M. Leal. de Weierstrass

f es medible $\iff f^{-1}((a,+\infty)) \in \mathcal{M}_0$

Teorema. Si H es boreliano y f es medible entonces $f^{-1}(H)$ es medible.

Dem: sea

$$\mathcal{M}' = \{H : f^{-1}(H) \text{ es medible}\}$$

$\mathcal{M}'$ es σ-álgebra y $\mathcal{T}\subset\mathcal{M}'$ $\therefore$ $\mathcal{B}\subset\mathcal{M}'$ $\square$

$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$

Diremos que $H\subset\overline{\mathbb{R}}$ es boreliano de la recta extendida si $H-\{-\infty,\infty\}\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$

Teorema: ~~Sea~~ $f:\mathbb{R}^n\to\overline{\mathbb{R}}$ es medible ssi $f^{-1}(H)\in\mathcal{M}_0$ cada vez que H es boreliano de $\overline{\mathbb{R}}$.

Dem $\Leftarrow$) inmediato. $\Rightarrow$) se tiene que

$$\{f=+\infty\}=\bigcap_{k=1}^{\infty}\{f\geq k\}\ ,\ \{f=-\infty\}=\bigcap_{k=1}^{\infty}\{f\leq -k\}$$

Si H es boreliano de $\overline{\mathbb{R}}$, supongamos que $H=H'\cup\{+\infty\}$ y H' medible de $\mathbb{R}$.

Luego $f^{-1}(H)=f^{-1}(H')\cup\{f=+\infty\}$ es medible

Ej 17b $\mathcal{A}$ es σ-algebra de subconjuntos de A. y $f: A \to B$. Definimos

$$\mathcal{B} = \{H \mid H \subset B;\ f^{-1}(H) \in \mathcal{A}\}$$

Entonces $\mathcal{B}$ es σ-algebra

Proposición $\mathcal{I}$ flia intervalos de $\mathbb{R}$. Entonces $\sigma(\mathcal{I}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Dem $A \subset \mathbb{R}$ es abierto $\Rightarrow A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n)$ mutuamente disjuntos.

$$(a_n, b_n) \in \mathcal{I} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n) \in \sigma(\mathcal{I})$$

$\Rightarrow A \in \sigma(\mathcal{I})$. Vale decir $\mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\mathcal{G} \subset \sigma(\mathcal{I}) \Rightarrow \mathcal{B} = \sigma(\mathcal{G}) \subset \sigma(\sigma(\mathcal{I})) = \sigma(\mathcal{I})$$

$\mathcal{I} \subset \mathcal{B}$

1) $(a,b) \in \mathcal{B}$ pues $(a,b) \in \mathcal{G}$

2) $[a,b) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \underbrace{(a - \tfrac{1}{k}, b)}_{\in \mathcal{B}} \in \mathcal{B}$

$\to \sigma(\mathcal{I}) \subset \mathcal{B}$

Definición: Si Σ_1 es un σ-álgebra de $\overline{\mathbb{R}}^n$ diremos que $f: \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ es Σ_1-medible si $\{f > a\} \in \Sigma_1$ $\forall a \in \mathbb{R}$.

Proposición. $f: \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ es Σ_1-medible ssi $f^{-1}(H) \in \Sigma_1$ cuando H es boreliano de $\overline{\mathbb{R}}$.

Cuando $\Sigma_1 = \mathcal{M}$ llamamos sólo medible.
Cuando $\Sigma_1 = \mathcal{B}$ " a f medible borel o función boreliana.

Ejercicio Si f es semicontinua inferiormente entonces f es medible.

Ahora estudiaremos $g \circ f$. Cuando
$\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \overline{\mathbb{R}} \xrightarrow{g} \overline{\mathbb{R}}$.

Definición: Diremos que $g: \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$ es boreliana si $g^{-1}(M)$ es boreliano de $\overline{\mathbb{R}}$ cuando M lo es.

Luego si $f: \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ es medible y $g: \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$ es boreliana $g \circ f$ es medible

Luego si f es medible $|f|, |f|^2, \log|f|$, e^f son medibles.

Si f y g son medibles $\{f<g\}$ es medible pues

$$\{f<g\} = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} \{f<q\}\cap\{g>q\}$$

Si f y g son medibles con respecto a Σ y si $c\in\mathbb{R}$ entonces $f+g$, $c.f$, $f.g$ son medibles

Suponemos que son finitas

Dem: Veamos que

$$\{f+g>a\} = \bigcup_{r\in\mathbb{Q}} \{f>r\}\cap\{g>a-r\}$$

Si $f(x)+g(x)>a$ entonces $\exists r\in\mathbb{Q}$ tal que

$$f(x) > r > a-g(x)$$

$$\{cf>a\} = \begin{cases} \{f>a/c\} & c>0 \\ \{f<a/c\} & c<0 \\ \emptyset, \mathbb{R}^n & c=0 \end{cases}$$

$$f.g = \frac{1}{4}\left[(f+g)^2-(f-g)^2\right]$$

Para $1/f$ ponemos $\frac{1}{f(x)}=0$ si $f(x)=\infty$

$$\left\{\frac{1}{f}>a\right\} = \begin{cases} \{f>0\}\cap\{f<\frac{1}{a}\} & a\geq 0 \\ \{f\geq 0\}\cup\{f<\frac{1}{a}\}\cap\{f<0\}\cup\{f=0\} & a<0 \end{cases}$$

<u>Sucesiones</u> <u>funciones</u> <u>medibles</u>

(4.7) Si $\{f_k\}$ son medibles con respecto a Σ_1 entonces:

$$g(x)=\inf_k f_k(x) \quad y \quad h(x)=\sup_k f_k(x)$$

son medibles.

sale de $\{h>a\}=\bigcup_{k=1}^{\infty}\{f_k>a\}$ y $\{g<a\}=\bigcup_{k=1}^{\infty}\{f_k<a\}$.

Si $\{f_n\}$ son Σ_1-medibles entonces

$$g(x)=\liminf_{k\to\infty} f_k \quad h(x)=\limsup_{k\to\infty} f_k$$

son medibles.

$$g=\sup_j \inf_{k\geq j} f_k \quad h=\inf_j \sup_{k\geq j} f_k.$$

Corolario Si $f_n(x)\to f(x)$ y f_n son Σ_1-medi-

M-test de Weierstrass

Para completar la demostración del teorema sobre operaciones ponemos $\varphi_k : \overline{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$.

$$\varphi_k(t) = \min\{k, \max\{-k, t\}\}$$

y $\varphi_k \circ f = f_k \to f$. $\varphi_k \circ g = g_k \to g$.

4 Funciones Simples

Definimos

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E \\ 0 & \text{si } x \notin E \end{cases}$$

χ_E es medible $\iff$ E es medible.

Definición: Una función finita φ medible se llama simple si $\#\varphi(\mathbb{R}) < \infty$

Si φ, ψ son simples y $c \in \mathbb{R}$ entonces $\varphi + \psi$, $c\varphi$, $\varphi \cdot \psi$ son simples.

Si $\varphi(\mathbb{R}^n) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_N\}$ entonces

$$E_i = \varphi^{-1}(\{\alpha_i\})$$

son medibles y

$$\varphi = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \chi_{E_i}$$

Teorema: Si $f: \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ es una función medible no-negativa entonces existe una sucesión $\{\varphi_k\}$ de simples no negativas tal que

$$\varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \varphi_3 \ldots \quad f(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_k(x)$$

Dem Para $k \in \mathbb{N}$ dividimos $[0,k)$ en $k2^k$ intervalos.

$$\left[\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k}\right) \quad i = 1, 2, \ldots, k2^k$$

Definimos $g_k : \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$ por.

$$g_k(x) = \begin{cases} \frac{i-1}{2^k} & 0 \leq x < k;\ \frac{i-1}{2^k} \leq x < \frac{i}{2^k} \\ k & x \geq k \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$g_k \geq 0$, g_k son borelianas y

$$0 \leq g_1 \leq g_2 \leq \ldots \quad \lim_k g_k = t \text{ en } [0, +\infty]$$

Las funciones

$$\varphi_k = g_k \circ f$$

son simples y verifican el teorema $\square$

$\lim_{k\to\infty} \varphi_k(t) = t$ $\quad t \geq 0$!

Justificación: Sea $t \geq 0$. Si $t=0$ $g_k(0)=0$

luego $g_k(0) \to 0$.

Si $t>0$. Tomo $\varepsilon>0$, y elijo k_0 suficientemente grande para que $k_0 > t$, $\frac{1}{2^{k_0}} < \varepsilon$

Si $k \geq k_0$

$t \in [0,k)$ y si $\frac{i-1}{2^k} \leq t < \frac{i}{2^k}$ $i=1,\dots,k2^k$

$$\left| g_k(t) - t \right| = \left| \frac{i-1}{2^k} - t \right| \leq \frac{1}{2^k} < \varepsilon$$

$\varphi_k = g_k \circ f$ $\quad f(x) \in [0,+\infty]$

$\lim_{k\to\infty} g_k(f(x)) = f(x)$. ✓

$\varphi_k = g_k \circ f$ $\therefore$ es medible

g_k: medible Borel

f: medible

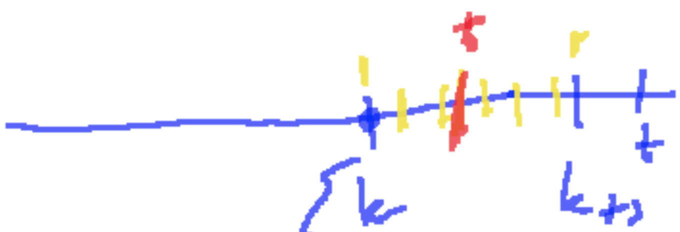
$\varphi_k \leq \varphi_{k+1}$. Es suficiente ver

$g_k(t) \leq g_{k+1}(t)$.

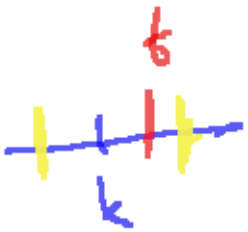
- Si $t \geq k \Rightarrow g_k(t) = k$

Si $t \geq k+1$ $g_{k+1}(t) = k+1 > k = g_k(t)$

Si $k \leq t < k+1$. Supongamos $t \in \left[\frac{i-1}{2^{k+1}}, \frac{i}{2^{k}}\right)$.



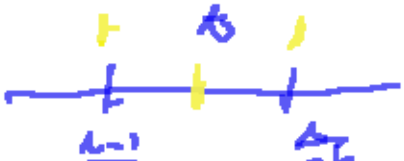
$$\boxed{\frac{i-1}{2^{k+1}} \geq k}$$



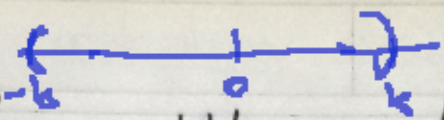
$\underline{i = k2^{k+1}+1}$ $\qquad \frac{i-1}{2^{k+1}} = k$

$g_{k+1}(t) \geq g_k(t)$

Si $t \in [0, k)$



$\frac{i-1}{2^k}$ $\qquad$ $\frac{i}{2^k}$



Observaciones: 1) Si f es medible respecto a una σ-álgebra Σ, entonces las φ_k del teorema son también medibles respecto a Σ.

2) Multiplicando a las φ_k por $\chi_{B(0,k)}$ conseguimos que las φ_k sean de soporte compacto.

3) Si f es acotada y positiva la convergencia es uniforme.

5 Partes positiva y negativa.

Si f es medible, también lo son:

$$f^+ = \sup\{0, f\} \qquad f^- = \sup\{0, -f\}$$

llamadas partes positiva y negativa de f. Se verifica que

$$f = f^+ - f^- \quad y \quad |f| = f^+ + f^-.$$

Teorema Si f es medible y $f = f_1 - f_2$ con $f_i \geq 0$, $i=1,2$, entonces $f^+ \leq f_1$ y $f^- \leq f_2$.

Dem Se tiene $f \leq f_1$ de donde $f^+ = \sup\{f, 0\} \leq f_1$. Además $-f \leq f_2$ así $f^- \leq f_2$ $\square$

Si f es medible existen simples φ_k, ψ_k con $\varphi_k \to f^+$ y $\psi_k \to f^-$ luego

$\varphi_k - \psi_k \to f$. Además $|\varphi_k - \psi_k| \leq \varphi_k + \psi_k \leq |f|$

6. Propiedades verdaderas en casi todo punto

Si P es una propiedad sobre puntos de $\mathbb{R}^n$ ($P(x)$) diremos que P es verdadera en casi todo punto si $P(x)$ es verdadera excepto, posiblemente, un conjunto de medida cero.

Así por ejemplo.

1) Casi todo número es irracional.

2) Si f y g son funciones definidas sobre $\mathbb{R}^n$ diremos que $f=g$ en casi todo punto si $f(x)=g(x)$ $\forall x \notin E$ donde $m(E)=0$.

Teorema. Si $h=0$ c.t.p. entonces h es medible.

Dem. Sea $Z=\{h\neq 0\}$. Entonces.

$$\{h > a\} = \begin{cases} \subset Z & \text{si } a \geq 0 \\ \supset \mathbb{R}^n - Z & \text{si } a < 0 \end{cases} \in \mathcal{M}.$$

Será frecuente decir que $f_k(x) \to f(x)$ c.t.p

• Corolario Si f es medible y $f=g$ c.t.p $\Rightarrow$ g es medible

Teorema Si $f_k \to f$ en c.t.p y los f_k son medibles entonces f es medible.

Dem La función $g=\liminf_{k\to\infty} f_k$ es medible y $g=f$ en c.t.p $\square$

Si f y g son medibles definimos $f \sim g$ si $f = g$ c.t.p. Entonces $\sim$ es relación de equivalencia. Además si $f \sim f_1$ y $g \sim g_1$ entonces $f+g \sim f_1+g_1$ y $fg \sim f_1 g_1$.

Si $f = g$ c.t.p diremos que f es esencialmente igual a g.

P propiedad $E \subset \mathbb{R}^n$

$E(P) = \{x \in E \mid P(x)$ es verdad$\}$

$E(f > g)$

7. Convergencia en Medida.

$E(P) = E \cap \{x \; P(x)\}$

Definición f_k converge en medida a f (f_k, f medibles) sobre E si $\forall \delta > 0$ se tiene

$$m\left(E\{|f_k - f| \geq \delta\}\right) \xrightarrow{k \to \infty} 0$$

Pondremos $f_k \xrightarrow{m} f$.

Teorema Si $f_k \xrightarrow{m} f$, $f_k \xrightarrow{m} g \Rightarrow f = g$ c.t.p

Dem.

$$m(E\{|f-g| \geq \delta\}) \leq m E\{|f - f_k| \geq \tfrac{\delta}{2}\} + m E\left(\{|f_k - g| \geq \tfrac{\delta}{2}\}\right) \xrightarrow{k \to \infty} 0$$

Luego $mE(\{f \neq g\}) = m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \{|f-g| \geq \tfrac{1}{k}\}\right) = 0$

Así $f = g$ c.t.p.

Teorema Si $m(E) < \infty$. y $f_k \to f$ c.t.p de E. entonces. $f_k \xrightarrow{m} f$.

Sea Z el conjunto de puntos donde f_n no tiende a f. Entonces $m(Z)=0$.

Dado $\delta>0$, sea

$$B_j = \bigcup_{k=j}^{\infty} E(|f_k - f| \geq \delta).$$

se tiene que $\bigcap_{j=1}^{\infty} B_j \subseteq Z$. Luego $m(B_j) \to 0$ cuando $j \to \infty$. Como si $k \geq j$, $E(|f_k - f| \geq \delta) \subset B_j$.

Así $m\,E(|f_k - f| \geq \delta) \to 0$ cuando $k \to \infty$. Así $f_k \xrightarrow{m} f$.

Ejemplo 1) Si $m(E) = +\infty$ no es cierto

$\chi_{(0,n)} \xrightarrow{c.t.p} 1$.

2) La recíproca no es cierta.

$$f_{kn} = \chi_{\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)} \qquad \begin{matrix} k=0,\dots,2^n-1 \\ n=1,\dots \end{matrix}$$

Definición

Diremos que f_n es fundamental en medida sobre E si $\forall \delta>0$

$$m\,E(|f_k - f_j| \geq \delta) \xrightarrow[k,j \to \infty]{} 0$$

Observación Si $f_n \xrightarrow{m} f$ y f es finita entonces f_n es fundamental en medida

Teorema: Si f_n es fundamental en medida sobre E, entonces existe una subsucesión f_{k_j} y f medible sobre E con $|f_{k_j} \to f|$ c.t.p. de E. Además f es finita y $f_n \xrightarrow{m} f$.

Dem

$\forall i > 0$ existe k_i con

$$m\,E\left(|f_n - f_j| \geq \frac{1}{2^i}\right) \leq \frac{1}{2^i}$$

para $k_j \geq k_i$. Podemos suponer $k_1 < k_2 < \ldots$

sea $\quad E_i := E\left(|f_{k_i} - f_{k_{i+1}}| \geq \frac{1}{2^i}\right)$.

tenemos $\quad m(E_i) < \frac{1}{2^i}$.

sea

$$Z = \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{i \geq j}^{\infty} E_i = \limsup E_i$$

tiene medida cero. Si $x \in E - Z$, existe un j con $x \notin E_i$ para $i \geq j$, es decir

$$x \in E\left(|f_{k_i} - f_{k_{i+1}}| < \frac{1}{2^i}\right).$$

Luego la serie

$$* \quad f_{k_1}(x) + (f_{k_2}(x) - f_{k_3}(x)) + \cdots$$

converge absolutamente en $E - Z$.

Sea $f(x)$ la suma $(*)$ en $E-Z$ y

sea $f(x)=0$ en Z. f es finita. Además

pasando a sumas parciales

$$f(x) = \lim_{i\to\infty} f_{k_i}(x) \quad c.t.p.$$

Veamos que $f_{k_i} \xrightarrow{m} f$. Sea $\delta > 0$

y elijamos j con $\frac{1}{2^{j-1}} < \delta$. Si $x \notin Z$

$$f(x) = f_{k_j} + (f_{k_{j+1}} - f_{k_j}) + \cdots$$

Así

$$E(|f(x) - f_{k_j}(x)| \geq \delta) \subset Z \cup \left(\bigcup_{i \geq j} E_i\right).$$

Así

$$m(E(|f(x) - f_{k_j}(x)| \geq \delta)) \leq \sum_{i \geq j} m(E_i) = \frac{1}{2^{j-1}}$$

Así $f_{k_j} \xrightarrow{m} f$. Ahora

$$E(|f_n - f| \geq \delta) \subset E(|f_n - f_{k_j}| \geq \delta/2) \cup E(|f_{k_j} - f| \geq \delta/2)$$

deducimos tomando k y l_k grandes

$$m\, E(|P_k - P| \geq \delta) < \varepsilon$$

si k es grande

8. Función Singular de Cantor.

El conjunto de Cantor se define como

$$P = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n.$$

donde F_n es la unión de 2^n intervalos cerrados y disjuntos contenidos en el $[0,1]$. El conj. $[0,1] - F_n$ es la unión de $2^n - 1$ intervalos abiertos disjuntos. Si los numeramos de izquierda a derecha formamos los abiertos J_{ni}. $i = 1, \dots, 2^n - 1$.
Tenemos la relación

$$J_{n,i} = J_{n+1, 2i}.$$

Sea φ_n la función que vale $\varphi_n(0) = 0$, $\varphi_n(1) = 1$. $\varphi_n(x) = \frac{i}{2^n}$ en J_{ni} y después es lineal en los F_n y continua

Tenemos $\varphi_{n+1} = \varphi_n$ en J_{ni} y

$$|\varphi_{n+1} - \varphi_n| < \frac{1}{2^{n+1}}$$

Luego la serie

$$\varphi_1 + (\varphi_1 - \varphi_2) + \dots$$

converge uniformemente a una función continua φ. que se llama función de Cantor. φ es monótona creciente.