Teorema (3er Criterio de integrabilidad)

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada. f es integrable Riemann ~~sii~~ $\forall \sigma > 0$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ para toda partición P.

$$\max_{i=1,\dots,m} (x_i - x_{i-1}) < \delta \Rightarrow \sum_{\omega(f;[x_{i-1},x_i]) > \sigma} (x_i - x_{i-1}) < \varepsilon.$$

Ejemplos a)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{si } x = p/q \quad \text{m.c.d}(q,p)=1 \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

$f: [0,1] \to \mathbb{R}$.

~~Sea $\sigma > 0$ cualquiera. y elijamos $q^* \in \mathbb{N}$ con $\frac{1}{q^*} < \sigma$. Hay una cantidad finita de racionales p/q en $[0,1]$ con $q < q^*$. A saber~~

No corresponde

~~$$\underbrace{\tfrac{1}{2}}_{q=2}, \underbrace{\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}}_{q=3}, \underbrace{\tfrac{1}{4}, \tfrac{3}{4}}_{q=4}, \underbrace{\tfrac{1}{5}, \tfrac{2}{5}, \tfrac{3}{5}, \tfrac{4}{5}}_{q=5} \dots \underbrace{\tfrac{1}{q^*-1}, \dots, \tfrac{q^*-2}{q^*-1}}_{q=q^*-1}.$$~~

Sea $I=[a,b]\subset(0,1)$. $a<b$

¿Cuál es $\omega(f,I)$?

$f(x)=0$ en un conjunto denso.

Entonces $\inf_I\{f(x) \mid x\in I\}=0$.

Por otro lado

$\sup\{f(x) \mid x\in I\}=\frac{1}{q_0}$

con $q_0=\min\{q \mid \exists p<q : \frac{p}{q}\in I\}$.

Luego $\omega(f;I)>\sigma \Leftrightarrow \exists q,p \ \frac{1}{q}>\sigma$

y $\frac{p}{q}\in I \Leftrightarrow q<\frac{1}{\sigma}$ y $\frac{p}{q}\in I$.

Hay una cantidad finita de estas

fracciones $\frac{p}{q}$, $q=1,\dots,[\frac{1}{\sigma}]$ y $p=1,\dots,q-1$

sea δ la distancia más chica entre dos de estas cantidad finita de fracciones y lo elegimos de modo que $\delta N < \varepsilon$.

sea $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ una partición con

$$\min (x_i - x_{i-1}) < \delta$$

En cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ puede haber a lo sumo una fracción $\frac{p}{q}$ con $\frac{1}{q} > \sigma$.

Por lo tanto

$$\# I_\sigma = \# \{ i \mid \omega(f, [x_{i-1}, x_i]) > \sigma \} \leq N.$$

Así

$$\sum_{i \in I_\sigma} (x_i - x_{i-1}) \leq \delta N < \varepsilon$$

Aplicar el criterio de Hankel es más fácil. (ojo! no lo vi todavía).

$$\omega(f, x) = \begin{cases} 0 & x \notin \mathbb{Q} \\ 1/q & x = p/q \quad m.c.d(p,q) = 1 \end{cases}$$

Lema Si $L_1 = \lim_{x \to a^+} f(x)$ y $L_2 = \lim_{x \to a^-} f(x)$ existen y $f(a)$ pertenece al intervalo de extremos L_1 y L_2 entonces

$$\omega(f, a) = |L_1 - L_2|.$$

Dem Sea $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 :$

$$0 < (x-a) < \delta \Rightarrow |L_1 - f(x)| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow L_1 - \varepsilon < f(x) < L_1 + \varepsilon.$$

Además podemos asumir

$$0 < a - x < \delta \Rightarrow L_2 - \varepsilon < f(x) < L_2 + \varepsilon.$$

Supongamos $L_1 < L_2$. Luego

$$L_1 - \varepsilon < f(x) < L_2 + \varepsilon$$

Así $L_1 - \varepsilon < \inf f \leq \sup f < L_2 + \varepsilon$

$$\Rightarrow \omega(f, x) < L_2 - L_1 + 2\varepsilon.$$

Como ε arbitrario $\omega(f, a) \leq L_2 - L_1$

Pero $\sup f > L_2 - \varepsilon$ $\inf f < L_1 + \varepsilon$ en $(x-\delta, x+\delta)$

$$\Rightarrow \omega(f, x) > L_2 - L_1 - 2\varepsilon.$$

Ejemplo 1.3.1 $0 \leq a < b$

$$\int_a^b x\,dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}.$$

Dem Consideramos particiones uniformes (igual longitud). Sea $m \in \mathbb{N}$

$$x_k = a + \frac{k}{m}(b-a) \quad k=0,\dots,m.$$

$$m_i = \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f \qquad f(x) = x_{i-1} = a + \frac{i-1}{m}(b-a)$$

$$M_i = \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f \qquad f(x) = x_i = a + \frac{i}{m}(b-a)$$

$P_m = \{x_0, \dots, x_m\}$

$$\overline{S}(f, P_m) - \underline{S}(f, P) = \sum_{i=1}^{m} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1})$$

$$= \sum_{i=0}^{m-1} \frac{b-a}{m} \cdot \frac{b-a}{m} = \left(\frac{b-a}{m}\right)^2.$$

Que se hace $< \varepsilon$ tomando m suficientemente grande.

Esto prueba que $f(x)=x$ es integrable ②
por el primer criterio de integrabilidad.

Para justificar el valor de la integral.
hacemos lo siguiente

$$\overline{S}(f,P_n) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i (x_i - x_{i-1}) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} x_i (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(a + \frac{i}{n}(b-a)\right) \frac{b-a}{n}$$

$$= a(b-a) + \left(\frac{b-a}{n}\right)^2 \sum_{i=0}^{n-1} i$$

$$= a(b-a) + \left(\frac{b-a}{n}\right)^2 \cdot n \, \frac{n+1}{2}.$$

$$= (b-a)\left(a + \frac{n+1}{2n}(b-a)\right)$$

observar que $\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f,P_n) = \frac{b^2-a^2}{2}$

A la misma conclusión se llega con $\underline{S}(f,P_n)$

Luego, como

$$\underline{S}(f, P_n) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \overline{S}(f, P_n)$$

tomando $n \to \infty$ sale. □

Ejemplo 1.3.2 Podríamos usar particiones uniformes, pero eso nos obligaría a hallar fórmulas para $\sum_{i=0}^{n-1} i^m$. Usando particiones no uniformes evitamos este inconveniente

Tomamos $n \in \mathbb{N}$ y

$$q = \sqrt[n]{\frac{b}{a}} > 1$$

Consideramos

$$x_i = a q^i \quad i = 0, \dots, n$$

$$P_n = \{x_0, \dots, x_n\}$$

se tiene

$$x_i - x_{i-1} = a q^{i-1}(q-1)$$

Supongamos $m>0$ (7)

$$m_i = \inf_{[x_{i-1}, x_i]} x^m = x_{i-1}^m = a^m q^{m(i-1)}$$

$i=1,\dots,n.$

Similarmente

$$M_i = a^m q^{mi} \quad i=1,\dots,n$$

Si $m<0$ queda al revés (Lo desarrollamos?)

$$\overline{S}(f,P_n) = \sum_{i=1}^{n} a^m q^{mi} a q^{i-1}(q-1)$$

$$= \frac{a^{m+1}(q-1)}{q} \sum_{i=1}^{n} (q^{m+1})^{i} \leftarrow \text{geométrica}$$

$$= \frac{a^{m+1}(q-1)}{q}\left[\frac{q^{(m+1)(n+1)}-1}{q^{m+1}-1}-1\right] = \frac{a^{m+1}(q-1)}{q}\left[\frac{q\left(\frac{b}{a}\right)^{m+1}-1}{q^{m+1}-1}-1\right]$$

Ahora $\lim_{n\to\infty} q = 1.$

y: $$\lim_{n\to\infty} \frac{q^{m+1}-1}{q-1} = \lim_{q\to 1}\frac{q^{m+1}-1}{q-1} = m+1$$

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, P_n) = a^{m+1}\left[\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{m+1}-1}{m+1}\right]$$

$$= \frac{b^{m+1}}{m+1} - \frac{a^{m+1}}{m+1}$$

Similarmente $\lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, P_n) = \frac{b^{m+1}}{m+1} - \frac{a^{m+1}}{m+1}$

Ahora el razonamiento se completa diciendo.

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, P_n) - \underline{S}(f, P_n) = 0$$

Luego $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n$

$$\overline{S}(f, P_n) - \underline{S}(f, P_n) < \varepsilon$$

Luego f es integrable y como en el ejemplo 1.7.1

$$\int_a^b x^m \, dx = \frac{b^{m+1}}{m+1} - \frac{a^{m+1}}{m+1}$$

Ejemplo 1.3.3 Usamos particiones equiespaciadas

$$x_i = a + \frac{i}{n}(b-a) \quad i = 0, \dots, n$$

$$P_n = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$$

$$x_i - x_{i-1} = \frac{1}{n}$$

$$\left.\begin{aligned} M_i &= \operatorname{sen} x_i \\ m_i &= \operatorname{sen} x_{i-1} \end{aligned}\right\} \text{ sen es creciente en } [a,b].$$

$h := \frac{b-a}{n}$

$$\overline{S}(f, P_n) = h \sum_{i=1}^{n} \operatorname{sen}\left(a + \frac{i}{n}(b-a)\right) = h \sum_{i=1}^{n} \operatorname{sen}(a + ih)$$

Un truco para calcular sumas es expresar los términos de la suma como diferencia. Usamos la fórmula

$$2 \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v = \cos(u-v) - \cos(u+v)$$

con $u = a + ih \quad v = h/2$

$$2 \operatorname{sen}(a+ih) \operatorname{sen} h/2 = \cos\left(a + \left(i - \tfrac{1}{2}\right)h\right) - \cos\left(a + \left(i + \tfrac{1}{2}\right)h\right).$$

Luego:

$$\overline{S}(f,P_n) = h\,\frac{1}{2\,\mathrm{sen}\,\frac{h}{2}}\sum_{i=1}^{n} \cos\left(a+\left(i-\tfrac{1}{2}\right)h\right) - \cos\left(a+\left(i+\tfrac{1}{2}\right)h\right)$$

$$= h\,\frac{1}{2\,\mathrm{sen}\,\frac{h}{2}}\left\{\cos\left(a+\tfrac{h}{2}\right) - \cancel{\cos\left(a+\tfrac{3}{2}h\right)} + \cancel{\cos\left(a+\tfrac{3}{2}h\right)} - \cancel{\cos\left(a+\tfrac{5}{2}h\right)} + \dots - \cos\left(a+\left(n+\tfrac{1}{2}\right)h\right)\right\}$$

$$= h\,\frac{1}{2\,\mathrm{sen}\,\frac{h}{2}}\left\{\cos\left(a+\tfrac{h}{2}\right) - \cos\left(b+\tfrac{h}{2}\right)\right\}$$

Cuando $n\to\infty$, $h\to 0$ y $h=\frac{b-a}{n}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{h}{2\,\mathrm{sen}\,\frac{h}{2}} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{\frac{\mathrm{sen}\,h/2}{h/2}} \qquad \left(\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sen}\,x}{x}=1\right)$$

$$= 1$$

Así

$$\lim_{n\to\infty}\overline{S}(f,P_n) = \cos a - \cos b.$$

De manera similar

$$\lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, P_n) = \cos(a) - \cos(b)$$

Por el argumento empleado en los otros ejemplos sen x es integrable y

$$\int_a^b \operatorname{sen} x \, dx = \cos(a) - \cos(b) = \left[-\cos x \Big|_a^b\right]$$

La fórmula vale $\forall a, b$. La limitación $0 \leq a < b \leq \frac{\pi}{2}$ la pusimos para simplificar el razonamiento. De lo contrario hay que distinguir los intervalos donde sen x es creciente de donde es decreciente.