Teoría de la medida

①

$\mathbb{R}^d$ espacio euclideo dimensión d.

$x \in \mathbb{R}^d \Rightarrow x = (x_1, \ldots, x_d)$, $x_i \in \mathbb{R}$

$|x| = (x_1^2 + \cdots + x_d^2)^{1/2}$ norma de x

$d(x,y) = |x-y|$ distancia x a y

Si $E \subset \mathbb{R}^d$: $E^c = \{x : x \notin E\}$. complemento

Si $E, F \subset \mathbb{R}^d$.

$$E - F = E \cap F^c = \{x : x \in E,\ x \notin F\}$$

$$d(E,F) = \inf\{d(x,y) : x \in E, y \in F\}$$

Si $E \subset \mathbb{R}^d$, $\operatorname{diam}(E) = \sup\{d(x,y) \mid x,y \in E\}$

$B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^d : d(x,y) < r\}$ bola abierta de centro x y radio r.

$E \subset \mathbb{R}^d$ es abierto si $\forall x \in E\ \exists r > 0$ $B(x,r) \subset E$

$F \in \mathbb{R}^d$ es cerrado ssi F^c es abierto

- Si $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ son abiertos $\Longrightarrow$

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda \text{ es abierto}$$

- Si Λ es finito

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda \text{ es abierto}$$

Con cerrados pasa lo mismo cambiando uniones $\longleftrightarrow$ intersecciones

$E\subset\mathbb{R}^d$ es acotado si $E\subset B$ para alguna bola B

- $E\subset\mathbb{R}^d$ es compacto si es cerrado y acotado.

Teorema (Cubrimiento Heine-Borel)
Si $E\subset\mathbb{R}^d$ es compacto y $E\subset\bigcup_\alpha O_\alpha$ con O_α abiertos $\forall\alpha$, entonces

Existe finitos $\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_N$ tal que

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{N} O_{\alpha_i}$$

(Clausura)

- $x \in \mathbb{R}^d$ es un punto límite de $E \subset \mathbb{R}^d$ si $\forall r > 0$ $B(x,r) \cap E \neq \phi$. $x \in E$
- es un punto aislado de E si $\exists r > 0$ $B(x,r) \cap E = \{x\}$.
- $x \in E$ es interior a E si $\exists r > 0$ $B(x,r) \subset E$.

- $E^{\circ} = \{x \mid x \text{ es interior a } E\}$.
- $\overline{E} = \{x \mid x \text{ es pto límite de } E\}$
- $\partial E = \overline{E} - E^{\circ}$

Ejercicio a) $\overline{E}$ es cerrado b) E es cerrado ssi $E = \overline{E}$
c) E es abierto ssi $E = E^{\circ}$ d) $\partial E = \partial E^c$ e) $E^{\circ c} = \overline{E^c}$

④

Un conjunto $E \subset \mathbb{R}^d$ se llama perfecto si no tiene puntos aislados

Rectángulos y cubos

- $R \subset \mathbb{R}^d$ es rectángulo si

$$R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$

$a_j \leq b_j$ $j = 1, \ldots, d$.

Por definición un rectángulo es cerrado y tiene lados paralelos a los ejes.

- $d = 1$ intervalo cerrado
- $d = 2$ rectángulo cerrado lados paralelos
- $d = 3$ paralelepípedo

Si R es rectángulo, longitud de lado $b_i - a_i$. Volumen de R

$$|R| = (b_1 - a_1) \cdots (b_d - a_d)$$

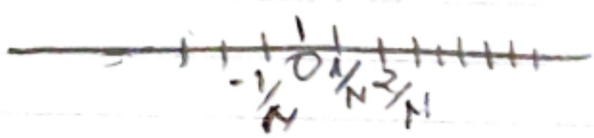
- Um rectángulo abierto se define como es natural.
- Um cubo es um rectángulo com todos los lados de la misma longitud. Si Q es um cubo com lados de long. ℓ entumces $|Q| = \ell^d$

Uma flia de rectángulos $\{R_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ se dice casi disjunta si

$$\overset{\circ}{R}_{\lambda_1} \cap \overset{\circ}{R}_{\lambda_2} = \emptyset \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$$

Considerar el conjumto (para $N>0$)

$$\frac{1}{N}\mathbb{Z} = \left\{ \frac{m}{N} : m \in \mathbb{Z} \right\}$$



Sea I um intervalo de $\mathbb{R}$ com longitud ℓ. Queremos estimar

$$\#\left(I \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z}\right)$$

⑥

Lema 1

$$N\ell - 1 \leq \#\left(I \cap \tfrac{1}{N}\mathbb{Z}\right) \leq N\ell + 1$$

Dem

Supongamos $k = \#\left(I \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z}\right)$.

Supongamos $k > 0$ y $\overbrace{a_1, \dots, a_k}^{\text{consecutivos}} \in I \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z}$

$a_1 < a_2 < \dots < a_k$ $\quad a_1 = \frac{J}{N}$, $a_2 = \frac{J+1}{N}$, $a_k = \frac{J+k-1}{N}$

$I = [a, b]$. Entonces.

$$a \leq \frac{J}{N} \leq \frac{J+k-1}{N} \leq b$$

$$\ell = b - a \geq \frac{k-1}{N} \quad ✓$$

$$\frac{J-1}{N} < a \leq b < \frac{J+k}{N}$$

$$\ell = b - a < \frac{k+1}{N} \quad ✓.$$

Corolario 2 Si I es un intervalo de long. ℓ

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N}\#\left(I \cap \tfrac{1}{N}\mathbb{Z}\right) = \ell = |I|$$

Si R es un rectángulo de $\mathbb{R}^d$ con

$$R = \underbrace{[a_1, b_1]}_{I_1} \times \cdots \times \underbrace{[a_d, b_d]}_{I_d}.$$

$$\#\left(R \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z}^d\right) = \#\left(I_1 \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z}\right) \cdots \#\left(I_d \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z}\right)$$

luego

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N^d} \#\left(R \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z}^d\right) = |R|.$$

Como:

$$\#\left(R^\circ \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z}^d\right) \leq \#\left(R \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z}^d\right) \leq$$
$$\leq \#\left(R^\circ \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z}^d\right) + A$$

Tenemos que también (ver 7b)

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N^d} \#\left(R^\circ \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z}^d\right) = |R|$$

Escribamos $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d] = I_1 \times \cdots \times I_d$

$k_j = \#\left(I_j \cap \frac{1}{M}\mathbb{Z}\right)$, $k_j^\circ = \#\left(I_j^\circ \cap \frac{1}{M}\mathbb{Z}\right)$.

$k_j \leq k_j^\circ + 2$

Necesitamos $\frac{A}{M^d} \xrightarrow{M\to\infty} 0$

$$\#\left(R \cap \frac{1}{M}\mathbb{Z}^d\right) = k_1 \cdots k_d \leq (k_1^\circ + 2) \cdots (k_d^\circ + 2)$$

$$= k_1^\circ \cdots k_d^\circ + A = \#\left(R^\circ \cap \frac{1}{M}\mathbb{Z}^d\right) + A$$

Lema A es un polinomio en $k_1^\circ, \ldots, k_d^\circ$ de grado $d-1$

Dem Por inducción. Si $d = 1 \Rightarrow A = 2$ ✓

Si es cierto para $d-1$,

$$(k_1^\circ + 2) \cdots (k_d^\circ + 2) = \underbrace{(k_1^\circ + 2) \cdots (k_{d-1}^\circ + 2)}(k_d^\circ + 2) \quad \text{(hip ind.)}$$

$$= [k_1^\circ \cdots k_{d-1}^\circ + \hat{A}](k_d^\circ + 2)$$

$\hat{A}$ polinomio grado $d-2$

$$= k_1^\circ \cdots k_d^\circ + \underbrace{2k_1^\circ \cdots k_{d-1}^\circ + \hat{A}k_d^\circ + 2\hat{A}}_{\text{polinomio grado } d-1}$$ ✓

Corolario $\lim_{M\to\infty} \frac{1}{M^d} A = 0$

Dem Tomemos un monomio tipo de A, digamos $k_1^\circ \cdots k_{d-1}^\circ$. Entonces

$$\frac{1}{M^d} k_1^\circ \cdots k_{d-1}^\circ = \underset{\downarrow\, 0}{\frac{1}{M}} \underset{\downarrow\, |I_1|}{\frac{k_1^\circ}{M}} \cdots \underset{\downarrow\, |I_{d-1}|}{\frac{k_{d-1}^\circ}{M}} \xrightarrow{M\to\infty} 0 \qquad \square$$

Lema 4 Si R es rectángulo y $R \subset \bigcup_{j=1}^{M} R_j$, R_j rectángulos entonces

$$|R| \leq \sum_{j=1}^{M} |R_j|.$$

Dem Ejercicio ✓

Teorema 5 Todo conjunto abierto $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}$ es unión numerable (única) de intervalos abiertos disjuntos.

Dem sea $x \in \mathcal{O}$, definimos

$$I_x = \bigcup \{ I : I \text{ intervalo abierto}, I \subset \mathcal{O}, x \in I \}$$

a) I_x abierto.

b) I_x es intervalo, si $y, z \in I \Rightarrow \exists I_1, I_2$ intervalos con $I_1, I_2 \subset \mathcal{O}$, $x \in I_1 \cap I_2$ y $y \in I_1$, $z \in I_2$. Luego $I_1 \cup I_2$ es intervalo, $I_1 \cup I_2 \subset \mathcal{O}$. Luego $[y, z] \subset I_x$.

c) Si $I_x \cap I_y \neq \emptyset \Rightarrow I_x = I_y$.

(8)

<u>Corolario 3</u> Si R es un rectángulo y $R = \bigcup_{j=1}^{M} R_j$ con $\{R_j\}_{j=1}^{M}$ una flia casi disjunta de rectángulos entonces

$$|R| = \sum_{j=1}^{M} |R_j|$$

<u>Dem</u>

$$|R| = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^d} \#\left(R \cap \tfrac{1}{N}\mathbb{Z}^d\right) \leq$$

$$\leq \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^d} \sum_{j=1}^{M} \#\left(R_j \cap \tfrac{1}{N}\mathbb{Z}^d\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{M} |R_j|$$

$$\sum_{j=1}^{M} |R_j| = \frac{1}{N^d}\sum_{j=1}^{M} \lim_{N\to\infty} \#\left(R_j^{\circ} \cap \tfrac{1}{N}\mathbb{Z}\right)$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^d} \#\left(\bigcup_{j=1}^{M} R_j^{\circ}\right) \cap \tfrac{1}{N}\mathbb{Z} \leq |R|$$

Sale de que $I_x \cup I_y$ es intervalo

d) Hayalo suma una cantidad numerable de intervalos disjuntos (Ejercicio)

e) la unicidad ejercicio

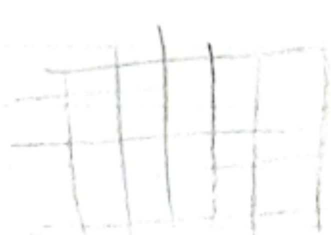
Problemas generalización a $\mathbb{R}^d$ $(d>1)$

<u>Teorema 6</u> Todo abierto de $\mathbb{R}^d$ se puede escribir como unión numerable de cubos casi disjuntos.

<u>Dem</u> Sea $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ abierto. Vamos a construir una flia $\mathcal{G}$ de cubos casi disjuntos con $\mathcal{O} = \bigcup_{Q \in \mathcal{G}} Q$

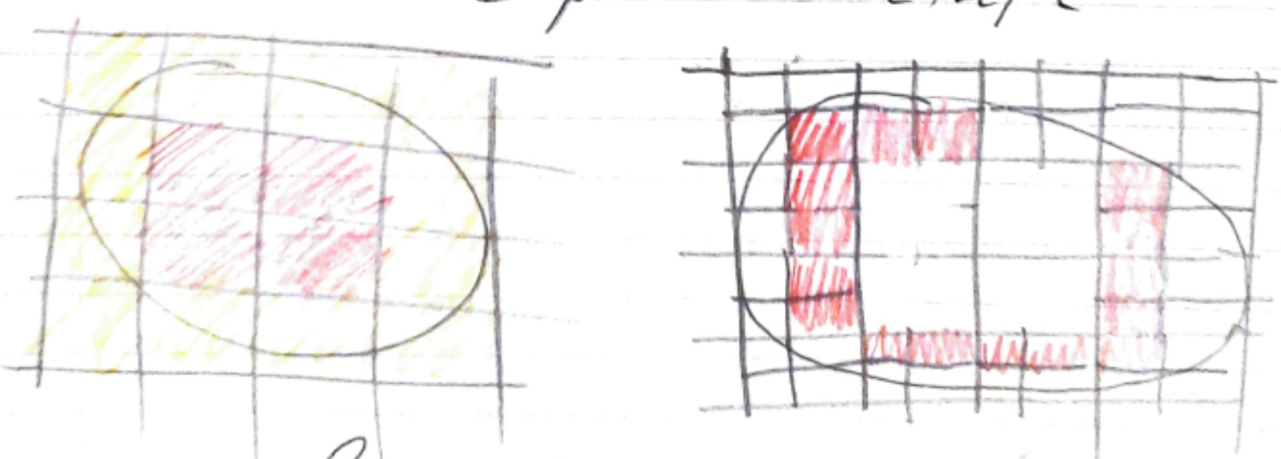
Procedemos inductivamente por etapas.

<u>1.er etapa</u> Consideremos la flia de cubos con vertices en $\mathbb{Z}^d$



que cubre $\mathbb{R}^d$.

Todos aquellos cubos que (11)
quedan contenidos en $\mathcal{O}$ se agregan
a $\mathcal{G}$. los cubos que son
disjuntos de $\mathcal{O}$ se tiran y los
que tienen parte en $\mathcal{O}$ y en $\mathcal{O}^c$
se dejan como candidatos.
En la etapa k tomamos los
candidatos de la etapa k-1 y dividimos sus lados en 2 y procedemos
como en la primera etapa



La $\mathcal{G}$ es numerable, casi
disjunta

Sea $x \in \mathcal{O}$. x pertenece a un cubo Q de cada etapa, N, cuyos lados miden 2^{-N}. Si N es suficientemente grande $Q \subset O$. Entonces o bien Q es agregado a G en la etapa N o un padre de Q fue agregado en una etapa anterior.

Discusión sobre medidas de abiertos

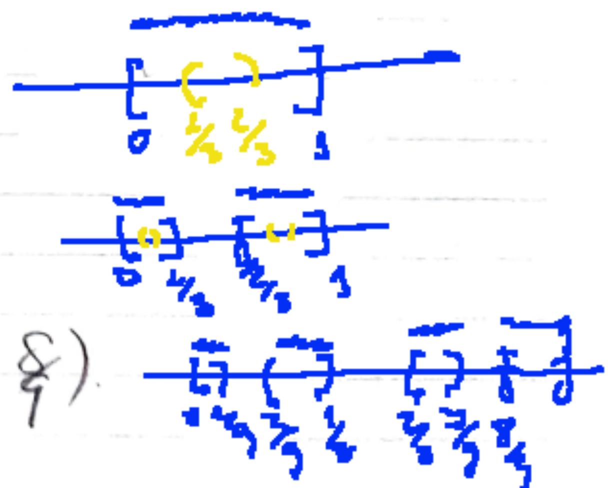
Expresiones s-ádicas ⊛

Conjunto de Cantor   Ver antes expresiones

Sea $C_0 = [0,1]$

$C_1 = [0,1] - (1/3, 2/3)$

$C_2 = C_1 - (1/9, 2/9) - (7/9, 8/9)$



⋮

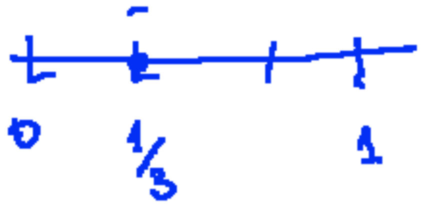
$$C = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k$$

Quedan en n 2^n intervalos cerrados de longitud $1/3^n$

Propiedades C es compacto, C es totalmente disconexo y perfecto (Ejercicio). $\#C = \#\mathbb{R}$

Lema $x \in C$ ssi podemos escribir a x en base 3 sin usar 1. $= \frac{1}{3}+\frac{0}{3^2}+\frac{0}{3^3}$

$(0.0222\ldots)_3 = (0.1)_3$



Dem

los numeros en este intervalo

$$x = \frac{1}{3} + \underbrace{\frac{a_2}{3^2} + \frac{a_3}{3^3} + \cdots}_{\leq \frac{1}{3}}$$

De manera obligada un x allí utiliza un 1 en el primer lugar del desarrollo ternario.
Así sucesivamente los 2 2^{do} tercios centrales son los que tienen obligadamente un 1 en el 2^{do} lugar.

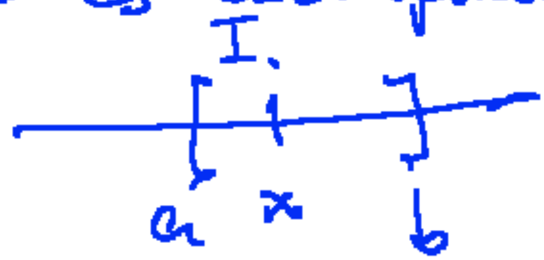
La intersección de todos son los que puedo escribir sin usar 1

$\#C = \#\mathbb{R}$ $\quad (0.020202)_3 \to (0.0101\ldots)_2$

$C \to [0,1]$

Totalmente disconexo significa que la componente conexa de un x es $\{x\}$. Un conexo de $\mathbb{R}$ es un intervalo.

Ayuda: Supon I es la componente conexa de x.



$I \subset C$

En la etapa n. C_n es la formada por intervalos de longitud $\frac{1}{3^n}$

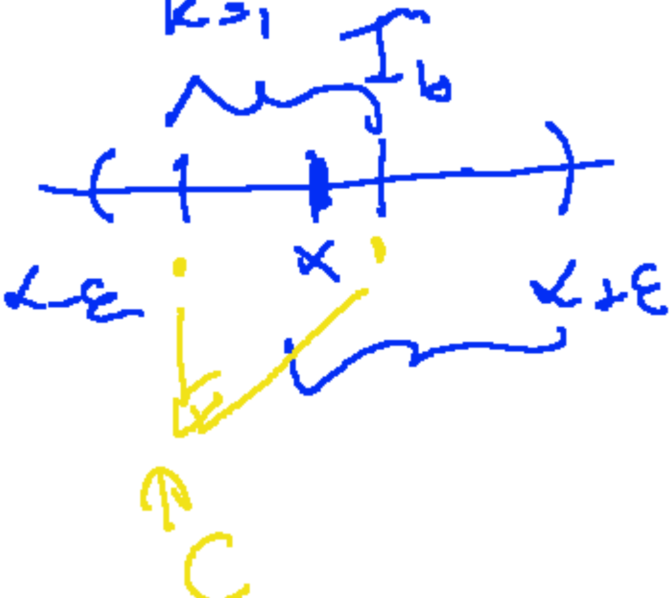
$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ $\qquad \frac{1}{3^n} < b-a$

Perfecto no tiene ptos aislados

x es aislado si $\exists \varepsilon > 0 \quad (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap C = \{x\}$

busco n $\quad \frac{1}{3^n} < \varepsilon \quad x \in C_n$

$$C_n = \bigcup_{k=1}^{2^n} I_k^n \qquad \ell(I_k^n) = \frac{1}{3^n}$$



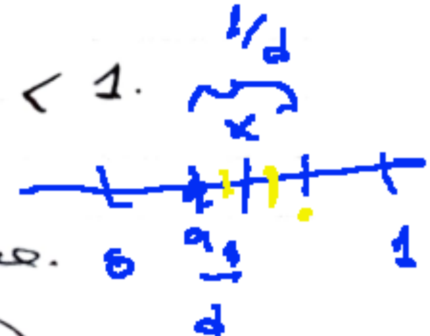
Expresiones s-ádicas.

Objetivo representar números con series.

Sea $d = 2, 3, \dots$

Supongamos $x \in [0,1)$. Dividimos el $[0,1]$ en d partes iguales.

$$0 < \frac{1}{d} < \frac{2}{d} < \dots < \frac{d-1}{d} < 1.$$



Hay un solo j tal que

$$x \in \left[\frac{j}{d}, \frac{j+1}{d}\right).$$

Llamamos a ese j a_1

Notar que $\left|x - \frac{a_1}{d}\right| < \frac{1}{d}$.

Ahora dividimos $\left[\frac{a_1}{d}, \frac{a_1+1}{d}\right)$ en d partes.

$$\frac{a_1}{d} < \frac{a_1}{d} + \frac{1}{d^2} < \frac{a_1}{d} + \frac{2}{d^2} < \dots < \frac{a_1}{d} + \frac{d-1}{d^2} < \frac{a_1+1}{d}.$$

Hay un único j con $x \in \left[\frac{a_1}{d} + \frac{j}{d^2}, \frac{a_1}{d} + \frac{j+1}{d^2}\right)$

Llamemos a ese j a_2.
Notar que
$$\left|x-\left(\frac{a_1}{d}+\frac{a_2}{d^2}\right)\right|<\frac{1}{d^2}$$
Continuando de esta forma, obtenemos una sucesión $a_1, \ldots, a_n$ con
$$\left|x-\left(\frac{a_1}{d}+\frac{a_2}{d^2}+\cdots+\frac{a_n}{d^n}\right)\right|<\frac{1}{d^n}$$
Hemos encontrado $a_j \in \{0,1,\ldots,d-1\}$ tales que:
$$x=\sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{d^j}$$
Que se denomina expresión d-ádica de x. Cuando $d=10$ se llama expresión decimal. ~~decim~~
Se suele escribir
$$x=(0.a_1a_2\ldots)_d$$
Cuando $d=2$ se llama binario.

Lamentablemente la expresión no es única. El problemas son sucesiones que toman el valor $d-1$ de un momento en adelante. Pues.

$$\sum_{j=k}^{\infty} \frac{d-1}{d^j} = \frac{d-1}{d^k} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{d^j} = \frac{d-1}{d^k} \frac{1}{1-1/d}.$$

$$= \frac{1}{d^{k-1}}.$$

Luego

$$(0.a_1 \ldots a_{k-1}(d-1)(d-1)\ldots)_d$$

$$= (0.a_1 \ldots (a_{k-1}+1))_d.$$

si $a_{k-1}+1 = d \Rightarrow$

$$= (0.a_1 \ldots (a_{k-2}+1)0\ldots).$$

y si $a_{k-2}+1 = d$ se sigue igual.

$R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d] \quad b_1 - a_1 = b_2 - a_2 = \cdots = b_d - a_d$

Medida exterior

13

Definición 1 Dado $E \subset \mathbb{R}^d$

$$m_*(E) = \inf \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j|$$

donde el ínfimo se toma sobre todos los cubrimientos $\boxed{E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j}$ de E por medio de cubos.

- Claramente $0 \leq m_*(E) \leq \infty$

Observaciones a) Permitir uniones infinitas es importante. (Ej. 14 SS)
b) Se pueden usar rectángulos o bolas para el cubrimiento.

Ejemplo 1 La medida exterior de un punto es cero

$x \in \mathbb{R}^d$ y $\varepsilon > 0$, $x = (x_1, \ldots, x_d)$

$Q = [x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon] \times \cdots \times [x_d - \varepsilon, x_d + \varepsilon]$

$\{x\} \subset Q \qquad m_*(\{x\}) \leq |Q| = (2\varepsilon)^d \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0$

Ejemplo 2 Si Q es un cubo

$$m_*(Q) = |Q|$$

Como Q se cubre a sí mismo $m_*(Q) \leq |Q|$

Sea $\{Q_j\}_{j=1}^{\infty}$ un cubrimiento por (14)
cubos de Q. sea $\varepsilon>0$ Construyamos cubos abiertos $S_j \supset Q_j$ con

$$|Q_j| < |S_j| \le (1+\varepsilon)|Q_j|$$

Como Q es compacto hay finitos S_j que cubren Q

$$Q \subset \bigcup_{j=1}^{N} S_j \subset \bigcup_{j=1}^{N} \overline{S_j}$$

Por Lema 4.

$$|Q| \le \sum_{j=1}^{N} |\overline{S_j}| = \sum_{j=1}^{N} |S_j|$$

$$\le (1+\varepsilon) \sum_{j=1}^{N} |Q_j| \le$$

$$\le (1+\varepsilon) \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j|$$

Como ε es arbitrario tenemos $\varepsilon \to 0$

$$|Q| \le \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j|$$

$m_*(E) \ge |Q|$

□

Ejemplo 3 Si $R \subset \mathbb{R}^d$ es un rectángulo $|R| = m_*(R)$..

Como en el ejemplo anterior $\boxed{|R| \le m_*(R)}$

Para la otra desigualdad $R = I_1 \times \dots \times I_d$

$$|R| = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^d} \#\left(R \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z}^d\right)$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \#\left(I_1 \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z}\right) \cdots \frac{1}{N} \#\left(I_d \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z}\right)$$

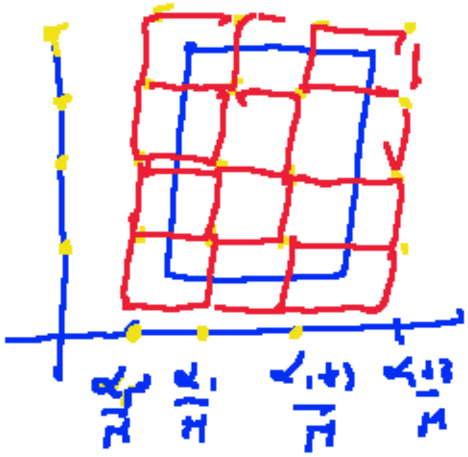
Si $I_j \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z} = \left\{\frac{\alpha_j}{N}, \frac{\alpha_j+1}{N}, \dots, \frac{\alpha_j+\beta_j-1}{N}\right\}$

$$\#\left(I_j \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z}\right) = \beta_j$$

Consideremos los cubos que generan. Sea G_N la Mía

$\frac{\alpha_j-1}{N}, \frac{\alpha_j}{N}, \dots, \frac{\alpha_j+\beta_j}{N}$

Hay $(\beta_1+2)\cdots(\beta_d+2)$ de ellos y miden $\frac{1}{N^d}$.



Luego

$$|R| = \lim_{N\to\infty} \frac{\beta_1}{N}\cdots\cdots\frac{\beta_d}{N}.$$

Pero

$$m_*(R) \leq \lim_{N\to\infty} \sum_{Q\in \mathcal{G}_N} |Q|$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{(\beta_1+2)\cdots(\beta_d+2)}{N^d}.$$

$$= \lim_{N\to\infty} \Big\{ \frac{\beta_1\cdots\beta_d}{N^d}$$

$$+ \frac{2}{N^d}\left(\beta_2\cdots\beta_d + \beta_1\beta_3\cdots\beta_d + \cdots \beta_1\cdots\beta_{d-1}\right)$$

2^2 $$+ \frac{4}{N^d}\left(\beta_3\cdots\beta_d + \cdots + \beta_1\cdots\beta_{d-2}\right)$$

$$\Big\}$$

$$= |R|.$$

$\square$

Ejemplo 4 $m_*(\mathbb{R}^d) = +\infty$.

Un cubrimiento de $\mathbb{R}^d$ es un cubrimiento de cualquier cubo Q de modo que

$$|Q| = m_*(Q) \leq m_*(\mathbb{R}^d)$$

$Q_k = [0,k]^d = [0,k] \times \cdots \times [0,k]$

Podemos encontrar $|Q_k| \xrightarrow{k\to\infty} +\infty$ $|Q_k| = k^d$

Ejemplo 5 Si C es el conjunto de Cantor $m_*(C) = 0$.

Dem $C \subset C_k$ donde C_k es una unión de 2^k intervalos de long. $1/3^k$.

$$m_*(C) \leq \left(\frac{2}{3}\right)^k \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

Un conj. infinito no numerable de $\mathbb{R}$ con $m_* = 0$.

Ejemplo 6 $m_*(\mathbb{Q}) = 0$

Propiedades de la medida exterior

Observación Sea $E \subset \mathbb{R}^d$ y $\varepsilon > 0$, existe un cubrimiento por cubos ~~[illegible]~~ $<$ (cuando $m_*(E) < \infty$)

$$E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j \qquad \sum_{j=1}^{\infty} m_*(Q_j) \leq m_*(E) + \varepsilon.$$

$a = \inf A \iff a$ es cota inferior y $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \alpha \in A : a \leq \alpha < a + \varepsilon$

$\alpha = \sum |Q_j|$ ($m_*(Q_j)$)

$m_*(E) < +\infty$

$\boxed{m_*(\mathbb{Q})=0}$ $\qquad m_*(\overline{\mathbb{Q}}) = +\infty$

$m_*(\mathbb{Q}\cap[0,1])=0 \qquad c_e(\mathbb{Q}\cap[0,1]) = 1$

<u>Justificación</u>. $\mathbb{Q}=\{r_1, r_2, r_3, r_4, \dots\}$

$\varepsilon>0$.

$Q_j=\left[r_j-\frac{\varepsilon}{2^{j+1}}, r_j+\frac{\varepsilon}{2^{j+1}}\right]$

$$\mathbb{Q}\subset\bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j \qquad \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j| = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\cancel{2}\varepsilon}{2^{j+\cancel{1}}} = \varepsilon$$

$\forall \varepsilon>0$ $\exists$ cubrimiento de $\mathbb{Q}$ por cubos que cumple

$$\sum_{j=1}^{\infty}|Q_j| < \varepsilon \quad \text{por definición ínfimo}$$

$\to 0+\varepsilon$

$m_*(\mathbb{Q})=0$

$\square$

(18)

Observación 2 Monotonía. Si $E_1 \subset E_2$

$m_*(E_1) \le m_*(E_2)$. $\{\sum |Q_j| : E_2 \subset \bigcup_{j=1}^\infty Q_j\} \subset \{\sum |Q_j| : E_1 \subset \bigcup_{j=1}^\infty Q_j\}$

Observación 2 Numerable σ-subaditividad

Si $E = \bigcup_{j=1}^\infty E_j$ entonces $m_*(E) \le \sum_{j=1}^\infty m_*(E_j)$

Podemos suponer $m_*(E_j) < \infty \ \forall j$

Sean las flía $\{Q_{jk}\}_{k=1}^\infty$ de cubos con: $E_j \subset \bigcup_{k=1}^\infty Q_{jk}$

$\sum_{j=1}^\infty \frac{1}{2^j} = 1$

$$\boxed{\sum_{k=1}^\infty |Q_{jk}| < m_*(E_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}}$$

Luego $\{Q_{jk}\}_{j,k=1}^\infty$ es un cubrimiento por cubos de $\bigcup_{j=1}^\infty E_j$ y por ende de E

$$m_*(E) \le \sum_{j,k=1}^\infty |Q_{jk}| \le \left[\sum_{j=1}^\infty m_*(E_j)\right] + \varepsilon$$

$$= \sum_{j=1}^\infty \sum_{k=1}^\infty |Q_{jk}|$$

$\sum_{j,k=1}^\infty \alpha_{jk} < \infty$ si $\boxed{\alpha_{jk} \ge 0}$

$\sum_{j,k=1}^\infty \alpha_{jk} = \sum_{j=1}^\infty \sum_{k=1}^\infty \alpha_{jk}$

$\sum_j \frac{\varepsilon}{2^j} = \varepsilon$

Observación 3 Si $E \subset \mathbb{R}^d$ entonces

$$m_*(E) = \inf\{m_*(O) : O \supset E \text{ abierto}\}$$

$\leq$ sale de la monotonía. $E \subset O \Rightarrow m_*(E) \leq m_*(O)$

$\geq$ Sea $\varepsilon > 0$ y Q_j cubos con $E \subset \bigcup Q_j$

$$\sum_{j=1}^{\infty} m_*(Q_j) < m_*(E) + \varepsilon/2.$$

$Q_j \subset \tilde{Q}_j$

Sean $\tilde{Q}_j$ cubos abiertos con

$$m_*(Q_j) \leq \underbrace{m_*(\tilde{Q}_j) < m_*(Q_j) + \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}}$$

Entonces

$$O = \bigcup_{j=1}^{\infty} \tilde{Q}_j$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{j+1}} = \frac{\varepsilon}{2}$$

es abierto y

$$m_*(O) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m_*(\tilde{Q}_j) < \sum_{j=1}^{\infty} m_*(Q_j) + \varepsilon/2 < m_*(E) + \varepsilon.$$

$\alpha = \inf A$

$\Leftrightarrow \alpha$ cota inferior

$\exists\, a \in A \quad \alpha \leq a < \alpha + \varepsilon$

$A = \{m_*(O) \mid O \supset E, \text{abierto}\}$

$m_*(E) \leq \inf A$

Observación 4 Si $E = E_1 \cup E_2$ con $d(E_1, E_2) > 0$ entonces

$$m_*(E) = m_*(E_1) + m_*(E_2)$$

$d(E_1, E_2) = \inf\{d(x,y) \mid x \in E_1,\ y \in E_2\}$ $\quad d(E_1, E_2) \neq 0 \Rightarrow E_1 \cap E_2 = \emptyset$

$\leq$ ya está

$\geq$) Sea $0 < \delta < d(E_1, E_2)$ y $\varepsilon > 0$.

Consideremos un cubrimiento $E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$ con $\sum_{j=1}^{\infty} m_*(Q_j) \leq m_*(E) + \varepsilon$. Podemos suponer que el $\operatorname{diam}(Q_j) < \delta$, sino lo dividimos en más cubos. Luego cada cubo Q_j puede intersecar a solo uno de los conjuntos E_1 ó E_2.

Puedo suponer $m_*(E) < \infty$

Sea
$$J_1 = \{j \mid Q_j \cap E_1 \neq \emptyset\}$$
$$J_2 = \mathbb{N} - J_1.$$

$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4} \dots = \ln(2)$ $\qquad 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$

$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\dots = \infty$ $\qquad$ (2)

Luego $E_1 \subset \bigcup_{j\in J_1} Q_j \qquad E_2 \subset \bigcup_{j\in J_2} Q_j$.

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$

$$m_*(E)+\varepsilon > \sum_{j=1}^{\infty} m_*(Q_j) = \sum_{j\in J_1} m_*(Q_j) + \sum_{j\in J_2} m_*(Q_j)$$

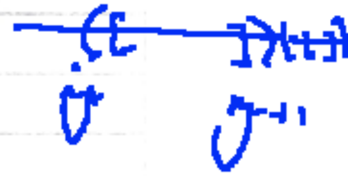
$$\geq m_*(E_1)+m_*(E_2). \quad \square$$

Observación 5 Si $E=\bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$ con los cubos Q_j casi disjuntos entonces.

$$m_*(E)=\sum_{j=1}^{\infty} m_*(Q_j).$$

Sea ($\varepsilon>0$) $\tilde{Q}_j \subset Q_j^{\circ}$ cubos cerrados.

y $\quad m_*(\tilde{Q}_j) > m_*(Q_j^{\circ}) - \varepsilon/2^j$



Entonces $d(\tilde{Q}_{j_1}, \tilde{Q}_{j_2}) > 0$.

Luego

$$m_*(E)=m_*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j\right) \geq m_*\left(\bigcup_{j=1}^{N} Q_j\right) \geq$$

$$m_*\left(\bigcup_{j=1}^{N} \tilde{Q}_j\right) = \sum_{j=1}^{N} m_*(\tilde{Q}_j)$$

generalización Obs 4 por inducción

(22) $$m_*(E) \geq \lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{N} |\tilde{Q}_j|$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} |\tilde{Q}_j| \geq \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j| - \frac{\varepsilon}{2^j}$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j| - \varepsilon$$

Hacemos $\varepsilon \to 0$ y sale.

La observación anterior se aplica a los abiertos. pues si $\mathcal{O}$ es abierto

$$\mathcal{O} = \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$$

donde Q_j son casi disjuntos.

Conjuntos Medibles y medida de Lebesgue.

Un conjunto $E \subset \mathbb{R}^d$ se llama medible si $\forall \varepsilon > 0$ existe un abierto $\mathcal{O} \supset E$ con

$$m_*(\mathcal{O} - E) < \varepsilon.$$

Si E es medible.

$$m(E) := m_*(E).$$

Propiedad 1 Si $\mathcal{O}$ es abierto, $\mathcal{O}$ es medible.

Propiedad 2 Si $m_*(E) = 0 \Rightarrow E$ es medible. Si $F \subset E$ y $m_*(E) = 0 \Rightarrow F$ es medible.

Dem Por una observación, dado $\varepsilon > 0$ existe $\mathcal{O}$ abierto con

$$m_*(\mathcal{O}) < m_*(E) + \varepsilon = \varepsilon.$$

Entonces

$$m_*(\mathcal{O} - E) < \varepsilon.$$

monotonía $\leq m_*(\mathcal{O})$

Observación. $\varnothing$ es medible.

Propiedad 3: Si E_j, $j=1,2,\dots$, son medibles. $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ es medible.

Dem Sea $\varepsilon>0$, existe $\mathcal{O}_j$ abiertos con $\mathcal{O}_j \supset E_j$, $j=1,2,\dots$

$$m_*(\mathcal{O}_j - E_j) < \varepsilon/2^j$$

Ahora $\bigcup_{j=1}^{\infty} \mathcal{O}_j$ es abierto y $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathcal{O}_j$

Además

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} \mathcal{O}_j - \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} (\mathcal{O}_j - E_j)$$

Entonces

$$\leq m_*\left(\bigcup \mathcal{O}_j - E_j\right)$$

$$m_*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} \mathcal{O}_j - \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \underbrace{m_*(\mathcal{O}_j - E_j)}_{<\varepsilon/2^j} < \varepsilon$$

Propiedad 4 Los conjuntos cerrados son medibles.

Dem: Primero supongamos E cerrado y acotado. $m_*(E) < +\infty$ Sea $\varepsilon>0$. Existe un abierto $\mathcal{O}$ con

$$m_*(\mathcal{O}) < m_*(E) + \varepsilon.$$

$O \cap E^c$

$K \subset O - E$

K

$O - E$ es abierto, luego

$$O-E=\bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$$

con Q_j cubos casi disjuntos. El conjunto

$$K=\bigcup_{j=1}^{N} Q_j$$

es compacto $\forall N\in\{1,2,\dots\}$ y $\boxed{K\cap E=\emptyset}$ con E cerrado. Entonces $d(K,E)>0$.

Luego

$$m_*(O)\geq m_*(K\cup E)=m_*(K)+m_*(E)$$

$$= m_*(E)+\sum_{j=1}^{N} m_*(Q_j)$$ dos 5.

Luego

$$\sum_{j=1}^{N} m_*(Q_j)\leq m_*(O)-m_*(E)<\varepsilon$$

Haciendo $N\to\infty$

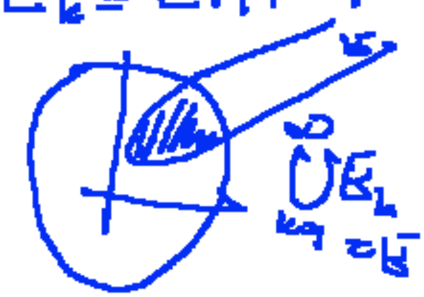
$$\sum_{j=1}^{\infty} m_*(Q_j)\leq\varepsilon$$

Así

$$m_*(O-E)\leq\sum_{j=1}^{\infty} m_*(Q_j)\leq\varepsilon$$

Si no es acotado

$E_k = E\cap\overline{B(0,k)}$



Ejercicio Sea (X,d) un espacio métrico

Si E es compacto, F cerrado y $E \cap F = \emptyset$

$\Rightarrow \quad d(E,F) > 0.$

Propiedad Si E es medible y $F \subset E$ con $m_*(F)=0$ entonces $E-F$ es medible.

Dem Sea $\varepsilon>0$ y $\mathcal{O}$ abierto con

$$m_*(\mathcal{O}-E)<\varepsilon.$$

Ahora

$$\mathcal{O}-(E-F)\subset(\mathcal{O}-E)\cup F.$$

Luego

$$m_*(\mathcal{O}-(E-F))\leq m_*(\mathcal{O}-E)+m_*(F)$$
$$<\varepsilon. \quad \square$$

Corolario: Si E es medible y $m_*(F\,\Delta\, E)=0$ entonces F es medible.

Dem

$$F=\underbrace{(F-E)}_{\text{medible}}\cup\underbrace{\left(E-\underbrace{(E-F)}_{\text{medible}}\right)}_{\text{medible}} \quad A\Delta$$

Propiedad 5. E medible $\Rightarrow E^c$ medible.

Dem $\forall n\in\mathbb{N}$ existe un abierto $\mathcal{O}_n\supset E$

$$m_*(\mathcal{O}_n-E)<1/n$$

$\forall n \quad E \subset \mathcal{O}_n \qquad E^c \supset \mathcal{O}_n^c$

(27)

$\mathcal{O}_n^c$ son cerrados y por ende medibles.

$S = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{O}_n^c$ es medible.

y $S \subset E^c$. Además.

$E^c - S = E^c \cap S^c = E^c \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{O}_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{O}_n \cap E^c$

$$m_*(E^c - S) \le m_*(\mathcal{O}_n - E) \le 1/n$$

$n \to \infty \qquad m_*(E^c - S) = 0 \qquad E^c - S = E^c \Delta S$

Luego E^c es medible, pues $m_*(E^c - S) = 0$ ∩

Propiedad si E_j, $j = 1, 2, \ldots, \infty$, son medibles entonces $\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j$ es medible.

Dem

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j = \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j^c\right)^c$$

Uniones ó intersecciones no numerables no se consideran.

Propiedad. Si E es medible, $\forall \varepsilon > 0$ existe un cerrado $F \subset E$ con

$$m_*(E - F) < \varepsilon$$

Dem E^c es medible $\Rightarrow \exists\, \mathcal{O}$ abierto $E^c \subset \mathcal{O}$ y $m_*(\mathcal{O} - E^c) < \varepsilon \Rightarrow m_*(E - \mathcal{O}^c) < \varepsilon$ y $\mathcal{O}^c \subset E$ y es cerrado.

<u>Teorema</u>: Si E_j, $j=1,2,\ldots$ son conjuntos medibles y disjuntos entonces.

$$m(E)=\sum_{j=1}^{\infty} m(E_j).$$

<u>Dem</u>: supongamos cada E_j acotado. y sea $F_j \subset E_j$ cerrado con

$$m_*(E_j - F_j) < \varepsilon/2^j \quad m_*(E_j) < m(F_j)+\varepsilon/2^j$$

Cada F_j son compacto y disjuntos. Luego. $d(F_j, F_k)>0$ $j\neq k$.

Luego $m\left(\bigcup_{j=1}^{N} F_j\right)=\sum_{j=1}^{N} m(F_j)$.

Luego

$$m(E)\geq m\left(\bigcup_{j=1}^{N} F_j\right)=\sum_{j=1}^{N} m(F_j)$$

$$\geq \sum_{j=1}^{N} E_j - \varepsilon.$$

Haciendo $N\to\infty$ y como $\varepsilon>0$ es arbitrario.

$$\sum_{j=1}^{\infty} m(E_j) \leq m(E).$$

En el caso general consideraremos cubos Q_j con $\mathbb{R}^d = \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$.

$Q_j \subset Q_{j+1}$.

Ahora pongamos $E_{j,k} = E_j \cap (Q_k - Q_{k-1})$ $k \geq 2$

Los E_{jk} son acotados medibles.

y

$$E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=2}^{\infty} E_{jk}$$

Luego

$$m(E) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=2}^{\infty} m(E_{j,k}) = \sum_j m(E_j) =$$

Corolario: Si $F \subset E$ son medibles y $m(F) < \infty \Rightarrow m(E - F) = m(E) - m(F)$

Definición Si $E_j \subset \mathbb{R}^d$, $E_j \subset E_{j+1}$ y $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j = E$ pondremos $E_j \nearrow E$.

Si en cambio $E_j \supset E_{j+1}$ y $E = \bigcap_j E_j$

Escribiremos $E_j \searrow E$.

Corolario Si E_j, $j = 1, 2, \ldots$, son medibles en $\mathbb{R}^d$

i) Si $E_k \nearrow E$ entonces $m(E) = \lim_{n\to\infty} m(E_n)$.

ii) Si $E_k \searrow E$ y $m(E_k)$ para algún k entonces $m(E) = \lim_{n\to\infty} m(E_k)$.

<u>Dem</u> i) Sea $G_1 = E_1$, $G_2 = E_2 - E_1$, ...

Los G_i son medibles y mutuamente disjuntos. Además

$$\bigcup G_j = \bigcup E_j = E.$$

$$m(E) = \sum_j m(G_j) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{N} m(G_j)$$

$$= \lim_{N\to\infty} m\left(\bigcup_{j=1}^{N} E_j\right) = \lim_{N\to\infty} m(E_N)$$

Para (ii) Asumamos $m(E_1) < +\infty$.

Pongamos

$$G_j = E_1 - E_j$$

Entonces $G_j \subset G_{j+1}$ y

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} G_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_1 \cap E_j^c = E_1 \cap \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j^c = E_1 \cap \left[\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j\right]^c = E_1 - \bigcap_{j=1}^{\infty} E_j$$

Así

$$\cancel{m(E_1)} - \lim_{j\to\infty} m(E_j) = m\left(E_1 - \bigcap_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \cancel{m(E_1)} - m\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j\right)$$

Comentario: (ii) es falsa sin la hipótesis. $m(E_k)<\infty$. Ejemplo $E_n = (n, +\infty)$

Teorema: $E \subset \mathbb{R}^d$ medible. Entonces. $\forall \varepsilon > 0$

(i) $\exists\, \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ abierto con $m(\mathcal{O} - E) \leq \varepsilon$.
(ii) $\exists\, F \subset \mathbb{R}^d$ cerrado con $m(E - F) \leq \varepsilon$
(iii) Si $m(E) < \infty$ $\exists\, K \subset E$ compacto con $m(E - K) < \varepsilon$
(iv) Si $m(E) < \infty$ existe cubos. Q_j, $j=1,\dots,N$ con.

$$m\left(E \triangle \bigcup_{j=1}^{N} Q_j\right) \leq \varepsilon$$

Dem (i) y (ii) ya están.

(iii) Sea $F \subset E$ cerrado con $m(E-F) < \varepsilon$

Sea $Q_n = [-n, n]^d$. Entonces.

$$Q_n \cap F \nearrow F \quad y \quad E - Q_n \cap F \searrow E - F$$

$$\lim_{n\to\infty} m(E - Q_n \cap F) = m(E-F) \leq \varepsilon/2.$$

Luego existe n tal que. $m(E - Q_n \cap F) \leq \varepsilon$.

(iv) Sea Q_j cubos con

$$E \subset \bigcup_j Q_j \qquad \sum_j |Q_j| < m_*(E) + \varepsilon/2$$

Como $m_*(E)<\infty$ la serie converge.

$\exists N: \sum_{j=N+1}^{\infty} |Q_j| < \varepsilon/2$. Luego

$$m\left(E \triangle \bigcup_{j=1}^{N} Q_j\right) \le m\left(\bigcup_{j=N+1}^{\infty} Q_j\right) + m\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j - E\right)$$

$$\le \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{j=1}^{\infty}|Q_j| - m(E) \le \varepsilon.$$

Ahora dado $h\in\mathbb{R}^d$ pondremos

$T_h(x) = x+h$. $T_h(E) = E+h$.
y si $\delta\in\mathbb{R}^+$. $\delta x = \delta\cdot x$.

<u>Teorema</u> E es medible ssi $E+h$ lo es y ssi δE lo es. Además.

$$m(E+h) = m(E)$$
$$m(\delta E) = \delta^d m(E).$$

<u>Dem</u> <u>Ejercicio</u>.

Hacer Traslaciones

σ-Álgebras

Definición Sea X un conjunto. Una conjunto $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X. $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ se llama una σ-álgebra si

a) $\emptyset \in \mathcal{A}$.

b) Si $E_j \in \mathcal{A}$, $j=1,2,\dots \Rightarrow \bigcup_j E_j \in \mathcal{A}$.

c) Si $E \in \mathcal{A} \Rightarrow E^c \in \mathcal{A}$.

Ejemplos (i) $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ es σ-álgebra

(ii) Los medibles.

(iii) Ejercicio $\mathcal{A} = \{E \subset \mathbb{R} \mid E \text{ es a.l.s.n. o } E^c \text{ es a.l.s.n.}\}$

Si $\mathcal{A}_i$, $i \in I$, son σ-álgebras de subconjuntos de X, entonces $\bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$ es σ-algebra.

Dado $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$:

$$\sigma(\mathcal{E}) = \text{σ-álgebra generada} = \bigcap \{\mathcal{A} : \mathcal{A} \text{ es σ-algebra}, \mathcal{E} \subset \mathcal{A}\}$$

Sea $\mathcal{G} = \{ \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d : \mathcal{O}$ es abierto$\}$

$\sigma(\mathcal{G}) =$ σ-ágebra de borel $=: \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$

Como los medibles $\mathcal{M}$ son σ-álgebra

$\sigma(\mathcal{G}) \subset \mathcal{M}$. Pero $\sigma(\mathcal{G}) \neq \mathcal{M}$. (dibujo)

Si $\mathcal{O}_n$, $n=1,\dots$, son abiertos $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{O}_n$ no es necesariamente abierto. Pero sí ocurre que $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{O}_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

A la clase de estos conjuntos las llamaremos G_δ.

$$F_\sigma = \{ F : F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n, \ F_n \text{ cerrado} \}$$

$G_\delta, F_\sigma \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

<u>Definición</u> Si $\mathcal{A}$ es σ-álgebra y $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^+$ satisface

a) $\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j)$ $\quad E_j$ mutuamente disjuntos

μ es una medida.

<u>Teorema</u> Son equivalentes.

a) $E \subset \mathbb{R}^d$ es medible.

b) $E = G - Z$, $G \in G_\delta$ y $m(Z) = 0$.

c) $E = F \cup Z$ $F \in F_\sigma$ y $m(Z) = 0$.

a) $\Rightarrow$ b). Sea O_n con $O_n \supset E$ abierto

$$m(O_n - E) \leq 1/n.$$

y $G \doteq \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n \in G_\delta$.

$$m(G - E) \leq m(O_n - E) \leq 1/n \xrightarrow{n \to \infty} 0.$$

b) $\Rightarrow$ c) Si E es medible $\Rightarrow$ E^c es medible $\Rightarrow$ $E^c = G - Z$, $G = \bigcap_{j=1}^{\infty} O_j$

$$E^c = \bigcap_{j=1}^{\infty} O_j \cap Z^c$$

$$E = \underbrace{\bigcup_{j=1}^{\infty} O_j^c}_{F_\sigma} \cup Z.$$

c) $\Rightarrow$ a) F, Z son medibles.

Conjuntos no medibles

Sea $E=[0,1]$.

Definimos una relación en E

$x \sim y \iff x-y \in \mathbb{Q}$.

$\sim$ es de equivalencia.

~~Para cada~~. Por el axioma de elección formamos un conjunto M obtenido sacando un elemento de cada clase de equivalencia de la relación $\sim$.

Sea ahora $\mathbb{Q} \cap [-1,1] = \{r_1, r_2, \dots\}$.

Si $(M+r_1) \cap (M+r_2) \neq \emptyset \Rightarrow$

$\exists x, y \in M$.

$x+r_1 = y+r_2 \Rightarrow x \sim y \Rightarrow x=y$.

$\Rightarrow r_1 = r_2$.

Luego $M+r_k$ son mutuamente disjuntos.

~~Sea~~ $a = m_*(M)$. Se tiene (37)

que.

$$E \subset \bigcup_k M + r_k \subset [-1, 2].$$

Si M fuese medible cada $M + r_k$ lo sería y.

$$1 = m(E) = \sum_k m(M + r_k) = a + a + \dots \leq 3$$

!!