FACULTAD DE CIENCIAS
EXACTAS Y NATURALES
Universidad Nacional de La Pampa

Depto de Matemática.
Primer Cuatrimestre de 2022
Teoría de la Medida
Práctica 2: Integral de Riemann

Ejercicio 1. Obtener la fórmula del área de un rectángulo de lados a y b, siendo a y b reales cualesquiera.

Ejercicio 2. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada y P, P' particiones de $[a, b]$ con $P \subset P'$.

1. Demostrar que
$$\underline{S}(P, f) \leq \underline{S}(P', f) \quad \text{y} \quad \overline{S}(P', f) \leq \overline{S}(P, f).$$
2. Inferir que para cualesquiera P, P' (sin importar que una este o no contenida dentro de la otra)
$$\underline{S}(P, f) \leq \overline{S}(P, f).$$

Ejercicio 3. Dada la función
$$f(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ x & 0 < x < 1 \\ 0 & x = 1, \end{cases}$$

1. Hallar las sumas inferior y superior de Darboux $\underline{S}(P; f)$ y $\overline{S}(P; f)$, con la partición $P = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right\}$ de $(0, 1)$.
2. Dado $\epsilon = \frac{1}{2}$, encontrar $\delta > 0$ tal que para cualquier partición P en intervalos de longitud menor que δ, la diferencia entre $\overline{S}(P; f)$ y $\underline{S}(P; f)$ sea menor que $\frac{1}{2}$.

Ejercicio 4. Considerar la función
$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n-1}} \left\lfloor \frac{2^n x + 1}{2} \right\rfloor \quad 0 \leq x \leq 1,$$
donde $\lfloor \alpha \rfloor$ denota el mayor entero menor o igual a α.

1. Mostrar que la serie converge para todo $x \in [0, 1]$, que la función $g(x)$ es monótona creciente, que $g(0) = 0$ y $g(1) = 1$.
2. Encontrar todos los puntos en los cuales la función g es discontinua y en estos puntos calcular la diferencia entre los límites laterales.
3. Mostrar que g es integrable de Riemann sobre $[0, 1]$.
4. Hallar el valor de $\int_0^1 g(x)\, dx$. Indicar claramente los motivos que llevan a su conclusión.

Ejercicio 5. Encontrar todos los valores positivos de α para los cuales la integral impropia
$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{|x|^\alpha}\, dx$$
tiene un valor. Explicar las razones que conducen a su conclusión.

Ejercicio 6. Probar que $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{((nx))}{n^2}$ converge uniformemente, siendo
$$((x)) = \begin{cases} x - \lfloor x \rfloor, & \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + \frac{1}{2} \\ 0 & x = \lfloor x \rfloor + \frac{1}{2} \\ x - \lfloor x \rfloor - 1 & \lfloor x \rfloor + \frac{1}{2} < x < \lfloor x \rfloor + 1. \end{cases}$$

Ejercicio 7. Demostrar que f es continua en x si y solo si $w(f;x)=0$.

Ejercicio 8. Sea f definida por $f(x) = \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ y $f(0)=0$. ¿Cuál es la oscilación de f en 0? Justificar su respuesta.

Ejercicio 9.* Hallar la oscilación en $x=\frac{1}{3}$ de la función

$$g(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \\ -x & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Justificar la respuesta.

Ejercicio 10. Usando sumas de Darboux:

1. Si $0 \leq a < b$, probar que
$$\int_a^b x^2 dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}.$$
Ayuda: Usar particiones uniformes y la fórmula $\sum_{i=1}^{n} n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$.

2. Para $0 < a < b$, probar que
$$\int_a^b \frac{1}{x} dx = \ln(b) - \ln(a)$$

3. Si $0 \leq a < b \leq \pi$, demostrar que
$$\int_a^b \cos x dx = -(\text{sen}(b) - \text{sen}(a)).$$

Ejercicio 11.* Sea

$$n(x) = \begin{cases} 1 & x = \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}. \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Probar que n es integrable sobre $[0,1]$ y que $\int n(x)\, dx = 0$.

Ejercicio 12.* Sea

$$p(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Probar que p es integrable sobre $[0,1]$.

Ejercicio 13. Hallar el contenido exterior de los siguientes conjuntos:

1. $\mathbb{Q} \cap [0,1]$;
2. $[0,1] - \mathbb{Q}$;
3. $\left\{\frac{n}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$;
4. $\left\{\frac{2k-1}{2^n} \mid n \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq 2^{n-1}\right\}$;
5. $\left\{\frac{k}{n} \mid n \in \mathbb{N},\ k = 1, 2 \text{ ó } 3\right\}$;
6. $(0,1) \cup (3,4)$;

7. $\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n},\frac{1}{2n-1}\right)$.

Ejercicio 14. Probar que si S tiene contenido exterior 0 y T es cualquier conjunto acotado, entonces

$$c_e(S\cup T)=c_e(T)$$

donde c_e se lee como *contenido exterior*.