Introducción al Análisis Matemático

(BORRADOR)

Índice general

Prólogo

1 Los números reales

1.1 Axiomas

Hay dos ópticas para introducir los numeros reales, las denominaremos axiomática y constructiva. Describimos a continuación, y someramente, cada una de ellas.

Se pueden introducir los números reales a travez de un sistema axiomático. Como es conocido, un sistema axiomático consta de *términos primitivos*, que son, por decirlo así, los objetos iniciales, a travez de los cuales se construyen todos los demás objetos de la teoría. Pueden ser términos primitivos: conjuntos, operaciones, relaciones, etc. Es importante aclarar que los términos primitivos son objetos puramente hipotéticos, es decir no se afirma la existencia de estos objetos. Los términos primitivos para los números reales son: un conjunto, comunmente denotado por $\mathbb{R}$, dos funciones de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, usualmente denotadas por $+$ y .[1] y una relación $\leq$. Para completar el sistema axiomático, debemos dar los axiomas, estos son propiedades que se postulan para los términos primitivos. Los axiomas para los números reales los podemos dividir en cuatro grupos:

1) $\mathbb{R}$ es un cuerpo, es decir:

   1.1) $x + (y + z) = (x + y) + z$;
   1.2) $x + y = y + x$;
   1.3) Existe un elemento $0 \in \mathbb{R}$ tal que $x + 0 = x$;
   1.4) Para cada $x \in \mathbb{R}$ existe un $y \in \mathbb{R}$ tal que $x + y = 0$;
   1.5) $x(yz) = (xy)z$;
   1.6) $xy = yx$;
   1.7) Existe un elemento $1 \in \mathbb{R}$ tal que $1.x = x$;
   1.8) Para cada elemento $0 \neq x \in \mathbb{R}$ existe un elemento $y \in \mathbb{R}$ tal que $xy = 1$;
   1.9) $x(y + z) = xy + xz$;

2) $\mathbb{R}$ es un cuerpo ordenado.

   2.1) Si $x \leq y$ e $y \leq z$ entonces $x \leq z$;
   2.2) Si $x \leq y$ e $y \leq x$ entonces $x = y$;
   2.3) Si x e y pertenecen a $\mathbb{R}$ entonces $x \leq y$ o $y \leq x$;
   2.4) Si $x \leq y$ entonces $x + z \leq y + z$;
   2.5) Si $0 \leq x$ e $0 \leq y$ entonces $0 \leq xy$;

   Dentro de $\mathbb{R}$ se puede construir un conjunto, denotado por $\mathbb{Z}$. que corresponde a los enteros.

3) $\mathbb{R}$ es un cuerpo ordenado y arquimedeano. Esto es: para todo $y \geq 0$ y todo $x > 0$ existe un entero n tal que $nx \geq y$.

   Por último tenemos el axioma de completitud. Hay varias formulaciones equivalentes para este axioma, ver el Ejercicio **??** en la página ?? nosotros elegimos la siguiente:

4) Todo subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ acotado superiormente, tiene supremo, es decir existe un $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que: 1) α es una cota superior de A, esto es $\alpha \geq x$ para todo $x \in A$ y 2) α es la más chica de las cotas superiores, esto es si β es cota superior entonces $\alpha \leq \beta$. Observar que no es necesario que $\alpha \in A$.

[1] Estas operaciones se denominan suma y multiplicación, usualmente se omite el signo de multiplicación

Hay tres propiedades que serían deseables que un sistema axiomático tuviera: 1) *coherencia*, es decir que los axiomas no se “contradigan” 2)*independencia*, entendiendo por esto que los axiomas no sean redundantes, es decir que ninguno de ellos se obtenga a partir de los demás y 3) *completitud*[2], esto es que toda afirmación de la teoría o su negación se pueda deducir.

Destacamos, nuevamente, que los objetos postulados como términos primitivos en el sistema axiomatico y que satisfagan los axiomas podrían no existir. En particular esto ocurre si el sistema axiomático es contradictorio. Obviamente, en ese caso, nuestro sístema axiomático no serviría de mucho. Esto no sucede para el sístema de axiomas para los números reales. Este sístema tiene un modelo, es decir podemos encontrar un conjunto $\mathbb{R}$ y las funciones y relación postuladas de modo tal que se satisfagan todos los axiomas. Esto nos lleva a la otra óptica de introducción de los números reales, la que denominamos constructiva. Varios modelos fueron propuestos por diversos matemáticos, en particular Dedekind y Cantor. Estos modelos son construidos a partir de los números racionales.[3] A Dedekind le debemos el método de cortaduras y a Cantor el método de sucesiones fundamentales de Cauchy.

[2]No confundir este concepto con el de completitud de un e.m.

[3]Es bueno decir que también es posible construir los números racionales a partir de los naturales y estos a partir de la Teoría de Conjuntos; no obstante esto se aparta considerablemente de los objetivos de esta materia

2 Conjuntos

«Nadie nos expulsará del paraíso que Cantor ha creado para nosotros»

David Hilbert

«David Hilbert (Königsberg, Prusia Oriental; 23 de enero de 1862-Gotinga, Alemania; 14 de febrero de 1943) fue un matemático alemán, reconocido como uno de los más influyentes del siglo XIX y principios del XX. Estableció su reputación como gran matemático y científico inventando y/o desarrollando un gran abanico de ideas, como la teoría de invariantes, la axiomatización de la geometría y la noción de espacio de Hilbert, uno de los fundamentos del análisis funcional. Hilbert y sus estudiantes proporcionaron partes significativas de la infraestructura matemática necesaria para la mecánica cuántica y la relatividad general. Fue uno de los fundadores de la teoría de la demostración, la lógica matemática y la distinción entre matemática y metamatemática. Adoptó y defendió vivamente la teoría de conjuntos y los números transfinitos de Cantor. Un ejemplo famoso de su liderazgo mundial en la matemática es su presentación en 1900 de un conjunto de problemas abiertos que incidió en el curso de gran parte de la investigación matemática del siglo XX.» (Wikipedia)

En esta unidad estudiaremos el concepto de *cardinal* de un conjunto. Con este concepto se pretende dar un significado a la noción de cantidad de elementos de un conjunto, en especial cuando este es "infinito". Como se verá, y por extraño que parezca, aunque el conjunto involucrado sea infinito de todas maneras podremos definir el cardinal de ese conjunto. Con esto implicitamente decimos que no todos los conjuntos infinitos tendrán el mismo cardinal. Empezaremos recordando algunas cuestiones básicas de teoría de conjuntos que, a la vez, nos servirán como referencia para las notaciones.

2.1 Repaso nociones básicas sobre conjuntos

La siguiente introducción está lejos de ser exhaustiva, solo recordaremos conceptos ya sabidos. Nos dentendremos algo más en aquellos puntos que puedan ser nuevos.

Definición 2.1.1 Dados dos conjuntos A y B denotaremos su *unión, intersección y diferencia* por: $A \cup B$, $A \cap B$ y $A - B$ repectivamente. Estos nuevos conjuntos se definen por:

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\},$$

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$$

y

$$A - B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\},$$

respectivamente.

Por lo general, tendremos que los conjuntos con los que trabajaremos estarán contenidos en un conjunto que llamaremos el universo $\mathcal{U}$. Aceptado la existencia de este universo, frecuentemente usaremos la siguiente notación para el *complemento*

$$A^c = \mathcal{U} - A.$$

Además consideraremos la operación de *diferencia simétrica*, definiéndose por:

$$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A).$$

Definición 2.1.2 [Kuratowski] Dados dos elementos arbitrarios a y b se define el *par ordenado* (a, b), por la siguiente igualdad

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

La propiedad más relevante de pares ordenados es que si $(a, b) = (c, d)$ entonces $a = c$ y $b = d$. La demostración de este hecho la dejamos de ejercicio. Ahora consideramos el conjunto formado por todos los pares ordenados de elementos pertenecientes a conjuntos dados.

Definición 2.1.3 Sean A y B conjuntos. El *producto cartesiano* de A con B, denotado por $A \times B$, es el siguiente conjunto:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}.$$

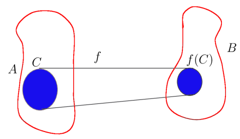
La siguiente definición es bien conocida.

Definición 2.1.4 Una *función* f de A en B (abreviaremos esta frase por el siguiente símbolo: $f : A \longrightarrow B$), es un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$ con la propiedad que: para todo $a \in A$ existe un único $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$.

Suponemos que ya todos conocemos estos conceptos, asi como los conceptos relacionados de: imagen, la notación $f(a)$, función inyectiva, suryectiva y biyectiva. Admitimos todo esto por sabido. Ahora introducimos una nueva notación.

Definición 2.1.5 Por B^A denotamos al conjunto de todas las funciones $f : A \longrightarrow B$.

Mas adelante daremos algunas explicaciones del porque de esta notación.
Seguidamente damos las definiciones de los conjuntos imagen y preimagen de un conjunto dado por una función.



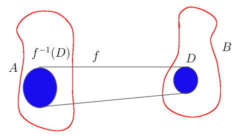
Conjunto $f(C)$

Definición 2.1.6 Dada una función $f : A \longrightarrow B$ y subconjuntos $C \subset A$ y $D \subset B$ definimos:

$$f(C) = \{f(a) : a \in C\}$$

y

$$f^{-1}(D) = \{a \in A : f(a) \in C\}.$$



Conjunto $f^{-1}(D)$

Muy a menudo utilizaremos las propiedades que a continuación se enuncian. Las demostraciones, de las mismas, quedaran a cargo del alumno; ver Ejercicio 2.9.2 en la página 24.

Proposición 2.1.1 Sea $f : A \longrightarrow B$ una función. Entonces

1. $f(C_1 \cup C_2) = f(C_1) \cup f(C_2)$.
2. $f^{-1}(D_1 \cup D_2) = f^{-1}(D_1) \cup f^{-1}(D_2)$.
3. $f(C_1 \cap C_2) \subset f(C_1) \cap f(C_2)$. Dar un ejemplo de que la igualdad no vale en general.
4. $f^{-1}(D_1 \cap D_2) = f^{-1}(D_1) \cap f^{-1}(D_2)$.

También vamos a considerar el *conjunto de partes* de un conjunto dado, esto es el conjunto de todos sus subconjuntos. Explícitamente:

$$\mathscr{P}(A) = \{C : C \subset A\}.$$

Se pueden efectuar uniones e intersecciones de una cantidad arbitraria de conjuntos. Para poder enunciarlas debemos definir antes lo que entendemos por una *familia subindicada de conjuntos* (o brevemente *familia de conjuntos*).

Definición 2.1.7 Supongamos dado un conjunto I, al que nos referiremos como conjunto de índices, y una función $i : I \longrightarrow \mathscr{P}(A)$. Así tenemos que, para cada $i \in I$, existe un único subconjunto de A, que llamaremos A_i. Diremos entonces que $\{A_i\}_{i\in I}$ es una familia subindicada de conjuntos por el conjunto de índices I.

Ahora podemos definir la unión y la intersección de una familia de esta índole de la siguiente manera

Definición 2.1.8 Definimos la unión e intersección de una familia $\{A_i\}_{i\in I}$ por:

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{a : \exists i \in I : a \in A_i\}$$

y

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{a : \forall i \in I : a \in A_i\}$$

respectivamente.

En el Ejercicio 2.9.1 en la página 23 podemos encontrar una serie de propiedades de uniones e intersecciones de familias de conjuntos. Estas propiedades las usaremos con frecuencia. Por último, en esta revisión de conjuntos, expondremos el axioma de elección. Este es un axioma de la teoría de conjuntos. Hay que aclarar que es posible axiomatizar la teoría de conjuntos. Ver por ejemplo Axiomas de Zermelo-Fraenkel y los Von Neumann-Bernays-Gödel. De estas axiomatizaciones el mencionado axioma forma parte. El axioma de elección ha ocasionado multitud de controversias en torno a su inserción o no en el restante conjunto de axiomas. No vamos a discutir aquí esta controversia ni tampoco la teoría axiomática de conjuntos pues esto nos desviaría de nuetros objetivos. Solo enunciaremos el *axioma de elección*, que usaremos frecuentemente.

Axioma. (Elección) Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de conjuntos no vacios. Entonces existe una función

$$f : I \longrightarrow \bigcup_{i\in I} A_i.$$

con la propiedad que:

$$\forall i \in I : f(i) \in A_i.$$

George Cantor
(1845-1918)

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (San Petersburgo, 3 de marzo de 1845-Halle, 6 de enero de 1918) fue un matemático y lógico nacido en Rusia. Fue inventor con Dedekind y Frege de la teoría de conjuntos, que es la base de las matemáticas modernas. Gracias a sus atrevidas investigaciones sobre los conjuntos infinitos fue el primero capaz de formalizar la noción de infinito bajo la forma de los números transfinitos (cardinales y ordinales). (Wikipedia)

2.2 Definición de conjuntos coordinables

En esta sección definimos el concepto clave de esta unidad, a saber el concepto de que dos conjuntos sean *coordinables*. Este concepto fue introducido y explotado por George Cantor. Damos una breve discución para motivar nuestra definición.

Cuando alguién cuenta algún conjunto de cosas, establece una correspondencia entre los objetos que cuenta y un subconjunto de números naturales. En el proceso de conteo, algún objeto fue el primero en contarse, y se habrá dicho: “uno” para ese objeto. El proceso continua asignando, sucesivamente, el número dos, tres, etc, a los restantes objetos a contar, hasta que no queden más por contarse. Así, si en este proceso llegamos hasta el 20, por ejemplo, decimos que hay 20 objetos. Aunque no haya que percatarse de eso a los fines prácticos, lo que también hicimos fue establecer una correspondencia o función entre los objetos y el conjunto $\{1, \ldots, 20\}$. Más aún, esta correspondencia fue biyectiva pues a cada número le correspondió solo uno de los objetos, es decir la función es inyectiva, y a cada objeto le correspondió algún número, es decir la función es suryectiva. En otras palabras contar un conjunto significa determinar el *intervalo inicial* del conjunto de los números naturales para el cual exista una correspondencia biyectiva con el conjunto que queremos contar. Conocer esto obviamente es inútil a los efectos de contar cosas de la vida cotidiana; no obstante, es una observación fundamental a los efectos de extender lo que llamamos “contar” a conjuntos infinitos. Lo que antecede sugiere la siguiente definición.

Intervalo inicial: un conjunto de la forma: $\{j \in \mathbb{N} : 1 \leq j \leq n\}$, para cierto $n \in \mathbb{N}$. De ahora en más, llamaremos a este conjunto: $\mathbb{N}_n$

Definición 2.2.9 Dados dos conjuntos: A y B, se dirá que ellos son coordinables, escribiremos $A \sim B$, si existe una función biyectiva $f : A \longrightarrow B$.

Esta es nuestra definición de que dos conjuntos, finitos o no, tengan la misma cantidad de elementos. Como veremos, no todos los conjuntos infinitos son coordinables entre si. Es bueno notar que no es difícil demostrar que $\sim$ es una relación de equivalencia (ver Ejercicio 2.9.3 en la página 24). Ahora veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 2.2.1 Consideremos la función $f : \mathbb{N} \longrightarrow \{x \in \mathbb{N} : x \text{ es par}\}$, definida por $f(x) = 2x$. Facilmente se ve que f es una biyección entre los conjuntos indicados. De ahí que: $\mathbb{N} \sim \{x \in \mathbb{N} : x \text{ es par}\}$.

En este ejemplo observamos que, desde nuestro punto de vista, el conjunto de los naturales tiene la misma cantidad de elementos que el conjunto de los naturales pares. Es decir, según nuestra concepción de cantidad de elementos, el todo no es mayor que una de sus partes. Este ejemplo ya lo había mencionado Galileo Galilei.

Ejemplo 2.2.2 Veamos que $\mathbb{R} \sim (0, 1)$. En este caso se puede considerar la función

$$f(x) := \tan\left(\frac{2\pi x - \pi}{2}\right).$$

Dejamos como ejercicio corroborar que la función dada establece una biyección entre los conjuntos involucrados.

Los dos ejemplos anteriores muestran una característica importante de los conjuntos infinitos; un subconjunto de ellos puede ser coordinable con el conjunto total. Mientras que, los conjuntos finitos carecen de esta característica. Ver Ejercicio 2.9.12 en la página 25

2.3 Conjuntos numerables

Hasta el momento hemos hablado de conjuntos finitos e infinitos. Apelamos a la idea que todos nos forjamos en nuestras vidas sobre el significado de estos términos . Pero en este momento estamos en condiciones, a partir de la noción de coordinalidad, de definir de forma matemáticamente precisa los anteriores significados.

Definición 2.3.10 Diremos que un conjunto A es:

1. **finito** si existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $A \sim \mathbb{N}_n$.
2. **infinito** si no es finito.
3. **numerable** si $A \sim \mathbb{N}$.
4. **a lo sumo numerable** si es finito o numerable.

En virtud de que $\sim$ es una realación de equivalencia, y especialmente por el carácter transitivo de esta, si $A \sim B$ y B tiene alguna de las cuatro propiedades de la definición anterior entonces A tendrá esa misma propiedad.

Recordemos que, por definición, una sucesión $\{a_i\}$ de elementos de un conjunto A es una función $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$, donde $a_i = f(i)$. Vemos así que el concepto de numerabilidad está relacionado con el de sucesión. En efecto, si el conjunto A es numerable entonces sus elementos se pueden disponer en una sucesión, donde ningún término se repita.

Es oportuno que observemos que un conjunto no puede ser numerable y finito a la vez; dicho de otra forma, los conjuntos numerables son infinitos. Esto, como hemos definido los conceptos numerable y finito de manera precisa, tiene que ser demostrado.

Teorema 2.3.1 Un conjunto numerable es infinito.

Dem. Supongamos que, por lo contrario, existe un conjunto A numerable y, a la vez, finito. Así tendríamos que: $A \sim \mathbb{N}$ y $A \sim \mathbb{N}_n$, para algún $n \in \mathbb{N}$. Como $\sim$ es una relación de equivalencia , deducimos que $\mathbb{N} \sim \mathbb{N}_n$. Sea, pues, f una biyección: $f : \mathbb{N}_n \longrightarrow \mathbb{N}$. Ahora consideremos el natural[1]: $k := f(1) + \cdots + f(n) + 1$. Como f es una biyección, existe algún m, con $1 \leq m \leq n$ tal que $f(m) = k$. Es decir

$$f(m) = f(1) + \cdots + f(n) + 1.$$

Seguramente, en el miembro derecho, uno de los términos es $f(m)$. Este se puede cancelar con el miembro de la izquierda, quedando

$$0 = f(1) + \cdots + f(m-1) + f(m+1) + \cdots + f(n) + 1.$$

Esta igualdad es absurda pues el miembro de la derecha es mayor que 1. $\square$

Vamos a ver algunos otros conjuntos que también son numerables. Empezamos por el siguiente.

Proposición 2.3.2 Un subconjunto de un conjunto a lo sumo numerable es a lo sumo numerable.

Dem. Sea $A \subset B$, con B a lo sumo numerable. Se puede suponer que $B \subset \mathbb{N}$. ¿Por qué? También podemos suponer que A es infinito, puesto que si fuera finito no habría nada que probar. Definimos una función $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$ por inducción. Puesto que los números naturales son bien ordenados, tenemos que A tiene un primer elemento, digamos, a_1. Definamos

$$f(1) = a_1.$$

Ahora definimos $f(j)$ por:

$$f(j) = \text{el primer elemento del conjunto: } A - \{f(i) : 1 \leq i \leq j-1\}. \tag{2.1}$$

Esta definición es posible pues $A - \{f(i) : 1 \leq i \leq j-1\} \neq \varnothing$, de lo contrario A sería finito. Queda así definida la función f. Resta ver que es biyectiva.

Veamos, en primer lugar, que es inyectiva. Sea $i > j$. En virtud de (2.1), tenemos que $f(i) \notin \{f(k) : 1 \leq k \leq i-1\}$ de lo cual, y como $j < i$, deducimos que $f(i) \neq f(j)$.

Ahora veamos la suryectividad. Supongamos que existe un elemento $n \in A$ tal que $n \notin f(\mathbb{N})$. Recordemos la Definición (2.1). Ella nos dice, en virtud de que $n \notin f(\mathbb{N})$, que $f(i) < n$, para todo i. Esto es debido a que $f(i)$ es el mínimo del conjunto $A - \{f(k) : 1 \leq k \leq i-1\}$ y a que n pertenece a ese conjunto. Tenemos, entonces, que $f(\mathbb{N}) \subset \mathbb{N}_n$. Como consecuencia del Ejercicio 2.9.6 en la página 24 concluímos que $f(\mathbb{N})$ es finito. Pero como f es inyectiva $\mathbb{N} \sim f(\mathbb{N})$. Lo que es una contradicción pues $\mathbb{N}$ es infinito. $\square$

Proposición 2.3.3 El conjuntos $\mathbb{Z}$, de los enteros, es numerable.

Dem. Construímos una función que establece una biyección entre los enteros positivos y los naturales pares y entre los enteros negativos y los naturales impares. La función es la siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+2, & \text{si } x \geq 0; \\ -2x-1, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Dejamos como ejercicio demostrar que, efectivamente, la función f es una biyección entre $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$. $\square$

[1] El símbolo $:=$ se lee *igual por definición*. Esto es, el miembro de la izquierda es definido por el de la derecha

Proposición 2.3.4 El conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es numerable.

Dem. La demostración de este enunciado ya no es tan sencilla. La idea se la debemos a G. Cantor. Primero presentaremos un razonamiento heurístico de la construcción de la biyección entre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ y $\mathbb{N}$. En rigor de verdad, a los efectos lógicos de la demostración, toda esta parte de la demostración se podría obviar; pudiéndose dar la fórmula (2.5) sin dar ninguna justificación de como se nos ocurrió. Elegimos el camino contrario, explicar como obtener la fórmula.

Dispongamos del conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ en un arreglo del tipo de una matríz infinita, como sigue:

$$
\begin{tikzcd}
(1,1) \arrow[r] & (1,2) \arrow[dl] & (1,3) \arrow[dl] & (1,4) \arrow[dl] & \dots \\
(2,1) \arrow[urr] & (2,2) \arrow[dl] & (2,3) \arrow[dl] & & \\
(3,1) \arrow[uurrr] & (3,2) \arrow[dl] & & \ddots & \\
(4,1) & & \ddots & & \\
\vdots & & & &
\end{tikzcd}
$$

Notar que, además de colocar los pares ordenados, hemos colocado algunas flechas. Estas flechas indican un camino. Este es el camino que seguiremos para enumerar los pares ordenados. Así, construiremos una función f que hará las siguientes asignaciones:

$$
\begin{aligned}
f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\
(1,1) &\longmapsto 1 \\
(1,2) &\longmapsto 2 \\
(2,1) &\longmapsto 3 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Observar que en nuestro camino vamos siguiendo diagonales de la matriz, de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo. Cuando llegamos al margen izquierdo de la matriz saltamos al borde superior, para luego descender por la siguiente diagonal. Estas diagonales tienen $1, 2, 3, \dots$ elementos. Agrupemos los números naturales de esa forma, es decir un primer grupo de uno, un segundo de dos y así sucesivamente:

$$\underbrace{1}_{1}\underbrace{2\quad 3}_{2}\quad \underbrace{4\quad 5\quad 6}_{3}\quad \underbrace{7\quad 8\quad 9\quad 10}_{4}\dots$$

Obsérvese que

$$\frac{j(j+1)}{2} = \text{número final del agrupamiento } j\text{-ésimo.} \tag{2.2}$$

Por ejemplo: el grupo cuarto tiene por su último elemento el 10, que es igual a 4.5/2. Tambien tenemos que todos los pares ordenados sobre la misma diagonal, tienen la característica de que sus componentes suman lo mismo. Numeremos las diagonales, de izquierda a derecha, empezando por 1. Así tenemos que la diagonal 1 posee el elemento (1,1), la diagonal dos tiene los elementos $(1,2)$ y $(2,1)$, etc. Por lo observado, tenemos la siguiente fórmula, para cualquier par (j,k)

$$j+k-1 = \text{el número de la diagonal a la que pertenece } (j,k). \tag{2.3}$$

El objetivo es poner en correspondencia la diagonal j-ésima con el grupo j-ésimo de naturales. Notar que, en virtud de (2.2), tenemos que

$$\frac{(j+k-1)(j+k)}{2} = \begin{array}{l}\text{es el último número}\\ \text{del agrupamiento } j+k-1\text{-ésimo.}\end{array} \tag{2.4}$$

Así, si al primer miembro de (2.4) le restamos $(j-1)$, obtenemos el número que ocupa el lugar j (contando de atras para adelante) del agrupamiento $j+k-1$ de naturales. Con esto probamos que la función que queriamos construir es:

$$f(j,k) := \frac{(j+k-1)(j+k)}{2} - j + 1. \tag{2.5}$$

El resto de la demostración lo dejamos como ejercicio. Es decir la demostración que (2.5) es biyectiva (ver Ejercicio 2.9.7 en la página 24). □

Como consecuencia del Ejercicio 2.9.4 en la página 24 y de la Proposición anterior, podemos afirmar que si A y B son numerables, entonces $A \times B$ es numerable.

La siguiente propiedad también es útil para determinar si un conjunto es numerable.

Proposición 2.3.5 Sean A y B conjuntos, con B a lo sumo numerable.

1. Supongamos que existe una función inyectiva $f : A \longrightarrow B$. Entonces A es a lo sumo numerable.
2. Supongamos que existe una aplicación suryectiva $f : B \longrightarrow A$. Entonces A es a lo sumo numerable.

Dem. Veamos primero 1. La función f es una biyección entre A y su imagen $f(A)$. Como B es a lo sumo numerable, y como consecuencia de la Proposición 2.3.2 en la página 9, tenemos que $f(A)$ es a lo sumo numerable. Ahora, como $A \sim f(A)$ tenemos que A es a lo sumo numerable.

Ahora probemos 2. Como f es suryectiva, tenemos que $\forall a \in A$: $f^{-1}(\{a\}) \neq \varnothing$. Ahora, por el axioma de elección sabemos que existe al menos una función $g : A \longrightarrow B$ tal que $\forall a \in A : g(a) \in f^{-1}(\{a\})$. Si pudiéramos probar que la función g fuera inyectiva, entonces obtendríamos la tesis a partir del inciso 1, que ya fue demostrado. Veamos, pues, que g es inyectiva. Supongamos que $a_1, a_2 \in A$ y que $a_1 \neq a_2$. Afirmamos que $f^{-1}(\{a_1\}) \cap f^{-1}(\{a_2\}) = \varnothing$. En efecto, si $b \in f^{-1}(\{a_1\}) \cap f^{-1}(\{a_2\})$ entonces por un lado $f(b) = a_1$ y por otro $f(b) = a_2$, lo que es una contradicción pues $a_1 \neq a_2$. Luego, como $g(a_1) \in f^{-1}(\{a_1\})$ y $g(a_2) \in f^{-1}(\{a_2\})$ se tiene que $a_1 \neq a_2$. □

Es interesante hacer notar que, utilizando el teorema anterior, podemos dar otra demostración, más concisa, de la Proposición 2.3.4 en la página anterior. En esta demostración hacemos uso del Teorema Fundamental de la Aritmética. Recordemos lo que este teorema nos dice:

Teorema 2.3.2 (Fundamental de la Aritmética) Todo entero positivo n se representa, de manera única, de la forma $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_j^{\alpha_j}$, donde p_1, p_2,...,p_j son números primos y α_1, α_2,...,α_j son enteros positivos.

Dem. alternativa de la Proposición 2.3.4 Definimos la siguiente función

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ (n, m) &\longrightarrow 2^n 3^m. \end{aligned}$$

Por el Teorema Fundamental de la Aritmética, y mas precisamente por la unicidad de la representación, tenemos, como 2 y 3 son primos, que si $2^n 3^m = 2^{n'} 3^{m'}$ entonces $n = n'$ y $m = m'$. Por consiguiente la función f es inyectiva. Ahora, invocando la Proposición 2.3.5 en la página anterior concluímos que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es a lo sumo numerable. Lo que resta es, solo, ver que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ no es finito. Esto se puede probar observando que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ contiene el subconjunto $A = \{(1, n) : n \in \mathbb{N}\}$ que es coordinable con $\mathbb{N}$, ¿Cuál es la biyección?, y por consiguiente infinito. Así, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ no puede ser finito, si lo fuera, A también lo sería, por ser un subconjunto de él. Lo que concluye la demostración. □

El influyente matemático Karl Weierstrass 1815-1897 fue de los primeros en reconocer la importancia del resultado que afirma la numerabilidad de $\mathbb{Q}$, observó que esto implicaba la existencia de una sucesión $\{a_n\}$ tal que dado cualquier número real a existe una subsucesión $\{a_{n_k}\}$ tal que $\lim a_{n_k} = a$.

Ahora podemos demostrar uno de los resultados más interesantes de esta teoría.

Teorema 2.3.3 El conjunto $\mathbb{Q}$ es numerable.

Dem. Sabemos que $\mathbb{Z}$ es numerable y dejamos como ejercicio demostrar que $\mathbb{Z} - \{0\}$ es numerable. Consecuentemente también $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\})$es numerable. Podemos definir la siguiente función:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} - \{0\} &\longrightarrow \mathbb{Q} \\ (n, m) &\longmapsto \frac{n}{m}. \end{aligned}$$

Esta aplicación es suryectiva. Por consiguiente, usando la parte 2. de la Proposición 2.3.5 en la página anterior, obtenemos que $\mathbb{Q}$ es a lo sumo numerable. Así $\mathbb{Q}$ es finito o numerable. Pero como $\mathbb{Q}$ es infinito, pues $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$, tenemos que $\mathbb{Q}$ es numerable. □

Traduciendo nuestra interpretación de que dos conjuntos coordinables tienen la misma cantidad de elementos, vemos que hay tantos racionales como naturales. Esta afirmación es un tanto desconcertante. Sabemos que los racionales son densos dentro de los reales. Esto quiere decir que dentro de cada intervalo abierto, por chico que este fuere, siempre hay números racionales dentro. Sin embargo, uno puede poner en correspondencia $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Q}$.

A esta altura pareciera que todos los conjuntos resultan ser numerables, pero ya veremos, en la sección siguiente, que no es así.

Lema 2.3.1 Todo conjunto infinito tiene un subconjunto numerable.

Dem. Sea A un conjunto infinito. Usaremos un argumento similar a la demostración de la Proposición 2.3.2 en la página 9. Definimos inductivamente una función $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$ de la siguiente manera. Puesto que A es infinito, en particular, es no vacio, así podemos encontrar un elemento $a_1 \in A$. Ponemos entonces

$$f(1) = a_1.$$

Ahora, supongamos que tenemos definida la función f, de tal manera que sea inyectiva, para $j = 1, \ldots n$. Llamemos $f(j) = a_j$, para $j = 1, \ldots, n$. Como A es infinito no puede ocurrir que $A - \{f(1), \ldots, f(n)\} = \varnothing$, de lo contrario f además de ser inyectiva, de $\mathbb{N}_n$ en A, sería suryectiva; y de este modo $A \sim \mathbb{N}_n$ lo que implica que A es finito, contrariando nuestra hipótesis. Por consiguiente, podemos encontrar $a_{n+1} \in A - \{f(1), \ldots, f(n)\}$. Definimos $f(n+1) = a_{n+1}$.

Ahora veamos que f así definida es inyectiva. Sea $i \neq j$, podemos suponer que $i < j$. Sabemos que:

$$f(j) \notin \{f(1), \ldots, f(j-1)\}.$$

Seguramente $f(i)$ es un elemento del conjunto de la derecha, en la relación anterior, de modo que $f(j) \neq f(i)$, lo que demuestra la inyectividad. Ahora, f es biyectiva de $\mathbb{N}$ en $f(\mathbb{N})$. Por consiguiente $f(\mathbb{N})$ es un subconjunto de A numerable. □

La siguiente proposición es útil para probar que algunos conjuntos son numerables. Antes de enunciarla, haremos una observación útil a la demostración. Afirmamos que si A es un conjunto a lo sumo numerable, entonces existe una función suryectiva de $\mathbb{N}$ en A. En efecto, si A es numerable, esto es claro puesto que existe una biyección de $\mathbb{N}$ en A. Si, por el contrario, A es finito, entonces existe una biyección de $\mathbb{N}_n$, para algún $n \in \mathbb{N}$, en A; en este caso extendemos la biyección a todo $\mathbb{N}$ de cualquier forma[2], la función resultante es suryectiva, aunque ya no inyectiva.

Proposición 2.3.6 Sea I un conjunto de índices a lo sumo numerable. Supongamos que para cada $i \in I$ tenemos un conjunto A_i que, también, es a lo sumo numerable. Entonces $\bigcup_{i\in I} A_i$ es a lo sumo numerable.

Dem. Como vimos, para cada $i \in I$ existe una función suryectiva $f_i : \mathbb{N} \longrightarrow A_i$. Definimos:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} \times I &\longrightarrow \bigcup_{i\in I} A_i \\ (n, i) &\longmapsto f_i(n). \end{aligned}$$

Esta función es suryectiva, pues si

$$a \in \bigcup_{i\in I} A_i,$$

entonces $a \in A_{i_0}$, para algún i_0; ahora, utilizando la suryectividad de f_{i_0}, obtenemos un $n \in \mathbb{N}$ tal que $f_{i_0}(n) = a$. Es decir $f(n, i_0) = a$. Esto prueba que f es suryectiva. Ahora, como $\mathbb{N} \times I$ es a lo sumo numerable, en rigor es numerable, y por la Proposición 2.3.5 en la página 11, obtenemos la tesis. □

2.4 Un conjunto no numerable

Vimos que $\mathbb{N}$ es numerable, por definición, y que $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ son también numerables. Ahora mostraremos un conjunto que no es a lo sumo numerable. No será otro que el conjunto de los numeros reales.

Teorema 2.4.4 El conjunto $\mathbb{R}$ no es a lo sumo numerable.

Dem. Supongamos, por el contrario, que $\mathbb{R}$ es a lo sumo numerable. En virtud de la Proposición 2.3.2 en la página 9, tendríamos que el intervalo $[0, 1)$ sería también a lo sumo numerable. Como él es infinito entonces $[0, 1)$ sería numerable. Sea, entonces, una función biyectiva $f : \mathbb{N} \longrightarrow [0, 1)$. Definamos $a_j := f(j)$.

Como es sabido, cada número real r admite un desarrollo en expresión decimal infinita del tipo

$$r = 0.r_1r_2r_3\ldots.$$

Un pequeño inconveniente lo presenta el hecho de que esta expresión decimal no es única, puesto que, por ejemplo: $2{,}000\cdots = 1{,}999\ldots$. Para abolir este problema convenimos que en nuestros desarrollos decimales no usaremos expresiones que tienen todos 9 a partir de cierto momento. Con esta convención, el desarrollo decimal es único.

El arguemnto de esta demostración se conoce como argumento diagonal de Cantor. Es un técnica de demostración ideada por George Cantor. Actualmente es utilizada frecuentemente para resolver otros tipos problemas

[2] Por ejemplo: ponemos $f(j) = 1$ para $j > n$

A los fines de clarificar nuestra demostración, es útil poner a la sucesión a_j de la siguiente manera :

$$\begin{aligned} a_1 &= 0.a_{1,1}a_{1,2}a_{1,3}\dots \\ a_2 &= 0.a_{2,1}a_{2,2}a_{2,3}\dots \\ &\vdots \\ a_n &= 0.a_{n,1}a_{n,2}a_{n,3}\dots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Ahora definimos un número $r = 0.r_1r_2\dots \in [0,1)$, tomando en cuenta los valores de $a_{i,j}$ sobre la digonal principal, que no será igual a ninguno de los a_j. La definición es la siguiente:

$$r_n := \begin{cases} 2, & \text{si } a_{n,n} < 2; \\ 1, & \text{si } a_{n,n} \geq 2. \end{cases}$$

Tenemos que $r \neq a_j$ para todo j, pues, estos números seguramente son distintos en el lugar j de su desarrollo. Observar que si a_j tiene un número menor que 2 en ese lugar, entonces $r_j = 2$, en cambio si un número mayor o igual que 2 ocupa el lugar j de a_j, entonces $r_j = 1$. Por ende, como dijimos r no es ningún a_j. Esto demuestra que la función f no es suryectiva. □

Utilizando el Ejemplo 2.2.2 en la página 8 y el Ejercicio 2.9.9 en la página 24, vemos que $\mathbb{R} \sim (0,1) \sim [0,1]$. Para cualquier intérvalo no trivial[3] I, ya sea abierto o cerrado, existe una biyección, de hecho una función lineal, de I en el intérvalo $(0,1)$ o $[0,1]$, dependiendo de si I es cerrado o abierto. Vemos así que todos los intérvalos no triviales son coordinables entre si y a su vez con $\mathbb{R}$.

2.5 Una aplicación: existencia de números trascendentes

En esta sección desarrollaremos una aplicación de los conceptos desarrollados en las secciones previas para demostrar un resultado de la matemática pura. Veremos como estos se pueden usar para demostrar la existencia de números trascendentes. Antes empezaremos con algunas definiciones.

Un polinomio es una expresión de la forma:

$$P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_nX^n,$$

donde $n \in \mathbb{N}$ se llama *grado* del polinomio y los a_j *coeficientes* del polinomio. Escribiremos que $P \in \mathbb{Z}[X]$, $P \in \mathbb{Q}[X]$ o $P \in \mathbb{C}[X]$ si los coeficientes son enteros, racionales o complejos respectivamente. Una raíz del polinomio P es un número $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que

$$P(\alpha) = 0.$$

Observar que un número racional $q = n/m$ es solución (o raíz del polinomio) de la siguiente ecuación:

$$P(X) := mX - n = 0.$$

Este polinomio P es de primer grado y además $P \in \mathbb{Z}[X]$. Reciprocamente, si q es solución de una ecuación polinomial $P(X) = 0$, donde P es de primer grado y con coeficientes en $\mathbb{Z}$, entonces q es racional.

Hemos aprendido que hay dos clases de reales, *racionales e irracionales*. En esta sección expondremos otros tipos de números reales, a saber los *trascendentes*.

[3] Por un intérvalo trivial entendemos un intérvalo que se reduce a un punto

Tomemos por caso el número $\sqrt{2}$, que como sabemos es irracional. A pesar de ello $\sqrt{2}$ es solución de una ecuación a coeficientes enteros de segundo grado. Nos referimos a:

$$X^2 - 2 = 0.$$

Vemos que $\sqrt{2}$ tiene, si se nos permite por el momento esta expresión, un grado de irracionalidad no muy grande, puesto que es solución de una ecuación de segundo grado a coeficientes enteros. A los números irracionales satisfaciendo esta propiedad se los llama *irracionales cuadráticos*. Nos preguntamos ahora si existiran números que, acorde con la perspectiva anterior, tengan el mayor grado de irracionalidad posible. Esto es que no sean solución de ninguna ecuación polinomial a coeficientes enteros, no importa del grado que fuere. Llamaremos a estos números, cuya existencia es hipotética por el momento, *trascendentes*. A los restantes números los llamaremos *algebraicos*. Denotaremos por $\mathbb{A}$ al conjunto de números algebraicos y por $\mathbb{T}$ al conjunto de números trascendentes. Cualquier número que sea obtenido por medio de raices, del grado que fuere, de números enteros son algebraicos. Esto indica que resolver el problema planteado puede no ser fácil.

En esta sección mostraremos el argumento usado por G. Cantor, en 1874, para demostrar la existencia de números trascendentes. La situación es la siguiente: Cantor demostró que el conjunto de los números algebraicos es numerable. Luego, si el conjunto de los trascendentes lo fuera, también lo sería el conjunto $\mathbb{R}$ (unión de dos numerables es numerable), lo cual no es cierto. Asi es que no solo los números trascendentes existen, sino que existen tantos como números reales hay. Dicho de otro modo, los números trascendentes son los más comunes entre los números reales. Los racionales, por el contrario, son una excepción, habiendo de ellos solo una cantidad numerable.

Es bueno comentar que hubo matemáticos que se opusieron a G.Cantor y a su Teoría de Conjuntos. Quizas la gota que rebalso el vaso fue la anterior demostración de la existencia de números trascendentes. Pues es una manifestación de que la teoría de Cantor podía ser utilizada para demostrar cuestiones matemáticas profundas que no aparentaban tener nada que ver con la teoría de conjuntos.

La clave de la demostración es el siguiente lema.

El problema de la existencia de números trascendentes fue resuelto por Carl Louis Ferdinand von Liouville en 1844. El demostró que el número

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}}$$

es trascendente. Posteriormente C. Hermite demostró en 1873 que $e = 2{,}7172\ldots$ es trascendente y Lindemann, en 1882, que π también lo es.

Lema 2.5.2 El conjunto $\mathbb{Z}[X]$ es numerable.

Dem. Un polinomio en $\mathbb{Z}[X]$ y de grado n se puede identificar con la $n+1$-upla de enteros formada por sus coeficientes. Teniendo en cuenta esto, definimos la siguiente función:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z}[X] &\longrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}^n \\ a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n &\longmapsto (a_0, a_1, \ldots, a_n) \end{aligned},$$

donde

$$\mathbb{Z}^n := \underbrace{\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}}_{n \text{ veces}}.$$

Por lo dicho con anterioridad, esta función es biyectiva.

Ahora bien, el conjunto $\mathbb{Z}^n$ es numerable. Podemos probar esto usando inducción y el hecho de que el producto cartesiano de conjuntos numerables es numerable. Así, como consecuencia de la Proposición 2.3.6 en la página 13 obtenemos que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}^n$$

es numerable. Como f es una biyección, $\mathbb{Z}[X]$ es numerable. □

Uno de los mayores opositores a la Teoría de Conjunto de Cantor fue Leopold Kronecker (1823-1891). Kronecker rechazó la demostración de existencia de números trascendentes de Cantor. Sostuvo que había que evitar los argumentos con conjunto infinitos y construir la matemática a partir de los números naturales por medio de argumentos finitistas.

Como corolario obtenemos que el conjunto de números algebraicos es numerable.

Corolario 2.5.1 El conjunto de números algebraicos es numerable.

Dem. Se tiene que
$$\mathbb{A} = \bigcup_{P \in \mathbb{Z}[X]} \{\alpha : P(\alpha) = 0\}.$$
Como es sabido de los cursos de álgebra, dado un polinomio P, de grado n, el conjunto $\{\alpha : P(\alpha) = 0\}$ es finito, es mas, tiene a lo sumo n elementos. Ahora, en virtud de esto y la Proposición 2.3.6 en la página 13, obtenemos que $\mathbb{A}$ es a lo sumo numerable. Ciertamente, este conjunto es infinito, pues $\mathbb{N}$ está contenido en él, de modo que no tiene mas chance que la de ser numerable. $\square$

Como otro corolario obtenemos que $\mathbb{T} \neq \varnothing$. Pues de lo contrario, como $\mathbb{R} = \mathbb{A} \cup \mathbb{T}$ y como la unión de a lo sumo numerables es a lo sumo numerable, tendríamos que $\mathbb{R}$ sería a lo sumo numerable, que es una contradicción. Pero en realidad podemos demostrar algo más fuerte que $\mathbb{T} \neq \varnothing$; podemos probar que $\mathbb{T} \sim \mathbb{R}$. Esto es consecuencia del siguiente teorema, que afirma que al sacarle un conjunto numerable a un conjunto coordinable con $\mathbb{R}$ no alteramos la cantidad de elementos del conjunto.

Lema 2.5.3 Sean $A \sim \mathbb{R}$ y $B \sim \mathbb{N}$ tales que $B \subset A$. Entonces $A - B \sim \mathbb{R}$.

Dem. Tenemos que $A - B$ es infinito, de lo contrario, por la Proposición 2.3.6 en la página 13, $A = (A - B) \cup B$ sería a lo sumo numerable, contradiciendo nuestras hipótesis. Como $A - B$ es infinito, por el Lema 2.3.1 en la página 12, obtenemos un conjunto numerable $C \subset A - B$. Como $B \cup C$ y C son numerables, existe una biyección $f : B \cup C \longrightarrow C$. Ahora definimos la siguiente función:
$$\begin{aligned} \hat{f} : A &\longrightarrow A - B \\ x \notin B \cup C &\longmapsto x \\ x \in B \cup C &\longmapsto f(x) \end{aligned} .$$
No es dificil demostar que $\hat{f}$ es una biyección, de donde $A - B \sim A \sim \mathbb{R}$. $\square$

Corolario 2.5.2 $\mathbb{T} \sim \mathbb{R}$.

Dem. Aplicando el lema anterior, con $A = \mathbb{R}$ y $B = \mathbb{A}$, obtenemos la tesis. $\square$

2.6 Comparación de cardinales

En esta sección introduciremos una relación de orden entre conjuntos, esta, intuitivamente, corresponderá a la noción de: "tiene más elementos". Para conjuntos finitos todos estamos muy familiarizados con esta noción. También se suele decir que un conjuto tiene un cardinal mayor que el otro, para expresar esta idea de mayor cantidad de elementos. Informalmente ya hemos usado esta noción al decir que había más números reales que naturales. No obstante, en aquel momento, esa afirmación solo constituyó una interpretación de cierto resultado, otra manera de decirlo que fuera común a nuestra experiencia. En todo caso, no fue ni una definición ni nada que fuera plausible de ser demostrado. En esta sección, formalizaremos el concepto y posteriormente analizaremos algunas consecuencias de este.

Intuitivamente, decíamos que había más reales que naturales por que $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ y por que[4] $\mathbb{N} \nsim \mathbb{R}$. Si queremos comparar dos conjuntos cualesquiera, puede ocurrir que ninguno de ellos sea un subconjunto del otro, o más aún que estos conjuntos sean disjuntos. ¿Cómo procedemos en ese caso?. Veamos un ejemplo. Consideremos el conjunto

[4] Por $\nsim$ entendemos no coordinable

$\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \times \{0\} = \{(n,0) : n \in \mathbb{N}\}$. ¿Cómo podríamos comparar este conjunto con $\mathbb{R}$?. Tenemos que $\mathbb{N}_0 \cap \mathbb{R} = \varnothing$, sin embargo, dentro de $\mathbb{R}$ tenemos un subconjunto, precisamente $\mathbb{N}$, que es coordinable con $\mathbb{N}_0$ a traves de la biyección definida por $f(n,0) = n$. Podríamos decir entonces que, como $\mathbb{N}$ tiene menos elementos que $\mathbb{R}$ y $\mathbb{N}_0$ tiene la misma cantidad que $\mathbb{N}$, entonces $\mathbb{N}_0$ tiene menos que $\mathbb{R}$. Notemos que la función f, que es biyectiva de $\mathbb{N}_0$ en $\mathbb{N}$, es una aplicación inyectiva de $\mathbb{N}_0$ en $\mathbb{R}$. Esperemos que la discución de este ejemplo muestre la siguiente definición como natural.

Definición 2.6.11 Dados dos conjuntos A y B, diremos que $A \precsim B$ si existe una aplicación inyectiva $f : A \longrightarrow B$. Si, además, $A \nsim B$ diremos entonces que $A \prec B$.

Ejemplo 2.6.3 Si A es un conjunto infinito, entonces $\mathbb{N} \precsim A$. Esto es consecuencia del Lema 2.3.1 en la página 12
Ejemplo 2.6.4 Si A es un conjunto finito entonces $A \prec \mathbb{N}$. Esto es consecuencia de la definición y del Teorema 2.3.1 en la página 8.
Ejemplo 2.6.5 Tenemos las siguientes relaciones

$$\mathbb{N} \sim \mathbb{Z} \sim \mathbb{Q} \sim \mathbb{A} \prec \mathbb{T} \sim \mathbb{R}.$$

Ejemplo 2.6.6 Si $A \prec B$, $A \sim C$ y $B \sim D$, entonces $C \prec D$. A continuación justificamos esta afirmación. A causa de las hipótesis, existen: una función inyectiva $f : A \longrightarrow B$ y funciones biyectivas: $g : C \longrightarrow A$ y $h : B \longrightarrow D$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] & B \arrow[d, "h"] \\
C \arrow[u, "g"] \arrow[r, "h \circ f \circ g"] & D
\end{tikzcd}$$

La función $h \circ f \circ g$ es inyectiva, lo que demuestra que $C \precsim D$. Deberíamos ver que $C \nsim D$. Supongamos que, por el contrario, $C \sim D$. Sea $\phi : C \longrightarrow D$ una biyección entonces tendríamos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "h^{-1} \circ \phi \circ g^{-1}"] \arrow[d, "g^{-1}"'] & B \\
C \arrow[r, "\phi"] & D \arrow[u, "h^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

y, puesto que las funciones intervinientes son todas biyecciones, tendríamos que $A \sim B$, contradiciendo, esto, nuestras hipótesis.

En el siguiente teorema podemos ver que para cualquier conjunto A hay otro conjunto que es mas grande, en el sentido de la Definición 2.6.11. Este conjunto será el conjunto de partes $\mathscr{P}(A)$.

Teorema 2.6.5 (Cantor) Para todo conjunto A, $A \prec \mathscr{P}(A)$.

Dem. Tenemos que probar que: $A \precsim \mathscr{P}(A)$ y $A \nsim \mathscr{P}(A)$. La siguiente función:

$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow \mathscr{P}(A) \\ a &\longmapsto \{a\} \end{aligned}$$

es inyectiva, de modo que $A \precsim \mathscr{P}(A)$.

Supongamos que existe una biyección $g : A \longrightarrow \mathscr{P}(A)$. Definimos el subconjunto B de A de la siguiente manera

$$B := \{a \in A : a \notin g(a)\}.$$

Como g es suryectiva, existe un $b \in A$ tal que $g(b) = B$. ¿Será o no cierto que $b \in B$? Si es cierto, por definición de B, tendríamos que $b \notin g(b) = B$, lo que es una contradicción. Si fuera falso, es decir $b \notin B$, nuevamente por la definición de B, deducimos que $b \in g(b) = B$, otra contradicción. De modo que, no importando cual, todos los casos nos conducen a una contradicción que es fruto de suponer que $A \sim \mathscr{P}(A)$. $\square$

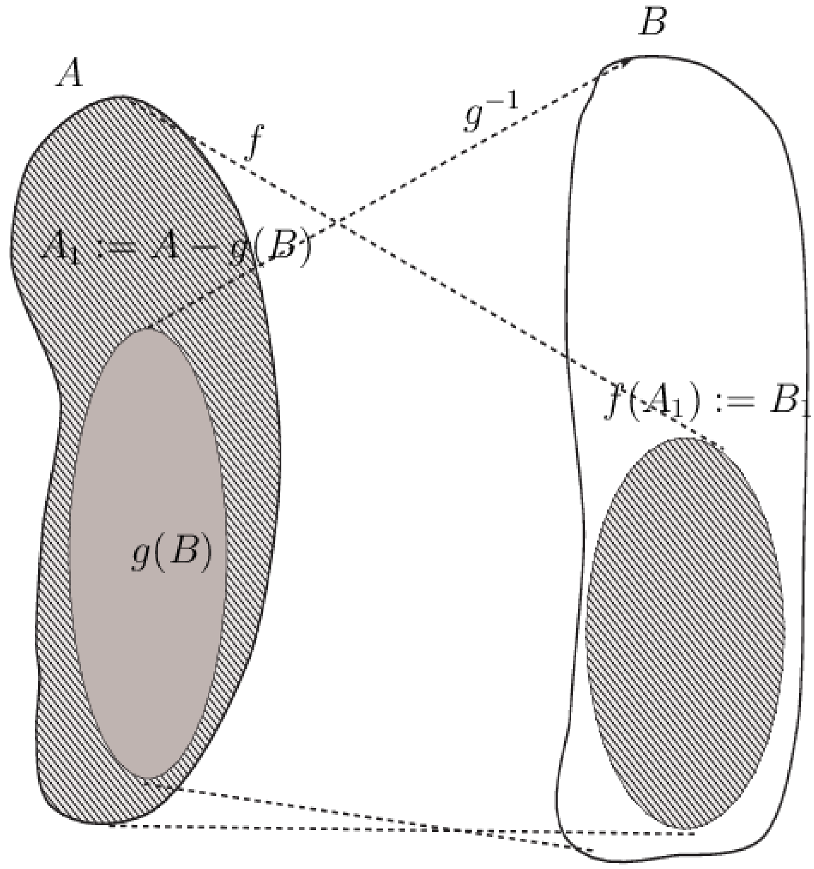


Figura 2.1: Las funciones f y g^{-1}

Definamos $\tilde{A}$ como en (2.7) y $\tilde{f}$ como en (2.6). Veamos que $\tilde{f} : A \longrightarrow B$ es biyectiva.

Empecemos por la inyectividad. Sean $a, a' \in A$ dos puntos cualesquiera tales que $\tilde{f}(a) = \tilde{f}(a')$. Si a y a' están simultaneamente en $\tilde{A}$, o en $\tilde{A}^c$, tenemos que $a = a'$ como consecuencia de que f y g^{-1} son inyectivas. Consideremos entonces el caso $a \in \tilde{A}$ y $a' \notin \tilde{A}$. Debemos llegar a una contradicción pues estamos suponiendo indirectamente que $a \neq a'$, por estar en conjuntos disjuntos, y que $\tilde{f}(a) = \tilde{f}(a')$. Tenemos que, para algún $n \in \mathbb{N}$, $a \in A_n$. Además, por la definición de $\tilde{f}$, $f(a) = g^{-1}(a')$. Por consiguiente $g(f(a)) = a'$. Como $a \in A_n$, $f(a) \in B_n$ y $a' = g(f(a)) \in A_{n+1}$. Esto contradice que $a' \notin \tilde{A}$.

Veamos ahora la suryectividad. Sea $b \in B$ cualquier punto. Si $b \in B_n$, para algún n, como $B_n = f(A_n)$, ciertamente existe un elemento $a \in A_n$ tal que $f(a) = b$. Ahora, por la definición de $\tilde{f}$, $\tilde{f}(a) = f(a) = b$. Supongamos, pues, que b no está en ningún B_n. Como una afirmación intermedia, probaremos que $g(b)$ no está en ningún A_n. Supongamos, por el contrario, que existe un n tal que $g(b) \in A_n$. Tiene que ser $n > 1$, pues $A_1 = g(B)^c$ y $g(b) \in g(B)$. Así, por su definición y como $n > 1$, el conjunto A_n es igual a $g(B_{n-1})$. De modo que $g(b) \in g(B_{n-1})$. Esto implica que existe un $b' \in B_{n-1}$ tal que $g(b) = g(b')$. Pero, como g es inyectiva $b = b'$ y, por ende, $b \in B_{n-1}$. Contradiciendo esto que b no estaba en ningún B_n. Probamos, así, que $g(b)$ no está en ningún A_n. Por lo tanto $\tilde{f}(g(b)) = g^{-1}(g(b)) = b$. Vale decir $b = \tilde{f}(a)$ con $a = g(b)$. Que era lo que queríamos probar. $\square$

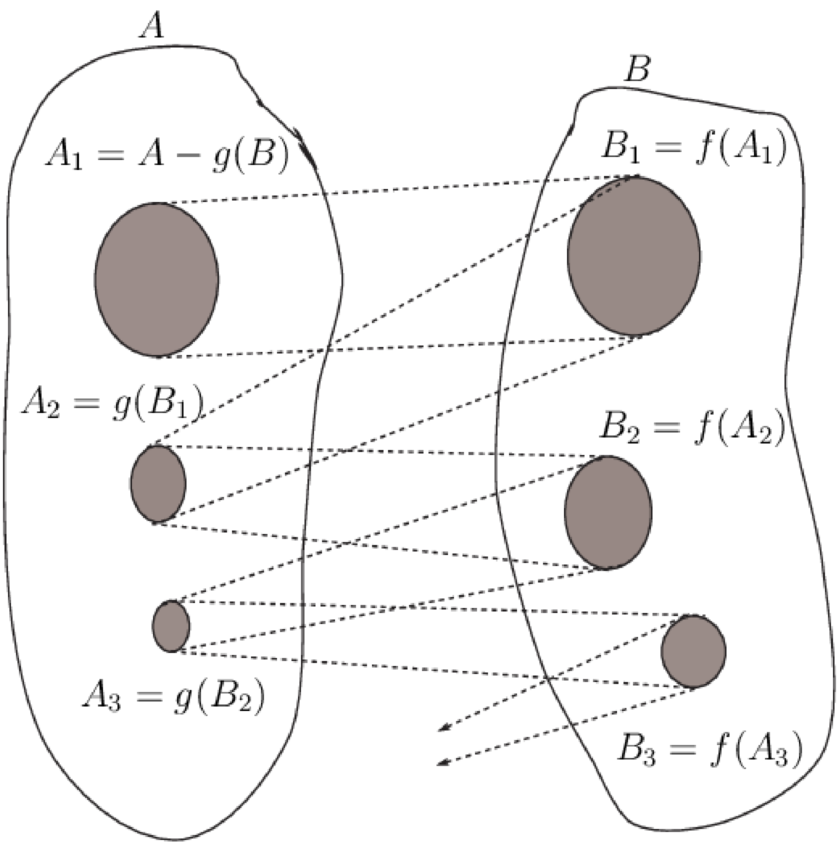


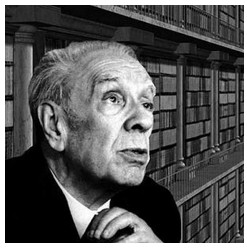
Figura 2.2: Demostración del teorema de Schröder-Berstein

2.7 Números Cardinales

Hasta el momento hemos introducido la noción de cuando dos conjuntos tienen la misma cantidad de elementos. Pero no hemos definido el concepto de cantidad de elementos de un conjunto digamos A. A grandes rasgos esto debería ser una característica de todos los conjuntos coordinables con A y se denominará *cardinal* del conjunto A y lo denotaremos por $\#A$. La definición precisa demanda desarrollar la Teoría de números ordinales, que no es la intención de estas notas. Nos vamos a tomar la licencia de invocar el concepto de cardinal a partir de la idea intuitiva que dimos de este concepto.

Se sabe que los números cardinales están ordenados con la relación de orden definida en la sección anterior. Concretamente escribiremos $\#A < \#B$ cuando $A \prec B$. Se puede demostrar que este un buen orden, en el sentido que todo conjunto acotado inferiormente tiene primer elemento.

Desde George Cantor es costumbre denotar los números cardinales con letras del alfabeto hebreo. Así el primer *cardinal transfinito*[6] es el que le corresponde a los números naturales y se denota por $\aleph_0$. Como el conjunto de cardinales es bien ordenado existe un sucesor de $\aleph_0$ al que denominamos naturalmente $\aleph_1$. Al cardinal que corresponde a los números reales lo denominamos c. Sabemos que $\aleph_0 < \aleph_1 \leq c$ y George Cantor conjeturó que $c = \aleph_1$. Esta fue una de las más famosas conjeturas de la matemática y se denominó La Hipótesis del Continuo. George Cantor fracasó en hallar una demostración de la hipótesis del continuo. El gran matemático Kurt Gödel probó en 1938 que esta hipótesis es consistente con el sistema axiomático de la Teoría de conjuntos de Zermelo y Fraenkel, y por tanto puede ser tomado como un axioma nuevo para la teoría de conjuntos. Sin embargo, en 1963 Paul Cohen probó que la negación de la hipótesis del continuo también es consistente con los axiomas ZF, lo cual prueba que dicha hipótesis es totalmente independiente de los axiomas ZF. Esta situación es similar a la de



«Borges y la matemática es un libro de ensayo de 2006 de Guillermo Martínez que relata como varias ideas en la matemática moderna se hallan en la obra literaria del autor argentino Jorge Luis Borges, incluyendo conceptos como la teoría de conjuntos, recursión, la teoría de caos, y sucesión matemática infinita. Aunque los enlaces más fuertes que Borges tuvo con la matemática son a través de la teoría de conjuntos infinitos de Georg Cantor. El título del cuento El Aleph se alude al uso de la letra hebrea de Cantor, álef ($\aleph$) por denotar cardinalidad de conjuntos transfinitos» (Wikipedia)

[6] Como es usual adoptaremos la denominación de transfinito en lugar de infinito como usamos hasta aquí

las geometrías no euclídeas.

No contento con introducir los números cardinales transfinitos George Cantor introdujo una aritmética entre ellos. Así por ejemplo si $\aleph_a$ y $\aleph_b$ son dos cardinales, buscamos dos conjuntos disjuntos cualesquiera A y B tales que $\#A = \aleph_a$ y $\#B = \aleph_b$ y definimos

$$\begin{aligned}
\aleph_a + \aleph_b &= \#A \cup B\\
\aleph_a \times \aleph_b &= \#A \times B\\
\aleph_a^{\aleph_b} &= \#A^B\\
2^{\aleph_a} &= \#2^A
\end{aligned}$$

Algunas relaciones que hemos demostrado

$$\begin{array}{lll}
\forall \aleph : \aleph & < 2^{\aleph} & \text{(Por Teorema 2.6.5)}\\
\aleph_0 \times \aleph_0 & = \aleph_0 & \text{(Por Proposición 2.3.4)}\\
\aleph_0 + \aleph_0 & = \aleph_0 & \text{(Por Proposición 2.3.6)}
\end{array}$$

2.8 Aplicaciones del Teorema de Schröder-Berstein

El teorema de Schröder-Berstein es una herramienta potente para probar coordinabilidad de conjuntos puesto que nos permite establecer coordinabilidad mostrando sólo que existen funciones inyectivas entre los conjuntos.

Habíamos visto que $\mathbb{R} \nsim \mathbb{N}$. ¿ Qué ocurre con $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$,...? ¿Serán estos conjuntos más "numerosos" que $\mathbb{R}$? Esto es: ¿Serán no coordinables con $\mathbb{R}$?. Recordando que $\#\mathbb{R} = c$ nos preguntamos si $c < c^2$. La respuesta a esta pregunta es negativa, es decir $\mathbb{R}^n \sim \mathbb{R}$ esto es $c^n = c$. Para ver esto basta demostrar que $(0,1)^2 \sim (0,1)$. El caso general es consecuencia del caso $n = 2$, usando inducción, el Ejemplo 2.2.2 en la página 8 y el Ejercicio 2.9.4 en la página 24.

Teorema 2.8.7 $(0,1)^2 \sim (0,1)$. En otras palabras $c^2 = c$.

Dem. Observar que $(0,1) \precsim (0,1)^2$. Para demostrarlo considerar la función inyectiva $f(x) = (x, 1/2)$.

Veamos que $(0,1)^2 \precsim (0,1)$. Debemos construir una función inyectiva $f : (0,1)^2 \longrightarrow (0,1)$. Sea $(x,y) \in (0,1)^2$. Consideremos las expresiones decimales $x = 0.x_1x_2...$ e $y = 0.y_1y_2...$, donde x_i e y_i son enteros entre 0 y 9, y no son todos 9 a partir de un momento en adelante. Entonces escribimos:

$$f(x,y) := 0.x_1y_1x_2y_2....$$

Es decir f intercala las expresiones decimales de x e y. Esta función es inyectiva, puesto que dos expresiones decimales iguales tienen todos sus dígitos correspondientes iguales. Esto concluye la demostración. □

Es bueno notar que la función f, definida en la demostración anterior, no es suryectiva. Un número que no es imagen de ningún par es $0{,}909090...$. ¿Por qué será esto?

Por el Teorema 2.6.5 en la página 17 tenemos que $\mathbb{N} \prec \mathscr{P}(\mathbb{N})$. Desmostramos, además, que $\mathbb{N} \prec \mathbb{R}$. Nos preguntamos, ahora, que relación unirá $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ con $\mathbb{R}$. Con el siguiente teorema probaremos que aquellos conjuntos son coordinables.

Teorema 2.8.8 $\mathscr{P}(\mathbb{N}) \sim \mathbb{R}$. En otras palabras $2^{\aleph_0} = c$.

Dem. Probaremos que $\mathscr{P}(\mathbb{N}) \precsim \mathbb{R}$ y después que $\mathscr{P}(\mathbb{N}) \succsim \mathbb{R}$.

Como $\mathscr{P}(\mathbb{N}) \sim \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ (Ejercicio 2.9.10 en la página 24), y por el Ejercicio 2.9.4 en la página 24 inciso 4, probaremos que $\mathscr{P}(\mathbb{N}) \precsim \mathbb{R}$ si podemos probar que $\mathbf{2}^{\mathbb{N}} \precsim \mathbb{R}$. Para

«Kurt Gödel; Brünn, Imperio austrohúngaro, actual República Checa, 28 de abril de 1906-Princeton, Estados Unidos; 14 de enero de 1978) fue un lógico, matemático y filósofo austríaco.
Se le considera uno de los lógicos más importantes de todos los tiempos. Su trabajo ha tenido un impacto inmenso en el pensamiento científico y filosófico del siglo XX. Gödel intentó emplear la lógica y la teoría de conjuntos para comprender los fundamentos de la matemática.
Se le conoce sobre todo por sus dos teoremas de la incompletitud, publicados en 1931. El más célebre establece que para todo sistema axiomático recursivo auto-consistente lo suficientemente poderoso como para describir la aritmética de los números naturales (la aritmética de Peano), existen proposiciones verdaderas sobre los naturales que no pueden demostrarse a partir de los axiomas. Para demostrar este teorema, desarrolló una técnica denominada ahora numeración de Gödel, que codifica expresiones formales como números naturales.
También demostró que la hipótesis del continuo no puede refutarse desde los axiomas aceptados de la teoría de conjuntos, si dichos axiomas son consistentes. » (Wikipedia)

este fin, consideremos la siguiente función:

$$\begin{aligned} T : \mathbf{2}^{\mathbb{N}} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto 0.f(1)f(2)f(3)... \end{aligned}.$$

Esto es la función f se aplica en un número cuya expansión decimal tiene solo ceros y unos. Esta función es inyectiva, pues si

$$0.f(1)f(2)f(3)... = 0.g(1)g(2)g(3)...$$

Entonces, por la unicidad de la expansión decimal[7], tenemos que $f(1) = g(1)$, $f(2) = g(2)$,.... Por consiguiente las funciones son iguales. Lo que prueba la inyectividad. De este modo demostramos que $\mathbf{2}^{\mathbb{N}} \precsim \mathbb{R}$ y esto, por lo que explicamos anteriormente, implica que $\mathscr{P}(\mathbb{N}) \precsim \mathbb{R}$

Ahora debemos ver que $\mathscr{P}(\mathbb{N}) \succsim \mathbb{R}$. Utilizando los incisos 1. y 4. del Ejercicios 2.9.4 en la página 24, vemos que es suficiente probar que $\mathbb{R} \precsim \mathscr{P}(\mathbb{Q})$. Para hacer esto definimos la siguiente aplicación:

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathscr{P}(\mathbb{Q}) \\ r &\longmapsto \{q \in \mathbb{Q} : q < r\} \end{aligned}.$$

Veamos que la aplicación es inyectiva. Sean $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ números reales distintos, supongamos $r_1 < r_2$. Por la densidad de $\mathbb{Q}$, existe un $q_0 \in \mathbb{Q}$ tal que $q_0 \in (r_1, r_2)$. Así $q_0 \in \{q \in \mathbb{Q} : q < r_2\}$ y $q_0 \notin \{q \in \mathbb{Q} : q < r_1\}$. De modo que

$$\{q \in \mathbb{Q} : q < r_1\} \neq \{q \in \mathbb{Q} : q < r_2\}.$$

Es decir T es inyectiva. □

Para finalizar demostraremos que $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \sim \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$. Mas que el resultado en sí, vamos a resaltar su demostración, pues contiene una idea interesante.

Proposición 2.8.7 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \sim \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$. En lenguaje de cardinales $\aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$.

Dem. Dado un conjunto X cualquiera, podemos interpretar una función $f \in X^{\mathbb{N}}$ como una sucesión de elementos de X, a la que podemos disponer de la siguiente manera:

$$f = (f(1), f(2), f(3), ...). \tag{2.8}$$

Si $X = \mathbb{N}$ entonces la sucesión será de números naturales y si $X = \mathbf{2}$ entonces la sucesión será de ceros y unos.

Interpretemos el segundo miembro de (2.8) como una palabra infinita. Si $X = \mathbb{N}$, esta palabras se compone de "letras" que pueden ser cualquier número natural. Si $X = \mathbf{2}$, esta "palabra" se escribe con solo dos "letras" el 0 y el 1. La pregunta es: ¿Cómo podemos "traducir" una palabra escrita con un alfabeto de infitas letras, a uno con solo dos?. La solución a esto es ingeniosa. Sea $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, usaremos el signo 1 para denotar las comas en la sucesión f y pondrémos tantos ceros como indiquen las cantidades $f(j)$.

$$\begin{array}{ccccc} T & : & \mathbb{N}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbf{2}^{\mathbb{N}} \\ & f = (f(1), f(2), f(3), ...) & & \longmapsto & (\underbrace{0, ..., 0}_{f(1) \text{ ceros}}, 1, \underbrace{0, ..., 0}_{f(2) \text{ ceros}}, 1, ...) \end{array}$$

Veamos que esta función es inyectiva. Sean $f, g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, con $f \neq g$. Sea

$$j = \text{mín}\{i : f(i) \neq g(i)\}.$$

[7]Recordemos que puede haber expresiones decimales distintas que representan el mismo número, estas son las expresiones que tienen todos nueves a partir de un momento en adelante, como por ejemplo 1=0.999....No obstante este problema no se nos presenta aquí pues la expresiones decimales que consideramos tienen solo 0 y 1

Tenemos que $f(i) = g(i)$ para $i < j$. Escribamos las dos sucesiones

$$(\underbrace{0,...,0}_{f(1) \text{ ceros}}, 1, ..., 1, \underbrace{0,...,0}_{f(j-1) \text{ ceros}}, 1, \underbrace{0,...,0}_{f(j) \text{ ceros}}, 1, ...)$$

y

$$(\underbrace{0,...,0}_{g(1) \text{ ceros}}, 1, ..., 1, \underbrace{0,...,0}_{g(j-1) \text{ ceros}}, 1, \underbrace{0,...,0}_{g(j) \text{ ceros}}, 1, ...)$$

Notar que los primeros $j - 1$ grupos de ceros son iguales, pues $f(i) = g(i)$ para $i < j$, por consiguiente los primeros $j - 1$ unos estan en la misma posición en las dos sucesiones. Pero $f(j) \neq g(j)$ y, por consiguiente, el grupo j-ésimo de ceros debe diferir en las dos sucesiones. Esto fuerza que si, por ejemplo, $f(j) < g(j)$, entonces la sucesión f tendrá un uno donde la g tiene un cero.

Así $T(f) \neq T(g)$ y la función es inyectiva. Esto prueba que $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \precsim \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$. La otra desigualdad es más fácil de obtener pues

$$\begin{array}{ll} \mathbf{2} \precsim \mathbb{N} & \text{pues unos es finito y el otro no} \\ \mathbf{2}^{\mathbb{N}} \precsim \mathbb{N}^{\mathbb{N}} & \text{por el Ejercicio 2.9.5} \end{array}$$

□

Existe una demostración mucho más de que $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \precsim \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$. Sin embargo preferimos la dada arriba por la idea interesante y potencialmente útil que contiene. Expogamos esta segunda demostración.

$$\begin{array}{ll} \mathbb{N} \precsim \mathbf{2}^{\mathbb{N}} & \text{Teorema de Cantor} \\ \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \precsim (\mathbf{2}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}} & \text{Ejercicio 2.9.5} \\ \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \precsim \mathbf{2}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} & \text{Ejercicio 2.9.5} \\ \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \precsim \mathbf{2}^{\mathbb{N}} & \text{Proposición 2.3.4} \\ \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \precsim \mathbf{2}^{\mathbb{N}} & \text{Ejercicio 2.9.4 inciso 3.} \end{array}$$

2.9 Ejercicios

Ejercicio 2.9.1 Sea $f : A \longrightarrow B$ una función cualquiera. Supongamos que $\{A_i\}_{i\in I}$ y $\{B_i\}_{i\in I}$ son familias subindicadas de conjuntos, donde los A_i y B_i son subconjuntos de A y B respectivamente. Demostrar las siguientes propiedades:

1. $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i\in I} A_i^c$.
2. $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i\in I} A_i^c$.
3. $f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$.
4. ¿Qué ocurre con $f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)$?
5. $f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$.

6. $f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$.

Ejercicio 2.9.2 Demostrar las propiedades de la Proposición 2.1.1 en la página 6

Ejercicio 2.9.3 Probar que $\sim$ es una relación de equivalencia.

Ejercicio 2.9.4 Supongamos que $A \sim B$ y $C \sim D$.

1. Demostrar que $\mathscr{P}(A) \sim \mathscr{P}(B)$.
2. Demostrar que $A \times C \sim B \times D$.
3. Demostrar que $A^C \sim B^D$.
4. Si $A \precsim C$ entonces $B \precsim D$.

Ejercicio 2.9.5 Sean A, B y C conjuntos no vacios. Demostrar que

1. $\left(A^B\right)^C \sim A^{B\times C}$.
2. Si $A \precsim B$ entonces $A^C \precsim B^C$.

Ejercicio 2.9.6 Demostrar que un subconjunto de un conjunto finito es finito.

Ejercicio 2.9.7 Demostrar que la función $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ definida por:

$$f(j,k) := \frac{(j+k-1)(j+k)}{2} - j + 1,$$

es una biyección.

Ejercicio 2.9.8 Encontrar, de manera explícita, una cantidad numerable de subconjuntos de $\mathbb{N}$, mutuamente disjuntos y cada uno de ellos numerable. Usar esto para dar otra demostración de que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es numerable.

Ejercicio 2.9.9 Demostrar, exhibiendo una biyección, que $(0,1) \sim [0,1]$

Ejercicio 2.9.10 Demostrar que el conjunto $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ es coordinable con el conjunto $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$, donde $\mathbf{n} = \{0, 1, ..., n-1\}$. Recordar que, si A y B son conjuntos, $B^A := \{f : f : A \longrightarrow B\}$. De este modo $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ es el conjunto de funciones $f : \mathbb{N} \longrightarrow \{0,1\}$.

Ejercicio 2.9.11 Demostrar que, para cualquier conjunto A, $\mathscr{P}(A) \sim \mathbf{2}^A$.

Ejercicio 2.9.12 Demostrar que son equivalentes:

1. A es infinito.
2. A es coordinable con un subconjunto propio, es decir: Existe $B \subset A$, con $B \neq A$, tal que $A \sim B$.

Ejercicio 2.9.13 Sea A un conjunto infinito y $B \subset A$ numerable. Supongamos que $A - B$ es infinito. Demostrar que $A - B \sim A$.

Ejercicio 2.9.14 Sean A y B conjuntos y supongamos que existe una funci'on f de A en B suprayectiva. Demostrar que $\#B \leq \#A$.

Ejercicio 2.9.15 Demostrar que el conjunto formado por todos los subconjuntos de $\mathbb{N}$ que son finitos, es numerable. ¿Qué ocurrira con el conjunto de todos los subconjuntos infinitos?

Ejercicio 2.9.16 Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de intervalos de $\mathbb{R}$. Suponer que los conjuntos en la familia son mutuamente disjuntos, es decir: $A_i \cap A_j = \varnothing$ si $i \neq j$. Demostrar que el conjunto $\{A_i : i \in I\}$ es a lo sumo numerable.

Ejercicio 2.9.17 Recordemos que una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice nodecreciente, si para todos $x, y \in \mathbb{R}$, tales que $x < y$, se tiene que $f(x) \leq f(y)$. Dada una función nodecreciente, demostrar que el conjunto de todos los puntos de discontinuidad es a lo sumo numerable. *Ayuda*: Demostrar en primera instancia que los límites laterales:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) \quad \text{y} \quad \lim_{x\to a^-} f(x)$$

existen para todo $a \in \mathbb{R}$. Luego aplicar el ejercicio anterior.

Ejercicio 2.9.18 Demostrar que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{R}$ ($c^{\aleph_0} = c$).

Ejercicio 2.9.19 Como aprendimos $\mathbb{N} \sim \mathbb{Q}$, esto significa que existe una aplicación biyectiva $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$, que nos permite enumerar $\mathbb{Q}$ como una suceción $r_j := f(j)$. Definimos la aplicación:

$$\begin{aligned} T : C(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ f &\longmapsto T_f \end{aligned}$$

donde

$$T_f(j) := f(r_j).$$

1. Demostrar que T es inyectiva. Por consiguiente $C(\mathbb{R}) \precsim \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

2. Usando el inciso anterior, demostrar que $C(\mathbb{R}) \sim \mathbb{R}$, donde $C(\mathbb{R})$ es el conjunto de las funciones continuas de $\mathbb{R}$ en si mismo.

3 Medidas abstractas

> «Me gustaría enfatizar nuevamente, antes de comenzar esta presentación, que la nueva definición será aplicable no solo a un espacio con n dimensiones sino a un conjunto abstracto. Es decir, ni siquiera es necesario, por ejemplo, suponer que sabemos cuál es el límite de elementos en este conjunto»

M. Frechet
Sur l'intégrale d'une fonctionnelle étendueà un ensemble abstrait
Bulletin de la S. M. F., tome 43 (1915), p. 248-265.

En todos los capítulos anteriores hemos tratado de fundar los conceptos que fuimos introduciendo relacionándolos con conceptos que juzgamos los precedían. cuando decimos "preceder"contemplamos tanto el orden lógico de la construcción como el grado de abstracción de los objetos de estudio.

En esta unidad planteamos un salto cualitativo. Vamos abstraernos de la problemática que dió origen a la construcción de la medida en itengral de Lebesgue, esto es la noción de área, y consideraremos una teoría axiomática, donde postularemos como axiomas aquellas propiedades que se revelaron trascendentes en los capítulos anteriores. Este enfoque axiomático se abstrae a su vez de las entidades a las que pretendemos medir, en el sentido que ya no formularemos el concepto de medida para subconjuntos de $\mathbb{R}$, o el espacio euclideano $\mathbb{R}^n$. Introducieremos el concepto de *espacio de medida* como una abstracción y veremos como este concepto induce un consecuente concepto de integral.

Las nociones introducidas aquí fueron presentadas por primera vez por M. Frechet en el artículo del cual fue extraída la cita con la que comensamos el presente capítulo.

La noción de medida abstracta es muy fructífera pues unifica multitud de instancias particulares de esta noción que aparecen en distintas áres de la matemática además de contemplar la medida de Lebesgue.

3.1 Algebras, σ-álgebras y clases monótonas

Definición 3.1.1 (Algebra de conjuntos) Sea X un conjunto y $\mathscr{A} \subset \mathcal{P}(X)$. Diremos que $\mathscr{A}$ es un *álgebra* si:

1. $\varnothing \in \mathscr{A}$.
2. $A \in \mathscr{A} \Rightarrow A^c \in \mathscr{A}$.
3. $A_i \in \mathscr{A}$, $i = 1, \ldots, n$, $\Rightarrow \bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathscr{A}$.

Ejercicio 3.1.1 Demostrar que los siguientes ejemplos definen álgebras de conjuntos.

1. La colección de todas las uniones de una cantidad finita de intervalos de $\mathbb{R}$, donde por intervalo inlcuímos tanto acotados como no y tanto abiertos como cerrados como ninguno de ambos.
2. Como en el ejemplo anterior, pero con los extremos de los intervalos en $\mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\}$ o $\mathbb{Q} \cup \{\pm\infty\}$.
3. Más generalmente aún, como en los ejemplos anteriores, pero con los extremos de los intervalos en $A \cup \{\pm\infty\}$, donde $A \subset \mathbb{R}$.

Ejercicio 3.1.2 Demostrar que $\mathscr{A}$ es un álgebra si y solo si

1. $\varnothing \in \mathscr{A}$.
2. $A \in \mathscr{A} \Rightarrow A^c \in \mathscr{A}$.
3. $A_i \in \mathscr{A}$, $i = 1, \ldots, n$, $\Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathscr{A}$.

Definición 3.1.2 (Clases monótonas) Sea X un conjunto y $\mathscr{A} \subset \mathcal{P}(X)$. El conjunto $\mathscr{A}$ se llamará *clase monótona* si

1. $A_i \in \mathscr{A}$, $A_i \subset A_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{A}$.
2. $A_i \in \mathscr{A}$, $A_i \supset A_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{A}$.

Ejercicio 3.1.3 Demostrar que los siguientes ejemplos definen clases monótonas.

1. La colección de todos los intervalos de $\mathbb{R}$ de la forma $(a, +\infty)$ o $[a, +\infty)$ con $a \in [-\infty, +\infty)$.
2. En $\mathbb{R}^n$ la colección de de todas las bolas, tanto cerradas o abiertas, de centro 0 y radio $r \in [0, +\infty]$.
3. La colección de todos los subgrupos de un grupo dado G.

Recordemos del capítulo anterior.

Definición 3.1.3 (σ-álgebra de conjuntos) Sea X un conjunto y $\mathscr{A} \subset \mathcal{P}(X)$. Diremos que $\mathscr{A}$ es una *σ-álgebra* si:

1. $\varnothing \in \mathscr{A}$.
2. $A \in \mathscr{A} \Rightarrow A^c \in \mathscr{A}$.
3. $A_i \in \mathscr{A}$, $i = 1, \ldots$, $\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{A}$.

Ejercicio 3.1.4 Demostrar que $\mathscr{A}$ es σ-álgebra si y sólo si es clase monótona y álgebra.

Ejercicio 3.1.5 Demostrar que $\mathscr{A}$ es σ-álgebra si y sólo si es álgebra y satisface que

- $E_n \in \mathscr{A}$, $n = 1, 2, \ldots$ y $E_i \cap E_j = \varnothing$, cuando $i \neq j$ implican que $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathscr{A}$.

3.2 Medidas

Definición 3.2.4 Sea X un conjunto y $\mathscr{A}$ una σ-álgebra. Una funcion $\mu : \mathscr{A} \to [0, +\infty]$ se llama una *medida* si para toda colección numerable de subconjuntos

$A_i \in \mathscr{A}$, $i = 1, 2, \ldots$, mutuamente disjuntos entre si, se satisface que

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu\left(A_i\right).$$

Al triplete $(X, \mathscr{A}, \mu)$ se lo denomina *espacio de medida*..

Ejercicio 3.2.6 Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ espacio de medida. Demostrar que se satisface las siguientes relaciones

1. $\mu(\varnothing) = 0$.
2. $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$.
3. Si $\mu(B) < \infty$ y $B \subset A$ entonces $\mu(A - B) = \mu(A) - \mu(B)$.

Ejemplo 3.2.1 $(\mathbb{R}, \mathscr{M}, m)$, donde $\mathscr{M}$ denota la σ-algebra de los conjuntos medibles Lebesgue y m la medida de Lebesgue, es un espacio de medida. Si en lugar de considerar la σ-álgebra $\mathscr{M}$ consideramos la σ-álgebra $\mathscr{B}$ de conjuntos medibles Borel, resulta en otro espacio de medida $(\mathbb{R}, \mathscr{B}, m)$, que no es más que la restricción de la medida a una sub-σ-álgebra.

Ejercicio 3.2.7 (Medida de conteo) Sea X es un conjunto y $\mathscr{A} = \mathcal{P}(X)$ la colección de todos los subconjuntos de X. Para $A \in \mathscr{A}$ escribamos $\mu(A) = \#A$, cuando A es finito, y $\mu(A) = +\infty$ cuando A no es finito. Demostrar que el triple $(X, \mathscr{A}, \mu)$ es espacio de medida.

Ejercicio 3.2.8 Sea $X = \mathbb{N}$ y $\mathscr{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ la colección de todos los subconjuntos de $\mathbb{N}$. Supongamos dada una función $f : \mathbb{N} \to [0, +\infty]$. Para $A \in \mathscr{A}$ escribamos

$$\mu(A) = \sum_{n \in A} f(n),$$

Demostrar que el triple $(\mathbb{N}, \mathscr{A}, \mu)$ es espacio de medida. ¿Qué resulta μ si $f(n) = 1$ para todo n? ¿Qué condición debe satisfacer f para que $\mu(A) < \infty$ para todo $A \subset \mathbb{N}$?

Ejercicio 3.2.9 Sea $X = \mathbb{N}$ y $\mathscr{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ la colección de todos los subconjuntos de $\mathbb{N}$. Sea k un natural fijo. Para $A \subset \mathbb{N}$ escribir

$$\mu(A) = \#\{n \in A : k|n\},$$

es decir $\mu(A)$ cuenta cuantos multiplos de k hay en A. Demostrar que μ es medida. Demostrar que esta medida es una instancia de las medidas introducidas en (3.2.8).

Un ejemplo muy importante es provisto por la siguiente proposición

Proposición 3.2.1 Sea $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ una función integrable y no negativa. El triplete $(\mathbb{R}, \mathscr{M}, \mu_f)$ es espacio de medida, donde $\mathscr{M}$ denota la σ-algebra de los conjuntos medibles Lebesgue y

$$\mu_f(A) = \int_A f(x)dx.$$

Dem. Sólo hay que demostrar que μ_f es una medida. Sean $A_i \in \mathscr{A}$, $i = 1, \ldots$, mutuamente disjuntos.

Ejercicio 3.2.10 Verificar la siguiente relación

$$\chi_{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} = \sum_{i=1}^{\infty} \chi_{A_i}.$$

Luego por la intercambiabilidad entre integral y series de términos positivos

$$\begin{aligned}\mu_f\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) &= \int_{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} f(x)dx = \int \chi_{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} f(x)dx \\ &= \int \sum_{i=1}^{\infty} \chi_{A_i} dx = \sum_{i=1}^{\infty} \int \chi_{A_i} dx = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_f(A_i).\end{aligned}$$

□

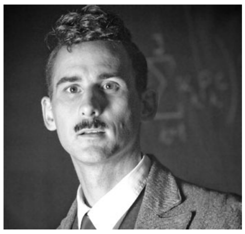
Ejercicio 3.2.11 (Delta de dirac) Sea X un conjunto no vacío cualquiera, $a \in X$ un punto fijo y $\mathscr{A} = \mathcal{P}(X)$. Definimos $\delta_a : \mathscr{A} \to [0, +\infty]$ por

$$\delta_a(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \in A \\ 0 & \text{si } a \notin A \end{cases}$$

Demostrar que $(X, \mathscr{A}, \delta)$ es un espacio de medida. La medida δ_a se denomina *δ de Dirac*.

Definición 3.2.5 (Completitud de medidas) Un espacio de medida se llama *completo* si $A \subset B \in \mathscr{A}$ y $\mu(B) = 0$ implican $A \in \mathscr{A}$.

Ejemplo 3.2.2 $(\mathbb{R}, \mathscr{M}, m)$ es un espacio de medida completo, mientras que $(\mathbb{R}, \mathscr{B}, m)$ no lo es.



Paul Adrien Maurice Dirac, (Brístol, Reino Unido, 8 de agosto de 1902-Tallahassee, Estados Unidos, 20 de octubre de 1984) fue un ingeniero eléctrico, matemático y físico teórico británico que contribuyó de forma fundamental al desarrollo de la mecánica cuántica y la electrodinámica cuántica.

3.3 Medida exterior

Definición 3.3.6 (Medida exterior) Sea X un conjunto no vacío. Una función $\mu^\star : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ se denomina una *medida exterior* si satisface que

$\mu^\star(\varnothing) = 0.$

Monotonía. $A_1 \subset A_2 \Rightarrow \mu^\star(A_1) \leq \mu^\star(A_2)$

σ-subaditividad. $A_j \subset X$, $j = 1, 2, \ldots, \Rightarrow \mu^\star\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^\star(A_j)$.

Ejemplo 3.3.3 La medida exterior que definimos sobre subconjuntos de $\mathbb{R}$ es obviamente una medida exterior en el sentido de la definición anterior.

Definición 3.3.7 (Conjuntos medibles de Carathéodory) Sea $\mu^\star$ una medida exterior sobre X y $E \subset X$. Diremos que E es *medible en el sentido de Charathéodory* si para todo $A \subset X$ se cumple que

$$\mu^\star(A) = \mu^\star(A \cap E) + \mu^\star(A - E). \tag{3.1}$$

Observacion 3.3.1 A los efectos de chequear si un conjunto es medible es suficiente probar que se satisface la desigualdad

$$\mu^\star(A) \geq \mu^\star(A \cap E) + \mu^\star(A - E). \tag{3.2}$$

para todo A con medida exterior finita.

Teorema 3.3.1 Si $\mu^\star$ es una medida exterior sobre X y $\mathscr{A}$ el conjunto de todos los subconjuntos de X que son medibles según Carathéodory. Entonces $\mathscr{A}$ es una σ-álgebra y $\mu^\star$ restringido a $\mathscr{A}$ es una medida. El espacio de medida $(X, \mathscr{A}, \mu^\star)$ es completo

Dem. Que $\varnothing \in \mathscr{A}$ es una afirmación inmediata.

Si uno escribe la condición de Carathéodory para E^c queda exactamente igual que la respectiva condición para E. Esta observación justifica que $E \in \mathscr{A}$ implica que $E^c \in \mathscr{A}$.

Sean $E_1, E_2 \in \mathscr{A}$ y $A \subset X$. Entonces

$$\begin{aligned}\mu^\star(A) &\geq \mu^\star(A \cap E_2) + \mu^\star(A \cap E_2^c)\\ &\geq \mu^\star(A \cap E_1 \cap E_2) + \mu^\star(A \cap E_2 \cap E_1^c)\\ &\qquad + \mu^\star(A \cap E_2^c \cap E_1) + \mu^\star(A \cap E_2^c \cap E_1^c)\end{aligned}$$

Ahora los conjuntos $E_2 \cap E_1, E_2 \cap E_1^c$ y $E_1 \cap E_2^c$ son mutuamente disjuntos y su unión es $E_1 \cup E_2$. Esta observación aplicada a los tres primeros términos del último miembro de la desigualdad anterior implica

$$\mu^\star(A) \geq \mu^\star(A \cap (E_1 \cup E_2)) + \mu^\star(A \cap (E_1 \cup E_2)^c).$$

De esta desiguldad concluímos que $E_2 \cup E_2 \in \mathscr{A}$. Esto a su vez implica que $\mathscr{A}$ es (al menos) un álgebra. Queremos ver que en realidad es σ-álgebra.

Supongamos que $E_1 \cap E_2 = \varnothing$. Tomando $A = E_1 \cup E_2$ en (3.2) obtenemos

$$\mu^\star(E_1 \cup E_2) \geq \mu^\star(E_1) + \mu^\star(E_2).$$

Ejercicio 3.3.12 Generalizar la desigualdad anterior de la siguiente forma. Si E_j, $j = 1, \dots, n$ son mutuamente disjuntos entonces

$$\mu^\star(E_1 \cup \dots \cup E_2) \geq \mu^\star(E_1) + \dots + \mu^\star(E_n).$$

Siguiendo con la demostración, sean $E_n \in \mathscr{A}$, $n = 1, 2, \dots$ una colección numerables de conjuntos mutuamente disjuntos en $\mathscr{A}$. Tomemos $G_n = \bigcup_{j=1}^n E_j$ y $G = \bigcup_{j=1}^\infty E_j$.

Como $\mathscr{A}$ es un álgebra, $G_n \in \mathscr{A}$. Además usando sucesivamente la condición de Carathéodory

$$\begin{aligned}\mu^\star(G_n \cap A) &\geq \mu^\star(G_n \cap A \cap E_n) + \mu^\star(G_n \cap A \cap E_n^c)\\ &= \mu^\star(A \cap E_n) + \mu^\star(G_{n-1} \cap A)\\ &\geq \mu^\star(A \cap E_n) + \mu^\star(A \cap E_{n-1}) + \mu^\star(G_{n-2} \cap A)\\ &\quad \vdots\\ &\geq \sum_{j=1}^n \mu^\star(A \cap E_j).\end{aligned} \tag{3.3}$$

Ahora deducimos que para todo $A \subset X$

$$\begin{aligned} \mu^\star(A) &\geq \mu^\star(A \cap G_n) + \mu^\star(A \cap G_n^c) && (G_n \in \mathscr{A}) \\ &\geq \sum_{j=1}^{n} \mu^\star(A \cap E_j) + \mu^\star(A \cap G^c) && (\text{Ecuación } (3.3), G_n \subset G) \end{aligned}$$

Tomando límite cuando $n \to \infty$

$$\begin{aligned} \mu^\star(A) &\geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^\star(A \cap E_j) + \mu^\star(A \cap G^c) \\ &\geq \mu^\star\left(A \cap \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) + \mu^\star(A \cap G^c) && (\sigma - \text{subaditividad de } \mu^\star) \\ &\geq \mu^\star\left(A \cap G\right) + \mu^\star(A \cap G^c) \end{aligned}$$

Luego $G \in \mathscr{A}$. Ahora el Ejercicio 3.1.5 implican que $\mathscr{A}$ es σ-álgebra. Además por el Ejercio3.3.12, para E_j, $j = 1, \ldots$ mutuamente disjuntos en $\mathscr{A}$.

$$\begin{aligned} \mu^\star\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) &\geq \mu^\star\left(\bigcup_{j=1}^{n} E_j\right) && (\text{monotonía de } \mu^\star) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \mu^\star\left(E_j\right) && (\text{Ejercicio } 3.1.5) \end{aligned}$$

Tomando límite cuando $n \to \infty$ obtenemos

$$\mu^\star\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^\star\left(E_j\right)$$

Como la desigualdad inversa a la anterior es siempre cierta por la σ-subaditividad queda demostrado que $\mu^\star$ es medida sobre $\mathscr{A}$ y finalizada la demostración del teorema. □

3.4 Premedidas

Definición 3.4.8 (Premedida) Sea X un cojunto no vacío y $\mathscr{A}_0$ un álgebra de subconjuntos de X. Diremos que una función $\mu_0 : \mathscr{A}_0 \to [0, +\infty]$ es una **premedida** si satisface que

- Si $E_j \in \mathscr{A}_0$, $j = 1, 2, \ldots$ son mutuamente disjuntos y $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \in \mathscr{A}_0$ entonces

$$\mu_0\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0\left(E_j\right)$$

Podemos construir medidas a partir de premedidas.

Lema 3.4.1 Sea μ_0 una premedida sobre el álgebra $\mathscr{A}_0$ de subconjuntos de X. Definimos $\mu^\star : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ por

$$\mu^\star(E) = \text{ínf} \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(E_j) \mid E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j, E_j \in \mathcal{A}_0 \right\} \tag{3.4}$$

Entonces $\mu^\star$ es una medida exterior que satisface que $\mu^\star(E) = \mu_0(E)$ para todo $E \in \mathcal{A}_0$ y que todo conjunto $E \in \mathcal{A}_0$ es medible en el sentido de Carathéodory.

Dem.

Ejercicio 3.4.13 Probar que $\mu^\star$ definida en (3.4) define en efecto una medida exterior.

Veamos que la restricción de μ_* to $\mathcal{A}$ coincide con μ_0. Supongamos que $E \in \mathcal{A}$. Siempre $\mu_*(E) \leq \mu_0(E)$ pues E se cubre a si mismo. Probemos la desigualdad recíproca. Supongamos $E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$, con $E_j \in \mathcal{A}$ para todo j. Definimos

$$E_k' = E \cap \left(E_k - \bigcup_{j=1}^{k-1} E_j \right).$$

Los conjuntos E_k' son mutuamente disjuntos, $E_k' \in \mathcal{A}, E_k' \subset E_k$ y $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k'$. Por la definición de premedida:

$$\mu_0(E) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_0\left(E_k'\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu_0\left(E_k\right)$$

Luego $\mu_0(E) \leq \mu_*(E)$.

Por último probemos que los conjuntos en $\mathcal{A}$ son medibles para μ_*. Sea $A \subset X$, $E \in \mathcal{A}$ y $\varepsilon > 0$. Por definición existen $E_1, E_2, \ldots$ en $\mathcal{A}$ con $A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ y

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu_0\left(E_j\right) \leq \mu_*(A) + \varepsilon$$

Como μ_0 finitamente aditiva en $\mathcal{A}$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0\left(E_j\right) &= \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0\left(E \cap E_j\right) + \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0\left(E^c \cap E_j\right) \\ &\geq \mu_*(E \cap A) + \mu_*\left(E^c \cap A\right) \end{aligned}$$

ε es arbitrario, $\mu_*(A) \geq \mu_*(E \cap A) + \mu_*\left(E^c \cap A\right)$ que termina por probar el teorema. □

Teorema 3.4.2 (Extensión premedidas) Sea μ_0 una premedida sobre el álgebra $\mathscr{A}_0$ de subconjuntos de X. Entonces existe una extensión μ de μ_0 a la σ-algebra $\mathscr{A}$ generada por $\mathscr{A}_0$.

Demostración. La medida exterior μ_* inducida po μ_0 define una medida μ sobre la σ-álgebra de los conjuntos medibles según Carathéodory. Por el Lema anterior μ es medida sobre $\mathscr{A}$ que extiende μ_0. □

3.5 Medidas σ-finitas

Definición 3.5.9 Un espacio de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$ se llama *σ-finita* si existen conjuntos medibles E_n, $n = 1, \ldots$, de medida finita tales que $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$.

Ejercicio 3.5.14 Demostrar que la medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}$ es σ-finita. Demostrar que la medida de conteo del ejercicio 3.2.8 es σ-finita si y sólo si X es a lo sumo numerable.

3.6 Medida de Lebesgue-Stieltjes

Haremos una construcción más general que produce una gran familia de medidas en $\mathbb{R}$ cuyo dominio es el σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. Tales medidas se denominan *medidas de Borel* en $\mathbb{R}$.

Para motivar las ideas, supongamos que μ es una medida de Borel finita en $\mathbb{R}$, y sea $F(x) = \mu((-\infty, x])$. La función F se llama la *función de distribución* de μ. Entonces F es creciente a y continua a la derecha, ya que $(-\infty, x] = \bigcap_1^{\infty} (-\infty, x_n]$ siempre que $x_n \searrow x$. Además, si $b > a$, $(-\infty, b] = (-\infty, a] \cup (a, b]$, entonces $\mu((a, b]) = F(b) - F(a)$. Nuestro procedimiento será darle la vuelta a este proceso y construir una medida μ a partir de una función creciente continua por la derecha F. El caso especial $F(x) = x$ producirá la medida habitual de Lebesgue.

Los bloques de construcción de nuestra teoría serán los intervalos abiertos por la izquierda y cerrados por la derecha en $\mathbb{R}$, es decir, conjuntos de la forma $(a, b]$ o (a, ∞) o $\varnothing$, donde $-\infty \leq a < b < \infty$. En esta sección nos referiremos a tales conjuntos como intervalos semi-abiertos. Claramente, la intersección de dos intervalos semi-abiertos es un intervalo semi-abierto, y el complemento de un intervalo semi-abierto es un intervalo semi-abierto o la unión disjunta de dos intervalos semi-abiertos. La colección $\mathcal{A}$ de uniones disjuntas finitas de intervalos semi-abiertos es un álgebra, y la σ-álgebra generada por $\mathcal{A}$ es la σ-algebra de Borel $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

Proposición 3.6.2 Sea $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ creciente y continua por la derecha. Si $(a_j, b_j]$ $(j = 1, \ldots, n)$ son intervalos semi-abiertos disjuntos, sea

$$\mu_0 \left(\bigcup_1^n (a_j, b_j] \right) = \sum_1^n [F(b_j) - F(a_j)]$$

y sea $\mu_0(\varnothing) = 0$. Entonces μ_0 es una premedida en el álgebra $\mathcal{A}$.

Demostración. Primero debemos verificar que μ_0 esté bien definida, ya que los elementos de $\mathcal{A}$ se pueden representar en más de una forma como uniones disjuntas de intervalos semi-abiertos. Si $\{(a_j, b_j]\}_1^n$ son disjuntos y $\bigcup_1^n (a_j, b_j] = (a, b]$, entonces, quizás después de volver a etiquetar el índice j, debemos tener $a = a_1 < b_1 = a_2 < b_2 = \ldots < b_n = b$, entonces $\sum_1^n [F(b_j) - F(a_j)] = F(b) - F(a)$. Más generalmente, si $\{I_i\}_1^n$ y $\{J_j\}_1^m$ son dos familias finitas de intervalos semi-abiertos disjuntos tales que $\bigcup_1^n I_i = \bigcup_1^n J_j$:

$$\sum_i \mu_0(I_i) = \sum_{i,j} \mu_0(I_i \cap J_j) = \sum_j \mu_0(J_j).$$

Por lo tanto, μ_0 está bien definida y es finitamente aditiva por construcción. Queda por demostrar que si $\{I_j\}_1^{\infty}$ es una secuencia de intervalos semi-abiertos disjuntos con

$\bigcup_1^\infty I_j \in \mathcal{A}$ entonces $\mu_0\left(\bigcup_1^\infty I_j\right) = \sum_1^\infty \mu_0\left(I_j\right)$. Dado que $\bigcup_1^\infty I_j$ es una unión finita de intervalos semi-abiertos, la sucesión $\{I_j\}_1^\infty$ se puede dividir en un número finito de subsucesiones de modo que la unión de los intervalos en cada subsucesión sea un único intervalo semi-abierto. Al considerar cada subsucesión por separado y usar la aditividad finita de μ_0, podemos suponer que $\bigcup_1^\infty I_j$ es un intervalo semi-abierto $I = (a, b]$. En este caso, tenemos

$$\mu_0(I) = \mu_0\left(\bigcup_1^n I_j\right) + \mu_0\left(I \backslash \bigcup_1^n I_j\right) \geq \mu_0\left(\bigcup_1^n I_j\right) = \sum_1^n \mu_0\left(I_j\right).$$

Haciendo $n \to \infty$, obtenemos $\mu_0(I) \geq \sum_1^\infty \mu_0\left(I_j\right)$.

Para probar la desigualdad inversa, supongamos primero que a y b son finitos, y fijemos $\varepsilon > 0$. Como F es continua por la derecha, existe $\delta > 0$ tal que $F(a+\delta) - F(a) < \varepsilon$, y si $I_j = (a_j, b_j]$, para cada j existe $\delta_j > 0$ tal que $F\left(b_j + \delta_j\right) - F\left(b_j\right) < \varepsilon 2^{-j}$ Los intervalos abiertos $\left(a_j, b_j + \delta_j\right)$ cubren el conjunto compacto $[a + \delta, b]$, por lo que hay un sub-cubrimiento finito. Al descartar cualquier $\left(a_j, b_j + \delta_j\right)$ que esté contenido en uno más grande y reetiquetando el índice j, podemos suponer que

- los intervalos $\left(a_1, b_1 + \delta_1\right), \ldots, \left(a_N, b_N + \delta_N\right)$ cubren $[a + \delta, b]$,
- $b_j + \delta_j \in \left(a_{j+1}, b_{j+1} + \delta_{j+1}\right)$ para $j = 1, \ldots, N-1$.

Pero entonces

$$\begin{aligned}
\mu_0(I) &< F(b) - F(a+\delta) + \varepsilon \\
&\leq F\left(b_N + \delta_N\right) - F\left(a_1\right) + \varepsilon \\
&= F\left(b_N + \delta_N\right) - F\left(a_N\right) + \sum_1^{N-1}\left[F\left(a_{j+1}\right) - F\left(a_j\right)\right] + \varepsilon \\
&\leq F\left(b_N + \delta_N\right) - F\left(a_N\right) + \sum_1^{N-1}\left[F\left(b_j + \delta_j\right) - F\left(a_j\right)\right] + \varepsilon \\
&< \sum_1^N \left[F\left(b_j\right) + \varepsilon 2^{-j} - F\left(a_j\right)\right] + \varepsilon \\
&< \sum_1^\infty \mu\left(I_j\right) + 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Dado que ε es arbitrario, demostramos el resultado cuando a y b son finitos.

Si $a = -\infty$, para cualquier $M < \infty$ los intervalos $\left(a_j, b_j + \delta_j\right)$ cubren $[-M, b]$, por lo que el mismo razonamiento da $F(b) - F(-M) \leq \sum_1^\infty \mu_0\left(I_j\right) + 2\varepsilon$, mientras que si $b = \infty$, para cualquier $M < \infty$ obtenemos igualmente $F(M) - F(a) \leq \sum_1^\infty \mu_0\left(I_j\right) + 2\varepsilon$. El resultado deseado sigue entonces dejando $\varepsilon \to 0$ y $M \to \infty$. □

3.7 Integración en espacio de medida

Definición 3.7.10 (Funciones medibles) Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida. Una función $f : X \to \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ se llama *medible* si para todo $a \in \mathbb{R}$

$$f^{-1}([-\infty, a)) = \{x \in X \mid f(x) < a\}.$$

La mayoría de los resultados y definiciones establecidos en el contexto de la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$ se extienden si cambios al contexto de medidas abstractas. Enumeremos los más importantes.

- El concepto de propiedad válida en casi todo punto.
- Funciones simples. son funciones de la forma

$$\phi(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{E_k},$$

con $a_k \in \mathbb{R}$ y $E_k \in \mathcal{A}$, $k = 1, \ldots, n$.

Ejercicio 3.7.15 Demostrar que si $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ es medibles entonces si

- Integral de funciones medibles no-negativas.
- Teorema de Beppo-Levi.
- Lema Fatou.
- Teorema de la convergencia mayorada de Lebesgue