Introducción al Análisis Matemático

Índice general

1 Conjuntos

«David Hilbert (Königsberg, Prusia Oriental; 23 de enero de 1862-Gotinga, Alemania; 14 de febrero de 1943) fue un matemático alemán, reconocido como uno de los más influyentes del siglo XIX y principios del XX. Estableció su reputación como gran matemático y científico inventando y/o desarrollando un gran abanico de ideas, como la teoría de invariantes, la axiomatización de la geometría y la noción de espacio de Hilbert, uno de los fundamentos del análisis funcional. Hilbert y sus estudiantes proporcionaron partes significativas de la infraestructura matemática necesaria para la mecánica cuántica y la relatividad general. Fue uno de los fundadores de la teoría de la demostración, la lógica matemática y la distinción entre matemática y metamatemática. Adoptó y defendió vivamente la teoría de conjuntos y los números transfinitos de Cantor. Un ejemplo famoso de su liderazgo mundial en la matemática es su presentación en 1900 de un conjunto de problemas abiertos que incidió en el curso de gran parte de la investigación matemática del siglo XX.» (Wikipedia)

«Nadie nos expulsará del paraíso que Cantor ha creado para nosotros»

David Hilbert

En esta unidad estudiaremos el concepto de *cardinal* de un conjunto. Con este concepto se pretende dar un significado a la noción de cantidad de elementos de un conjunto, en especial cuando este es “infinito”. Como se verá, y por extraño que parezca, aunque el conjunto involucrado sea infinito de todas maneras podremos definir el cardinal de ese conjunto. Con esto implicitamente decimos que no todos los conjuntos infinitos tendrán el mismo cardinal. Empezaremos recordando algunas cuestiones básicas de teoría de conjuntos que, a la vez, nos servirán como referencia para las notaciones.

1.1 Repaso nociones básicas sobre conjuntos

La siguiente introducción está lejos de ser exhaustiva, solo recordaremos conceptos ya sabidos. Nos dentendremos algo más en aquellos puntos que puedan ser nuevos.

Definición 1.1.1 Dados dos conjuntos A y B denotaremos su *unión, intersección y diferencia* por: $A \cup B$, $A \cap B$ y $A - B$ repectivamente. Estos nuevos conjuntos se definen por:

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\},$$

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$$

y

$$A - B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\},$$

respectivamente.

Por lo general, tendremos que los conjuntos con los que trabajaremos estarán contenidos en un conjunto que llamaremos el universo $\mathcal{U}$. Aceptado la existencia de este universo, frecuentemente usaremos la siguiente notación para el *complemento*

$$A^c = \mathcal{U} - A.$$

Además consideraremos la operación de *diferencia simétrica*, definiéndose por:

$$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A).$$

Definición 1.1.2 [Kuratowski] Dados dos elementos arbitrarios a y b se define el *par ordenado* (a, b), por la siguiente igualdad

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

La propiedad más relevante de pares ordenados es que si $(a, b) = (c, d)$ entonces $a = c$ y $b = d$. La demostración de este hecho la dejamos de ejercicio. Ahora consideramos el conjunto formado por todos los pares ordenados de elementos pertenecientes a conjuntos dados.

Definición 1.1.3 Sean A y B conjuntos. El *producto cartesiano* de A con B, denotado por $A \times B$, es el siguiente conjunto:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}.$$

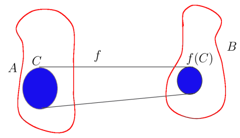
La siguiente definición es bien conocida.

Definición 1.1.4 Una *función* f de A en B (abreviaremos esta frase por el siguiente símbolo: $f : A \longrightarrow B$), es un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$ con la propiedad que: para todo $a \in A$ existe un único $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$.

Suponemos que ya todos conocemos estos conceptos, asi como los conceptos relacionados de: imagen, la notación $f(a)$, función inyectiva, suryectiva y biyectiva. Admitimos todo esto por sabido. Ahora introducimos una nueva notación.

Definición 1.1.5 Por B^A denotamos al conjunto de todas las funciones $f : A \longrightarrow B$.

Mas adelante daremos algunas explicaciones del porque de esta notación.
Seguidamente damos las definiciones de los conjuntos imagen y preimagen de un conjunto dado por una función.



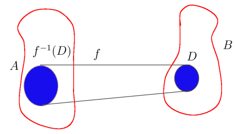
Conjunto $f(C)$

Definición 1.1.6 Dada una función $f : A \longrightarrow B$ y subconjuntos $C \subset A$ y $D \subset B$ definimos:

$$f(C) = \{f(a) : a \in C\}$$

y

$$f^{-1}(D) = \{a \in A : f(a) \in C\}.$$



Conjunto $f^{-1}(D)$

Muy a menudo utilizaremos las propiedades que a continuación se enuncian. Las demostraciones, de las mismas, quedaran a cargo del alumno; ver Ejercicio 1.9.2 en la página 21.

Proposición 1.1.1 Sea $f : A \longrightarrow B$ una función. Entonces

1. $f(C_1 \cup C_2) = f(C_1) \cup f(C_2)$.
2. $f^{-1}(D_1 \cup D_2) = f^{-1}(D_1) \cup f^{-1}(D_2)$.
3. $f(C_1 \cap C_2) \subset f(C_1) \cap f(C_2)$. Dar un ejemplo de que la igualdad no vale en general.
4. $f^{-1}(D_1 \cap D_2) = f^{-1}(D_1) \cap f^{-1}(D_2)$.

También vamos a considerar el *conjunto de partes* de un conjunto dado, esto es el conjunto de todos sus subconjuntos. Explícitamente:

$$\mathscr{P}(A) = \{C : C \subset A\}.$$

Se pueden efectuar uniones e intersecciones de una cantidad arbitraria de conjuntos. Para poder enunciarlas debemos definir antes lo que entendemos por una *familia subindicada de conjuntos* (o brevemente *familia de conjuntos*).

Definición 1.1.7 Supongamos dado un conjunto I, al que nos referiremos como conjunto de índices, y una función $i : I \longrightarrow \mathscr{P}(A)$. Así tenemos que, para cada $i \in I$, existe un único subconjunto de A, que llamaremos A_i. Diremos entonces que $\{A_i\}_{i\in I}$ es una familia subindicada de conjuntos por el conjunto de índices I.

Ahora podemos definir la unión y la intersección de una familia de esta índole de la siguiente manera

Definición 1.1.8 Definimos la unión e intersección de una familia $\{A_i\}_{i\in I}$ por:

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{a : \exists i \in I : a \in A_i\}$$

y

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{a : \forall i \in I : a \in A_i\}$$

respectivamente.

George Cantor
(1845-1918)

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (San Petersburgo, 3 de marzo de 1845-Halle, 6 de enero de 1918) fue un matemático y lógico nacido en Rusia. Fue inventor con Dedekind y Frege de la teoría de conjuntos, que es la base de las matemáticas modernas. Gracias a sus atrevidas investigaciones sobre los conjuntos infinitos fue el primero capaz de formalizar la noción de infinito bajo la forma de los números transfinitos (cardinales y ordinales). (Wikipedia)

En el Ejercicio 1.9.1 en la página 20 podemos encontrar una serie de propiedades de uniones e intersecciones de familias de conjuntos. Estas propiedades las usaremos con frecuencia. Por último, en esta revisión de conjuntos, expondremos el axioma de elección. Este es un axioma de la teoría de conjuntos. Hay que aclarar que es posible axiomatizar la teoría de conjuntos. Ver por ejemplo Axiomas de Zermelo-Fraenkel y los Von Neumann-Bernays-Gödel. De estas axiomatizaciones el mencionado axioma forma parte. El axioma de elección ha ocasionado multitud de controversias en torno a su inserción o no en el restante conjunto de axiomas. No vamos a discutir aquí esta controversia ni tampoco la teoría axiomática de conjuntos pues esto nos desviaría de nuetros objetivos. Solo enunciaremos el *axioma de elección*, que usaremos frecuentemente.

Axioma. (Elección) Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de conjuntos no vacios. Entonces existe una función

$$f : I \longrightarrow \bigcup_{i\in I} A_i.$$

con la propiedad que:

$$\forall i \in I : f(i) \in A_i.$$

1.2 Definición de conjuntos coordinables

En esta sección definimos el concepto clave de esta unidad, a saber el concepto de que dos conjuntos sean *coordinables*. Este concepto fue introducido y explotado por George Cantor. Damos una breve discución para motivar nuestra definición.

Cuando alguién cuenta algún conjunto de cosas, establece una correspondencia entre los objetos que cuenta y un subconjunto de números naturales. En el proceso de conteo, algún objeto fue el primero en contarse, y se habrá dicho: “uno” para ese objeto. El proceso continua asignando, sucesivamente, el número dos, tres, etc, a los restantes objetos a contar, hasta que no queden más por contarse. Así, si en este proceso llegamos hasta el 20, por ejemplo, decimos que hay 20 objetos. Aunque no haya que percatarse de eso a los fines prácticos, lo que también hicimos fue establecer una correspondencia o función entre los objetos y el conjunto $\{1,\ldots,20\}$. Más aún, esta correspondencia fue biyectiva pues a cada número le correspondió solo uno de los objetos, es decir la función es inyectiva, y a cada objeto le correspondió algún número, es decir la función es suryectiva. En otras palabras contar un conjunto significa determinar el *intervalo inicial* del conjunto de los números naturales para el cual exista una correspondencia biyectiva con el conjunto que queremos contar. Conocer esto obviamente es inútil a los efectos de contar cosas de la vida cotidiana; no obstante, es una observación fundamental a los efectos de extender lo que llamamos “contar” a conjuntos infinitos. Lo que antecede sugiere la siguiente definición.

Intervalo inicial: un conjunto de la forma: $\{j \in \mathbb{N} : 1 \leq j \leq n\}$, para cierto $n \in \mathbb{N}$. De ahora en más, llamaremos a este conjunto: $\mathbb{N}_n$

Definición 1.2.9 Dados dos conjuntos: A y B, se dirá que ellos son coordinables, escribiremos $A \sim B$, si existe una función biyectiva $f : A \longrightarrow B$.

Esta es nuestra definición de que dos conjuntos, finitos o no, tengan la misma cantidad de elementos. Como veremos, no todos los conjuntos infinitos son coordinables entre si. Es bueno notar que no es difícil demostrar que $\sim$ es una relación de equivalencia (ver Ejercicio 1.9.3 en la página 21). Ahora veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 1.2.1 Consideremos la función $f : \mathbb{N} \longrightarrow \{x \in \mathbb{N} : x \text{ es par}\}$, definida por $f(x) = 2x$. Facilmente se ve que f es una biyección entre los conjuntos indicados. De ahí que: $\mathbb{N} \sim \{x \in \mathbb{N} : x \text{ es par}\}$.

En este ejemplo observamos que, desde nuestro punto de vista, el conjunto de los naturales tiene la misma cantidad de elementos que el conjunto de los naturales pares. Es decir, según nuestra concepción de cantidad de elementos, el todo no es mayor que una de sus partes. Este ejemplo ya lo había mencionado Galileo Galilei.

Ejemplo 1.2.2 Veamos que $\mathbb{R} \sim (0, 1)$. En este caso se puede considerar la función

$$f(x) := \tan\left(\frac{2\pi x - \pi}{2}\right).$$

Dejamos como ejercicio corroborar que la función dada establece una biyección entre los conjuntos involucrados.

Los dos ejemplos anteriores muestran una característica importante de los conjuntos infinitos; un subconjunto de ellos puede ser coordinable con el conjunto total. Mientras que, los conjuntos finitos carecen de esta característica. Ver Ejercicio 1.9.12 en la página 22

1.3 Conjuntos numerables

Hasta el momento hemos hablado de conjuntos finitos e infinitos. Apelamos a la idea que todos nos forjamos en nuestras vidas sobre el significado de estos términos . Pero en este momento estamos en condiciones, a partir de la noción de coordinalidad, de definir de forma matemáticamente precisa los anteriores significados.

Definición 1.3.10 Diremos que un conjunto A es:

1. **finito** si existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $A \sim \mathbb{N}_n$.
2. **infinito** si no es finito.
3. **numerable** si $A \sim \mathbb{N}$.
4. **a lo sumo numerable** si es finito o numerable.

En virtud de que $\sim$ es una realación de equivalencia, y especialmente por el carácter transitivo de esta, si $A \sim B$ y B tiene alguna de las cuatro propiedades de la definición anterior entonces A tendrá esa misma propiedad.

Recordemos que, por definición, una sucesión $\{a_i\}$ de elementos de un conjunto A es una función $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$, donde $a_i = f(i)$. Vemos así que el concepto de numerabilidad está relacionado con el de sucesión. En efecto, si el conjunto A es numerable entonces sus elementos se pueden disponer en una sucesión, donde ningún término se repita.

Es oportuno que observemos que un conjunto no puede ser numerable y finito a la vez; dicho de otra forma, los conjuntos numerables son infinitos. Esto, como hemos definido los conceptos numerable y finito de manera precisa, tiene que ser demostrado.

Teorema 1.3.1 Un conjunto numerable es infinito.

Dem. Supongamos que, por lo contrario, existe un conjunto A numerable y, a la vez, finito. Así tendríamos que: $A \sim \mathbb{N}$ y $A \sim \mathbb{N}_n$, para algún $n \in \mathbb{N}$. Como $\sim$ es una relación de equivalencia , deducimos que $\mathbb{N} \sim \mathbb{N}_n$. Sea, pues, f una biyección: $f : \mathbb{N}_n \longrightarrow \mathbb{N}$. Ahora consideremos el natural[1]: $k := f(1) + \cdots + f(n) + 1$. Como f es una biyección, existe algún m, con $1 \leq m \leq n$ tal que $f(m) = k$. Es decir

$$f(m) = f(1) + \cdots + f(n) + 1.$$

Seguramente, en el miembro derecho, uno de los términos es $f(m)$. Este se puede cancelar con el miembro de la izquierda, quedando

$$0 = f(1) + \cdots + f(m-1) + f(m+1) + \cdots + f(n) + 1.$$

Esta igualdad es absurda pues el miembro de la derecha es mayor que 1. □

Vamos a ver algunos otros conjuntos que también son numerables. Empezamos por el siguiente.

Proposición 1.3.2 Un subconjunto de un conjunto a lo sumo numerable es a lo sumo numerable.

Dem. Sea $A \subset B$, con B a lo sumo numerable. Se puede suponer que $B \subset \mathbb{N}$. ¿Por qué? También podemos suponer que A es infinito, puesto que si fuera finito no habría nada que probar. Definimos una función $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$ por induccion. Puesto que los números naturales son bien ordenados, tenemos que A tiene un primer elemento, digamos, a_1. Definamos

$$f(1) = a_1.$$

Ahora definimos $f(j)$ por:

$$f(j) = \text{el primer elemento del conjunto: } A - \{f(i) : 1 \leq i \leq j-1\}. \tag{1.1}$$

Esta definición es posible pues $A - \{f(i) : 1 \leq i \leq j-1\} \neq \varnothing$, de lo contrario A sería finito. Queda así definida la función f. Resta ver que es biyectiva.

Veamos, en primer lugar, que es inyectiva. Sea $i > j$. En virtud de (1.1), tenemos que $f(i) \notin \{f(k) : 1 \leq k \leq i-1\}$ de lo cual, y como $j < i$, deducimos que $f(i) \neq f(j)$.

Ahora veamos la suryectividad. Supongamos que existe un elemento $n \in A$ tal que $n \notin f(\mathbb{N})$. Recordemos la Definición (1.1). Ella nos dice, en virtud de que $n \notin f(\mathbb{N})$, que $f(i) < n$, para todo i. Esto es debido a que $f(i)$ es el mínimo del conjunto $A - \{f(k) : 1 \leq k \leq i-1\}$ y a que n pertenece a ese conjunto. Tenemos, entonces, que $f(\mathbb{N}) \subset \mathbb{N}_n$. Como consecuencia del Ejercicio 1.9.6 en la página 21 concluímos que $f(\mathbb{N})$ es finito. Pero como f es inyectiva $\mathbb{N} \sim f(\mathbb{N})$. Lo que es una contradicción pues $\mathbb{N}$ es infinito. □

Proposición 1.3.3 El conjuntos $\mathbb{Z}$, de los enteros, es numerable.

Dem. Construímos una función que establece una biyección entre los enteros positivos y los naturales pares y entre los enteros negativos y los naturales impares. La función es la siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+2, & \text{si } x \geq 0; \\ -2x-1, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Dejamos como ejercicio demostrar que, efectivamente, la función f es una biyección entre $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$. □

[1]El símbolo $:=$ se lee *igual por definición*. Esto es, el miembro de la izquierda es definido por el de la derecha

Proposición 1.3.4 El conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es numerable.

Dem. La demostración de este enunciado ya no es tan sencilla. La idea se la debemos a G. Cantor. Primero presentaremos un razonamiento heurístico de la construcción de la biyección entre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ y $\mathbb{N}$. En rigor de verdad, a los efectos lógicos de la demostración, toda esta parte de la demostración se podría obviar; pudiéndose dar la fórmula (1.5) sin dar ninguna justificación de como se nos ocurrió. Elegimos el camino contrario, explicar como obtener la fórmula.

Dispongamos del conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ en un arreglo del tipo de una matríz infinita, como sigue:

$$\begin{tikzcd}
(1,1) \arrow[r] & (1,2) \arrow[dl] & (1,3) \arrow[dl] & (1,4) \arrow[dl] & \dots \\
(2,1) \arrow[urr] & (2,2) \arrow[dl] & (2,3) \arrow[dl] & & \\
(3,1) \arrow[uurrr] & (3,2) \arrow[dl] & & \ddots & \\
(4,1) & & \ddots & & \\
\vdots & & & &
\end{tikzcd}$$

Notar que, además de colocar los pares ordenados, hemos colocado algunas flechas. Estas flechas indican un camino. Este es el camino que seguiremos para enumerar los pares ordenados. Así, construiremos una función f que hará las siguientes asignaciones:

$$\begin{aligned}
f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\
(1,1) &\longmapsto 1 \\
(1,2) &\longmapsto 2 \\
(2,1) &\longmapsto 3 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Observar que en nuestro camino vamos siguiendo diagonales de la matriz, de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo. Cuando llegamos al margen izquierdo de la matriz saltamos al borde superior, para luego descender por la siguiente diagonal. Estas diagonales tienen $1, 2, 3, \dots$ elementos. Agrupemos los números naturales de esa forma, es decir un primer grupo de uno, un segundo de dos y así sucesivamente:

$$\underbrace{1}_{1}\ \underbrace{2\quad 3}_{2}\quad \underbrace{4\quad 5\quad 6}_{3}\quad \underbrace{7\quad 8\quad 9\quad 10}_{4}\dots$$

Obsérvese que

$$\frac{j(j+1)}{2} = \text{número final del agrupamiento } j\text{-ésimo.} \tag{1.2}$$

Por ejemplo: el grupo cuarto tiene por su último elemento el 10, que es igual a 4.5/2. Tambien tenemos que todos los pares ordenados sobre la misma diagonal, tienen la característica de que sus componentes suman lo mismo. Numeremos las diagonales, de izquierda a derecha, empezando por 1. Así tenemos que la diagonal 1 posee el elemento (1,1), la diagonal dos tiene los elementos $(1,2)$ y $(2,1)$, etc. Por lo observado, tenemos la siguiente fórmula, para cualquier par (j,k)

$$j+k-1 = \text{el número de la diagonal a la que pertenece } (j,k). \tag{1.3}$$

El objetivo es poner en correspondencia la diagonal j-ésima con el grupo j-ésimo de naturales. Notar que, en virtud de (1.2), tenemos que

$$\frac{(j+k-1)(j+k)}{2} = \text{es el último número del agrupamiento } j+k-1\text{-ésimo}. \tag{1.4}$$

Así, si al primer miembro de (1.4) le restamos $(j-1)$, obtenemos el número que ocupa el lugar j (contando de atras para adelante) del agrupamiento $j+k-1$ de naturales. Con esto probamos que la función que queriamos construir es:

$$f(j,k) := \frac{(j+k-1)(j+k)}{2} - j + 1. \tag{1.5}$$

El resto de la demostración lo dejamos como ejercicio. Es decir la demostración que (1.5) es biyectiva (ver Ejercicio 1.9.7 en la página 21). □

Como consecuencia del Ejercicio 1.9.4 en la página 21 y de la Proposición anterior, podemos afirmar que si A y B son numerables, entonces $A \times B$ es numerable.

La siguiente propiedad también es útil para determinar si un conjunto es numerable.

Proposición 1.3.5 Sean A y B conjuntos, con B a lo sumo numerable.

1. Supongamos que existe una función inyectiva $f : A \longrightarrow B$. Entonces A es a lo sumo numerable.
2. Supongamos que existe una aplicación suryectiva $f : B \longrightarrow A$. Entonces A es a lo sumo numerable.

Dem. Veamos primero 1. La función f es una biyección entre A y su imagen $f(A)$. Como B es a lo sumo numerable, y como consecuencia de la Proposición 1.3.2 en la página 6, tenemos que $f(A)$ es a lo sumo numerable. Ahora, como $A \sim f(A)$ tenemos que A es a lo sumo numerable.

Ahora probemos 2. Como f es suryectiva, tenemos que $\forall a \in A$: $f^{-1}(\{a\}) \neq \varnothing$. Ahora, por el axioma de elección sabemos que existe al menos una función $g : A \longrightarrow B$ tal que $\forall a \in A : g(a) \in f^{-1}(\{a\})$. Si pudiéramos probar que la función g fuera inyectiva, entonces obtendríamos la tesis a partir del inciso 1, que ya fue demostrado. Veamos, pues, que g es inyectiva. Supongamos que $a_1, a_2 \in A$ y que $a_1 \neq a_2$. Afirmamos que $f^{-1}(\{a_1\}) \cap f^{-1}(\{a_2\}) = \varnothing$. En efecto, si $b \in f^{-1}(\{a_1\}) \cap f^{-1}(\{a_2\})$ entonces por un lado $f(b) = a_1$ y por otro $f(b) = a_2$, lo que es una contradicción pues $a_1 \neq a_2$. Luego, como $g(a_1) \in f^{-1}(\{a_1\})$ y $g(a_2) \in f^{-1}(\{a_2\})$ se tiene que $a_1 \neq a_2$. □

Es interesante hacer notar que, utilizando el teorema anterior, podemos dar otra demostración, más concisa, de la Proposición 1.3.4 en la página anterior. En esta demostración hacemos uso del Teorema Fundamental de la Aritmética. Recordemos lo que este teorema nos dice:

Teorema 1.3.2 (Fundamental de la Aritmética) Todo entero positivo n se representa, de manera única, de la forma $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_j^{\alpha_j}$, donde p_1, p_2,...,p_j son números primos y α_1, α_2,...,α_j son enteros positivos.

Dem. alternativa de la Proposición 1.3.4 Definimos la siguiente función

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ (n, m) &\longrightarrow 2^n 3^m. \end{aligned}$$

Por el Teorema Fundamental de la Aritmética, y mas precisamente por la unicidad de la representación, tenemos, como 2 y 3 son primos, que si $2^n 3^m = 2^{n'} 3^{m'}$ entonces $n = n'$ y $m = m'$. Por consiguiente la función f es inyectiva. Ahora, invocando la Proposición 1.3.5 en la página anterior concluímos que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es a lo sumo numerable. Lo que resta es, solo, ver que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ no es finito. Esto se puede probar observando que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ contiene el subconjunto $A = \{(1, n) : n \in \mathbb{N}\}$ que es coordinable con $\mathbb{N}$, ¿Cuál es la biyección?, y por consiguiente infinito. Así, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ no puede ser finito, si lo fuera, A también lo sería, por ser un subconjunto de él. Lo que concluye la demostración. □

El influyente matemático Karl Weierstrass 1815-1897 fue de los primeros en reconocer la importancia del resultado que afirma la numerabilidad de $\mathbb{Q}$, observó que esto implicaba la existencia de una sucesión $\{a_n\}$ tal que dado cualquier número real a existe una subsucesión $\{a_{n_k}\}$ tal que lím $a_{n_k} = a$.

Ahora podemos demostrar uno de los resultados más interesantes de esta teoría.

Teorema 1.3.3 El conjunto $\mathbb{Q}$ es numerable.

Dem. Sabemos que $\mathbb{Z}$ es numerable y dejamos como ejercicio demostrar que $\mathbb{Z} - \{0\}$ es numerable. Consecuentemente también $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\})$es numerable. Podemos definir la siguiente función:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} - \{0\} &\longrightarrow \mathbb{Q} \\ (n, m) &\longmapsto \frac{n}{m}. \end{aligned}$$

Esta aplicación es suryectiva. Por consiguiente, usando la parte 2. de la Proposición 1.3.5 en la página anterior, obtenemos que $\mathbb{Q}$ es a lo sumo numerable. Así $\mathbb{Q}$ es finito o numerable. Pero como $\mathbb{Q}$ es infinito, pues $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$, tenemos que $\mathbb{Q}$ es numerable. □

Traduciendo nuestra interpretación de que dos conjuntos coordinables tienen la misma cantidad de elementos, vemos que hay tantos racionales como naturales. Esta afirmación es un tanto desconcertante. Sabemos que los racionales son densos dentro de los reales. Esto quiere decir que dentro de cada intervalo abierto, por chico que este fuere, siempre hay números racionales dentro. Sin embargo, uno puede poner en correspondencia $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Q}$.

A esta altura pareciera que todos los conjuntos resultan ser numerables, pero ya veremos, en la sección siguiente, que no es así.

Lema 1.3.1 Todo conjunto infinito tiene un subconjunto numerable.

Dem. Sea A un conjunto infinito. Usaremos un argumento similar a la demostración de la Proposición 1.3.2 en la página 6. Definimos inductivamente una función $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$ de la siguiente manera. Puesto que A es infinito, en particular, es no vacio, así podemos encontrar un elemento $a_1 \in A$. Ponemos entonces

$$f(1) = a_1.$$

Ahora, supongamos que tenemos definida la función f, de tal manera que sea inyectiva, para $j = 1, \dots n$. Llamemos $f(j) = a_j$, para $j = 1, \dots, n$. Como A es infinito no puede ocurrir que $A - \{f(1), \dots, f(n)\} = \varnothing$, de lo contrario f además de ser inyectiva, de $\mathbb{N}_n$ en A, sería suryectiva; y de este modo $A \sim \mathbb{N}_n$ lo que implica que A es finito, contrariando nuestra hipótesis. Por consiguiente, podemos encontrar $a_{n+1} \in A - \{f(1), \dots, f(n)\}$. Definimos $f(n+1) = a_{n+1}$.

Ahora veamos que f así definida es inyectiva. Sea $i \neq j$, podemos suponer que $i < j$. Sabemos que:

$$f(j) \notin \{f(1), \dots, f(j-1)\}.$$

Seguramente $f(i)$ es un elemento del conjunto de la derecha, en la relación anterior, de modo que $f(j) \neq f(i)$, lo que demuestra la inyectividad. Ahora, f es biyectiva de $\mathbb{N}$ en $f(\mathbb{N})$. Por consiguiente $f(\mathbb{N})$ es un subconjunto de A numerable. $\square$

La siguiente proposición es útil para probar que algunos conjuntos son numerables. Antes de enunciarla, haremos una observación útil a la demostración. Afirmamos que si A es un conjunto a lo sumo numerable, entonces existe una función suryectiva de $\mathbb{N}$ en A. En efecto, si A es numerable, esto es claro puesto que existe una biyección de $\mathbb{N}$ en A. Si, por el contrario, A es finito, entonces existe una biyección de $\mathbb{N}_n$, para algún $n \in \mathbb{N}$, en A; en este caso extendemos la biyección a todo $\mathbb{N}$ de cualquier forma[2], la función resultante es suryectiva, aunque ya no inyectiva.

Proposición 1.3.6 Sea I un conjunto de índices a lo sumo numerable. Supongamos que para cada $i \in I$ tenemos un conjunto A_i que, también, es a lo sumo numerable. Entonces $\bigcup_{i\in I} A_i$ es a lo sumo numerable.

Dem. Como vimos, para cada $i \in I$ existe una función suryectiva $f_i : \mathbb{N} \longrightarrow A_i$. Definimos:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} \times I &\longrightarrow \bigcup_{i\in I} A_i \\ (n, i) &\longmapsto f_i(n). \end{aligned}$$

Esta función es suryectiva, pues si

$$a \in \bigcup_{i\in I} A_i,$$

entonces $a \in A_{i_0}$, para algún i_0; ahora, utilizando la suryectividad de f_{i_0}, obtenemos un $n \in \mathbb{N}$ tal que $f_{i_0}(n) = a$. Es decir $f(n, i_0) = a$. Esto prueba que f es suryectiva. Ahora, como $\mathbb{N} \times I$ es a lo sumo numerable, en rigor es numerable, y por la Proposición 1.3.5 en la página 8, obtenemos la tesis. $\square$

1.4 Un conjunto no numerable

Vimos que $\mathbb{N}$ es numerable, por definición, y que $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ son también numerables. Ahora mostraremos un conjunto que no es a lo sumo numerable. No será otro que el conjunto de los numeros reales.

Teorema 1.4.4 El conjunto $\mathbb{R}$ no es a lo sumo numerable.

Dem. Supongamos, por el contrario, que $\mathbb{R}$ es a lo sumo numerable. En virtud de la Proposición 1.3.2 en la página 6, tendríamos que el intervalo $[0, 1)$ sería también a lo sumo numerable. Como él es infinito entonces $[0, 1)$ sería numerable. Sea, entonces, una función biyectiva $f : \mathbb{N} \longrightarrow [0, 1)$. Definamos $a_j := f(j)$.

El arguemnto de esta demostración se conoce como argumento diagonal de Cantor. Es un técnica de demostración ideada por George Cantor. Actualmente es utilizada frecuentemente para resolver otros tipos problemas

Como es sabido, cada número real r admite un desarrollo en expresión decimal infinita del tipo

$$r = 0.r_1r_2r_3\ldots.$$

Un pequeño inconveniente lo presenta el hecho de que esta expresión decimal no es única, puesto que, por ejemplo: $2{,}000\cdots = 1{,}999\ldots$. Para abolir este problema convenimos que en nuestros desarrollos decimales no usaremos expresiones que tienen todos 9 a partir de cierto momento. Con esta convención, el desarrollo decimal es único.

[2] Por ejemplo: ponemos $f(j) = 1$ para $j > n$

A los fines de clarificar nuestra demostración, es útil poner a la sucesión a_j de la siguiente manera :

$$\begin{aligned}
a_1 &= 0.a_{1,1}a_{1,2}a_{1,3}\dots \\
a_2 &= 0.a_{2,1}a_{2,2}a_{2,3}\dots \\
&\vdots \\
a_n &= 0.a_{n,1}a_{n,2}a_{n,3}\dots \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Ahora definimos un número $r = 0.r_1r_2\cdots \in [0,1)$, tomando en cuenta los valores de $a_{i,j}$ sobre la digonal principal, que no será igual a ninguno de los a_j. La definición es la siguiente:

$$r_n := \begin{cases} 2, & \text{si } a_{n,n} < 2; \\ 1, & \text{si } a_{n,n} \geq 2. \end{cases}$$

Tenemos que $r \neq a_j$ para todo j, pues, estos números seguramente son distintos en el lugar j de su desarrollo. Observar que si a_j tiene un número menor que 2 en ese lugar, entonces $r_j = 2$, en cambio si un número mayor o igual que 2 ocupa el lugar j de a_j, entonces $r_j = 1$. Por ende, como dijimos r no es ningún a_j. Esto demuestra que la función f no es suryectiva. □

Utilizando el Ejemplo 1.2.2 en la página 5 y el Ejercicio 1.9.9 en la página 21, vemos que $\mathbb{R} \sim (0,1) \sim [0,1]$. Para cualquier intérvalo no trivial[3] I, ya sea abierto o cerrado, existe una biyección, de hecho una función lineal, de I en el intérvalo $(0,1)$ o $[0,1]$, dependiendo de si I es cerrado o abierto. Vemos así que todos los intérvalos no triviales son coordinables entre si y a su vez con $\mathbb{R}$.

1.5 Una aplicación: existencia de números trascendentes

En esta sección desarrollaremos una aplicación de los conceptos desarrollados en las secciones previas para demostrar un resultado de la matemática pura. Veremos como estos se pueden usar para demostrar la existencia de números trascendentes. Antes empezaremos con algunas definiciones.

Un polinomio es una expresión de la forma:

$$P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n,$$

donde $n \in \mathbb{N}$ se llama *grado* del polinomio y los a_j *coeficientes* del polinomio. Escribiremos que $P \in \mathbb{Z}[X]$, $P \in \mathbb{Q}[X]$ o $P \in \mathbb{C}[X]$ si los coeficientes son enteros, racionales o complejos respectivamente. Una raíz del polinomio P es un número $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que

$$P(\alpha) = 0.$$

Observar que un número racional $q = n/m$ es solución (o raíz del polinomio) de la siguiente ecuación:

$$P(X) := mX - n = 0.$$

Este polinomio P es de primer grado y además $P \in \mathbb{Z}[X]$. Reciprocamente, si q es solución de una ecuación polinomial $P(X) = 0$, donde P es de primer grado y con coeficientes en $\mathbb{Z}$, entonces q es racional.

Hemos aprendido que hay dos clases de reales, *racionales e irracionales*. En esta sección expondremos otros tipos de números reales, a saber los *trascendentes*.

[3] Por un intérvalo trivial entendemos un intérvalo que se reduce a un punto

Tomemos por caso el número $\sqrt{2}$, que como sabemos es irracional. A pesar de ello $\sqrt{2}$ es solución de una ecuación a coeficientes enteros de segundo grado. Nos referimos a:

$$X^2 - 2 = 0.$$

Vemos que $\sqrt{2}$ tiene, si se nos permite por el momento esta expresión, un grado de irracionalidad no muy grande, puesto que es solución de una ecuación de segundo grado a coeficientes enteros. A los números irracionales satisfaciendo esta propiedad se los llama *irracionales cuadráticos*. Nos preguntamos ahora si existiran números que, acorde con la perspectiva anterior, tengan el mayor grado de irracionalidad posible. Esto es que no sean solución de ninguna ecuación polinomial a coeficientes enteros, no importa del grado que fuere. Llamaremos a estos números, cuya existencia es hipotética por el momento, *trascendentes*. A los restantes números los llamaremos *algebraicos*. Denotaremos por $\mathbb{A}$ al conjunto de números algebraicos y por $\mathbb{T}$ al conjunto de números trascendentes. Cualquier número que sea obtenido por medio de raices, del grado que fuere, de números enteros son algebraicos. Esto indica que resolver el problema planteado puede no ser fácil.

En esta sección mostraremos el argumento usado por G. Cantor, en 1874, para demostrar la existencia de números trascendentes. La situación es la siguiente: Cantor demostró que el conjunto de los números algebraicos es numerable. Luego, si el conjunto de los trascendentes lo fuera, también lo sería el conjunto $\mathbb{R}$ (unión de dos numerables es numerable), lo cual no es cierto. Asi es que no solo los números trascendentes existen, sino que existen tantos como números reales hay. Dicho de otro modo, los números trascendentes son los más comunes entre los números reales. Los racionales, por el contrario, son una excepción, habiendo de ellos solo una cantidad numerable.

Es bueno comentar que hubo matemáticos que se opusieron a G.Cantor y a su Teoría de Conjuntos. Quizas la gota que rebalso el vaso fue la anterior demostración de la existencia de números trascendentes. Pues es una manifestación de que la teoría de Cantor podía ser utilizada para demostrar cuestiones matemáticas profundas que no aparentaban tener nada que ver con la teoría de conjuntos.

La clave de la demostración es el siguiente lema.

El problema de la existencia de números trascendentes fue resuelto por Carl Louis Ferdinand von Liouville en 1844. El demostró que el número

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}}$$

es trascendente. Posteriormente C. Hermite demostró en 1873 que $e = 2{,}7172...$ es trascendente y Lindemann, en 1882, que π también lo es.

Uno de los mayores opositores a la Teoría de Conjunto de Cantor fue Leopold Kronecker (1823-1891). Kronecker rechazó la demostración de existencia de números trascendentes de Cantor. Sostuvo que había que evitar los argumentos con conjunto infinitos y construir la matemática a partir de los números naturales por medio de argumentos finitistas.

Lema 1.5.2 El conjunto $\mathbb{Z}[X]$ es numerable.

Dem. Un polinomio en $\mathbb{Z}[X]$ y de grado n se puede identificar con la $n+1$-upla de enteros formada por sus coeficientes. Teniendo en cuenta esto, definimos la siguiente función:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z}[X] &\longrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}^n \\ a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n &\longmapsto (a_0, a_1, \ldots, a_n) \end{aligned},$$

donde

$$\mathbb{Z}^n := \underbrace{\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}}_{n \text{ veces}}.$$

Por lo dicho con anterioridad, esta función es biyectiva.

Ahora bien, el conjunto $\mathbb{Z}^n$ es numerable. Podemos probar esto usando inducción y el hecho de que el producto cartesiano de conjuntos numerables es numerable. Así, como consecuencia de la Proposición 1.3.6 en la página 10 obtenemos que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}^n$$

es numerable. Como f es una biyección, $\mathbb{Z}[X]$ es numerable. □

Como corolario obtenemos que el conjunto de números algebraicos es numerable.

Corolario 1.5.1 El conjunto de números algebraicos es numerable.

Dem. Se tiene que
$$\mathbb{A} = \bigcup_{P \in \mathbb{Z}[X]} \{\alpha : P(\alpha) = 0\}.$$
Como es sabido de los cursos de álgebra, dado un polinomio P, de grado n, el conjunto $\{\alpha : P(\alpha) = 0\}$ es finito, es mas, tiene a lo sumo n elementos. Ahora, en virtud de esto y la Proposición 1.3.6 en la página 10, obtenemos que $\mathbb{A}$ es a lo sumo numerable. Ciertamente, este conjunto es infinito, pues $\mathbb{N}$ está contenido en él, de modo que no tiene mas chance que la de ser numerable. □

Como otro corolario obtenemos que $\mathbb{T} \neq \varnothing$. Pues de lo contrario, como $\mathbb{R} = \mathbb{A} \cup \mathbb{T}$ y como la unión de a lo sumo numerables es a lo sumo numerable, tendríamos que $\mathbb{R}$ sería a lo sumo numerable, que es una contradicción. Pero en realidad podemos demostrar algo más fuerte que $\mathbb{T} \neq \varnothing$; podemos probar que $\mathbb{T} \sim \mathbb{R}$. Esto es consecuencia del siguiente teorema, que afirma que al sacarle un conjunto numerable a un conjunto coordinable con $\mathbb{R}$ no alteramos la cantidad de elementos del conjunto.

Lema 1.5.3 Sean $A \sim \mathbb{R}$ y $B \sim \mathbb{N}$ tales que $B \subset A$. Entonces $A - B \sim \mathbb{R}$.

Dem. Tenemos que $A - B$ es infinito, de lo contrario, por la Proposición 1.3.6 en la página 10, $A = (A - B) \cup B$ sería a lo sumo numerable, contradiciendo nuestras hipótesis. Como $A - B$ es infinito, por el Lema 1.3.1 en la página 9, obtenemos un conjunto numerable $C \subset A - B$. Como $B \cup C$ y C son numerables, existe una biyección $f : B \cup C \longrightarrow C$. Ahora definimos la siguiente función:
$$\begin{aligned} \hat{f} : A &\longrightarrow A - B \\ x \notin B \cup C &\longmapsto x \\ x \in B \cup C &\longmapsto f(x) \end{aligned}.$$
No es dificil demostar que $\hat{f}$ es una biyección, de donde $A - B \sim A \sim \mathbb{R}$. □

Corolario 1.5.2 $\mathbb{T} \sim \mathbb{R}$.

Dem. Aplicando el lema anterior, con $A = \mathbb{R}$ y $B = \mathbb{A}$, obtenemos la tesis. □

1.6 Comparación de cardinales

En esta sección introduciremos una relación de orden entre conjuntos, esta, intuitivamente, corresponderá a la noción de: “tiene más elementos”. Para conjuntos finitos todos estamos muy familiarizados con esta noción. También se suele decir que un conjuto tiene un cardinal mayor que el otro, para expresar esta idea de mayor cantidad de elementos. Informalmente ya hemos usado esta noción al decir que había más números reales que naturales. No obstante, en aquel momento, esa afirmación solo constituyó una interpretación de cierto resultado, otra manera de decirlo que fuera común a nuestra experiencia. En todo caso, no fue ni una definición ni nada que fuera plausible de ser demostrado. En esta sección, formalizaremos el concepto y posteriormente analizaremos algunas consecuencias de este.

Intuitivamente, decíamos que había más reales que naturales por que $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ y por que[4] $\mathbb{N} \nsim \mathbb{R}$. Si queremos comparar dos conjuntos cualesquiera, puede ocurrir que ninguno de ellos sea un subconjunto del otro, o más aún que estos conjuntos sean disjuntos. ¿Cómo procedemos en ese caso?. Veamos un ejemplo. Consideremos el conjunto

[4] Por $\nsim$ entendemos no coordinable

$\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \times \{0\} = \{(n, 0) : n \in \mathbb{N}\}$. ¿Cómo podríamos comparar este conjunto con $\mathbb{R}$?. Tenemos que $\mathbb{N}_0 \cap \mathbb{R} = \varnothing$, sin embargo, dentro de $\mathbb{R}$ tenemos un subconjunto, precisamente $\mathbb{N}$, que es coordinable con $\mathbb{N}_0$ a traves de la biyección definida por $f(n, 0) = n$. Podríamos decir entonces que, como $\mathbb{N}$ tiene menos elementos que $\mathbb{R}$ y $\mathbb{N}_0$ tiene la misma cantidad que $\mathbb{N}$, entonces $\mathbb{N}_0$ tiene menos que $\mathbb{R}$. Notemos que la función f, que es biyectiva de $\mathbb{N}_0$ en $\mathbb{N}$, es una aplicación inyectiva de $\mathbb{N}_0$ en $\mathbb{R}$. Esperemos que la discución de este ejemplo muestre la siguiente definición como natural.

Definición 1.6.11 Dados dos conjuntos A y B, diremos que $A \precsim B$ si existe una aplicación inyectiva $f : A \longrightarrow B$. Si, además, $A \nsim B$ diremos entonces que $A \prec B$.

Ejemplo 1.6.3 Si A es un conjunto infinito, entonces $\mathbb{N} \precsim A$. Esto es consecuencia del Lema 1.3.1 en la página 9
Ejemplo 1.6.4 Si A es un conjunto finito entonces $A \prec \mathbb{N}$. Esto es consecuencia de la definición y del Teorema 1.3.1 en la página 5.
Ejemplo 1.6.5 Tenemos las siguientes relaciones

$$\mathbb{N} \sim \mathbb{Z} \sim \mathbb{Q} \sim \mathbb{A} \prec \mathbb{T} \sim \mathbb{R}.$$

Ejemplo 1.6.6 Si $A \prec B$, $A \sim C$ y $B \sim D$, entonces $C \prec D$. A continuación justificamos esta afirmación. A causa de las hipótesis, existen: una función inyectiva $f : A \longrightarrow B$ y funciones biyectivas: $g : C \longrightarrow A$ y $h : B \longrightarrow D$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] & B \arrow[d, "h"] \\
C \arrow[u, "g"] \arrow[r, "h \circ f \circ g"] & D
\end{tikzcd}$$

La función $h \circ f \circ g$ es inyectiva, lo que demuestra que $C \precsim D$. Deberíamos ver que $C \nsim D$. Supongamos que, por el contrario, $C \sim D$. Sea $\phi : C \longrightarrow D$ una biyección entonces tendríamos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "h^{-1} \circ \phi \circ g^{-1}"] \arrow[d, "g^{-1}"'] & B \\
C \arrow[r, "\phi"] & D \arrow[u, "h^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

y, puesto que las funciones intervinientes son todas biyecciones, tendríamos que $A \sim B$, contradiciendo, esto, nuestras hipótesis.

En el siguiente teorema podemos ver que para cualquier conjunto A hay otro conjunto que es mas grande, en el sentido de la Definición 1.6.11. Este conjunto será el conjunto de partes $\mathscr{P}(A)$.

Teorema 1.6.5 (Cantor) Para todo conjunto A, $A \prec \mathscr{P}(A)$.

Dem. Tenemos que probar que: $A \precsim \mathscr{P}(A)$ y $A \nsim \mathscr{P}(A)$. La siguiente función:

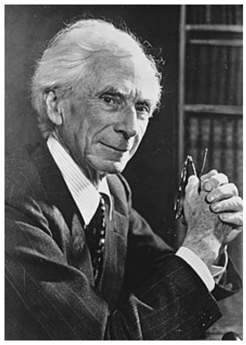
$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow \mathscr{P}(A) \\ a &\longmapsto \{a\} \end{aligned}$$

es inyectiva, de modo que $A \precsim \mathscr{P}(A)$.

Supongamos que existe una biyección $g : A \longrightarrow \mathscr{P}(A)$. Definimos el subconjunto B de A de la siguiente manera

$$B := \{a \in A : a \notin g(a)\}.$$

Como g es suryectiva, existe un $b \in A$ tal que $g(b) = B$. ¿Será o no cierto que $b \in B$? Si es cierto, por definición de B, tendríamos que $b \notin g(b) = B$, lo que es una contradicción. Si fuera falso, es decir $b \notin B$, nuevamente por la definición de B, deducimos que $b \in g(b) = B$, otra contradicción. De modo que, no importando cual, todos los casos nos conducen a una contradicción que es fruto de suponer que $A \sim \mathscr{P}(A)$. □



Bertrand Russel (1872-1970), inspirado en la demostración de Cantor sobre la relación entre la cardinalidad de A y $\mathscr{P}(A)$, construyo un *paradoja* (esto es un razonamiento aparentemente coprrecto que lleva a una contradicción) de la teoría de conjuntos. Esta paradoja consiste en definir

$$B = \{A : A \notin A\}.$$

Puede verse facilmente que cualquiera de las siguientes afirmaciones: $A \in A$ y $A \notin A$ lleva a una contradicción.

Una propiedad importante de $\precsim$ es su atisimetría, esta propiedad no es facil de probar.

Teorema 1.6.6 (Schröder-Bernstein) Si $A \precsim B$ y $B \precsim A$ entonces $A \sim B$.

Dem. Por las hipótesis, existen funciones inyectivas $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow A$. Si alguna de estas funciones fuera suryectiva, entonces el teorema ya estaría probado. De modo que podemos suponer que no son suryectivas. Notar que $g : B \longrightarrow g(B)$ es una función biyectiva. Existe por lo tanto una función inversa, que es biyectiva, $g^{-1} : g(B) \longrightarrow B$. Construiremos una biyección de $\tilde{f} : A \longrightarrow B$, con el auxilio de f y g^{-1}, de la siguiente manera: Buscamos un subconjunto $\tilde{A} \subset A$ de forma tal que la función:

$$\tilde{f}(a) := \begin{cases} f(a), & \text{si } a \in \tilde{A}; \\ g^{-1}(a), & \text{si } a \notin \tilde{A}. \end{cases} \tag{1.6}$$

sea biyectiva. Un primer requerimiento para esta función es que $\tilde{A}^c \subset g(B)$. Esto a causa de que si $a \in \tilde{A}^c$ entonces le aplicaremos g^{-1} a ese a, por consiguiente a debería estar en el dominio de g^{-1}, que es $g(B)$. Dicho de otro modo, se debe cumplir que $g(B)^c \subset \tilde{A}$. Por simplicidad pongamos $A_1 := g(B)^c$ y $B_1 := f(A_1)$. Ver la Figura 1.1 en la página siguiente

Una primera aproximación sería intentar la construcción con $\tilde{A} = g(B)^c$. Seguramente así la función $\tilde{f}$, ver (1.6), está bien definida. La función $\tilde{f}$ será suryectiva, pues g^{-1} es suryectiva de $g(B)$ en B. No obstante, con esa elección de $\tilde{A}$, la función $\tilde{f}$ no es inyectiva pues cada elemento de B_1 es imágen, por esta $\tilde{f}$, de dos elementos, uno en A_1 y otro en $g(B)$. De modo que esta elección de $\tilde{A}$ todavía no nos sirve.

Lo que vamos a hacer ahora es agregarle a $\tilde{A}$ el conjunto de todos los elementos de $g(B)$ tales que g^{-1} los lleva a B_1. Este conjunto es $A_2 := g(B_1)$. Definamos además $B_2 := f(A_2)$. Ahora $\tilde{f}$ llevará $A_1 \cup A_2$ en $B_1 \cup B_2$. Nos preguntamos, ahora, si la elección $\tilde{A} := A_1 \cup A_2$ nos servirá. Lamentablemente, la respuesta es no[5]. Al haber agrandado $\tilde{A}$ también se nos agrandó el conjunto de puntos en B que son imagen de dos puntos, antes era el B_1, ahora apareció el B_2. De modo que continuamos el proceso, es decir, definimos $A_3 := g(B_2)$, $B_3 := f(A_3)$ y así sucesivamente, ver Figura 1.2 en la página 17 . Nunca llegaremos, en una cantidad finita de pasos, al conjunto $\tilde{A}$ con la propiedad deseada, puesto que al cabo de n pasos se nos genera el conjunto B_n donde las imagenes continuan superponiendosé. ¿Qué haremos entonces?. Lo que se hará es seguir este proceso indefinidamente, generando una sucesión de conjuntos A_n y B_n, y luego definir:

$$\tilde{A} := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n. \tag{1.7}$$

Definimos inductivamente conjuntos A_n y B_n de la siguiente manera:

$$\begin{cases} A_1 = g(B)^c, & B_1 = f(A_1) \\ A_{n+1} = g(B_n), & B_{n+1} = f(A_{n+1}) \end{cases} .$$

[5]Podría ser que si, si la función f hubiera sido biyectiva desde un principio, cosa que descartamos

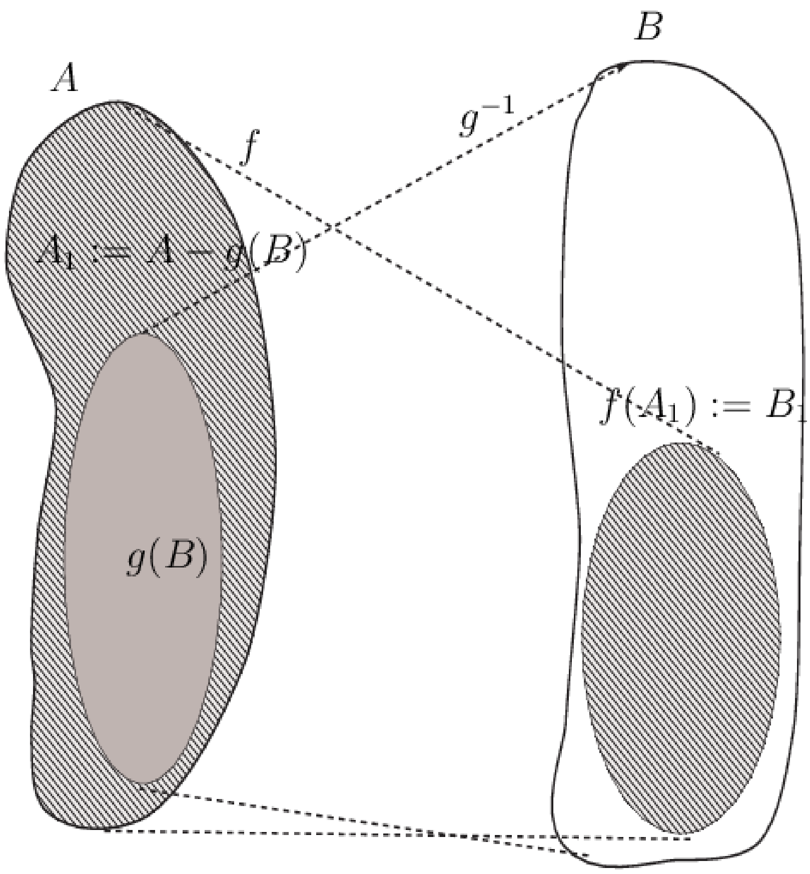


Figura 1.1: Las funciones f y g^{-1}

Definamos $\tilde{A}$ como en (1.7) y $\tilde{f}$ como en (1.6). Veamos que $\tilde{f} : A \longrightarrow B$ es biyectiva.

Empecemos por la inyectividad. Sean $a, a' \in A$ dos puntos cualesquiera tales que $\tilde{f}(a) = \tilde{f}(a')$. Si a y a' están simultaneamente en $\tilde{A}$, o en $\tilde{A}^c$, tenemos que $a = a'$ como consecuencia de que f y g^{-1} son inyectivas. Consideremos entonces el caso $a \in \tilde{A}$ y $a' \notin \tilde{A}$. Debemos llegar a una contradicción pues estamos suponiendo indirectamente que $a \neq a'$, por estar en conjuntos disjuntos, y que $\tilde{f}(a) = \tilde{f}(a')$. Tenemos que, para algún $n \in \mathbb{N}$, $a \in A_n$. Además, por la definición de $\tilde{f}$, $f(a) = g^{-1}(a')$. Por consiguiente $g(f(a)) = a'$. Como $a \in A_n$, $f(a) \in B_n$ y $a' = g(f(a)) \in A_{n+1}$. Esto contradice que $a' \notin \tilde{A}$.

Veamos ahora la suryectividad. Sea $b \in B$ cualquier punto. Si $b \in B_n$, para algún n, como $B_n = f(A_n)$, ciertamente existe un elemento $a \in A_n$ tal que $f(a) = b$. Ahora, por la definición de $\tilde{f}$, $\tilde{f}(a) = f(a) = b$. Supongamos, pues, que b no está en ningún B_n. Como una afirmación intermedia, probaremos que $g(b)$ no está en ningún A_n. Supongamos, por el contrario, que existe un n tal que $g(b) \in A_n$. Tiene que ser $n > 1$, pues $A_1 = g(B)^c$ y $g(b) \in g(B)$. Así, por su definición y como $n > 1$, el conjunto A_n es igual a $g(B_{n-1})$. De modo que $g(b) \in g(B_{n-1})$. Esto implica que existe un $b' \in B_{n-1}$ tal que $g(b) = g(b')$. Pero, como g es inyectiva $b = b'$ y, por ende, $b \in B_{n-1}$. Contradiciendo esto que b no estaba en ningún B_n. Probamos, así, que $g(b)$ no está en ningún A_n. Por lo tanto $\tilde{f}(g(b)) = g^{-1}(g(b)) = b$. Vale decir $b = \tilde{f}(a)$ con $a = g(b)$. Que era lo que queríamos probar. $\square$

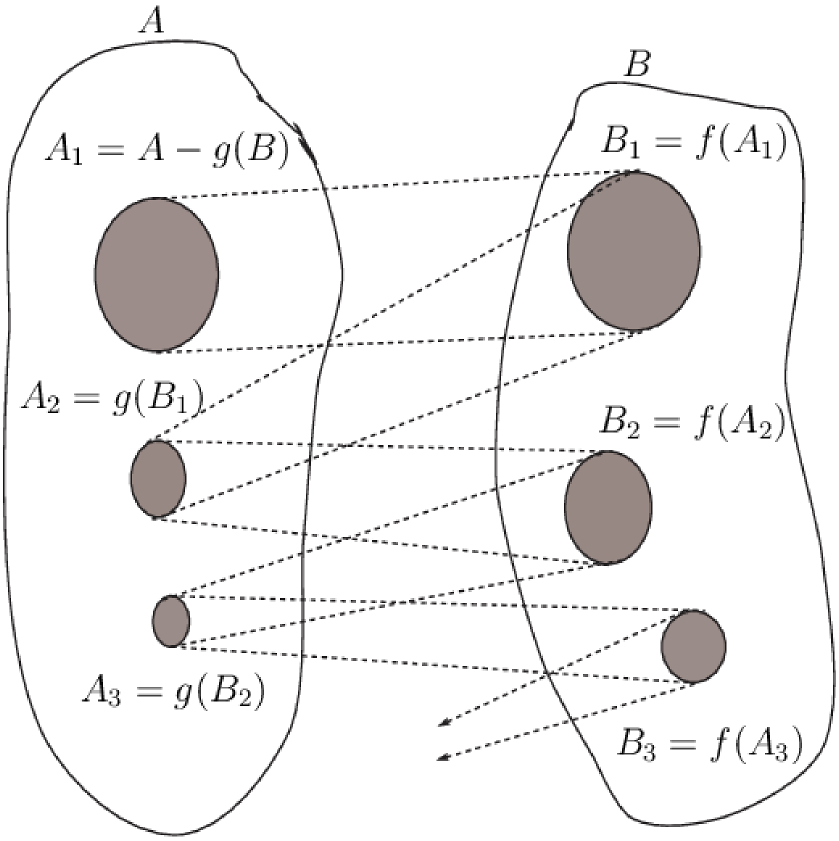


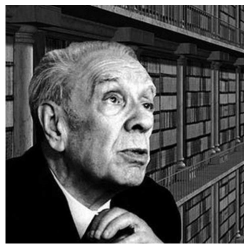
Figura 1.2: Demostración del teorema de Schröder-Berstein

1.7 Números Cardinales

Hasta el momento hemos introducido la noción de cuando dos conjuntos tienen la misma cantidad de elementos. Pero no hemos definido el concepto de cantidad de elementos de un conjunto digamos A. A grandes rasgos esto debería ser una característica de todos los conjuntos coordinables con A y se denominará *cardinal* del conjunto A y lo denotaremos por $\#A$. La definición precisa demanda desarrollar la Teoría de números ordinales, que no es la intención de estas notas. Nos vamos a tomar la licencia de invocar el concepto de cardinal a partir de la idea intuitiva que dimos de este concepto.

Se sabe que los números cardinales están ordenados con la relación de orden definida en la sección anterior. Concretamente escribiremos $\#A < \#B$ cuando $A \prec B$. Se puede demostrar que este un buen orden, en el sentido que todo conjunto acotado inferiormente tiene primer elemento.

Desde George Cantor es costumbre denotar los números cardinales con letras del alfabeto hebreo. Así el primer *cardinal transfinito*[6] es el que le corresponde a los números naturales y se denota por $\aleph_0$. Como el conjunto de cardinales es bien ordenado existe un sucesor de $\aleph_0$ al que denominamos naturalmente $\aleph_1$. Al cardinal que corresponde a los números reales lo denominamos c. Sabemos que $\aleph_0 < \aleph_1 \leq c$ y George Cantor conjeturó que $c = \aleph_1$. Esta fue una de las más famosas conjeturas de la matemática y se denominó La Hipótesis del Continuo. George Cantor fracasó en hallar una demostración de la hipótesis del continuo. El gran matemático Kurt Gödel probó en 1938 que esta hipótesis es consistente con el sistema axiomático de la Teoría de conjuntos de Zermelo y Fraenkel, y por tanto puede ser tomado como un axioma nuevo para la teoría de conjuntos. Sin embargo, en 1963 Paul Cohen probó que la negación de la hipótesis del continuo también es consistente con los axiomas ZF, lo cual prueba que dicha hipótesis es totalmente independiente de los axiomas ZF. Esta situación es similar a la de



«Borges y la matemática es un libro de ensayo de 2006 de Guillermo Martínez que relata como varias ideas en la matemática moderna se hallan en la obra literaria del autor argentino Jorge Luis Borges, incluyendo conceptos como la teoría de conjuntos, recursión, la teoría de caos, y sucesión matemática infinita. Aunque los enlaces más fuertes que Borges tuvo con la matemática son a través de la teoría de conjuntos infinitos de Georg Cantor. El título del cuento El Aleph se alude al uso de la letra hebrea de Cantor, álef (ℵ) por denotar cardinalidad de conjuntos transfinitos» (Wikipedia)

[6]Como es usual adoptaremos la denominación de transfinito en lugar de infinito como usamos hasta aquí

las geometrías no euclídeas.

No contento con introducir los números cardinales transfinitos George Cantor introdujo una aritmética entre ellos. Así por ejemplo si $\aleph_a$ y $\aleph_b$ son dos cardinales, buscamos dos conjuntos disjuntos cualesquiera A y B tales que $\#A = \aleph_a$ y $\#B = \aleph_b$ y definimos

$$\aleph_a + \aleph_b = \#A \cup B$$
$$\aleph_a \times \aleph_b = \#A \times B$$
$$\aleph_a^{\aleph_b} = \#A^B$$
$$2^{\aleph_a} = \#2^A$$

Algunas relaciones que hemos demostrado

$$\begin{array}{lll} \forall\aleph : \aleph & < 2^{\aleph} & \text{(Por Teorema 1.6.5)} \\ \aleph_0 \times \aleph_0 & = \aleph_0 & \text{(Por Proposición 1.3.4)} \\ \aleph_0 + \aleph_0 & = \aleph_0 & \text{(Por Proposición 1.3.6)} \end{array}$$

1.8 Aplicaciones del Teorema de Schröder-Berstein

El teorema de Schröder-Berstein es una herramienta potente para probar coordinabilidad de conjuntos puesto que nos permite establecer coordinabilidad mostrando sólo que existen funciones inyectivas entre los conjuntos.

Habíamos visto que $\mathbb{R} \nsim \mathbb{N}$. ¿ Qué ocurre con $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$,...? ¿Serán estos conjuntos más "numerosos" que $\mathbb{R}$? Esto es: ¿Serán no coordinables con $\mathbb{R}$?. Recordando que $\#\mathbb{R} = c$ nos preguntamos si $c < c^2$. La respuesta a esta pregunta es negativa, es decir $\mathbb{R}^n \sim \mathbb{R}$ esto es $c^n = c$. Para ver esto basta demostrar que $(0,1)^2 \sim (0,1)$. El caso general es consecuencia del caso $n = 2$, usando inducción, el Ejemplo 1.2.2 en la página 5 y el Ejercicio 1.9.4 en la página 21.

Teorema 1.8.7 $(0,1)^2 \sim (0,1)$. En otras palabras $c^2 = c$.

Dem. Observar que $(0,1) \precsim (0,1)^2$. Para demostrarlo considerar la función inyectiva $f(x) = (x, 1/2)$.

Veamos que $(0,1)^2 \precsim (0,1)$. Debemos construir una función inyectiva $f : (0,1)^2 \longrightarrow (0,1)$. Sea $(x,y) \in (0,1)^2$. Consideremos las expresiones decimales $x = 0.x_1x_2...$ e $y = 0.y_1y_2...$, donde x_i e y_i son enteros entre 0 y 9, y no son todos 9 a partir de un momento en adelante. Entonces escribimos:

$$f(x,y) := 0.x_1y_1x_2y_2....$$

Es decir f intercala las expresiones decimales de x e y. Esta función es inyectiva, puesto que dos expresiones decimales iguales tienen todos sus dígitos correspondientes iguales. Esto concluye la demostración. □

Es bueno notar que la función f, definida en la demostración anterior, no es suryectiva. Un número que no es imagen de ningún par es $0{,}909090...$. ¿Por qué será esto?

Por el Teorema 1.6.5 en la página 14 tenemos que $\mathbb{N} \prec \mathscr{P}(\mathbb{N})$. Desmostramos, además, que $\mathbb{N} \prec \mathbb{R}$. Nos preguntamos, ahora, que relación unirá $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ con $\mathbb{R}$. Con el siguiente teorema probaremos que aquellos conjuntos son coordinables.

Teorema 1.8.8 $\mathscr{P}(\mathbb{N}) \sim \mathbb{R}$. En otras palabras $2^{\aleph_0} = c$.

Dem. Probaremos que $\mathscr{P}(\mathbb{N}) \precsim \mathbb{R}$ y después que $\mathscr{P}(\mathbb{N}) \succsim \mathbb{R}$.

Como $\mathscr{P}(\mathbb{N}) \sim \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ (Ejercicio 1.9.10 en la página 21), y por el Ejercicio 1.9.4 en la página 21 inciso 4, probaremos que $\mathscr{P}(\mathbb{N}) \precsim \mathbb{R}$ si podemos probar que $\mathbf{2}^{\mathbb{N}} \precsim \mathbb{R}$. Para

«Kurt Gödel; Brünn, Imperio austrohúngaro, actual República Checa, 28 de abril de 1906-Princeton, Estados Unidos; 14 de enero de 1978) fue un lógico, matemático y filósofo austríaco.
Se le considera uno de los lógicos más importantes de todos los tiempos. Su trabajo ha tenido un impacto inmenso en el pensamiento científico y filosófico del siglo XX. Gödel intentó emplear la lógica y la teoría de conjuntos para comprender los fundamentos de la matemática.
Se le conoce sobre todo por sus dos teoremas de la incompletitud, publicados en 1931. El más célebre establece que para todo sistema axiomático recursivo auto-consistente lo suficientemente poderoso como para describir la aritmética de los números naturales (la aritmética de Peano), existen proposiciones verdaderas sobre los naturales que no pueden demostrarse a partir de los axiomas. Para demostrar este teorema, desarrolló una técnica denominada ahora numeración de Gödel, que codifica expresiones formales como números naturales.
También demostró que la hipótesis del continuo no puede refutarse desde los axiomas aceptados de la teoría de conjuntos, si dichos axiomas son consistentes. » (Wikipedia)

este fin, consideremos la siguiente función:

$$\begin{aligned} T : \mathbf{2}^{\mathbb{N}} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto 0.f(1)f(2)f(3)... \end{aligned}.$$

Esto es la función f se aplica en un número cuya expansión decimal tiene solo ceros y unos. Esta función es inyectiva, pues si

$$0.f(1)f(2)f(3)... = 0.g(1)g(2)g(3)...$$

Entonces, por la unicidad de la expansión decimal[7], tenemos que $f(1) = g(1)$, $f(2) = g(2)$,.... Por consiguiente las funciones son iguales. Lo que prueba la inyectividad. De este modo demostramos que $\mathbf{2}^{\mathbb{N}} \precsim \mathbb{R}$ y esto, por lo que explicamos anteriormente, implica que $\mathscr{P}(\mathbb{N}) \precsim \mathbb{R}$

Ahora debemos ver que $\mathscr{P}(\mathbb{N}) \succsim \mathbb{R}$. Utilizando los incisos 1. y 4. del Ejercicios 1.9.4 en la página 21, vemos que es suficiente probar que $\mathbb{R} \precsim \mathscr{P}(\mathbb{Q})$. Para hacer esto definimos la siguiente aplicación:

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathscr{P}(\mathbb{Q}) \\ r &\longmapsto \{q \in \mathbb{Q} : q < r\} \end{aligned}.$$

Veamos que la aplicación es inyectiva. Sean $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ números reales distintos, supongamos $r_1 < r_2$. Por la densidad de $\mathbb{Q}$, existe un $q_0 \in \mathbb{Q}$ tal que $q_0 \in (r_1, r_2)$. Así $q_0 \in \{q \in \mathbb{Q} : q < r_2\}$ y $q_0 \notin \{q \in \mathbb{Q} : q < r_1\}$. De modo que

$$\{q \in \mathbb{Q} : q < r_1\} \neq \{q \in \mathbb{Q} : q < r_2\}.$$

Es decir T es inyectiva. □

Para finalizar demostraremos que $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \sim \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$. Mas que el resultado en sí, vamos a resaltar su demostración, pues contiene una idea interesante.

Proposición 1.8.7 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \sim \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$. En lenguaje de cardinales $\aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$.

Dem. Dado un conjunto X cualquiera, podemos interpretar una función $f \in X^{\mathbb{N}}$ como una sucesión de elementos de X, a la que podemos disponer de la siguiente manera:

$$f = (f(1), f(2), f(3), ...). \tag{1.8}$$

Si $X = \mathbb{N}$ entonces la sucesión será de números naturales y si $X = \mathbf{2}$ entonces la sucesión será de ceros y unos.

Interpretemos el segundo miembro de (1.8) como una palabra infinita. Si $X = \mathbb{N}$, esta palabras se compone de "letras" que pueden ser cualquier número natural. Si $X = \mathbf{2}$, esta "palabra" se escribe con solo dos "letras" el 0 y el 1. La pregunta es: ¿Cómo podemos "traducir" una palabra escrita con un alfabeto de infitas letras, a uno con solo dos?. La solución a esto es ingeniosa. Sea $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, usaremos el signo 1 para denotar las comas en la sucesión f y pondrémos tantos ceros como indiquen las cantidades $f(j)$.

$$\begin{array}{ccccc} T & : & \mathbb{N}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbf{2}^{\mathbb{N}} \\ & f = & (f(1), f(2), f(3), ...) & \longmapsto & (\underbrace{0, ..., 0}_{f(1)\text{ ceros}}, 1, \underbrace{0, ..., 0}_{f(2)\text{ ceros}}, 1, ...) \end{array}$$

Veamos que esta función es inyectiva. Sean $f, g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, con $f \neq g$. Sea

$$j = \text{mín}\{i : f(i) \neq g(i)\}.$$

[7] Recordemos que puede haber expresiones decimales distintas que representan el mismo número, estas son las expresiones que tienen todos nueves a partir de un momento en adelante, como por ejemplo 1=0.999....No obstante este problema no se nos presenta aquí pues la expresiones decimales que consideramos tienen solo 0 y 1

Tenemos que $f(i) = g(i)$ para $i < j$. Escribamos las dos sucesiones

$$(\underbrace{0,...,0}_{f(1)\text{ ceros}}, 1, ..., 1, \underbrace{0,...,0}_{f(j-1)\text{ ceros}}, 1, \underbrace{0,...,0}_{f(j)\text{ ceros}}, 1, ...)$$

y

$$(\underbrace{0,...,0}_{g(1)\text{ ceros}}, 1, ..., 1, \underbrace{0,...,0}_{g(j-1)\text{ ceros}}, 1, \underbrace{0,...,0}_{g(j)\text{ ceros}}, 1, ...)$$

Notar que los primeros $j-1$ grupos de ceros son iguales, pues $f(i) = g(i)$ para $i < j$, por consiguiente los primeros $j-1$ unos estan en la misma posición en las dos sucesiones. Pero $f(j) \neq g(j)$ y, por consiguiente, el grupo j-ésimo de ceros debe diferir en las dos sucesiones. Esto fuerza que si, por ejemplo, $f(j) < g(j)$, entonces la sucesión f tendrá un uno donde la g tiene un cero.

Así $T(f) \neq T(g)$ y la función es inyectiva. Esto prueba que $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \precsim \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$. La otra desigualdad es más fácil de obtener pues

$$\begin{array}{rl} \mathbf{2} \precsim \mathbb{N} & \text{pues unos es finito y el otro no} \\ \mathbf{2}^{\mathbb{N}} \precsim \mathbb{N}^{\mathbb{N}} & \text{por el Ejercicio 1.9.5} \end{array}$$

□

Existe una demostración mucho más de que $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \precsim \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$. Sin embargo preferimos la dada arriba por la idea interesante y potencialmente útil que contiene. Expogamos esta segunda demostración.

$$\begin{array}{rl} \mathbb{N} \precsim \mathbf{2}^{\mathbb{N}} & \text{Teorema de Cantor} \\ \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \precsim (\mathbf{2}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}} & \text{Ejercicio 1.9.5} \\ \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \precsim \mathbf{2}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} & \text{Ejercicio 1.9.5} \\ \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \precsim \mathbf{2}^{\mathbb{N}} & \text{Proposición 1.3.4} \\ \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \precsim \mathbf{2}^{\mathbb{N}} & \text{Ejercicio 1.9.4 inciso 3.} \end{array}$$

1.9 Ejercicios

Ejercicio 1.9.1 Sea $f : A \longrightarrow B$ una función cualquiera. Supongamos que $\{A_i\}_{i\in I}$ y $\{B_i\}_{i\in I}$ son familias subindicadas de conjuntos, donde los A_i y B_i son subconjuntos de A y B respectivamente. Demostrar las siguientes propiedades:

1. $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i\in I} A_i^c$.
2. $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i\in I} A_i^c$.
3. $f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$.
4. ¿Qué ocurre con $f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)$?
5. $f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$.

6. $f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$.

Ejercicio 1.9.2 Demostrar las propiedades de la Proposición 1.1.1 en la página 3

Ejercicio 1.9.3 Probar que $\sim$ es una relación de equivalencia.

Ejercicio 1.9.4 Supongamos que $A \sim B$ y $C \sim D$.

1. Demostrar que $\mathscr{P}(A) \sim \mathscr{P}(B)$.
2. Demostrar que $A \times C \sim B \times D$.
3. Demostrar que $A^C \sim B^D$.
4. Si $A \precsim C$ entonces $B \precsim D$.

Ejercicio 1.9.5 Sean A, B y C conjuntos no vacios. Demostrar que

1. $\left(A^B\right)^C \sim A^{B\times C}$.
2. Si $A \precsim B$ entonces $A^C \precsim B^C$.

Ejercicio 1.9.6 Demostrar que un subconjunto de un conjunto finito es finito.

Ejercicio 1.9.7 Demostrar que la función $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ definida por:

$$f(j,k) := \frac{(j+k-1)(j+k)}{2} - j + 1,$$

es una biyección.

Ejercicio 1.9.8 Encontrar, de manera explícita, una cantidad numerable de subconjuntos de $\mathbb{N}$, mutuamente disjuntos y cada uno de ellos numerable. Usar esto para dar otra demostración de que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es numerable.

Ejercicio 1.9.9 Demostrar, exhibiendo una biyección, que $(0,1) \sim [0,1]$

Ejercicio 1.9.10 Demostrar que el conjunto $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ es coordinable con el conjunto $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$, donde $\mathbf{n} = \{0, 1, ..., n-1\}$. Recordar que, si A y B son conjuntos, $B^A := \{f : f : A \longrightarrow B\}$. De este modo $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ es el conjunto de funciones $f : \mathbb{N} \longrightarrow \{0, 1\}$.

Ejercicio 1.9.11 Demostrar que, para cualquier conjunto A, $\mathscr{P}(A) \sim \mathbf{2}^A$.

Ejercicio 1.9.12 Demostrar que son equivalentes:

1. A es infinito.
2. A es coordinable con un subconjunto propio, es decir: Existe $B \subset A$, con $B \neq A$, tal que $A \sim B$.

Ejercicio 1.9.13 Sea A un conjunto infinito y $B \subset A$ numerable. Supongamos que $A - B$ es infinito. Demostrar que $A - B \sim A$.

Ejercicio 1.9.14 Sean A y B conjuntos y supongamos que existe una funci'on f de A en B suprayectiva. Demostrar que $\#B \leq \#A$.

Ejercicio 1.9.15 Demostrar que el conjunto formado por todos los subconjuntos de $\mathbb{N}$ que son finitos, es numerable. ¿Qué ocurrira con el conjunto de todos los subconjuntos infinitos?

Ejercicio 1.9.16 Sea $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia de intervalos de $\mathbb{R}$. Suponer que los conjuntos en la familia son mutuamente disjuntos, es decir: $A_i \cap A_j = \varnothing$ si $i \neq j$. Demostrar que el conjunto $\{A_i : i \in I\}$ es a lo sumo numerable.

Ejercicio 1.9.17 Recordemos que una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice nodecreciente, si para todos $x, y \in \mathbb{R}$, tales que $x < y$, se tiene que $f(x) \leq f(y)$. Dada una función nodecreciente, demostrar que el conjunto de todos los puntos de discontinuidad es a lo sumo numerable. *Ayuda*: Demostrar en primera instancia que los límites laterales:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) \quad \text{y} \quad \lim_{x \to a^-} f(x)$$

existen para todo $a \in \mathbb{R}$. Luego aplicar el ejercicio anterior.

Ejercicio 1.9.18 Demostrar que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{R}$ ($c^{\aleph_0} = c$).

Ejercicio 1.9.19 Como aprendimos $\mathbb{N} \sim \mathbb{Q}$, esto significa que existe una aplicación biyectiva $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$, que nos permite enumerar $\mathbb{Q}$ como una suceción $r_j := f(j)$. Definimos la aplicación:

$$\begin{aligned} T : C(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ f &\longmapsto T_f \end{aligned}$$

donde

$$T_f(j) := f(r_j).$$

1. Demostrar que T es inyectiva. Por consiguiente $C(\mathbb{R}) \precsim \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

2. Usando el inciso anterior, demostrar que $C(\mathbb{R}) \sim \mathbb{R}$, donde $C(\mathbb{R})$ es el conjunto de las funciones continuas de $\mathbb{R}$ en si mismo.

2 Integral de Riemann

2.1 Introducción

Bernhard Riemann 1826-1866. Fue un matemático alemán que realizó contribuciones muy importantes al análisis y la geometría diferencial, algunas de las cuales allanaron el camino para el desarrollo más avanzado de la relatividad general. Su nombre está conectado con la función zeta, la hipótesis de Riemann, la integral de Riemann, el lema de Riemann, las variedades de Riemann, las superficies de Riemann y la geometría de Riemann.

Wikipedia

> « Bernard Riemann recibió su doctorado en 1851, su *Habilitación* en 1854. La habilitación confiere el reconocimiento de la capacidad de crear sustanciales contribuciones en la investigación más allá de la tesis doctoral, y es un prerequisito necesario para ocupar un cargo de profesor en una universidad Alemana. Riemann eligió como tema de habilitación el problema de las series de Fourier. Su tesis fue titulada *Über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reine* (Sobre la representación de una función por series trigonométricas) y respondía la pregunta: Cuándo una función definida en el intervalo $(-\pi, \pi)$ puede ser respresentada por la serie trigonométrica $a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)]$? En este trabajo es donde hallamos la Integral de Riemann, introducida en una sección corta antes del nucleo principal de la tesis, como parte del trabajo preparatorio que él necesitó desarrollar antes de abordar el problema de representabilidad por series trigonométricas. »

David M. Bressoud
A Radical Approach to Lebesgue's Theory of Integration.

En este capítulo vamos a desarrollar el concepto de la integral de Riemman. Vamos a exponer la definición de esta integral dada por J. G. Darboux. Discutiremos las propiedades de la intergal, sus alcances y límites. Preparamos así el camino para la introducción de la integral de Lebesgue.

Debemos advertir al alumno que en este curso dejaremos un poco de lado las cuestiones procedimentales de cómo calcular integrales, aspecto que seguramente abordó en cursos anteriores y del cual nos vamos a valer. Tampoco debe esperar que las actividades prácticas se centren en esa dirección. El objetivo del capítulo es recordar y profundizar nuestro conocimiento de la integral de Riemann. No es nuestra intención que el material sea auto contenido. Algunas propiedades sólo las enunciaremos sin demostración pues seguramente estas demostraciones faltantes son parte de curso previos. Nuestro principal objetivo aquí es discutir la materia conceptual ligada a la integral y cómo es previsible las actividades prácticas estarán orientadas con ese propósito. Por ejemplo, un problema que nos planteamos y que guiará la exposición es el de caracterizar las funciones integrables Riemann. Nos interesa este problema pues resolverlo entraña el desarrollo de la noción de medida de Lebesgue, que es el principal concepto abordado en este libro.

Jean G. Darboux 1842-1917. Matemático frances. Su trabajo se desarrolló en el análisis (integración, ecuaciones diferenciales parciales) y geometría diferencial (estudio de curvas y superficies).

Wikipedia

La integral encuentra su motivación en diversos problemas. Aparece cuando se busca el centro de masas de un determinado cuerpo, cuando se quieren hallar longitudes de arco, volúmenes, cuando se quiere reconstruir el movimiento de cuerpo conocida su velocidad. En general, cuando se quiere reconstruir determinada propiedad de un conjunto, cuando es conocida esta proiedad sobre regiones infinitesimales. La integral es utilizada en incontables teorías matemáticas, como ser el mencionado már arriba relativo a las series de Fourier.

Quizás el problema más simple donde aparece la integral es el que utilizaremos como motivación para introducirla y es el concepto de área. Vamos a tratar de reconstruir este concepto desde su base, esto es analizando la noción de área de figuras tan simples como rectángulos, triángulos, etc.

2.2 Área de figuras elementales planas

El cálculo de áreas es necesario en multitud de actividades humanas, por ejemplo con el comercio. La cantidad de muchos productos y servicios se estima en medidas de área, por ejemplo: las telas, el trabajo de un colocador de pisos, el precio de la construcción, el valor de las extensiones de tierra, etc.

Por *figuras elementales* planas nos referimos a rectángulos, triángulos, trapecios, etc. Sin duda el alumno debe estar muy familiarizado con las áreas de estas figuras, el área de un rectángulo viene dada por la conocida fórmula $b \times h$, donde b es la base del rectángulo y h su altura. Ahora bien, ¿Cómo se llega a esta fórmula? Porque esta fórmula es apropiada para calcular el precio de un terreno por ejemplo. En esta sección vamos a justificar esta fórmula a partir de algunos hechos elementales.

Vamos a considerar un plano $\mathcal{P}$. En este plano $\mathcal{P}$ supondremos fijada una unidad de longitud. Pretendemos asignar un área a las figuras, es decir a los subconjuntos, de $\mathcal{P}$. De ahora en más, cómo es usual en esta materia nos referiremos a *medida* en lugar de área. La medida es un concepto más general que el concepto de área. No obstante en el contexto en que estamos actualmente son sinónimos.

Queremos construir pues una función m tal que $m(A)$ represente la medida de $A \subset \mathcal{P}$. Ahora bien ¿qué podemos usar de guía con ese objetivo? Si, como dijimos, desconocemos todas las fórmulas previamente aprendidas, sobre que partimos para construir la medida o área. La respuesta es que tomaremos como principio rector ciertas propiedades que son deseables que una medida satisfaga. Ellas son las siguientes.

Positividad. debería ser una magnitud no negativa.

Invariancia por movimientos rígidos. Si una región es transformada en otra por medio de un movimiento rígido, ambas regiones deberían tener la misma área. Otra manera de expresar esta propiedad es diciendo que dos figuras *congruentes* tienen la misma área.

Aditividad. Si una región A es la unión de cierta cantidad de regiones más chicas mutuamente disjuntas A_i, $i = 1, \ldots, n$, la medida de A es la suma de las medidas de los A_i.

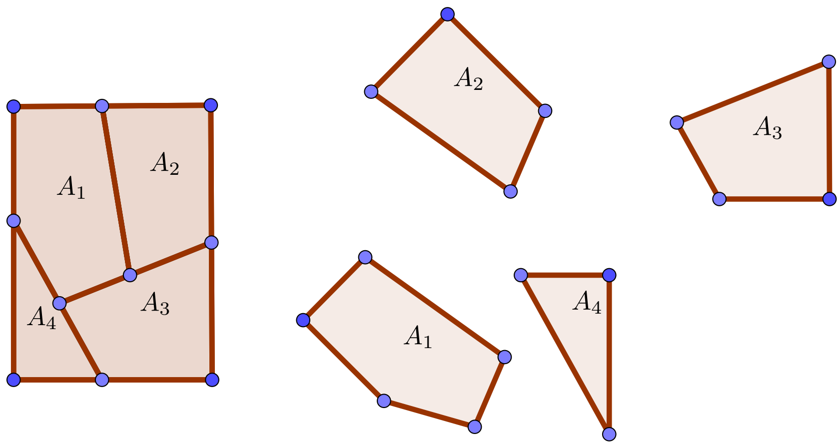


Figura 2.1: El área del rectángulo es la suma de sus partes

Utilizando la segunda y tercer propiedad se pueden relacionar el área del rectángulo de la figura 2.1 con las cuatro regiones en la que es dividido.

Como veremos a lo largo de la materia la propiedad de aditividad debe ser estudiada con cuidado, esto ocurre por las intrincadas maneras en que una región puede ser unión de otras regiones. A lo largo de esta materia elaboraremos una teoría que nos dará una descripción precisa de a que conjuntos podemos asignarle una medida de modo que las propiedades previas sean consistentes.

Por el momento veamos como las propiedades anteriores determinan practicamente de manera unívoca la medida de regiones elementales planas.

Hablando de propiedades de la medida, supongamos que A y B son dos regiones con $A \subset B$. Entonces como $B = A \cup (B - A)$ y por la propiedad de aditividad y positividad

$$m(B) = m(A) + m(B - A) \geq m(A).$$

Descubrimos así que nuestra medida deberá tener adicionalmente la siguiente propiedad:

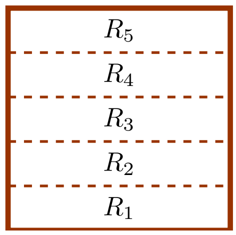
Monotonía. Si $A \subset B$ entonces $m(A) \leq m(B)$.

Es claro que si logramos construir una medida que satisfaga las propiedades anteriores cualquier multiplo por un número real positivo de ella seguirá cumpliendo las propiedades. Esto es una manera de expresar el hecho que podemos usar diferentes unidades de medición. Esta cuestión se sortea proponiendo la unidad de medida. Esta unidad es completamente arbitraria, ud. podría elegir su figura plana preferida como unidad de área. Cómo es habitual, elijamos el cuadrado cuyos lados miden la unidad de longitud supuesto que esta unidad fue previamente establecida.

Podríamos por ejemplo elegir el círculo de radio uno como unidad de área. Así ya no tendríamos el problema de ese número raro π que aparece en la fórmula del área del círculo. ¡El área de cualquier círculo sería igual a su radio al cuadrado! Claro que aparecería π en la fórmula del área del cuadrado de lado 1. Nos tapamos los pies y se destapa el cuerpo.

Supongamos ahora que tenemos un rectángulo R de un lado igual a la unidad y el otro de longitud racional n/m, $n, m \in \mathbb{N}$. Veamos que las propiedades de las medidas determinan el área de este rectángulo. Sea Q un cuadrado de lados iguales a 1. Luego $m(Q) = 1$, por suposición. Primero observar que si dividimos un lado de Q en m segmentos iguales de longitud $1/m$, queda dividido el cuadrado en m rectángulos $R_1, \ldots, R_m$ (ver figura en el margen), todos ellos congruentes entre si, de modo que todos tienen la misma medida, digamos $m(R_1)$. De modo que por la aditividad debe ocurrir que $m(R_1) = \cdots = m(R_m)) = 1/m$. Recordemos nuestra pretención de inferir la medida de un rectángulo R de lado 1 y otro n/m. Este rectángulo esta compuesto de n rectángulos congruentes a los R_i, $i = 1, \ldots, m$, nuevamente por la aditividad inferimos que $m(R) = n/m$. Notar que n/m es la base por la altura de R.

Sea ahora una rectángulo R con un lado unidad y el otro un real cualquiera $l > 0$. Existen sendas sucesiones $0 < q_k, p_k \in \mathbb{Q}$, $k \in \mathbb{N}$, tales que $q_1 \leq q_2 \leq \cdots \leq l \leq \cdots \leq p_2 \leq p_1$ y $\lim_{k\to\infty} q_k = \lim_{k\to\infty} p_k = l$. Consideremos una dos sucesiones de rectángulos R_k y S_k que comparten el lado de R igual a la unidad, mientras que los otros lados de R_k y S_k son iguales a q_k y p_k respectivamente. Luego por la monotonía



Descomposición del cuadrado Q

$$q_k = m(R_k) \leq m(R) \leq m(S_k) \leq p_k.$$

Tomando límite cuando $k \to \infty$ inferimos que $m(R) = l$.

A partir de las propiedades fundamentales que postulamos para la medida o área inferimos la famosa fórmula del área de un rectángulo en el caso que uno de los lados sea igual a la unidad. Si ahora tenemos un rectángulo arbitrario, hay que fijar un lado y repetir el análisis previo con el segundo lado. Se llega de este modo a justificar la fórmula del área para un rectángulo arbitrario.

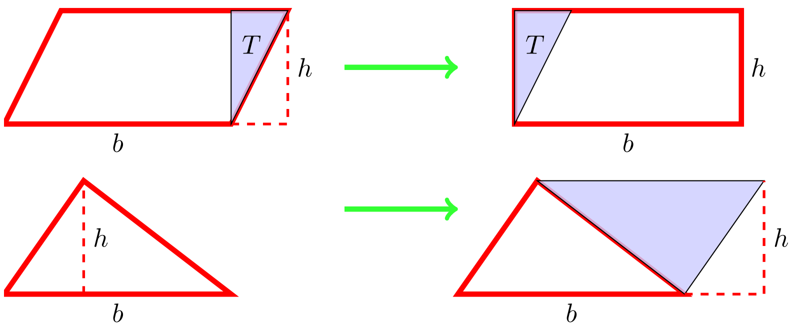


Figura 2.2: Áreas de otras figuras elementales.

En la figura 2.3 se muestra como relacionar el área de un paralelepípedo con la de un rectángulo y la de un triángulo con la de un paralelepípedo para inferir las conocidas fórmulas para estas figuras.

2.3 Integral de Riemann

En esta sección abordaremos el problema del área de regiones planas. Vamos a contextualizarnos dentro del marco conceptual que nos brinda la geometría analítica. Mediante coordenadas cartesianas ortogonales los puntos del plano se identifican con pares ordenados $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ y el plano con el conjunto $\mathbb{R}^2$. Nuestro propósito es entonces definir la medida de subconjuntos de $\mathbb{R}^2$. La geometría analítica abre así nuevas posibilidades para abordar el problema del área.

Nuestra primera aproximación será la que propuso Bernhard Riemann en 1854, pero seguiremos el enfoque de Jean Darboux. En esta parte de nuestra exposición consideraremos subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ de un tipo especial, concretamente a conjuntos que quedan encerrados entre la gráfica de una función y del eje coordenadas x. Esto nos lleva alconcepto de integral.

Definición 2.3.1 (Partición) Sea $[a, b]$ un intervalo. Una *partición* P es un conjunto ordenado y finito de puntos, donde el primer elemento es a y el último b. Es decir $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, donde $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.

Definición 2.3.2 (Sumas de Darboux) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada y $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una partición de $[a, b]$. Consideremos las siguientes magnitudes

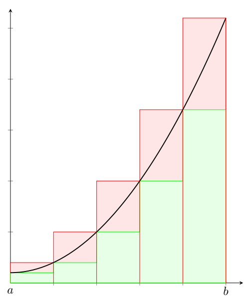
$$\begin{aligned} m_i &:= \text{ínf}\{f(x) | x \in [x_{i-1}, x_i]\} \\ M_i &:= \sup\{f(x) | x \in [x_{i-1}, x_i]\} \end{aligned} \tag{2.1}$$

Definimos la *Suma superior de Darboux* como

$$\overline{S}(P, f) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}),$$

y la *Suma inferior de Darboux* como

$$\underline{S}(P, f) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}),$$



Sumas de Darboux.

Lema 2.3.1 (Monotonía sumas de Darboux) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada y $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una partición de $[a, b]$. Supongamos que P' es otra partición que tiene un punto más que P. Entoces

$$\underline{S}(P', f) \geq \underline{S}(P, f) \quad \text{y} \quad \overline{S}(P', f) \leq \overline{S}(P, f)$$

Demostración. Supongamos que

$$P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\},$$

$$P' = \{x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x^*, x_i, x_n\}.$$

Sean m_i, M_i como en (2.1) y es escribamos

$$\begin{aligned} m_i' &:= \text{ínf}\{f(x) | x \in [x_{i-1}, x^*]\} \\ M_i' &:= \sup\{f(x) | x \in [x_{i-1}, x^*]\} \\ m_i'' &:= \text{ínf}\{f(x) | x \in [x^*, x_i]\} \\ M_i'' &:= \sup\{f(x) | x \in [x^*, x_i]\} \end{aligned}$$

Valen las relaciones $m_i \leq m_i'$, $m_i \leq m_i''$, $M_i' \leq M_i$ y $M_i'' \leq M_i$. Entonces

$$\begin{aligned}
&\underline{S}(P,f) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \\
&= m_1(x_1 - x_0) + \cdots + m_i(x^* - x_{i-1}) + m_i(x_i - x^*) + \cdots + +m_n(x_n - x_{n-1}) \\
&\leq m_1(x_1 - x_0) + \cdots + m_i'(x^* - x_{i-1}) + m_i''(x_i - x^*) + \cdots + +m_n(x_n - x_{n-1}) \\
&\hfill \leq \underline{S}(P',f).
\end{aligned}$$

Obviamente la demostración para las sumas superiores es completamente análoga. □

Usando inducción podemos generalizar el resultado anterior como muestra el siguiente ejercicio.

Ejercicio 2.3.1 Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada y P, P' particiones de $[a,b]$ con $P \subset P'$. Demostrar que

$$\underline{S}(P,f) \leq \underline{S}(P',f) \quad \text{y} \quad \overline{S}(P',f) \leq \overline{S}(P,f).$$

Inferir que para cualesquiera P, P' (sin importar que una este o no contenida dentro de la otra)

$$\underline{S}(P,f) \leq \overline{S}(P,f).$$

Definición 2.3.3 (Funciones integrables) Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Diremos que f es *integrable Riemann* si

$$\sup\left\{\underline{S}(P,f) | P \text{ partición de } [a,b]\right\} = \inf\left\{\overline{S}(P,f) | P \text{ partición de } [a,b]\right\} \quad (2.2)$$

En caso que f sea integrable Riemann llamamos *integral de Riemann* entre a y b de f al valor de los dos miembros de (2.2) y este número se denota

$$(R)\int_a^b f(x)dx.$$

Cuando no haya lugar a confusión, por ejemplo a lo largo de este capítulo, omitiremos el símbolo (R) en la integral.

Teorema 2.3.1 (Propiedades elementales de la integral) Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrables, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $c \in (a,b)$. Entonces

Linealidad $\alpha f + \beta g$ es integrable y

$$\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x) dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx.$$

Monotonía Si $f(x) \leq g(x)$ para $x \in [a,b]$ entonces

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

Aditividad del Intervalo

$$\int_a^b \alpha f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Demostración. Fue dada en cursos previos y la omitiremos aquí. □

Observación: Las propiedadades anteriores son compatibles con las propiedades que habíamos propuesto para el concepto de área en la sección .

Es útil tener un símbolo que nos represente el supremo y el ínfimo en la Definición 2.3.3.

Definición 2.3.4 (Integrables de Darboux) Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Definimos la integral *superior e inferior de Darboux* como

$$(D)\overline{\int_a^b} f(x)dx = \text{ínf}\left\{\overline{S}(P,f)|P \text{ partición de } [a,b]\right\}. \tag{2.3}$$

y

$$(D)\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup\left\{\underline{S}(P,f)|P \text{ partición de } [a,b]\right\}. \tag{2.4}$$

Apelando a estos conceptos se tiene que f es integrable Riemann si y sólo si

$$(D)\overline{\int_a^b} f(x)dx = (D)\underline{\int_a^b} f(x)dx. \tag{2.5}$$

Teorema 2.3.2 (Primer criterio de integrabilidad) Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Entonces f es integrable si y solo si para todo $\varepsilon > 0$ existe una partición P tal que

$$\overline{S}(P;f) - \underline{S}(P;f) < \varepsilon. \tag{2.6}$$

Dem. Veamos la parte "solo si". Si f es integrable satisface (2.2). Si $\varepsilon > 0$, usando la caracterización (**??**) (debería haber una intro con estas propiedades) tenemos que existen particiones P' y P'' tales que:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx \quad &\leq \overline{S}(P';f) \quad < \int_a^b f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2},\\
\int_a^b f(x)dx - \frac{\varepsilon}{2} \quad &< \underline{S}(P'';f) \quad \leq \int_a^b f(x)dx.
\end{aligned}$$

Sea ahora la partición $P = P' \cup P''$. Por el ejercicio (2.3.1) tenemos que:

$$\overline{S}(P;f) - \frac{\varepsilon}{2} \leq \overline{S}(P';f) - \frac{\varepsilon}{2} < \int_a^b f(x)dx < \underline{S}(P'';f) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \underline{S}(P;f) + \frac{\varepsilon}{2}$$

Así tenemos (2.7).

Asumamos ahora que se satisface (2.7). Entonces

$$(D)\overline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{S}(P;f) < \underline{S}(P;f)(D) + \varepsilon < (D)\underline{\int_a^b} f(x)dx + \varepsilon.$$

□

Ejemplo 2.3.1 Sea $0 \leq a < b$ veamos que

$$\int_a^b x dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}.$$

Ejercicio 2.3.2 Sea $0 \leq a < b$ veamos que

$$\int_a^b x^2 dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}.$$

Ayuda: Usar particiones uniformes y la fórmula $\sum_{i=1}^{n} n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$.

Ejemplo 2.3.2 Sea $0 < a < b$ y $m \in \mathbb{Z}$, $m \neq -1$, veamos que

$$\int_a^b x^m dx = \frac{b^{m+1}}{m+1} - \frac{a^{m+1}}{m+1}.$$

COMPLETAR

Ejercicio 2.3.3 Sea $0 < a < b$ y $f(x) = 1/x$. Como en el ejemplo 2.3.2 para $n \in \mathbb{N}$ tomamos $q = (b/a)^{1/n}$ y

$$P_n = \{a, qa, q^2 a, \ldots, aq^{n-1}, b\}.$$

Demostrar que

$$\underline{S}(P_n; f) = n\frac{q-1}{q}$$
$$\overline{S}(P_n; f) = n(q-1)$$

Inferir que f es integrable en $[a, b]$ y

$$\int_a^b \frac{1}{x} dx = \ln(b) - \ln(a)$$

Ejemplo 2.3.3 Sea $0 \leq a < b \leq \pi/2$, veamos que

$$\int_a^b \operatorname{sen} x dx = -(\cos(b) - \cos(a)).$$

Ejercicio 2.3.4 Sea $0 \leq a < b \leq \pi$. Demostrar que

$$\int_a^b \cos x dx = -(\sin(b) - \sin(a)).$$

Observación: Notar que en todos los ejemplos anteriores

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

donde F es na función que satisface $F' = f$.

2.4 Integrabilidad y continuidad

Teorema 2.4.3 (Segundo criterio de integrabilidad) Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Entonces f sea integrable si y solo si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para cualquier partición P que satisface

$$\max_i \{x_i - x_{i-1}\} < \delta,$$

se tiene que

$$\overline{S}(P;f) - \underline{S}(P;f) < \varepsilon. \tag{2.7}$$

Dem. La suficiencia de la condición es trivial. Para la necesidad tomemos $\varepsilon > 0$. Por el primer criterio de integrabilidad existe una partición $P^* = \{y_0, \dots, y_m\}$ tal que se satisface

$$\overline{S}(f;P^*) - \underline{S}(f;P^*) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como f es integrable es acotada, por consiguiente existe $M > 0$ tal que

$$|f| \leq M.$$

Elijamos

$$\delta < \min\left\{\frac{\varepsilon}{6Mm}, \min_{j=1,\dots,m}(y_j - y_{j-1})\right\}.$$

Sea ahora $P = \{x_0, \dots, n\}$ una partición que satisface

$$x_i - x_{i-1} < \delta, \quad i = 1, \dots, n.$$

Definimos los conjuntos de índices I_j para $j = 1, \dots, m$ por

$$I_j := \{i \in I \mid [x_{i-1}, x_i] \subset [y_{j-1}, y_j]\}.$$

Ahora ponemos

$$I = I_1 \cup \cdots \cup I_m,$$
$$J = \{1, \dots, n\} - I.$$

Pongamos

$$\begin{aligned} m_i &:= \inf\{f(x) | x \in [x_{i-1}, x]\}, & M_i &:= \sup\{f(x) | x \in [x_{i-1}, x_i]\} \\ m_j^* &:= \inf\{f(x) | x \in [y_{j-1}, y_j]\} & M_j^* &:= \sup\{f(x) | x \in [y_{j-1}, y_j]\} \end{aligned}$$

□

Teorema 2.4.4 (Continuidad implica integrabilidad) Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función continua entonces es integrable.

Dem. COMPLETAR □

¿Qué ocurre con las funciones discontinuas?

Ejemplo 2.4.4 [Función de Heavside] Es la función

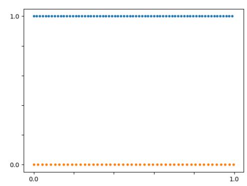
$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

Es discontinua en $[-1, 1]$ pero integrable. JUSTIFICAR

Ejemplo 2.4.5 [Función de Dirichlet] Es la función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Veamos que f es discontinua en todo punto y no integrable. JUSTIFICAR



Función de Dirichlet

Definición 2.4.5 (Oscilación sobre un intervalo) Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada y $I = [\alpha,\beta] \subset [a,b]$. Definimos la *oscilación* de f en I por

$$w(f,I) = \sup\{f(x)|x \in I\} - \text{ínf}\{f(x)|x \in I\}.$$

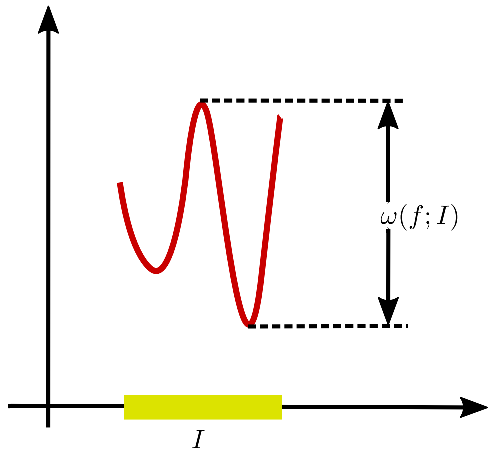


Figura 2.3: Áreas de otras figuras elementales.

Ejemplo 2.4.6

1. Para la función de Dirichlet $w(f,I) = 1$ para todo I con interior no vacío.
2. Para la función de Heavside e $I = [\alpha,\beta]$

$$w(f,I) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \in (\alpha,\beta] \\ 0 & \text{si } 0 \notin (\alpha,\beta] \end{cases}$$

Ejemplo 2.4.7 [Función de Thomae] Es la función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{Z}, \text{m.c.d}(p,q) = 1 \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

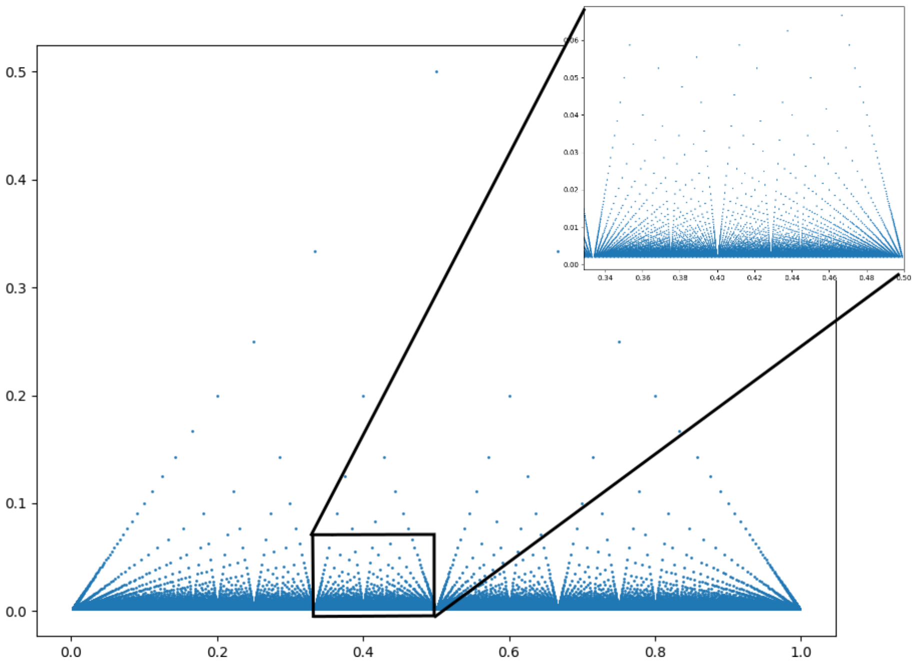


Figura 2.4: Función de Thomae

Si $I^o \neq \varnothing$, f la función de Thomae e $I \subset [0,1]$ entonces $w(f,I) = 1/q^*$, donde q^* es el mínimo valor de q para el que existe $p \leq q$ tal que $p/q \in I$. Justificar
Ejemplo 2.4.8 [Escalera discontinua] Sea $\mathbb{Q} \cap [0,1] = \{q_1, q_2, \ldots\}$ una numeración de los racionales del $[0,1]$. Definamos $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ como

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} H(x - q_n),$$

donde H es la función de *Heavside*.

Veamos que f es monotona no decreciente y discontinua en todo punto de $[0,1] \cap \mathbb{Q}$. Para la función escalera discontinua e $I \subset [0,1]$

$$w(f,I) = \sum_{q_n \in I} \frac{1}{2^n}.$$

JUSTIFICAR

Definición 2.4.6 [Oscilación en un punto] Sea f una función definida en un entorno de x, definimos la *oscilación* de f en x como

$$\omega(f;x) = \inf_{x \in I^o} \omega(f;I).$$

Ejercicio 2.4.5 Demostrar que f es continua en x si y sólo si $\omega(f;x) = 0$.

Definición 2.4.7 Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada, $\sigma > 0$ y $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una partición. Definimos

$$I_\sigma := \{i \in \{1, \ldots, n\} | w(f, [x_{i-1}, x_i]) > \sigma\}.$$

y

$$R(P, f, \sigma) = \sum_{i \in I_\sigma} (x_i - x_{i-1}).$$

Proposición 2.4.1 Si f es continua en $[a, b]$ para todo $\sigma > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\max_i (x_i - x_{i-1}) < \delta \Rightarrow I_\sigma = \varnothing \Rightarrow R(P, f, \sigma) = 0.$$

Ejemplo 2.4.9 Para la función de Dirichlet y para todo $0 < \sigma < 1$ y para toda partición de $[0, 1]$ tenemos $I_\sigma = \{x_1, \ldots, x_n\}$ y $R(P, f, \sigma) = [0, 1]$
Ejemplo 2.4.10 Para la función de Heavside, para todo $0 < \sigma < 1$ y para toda partición de $[0, 1]$ tenemos $I_\sigma = i$, donde i es el índice para el que $i \in (x_{i-1}, x_i]$ y $R(P, F, \sigma) = x_i - x_{i-1}$.

Teorema 2.4.5 (Criterio de integrabilidad de Riemann) Sea f acotada en $[a, b]$ entonces f es integrable si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ y $\sigma > 0$ existe $\delta > 0$ talque $R(P, f, \sigma) < \varepsilon$.

Ejemplo 2.4.11 Discutir los ejemplos Dirichlet, Heavside, Continuas, escalera discontinua
Ejemplo 2.4.12 Definimos

$$((x)) = x - [x + 0{,}5]$$

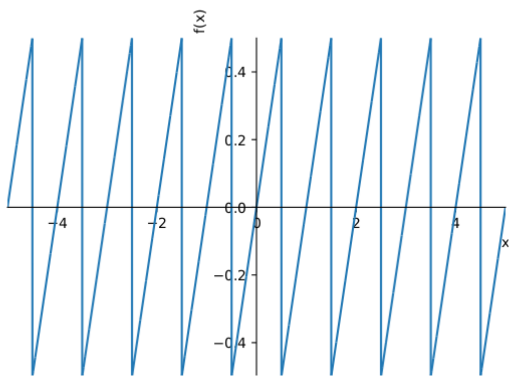


Figura 2.5: Función serrucho

Definimos la función de Riemann:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{((x))}{n^2}.$$

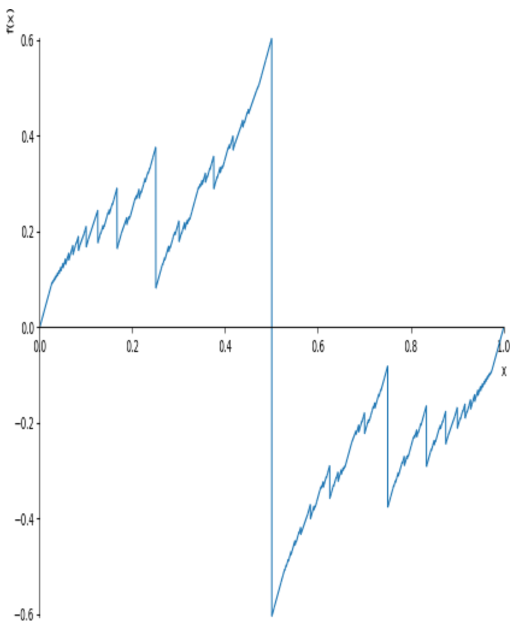


Figura 2.6: Función de Riemann

Demostramos que la función de Riemann es discontinua en los racionales p/q donde m.c.d$(p,q)=1$ y q par. Es integrable en $[0,1]$.

Definición 2.4.8 (Contenido exterior) Sea $S\subset\mathbb{R}$. Un *cubrimiento finito* de S es una colección de intervalos $\{[x_{i-1},x_i]\}_{i=1,\ldots,n}$ tal que $S\subset\cup_{i=1}^n[x_{i-1},x_i]$.

El *contenido exterior* de S se define por

$$c_e(S)=\text{ínf}\sum_{i=1}^n(x_i-x_{i-1}),$$

donde el ínfimo es tomado sobre todos los cubrimientos finitos de S.

Teorema 2.4.6 (Criterio de integrabilidad de Hankel) Sea f acotada en $[a,b]$ entonces f es integrable si y sólo si para todo $\sigma>0$ el conjunto $S_\sigma:=\{x\in[a,b]|w(f,x)>\sigma\}$ tiene contenido exterior igual a 0 ($c_e(S_\sigma)=0$).

2.5 Integrales impropias

Se denomina *integrales impropias* a la integral de funciones no acotadas o a integrales sobre intervalos no acotados. Tales integrales requieren de una definición especial.

Definición 2.5.9 [Integral impropia función no-acotada] Supongamos $a<c<b$ y que $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es una función integrable sobre $[a,c-\varepsilon]$ y sobre $[c+\varepsilon]$ para todo $\varepsilon>0$. Si los siguientes límites existen

$$\text{lím}_{\varepsilon\to0}\int_a^{c-\varepsilon}f(x)dx,\quad \text{lím}_{\varepsilon\to0}\int_{c+\varepsilon}^{b}f(x)dx,$$

definimos

$$\int_a^b f(x)dx = \text{lím}_{\varepsilon\to 0}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \text{lím}_{\varepsilon\to 0}\int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx. \tag{2.8}$$

Definición 2.5.10 [Integral impropia sobre región no-acotada] Supongamos que $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ es una función integrable sobre $[a, b]$ para todo $b > a$. Si el siguiente límite existe

$$\text{lím}_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx,$$

definimos

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \text{lím}_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx. \tag{2.9}$$

Análogamente se definen integrales sobre intervalos no-acotados de la forma $(-\infty, a]$ y $(-\infty, +\infty)$.

2.6 Teorema Fundamental de Cálculo

Teorema 2.6.7 [Teorema Fundamental del Cálculo] Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable Riemann. Definimos

$$\phi(x) = \int_a^x f(x)dx.$$

Etonces ϕ es derivable en cada punto de continuidad de f y vale que

$$\phi'(x) = f(x). \tag{2.10}$$

Corolario 2.6.1 [Regla de Barrow] Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua y ϕ una función que satisface $\phi'(x) = f(x)$. Entonces

$$\int_a^x f(x)dx = \phi(b) - \phi(a). \tag{2.11}$$

Etonces ϕ es derivable en cada punto de continuidad de f y vale que

$$\phi'(x) = f(x).$$

2.7 Función de Volterra

```
import numpy as np
import scipy.optimize
from matplotlib import pyplot as plt
```

Consideramos la función $f(x) = x^2$ sen$(1/x)$.

```
def G(x):
    return x**2*np.sin(1/x)
x=np.arange(0,.15,0.0000001)
y=G(x)
plt.plot(x,y)
```

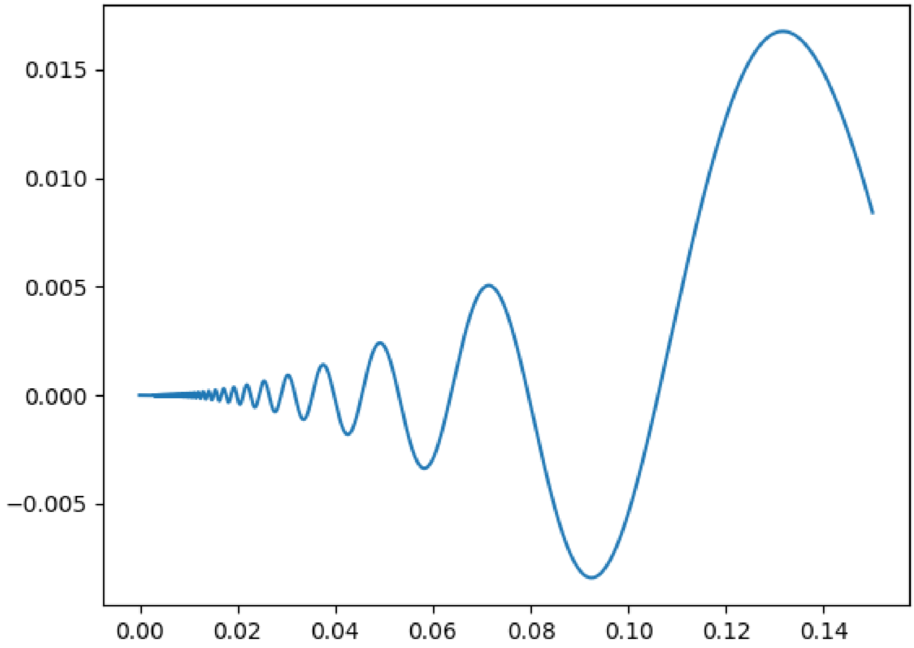


Figura 2.7: Función precursora de Volterra

```
def F(x):
    return 2*x*np.sin(1/x) - np.cos(1/x)
x = scipy.optimize.broyden2(F, .13, f_tol=1e-14)
x,1-x, G(x)
```

Se alcanza un máximo en $x = 0{,}13163878$ y toma el valor $G(x) = 0{,}016757715$. Hay que utilizar el punto simétrico a x, es decir $1 - x = 0{,}86836123$.

Definimos la función “madre”.

```
def f0(x):
    x1=x[x<=0]
    x2=x[(x<=0.13163877)*(x>0)]
    x3=x[(x>0.13163877)*(x<0.868361226)]
    x4=x[(x>=0.868361226)*(x<1)]
    x5=x[x>=1]
    y1=np.zeros(np.shape(x1))
    y2=x2**2*np.sin(1/x2)
    y3=0.016757715410548 75*np.ones(np.shape(x3))
    y4=(1-x4)**2*np.sin(1/(1-x4))
    y5=np.zeros(np.shape(x5))
    return np.concatenate((y1,y2,y3,y4,y5), axis=None)
```

Definimos la función de Volterra

```
def volterra(x,n,a=0,b=1):
    if n == 0:
        return 0

    a1,b1 = 2.*a/3. + b/3., a/3. + 2.*b/3.
    pto_med = .5*(a+b)
    return volterra(x,n-1,a,a1) + (b1-a1)*f0((x-a1)/(b1-a1))\
    + volterra(x,n-1,b1,b)
```

Graficamos

```
x=np.arange(0,1,0.0000001)
y=volterra(x,12)
plt.plot(x,y)
```

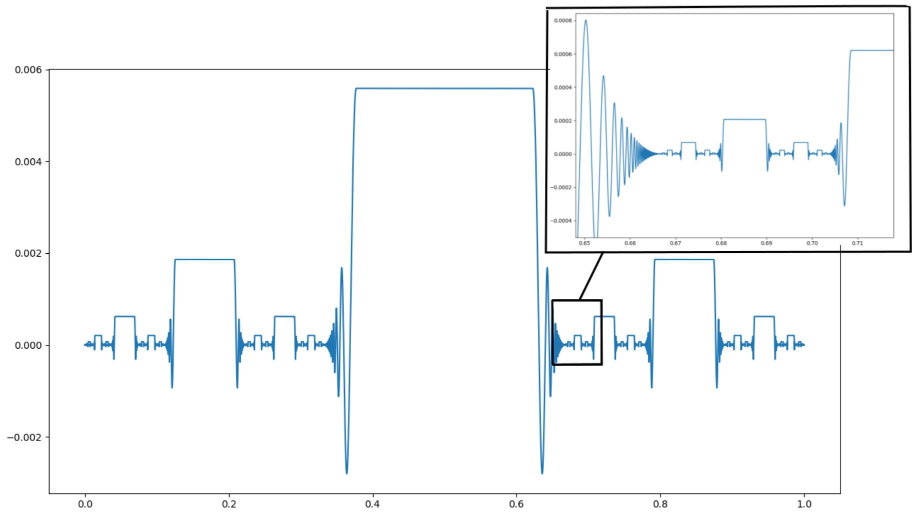


Figura 2.8: Función de Volterra

2.8 Integral de Riemann y pasos al límite

Bibliografía

[Abbott, 2002] Abbott, S. (2002). *Understanding Analysis*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer New York.

[Acinas, 2019] Acinas, S. y Mazzone, F. (2019). Introducción al análisis matemático. En preparación, no publicado.

[Bartle, 2014] Bartle, R. (2014). *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*. Wiley Classics Library. Wiley.

[Bressoud, 2007] Bressoud, D. (2007). *A Radical Approach to Real Analysis*. Classroom Resource Materials. Mathematical Association of America.

[Bressoud, 2008] Bressoud, D. (2008). *A Radical Approach to Lebesgue's Theory of Integration*. Classroom resource materials. Cambridge University Press.

[Fava and Zo, 1996] Fava, N. and Zo, F. (1996). *Medida e integral de Lebesgue*. Colección Textos Universitarios. Instituto Argentino de Matemática.

[Hairer and Wanner, 2008] Hairer, E. and Wanner, G. (2008). *Analysis by Its History*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer New York.

[Hawkins, 2001] Hawkins, T. (2001). *Lebesgue's Theory of Integration: Its Origins and Development: Its Origins and Development*. Ams Chelsea Publishing Series. American Mathematical Society.

[Jones, 2001] Jones, F. (2001). *Lebesgue Integration on Euclidean Space*. Jones and Bartlett books in mathematics. Jones and Bartlett.

[Ovchinnikov, 2014] Ovchinnikov, S. (2014). *Measure, Integral, Derivative: A Course on Lebesgue's Theory*. Universitext. Springer New York.

[Stein and Shakarchi, 2009] Stein, E. and Shakarchi, R. (2009). *Real Analysis: Measure Theory, Integration, and Hilbert Spaces*. Princeton University Press.

[Stillwell, 2013] Stillwell, J. (2013). *The Real Numbers: An Introduction to Set Theory and Analysis*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer International Publishing.

[Tao, 2011] Tao, T. (2011). *An Introduction to Measure Theory*. Graduate studies in mathematics. American Mathematical Society.

Indice Conceptos

Indice de Personas

Indice Símbolos