearrow f$. Luego,
   $$\varphi_k(x+h) \to f(x+h), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$
   Por el Teorema de Beppo-Levi (Teorema 2.3.5), se tiene
   $$\int f(x+h)\,dx = \lim_{k\to\infty} \int \varphi_k(x+h)\,dx = \lim_{k\to\infty} \int \varphi_k(x) = \int f(x)\,dx.$$

   Así queda demostrado el item 1.
2. es consecuencia del item 1. En efecto,
$$\begin{aligned}\int_E f(x+h)\,dx &= \int \chi_{E+h}(x+h) f(x+h)\,dx \\ &= \int \chi_{E+h}(x) f(x)\,dx \\ &= \int_{E+h} f(x)\,dx.\end{aligned}$$

Por último, los item 1 y 2 son ciertos para $f \in L(E)$, a partir de la usual descomposición de f dada por $f = f^+ - f^-$. □

2.8 La integral como función de conjunto

FALTA DEFINIR $\mathcal{M}$ o RECORDARLO!!!
Sea $f \in L(\mathbb{R})$ y definimos $\Phi : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ por

$$\Phi(E) = \int_E f.$$

Φ se llama integral indefinida de f.

Teorema 2.8.14 Si $E_j \in \mathcal{M}$ son mutuamente disjuntos y sea $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$, entonces

$$\Phi(E) = \sum_{j=1}^{\infty} \Phi(E_j).$$

Dem. Si $f \geq 0$, tenemos $\sum_{j=1}^{\infty} \chi_{E_j} = \chi_E$ y luego

$$\Phi(E) = \int_E f = \int f\chi_E = \int \sum_j f\chi_{E_j} = \sum_j \int f\chi_{E_j} = \sum_j \Phi(E_j).$$

Si $f \in L(E)$, trabajamos con $f = f^+ - f^-$ donde f^+ y f^- son funciones medibles no negativas. □

Definición 2.8.3 Si X es un conjunto y Σ es una sigma-álgebra de subconjuntos de X. Una función $\mu : \Sigma \to \mathbb{R}^+$ se llama medida si

1. $\mu(\varnothing) = 0$,
2. $\mu(\bigcup_j E_j) = \sum_j \mu(E_j)$, donde $E_j \in \Sigma$ y son mutuamente disjuntos.

Para una medida valen los teoremas de convergencia monótona de conjuntos, se puede definir una integral y *casi todo* lo visto para la medida de Lebesgue es válido. Una propiedad que no siempre es cierta es la invariancia por traslaciones.

Ahora bien, Φ es una medida. La pregunta que surge es ¿será toda medida sobre $\mathcal{M}$ de la forma de Φ para alguna f?
La respuesta a esta pregunta será dada por el **Teorema de Radom-Nikodim**.

La siguiente propiedad se llama *continuidad absoluta*.

Teorema 2.8.15 Sea $f \in L(\mathbb{R}^n)$, entonces $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0$ tal que

$$m(E) < \delta \Longrightarrow |\Phi(E)| < \varepsilon.$$

Dem. Se puede suponer que $f \geq 0$.
Sea $f_k = \min\{f, k\}$, entonces $f_k \nearrow f$. Por el Teorema de Beppo-Levi (Teorema 2.3.5) se tiene que $\int_E f_k \nearrow \int_E f$ y por tanto $\int_E f - f_k \to 0$. Así, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_E f - f_k < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sea $\delta < \frac{\varepsilon}{2k}$. Luego, si $m(E) < \delta$ entonces

$$\int_E f = \int_E f - f_k + \int_E f_k < \frac{\varepsilon}{2} + km(E) < \varepsilon.$$

□

2.9 Comparación con la integral de Riemann

Sea f acotada en $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Si $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_N = b$, llamamos suma inferior de Riemann s y suma superior de Riemann S a

$$s = \sum_{i=1}^{N} m_i(x_i - x_{i-1}) \quad \text{y} \quad S = \sum_{i=1}^{N} M_i(x_i - x_{i-1}),$$

respectivamente, donde

$$m_i = \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f \quad \text{y} \quad M_i = \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f.$$

Una función f se llama integrable según Riemann si y sólo si $\forall \varepsilon > 0$ existe una partición para la cual

$$S - s < \varepsilon.$$

La integral de Riemann se define

$$\text{(R)} \int_a^b f = \sup s = \inf S.$$

Teorema 2.9.16 Si f es integrable Riemann sobre $[a, b]$, entonces f es medible e integrable Lebesgue. Además,

$$\text{(R)} \int_a^b f = \int_a^b f.$$

Dem. Si $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_N = b$, definimos las funciones escalonadas

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{N} m_i \chi_{J_i} \quad \text{y} \quad \psi(x) = \sum_{i=1}^{N} M_i \chi_{J_i}$$

donde $J_i = [x_{i-1}, x_i]$. Entonces $\varphi \leq f \leq psi$ en c.t.p. de $[a, b]$.

Si f es integrable Riemann, existen dos sucesiones de funciones escaleras φ_k y ψ_k tales que $\varphi_k \leq f \leq \psi_k$ y

$$\int_a^b \psi_k - \varphi_k < \frac{1}{k}.$$

Además, si $g = \sup \varphi_k$ y $h = \inf \psi_k$, entonces g y h son borelianas y $g \leq f \leq h$. Además

$$\int_a^b \varphi_k \leq \int_a^b f \leq \int_a^b \psi_k$$

y

$$\text{(R)} \int_a^b \varphi_k \leq \text{(R)} \int_a^b f \leq \text{(R)} \int_a^b \psi_k,$$

de donde
$$\left|\int_a^b f - \text{(R)} \int_a^b f\right| \leq \int_a^b \psi_k - \varphi_k < \frac{1}{k}.$$

□

2.10 Integración parcial: Teorema de Fubini

Si $u \in \mathbb{R}^{n+m}$, pondremos $u = (x, y)$ con $x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}^m$.
Si $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$ e $y \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$E_x = \{y \in \mathbb{R}^m : (x, y) \in E\},$$

se llama la *sección* de E en x. Análogamente, se define E_y.
Se puede demostrar que

$$\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right)_x = \bigcup_{k=1}^{\infty} (E_k)_x$$

y

$$\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right)_x = \bigcap_{k=1}^{\infty} (E_k)_x\,,$$

para cualquier sucesión de conjuntos E_k contenidos en $\mathbb{R}^{n+m}$.
Si $E_1 \subset E_2$ entonces

$$(E_1)_x \subset (E_2)_x \quad \text{y} \quad (E_1 - E_2)_x = (E_1)_x - (E_2)_x\,.$$

Teorema 2.10.17 [Principio de Cavalieri] Sea E medible en $\mathbb{R}^{n+m}$, entonces

1. E_x es medible de $\mathbb{R}^{n+m}$ en c.t.p. $x \in \mathbb{R}^n$;
2. $m\left(E_x\right)$ es medible como función de x;
3. $m(E) = \int m\left(E_x\right)\, dx$.

Dem. Primer Paso) Si E es un intervalo de $\mathbb{R}^{n+m}$, supongamos que $E = I \times J$ con I intervalo de $\mathbb{R}^n$, J intervalo de $\mathbb{R}^m$, entonces $E_x = J\ \forall x \in I$ y $E_x = \varnothing$ si $x \notin I$. Así, E_x es conjunto medible $\forall x \in I$, $m(E_x) = \chi_I m(J)$ es función medible en x y

$$\int m(E_x)\, dx = m(J)m(I) = m(E).$$

Segundo Paso) Si E es abierto, entonces $E_x = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} (I_k)_x$ con I_k intervalos mutuamente disjuntos y donde $E_x = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} (I_k)_x$. Así E_x es conjunto medible. Además,

$$m(E_x) = \sum_{k=1}^{\infty} m\left((I_k)_x\right)$$

es una función medible de x y

$$\int m(E_x) = \sum_{k=1}^{\infty} \int m\left((I_k)_x\right)\, dx = \sum_{k=1}^{\infty} m(I_k) = m(E).$$

Tercer Paso) Si E es un conjunto acotado y de tipo G_δ, entonces existe una bola B y una sucesión de conjuntos abiertos G_k tales que

$$E \subset B \text{ y } E = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k.$$

Tomando $G_k' = B \cap G_1 \cap \ldots \cap G_k$, podemos suponer

$$B \supset G_1 \supset \ldots \supset E.$$

Ahora, se tiene que

$$E_x = \bigcap_{k=1}^{\infty} (G_k)_x$$

es conjunto medible y

$$m(E_x) = \lim_{k\to\infty} m\left((G_k)_x\right)$$

es función medible de x. Además,

$$m\left((G_k)_x\right) \leq m(B_x) \in L(\mathbb{R}^n).$$

A continuación, por aplicación de Convergencia Mayorada (Corolario 2.5.4), se obtiene

$$\int m(E_x)\,dx = \lim_{k\to\infty} \int m\left((G_k)_x\right)\,dx = \lim_{k\to\infty} m(G_k) = m(E).$$

Cuarto Paso) Supongamos que E es un conjunto de tipo G_δ. Sean $B_k = B(0,k)$ y $E_k = E \cap B_k \in G_\delta$, entonces $E = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$ y $E_1 \subset E_2 \subset \ldots$ Luego

$$E_x = \bigcup_{k=1}^{\infty} (E_k)_x \text{ y } (E_1)_x \subset (E_2)_x \subset \ldots$$

De este modo, resulta que E_x es conjunto medible y

$$m(E_x) = \lim_{k\to\infty} m((E_k)_x).$$

Como $m((E_k))_x$ es una sucesión monótona creciente de funciones medibles, por el Teorema de Beppo-Levi (Teorema 2.3.5) llegamos a

$$\int m(E_x)\,dx = \lim_{k\to\infty} \int m\left((E_k)_x\right)\,dx = \lim_{k\to\infty} m(E_k) = m(E).$$

Quinto Paso) Sea E un conjunto de medida nula. Luego, existe $H \in G_\delta$ tal que $E \subset H$ y $m(H) = 0$. A partir de

$$\int m(H_x)\,dx = m(H) = 0,$$

se tiene que $0 \leq m(E_x) \leq m(H_x) = 0$ en c.t.p. x. Luego, $m(E_x) = 0$ en c.t.p. x y por lo tanto es función medible en x. Además,

$$\int m(E_x)\,dx \leq \int m(H_x)\,dx = 0 = m(E).$$

Sexto Paso) Sea E medible. Entonces existen $H \in G_\delta$ y Z de medida nula tal que $E = H - Z$. Luego

$$E_x = H_x - Z_x$$

y $m(Z_x) = 0$ en c.t.p. x, de donde E_x es un conjunto medible en c.t.p. X y

$$m(E_x) = m(H_x) - m(Z_x) = m(H_x) \text{ en c.t.p. } x.$$

Es así que, $m(E_x)$ es función medible siempre que E_x sea medible y definimos $m(E_x) = 0$ para el caso en que E_x no sea medible. Por último,

$$\int m(E_x)\, dx = \int m(H_x)\, dx = m(H) = m(E).$$

□

Ejemplo 2.10.2

1. Sea H un hiperplano de ecuación $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = a$.
   Veamos por inducción que $m(H) = 0$.
   El caso $n = 1$ es trivial. Supongamos que $(a_2, a_3, \ldots, a_n) \neq 0$, luego
   $$H_{x_1} = \{(x_2, \ldots, x_n) | a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = a - a_1x_1\}$$
   y
   $$m(H) = \int m(H_{x_1})\, dx_1 = 0.$$
2. El simple S de altura a es $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leq a$ con $x_i \geq 0$.
   Veamos por inducción que $m(S) = \frac{a^n}{n!}$.
   El caso $n = 1$ es trivial. Para $n > 1$, se tiene que $S_{x_1} = \varnothing$ si $x_1 \notin [0, a]$ y si $x_1 \in [0, a]$ entonces $S_{x_1} = \{(x_2, \ldots, x_n) | x_2 + \cdots + x_n \leq a - x_1\}$ es el simple de altura $a - x_1$. Luego,
   $$m(S) = \int_0^a m(S_{x_1})\, dx_1 = \int_0^a \frac{(a - x_1)^{n-1}}{(n-1)!}\, dx_1 = \frac{a^n}{n!}.$$

Teorema 2.10.18 [Fubini-Tonelli] Si $f(u) = f(x, y)$ es medible no negativa sobre $\mathbb{R}^{n+m}$, entonces

1. $f(x, y)$ es medible en y para c.t.p. x;
2. $g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x, y)\, dy$ es medible sobre $\mathbb{R}^n$;
3. $$\int g(x)\, dx = \int dx \int f(x, y)\, dy = \int f(u)\, du.$$

Dem. Paso 1) Si $f = \chi_E$, vale

$$\chi_E(x, y) = \chi_{E_x}(y).$$

E_x es medible en c.t.p. x. Así, f es medible en y para c.t.p. x. Además

$$\int dx \int \chi_{E_x}(y)\, dy = \int m(E_x)\, dx = m(E) = \int f(u)\, du.$$

Paso 2) Si f es simple, entonces

$$f(x, y) = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k f_k(x, y),$$

donde $\alpha_k \geq 0$ y f_k son funciones características χ_{E_k}.

Por el *Paso 1)*, $f_k(x,y)$ es medible en y y x está en un conjunto de la forma $\mathbb{R}^n - Z_k$, donde $m(Z_k) = 0$. Ahora, llamando $Z = \bigcup_{k=1}^{N} Z_k$, f es medible en y siempre que $x \in \mathbb{R}^n - Z$. O sea, f resulta medible en y para c.t.p. $x \in \mathbb{R}^n$.

Si $x \in \mathbb{R}^n - Z$, la función

$$g(x) = \int f(x,y)\,dy = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \int f_k(x,y)\,dy$$

es medible. Además, por el *Paso 1)*,

$$\int g(x)\,dx = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \int dx \int f_k(x,y)\,dy = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \int f_k(u)\,du = \int f(u)\,du.$$

Paso 3) Si f es medible no negativa, existe una sucesión de funciones simples $f_k : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}$ tales que $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \ldots$ y $f_k(u) \nearrow f(u)$ $\forall u \in \mathbb{R}^{n+m}$. Dado que f_k es simple, existe Z_k tal que $f_k(x,y)$ es medible en y si $x \notin Z_k$.

Sea $Z = \bigcup_{k=1}^{N} Z_k$, entonces $m(Z) = 0$ y cada $f_k(x,y)$ es medible en y si $x \notin Z$. Así, f es medible en y $\forall x \notin Z$. Aplicando el Teorema de Beppo-Levi (Teorema 2.3.5), si $x \notin Z$ se tiene que

$$g(x) = \int f(x,y)\,dy = \lim_{k\to\infty} \int f_k(x,y)\,dy,$$

y g es medible tomando la precaución de definir $g = 0$ en Z.

Por último, aplicando nuevamente el Teorema de Beppo-Levi (Teorema 2.3.5), obtenemos

$$\int g(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} \int dx \int f_k(x,y)\,dy = \lim_{k\to\infty} \int f_k(u)\,du = \int f(u)\,du.$$

□

Teorema 2.10.19 [Fubini] Si $f(u) = f(x,y) \in L(\mathbb{R}^{n+m})$, entonces

1. para casi todo x, $f(x,y)$ es integrable en y;
2. la función $g(x) = \int f(x,y)\,dy$ es integrable en x;
3. $$\int g(x)\,dx = \int dx \int f(x,y)\,dy = \int f(u)\,du$$

Dem. Por aplicación del Teorema de Fubini-Tonelli (Teorema 2.10.18) se tiene que

$$\int dx \int f^+(x,y)\,dy = \int f^+(u)\,du < \infty$$

y

$$\int dx \int f^-(x,y)\,dy = \int f^-(u)\,du < \infty.$$

Las funciones no negativas

$$g_1(x) = \int f^+(x,y)\,dy \text{ y } g_2(x) = \int f^-(x,y)\,dy$$

son integrables y por ende finitas en casi todo punto. Luego,

$$g(x) = \int f(x,y)\,dy = g_1(x) - g_2(x)$$

es integrable en y para casi todo x. Además, $g \in L(\mathbb{R}^n)$ y

$$\begin{aligned}\int g(x)\,dx &= \int g_1(x)\,dx - \int g_2(x)\,dx \\ &= \int f^+(u)\,du - \int f^-(u)\,du = \int f(u)\,du.\end{aligned}$$

□

Corolario 2.10.5 Si f satisface que

$$\int dx \int |f(x,y)|\,dy < \infty \text{ ó } \int dy \int |f(x,y)|\,dx < \infty,$$

vale el Teorema de Fubini.

Si f es integrable sobre un conjunto $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$, la integral de f sobre E se calcula por medio de la fórmula

$$\int_E f(u)\,du = \int dx \int_{E_x} f(x,y)\,dy.$$

En efecto, $f\chi_E$ es integrable sobre todo el espacio $\mathbb{R}^{n+m}$ y por consiguiente

$$\begin{aligned}\int_E f(u)\,du &= \int\int_E f(x,y)\,dx\,dy \\ &= \int\int \chi_E(x,y)f(x,y)\,dx\,dy \\ &= \int dx \int \chi_{E_x(y)}f(x,y)\,dy \\ &= \int dx \int_{E_x} f(x,y)\,dy.\end{aligned}$$

Bibliografía