Introducción al Análisis Matemático

(BORRADOR)

Índice general

1 Sucesiones, series de funciones y sus amigos

1.1 Sucesiones de funciones

Sea K un espacio métrico, usualmente $K \subset \mathbb{R}^n$ para algún n.

Una colección $f_n : K \to \mathbb{R}$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$ se llama sucesión de funciones.

Dada una sucesión de funciones f_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$ y $x \in K$, $f_n(x)$ es una sucesión de números reales y como tal puede o no converger a cierto límite.

La mayor diferencia entre una sucesión de números reales y una sucesión de funciones es el hecho que en una sucesión de funciones los términos de la sucesión cambian cuando la variable x cambia. Por lo tanto el límite también puede cambiar, en caso de existir, y por consiguiente el límite también es una función de x. De manera que es necesario tener presente que cuando una sucesión de funciones es evaluada en un valor de x particular resulta una sucesión de números reales.

Supongamos que para todo $x \in K$ la sucesión de números reales $f_n(x)$ converge, es decir que existe el $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ y lo denotaremos $f(x)$. En este caso diremos que f_n converge puntualmente a f.

Ejemplo 1.1.1 La sucesión $f_n(x) = \frac{1}{1+nx^2}$ converge puntualmente

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

Justificación:
Claramente si $x = 0$ tenemos que $f_n(0) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y entonces $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(0) = 1$.

Si $x \neq 0$ entonces $nx^2 \to \infty$ cuando $n \to \infty$ y por lo tanto $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1+nx^2} = 0$.

Como vemos, la determinación de la convergencia puntual suele reducirse al cálculo de un límite. Para este propósito es lícito usar todas las técnicas estudiadas en cursos anteriores como puede ser la Regla de L'Hôpital.

Ejemplo 1.1.2 La sucesión $f_n(x) = \frac{n^2x-n^2}{1+n^2x}$ converge a $f(x) = \frac{x-1}{x}$ si $x \neq 0$.

Si $x = 0$ no converge.

Es necesario ser cuidadoso con la justificación. Por ejemplo, la Regla de L'Hôpital sólo puede usarse en casos de indeterminaciones.

Si $x = 0$ no hay indeterminación pues $f_n(0) = -n^2$ y $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(0) = \lim\limits_{n\to\infty} (-n^2) = -\infty$.

Es lícito decir $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(0) = -\infty$ en lugar de que f_n no converge en $x = 0$.

Cuando $x = 1$ tampoco hay indeterminación pues $f_n(1) = \frac{0}{1+n^2}$ y por tanto $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(1) = 0$.

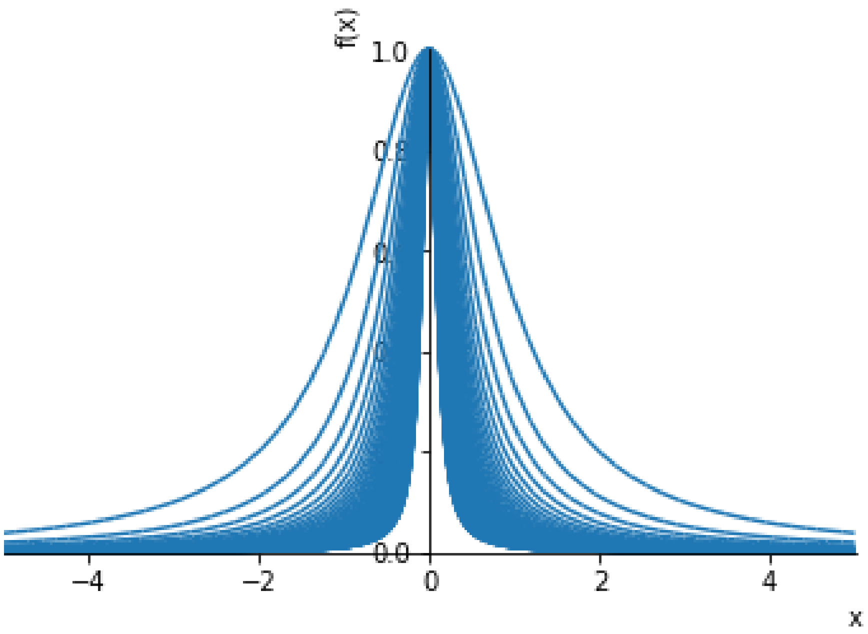
Si $x \neq 0$ y $x \neq 1$ podemos usar la Regla de L'Hôpital dado que se tiene la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$. En efecto, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2x-n^2}{1+n^2x} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2nx-2n}{2nx} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2x-2}{2x} = \frac{1-x}{x}$. Observemos que si $f(x) = \frac{1-x}{x}$ entonces $f(1) = 0$ y por tanto $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ $\forall x \neq 0$.

Suele ser útil graficar algunas funciones de la sucesión y la función límite, ya sea empleando los procedimientos aprendidos en materias anteriores o usando sympy.

Para el Ejemplo 1.1.1 APARECE MAL LA REFERENCIA DEL EJEMPLO!!!!!!!!!!

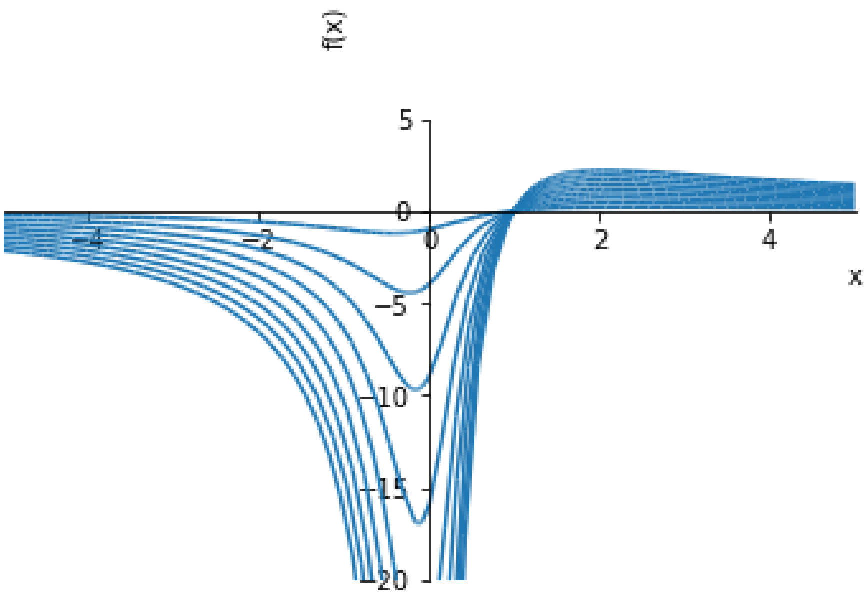
[1]:
```
from sympy import *
init_printing()
```

[2]:
```
x,n=symbols('x,n')
fn=1/(1+n*x**2)
p=plot(fn.subs(n,1), (x,-5,5),show=false)
for k in range(2,100):
    p.append(plot(fn.subs(n,k), (x,-5,5),show=false)[0])
p.show()
```



Para el Ejemplo 1.1.2

[3]:
```
x,n=symbols('x,n')
fn=(n**2*x-n**2)/(1+n*x**2)
p=plot(fn.subs(n,1), (x,-5,5),show=false,ylim=(-20,10))
for k in range(2,10):
    p.append(plot(fn.subs(n,k), (x,-5,5),show=false)[0])
p.show()
```



En los ejemplos anteriores se forma una "montaña" alrededor de un punto *fijo* ($x = 0$). Pero, puede ocurrir otro comportamiento que observaremos los siguientes ejemplos.

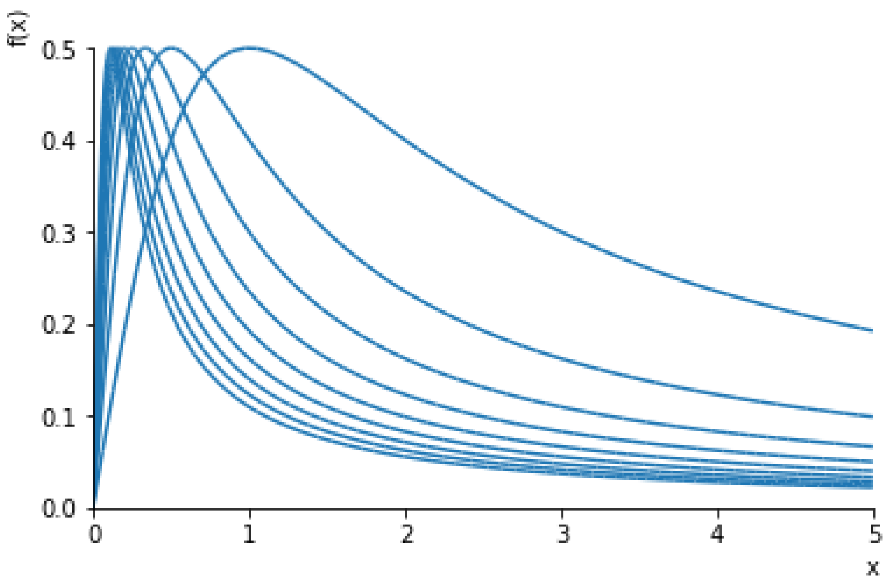
Ejemplo 1.1.3 Si $f_n(x) = \begin{cases} 1 & n \leq x \leq n+1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$.

GRAFICAR CON SYMPY!!!

A partir del gráfico vemos que los términos de la sucesión $f_n(x)$ son "montañas móviles" de altura 1.

Ejemplo 1.1.4 Si $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ en $[0,\infty)$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{nx}{1+n^2x^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x}{x}\frac{x}{\frac{1}{n}+nx^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x}{\frac{1}{n}+nx^2} = 0$.

[4]:
```
x,n=symbols('x,n')
fn=n*x/(1+n**2*x**2)
p=plot(fn.subs(n,1), (x,0,5),show=false)
for k in range(2,10):
    p.append(plot(fn.subs(n,k), (x,0,5),show=false)[0])
p.show()
```



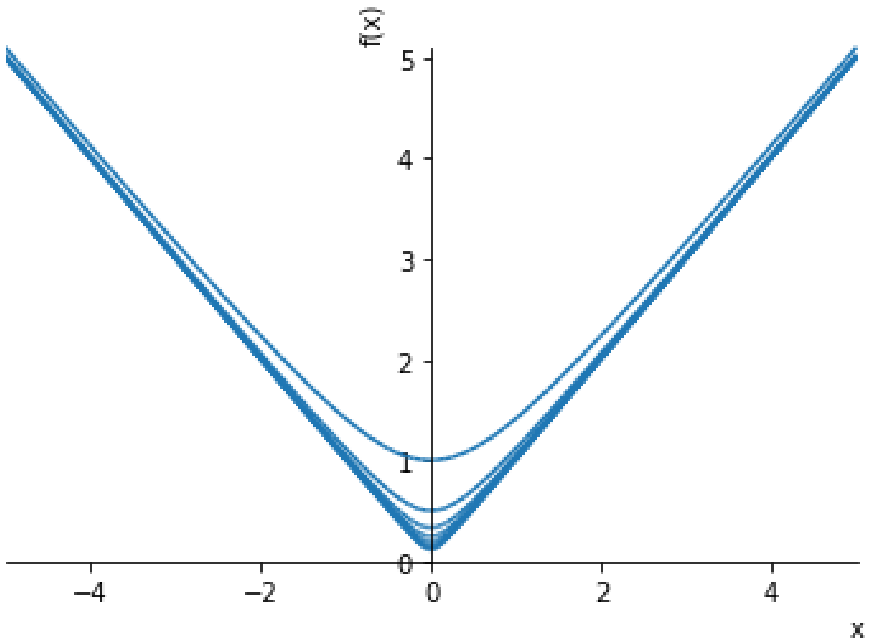
En este caso también se observa una montaña móvil.

HACER EL ANÁLISIS CON LA DERIVADA!!!

Ejemplo 1.1.5 Si $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$, $x \in \mathbb{R}$ luego $f_n'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}}$. Entonces $f_n'(x) > 0$ en $(0,+\infty)$ y $f_n'(x) < 0$ en $(0,+\infty)$, de donde $(0,+\infty)$ es intervalo de crecimiento para cada $f_n(x)$ y $(-\infty,0)$ es intervalo de decrecimiento para cada $f_n(x)$. Luego cada $f_n(x)$ tiene un mínimo en $x = 0$ y el valor mínimo es $f_n(0) = \frac{1}{n}$.

Por otra parte, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} = \sqrt{x^2} = |x|$.

[5]:
```
def grafica(f,x1,x2,m):
    p=plot(f.subs(n,1), (x,x1,x2),show=false)
    for k in range(2,m):
        p.append(plot(f.subs(n,k), (x,x1,x2),show=false)[0])
    p.show()
f=sqrt(x**2+1.0/n**2)
grafica(f,-5,5,10)
```



En el Análisis Matemático, además de límites tenemos conceptos como continuidad, derivadas, integrales, etc. Es común operar expresiones conjugando varios de ellos y queremos contar con relaciones entre ellos que permitan transformar las expresiones.

Por ejemplo, ¿es importante el orden en que se realizan las operaciones? ¿Es lo mismo tomar límite y luego derivar que hacerlo en el orden inverso? Si se tienen dos límites, ¿se pueden permutar?

Ejemplo 1.1.6 Si $f_n(x) = \text{sen}(nx)$ para $x \in [0, \pi]$ entonces $f_n(0) = f_n(\pi) = 0$ y la sucesión converge en estos valores.

Veamos que la sucesión de funciones dada no converge en ningún otro valor.

Supongamos que $x \neq 0$, $x \neq \pi$ y $\lim_{n\to\infty} \text{sen}(nx) = \alpha$.

Si se tuviese $\alpha \neq 0$ entonces

$$1 = \lim_{n\to\infty} \frac{\text{sen}(2nx)}{\text{sen}(x)} = 2 \lim_{n\to\infty} \cos(nx)$$

de donde $\lim_{n\to\infty} \cos(nx) = \frac{1}{2}$. Sin embargo,

$$\lim_{n\to\infty} \cos(2nx) = \lim_{n\to\infty} 2\cos^2(nx) - 1 = -\frac{1}{2}$$

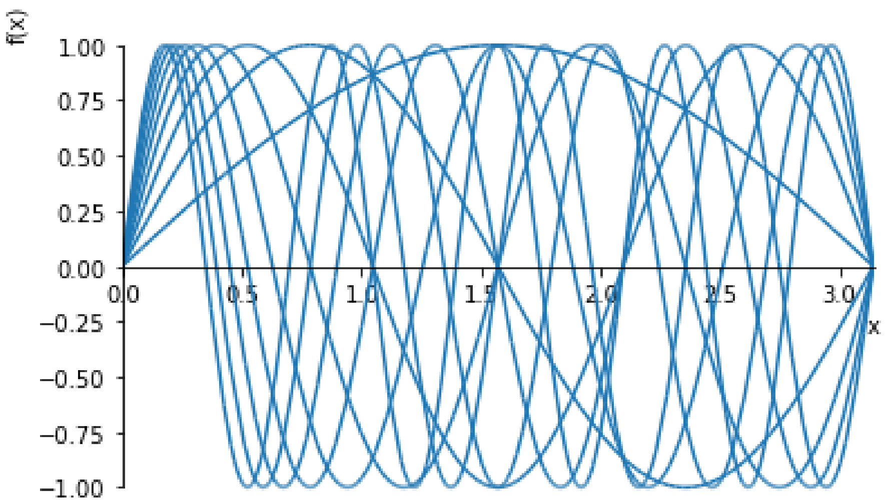
lo que nos lleva a una contradicción.

Por lo tanto, $\lim_{n\to\infty} \text{sen}(nx) = 0$. Entonces $\lim_{n\to\infty} |\cos(2nx)| = 1$ y

$$0 = \lim_{n\to\infty} |\text{sen}[(n+1)x]| = \lim_{n\to\infty} |\text{sen}(nx)\cos x + \cos(nx)\,\text{sen}\, x| = |\text{sen}\, x|$$

y necesariamente $x = 0$ ó $x = \pi$.

[6]:
```
f=sin(n*x)
grafica(f,0,pi,10)
```



Ejemplo 1.1.7 En el Ejemplo 1.1.1 0.1 OJO CON LA REFERENCIA!!!! vimos que la sucesión $f_n(x) = \frac{1}{1+nx^2}$ converge puntualmente

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

Si calculamos

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to 0} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$$

y a continuación permutamos los límites obtenemos

$$\lim_{x\to 0} \lim_{n\to\infty} f(x) = \lim_{x\to 0} = 0$$

Por lo tanto, la permutación de los límites produce resultados **distintos**.

También vemos que la función límite es discontinua a pesar de que cada $f_n(x)$ es continua para cada n.

Ejemplo 1.1.8 Con las funciones del Ejemplo 1.1.4 3 tenemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} 0\,dx = 0$$

mientras que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_{n}^{n+1} dx = 1$$

En este caso, la permutación entre la operación de integración y la de límite también produce resultados **distintos**.

Ejemplo 1.1.9 Cada $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$ del Ejemplo 1.1.6 4 ó 5 OJO CON LA REFERENCIA!!!! es derivable y las derivadas son $f_n'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}}$. Si computamos

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

cuando $x \neq 0$. Entonces la función límite $f(x) = \frac{x}{|x|}$ no es derivable en 0. Luego

$$0 = \lim_{n\to\infty} f_n'(0) \neq \frac{d}{dx}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)\Big|_{x=0}$$

pues ni siquiera tiene sentido el miembro de la derecha.

Es así que tenemos

Encontrar condiciones que permitan permutar las operaciones anteriores.

Antes de atacar este problema vamos a presentar varios ejemplo *famosos* de sucesiones.

OJO!!!! LO QUE SIGUE EN EL APUNTE NO TIENE EJEMPLOS FAMOSOS, VIENEN LAS SERIES!!!!!

1.2 Series de funciones

Dada una sucesión de funciones $f_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$ podemos formar otra sucesión tomando las sumas acumuladas o sumas parciales

$$\begin{aligned} s_1(x) &= f_1(x), \\ s_2(x) &= f_1(x) + f_2(x), \\ &\vdots \\ s_n(x) &= f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x). \end{aligned}$$

Si la nueva sucesión $\{s_n(x)\}$ converge a f se dice que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge a f ó que

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x).$$

En pocas ocasiones se puede determinar que una serie converge hallando una expresión simple para $s_n(x)$ y calculando su límite.

Ejemplo 1.2.10 Si $f_n(x) = c$ con $c \in \mathbb{R}$ un número independiente de n, entonces

$$\begin{aligned} s_1(x) &= f_1(x) = c, \\ s_2(x) &= f_1(x) + f_2(x) = 2c, \\ &\vdots \\ s_n(x) &= f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) = nc. \end{aligned}$$

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = \begin{cases} 0 & si \quad c = 0, \\ \infty & si \quad c \neq 0. \end{cases}$$

y por lo tanto la series converge sólo cuando $c = 0$.

Ejemplo 1.2.11 Si $f_n(z) = z^n$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$, luego

$s_n(z) = f_0(z) + \ldots + f_n(z) = 1 + z + \ldots + z^n$ y $zs_n(z) = z + z^2 + \ldots + z^n + z^{n+1}$ entonces $zs_n(z) - s_n(z) = z^{n+1} - 1$ y por tanto $s_n(z) = \frac{z^{n+1}-1}{z-1}$.

De este modo, logramos expresar $s_n(z)$ en una fórmula relativamente sencilla. Ahora,

$$\lim_{n\to\infty} s_n(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{z^{n+1}-1}{z-1} = \begin{cases} \frac{1}{1-z} & |z| < 1, \\ \text{no converge} & |z| \geq 1. \end{cases}$$

Es interesante ver qué ocurre en $|z| = 1$.

Si $|z| = 1$ entonces $z = e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$ y

$$\begin{aligned} s_n(z) &= \frac{z^{n+1}-1}{z-1} = \frac{z^{n+1}}{z-1} - \frac{1}{z-1} \\ &= \frac{z^{n+1}(\overline{z}-1)}{|z-1|^2} - \frac{1}{z-1} \\ &= \frac{[\cos(n+1)\theta + i \operatorname{sen}(n+1)\theta](\overline{z}-1)}{|z-1|^2} - \frac{1}{z-1} \\ &= \cos(n+1)\theta \frac{\overline{z}-1}{|z-1|^2} + i \operatorname{sen}(n+1)\theta \frac{(\overline{z}-1)}{|z-1|^2} - \frac{1}{z-1} \end{aligned}$$

son funciones oscilantes como en el Ejemplo 1.1.6 5 y 1/2. VER GRÁFICOS!!!

En los ejemplos anteriores pudimos justificar la convergencia calculando explícitamente el límite. Ésto es posible las menos de las veces. En materias anteriores se estudiaron criterios para la convergencia de series numéricas. Estos criterios establecen condiciones, algunas necesarias, otras suficientes y algunas necesarias y suficientes para que la serie converja. Recordaremos algunos de ellos.

Teorema 1.2.1 (Criterio del Resto) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Como es una condición necesaria sólo sirve para decir cuándo una serie no converge.

Ejemplo 1.2.12 Si $f_n(x) = \text{sen}(nx)$ para $x \in [0, \pi]$.

Como ya vimos, $\text{sen}(nx)$ no converge excepto para $x = 0$ ó $x = \pi$.

Luego, $\sum_{n=1}^{\infty} \text{sen}(nx)$ no converge.

Como veremos más adelante, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ no converge y sin embargo $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Entonces el *Criterio del Resto* no sirve para determinar la convergencia de una serie.

Teorema 1.2.2 (Convergencia Absoluta) Si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Ejemplo 1.2.13 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n z^n$ converge cuando $|z| < 1$.

Teorema 1.2.3 (Criterio de Comparación) i $0 \leq a_n \leq b_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. Dicho de otro modo, si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge (su suma es $+\infty$) entonces $\sum_{n=1}^{\infty}$ diverge.

Ejemplo 1.2.14

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \text{sen}(nx)$ converge pues $|\frac{1}{2^n} \text{sen}(nx)| \leq \frac{1}{2^n}$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin(nx)$ converge pues para $n > 1$ tenemos

$$\left| \frac{1}{n^2} \sin(nx) \right| \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

y

$$\sum_{n=2}^{m} \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{m} \to 1 \text{ cuando } m \to \infty.$$

Luego $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{sen}(nx)$ también.

Teorema 1.2.4 (Criterio del Cociente) Si $0 < a_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ existe y es igual a r entonces:

1. si $r < 1$ entonces $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge;
2. si $r > 1$ entonces $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge;
3. si $r = 1$ no se sabe nada sobre la convergencia o divergencia de $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

La situación planteada por el item 3 ocurre en una cantidad exasperante de casos.

Ejemplo 1.2.15 Consideramos la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z^n$ con $z \in \mathbb{C}$ y calculamos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|n||z|^{n+1}}{|n+1||z|^n} = |z| \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = |z|.$$

La serie converge cuando $|z| < 1$, diverge cuando $|z| > 1$ y nada se sabe cuando $|z| = 1$.

Teorema 1.2.5 (Criterio del Cociente) Si $a_n \geq a_{n+1} \geq 0$ para todo n y $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, entonces $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge.

Ejemplo 1.2.16 La series $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ converge en $z = -1$ pues $f(-1) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$ para todo $n \geq 1$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

1.3 Series de Potencias

Las series de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad a_n \in \mathbb{C}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad z_0 \in \mathbb{C},$$

se llaman series de potencias.

Veremos para qué valores de z esta serie converge. Por simplicidad asumiremos que $z_0 = 0$.

Lema 1.3.1 Si $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge en $z_1 \in \mathbb{C}$ entonces la serie converge uniformemente para todo z tal que $|z| < |z_1|$.

Demostración. Como $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z_1^n$ converge entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n z_1^n = 0$. En particular, existe $M > 0$ tal que $|a_n z_1^n| \geq M$. Sea $|z| < |z_1|$ luego

$$|a_n z^n| < |a_n z_1^n| \left|\frac{z}{z_1}\right|^n \leq M \left|\frac{z}{z_1}\right|^n.$$

Como $|\frac{z}{z_1}| < 1$ entonces $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\frac{z}{z_1})^n$ converge y por el Criterio de Comparación obtenemos que $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n z^n|$ converge siempre que $|z| < |z_1|$. □

Corolario 1.3.1 Dada una serie de funciones $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ existe $R \geq 0$ tal que la serie converge en $|z-z_0| < R$ y no converge en $|z-z_0| > R$.

El criterio del cociente suele ser útil para determinar el valor de R que se denomina *radio de convergencia*.

Ejemplo 1.3.17 La serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$ converge si

$$1 > \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{|z|^{n+1}}{n+1}}{\frac{|z|^n}{n}} = |z|\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = |z|,$$

y no converge si $|z| > 1$. Luego, el radio de convergencia es 1.

¿Qué pasa en el borde $|z| = 1$?

Si $|z| = 1 \Leftrightarrow z = \cos\theta + i\,\operatorname{sen}\theta$ y $z^n = \cos(n\theta) + i\,\operatorname{sen}(n\theta)$. Luego

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n\theta)}{n} + i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(n\theta)}{n}.$$

Esto nos lleva a considerar otras series.

1.4 Series de Fourier

Una serie de Fourier es una expresión de la forma

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx) + b_n\operatorname{sen}(nx).$$

Las series de Fourier tiene la capacidad de aproximar funciones 2π-periódicas. En primer lugar, es necesario saber elegir los coeficientes y para ello se usa la propiedad que se presenta a continuación.

Lema 1.4.2

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\cos(mx)\,dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \pi & n = m \neq 0 \\ 2\pi & n = m = 0, \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sen}(nx)\operatorname{sen}(mx)\,dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \pi & n = m \neq 0 \\ 2\pi & n = m = 0, \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\operatorname{sen}(mx)\,dx = 0.$$

Luego, si nos permitimos permutar integrales son sumas de series, tenemos

$$\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\text{sen}(kx)\,dx \\
&= \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(kx)\,dx \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\,\text{sen}(kx)\,dx \\
&+ b_n \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(nx)\,\text{sen}(kx)\,dx \\
&= \pi b_k
\end{aligned}$$

Definición 1.4.1 Dada una función 2π-periódica $f(x)$ definimos los coeficientes de Fourier por

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi} \pi f(x)\cos(nx)\,dx, \quad n \geq 0 \tag{1.1}$$

y

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi} \pi f(x)\,\text{sen}(nx)\,dx, \quad n \geq 1. \tag{1.2}$$

En la notebook de Sympy indagamos las facultades aproximativas de la serie de Fourier.

[10]:
```
x=symbols('x',real=True)
n,m=symbols('n,m',integer=True,positive=True)
Integral(cos(n*x)*cos(m*x),(x,-pi,pi)).doit()
```

[10]:

$$\begin{cases} 0 & \text{for } m \neq n \\ \pi & \text{otherwise} \end{cases}$$

[11]:
```
Integral(sin(n*x)*sin(m*x),(x,-pi,pi)).doit()
```

[11]:

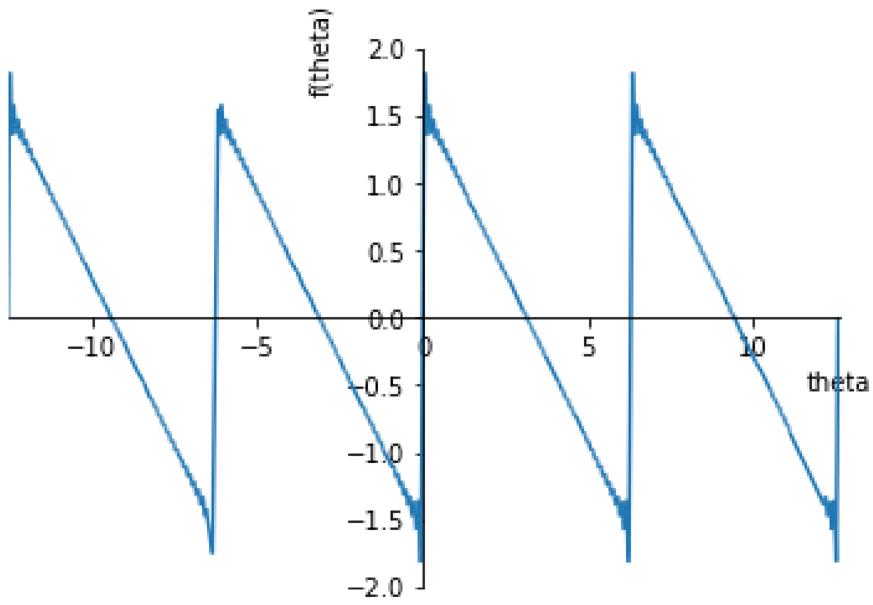
$$\begin{cases} 0 & \text{for } m \neq n \\ \pi & \text{otherwise} \end{cases}$$

[12]:
```
Integral(cos(n*x)*sin(m*x),(x,-pi,pi)).doit()
```

[12]:

$$0$$

[13]:
```
S=sum([sin(n*theta)/n for n in range(1,50)])
plot(S,(theta,-4*pi,4*pi))
```

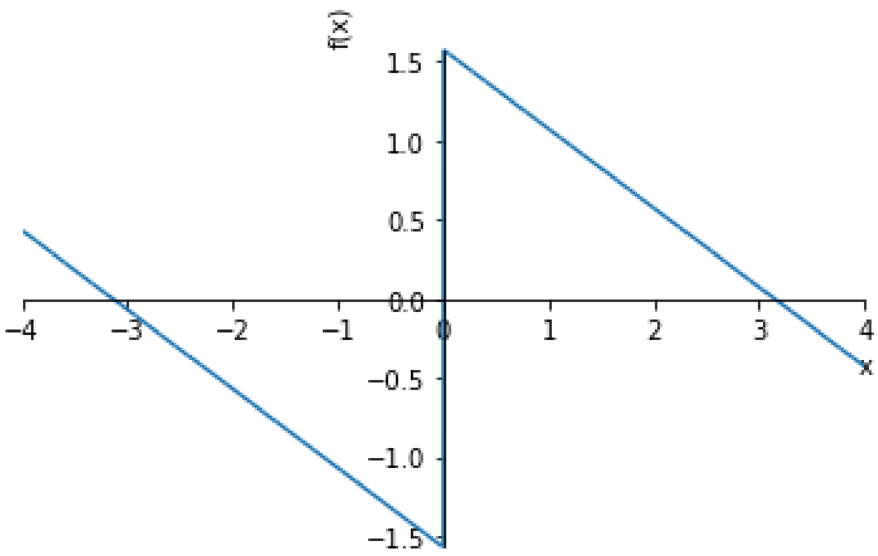


[13]:
```
<sympy.plotting.plot.Plot at 0x7f413f16afd0>
```

Ejemplo

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi - x}{2}, & \text{si } x \in [0, \pi] \\ -\frac{\pi + x}{2}, & \text{si } x \in [-\pi, 0) \end{cases}$$

[14]:
```
f=Piecewise(((pi-x)/2, x>=0  ),(-(pi+x)/2,x<0 ))
plot(f,(x,-4,4))
```



[14]:
```
<sympy.plotting.plot.Plot at 0x7f413f019b50>
```

[15]:
```
def a(g,k):
    return 1/pi*Integral(g*cos(k*x),(x,-pi,pi)).doit()
def b(g,k):
    return 1/pi*Integral(g*sin(k*x),(x,-pi,pi)).doit()
```

[16]:
```
[a(f,k) for k in range(1,10)]
```
[16]:

$$[0, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad 0]$$

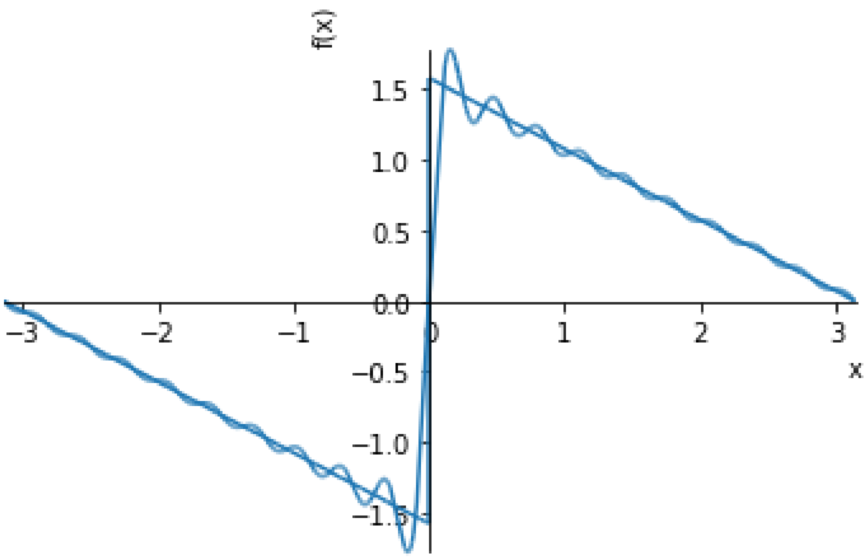
[17]:
```
[b(f,k) for k in range(1,10)]
```
[17]:

$$\left[1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{5}, \quad \frac{1}{6}, \quad \frac{1}{7}, \quad \frac{1}{8}, \quad \frac{1}{9}\right]$$

[18]:
```
S=sum([b(f,k)*sin(k*x) for k in range(1,20)])
S
```
[18]:

$$\sin(x) + \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(4x)}{4} + \frac{\sin(5x)}{5} + \frac{\sin(6x)}{6} + \frac{\sin(7x)}{7} + \frac{\sin(8x)}{8} + \frac{\sin(9x)}{9} + \frac{\sin(10x)}{10} + \frac{\sin(11x)}{11} + \frac{\sin(12x)}{12} + \frac{\sin(13x)}{13} + \frac{\sin(14x)}{14} + \frac{\sin(15x)}{15} + \frac{\sin(16x)}{16} + \frac{\sin(17x)}{17} + \frac{\sin(18x)}{18} + \frac{\sin(19x)}{19}$$

[19]:
```
S=sum([b(f,k)*sin(k*x) for k in range(1,20)])
plot(f,S, (x,-pi,pi))
```



[19]: <sympy.plotting.plot.Plot at 0x7f413f1ae210>

Deberíamos justificar el uso de propiedades como

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx,$$

que se justificaría si

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \int_a^b \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} f_n(x)$$
$$\underset{?}{=} \lim_{N\to\infty} \int_a^b \sum_{n=1}^{N} f_n(x)\,dx = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \int_a^b f_n(x)\,dx$$

Pero, ya hemos visto ejemplos de que éste no es siempre el caso. Vamos a identificar otro modo de convergencia que hace esta regla posible.

Si $f_n(x)$ converge puntualmente a f entonces

$$\forall x \forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon, x) > 0 : n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Definición 1.4.2 f_n converge uniformemente a f si y sólo si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) > 0 \forall x : n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

IDEA GRÁFICA

Ejemplo 1.4.18

1. $f_n(x) = \frac{1}{n} x e^{-n^2x^2}$ converge uniformemente a cero.

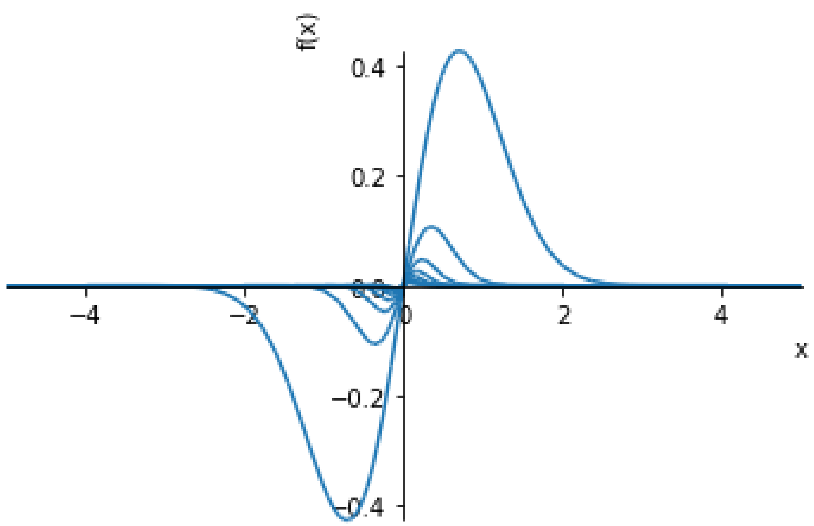
   Se tiene que $f_n'(x) = \frac{1}{n} e^{-n^2x^2} - n2x^2 e^{-n^2x^2}$ y

   $$f_n'(x) = 0 \Longleftrightarrow 0 = e^{-n^2x^2}\left(\frac{1}{n} - 2nx^2\right) \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}n}.$$

   Luego $f_n'(x) > 0$ en $|x| < \frac{1}{\sqrt{2}n}$ y $f_n'(x) < 0$ en $|x| > \frac{1}{\sqrt{2}n}$. Y, $f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}n}\right) = \frac{1}{n}(\pm\frac{1}{\sqrt{2}n})e^{-\frac{1}{2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{n^2}$.

   Luego, dado $\varepsilon > 0$ existe $N \geq \left(\frac{e^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}$.

[20]:
```
x,n=symbols('x,n')
fn=1/n*exp(-n**2*x**2)*x
p=plot(fn.subs(n,1), (x,-5,5),show=false)
for k in range(2,10):
    p.append(plot(fn.subs(n,k), (x,-5,5),show=false)[0])
p.show()
```

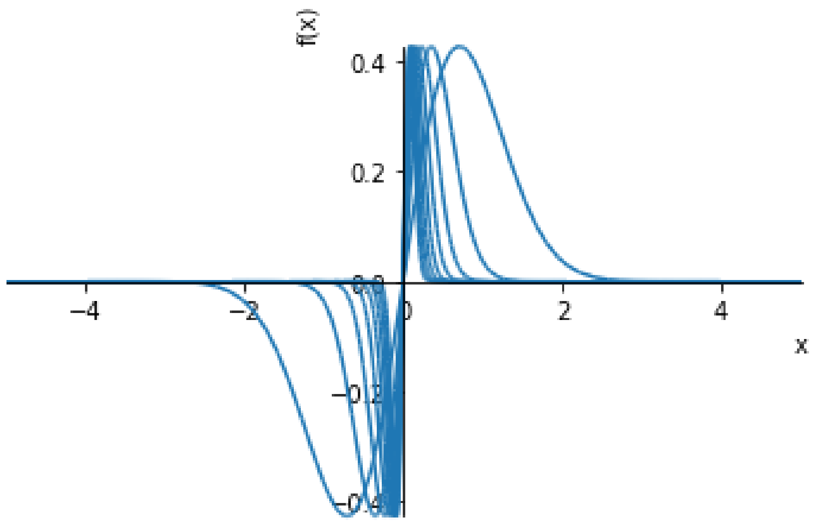


2. $f_n(x) = nxe^{-n^2x^2}$ converge puntualmente pero no uniformemente a cero.
   Si $x \neq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{nx}{e^{n^2x^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x}{2ne^{n^2x^2}} = 0$.
   Por otra parte,

$$0 = f_n^{'}(x) = -n^2e^{-n^2x^2}2x^2 + e^{-n^2x^2} \Leftrightarrow 1 - 2n^2x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}n}.$$

   Y, $f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}n}\right) = \pm e^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}$.

[21]:
```
fn=n*exp(-n**2*x**2)*x
p=plot(fn.subs(n,1), (x,-5,5),show=false)
for k in range(2,10):
    p.append(plot(fn.subs(n,k), (x,-5,5),show=false)[0])
p.show()
```



Teorema 1.4.6 Si $f_n : A \to B$ (aquí $A, B \subset \mathbb{R}^n$ ó $A, B \subset \mathbb{C}$) son continuas y convergen uniformemente a f, entonces f es continua y

$$\lim_{x\to a}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(a) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to a} f_n(x).$$

Demostración. Sea $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ y $a \in A$.
Sea $\varepsilon > 0$, entonces $\forall x \exists N : n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$.
Fijamos un n cualquiera que satisfaga la desigualdad anterior.
Como f_n es continua en a $\exists\delta = \delta(\varepsilon, a)$ tal que $|x - a| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$.
Entonces

$$|f(x) - f(a)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)| < \varepsilon.$$

□

Ejemplo 1.4.19 x^n converge puntualmente en $[0, 1]$ pero no uniformemente.

Teorema 1.4.7 Si f_n converge uniformemente a f en $[a,b]$ entonces

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Demostración. La prueba se deja como ejercicio. □

Teorema 1.4.8 (M-test Weiertrass) Si $f_n : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $|f_n(x)| \leq M_n$ independientemente de x y $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$ entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente en A.

Demostración. La serie converge puntualmente por aplicación del *Criterio de Comparación*.

Sea $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ y sea $\varepsilon > 0$. Entonces $\exists N > 0$ tal que $\sum_{n=N+1}^{\infty} M_n < \varepsilon$.

Luego,

$$\left|f(x) - \sum_{n=1}^{N} f_n(x)\right| = \left|\sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x)\right|$$

$$= \left|\lim_{M\to\infty}\sum_{n=N+1}^{M} f_n(x)\right| \leq \lim_{M\to\infty}\sum_{n=N+1}^{M} M_n < \varepsilon.$$

□

Corolario 1.4.2 Si la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ tiene radio de convergencia $R > 0$, entonces converge uniformemente en $|z-z_0| \leq r\ \forall r < R$.

Demostración. Supongamos $z_0 = 0$.

Sea $0 < r < R$ entonces la serie converge abasolutamente en $|z| = r$ y por tanto

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n < \infty.$$

Luego si $|z| < r$ entonces $|a_n z^n| \leq |a_n| r^n$ y se verifican las hipótesis del M-Test de Weierstrass. □

Ejemplo 1.4.20 Analizar con Sympy la convergencia de $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$.

Corolario 1.4.3 Si $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| + |b_n| < \infty$ entonces la serie de Fourier

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx),$$

converge uniformemente a una función f en $[-\pi, \pi]$ y

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx,$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(nx)\,dx.$$

Problema: Hallar $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

1.5 Productos infinitos

Si un polinomio

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + 1,$$

tiene raíces reales $x_1, x_2, \ldots, x_n$ entonces

$$x_1^{-1} + x_2^{-1} + \ldots + x_n^{-1} = -a_1.$$

Demostración. Tenemos que $p(x) = a_n(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$ entonces $1 = p(0) = (-1)^n x_1 \ldots x_n$ y

$$p'(0) = a_1 = a_n(-1)^{n-1}(x_1x_3\ldots x_n + x_2x_3\ldots x_n + \ldots + x_1x_2\ldots x_{n-1}).$$

Luego

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{p'(0)}{p(0)} \\ &= \frac{a_n(-1)^{n-1}(x_1x_3\ldots x_n + x_2x_3\ldots x_n + \ldots + x_1x_2\ldots x_{n-1})}{(-1)^n x_1\ldots x_n} \\ &= -\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right). \end{aligned}$$

Además

$$p(x) = (-1)^n x_1x_2\ldots x_n \left(1 - \frac{x}{x_1}\right)\left(1 - \frac{x}{x_2}\right)\ldots\left(1 - \frac{x}{x_n}\right).$$

□

Teorema 1.5.9 (Euler(1748))

$$\operatorname{sen} x = x\prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right).$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sen} x}{x} &= \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots}{x} \\ &= \left(1 - \frac{x}{\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{2\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{2\pi}\right)\ldots \qquad (1.3) \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\ldots\left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)\ldots \end{aligned}$$

□

Tomando $x^2 = y$ en (1.3) llegamos a

$$1 - \frac{y}{3!} + \frac{y^2}{5!} + \frac{y^4}{7!} + \ldots = \left(1 - \frac{y}{\pi^2}\right) \ldots \left(1 - \frac{y}{k^2\pi^2}\right).$$

Luego

$$\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \ldots = \frac{1}{6}$$

y

$$1 + \frac{1}{4} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}.$$

Evaluando en $x = \frac{\pi}{2}$ obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\pi} &= \left(1 - \frac{(\frac{\pi}{2})^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{(\frac{\pi}{2})^2}{4\pi^2}\right) \ldots \left(1 - \frac{(\frac{\pi}{2})^2}{k^2\pi^2}\right) \ldots \\
&= \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4k^2}\right) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{4k^2 - 1}{4k^2} \\
&= \prod_{k=1}^{\infty} \frac{2k-1}{2k} \frac{2k+1}{2k} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2} \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 4} \ldots
\end{aligned}$$

y por lo tanto obtenemos la fórmula de Wallis

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \ldots$$

1.6 Aproximación de funciones

Teorema 1.6.10 (Weierstrass) Si f es continua en $[0, 1]$ entonces f es límite uniforme de polinomios.

Definición 1.6.3 Si f es una función se define su polinomio de Berstein de grado n por

$$B_n(f) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}.$$

Si $f \equiv 1$ entonces

$$B_n(f) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = [x + (1-x)]^n = 1.$$

Si $f \equiv x$ entonces

$$\begin{aligned}
B_n(f) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{k}{n} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= x \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)![n-1-(k-1)]!} x^{k-1} (1-x)^{[n-1-(k-1)]} \\
&= x B_{n-1}(1) = x.
\end{aligned}$$

Si $f \equiv x^2$ entonces

$$\begin{aligned}
B_n(f) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{k^2}{n^2} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= x \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)![n-1-(k-1)]!} \frac{k}{n} x^{k-1}(1-x)^{n-k} \\
&= x \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{n} \binom{n-1}{k-1} x^{k-1}(1-x)^{n-k} + \frac{x}{n} \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} x^{k-1}(1-x)^{n-k} \\
&= x \frac{n-1}{n} B_{n-1}(x) + \frac{x}{n} B_{n-1}(1) = \frac{n-1}{n} x^2 + \frac{x}{n}.
\end{aligned}$$

Luego, tenemos que $B_n(x^2) \to x^2$ uniformemente.

Dado que f es continua, para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|x-y| < \delta$ entonces $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Sean $I_x = \{k | \left|\frac{k}{n} - x\right| < \delta\}$ y $J_x = \{1, \ldots, n\} - I_x$, luego

$$\begin{aligned}
&|f(x) - B_n(f)(x)| \\
=&\left| \sum_{k=0}^{n} f(x) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} - \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right| \\
\leq& \sum_{k=0}^{n} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
\leq& \sum_{I_x} + \sum_{J_x} < \varepsilon + 2M \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}
\end{aligned}$$

siendo $M = \sup |f|$.

Ahora,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq& \frac{1}{\delta^2} \sum_{k=0}^{n} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
=& \frac{1}{\delta^2} \left(x^2 - 2x^2 + \frac{n-1}{n} x^2 + \frac{x}{n} \right).
\end{aligned}$$

Luego

$$\left| \sum_{J_x} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right| \leq \frac{1}{\delta^2} \left\{ \frac{|x|^2 + |x|}{n} \right\} \leq \frac{1}{n\delta^2},$$

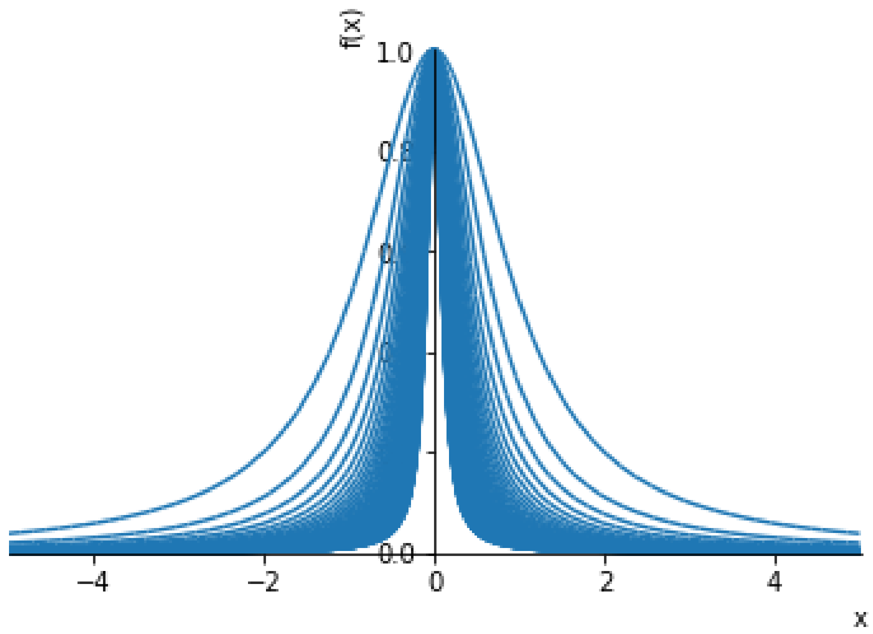
y podemos elegir n tal que $\frac{1}{n\delta^2} < \varepsilon$.

Ejemplos unidad 2

[1]:
```python
from sympy import *
init_printing()
```

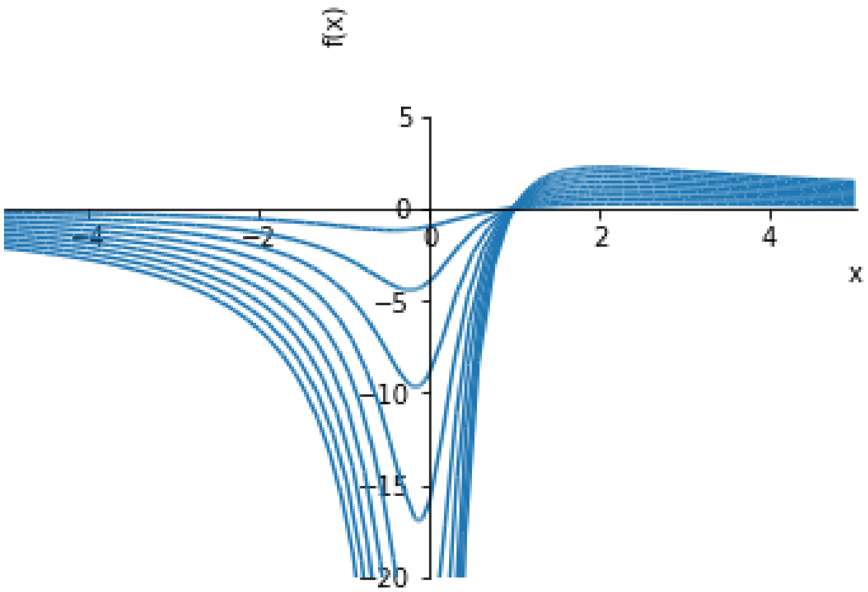
Ejemplo $f_n(x) = \frac{1}{1+nx^2}$

[2]:
```python
x,n=symbols('x,n')
fn=1/(1+n*x**2)
p=plot(fn.subs(n,1), (x,-5,5),show=false)
for k in range(2,100):
    p.append(plot(fn.subs(n,k), (x,-5,5),show=false)[0])
p.show()
```



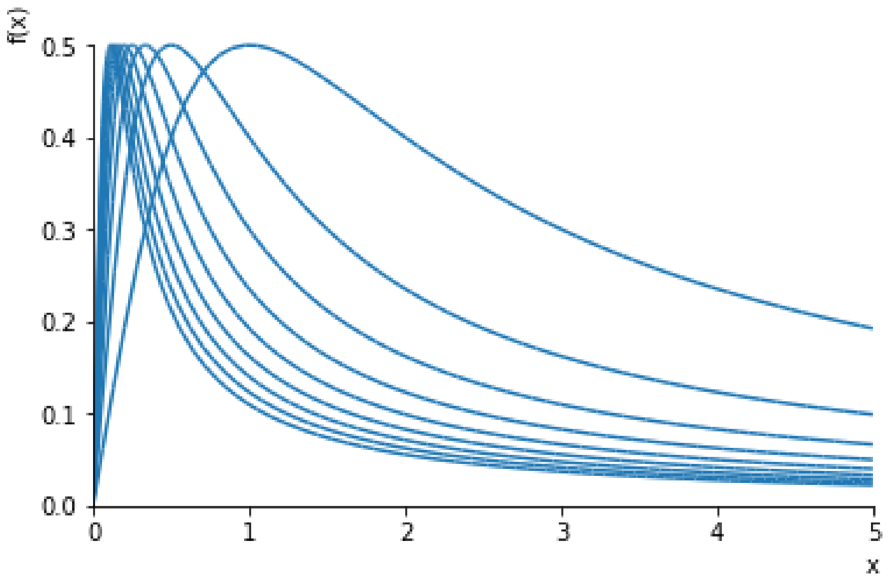
Ejemplo $f_n(x) = \frac{n^2x-n^2}{1+nx^2}$

[3]:
```python
x,n=symbols('x,n')
fn=(n**2*x-n**2)/(1+n*x**2)
p=plot(fn.subs(n,1), (x,-5,5),show=false,ylim=(-20,10))
for k in range(2,10):
    p.append(plot(fn.subs(n,k), (x,-5,5),show=false)[0])
p.show()
```



Ejemplo $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$

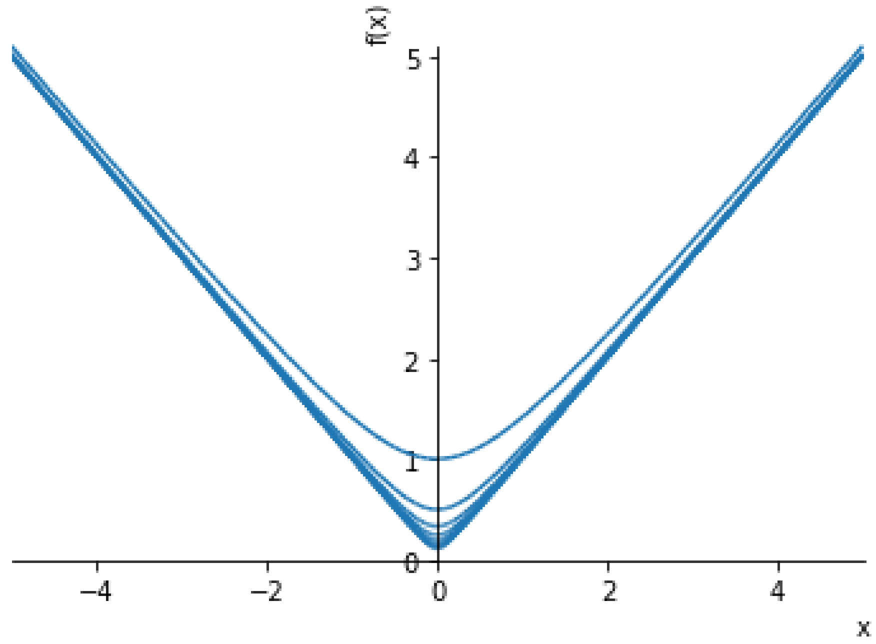
[4]:
```
x,n=symbols('x,n')
fn=n*x/(1+n**2*x**2)
p=plot(fn.subs(n,1), (x,0,5),show=false)
for k in range(2,10):
    p.append(plot(fn.subs(n,k), (x,0,5),show=false)[0])
p.show()
```



Ejemplo $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$

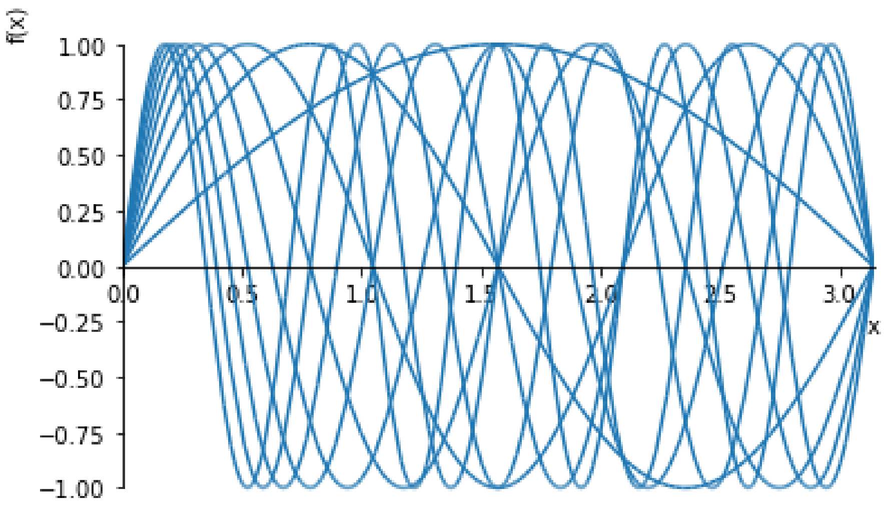
[5]:
```
def grafica(f,x1,x2,m):
    p=plot(f.subs(n,1), (x,x1,x2),show=false)
    for k in range(2,m):
        p.append(plot(f.subs(n,k), (x,x1,x2),show=false)[0])
```

```
    p.show()
f=sqrt(x**2+1.0/n**2)
grafica(f,-5,5,10)
```



Ejemplo $f_n(x) = \sin(nx)$

[6]:
```
f=sin(n*x)
grafica(f,0,pi,10)
```



Series de Potencias

Ejemplo $S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n$

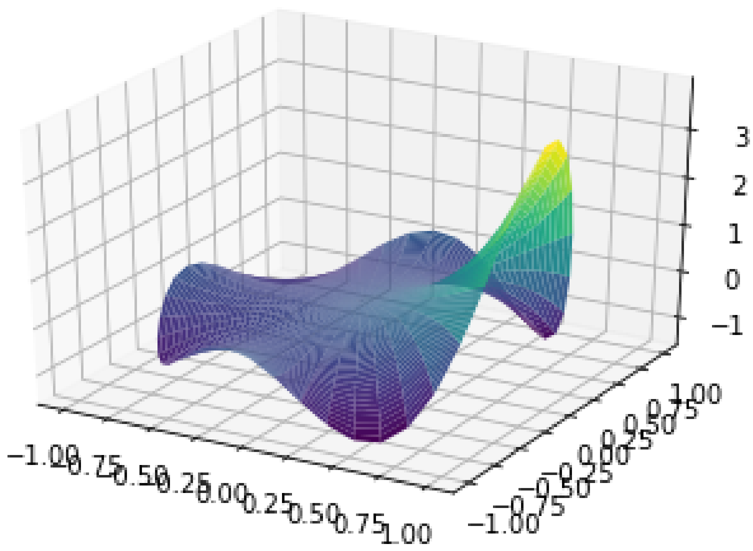
Serie geométrica converge $|z| < 1$. Ponemos $z = re^{i\theta}$. Luego $z^j = r^j e^{j\theta i}$.

[7]:
```
n,theta,r=symbols('n,theta,r',real=True)

S=sum([r**j*exp(j*theta*I) for j in range(1,5)])
SS=re(S)
```

[8]:
```
from sympy.plotting import plot3d_parametric_surface
```

[9]:
```
plot3d_parametric_surface(r*cos(theta),r*sin(theta),SS,(theta,-pi,pi),(r,0,1))
```



[9]: <sympy.plotting.plot.Plot at 0x7f413ec776d0>

Series de Fourier

[10]:
```
x=symbols('x',real=True)
n,m=symbols('n,m',integer=True,positive=True)
Integral(cos(n*x)*cos(m*x),(x,-pi,pi)).doit()
```

[10]:

$$\begin{cases} 0 & \text{for}\ m \neq n \\ \pi & \text{otherwise} \end{cases}$$

[11]:
```
Integral(sin(n*x)*sin(m*x),(x,-pi,pi)).doit()
```

[11]:

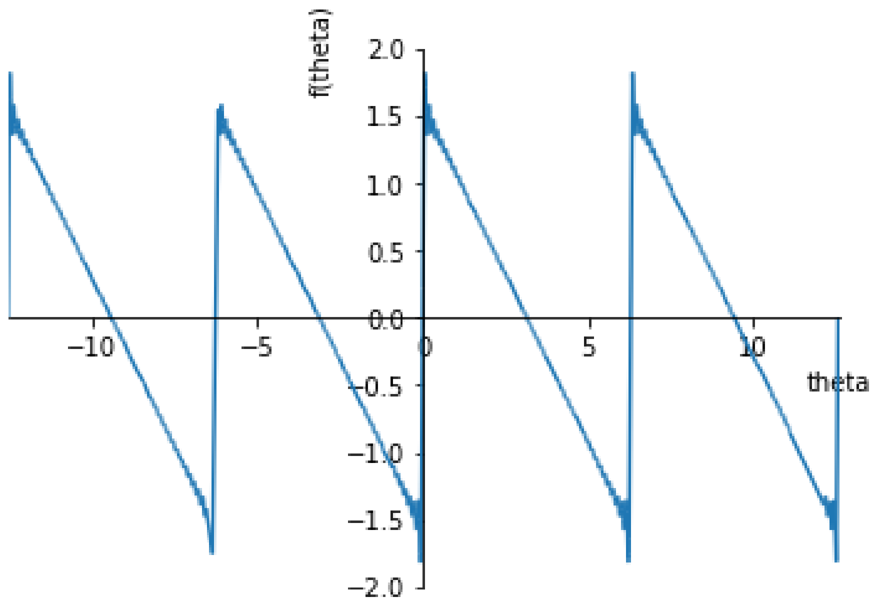
$$\begin{cases} 0 & \text{for}\ m \neq n \\ \pi & \text{otherwise} \end{cases}$$

[12]:
```
Integral(cos(n*x)*sin(m*x),(x,-pi,pi)).doit()
```

[12]:

$$0$$

[13]:
```
S=sum([sin(n*theta)/n for n in range(1,50)])
plot(S,(theta,-4*pi,4*pi))
```

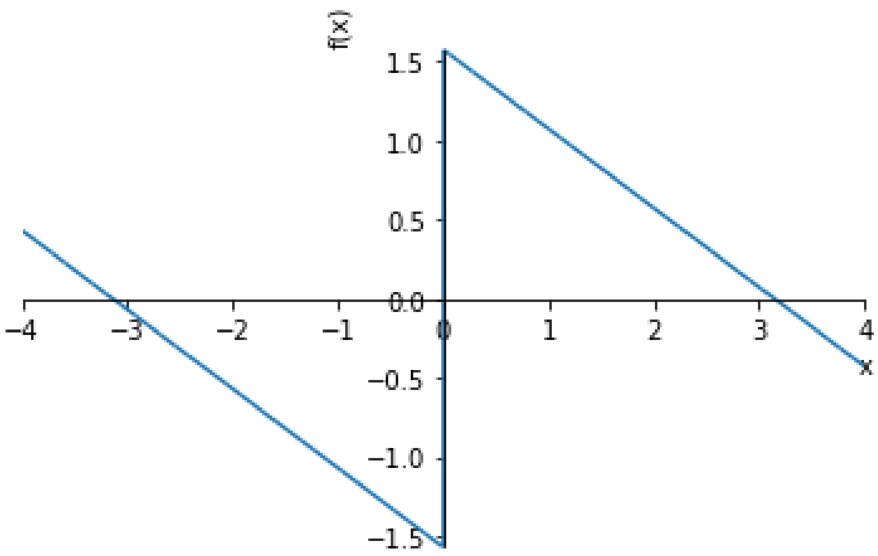


[13]: <sympy.plotting.plot.Plot at 0x7f413f16afd0>

Ejemplo

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi - x}{2}, & \text{si } x \in [0, \pi] \\ -\frac{\pi + x}{2}, & \text{si } x \in [-\pi, 0) \end{cases}$$

[14]:
```
f=Piecewise(((pi-x)/2, x>=0  ),(-(pi+x)/2,x<0 ))
plot(f,(x,-4,4))
```



[14]: <sympy.plotting.plot.Plot at 0x7f413f019b50>

[15]:
```
def a(g,k):
    return 1/pi*Integral(g*cos(k*x),(x,-pi,pi)).doit()
def b(g,k):
    return 1/pi*Integral(g*sin(k*x),(x,-pi,pi)).doit()
```

[16]:
```
[a(f,k) for k in range(1,10)]
```

[16]:

$$[0,\quad 0,\quad 0,\quad 0,\quad 0,\quad 0,\quad 0,\quad 0,\quad 0]$$

[17]:
```
[b(f,k) for k in range(1,10)]
```

[17]:

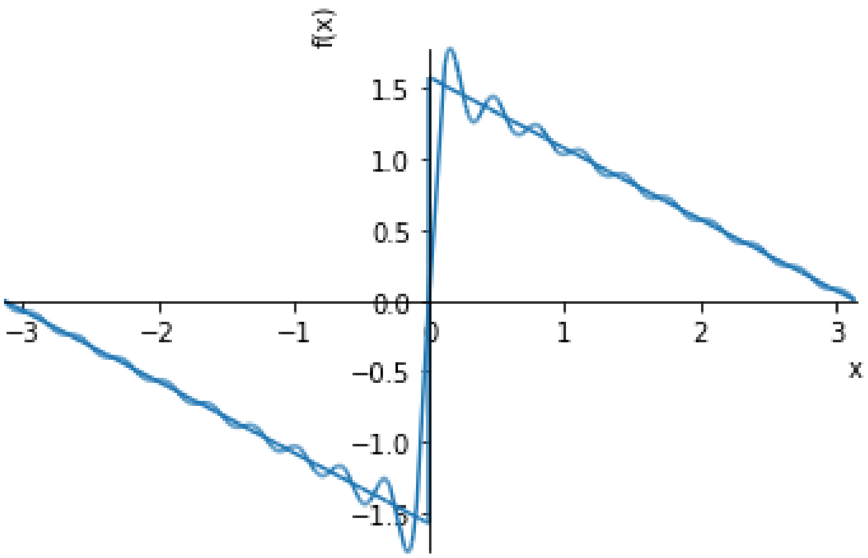
$$\left[1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{7},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{9}\right]$$

[18]:
```
S=sum([b(f,k)*sin(k*x) for k in range(1,20)])
S
```

[18]:

$$\sin(x)+\frac{\sin(2x)}{2}+\frac{\sin(3x)}{3}+\frac{\sin(4x)}{4}+\frac{\sin(5x)}{5}+\frac{\sin(6x)}{6}+\frac{\sin(7x)}{7}+\frac{\sin(8x)}{8}+\frac{\sin(9x)}{9}+\frac{\sin(10x)}{10}+\frac{\sin(11x)}{11}+\sin($$

[19]:
```
S=sum([b(f,k)*sin(k*x) for k in range(1,20)])
plot(f,S, (x,-pi,pi))
```

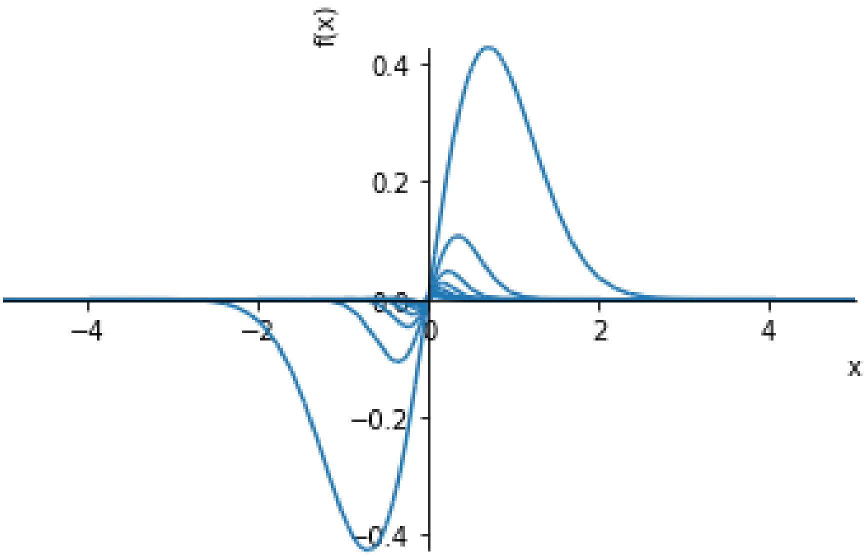


[19]: <sympy.plotting.plot.Plot at 0x7f413f1ae210>

Convergencia uniforme

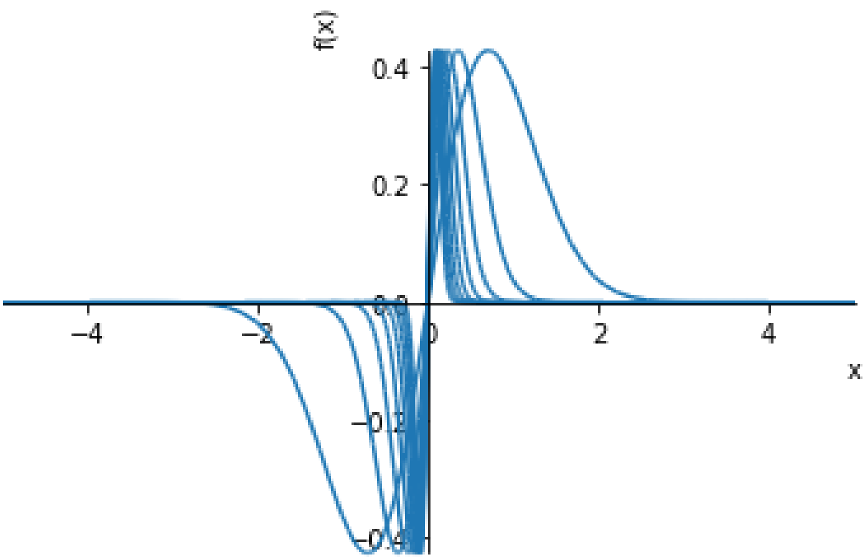
Ejemplo $f\_n(x) = \frac{1}{n}e^{-n2x^2}x$

[20]:
```
x,n=symbols('x,n')
fn=1/n*exp(-n**2*x**2)*x
p=plot(fn.subs(n,1), (x,-5,5),show=false)
for k in range(2,10):
    p.append(plot(fn.subs(n,k), (x,-5,5),show=false)[0])
p.show()
```



Ejemplo $ f_n(x)=ne^{-n2x^2}x $

[21]:
```
fn=n*exp(-n**2*x**2)*x
p=plot(fn.subs(n,1), (x,-5,5),show=false)
for k in range(2,10):
    p.append(plot(fn.subs(n,k), (x,-5,5),show=false)[0])
p.show()
```



Bibliografía