

## CORRESPONDE A LA RESOLUCIÓN N° 480/14

### ANEXO I

**DEPARTAMENTO:** Matemática.

**ACTIVIDAD CURRICULAR:** Teoría de la Medida.

**CARRERA Y PLAN:** Lic. en Matemática Plan de Estudios RCS 133/15.

**CURSO:** Cuarto Año

**REGIMEN:** Cuatrimestral

**CARGA HORARIA SEMANAL:** Teóricos 4hs, Prácticos 4hs.

**CARGA HORARIA TOTAL:** Teóricos 60hs, Prácticos 60hs.

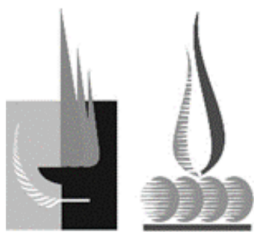
**CICLO LECTIVO:** 2022

**EQUIPO DOCENTE:**

	Nombre	Cargo	Dedicación	Caracter
Teórico	Fernando Mazzone	Prof. Titular	Simple	Regular
Práctico	Fernando Mazzone	Prof. Titular	Simple	Regular

### FUNDAMENTACIÓN:

- **Importancia Matemática de los Contenidos Seleccionados.** Desde la antigüedad diversos pensadores buscaron dar un sentido matemático preciso a las nociones de longitud, área, etc. En la actualidad se sabe que la noción de medida que es matemáticamente satisfactoria por diversas cuestiones es la medida de Lebesgue. Una vez introducida la medida de Lebesgue es sencillo definir la integral homónima. La integral de Lebesgue es una pieza clave donde se asientan muchas otras contrucciones del saber matemático, por ejemplo los espacios de funciones, que son de una importancia clave a la hora de mostrar que problemas relacionados con ecuaciones diferenciales tienen solución. La integral de Lebesgue nos proporciona un instrumento preciso para manipular determinadas expresiones, principalmente por su capacidad de interactuar con otro concepto central del análisis. Nos referimos al concepto *límite* en sus múltiples manifestaciones: sucesiones, series, derivadas, etc. El concepto de medida mostro además ser fecundo a la hora de introducir nuevos conceptos como derivadas débiles, soluciones débiles y distribuciones. La introducción en la problemática de la teoría de la medida e integración forma parte de la curricula obligatoria de casi todas las carreras de Lic. en Matemática del país.
- **Contextualización del estudiante.** Los contenidos han sido elegidos de modo de atender las características que presentan los estudiantes. Por este motivo se incluyen y desarrollan conceptos como cardinalidad, Teorema de



Heine-Borel y funciones uniformemente continuas, integral de Riemann, entre otros. Suele ocurrir que estos temas, a pesar de haber sido estudiados por el alumno, han sido olvidados por el alumno. En este sentido es de destacar que un número importante de estudiantes suelen ser alumnos recibidos del profesorado en matemática, que luego de completar esta carrera continúan con la Lic. en Matemática. Generalmente este tipo de alumno cursó las asignaturas donde fue introducido a los prerequisites de Teoría de la Medida mencionados arriba varios años antes.

- **Enfoque metodológico en la enseñanza.** Una de las principales dificultades en la enseñanza de la medida e integral de Lebesgue se puede apreciar cuando se toma dimensión histórica de este concepto. Este instrumento matemático fue elaborado por sucesivas aproximaciones en el lapso de los dos milenios que median entre el método de exhaustión de los antiguos griegos y las obras de Henri Lebesgue *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives* (1904) y *Leçons sur les séries trigonométriques* (1906). Tiene origen en varias problemáticas que preocupan a los matemáticos, particularmente la convergencia de las series de Fourier y la caracterización de las funciones integrables Riemann.

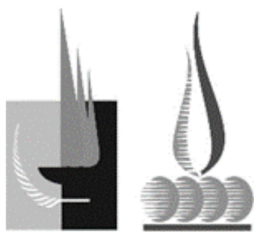
Somos de la opinión que un elemento importante para prestar atención en el proceso de enseñanza-aprendizaje es la cuestión del sentido. El alumno debe percibir que el concepto que se le pretende enseñar tiene un sentido y razón de ser. Por este motivo, nos parece importante que además de exponer los aspectos lógicos y formales que fundamentan las nociones de esta materia debemos preocuparnos por aquellos elementos que motivan su existencia.

Adherimos a I. Kleiner en *Excursions in the History of Mathematics*, cuando dice:

«La enseñanza del cálculo, qué debe enseñarse y cómo debe enseñarse, es un tema bajo debate continuo...»

«Como señalamos anteriormente, el cálculo involucra algoritmos, teoría y aplicaciones. En cierto punto, entonces, los estudiantes deben estar expuestos a su poder técnico, su armonía lógica y su utilidad. El cálculo es también la respuesta a una búsqueda de 2000 años para describir la continuidad y la variabilidad; es un logro intelectual enorme. El espíritu de estos pensamientos debe animar nuestra enseñanza del tema, las ideas centrales deben destacar entre los cientos de fórmulas y técnicas.»

«Hilbert observó que cada teoría matemática pasa por tres períodos de desarrollo: lo ingenuo, lo formal y lo crítico. En el caso

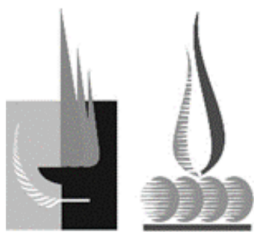


del cálculo, el período ingenuo ocurrió en el siglo XVII, el formal en el siglo XVIII, y la crítica en el XIX. La evolución de una idea matemática a menudo procede en cuatro etapas: descubrimiento (o invención), uso, comprensión y justificación. Es importante mantener el orden de estas etapas en mente al discutir cualquier concepto o teoría.»

La temática de la enseñanza del análisis matemático tomado en consideración la evolución histórica del mismo ha recido atención en la bibliografía reciente, en especial de habla inglesa, por ejemplo en [Bressoud, 2008, Hawkins, 2001, Bressoud, 2007, Abbott, 2002, Hairer and Wanner, 2008].

#### **OBJETIVOS Y/O ALCANCES DE LA ASIGNATURA:**

- Hacer un examen crítico de la integral de Riemann, precisar sus alcances y límites
- Introducir a los alumnos a las nociones de medida e integral de Lebesgue.
- Percibir la potencia instrumental de la integral de Lebesgue por sobre la integral de Riemann.
- Desarrollar el pensamiento analítico tendiente a justificar con rigor matemático.
- Desarrollar la capacidad de resolver problemas.
- Incentivar el espíritu crítico, entendiéndolo por esto la capacidad de analizar un razonamiento formal, de preguntarse por la razón de ser de una teoría y de interpelarnos sobre creencias arraigadas en nuestro pensamiento.



## CORRESPONDE A LA RESOLUCIÓN N° 480/14

### ANEXO II

**ASIGNATURA:** Teoría de la Medida

**CICLO LECTIVO:** 2022

**PROGRAMA ANALÍTICO**

**Unidad 1. Preliminares** Cardinalidad. Conjuntos numerables. Potencia del continuo. Topología en los espacios Euclideos  $\mathbb{R}^n$ . Completitud. Supremo e ínfimo. Compacidad, Teoremas de Bolzano-Weierstrass y Heine-Borel.

**Unidad 2. La integral de Riemann** Sumas superiores e inferiores de de Darboux. Funciones Integrables Riemann. Ejemplos de función no integrable Riemann. Diversos ejemplos de funciones integrables Riemann discontinuas sobre conjuntos densos. Criterio de integrabilidad de Riemann. Contenido exterior de conjuntos. Criterio de integrabilidad de Hankel.

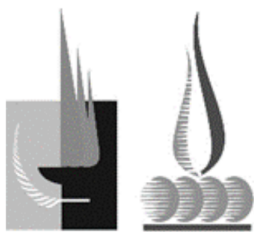
**Unidad 3. Medida de Lebesgue** Medida de conjuntos elementales. Medida exterior. Conjuntos medibles. Conjuntos de Borel. Estructura conjuntos medibles. Conjunto de Vitali. Conjunto de Cantor. Criterio de Lebesgue para la integrabilidad Riemann.

**Unidad 4. Funciones medibles** Definición y propiedades elementales. Medibilidad y continuidad. Propiedades verdaderas en casi todo punto. Sucesiones de funciones medibles. Aproximación por funciones simples. Teoremas de Egorov y Lusin. Función de Cantor.

**Unidad 5. Integral de Lebesgue** La integral de Lebesgue para funciones medibles no-negativas. Definición y propiedades elementales. Teorema de Beppo-Levi. Lema de Fatou. La integral de Lebesgue para una función medible. Teorema de la convergencia mayorada. La integral de Lebesgue y la integral de Riemann.

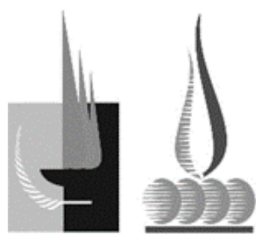
**Unidad 6. Medidas abstractas**  $\sigma$ -álgebras y clases monótonas. Definición de espacio de medida. Espacios de Probabilidad. Medida exterior. Conjunto medible en el sentido de Carathéodory. Premedidas. Medida exterior inducida por una premedida. Funciones de variación acotada. Medida de Lebesgue-Stieltjes. Integración en un espacio de medida.

**Unidad 7. Medida producto** Rectángulos medibles. Premedida sobre rectángulos medibles. Teorema de existencia de la medida producto. Secciones. Teorema de Tonelli y Teorema de Fubini.



**Unidad 8. Espacios  $L^p$**  Espacios  $L^p$ . Desigualdad de Hölder. Desigualdad de Cauchy-Schwartz. Teorema de representación de Riesz.

**Observación:** En el Plan de Estudios (RCS 133/15) dentro de los contenidos mínimos de la asignatura figura "Teoría abstracta de la diferenciación". Creo que hay evidencia concluyente de que dicha inclusión es un error de tipeo y lo que se quiso escribir es "Teoría abstracta de la integración". Entre las evidencias, está el hecho de que el tema continua a "Medidas Abstractas" y el tema que lógicamente le seguiría es el de integral respecto a esas medidas. Además no hay en la bibliografía, al menos en aquella de la temática y del nivel adecuados para la materia, un desarrollo de una "Teoría abstracta de la diferenciación". Existen nociones de derivadas débiles y en el sentido de las distribuciones que incorporan una noción de derivada mucho mas laxa que la tradicional, que involucra entes que podemos pensar que son más abstractos. Sin embargo estas teorías tampoco es costumbre denominarlas "Teoría abstracta de la diferenciación".



## CORRESPONDE A LA RESOLUCIÓN N° 480/14

### ANEXO III

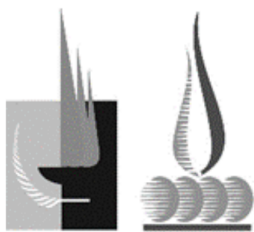
**ASIGNATURA:** Teoría de la Medida

**CICLO LECTIVO:** 2022

**BIBLIOGRAFÍA**

### Referencias

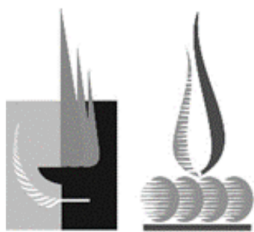
- [Abbott, 2002] Abbott, S. (2002). *Understanding Analysis*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer New York.
- [Acinas, 2019] Acinas, S. y Mazzone, F. (2019). Introducción al análisis matemático. En preparación, no publicado.
- [Bartle, 2014] Bartle, R. (2014). *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*. Wiley Classics Library. Wiley.
- [Bressoud, 2007] Bressoud, D. (2007). *A Radical Approach to Real Analysis*. Classroom Resource Materials. Mathematical Association of America.
- [Bressoud, 2008] Bressoud, D. (2008). *A Radical Approach to Lebesgue's Theory of Integration*. Classroom resource materials. Cambridge University Press.
- [Fava and Zo, 1996] Fava, N. and Zo, F. (1996). *Medida e integral de Lebesgue*. Colección Textos Universitarios. Instituto Argentino de Matemática.
- [Hairer and Wanner, 2008] Hairer, E. and Wanner, G. (2008). *Analysis by Its History*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer New York.
- [Hawkins, 2001] Hawkins, T. (2001). *Lebesgue's Theory of Integration: Its Origins and Development: Its Origins and Development*. Ams Chelsea Publishing Series. American Mathematical Society.
- [Jones, 2001] Jones, F. (2001). *Lebesgue Integration on Euclidean Space*. Jones and Bartlett books in mathematics. Jones and Bartlett.
- [Ovchinnikov, 2014] Ovchinnikov, S. (2014). *Measure, Integral, Derivative: A Course on Lebesgue's Theory*. Universitext. Springer New York.
- [Stein and Shakarchi, 2009] Stein, E. and Shakarchi, R. (2009). *Real Analysis: Measure Theory, Integration, and Hilbert Spaces*. Princeton University Press.



---

[Stillwell, 2013] Stillwell, J. (2013). *The Real Numbers: An Introduction to Set Theory and Analysis*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer International Publishing.

[Tao, 2011] Tao, T. (2011). *An Introduction to Measure Theory*. Graduate studies in mathematics. American Mathematical Society.



## CORRESPONDE A LA RESOLUCIÓN N° 480/14

### ANEXO IV

**ASIGNATURA:** Teoría de la Medida

**CICLO LECTIVO:** 2022 PROGRAMA TRABAJOS PRÁCTICOS:

Habrà un trabajo práctico por cada unidad del programa analítico. En las guías de trabajos prácticos se propondrán ejercicios al alumno que mayormente consistirán en demostraciones de enunciados teóricos. Se espera fortalecer el pensamiento lógico-deductivo en el área del análisis matemático y a su vez que el/la alumno/a genere estrategias para resolver problemas en matemática pura.

**Trabajo Práctico No 1.** En este trabajo práctico se abordarán los temas de la Unidad 1. Se espera que el/la alumno/a comprenda las nociones de cardinalidad, numerabilidad, no numerabilidad e incorpore metodologías de pensamiento que incluyan estas nociones. Los demás temas de la Unidad 1, relacionados con nociones topológicas, serán expuestos en carácter de repaso y para referencia posterior en la materia, no tendrán actividades prácticas asociadas.

**Trabajo Práctico No 2.** En este trabajo práctico se abordarán los temas de la Unidad 2. Se espera que el/la alumno/a comprenda la noción de función integrable Riemann, sus alcances y limitaciones. El tema está pensado como disparador de la medida e integral de Lebesgue.

**Trabajo Práctico No 3.** En este trabajo práctico se abordarán los temas de la Unidad 3. Se espera que el/la alumno/a comprenda la noción de medida de Lebesgue, de conjunto medible Lebesgue y Borel. También que adquiera destreza en los argumentos típicos en esta área de la matemática, por ejemplo argumentos de aproximación por conjuntos elementales, argumentos que apelan a la estructura de  $\sigma$ -álgebra, por nombrar algunos.

**Trabajo Práctico No 4.** En este trabajo práctico se abordarán los temas de la Unidad 4. Se espera que el/la alumno/a logre las competencias necesarias para discernir la medibilidad de funciones y para operar con las mismas.

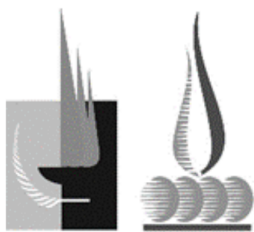
**Trabajo Práctico N° 5.** En este trabajo práctico se abordarán los temas de la Unidad 5. Se espera que el/la alumno/a alcance los conocimientos teóricos-metodológicos que le permitan operar con fluidez con la integral de Lebesgue.

**Trabajo Práctico N° 6.** En este trabajo práctico se abordarán los temas de la Unidad 6. Se espera que el/la alumno/a comprenda la pertinencia de elaborar la noción abstracta de medida, la utilidad que esta noción tiene y que disponga de una variedad de ejemplos de este concepto.

**Trabajo Práctico No 7.** En este trabajo práctico se abordarán los temas de la Unidad 7. El objetivo es aprender a usar correctamente el Teorema de Fubini-Tonelli.

**Trabajo Práctico N° 8.** En este trabajo práctico se abordarán los temas de la Unidad 8. El objetivo es introducir al/la alumno/a a los espacios  $L^p$  y enseñarle metodología para resolver problemas teóricos en ese contexto.



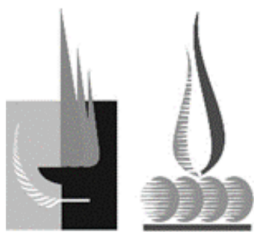


## **CORRESPONDE A LA RESOLUCIÓN N° 480/14**

### **ANEXO V**

ACTIVIDADES ESPECIALES

No previstas.



## **CORRESPONDE A LA RESOLUCIÓN N° 480/14**

### **ANEXO VI**

#### **PROGRAMA DE EXAMEN:**

Se evaluará la capacidad práctica y el dominio teórico de todos los contenidos del programa analítico. Durante la cursada se evaluará la capacidad del alumno de resolver problemas y ejercicios a través de dos exámenes parciales domiciliarios y personalizados. Acorde a la Res. CD. FCEyN 366/17, el alumno dispondrá de una instancia de recuperación por cada uno de estos exámenes.

El examen final consistirá en la evaluación del grado de apropiación por parte del alumno de los aspectos teóricos.

.....  
Dr. Fernando Mazzone