Espacios de funciones Clásicos

1. El espacio de funciones integrables

$$\mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1(E) = \{ f \mid f \text{ es integrable en } E \}.$$

$\mathcal{L}^1(E)$ es un espacio vectorial. Se define una relación de equivalencia en $\mathcal{L}^1(E)$.

$$f \sim g \iff f = g \text{ c.t.p. sobre } E$$

Abuso de notación: la clase de equivalencia de f, (f) se denota por f y $\mathcal{L}^1(E)/_\sim$ se denota por $L^1(E)$.

Definimos para $f \in \mathcal{L}^1(E)$

$$\|f\|_1 = \int_E |f(x)|\,dx.$$

$\| \ \|_1$ es una función no negativa sobre L^1E que cumple

N1) $\|f+g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$

N2) $\|\lambda f\|_1 = |\lambda|\,\|f\|_1$

N3) $\|f\|_1 = 0$ ssi $f = 0$

Así $(\mathcal{L}^1(E), \| \|_1)$ es un espacio normado.

se define

$$d(f,g) = \|f-g\|_1$$

Si un espacio normado es completo se llama espacio de Banach.

<u>Teorema 7.1</u> $\mathcal{L}^1(E)$ es un espacio de Banach.

Vamos usar el sgte ejercicio.

<u>Ejercicio</u> Sea $(X, \| \|)$ un espacio normado. $(X, \| \|)$ es espacio de Banach ssi cada vez que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$$

existe $x \in X$ tal que $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

Sea pues $f_i \in \mathcal{L}^1(E)$ tal que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|f_i\|_1 < +\infty.$$

Sea

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} |f_i(x)|.$$

$\Phi \in L^1(E)$ y, por lo tanto, Φ es finita en casi todo punto; por lo tanto la función

$$S(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)$$

está bien definida excepto sobre un conjunto de medida nula. Como $|S| \le \Phi$, $S \in L^1(E)$.

Ahora si

$$S_J(x) = \sum_{i=1}^{J} f_i(x).$$

Tenemos $S_J \to S$ c.t.p. y $|S_J - S| \le 2\Phi \in L^1(E)$

Por lo tanto por convergencia mayorada

$$\|S_J - S\|_1 = \int_E |S_J - S|\,dx \xrightarrow{J \to \infty} 0. \qquad \square$$

Ejemplo: Incompletitud de la Integral de Riemann. $\chi_{\mathbb{Q}}$, ...

Teorema Sea $f_i \in L^1(E)$ tal que $f_i \xrightarrow{L^1(E)} f$ entonces existe una subsucesión f_{n_k} tal que $f_{n_k} \to f$ c.t.p.

Dem. Por Chebyshev

$$m(\{|f(x)-f_i(x)|>\varepsilon\}) \le \frac{1}{\varepsilon}\int |f(x)-f_i(x)|\,dx \xrightarrow{i\to\infty} 0$$

Esto muestra que si $f_i \xrightarrow{L^1} f \Longrightarrow f_i \xrightarrow{m} f$.

Por lo tanto existe una subsucesión $f_{n_k} \to f$ c.t.p.

Conjuntos densos en $L^1(E)$

Teorema (Simples son densas) El conjunto de las funciones simples son densas en $L^1(E)$.

Dem: Sea $f \in L^1(E)$. Existe una sucesión f_i de funciones simples tal que $|f_i| \leq |f|$ y $f_i \to f$. Luego $f_i \in L^1(E)$ y $|f - f_i| \leq 2|f|$. Así por convergencia dominada $f_i \to f$ en L_1.

Vamos decir que φ es una función escalonada si $\varphi = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \chi_{I_i}$ con I_i intervalos.

Teorema (Escalonadas son densas en $L^1(\mathbb{R}^n)$) Bastaría ver que χ_{E_0} es límite de simples para cada $E_0 \subset E$, con $m(E_0) < \infty$. Pero se demostró que existe una sucesión A_k de elementales con

$$m(E_0 \triangle A_k) \to 0. \quad A_k = \bigcup_{j=1}^{N_k} I_j^k$$

Pero

$$m(E_0 \triangle A_k) = \int_E |\chi_E - \chi_{A_k}| \, dx = \int_E |\chi_E - \sum_{j=1}^{N_k} \chi_{I_j^k}|$$

Ejercicio Las funciones continua con soporte compacto son densas en $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Ejercicio $L^1(E)$ es separable.

2. Funciones esencialmente acotadas

La función medible f es esencialmente acotada sobre E si existe $M>0$ tal que:

(*) $|f(x)| \leq M$ c.t.p. de E.

M se llama cota esencial de f. Si f es esencialmente acotada sobre E denotamos por $\|f\|_\infty$ al ínfimo de los M que satisfacen (*).

Ejercicio. $\|f\|_\infty$ es cota esencial de f. y de hecho es la más chica.

Si f no es esencialmente acotada ponemos $\|f\|_\infty = \infty$.

Denotamos por $L^\infty(E)$ el conjunto de todas las funciones esencialmente acotadas

$\|f_j - f_k\|_\infty <$ ϵ_{jk}

Ejercicio a) $L^\infty(E)$ es espacio vectorial
b) $(L^\infty(E), \| \|)$ es un espacio de Banach.
c) Las funciones simples son densas en $L^\infty(E)$

Ejemplo Las funciones escaleras no son densas en $L^\infty(E)$. Por ejemplo si φ es escalera en $\mathbb{R}$ $\|\chi_{\mathbb{Q}} - \varphi\|_\infty \geq \frac{1}{2}$. Tomar abierto $G \supset \mathbb{Q}$ $|G| < \frac{1}{2}$

✓ med

$\|f_j - f_k\| \leq \|f_j - \varphi_k\| < \epsilon_{jk}$

Si $f \in L^1(E)$ y $g \in L^\infty(E)$ entonces $fg \in L^\infty(E)$

y

$$\int_E |fg| dx \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty.$$

Así está bien definida la función

$$l_g : L^1(E) \to \mathbb{R}$$
$$l_g(f) = \int_E f g \, dx.$$

l_g es lineal y verifica

$$|l_g(f)| \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty.$$

Diremos que una función lineal T de un espacio normado X en un espacio normado Y es acotada si existe un $M>0$ tal que

$$\|Tx\|_Y \leq M \|x\|_X.$$

Proposición T es acotada ssi T es continua.

$\Rightarrow$) Sea $\varepsilon > 0$ y sea $\delta = \varepsilon / M$ y $\|x-y\|_X \leq \delta$. Entonces

$$\|Tx - Ty\|_Y = \|T(x-y)\|_Y \leq M \|x-y\|_X < \varepsilon.$$

$\Leftarrow$) $T(0)=0$ y T es continua en cero. Luego existe $\delta>0$ tal que si

$$\|x\|_X < \delta \Rightarrow \|Tx\|_Y < 1.$$

Sea x cualquiera entonces $\left\| \frac{\delta}{2} \frac{x}{\|x\|_X} \right\|_X < \delta$ luego $\left\|T\left(\frac{\delta}{2}\frac{x}{\|x\|_X}\right)\right\|_Y < 1 \Rightarrow \|Tx\|_Y \leq \frac{2}{\delta}\|x\|_X.$

Al conjunto de todas las funciones lineales y acotadas entre X e Y las denotamos $L(X,Y)$

$L(X,Y)$ es espacio vectorial y podemos definir la norma

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| : \|x\| \leq 1\}$$
$$= \sup\{\|Tx\| : \|x\| = 1\} \quad \text{(Ejer)}$$
$$= \sup\left\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|} : x \in X\right\}$$
$$= \inf\{M : \|Tx\| \leq M\|x\| \ \forall x \in X\}$$

Ejercicio. Si Y es completo $L(X,Y)$ lo es.

Así $L(X,\mathbb{R})$ es un espacio de Banach que se llama dual de X y se denota por X^*.

Diremos que X e Y son isométricos si existe un isomorfismo $T: X \to Y$ tal que $\|Tx\|_Y = \|x\|_X$

Escribiremos $X \cong Y$.

Teorema $(L^1)^* \cong L^\infty$. (Comunmente se escribe, por abuso de notación, $(L^1)^* = L^\infty$.

Dem: Consideremos

$$\begin{aligned} l : L^\infty &\longrightarrow (L^1)^* \\ g &\longmapsto l_g \end{aligned}$$

Ahora

$$\|\ell(g)\|_{(L^1)^*} = \|\ell_g\|_{(L^1)^*} = \sup_{\|f\|_1=1} |\ell_g(f)| \leq \sup_{\|f\|_1=1} \|g\|_\infty \|f\|_1$$

$$= \|g\|_\infty$$

Sea ahora g no nula. Dado $\varepsilon>0$ tenemos

$$m(\{x \mid |g| > \|g\|_\infty - \varepsilon\}) > 0$$

Sea $A \in \{x \mid |g| > \|g\|_\infty - \varepsilon\}$ con $0<m(A)<\infty$

Tomgamos $f = \operatorname{sgn}(g) \frac{1}{m(A)} \chi_A$

Tenemos

$$\|\ell_g\|_{(L^1)^*} \geq \ell_g(f) = \int_E g \cdot f \, dx$$

$$= \frac{1}{m(A)} \int_A |g| \, dx \geq \|g\|_\infty - \varepsilon$$

Luego $\|\ell_g\|_{(L^1)^*} = \|g\|_\infty$

La otra parte la hacemos después.

9. $L^2(E)$

Denotamos por $L^2(E)$ al conjunto de todas las funciones medibles f sobre E tales que

$$\int_E |f|^2 \, dx < \infty$$

Si $f,g \in \mathcal{L}^2(E)$ entonces $f\cdot g \in \mathcal{L}^1(E)$ pues
$$f\cdot g \leq \frac{1}{2}(f^2+g^2)$$
Luego $(f+g)^2 \in \mathcal{L}^1(E)$ y esto nos dice que $\mathcal{L}^2(E)$ es espacio vectorial. Para $f,g \in \mathcal{L}^2(E)$ definimos:
$$(f,g) = \int_E f\, g\, dx$$
$(\,,\,)$ es un producto escalar o interno sobre $\mathcal{L}^2(E)$ esto es $(\,,\,)$ satisface

1) $(f, g+h) = (f,g) + (f,h)$
2) $(f,g) = (g,f)$.
3) $(f,f) \geq 0$
4) $(f,f) = 0$ ssi $f = 0$

Si ponemos $\|f\|_2 = (f,f)^{1/2}$ tenemos una norma y se satisface la desigualdad de Cauchy-Schwartz
$$(f,g) \leq \|f\|_2 \|g\|_2.$$
Un espacio vectorial H sobre el que se tiene definido un producto escalar $(\,,\,)$ que da origen a una norma que hace a H completo se llama espacio de Hilbert.

Teorema $L^2(E)$ es de Hilbert.

Dem Resta ver la completitud.

Sea f_n una sucesión de Cauchy.

Eg $\varepsilon > 0$. Tenemos

$$m(\{|f_n(x) - f_m(x)| > \varepsilon\}) \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\int |f_n(x) - f_m(x)|^2 dx$$

Así $\{f_n\}$ es fundamental en medida.
Por lo tanto existe f tal que $f_n \xrightarrow{m} f$
y existe n_k tal que $f_{n_k} \longrightarrow f$ c.t.p.
Hay que ver que $f \in L^2(E)$ y $f_n \to f$ en $L^2(E)$

Como $\{f_n\}$ es de Cauchy, está acotada
$\|f_n\|_2 \leq M$. Luego por Fatou.

$$\int_E |f|^2 dx \leq \liminf \int_E |f_{n_k}|^2 dx \leq M^2$$

Además por Fatou

$$\int_E |f_n - f|^2 dx \leq \liminf_{k \to \infty} \int_E |f_n - f_{n_k}|^2 dx$$

$$\leq \varepsilon. \quad \text{(si } n \text{ es grande)}$$

$\square$

Necesitamos algunos hechos sobre espacios de Hilbert

Teorema Sea H un espacio de Hilbert, M un subespacio cerrado de H y $x \in H$. Entonces existe $m \in M$ tal que

$$\|x-m\| \leq \|x-h\| \quad \forall h \in M$$

Dem. sea $m_k \in M$ tal que

$$\|x-m_k\| \leq d(x,M) + \frac{1}{k} = d + \frac{1}{k}$$

Dem. Utilizamos la igualdad del paralelogramo

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

sobre los vectores $x-m_k$.

$$\left\|\frac{x-m_k+x-m_j}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{x-m_k-(x-m_j)}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}\left(\|x-m_k\|^2 + \|x-m_j\|^2\right)$$

$$\left\|\frac{m_j-m_k}{2}\right\|^2 \leq \frac{1}{2}\left(d_k^2 + d_j^2\right) - d^2 \xrightarrow{k,j\to\infty} 0$$

Luego $\{m_j\}$ es una sucesión de Cauchy de allí $m_j \to m$ y m satisface lo pedido $\square$

Definición m se llama la proyección de x sobre M. Se denota $P_M(x)$

Teorema Sean H y M como antes entonces son equivalentes

1) $m = P_M(x)$
2) $x-m \perp M$ (Esto es $\langle x-m, h\rangle = 0 \ \forall h \in M$).

Dem: (1) ⇒ (2) sea $h \in M$. Entonces

$$\|x-(m+\lambda h)\|^2 \geq \|x-m\|^2.$$

$$\|x-m\|^2 - 2\lambda\,(x-m, h) + \lambda^2\|h\|^2 \geq \cancel{\|x-m\|^2}$$

De esto se deduce $(x-m, h) \geq 0$. Luego como esto vale para $-h$ se concluye (2)

(2) ⇒ (1). Sea $h \in M$.

$$\|x-m\|^2 = (x-m, x-m) = (x-m, x-h) \leq \|x-m\|\|x-h\|. \quad \square$$

Si $v \in H$ entonces $l_v : H \to \mathbb{R}$ definido por $l_v(u) = (u, v)$ satisface $l_v \in H^*$.

Teorema (Representación de Riez) La aplicación $v \to l_v$ es una isometría suryectiva de H en H^*.

Dem. se tiene

$$\|l_v\| = \sup_{\|u\| \leq 1} l_v(u) = \sup_{\|v\| \leq 1} (u, v) \leq \|v\|.$$

Además

$$\|l_v\| \geq \|l_v\left(\frac{v}{\|v\|}\right)\| = \|v\|$$

Claramente l es lineal.
Restaría ver que es suryectiva. Sea $l \in H^*$ y supondremos que $l \neq 0$. Definimos

$$M = \{x \in H : l(x) = 0\}$$

Como l es lineal y continua, N es un subespacio cerrado y $N \neq H$. Sea $y_0 \notin N$. Existe $x \in N$ tal que $y := y_0 - x \perp N$. Podemos suponer $\|y\| = 1$. Sea $x \in H$

$$x = \left(x - \frac{l(x)}{l(y)} y\right) + \frac{l(x)}{l(y)} y =: u + \alpha y$$

Notar que $u \in N$. Sea $v = l(y) \cdot y$. Entonces

$$l(\alpha y) = (\alpha y, v).$$

Si $x \in N$ entonces $(v, x) = 0$. Luego $\forall x \in H$

$$l(x) = l(u) + l(\alpha y) = (u, v) + (\alpha y, v) = (x, v). \quad \square$$

Vamos a completar la demostración de $(L^1)^* = L^\infty$

Sea $l \in (L^1)^*$. Supongamos que $m(E) < \infty$.

Por Cauchy-Schwarz:

$$|l(f)| \leq \|l\| \, \|f\|_1 = \|l\| \int_E |f| \, dx \leq \|l\| \, [m(E)]^{\frac{1}{2}} \|f\|_2.$$

si $f \in L^2$. Entonces l define un elemento de $(L^2)^*$

Entonces $\exists g \in L^2(E)$ con

$$l(f) = \int_E f g \, dx = l_g(f) \quad \forall f \in L^2(E)$$

Como l es lineal y continua

$$\int_E |f g| \, dx \leq \|l\| \, \|f\|_1 \qquad \forall f \in L^2(E)$$

Si $f \in L^1$ ponemos $f_n = \min\{n, |f|\}$ se tiene $f_n \in L^2$.

$f_n \nearrow |f|$ Luego por B-L.

$$\int_E |f||g|\,dx \leq \lim_{n\to\infty} \int_E f_n |g| \leq \lim_{n\to\infty} \|\ell\| \|f_n\|_1 =$$

$$= \|\ell\| \|f\|_1$$

Por el Lema de abajo $g \in L^\infty(E)$

Como $L^2 \cap L^1$ es denso en L^1 tenemos $\ell = \ell_g$ en L^1.

Si $m(E) = \infty$, escribimos $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ con $m(E_k) < \infty$ y $E_k \cap E_j = \phi$ si $k \neq j$. □

Lema Si

$$\int_E |fg| < \infty$$

para toda $f \in L^1$ entonces $g \in L^\infty$.

Dem Supongamos $g \notin L^\infty$. Sea A_i tal que $0 < m(A_i) < \infty$ y

$$A_i \subset \{x : 2^i < |g(x)|\}$$

y sea

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i m(A_i)} \chi_{A_i}$$

Se nota que $|fg| \notin L^1$. □

Los espacios $\mathcal{L}^p$

Dado E medible, $1 \leq p < \infty$ y $f: E \to \mathbb{R}$ medible definimos

$$\|f\|_p = \left\{ \int_E |f(x)|^p dx \right\}^{1/p}$$

Las funciones que verifican $\|f\|_p < \infty$ forman la clase $\mathcal{L}^p(E)$.

$\mathcal{L}^p(E)$ es un espacio normado con $\| \ \|_p$ como norma. Demostremos la desigualdad triángular.

Supondremos que $\|f\|_p, \|g\|_p > 0$. Como t^p es convexa para $1 \leq p < \infty$.

$$\left(\frac{|f(x)| + |g(x)|}{\|f\|_p + \|g\|_p} \right)^p \leq \frac{\|f\|_p}{\|f\|_p + \|g\|_p} \cdot \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{\|g\|_p}{\|f\|_p + \|g\|_p} \cdot \frac{|g(x)|^p}{\|g\|_p^p}$$

Integrando obtenemos:

$$\int_E \left(\frac{|f(x)| + |g(x)|}{\|f\|_p + \|g\|_p} \right)^p dx \leq 1.$$

Despejando se deduce la desigualdad triángular también llamada de Minkowski

Ejercicio: $\mathcal{L}^p(E)$ es Banach.

Lema Sea $1 < p < \infty$ y q tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
q se llama exponente conjugado de p y satisface $1 < q < \infty$.

Si $a,b\geq 0$ se cumple

$$a\cdot b\leq \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$$

<u>Dem</u>

$$a.b = e^{\ln a}e^{\ln b} = e^{\frac{\ln a^p}{p}}e^{\frac{\ln b^q}{q}} = e^{\frac{\ln a^p}{p}+\frac{\ln b^q}{q}}$$

$$(\text{convexidad de } e^x) \leq \frac{1}{p}e^{\ln a^p}+\frac{1}{q}e^{\ln b^q} = \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}.$$

Si ahora $f\in \mathcal{L}^p$ y $g\in \mathcal{L}^q$, reemplazamos a por $|f(x)|/\|f\|_p$ y b por $|g(x)|/\|g\|_q$ e integramos:

$$\int_E \frac{|f(x)|}{\|f\|_p}\frac{|g(x)|}{\|g\|_q}dx \leq \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1.$$

Deducimos que $f\cdot g\in \mathcal{L}^1(E)$ y que

$$\int_E fg\,dx \leq \|f\|_p\|g\|_q \quad \text{(Desigualdad de Hölder)}$$

Otra desigualdad importante es

<u>Lema</u> (Desigualdad de Jensen) Sea $f\in \mathcal{L}^1(E)$, $0<m(E)<\infty$ y $\varphi: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ convexa. Entonces

$$\varphi\left(\frac{1}{\mu(E)}\int_E f(x)\,dx\right) \leq \frac{1}{\mu(E)}\int_E \varphi(f)\,dx.$$

Dem como φ es convexa, para todo $x_0 \in \mathbb{R}$ existe a en $\mathbb{R}$ tal que

$$\varphi(x) \geq \varphi(x_0) + a(x - x_0).$$

Luego tenemos

$$\frac{1}{\mu(E)}\int_E \varphi(f)\,dx \geq \frac{1}{\mu(E)}\int_E \varphi(x_0) + a(f(x) - x_0)\,dx$$

$$= \varphi(x_0) + a\frac{1}{\mu(E)}\int_E f(x)\,dx - a x_0$$

Si tomamos $x_0 = \frac{1}{\mu(E)}\int_E f(x)\,dx$ queda $\square$

Teorema sea f medible sobre E y $1 \leq p < \infty$.

Entonces.

1) Si $f \in L^p$, entonces

$$\|f\|_p = \sup_g \int_E f g\,dx.$$

donde el supremo se toma sobre las g con $\|g\|_q \leq 1$

2) Si el supremo es finito, $f \in L^p$ y vale la fórmula.

Dem Analizamos el caso $1<p<\infty$; el caso $p=\infty$ ya fue analizado.

Por Hölder

$$\sup_{\|g\|_q\leq 1}\int_E fg\,dx \leq \|f\|_p$$

Supongamos $f\neq 0$. Si $f=0$ es trivial.

pongamos $g=\operatorname{sgn} f\,\dfrac{|f|^{p-1}}{\|f\|_p^{p-1}}$

Entonces $g\in L^q$, $\|g\|_q\leq 1$ y

$$\int_E fg\,dx = \|f\|_p$$

2) Supongamos $\|f\|_p=\infty$. con $f\geq 0$ Definimos

$$f_k(x)=\begin{cases}0 & \text{si } |x|>k\\ \min\{f(x),k\} & \text{si } |x|\leq k\end{cases}$$

$f_k\in L_p$ y por Beppo-Levi $\|f_k\|_p\nearrow\|f\|_p=\infty$

Sea $g_k\in L^q$, con $\|g_k\|_q=1$ y

$$\int_E f_k g_k\,dx = \|f_k\|_p$$

Luego

$$\sup_{\|g\|_q\leq 1}\int_E fg\,dx \geq \int_E f g_k\,dx \geq \int_E f_k g_k\,dx = \|f_k\|_p \nearrow +\infty$$

$\square$

Notar que si $g \in L^q$ entonces

$$\ell_g : L^p \to \mathbb{R}$$
$$f \mapsto \int_E fg\,dx.$$

es una funcional lineal acotada.

<u>Teorema</u> (Representación de Riesz) $\left[L^p(E)\right]^* = L^q(E)$

<u>La función maximal de Hardy y Littlewood y el teorema de diferenciación de Lebesgue</u>

1. <u>Un lema de cubrimiento</u>.

<u>Lema</u> Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ medible y supongamos que E es cubierto por una unión de bolas $\{B_i\}_{i \in I}$ de diámetro acotado. Entonces existe una subfamilia de bolas $B_1, B_2, \ldots,$ de la flía dada, tal que: $B_{k_1} \cap B_{k_2} = \phi \quad k_1 \neq k_2$

$$\sum_k m(B_k) \geq C\, m(E)$$

C depende de la dimensión n, 5^{-n} funciona.

<u>Dem</u>. Sea B_1 tal que

$$\operatorname{diam} B_1 \geq \frac{1}{2} \sup_{i \in I} \operatorname{diam} B_i$$

supuesto que hemos elegido B_k elegimos B_{k+1} de modo que $\operatorname{diam} B_{k+1} \geq \frac{1}{2} \operatorname{diam} B_i$ para toda B_i que