Introducción al Análisis Matemático

(BORRADOR)

Índice general

1 Medidas abstractas

«Me gustaría enfatizar nuevamente, antes de comenzar esta presentación, que la nueva definición será aplicable no solo a un espacio con n dimensiones sino a un conjunto abstracto. Es decir, ni siquiera es necesario, por ejemplo, suponer que sabemos cuál es el límite de elementos en este conjunto»

M. Frechet
Sur l'intégrale d'une fonctionnelle étendueà un ensemble abstrait
Bulletin de la S. M. F., tome 43 (1915), p. 248-265.

En todos los capítulos anteriores hemos tratado de fundar los conceptos que fuimos introduciendo relacionándolos con conceptos que juzgamos los precedían. cuando decimos "preceder"contemplamos tanto el orden lógico de la construcción como el grado de abstracción de los objetos de estudio.

En esta unidad planteamos un salto cualitativo. Vamos abstraernos de la problemática que dió origen a la construcción de la medida en itengral de Lebesgue, esto es la noción de área, y consideraremos una teoría axiomática, donde postularemos como axiomas aquellas propiedades que se revelaron trascendentes en los capítulos anteriores. Este enfoque axiomático se abstrae a su vez de las entidades a las que pretendemos medir, en el sentido que ya no formularemos el concepto de medida para subconjuntos de $\mathbb{R}$, o el espacio euclideano $\mathbb{R}^n$. Introducieremos el concepto de *espacio de medida* como una abstracción y veremos como este concepto induce un consecuente concepto de integral.

Las nociones introducidas aquí fueron presentadas por primera vez por M. Frechet en el artículo del cual fue extraída la cita con la que comensamos el presente capítulo.

La noción de medida abstracta es muy fructífera pues unifica multitud de instancias particulares de esta noción que aparecen en distintas áres de la matemática además de contemplar la medida de Lebesgue.

1.1 Algebras, σ-álgebras y clases monótonas

Definición 1.1.1 (Algebra de conjuntos) Sea X un conjunto y $\mathscr{A} \subset \mathcal{P}(X)$. Diremos que $\mathscr{A}$ es un *álgebra* si:

1. $\varnothing \in \mathscr{A}$.
2. $A \in \mathscr{A} \Rightarrow A^c \in \mathscr{A}$.
3. $A_i \in \mathscr{A}$, $i = 1, \ldots, n$, $\Rightarrow \bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathscr{A}$.

Ejercicio 1.1.1 Demostrar que los siguientes ejemplos definen álgebras de conjuntos.

1. La colección de todas las uniones de una cantidad finita de intervalos de $\mathbb{R}$, donde por intervalo inlcuímos tanto acotados como no y tanto abiertos como cerrados como ninguno de ambos.
2. Como en el ejemplo anterior, pero con los extremos de los intervalos en $\mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\}$ o $\mathbb{Q} \cup \{\pm\infty\}$.
3. Más generalmente aún, como en los ejemplos anteriores, pero con los extremos de los intervalos en $A \cup \{\pm\infty\}$, donde $A \subset \mathbb{R}$.
4. Sea X un conjunto cualquiera y sean $A_i \subset X$, $i = 1, \ldots, n$, subconjuntos mutuamente disjuntos tales que $X = \bigcup_{i=1}^n A_i$. El álgebra que proponemos

es $\mathscr{A} = \{\bigcup_{i\in F} A_i | F \subset \{1, \ldots, n\}\}$. Esto es todas las uniones posibles de los A_i. Eventualmente $F = \varnothing$ y la unión correspondiente es asumida igual a $\varnothing$.

Ejercicio 1.1.2 Demostrar que $\mathscr{A}$ es un álgebra si y solo si

1. $\varnothing \in \mathscr{A}$.
2. $A \in \mathscr{A} \Rightarrow A^c \in \mathscr{A}$.
3. $A_i \in \mathscr{A}$, $i = 1, \ldots, n$, $\Rightarrow \bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathscr{A}$.

Definición 1.1.2 (Clases monótonas) Sea X un conjunto y $\mathscr{A} \subset \mathcal{P}(X)$. El conjunto $\mathscr{A}$ se llamará *clase monótona* si

1. $A_i \in \mathscr{A}$, $A_i \subset A_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots \Rightarrow \bigcup_{i=1}^\infty A_i \in \mathscr{A}$.
2. $A_i \in \mathscr{A}$, $A_i \supset A_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots \Rightarrow \bigcap_{i=1}^\infty A_i \in \mathscr{A}$.

Ejercicio 1.1.3 Demostrar que los siguientes ejemplos definen clases monótonas.

1. La colección de todos los intervalos de $\mathbb{R}$ de la forma $(a, +\infty)$ o $[a, +\infty)$ con $a \in [-\infty, +\infty)$.
2. En $\mathbb{R}^n$ la colección de de todas las bolas, tanto cerradas o abiertas, de centro 0 y radio $r \in [0, +\infty]$.
3. La colección de todos los subgrupos de un grupo dado G.

Recordemos del capítulo anterior.

Definición 1.1.3 (σ-álgebra de conjuntos) Sea X un conjunto y $\mathscr{A} \subset \mathcal{P}(X)$. Diremos que $\mathscr{A}$ es una *σ-álgebra* si:

1. $\varnothing \in \mathscr{A}$.
2. $A \in \mathscr{A} \Rightarrow A^c \in \mathscr{A}$.
3. $A_i \in \mathscr{A}$, $i = 1, \ldots$, $\Rightarrow \bigcup_{i=1}^\infty A_i \in \mathscr{A}$.

Ejercicio 1.1.4 Demostrar que $\mathscr{A}$ es σ-álgebra si y sólo si es clase monótona y álgebra.

Ejercicio 1.1.5 Demostrar que $\mathscr{A}$ es σ-álgebra si y sólo si es álgebra y satisface que

- $E_n \in \mathscr{A}$, $n = 1, 2, \ldots$ y $E_i \cap E_j = \varnothing$, cuando $i \neq j$ implican que $\bigcup_{n=1}^\infty E_n \in \mathscr{A}$.

1.2 Medidas

Definición 1.2.4 Sea X un conjunto y $\mathscr{A}$ una σ-álgebra. Una funcion $\mu : \mathscr{A} \to [0, +\infty]$ se llama una *medida* si para toda colección numerable de subconjuntos $A_i \in \mathscr{A}$, $i = 1, 2, \ldots$, mutuamente disjuntos entre si, se satisface que

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Al triplete $(X, \mathscr{A}, \mu)$ se lo denomina *espacio de medida*..

Ejercicio 1.2.6 Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ espacio de medida. Demostrar que se satisface las siguientes relaciones

1. $\mu(\varnothing) = 0$.
2. $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$.
3. Si $\mu(B) < \infty$ y $B \subset A$ entonces $\mu(A - B) = \mu(A) - \mu(B)$.

Ejemplo 1.2.1 $(\mathbb{R}, \mathscr{M}, m)$, donde $\mathscr{M}$ denota la σ-algebra de los conjuntos medibles Lebesgue y m la medida de Lebesgue, es un espacio de medida. Si en lugar de considerar la σ-álgebra $\mathscr{M}$ consideramos la σ-álgebra $\mathscr{B}$ de conjuntos medibles Borel, resulta en otro espacio de medida $(\mathbb{R}, \mathscr{B}, m)$, que no es más que la restricción de la medida a una sub-σ-álgebra.

Ejercicio 1.2.7 (Medida de conteo) Sea X es un conjunto y $\mathscr{A} = \mathcal{P}(X)$ la colección de todos los subconjuntos de X. Para $A \in \mathscr{A}$ escribamos $\mu(A) = \#A$, cuando A es finito, y $\mu(A) = +\infty$ cuando A no es finito. Demostrar que el triple $(X, \mathscr{A}, \mu)$ es espacio de medida.

Ejercicio 1.2.8 Sea $X = \mathbb{N}$ y $\mathscr{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ la colección de todos los subconjuntos de $\mathbb{N}$. Supongamos dada una función $f : \mathbb{N} \to [0, +\infty]$. Para $A \in \mathscr{A}$ escribamos

$$\mu(A) = \sum_{n \in A} f(n),$$

Demostrar que el triple $(\mathbb{N}, \mathscr{A}, \mu)$ es espacio de medida. ¿Qué resulta μ si $f(n) = 1$ para todo n? ¿Qué condición debe satisfacer f para que $\mu(A) < \infty$ para todo $A \subset \mathbb{N}$?

Ejercicio 1.2.9 Sea $X = \mathbb{N}$ y $\mathscr{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ la colección de todos los subconjuntos de $\mathbb{N}$. Sea k un natural fijo. Para $A \subset \mathbb{N}$ escribir

$$\mu(A) = \#\{n \in A : k|n\},$$

es decir $\mu(A)$ cuenta cuantos multiplos de k hay en A. Demostrar que μ es medida. Demostrar que esta medida es una instancia de las medidas introducidas en (1.2.8).

Un ejemplo muy importante es provisto por la siguiente proposición

Proposición 1.2.1 Sea $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ una función integrable y no negativa. El triplete $(\mathbb{R}, \mathscr{M}, \mu_f)$ es espacio de medida, donde $\mathscr{M}$ denota la σ-algebra de los conjuntos medibles Lebesgue y

$$\mu_f(A) = \int_A f(x)dx.$$

Dem. Sólo hay que demostrar que μ_f es una medida. Sean $A_i \in \mathscr{A}$, $i = 1, \ldots$, mutuamente disjuntos.

Ejercicio 1.2.10 Verificar la siguiente relación

$$\chi_{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} = \sum_{i=1}^{\infty} \chi_{A_i}.$$

Luego por la intercambiabilidad entre integral y series de términos positivos

$$\begin{aligned}\mu_f\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) &= \int_{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} f(x)dx = \int \chi_{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} f(x)dx \\ &= \int \sum_{i=1}^{\infty} \chi_{A_i} dx = \sum_{i=1}^{\infty} \int \chi_{A_i} dx = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_f(A_i).\end{aligned}$$

□

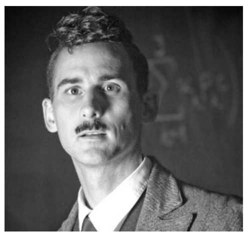
Ejercicio 1.2.11 (Delta de dirac) Sea X un conjunto no vacío cualquiera, $a \in X$ un punto fijo y $\mathscr{A} = \mathcal{P}(X)$. Definimos $\delta_a : \mathscr{A} \to [0, +\infty]$ por

$$\delta_a(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \in A \\ 0 & \text{si } a \notin A \end{cases}$$

Demostrar que $(X, \mathscr{A}, \delta)$ es un espacio de medida. La medida δ_a se denomina δ *de Dirac*.

Definición 1.2.5 (Completitud de medidas) Un espacio de medida se llama *completo* si $A \subset B \in \mathscr{A}$ y $\mu(B) = 0$ implican $A \in \mathscr{A}$.

Ejemplo 1.2.2 $(\mathbb{R}, \mathscr{M}, m)$ es un espacio de medida completo, mientras que $(\mathbb{R}, \mathscr{B}, m)$ no lo es.



Paul Adrien Maurice Dirac, (Brístol, Reino Unido, 8 de agosto de 1902-Tallahassee, Estados Unidos, 20 de octubre de 1984) fue un ingeniero eléctrico, matemático y físico teórico británico que contribuyó de forma fundamental al desarrollo de la mecánica cuántica y la electrodinámica cuántica.

1.3 Medida exterior

Definición 1.3.6 (Medida exterior) Sea X un conjunto no vacío. Una función $\mu^\star : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ se denomina una *medida exterior* si satisface que

$\mu^\star(\varnothing) = 0.$

Monotonía. $A_1 \subset A_2 \Rightarrow \mu^\star(A_1) \leq \mu^\star(A_2)$

σ-subaditividad. $A_j \subset X$, $j = 1, 2, \ldots$, $\Rightarrow \mu^\star\left(\bigcup_{j=1}^\infty A_j\right) \leq \sum_{j=1}^\infty \mu^\star(A_j)$.

Ejemplo 1.3.3 La medida exterior que definimos sobre subconjuntos de $\mathbb{R}$ es obviamente una medida exterior en el sentido de la definición anterior.

Definición 1.3.7 (Conjuntos medibles de Carathéodory) Sea $\mu^\star$ una medida exterior sobre X y $E \subset X$. Diremos que E es *medible en el sentido de Charathéodory* si para todo $A \subset X$ se cumple que

$$\mu^\star(A) = \mu^\star(A \cap E) + \mu^\star(A - E). \tag{1.1}$$

Observacion 1.3.1 A los efectos de chequear si un conjunto es medible es suficiente probar que se satisface la desigualdad

$$\mu^\star(A) \geq \mu^\star(A \cap E) + \mu^\star(A - E). \tag{1.2}$$

para todo A con medida exterior finita.

Teorema 1.3.1 Si $\mu^\star$ es una medida exterior sobre X y $\mathscr{A}$ el conjunto de todos los subconjuntos de X que son medibles según Carathéodory. Entonces $\mathscr{A}$ es una σ-álgebra y $\mu^\star$ restringido a $\mathscr{A}$ es una medida. El espacio de medida $(X, \mathscr{A}, \mu^\star)$ es completo

Dem. Que $\varnothing \in \mathscr{A}$ es una afirmación inmediata.

Si uno escribe la condición de Carathéodory para E^c queda exactamente igual que la respectiva condición para E. Esta observación justifica que $E \in \mathscr{A}$ implica que $E^c \in \mathscr{A}$.

Sean $E_1, E_2 \in \mathscr{A}$ y $A \subset X$. Entonces

$$\begin{aligned}\mu^\star(A) &\geq \mu^\star(A \cap E_2) + \mu^\star(A \cap E_2^c)\\ &\geq \mu^\star(A \cap E_1 \cap E_2) + \mu^\star(A \cap E_2 \cap E_1^c)\\ &\quad + \mu^\star(A \cap E_2^c \cap E_1) + \mu^\star(A \cap E_2^c \cap E_1^c)\end{aligned}$$

Ahora los conjuntos $E_2 \cap E_1, E_2 \cap E_1^c$ y $E_1 \cap E_2^c$ son mutuamente disjuntos y su unión es $E_1 \cup E_2$. Esta observación aplicada a los tres primeros términos del último miembro de la desigualdad anterior implica

$$\mu^\star(A) \geq \mu^\star(A \cap (E_1 \cup E_2)) + \mu^\star(A \cap (E_1 \cup E_2)^c).$$

De esta desiguldad concluímos que $E_2 \cup E_2 \in \mathscr{A}$. Esto a su vez implica que $\mathscr{A}$ es (al menos) un álgebra. Queremos ver que en realidad es σ-álgebra.

Supongamos que $E_1 \cap E_2 = \varnothing$. Tomando $A = E_1 \cup E_2$ en (1.2) obtenemos

$$\mu^\star(E_1 \cup E_2) \geq \mu^\star(E_1) + \mu^\star(E_2).$$

Ejercicio 1.3.12 Generalizar la desigualdad anterior de la siguiente forma. Si E_j, $j = 1, \ldots, n$ son mutuamente disjuntos entonces

$$\mu^\star(E_1 \cup \cdots \cup E_2) \geq \mu^\star(E_1) + \cdots + \mu^\star(E_n).$$

Siguiendo con la demostración, sean $E_n \in \mathscr{A}$, $n = 1, 2, \ldots$ una colección numerables de conjuntos mutuamente disjuntos en $\mathscr{A}$. Tomemos $G_n = \bigcup_{j=1}^n E_j$ y $G = \bigcup_{j=1}^\infty E_j$.

Como $\mathscr{A}$ es un álgebra, $G_n \in \mathscr{A}$. Además usando sucesivamente la condición de Carathéodory

$$\begin{aligned}
\mu^\star(G_n \cap A) &\geq \mu^\star(G_n \cap A \cap E_n) + \mu^\star(G_n \cap A \cap E_n^c) \\
&= \mu^\star(A \cap E_n) + \mu^\star(G_{n-1} \cap A) \\
&\geq \mu^\star(A \cap E_n) + \mu^\star(A \cap E_{n-1}) + \mu^\star(G_{n-2} \cap A) \\
&\ \ \vdots \\
&\geq \sum_{j=1}^{n} \mu^\star(A \cap E_j).
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Ahora deducimos que para todo $A \subset X$

$$\begin{aligned}
\mu^\star(A) &\geq \mu^\star(A \cap G_n) + \mu^\star(A \cap G_n^c) && (G_n \in \mathscr{A}) \\
&\geq \sum_{j=1}^{n} \mu^\star(A \cap E_j) + \mu^\star(A \cap G^c) && (\text{Ecuación } (1.3), G_n \subset G)
\end{aligned}$$

Tomando límite cuando $n \to \infty$

$$\begin{aligned}
\mu^\star(A) &\geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^\star(A \cap E_j) + \mu^\star(A \cap G^c) \\
&\geq \mu^\star\left(A \cap \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) + \mu^\star(A \cap G^c) && (\sigma - \text{subaditividad de } \mu^\star) \\
&\geq \mu^\star(A \cap G) + \mu^\star(A \cap G^c)
\end{aligned}$$

Luego $G \in \mathscr{A}$. Ahora el Ejercicio 1.1.5 implican que $\mathscr{A}$ es σ-álgebra. Además por el Ejercio1.3.12, para E_j, $j = 1, \ldots$ mutuamente disjuntos en $\mathscr{A}$.

$$\begin{aligned}
\mu^\star\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) \geq \mu^\star\left(\bigcup_{j=1}^{n} E_j\right) && (\text{monotonía de } \mu^\star) \\
= \sum_{j=1}^{n} \mu^\star(E_j) && (\text{Ejercicio } 1.1.5)
\end{aligned}$$

Tomando límite cuando $n \to \infty$ obtenemos

$$\mu^\star\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^\star(E_j)$$

Como la desigualdad inversa a la anterior es siempre cierta por la σ-subaditividad queda demostrado que $\mu^\star$ es medida sobre $\mathscr{A}$ y finalizada la demostración del teorema. □

1.4 Premedidas

Definición 1.4.8 (Premedida) Sea X un cojunto no vacío y $\mathscr{A}_0$ un álgebra de subconjuntos de X. Diremos que una función $\mu_0 : \mathscr{A}_0 \to [0, +\infty]$ es una **premedida** si satisface que

- Si $E_j \in \mathscr{A}_0$, $j = 1, 2, \ldots$ son mutuamente disjuntos y $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \in \mathscr{A}_0$ entonces
$$\mu_0\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(E_j)$$

Podemos construir medidas a partir de premedidas.

Lema 1.4.1 Sea μ_0 una premedida sobre el álgebra $\mathscr{A}_0$ de subconjuntos de X. Definimos $\mu^\star : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ por

$$\mu^\star(E) = \text{ínf}\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(E_j) \mid E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j, E_j \in \mathcal{A}_0\right\} \tag{1.4}$$

Entonces $\mu^\star$ es una medida exterior que satisface que $\mu^\star(E) = \mu_0(E)$ para todo $E \in \mathcal{A}_0$ y que todo conjunto $E \in \mathcal{A}_0$ es medible en el sentido de Carathéodory.

Dem.

Ejercicio 1.4.13 Probar que $\mu^\star$ definida en (1.4) define en efecto una medida exterior.

Veamos que la restricción de μ_* to $\mathcal{A}$ coincide con μ_0. Supongamos que $E \in \mathcal{A}$. Siempre $\mu_*(E) \leq \mu_0(E)$ pues E se cubre a si mismo. Probemos la desigualdad recíproca. Supongamos $E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$, con $E_j \in \mathcal{A}$ para todo j. Definimos

$$E_k' = E \cap \left(E_k - \bigcup_{j=1}^{k-1} E_j\right).$$

Los conjuntos E_k' son mutuamente disjuntos, $E_k' \in \mathcal{A}$, $E_k' \subset E_k$ y $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k'$. Por la definición de premedida:

$$\mu_0(E) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_0(E_k') \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu_0(E_k)$$

Luego $\mu_0(E) \leq \mu_*(E)$.

Por último probemos que los conjuntos en $\mathcal{A}$ son medibles para μ_*. Sea $A \subset X$, $E \in \mathcal{A}$ y $\varepsilon > 0$. Por definición existen $E_1, E_2, \ldots$ en $\mathcal{A}$ con $A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ y

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(E_j) \leq \mu_*(A) + \varepsilon$$

Como μ_0 finitamente aditiva en $\mathcal{A}$

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(E_j) &= \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(E \cap E_j) + \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(E^c \cap E_j) \\ &\geq \mu_*(E \cap A) + \mu_*(E^c \cap A)\end{aligned}$$

ε es arbitrario, $\mu_*(A) \geq \mu_*(E \cap A) + \mu_*(E^c \cap A)$ que termina por probar el teorema. $\square$

Teorema 1.4.2 (Extensión premedidas) Sea μ_0 una premedida sobre el álgebra $\mathscr{A}_0$ de subconjuntos de X. Entonces existe una extensión μ de μ_0 a la σ-algebra $\mathscr{A}$ generada por $\mathscr{A}_0$.

Demostración. La medida exterior μ_* inducida po μ_0 define una medida μ sobre la σ-álgebra de los conjuntos medibles según Carathéodory. Por el Lema anterior μ es medida sobre $\mathscr{A}$ que extiende μ_0.

□

1.5 Medidas σ-finitas

Definición 1.5.9 Un espacio de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$ se llama *σ-finita* si existen conjuntos medibles E_n, $n = 1, \ldots$, de medida finita tales que $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$.

Ejercicio 1.5.14 Demostrar que la medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}$ es σ-finita. Demotrar que la medida de conteo del ejercicio 1.2.8 es σ-finita si y sólo si X es a lo sumo numerable.

1.6 Medida de Lebesgue-Stieltjes

Haremos una construcción más general que produce una gran familia de medidas en $\mathbb{R}$ cuyo dominio es el σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. Tales medidas se denominan *medidas de Borel* en $\mathbb{R}$.

Para motivar las ideas, supongamos que μ es una medida de Borel finita en $\mathbb{R}$, y sea $F(x) = \mu((-\infty, x])$. La función F se llama la *función de distribución* de μ. Entonces F es creciente a y continua a la derecha, ya que $(-\infty, x] = \ bigcap_1^{\infty} (-\infty, x_n]$ siempre que $x_n \searrow x$. Además, si $b > a$, $(-\infty, b] = (-\infty, a] \cup (a, b]$, entonces $\mu((a, b]) = F(b) - F(a)$. Nuestro procedimiento será darle la vuelta a este proceso y construir una medida μ a partir de una función creciente continua por la derecha F. El caso especial $F(x) = x$ producirá la medida habitual de Lebesgue.

Los bloques de construcción de nuestra teoría serán los intervalos abiertos por la izquierda y cerrados por la derecha en $\mathbb{R}$, es decir, conjuntos de la forma $(a, b]$ o (a, ∞) o $\varnothing$, donde $-\infty \leq a < b < \infty$. En esta sección nos referiremos a tales conjuntos como intervalos semi-abiertos. Claramente, la intersección de dos intervalos semi-abiertos es un intervalo semi-abierto, y el complemento de un intervalo semi-abierto es un intervalo semi-abierto o la unión disjunta de dos intervalos semi-abiertos. La colección $\mathcal{A}$ de uniones disjuntas finitas de intervalos semi-abiertos es un álgebra, y la σ-álgebra generada por $\mathcal{A}$ es la σ-algebra de Borel $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

Proposición 1.6.2 Sea $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ creciente y continua por la derecha. Si $(a_j, b_j]$ $(j = 1, \ldots, n)$ son intervalos semi-abiertos disjuntos, sea

$$\mu_0\left(\bigcup_1^n (a_j, b_j]\right) = \sum_1^n [F(b_j) - F(a_j)]$$

y sea $\mu_0(\varnothing) = 0$. Entonces μ_0 es una premedida en el álgebra $\mathcal{A}$.

Demostración. Primero debemos verificar que μ_0 esté bien definida, ya que los elementos de $\mathcal{A}$ se pueden representar en más de una forma como uniones disjuntas de intervalos semi-abiertos. Si $\{(a_j, b_j]\}_1^n$ son disjuntos y $\bigcup_1^n (a_j, b_j] = (a, b]$, entonces, quizás después de volver a etiquetar el índice j, debemos tener $a = a_1 < b_1 = a_2 < b_2 = \ldots < b_n = b$, entonces $\sum_1^n [F(b_j) - F(a_j)] = F(b) - F(a)$. Más generalmente, si $\{I_i\}_1^n$ y $\{J_j\}_1^m$ son dos familias finitas de intervalos semi-abiertos disjuntos tales que $\bigcup_1^n I_i = \bigcup_1^n J_j$:

$$\sum_i \mu_0(I_i) = \sum_{i,j} \mu_0(I_i \cap J_j) = \sum_j \mu_0(J_j).$$

Por lo tanto, μ_0 está bien definida y es finitamente aditiva por construcción. Queda por demostrar que si $\{I_j\}_1^\infty$ es una secuencia de intervalos semi-abiertos disjuntos con $\bigcup_1^\infty I_j \in \mathcal{A}$ entonces $\mu_0(\bigcup_1^\infty I_j) = \sum_1^\infty \mu_0(I_j)$. Dado que $\bigcup_1^\infty I_j$ es una unión finita de intervalos semi-abiertos, la sucesión $\{I_j\}_1^\infty$ se puede dividir en un número finito de subsucesiones de modo que la unión de los intervalos en cada subsucesión sea un único intervalo semi-abierto. Al considerar cada subsucesión por separado y usar la aditividad finita de μ_0, podemos suponer que $\bigcup_1^\infty I_j$ es un intervalo semi-abierto $I = (a, b]$. En este caso, tenemos

$$\mu_0(I) = \mu_0\left(\bigcup_1^n I_j\right) + \mu_0\left(I \backslash \bigcup_1^n I_j\right) \geq \mu_0\left(\bigcup_1^n I_j\right) = \sum_1^n \mu_0(I_j).$$

Haciendo $n \to \infty$, obtenemos $\mu_0(I) \geq \sum_1^\infty \mu_0(I_j)$.

Para probar la desigualdad inversa, supongamos primero que a y b son finitos, y fijemos $\varepsilon > 0$. Como F es continua por la derecha, existe $\delta > 0$ tal que $F(a+\delta) - F(a) < \varepsilon$, y si $I_j = (a_j, b_j]$, para cada j existe $\delta_j > 0$ tal que $F(b_j + \delta_j) - F(b_j) < \varepsilon 2^{-j}$ Los intervalos abiertos $(a_j, b_j + \delta_j)$ cubren el conjunto compacto $[a+\delta, b]$, por lo que hay un sub-cubrimiento finito. Al descartar cualquier $(a_j, b_j + \delta_j)$ que esté contenido en uno más grande y reetiquetando el índice j, podemos suponer que

- los intervalos $(a_1, b_1 + \delta_1), \ldots, (a_N, b_N + \delta_N)$ cubren $[a+\delta, b]$,
- $b_j + \delta_j \in (a_{j+1}, b_{j+1} + \delta_{j+1})$ para $j = 1, \ldots, N-1$.

Pero entonces

$$\begin{aligned}
\mu_0(I) &< F(b) - F(a+\delta) + \varepsilon \\
&\leq F(b_N + \delta_N) - F(a_1) + \varepsilon \\
&= F(b_N + \delta_N) - F(a_N) + \sum_1^{N-1} [F(a_{j+1}) - F(a_j)] + \varepsilon \\
&\leq F(b_N + \delta_N) - F(a_N) + \sum_1^{N-1} [F(b_j + \delta_j) - F(a_j)] + \varepsilon \\
&< \sum_1^N \left[F(b_j) + \varepsilon 2^{-j} - F(a_j)\right] + \varepsilon \\
&< \sum_1^\infty \mu(I_j) + 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Dado que ε es arbitrario, demostramos el resultado cuando a y b son finitos.

Si $a = -\infty$, para cualquier $M < \infty$ los intervalos $(a_j, b_j + \delta_j)$ cubren $[-M, b]$, por lo que el mismo razonamiento da $F(b) - F(-M) \leq \sum_1^\infty \mu_0(I_j) + 2\varepsilon$, mientras que si $b = \infty$, para cualquier $M < \infty$ obtenemos igualmente $F(M) - F(a) \leq \sum_1^\infty \mu_0(I_j) + 2\varepsilon$. El resultado deseado sigue entonces dejando $\varepsilon \to 0$ y $M \to \infty$. □

1.7 Integración en espacio de medida

Definición 1.7.10 (Funciones medibles) Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida. Una función $f : X \to \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ se llama *medible* si para todo $a \in \mathbb{R}$

$$f^{-1}([-\infty, a)) = \{x \in X \mid f(x) < a\}.$$

La mayoría de los resultados y definiciones establecidos en el contexto de la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$ se extienden si cambios al contexto de medidas abstractas. Enumeremos los más importantes.

- El concepto de propiedad válida en casi todo punto.
- Funciones simples. son funciones de la forma

$$\phi(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{E_k},$$

  con $a_k \in \mathbb{R}$ y $E_k \in \mathcal{A}$, $k = 1, \ldots, n$.

Ejercicio 1.7.15 Demostrar que si $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ es medibles entonces si

- Integral de funciones medibles no-negativas.
- Teorema de Beppo-Levi.
- Lema Fatou.
- Teorema de la convergencia mayorada de Lebesgue