

Depto de Matemática.  
Primer Cuatrimestre de 2022  
Teoría de la Medida  
Práctica 2: Integral de Riemann

## 0.1 Práctica II: Integral de Riemann

**Ejercicio 1.** Obtener la fórmula del área de:

1. rectángulos con lados enteros, racionales e irracionales;
2. paralelogramos;
3. triángulos;
4. trapecios;
5. polígonos regulares.

**Ejercicio 2.** Explicar por qué si  $P$  y  $Q$  son particiones del mismo intervalo y  $Q$  es un refinamiento de  $P$  ( $Q \supseteq P$ ) y si  $f$  es cualquier función acotada sobre el intervalo, entonces

$$\underline{S}(P; f) \leq \underline{S}(Q; f) \leq \overline{S}(Q; f) \leq \overline{S}(P; f)$$

**EN EL APUNTE: Ejercicio 3.** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada y  $P, P'$  particiones de  $[a, b]$  con  $P \subset P'$ . Demostrar que

$$\underline{S}(P, f) \leq \underline{S}(P', f) \quad \text{y} \quad \overline{S}(P', f) \leq \overline{S}(P, f).$$

Inferir que para cualesquiera  $P, P'$  (sin importar que una este o no contenida dentro de la otra)

$$\underline{S}(P, f) \leq \overline{S}(P, f).$$

**Ejercicio 4.** Considerar la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ x & 0 < x < 1 \\ 0 & x = 1, \end{cases} \quad (1)$$

y la partición  $P = \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}$  de  $(0, 1)$ .

Hallar las sumas inferior y superior de Darboux  $\underline{S}(P; f)$  y  $\overline{S}(P; f)$ .

**Ejercicio 5.** Usando la función  $f$  definida por (1) y  $\epsilon = \frac{1}{2}$ , encontrar  $\delta > 0$  tal que para cualquier partición  $P$  en intervalos de longitud menor que  $\delta$ , la diferencia entre  $\overline{S}(P; f)$  y  $\underline{S}(P; f)$  sea menor que  $\frac{1}{2}$ .

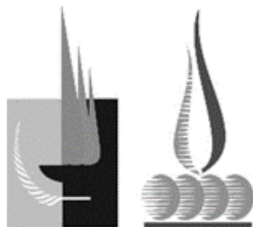
**Ejercicio 6.** Considerar la función

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n-1}} \left\lfloor \frac{2^n x + 1}{2} \right\rfloor \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (2)$$

donde  $\lfloor \alpha \rfloor$  denota el mayor entero menor o igual a  $\alpha$ .

Mostrar que la serie converge para todo  $x \in [0, 1]$ , que la función  $g(x)$  es monótona creciente, que  $g(0) = 0$  y  $g(1) = 1$ .

Encontrar todos los puntos en los cuales la función  $g$  es discontinua y en estos puntos calcular la diferencia entre los límites laterales.



**Ejercicio 7.** Mostrar que la función  $g$  definida en (2) es integrable de Riemann sobre  $[0, 1]$ .

**Ejercicio 8.** Hallar el valor de  $\int_0^1 g(x) dx$  siendo  $g$  la función definida por (2). Indicar claramente los motivos que llevan a su conclusión.

**Ejercicio 9.** Encontrar todos los valores positivos de  $\alpha$  para los cuales la integral impropia

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{|x|^\alpha} dx$$

tiene un valor. Explicar las razones que conducen a su conclusión.

**Ejercicio 10.** Probar que  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{((nx))}{n^2}$  converge uniformemente, siendo

$$((x)) = \begin{cases} x - [x], & [x] \leq x < [x] + \frac{1}{2} \\ 0 & x = [x] + \frac{1}{2} \\ x - [x] - 1 & [x] + \frac{1}{2} < x < [x] + 1. \end{cases}$$

**Ejercicio 11.** Probar que  $f$  es continua en  $c$  si y sólo si la oscilación de  $f$  en el punto  $c$  es cero.

**EN EL APUNTE:**

$f$  es continua en  $x$  si y solo si  $w(f; x) = 0$ .

**Ejercicio 12.** Sea  $f$  definida por  $f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)$  si  $x \neq 0$  y  $f(0) = 0$ . ¿Cuál es la oscilación de  $f$  en 0? Justificar su respuesta.

**Ejercicio 13.** Hallar la oscilación en  $x = \frac{1}{3}$  de la función

$$g(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \\ -x & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Justificar la respuesta.

**Ejercicio 14.** Usando sumas de Darboux y **Python** ????, aproximar:

1.  $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$  y comparar con  $\ln(2)$ ;
2.  $\int_{-1}^1 x^2 dx$ .  
¿A qué parecen aproximarse las sumas inferiores y superiores?
3.  $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$   
¿Por qué el resultado puede usarse para aproximar  $\pi$ ?

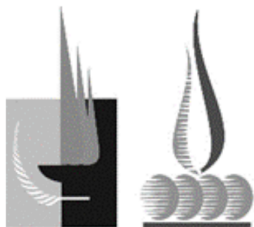
**Ejercicio 15.** Usando sumas de Darboux obtener:

1.  $\int_a^b x^2 dx$ ;
2.  $\int_a^b \cos x dx$ ;
3.  $\int_a^b \frac{1}{x} dx = \ln b - \ln a$ .

**EN EL APUNTE:**

**Ejercicio 16.** Sea  $0 \leq a < b$  veamos que

$$\int_a^b x^2 dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}.$$



Ayuda: Usar particiones uniformes y la fórmula  $\sum_{i=1}^n n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$ .

**Ejercicio 17.** Sea  $0 \leq a < b$  y  $n$  un entero negativo, veamos que

$$\int_a^b x^n dx = \begin{cases} \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1} & \text{si } n \neq -1 \\ \ln(b) - \ln(a) & \text{si } n = -1 \end{cases}$$

**Ejercicio 18.** Sea  $0 \leq a < b \leq \pi$ , veamos que

$$\int_a^b x dx = -(\cos(b) - \cos(a)).$$

**Ejercicio 19.** Sea  $n(x) = \begin{cases} 1 & x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}. \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$

Probar que  $n$  es integrable sobre  $[0, 1]$  y que  $\int n(x) dx = 0$ .

**Ejercicio 20.** Sea  $p(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \frac{1}{x} - \lfloor \frac{1}{x} \rfloor & \text{en otro caso} \end{cases}$

Probar que  $p$  es integrable sobre  $[0, 1]$ .

**Ejercicio 21.** Hallar el contenido exterior de los siguientes conjuntos:

1.  $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ ;
2.  $[0, 1] - \mathbb{Q}$ ;
3.  $\left\{ \frac{n}{n+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$ ;
4.  $\left\{ \frac{2k-1}{2^n} \mid n \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq 2^{n-1} \right\}$ ;
5.  $\left\{ \frac{k}{n} \mid n \in \mathbb{N}, k = 1, 2 \text{ ó } 3 \right\}$ ;
6.  $(0, 1) \cup (3, 4)$ ;
7.  $\bigcup_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1} \right)$ .

**Ejercicio 22.** Probar que si  $S$  tiene contenido exterior 0 y  $T$  es cualquier conjunto acotado, entonces

$$c_e(S \cup T) = c_e(T)$$

donde  $c_e$  se lee como *contenido exterior*.