Depto de Matemática.
Primer Cuatrimestre de 2022
Teoría de la Medida
Práctica 1: Cardinalidad

Ejercicio 1. Sea $f : A \longrightarrow B$ una función cualquiera. Supongamos que $\{A_i\}_{i\in I}$ y $\{B_i\}_{i\in I}$ son familias subindicadas de conjuntos, donde los A_i y B_i son subconjuntos de A y B respectivamente. Demostrar las siguientes propiedades:

1. $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i\in I} A_i^c$.
2. $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i\in I} A_i^c$.
3. $f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$.
4. ¿Qué ocurre con $f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)$?
5. $f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$.
6. $f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$.

Ejercicio 2. Demostrar que si $f : A \longrightarrow B$ una función, entonces

1. $f(C_1 \cup C_2) = f(C_1) \cup f(C_2)$.
2. $f^{-1}(D_1 \cup D_2) = f^{-1}(D_1) \cup f^{-1}(D_2)$.
3. $f(C_1 \cap C_2) \subset f(C_1) \cap f(C_2)$. Dar un ejemplo de que la igualdad no vale en general.
4. $f^{-1}(D_1 \cap D_2) = f^{-1}(D_1) \cap f^{-1}(D_2)$.

Ejercicio 3. Probar que $\sim$ es una relación de equivalencia.

Ejercicio 4. Supongamos que $A \sim B$ y $C \sim D$.

1. Demostrar que $\mathscr{P}(A) \sim \mathscr{P}(B)$.
2. Demostrar que $A \times C \sim B \times D$.
3. Demostrar que $A^C \sim B^D$.
4. Si $A \precsim C$ entonces $B \precsim D$.
5. Si $A \precsim B$ entonces $A^C \precsim B^C$.

Ejercicio 5. * Demostrar que un subconjunto de un conjunto finito es finito.

Ejercicio 6. Demostrar que la función $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ definida por:

$$f(j,k) := \frac{(j+k-1)(j+k)}{2} - j + 1,$$

es una biyección.

Ejercicio 7. Encontrar, de manera explícita, una cantidad numerable de subconjuntos de $\mathbb{N}$, mutuamente disjuntos y cada uno de ellos numerable. Usar esto para dar otra demostración de que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es numerable.

Ejercicio 8. Demostrar, exhibiendo una biyección, que $(0, 1) \sim [0, 1]$

Ejercicio 9. Demostrar que, para cualquier conjunto A, $\mathscr{P}(A) \sim \{0, 1\}^A$.

Ejercicio 10. Demostrar que son equivalentes:

1. A es infinito.
2. A es coordinable con un subconjunto propio, es decir: Existe $B \subset A$, con $B \neq A$, tal que $A \sim B$.

Ejercicio 11.* Sea A un conjunto infinito y $B \subset A$ numerable. Supongamos que $A - B$ es infinito. Demostrar que $A - B \sim A$.

Ejercicio 12. Sean A y B conjuntos y supongamos que existe una función f de A en B suprayectiva. Demostrar que $\#B \leq \#A$.

Ejercicio 13. Demostrar que el conjunto formado por todos los subconjuntos de $\mathbb{N}$ que son finitos, es numerable. ¿Qué ocurrira con el conjunto de todos los subconjuntos infinitos?

Ejercicio 14.* Sea $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia de intervalos de $\mathbb{R}$. Suponer que los conjuntos en la familia son mutuamente disjuntos, es decir: $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$. Demostrar que el conjunto $\{A_i : i \in I\}$ es a lo sumo numerable.

Ejercicio 15.* Recordemos que una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice nodecre-
ciente, si para todos $x, y \in \mathbb{R}$, tales que $x < y$, se tiene que $f(x) \leq f(y)$. Dada una función nodecreciente, demostrar que el conjunto de todos los puntos de discontinuidad es a lo sumo numerable. *Ayuda*: Demostrar en primera instancia que los límites laterales:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) \quad \text{y} \quad \lim_{x \to a^-} f(x)$$

existen para todo $a \in \mathbb{R}$. Luego aplicar el ejercicio anterior.

Ejercicio 16. Demostrar que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{R}$ ($c^{\aleph_0} = c$).

Ejercicio 17.* Como aprendimos $\mathbb{N} \sim \mathbb{Q}$, esto significa que existe una aplicación biyectiva $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$, que nos permite enumerar $\mathbb{Q}$ como una suceción $r_j := f(j)$. Definimos la aplicación:

$$\begin{aligned} T : C(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ f &\longmapsto T_f \end{aligned}$$

donde

$$T_f(j) := f(r_j).$$

1. Demostrar que T es inyectiva. Por consiguiente $C(\mathbb{R}) \precsim \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
2. Usando el inciso anterior, demostrar que $C(\mathbb{R}) \sim \mathbb{R}$, donde $C(\mathbb{R})$ es el conjunto de las funciones continuas de $\mathbb{R}$ en si mismo.