Repaso sobre integral de Riemann

Sumas de Darboux

Sea $[a,b] \subset \mathbb{R}$ y $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ partición $(a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b)$.

Sea

$$m_i = \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f(x) \; ; \; M_i = \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f(x).$$

Definimos

$$\underline{S}(P; f) = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1}).$$

$$\overline{S}(P; f) = \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1}).$$

Definición (Integral de Riemann) Si

$$\sup_P \underline{S}(P; f) = \inf_P \overline{S}(P; f)$$

f se dice integrable Riemann. El valor del supremo y el ínfimo coincidente se llama integral de f en $[a,b]$

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

<u>Propiedades Elementales</u> $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ $\alpha\in\mathbb{R}$.

- $\int_a^b \alpha f\,dx = \alpha\int_a^b f(x)dx$;
- $\int_a^b f(x)+g(x)\,dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.
- Si $c\in\mathbb{R}$: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

<u>Teorema</u> (1^er^ Criterio integrabilidad)

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es integrable si y solo si $\forall\varepsilon>0$ $\exists P$ (partición) tal que:

$$\overline{S}(P,f) - \underline{S}(P,f) < \varepsilon.$$

<u>Teorema</u> (Integrabilidad y continuidad)

Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es continua es integrable

¿Pueden ser integrables las funciones discontinuas?

Ejemplo (Heaviside)

$$f(x)=\begin{cases}1 & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

Integrable

Ejemplo (Dirichlet).

$$f(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

No integrable

Problema Caracterizar la integrabilidad

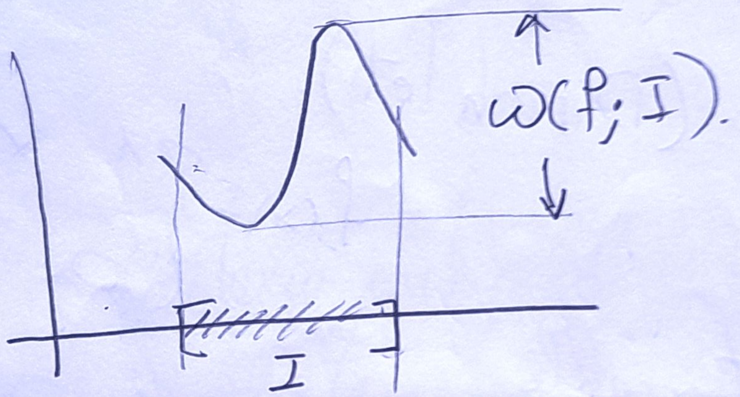
Teorema (2^{do} Criterio de Integrabilidad)

Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ acotada. f es integrable Riemann si y solo si $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ tal que toda partición $P=\{x_0,\dots,x_n\}$ satisface que:

si $\max\limits_{i=1,\dots,n}(x_i-x_{i-1})<\delta \Rightarrow \overline{S}(P,f)-\underline{S}(P,f)<\varepsilon$

Definición (Oscilación). Sea f una función e I un intervalo. La oscilación de f sobre I se define.

$$\omega(f;I) = \sup\{f(x) \mid x\in I\} - \inf\{f(x) \mid x\in I\}$$



La oscilación de f en un punto x se define por.

$$\omega(f;x) = \inf_{x\in I^{\circ}} \omega(f;I).$$

Ejercicio f es continua en $x \Leftrightarrow \omega(f;x)=0$.

Teorema (3er Criterio de integrabilidad)

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ acotada. f es integrable Riemann ~~sii~~ si $\forall\sigma>0$ $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta>0$ para toda partición P.

$$\max_{i=1,\dots,n}(x_i-x_{i-1})<\delta \Rightarrow \sum_{\omega(f;[x_{i-1},x_i])>\sigma}(x_i-x_{i-1})<\varepsilon.$$

Ejemplos a)

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{q} & \text{si } x=p/q \quad \text{m.c.d}(q,p)=1\\ 0 & \text{si } x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

$f:[0,1]\to\mathbb{R}$.

~~[Sea $\sigma>0$ cualquiera y elijamos $q^*\in\mathbb{N}$ con $\frac{1}{q^*}<\sigma$. Hay una cantidad finita de racionales p/q en $[0,1]$ con $q\leq q^*$. A saber~~

No corresponde

$$\underbrace{\tfrac{1}{2}}_{q=2},\ \underbrace{\tfrac{1}{3},\tfrac{2}{3}}_{q=3},\ \underbrace{\tfrac{1}{4},\tfrac{3}{4}}_{q=4},\ \underbrace{\tfrac{1}{5},\tfrac{2}{5},\tfrac{3}{5},\tfrac{4}{5}}_{q=5}\dots\underbrace{\tfrac{1}{q^*-1},\dots,\tfrac{q^*-2}{q^*-1}}_{q=q^*-1}.$$

Sea $I=[a,b]\subset(0,1)$. $a<b$

¿Cuál es $\omega(f,I)$?

$f(x)=0$ en un conjunto denso.

Entonces $\inf_{I}\{f(x) \mid x\in I\}=0$.

Por otro lado

$\sup\{f(x) \mid x\in I\}=\frac{1}{q_0}$

con $q_0=\min\{q \mid \exists p<q : \frac{p}{q}\in I\}$.

Luego $\omega(f;I)>\sigma \Longleftrightarrow \exists q,p\ \frac{1}{q}>\sigma$

y $\frac{p}{q}\in I \Longleftrightarrow q<\frac{1}{\sigma}$ y $\frac{p}{q}\in I$.

Hay una cantidad finita de estas fracciones $\frac{p}{q}$, $q=1,\dots,[\frac{1}{\sigma}]$ y $p=1,\dots,q-1$

sea δ la distancia más chica entre dos de estas cantidad finita de fracciones y lo elegimos de modo que $\delta N < \varepsilon$.

sea $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ una partición con

$$\min (x_i - x_{i-1}) < \delta$$

En cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ puede haber a lo sumo una fracción $\frac{p}{q}$ con $\frac{1}{q} > \sigma$.

Por lo tanto

$$\# I_\sigma = \# \{ i \mid \omega(f, [x_{i-1}, x_i]) > \sigma \} \leq N.$$

Así

$$\sum_{i \in I_\sigma} (x_i - x_{i-1}) \leq \delta N < \varepsilon$$

Aplicar el criterio de Hankel es más fácil. (ojo! no lo vi todavía).

$$\omega(f, x) = \begin{cases} 0 & x \notin \mathbb{Q} \\ 1/q & x = p/q \quad m.c.d(p,q) = 1 \end{cases}$$

Lema Si $L_1 = \lim_{x\to a^+} f(x)$ y $L_2 = \lim_{x \to a^-} f(x)$ existen y $f(a)$ pertenece al intervalo de extremos L_1 y L_2 entonces

$$\omega(f,a) = |L_1 - L_2|.$$

Dem Sea $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 :$

$$0 < (x-a) < \delta \Rightarrow |L_1 - f(x)| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad L_1 - \varepsilon < f(x) < L_1 + \varepsilon.$$

Además podemos asumir.

$$0 < a - x < \delta \Rightarrow L_2 - \varepsilon < f(x) < L_2 + \varepsilon.$$

Supongamos $L_1 < L_2$. Luego

$$L_1 - \varepsilon < f(x) < L_2 + \varepsilon$$

Así

$$L_1 - \varepsilon < \inf f \leq \sup f < L_2 + \varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad \omega(f, a) < L_2 - L_1 + 2\varepsilon.$$

Como ε arbitrario

$$\omega(f,a) \leq L_2 - L_1$$

Pero $\sup f > L_2 - \varepsilon \quad \inf f < L_1 + \varepsilon$ en $(x-\delta, x+\delta)$

$$\Rightarrow \quad \omega(f,x) > L_2 - L_1 - 2\varepsilon.$$

Definición (contenido exterior).

Dado $S \subset \mathbb{R}$ definimos el contenido exterior

$$c_e(S) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \;\middle|\; S \subset \bigcup_{i=1}^{n} [x_{i-1}, x_i] \right\}$$

Ejemplo a) Un conjunto finito S, $c_e(S) = 0$.

b) Si $S = [a,b] \Rightarrow c_e(S) = b-a$.

Como puedo usar el $[a,b]$ en la definición $c_e([a,b]) \leq b-a$.

Si $[a,b] \subset \bigcup_{i=1}^{n} [x_{i-1}, x_i]$. Vamos a demostrar que $b-a \leq \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})$

Por inducción sobre n. Si $n=1$ y $[a,b] \subset [x_1, x_2] \Rightarrow x_1 \leq a < b \leq x_2 \Rightarrow$ $b-a \leq x_2 - x_1$. Si vale para $n-1$

Como $a \in \bigcup_{i=1}^{n} [x_{i-1}, x_i] \Rightarrow \exists i_0 : a \in [x_{i_0 - 1}, x_{i_0}]$.

Si $x_{i_0} \geq b$ estaríamos en el caso $n=1$.

Si $x_{i_0} < b$. Entonces $[x_{i_0}, b] \subset \bigcup_{i \neq i_0}^{n} [x_{i-1}, x_i]$

Como $\bigcup_{i \neq i_0} [x_{i-1}, x_i]$ es cerrado entonces

$$[x_{i_0}, b] = \overline{(x_{i_0}, b]} \subset \bigcup_{i \neq i_0} [x_{i-1}, x_i].$$

Como en la unión hay uno menos

$$b - x_{i_0} \leq \sum_{i \neq i_0}^{n} (x_i - x_{i-1}).$$

Luego

$$b - a \leq b - x_{i_0 - 1} = b - x_{i_0} + x_{i_0} - x_{i_0 - 1}$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}).$$

c) Si $x_n \in \mathbb{R}$ es una sucesión

y $x_\infty = \lim_{n \to \infty} x_n$. Entonces $S = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{x_\infty\}$

tiene contenido cero.

Dem Sea $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists N : n \geq N \Rightarrow x_n \in [x_\infty - \frac{\varepsilon}{2}, x_\infty + \frac{\varepsilon}{2}]$

Sea $I_1 = [x_1 - \frac{\varepsilon}{2N}, x_1 + \frac{\varepsilon}{2N}], \ldots, I_{N-1} = [x_{N-1} - \frac{\varepsilon}{2N}, x_{N-1} + \frac{\varepsilon}{2N}]$.

$I_N = [x_\infty - \frac{\varepsilon}{2}, x_\infty + \frac{\varepsilon}{2}]$ luego $S \subset \bigcup I_i$

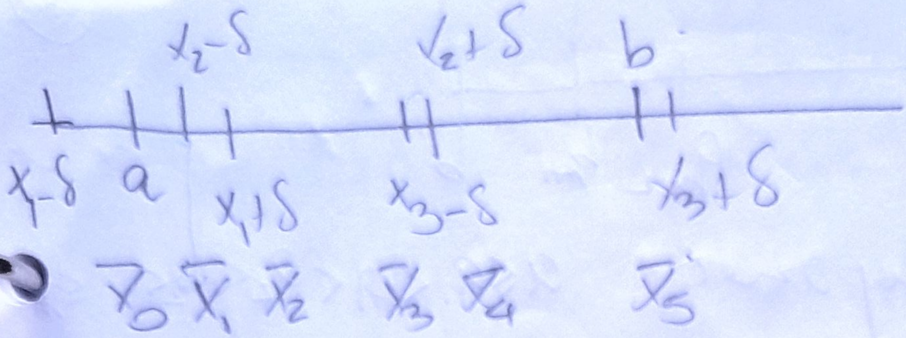
y $\sum l(I_i) < \varepsilon$.

Teorema (Hankel). Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ acotada y $S_\sigma=\{x \mid \omega(f,x)>\sigma\}$. Entonces f es integrable ssi $c_e(S_\sigma)=0$ $\forall \sigma>0$.

Lema Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ con $\omega(f,x)<\varepsilon$ $\forall x\in[a,b]$. Entonces existe una partición P tal que

$$\overline{S}(P,f)-\underline{S}(P,f)<\varepsilon(b-a)$$

Dem Sea $x\in[a,b]$. Como $\omega(f,x)<\varepsilon$, $\exists I_x=[x-\delta_x,x+\delta_x]$ con $\omega(f,I_x)<\varepsilon$. Tenemos $[a,b]\subset\bigcup_{x\in[a,b]} I_x$. Saquemos un subcubrimiento finito $[a,b]\subset\bigcup_{i=1} I_{x_i}$. Pongamos todos los puntos $x_i\pm\delta_{x_i}$ junto con a y b sobre la recta ordenamos lo en una secuencia $a=\overline{x}_0<\overline{x}_1<\cdots\overline{x}_n=b$.



Entonces $[\bar{x}_{j-1}, \bar{x}_j] \subset I_{x_i}$ para algún i

Luego $\omega(f, [\bar{x}_{j-1}, \bar{x}_j]) \le \omega(f, I_i) < \varepsilon$.

Luego si $P = \{\bar{x}_0, \dots, \bar{x}_n\}$.

$$\bar{S}(P,f) - \underline{S}(P,f) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(\bar{x}_i - \bar{x}_{i-1})$$

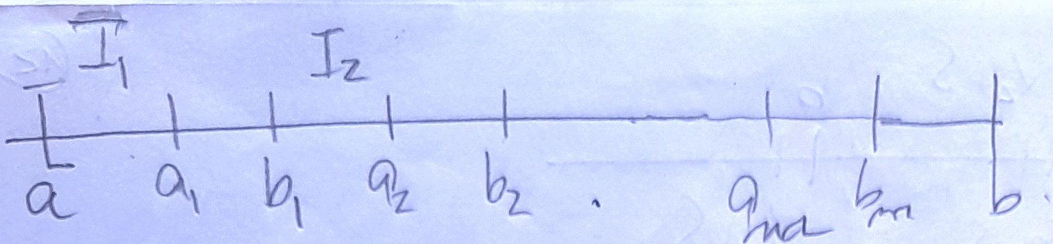
$$< \varepsilon \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \le \varepsilon (b-a).$$

Dem Teorema Hankel

$\Leftarrow$) Sea $\varepsilon > 0$ y $\sigma > 0$ cualesquiera $\sigma = \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$

Como $c_e(S_\sigma) = 0$ existen $a_i < b_i$, $i = 1, \dots, m$ con $S_\sigma \subset \bigcup_{i=1}^{m} (a_i, b_i)$ y $\sum_i (b_i - a_i) < \varepsilon / 2M$ marcados sobre la recta

$\rightsquigarrow |f| \le M$



Se puede suponer: $a \le a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \dots < b_m$

Sea $I_1 = [a, a_1]$, $I_2 = [b_1, a_2]$, ... $I_m = [b_{m-1}, a_m]$

$I_{m+1} = [b_m, b]$.

En cada I_j $\omega(f, I_j) \le \sigma < 2\sigma$.

Existen particiones de I_j, P_j

con $\overline{S}(P_j, f) - \underline{S}(P_j, f) < 2\sigma\,\ell(I_j)$

Consideremos la partición P que resulta de unir las P_j, $j = 1, \dots, m+1$

y $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_m, b_m$. Luego

$$\overline{S}(P,f) - \underline{S}(P,f) = \sum_{j=1}^{m+1} \overline{S}(P_j, f) - \sum_{j=1}^{m+1} \underline{S}(P_j, f)$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} (M_j - m_j)(b_j - a_j) \le 2\sigma(b-a) + 2M\frac{\delta}{2M}$$

$$< \varepsilon$$

$\Longrightarrow$) ~~Sea~~ f integrable, $\varepsilon>0$ y $\sigma>0$

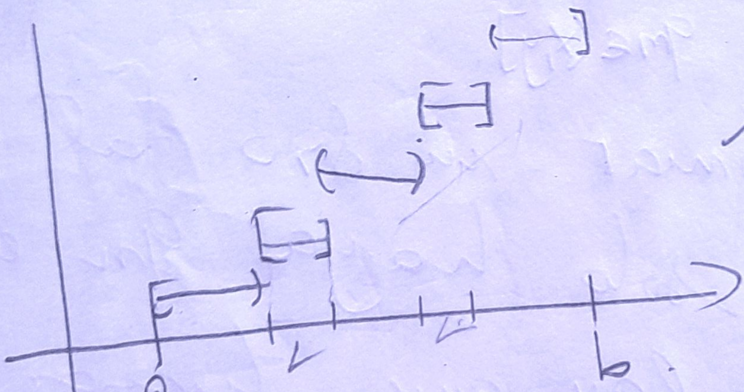
Por el tercer criterio de integrabilidad $\exists\delta>0$ tal que si P es una partición con $\max(x_i - x_{i-1}) < \delta$ entonces

$$\sum_{i\in I_{\sigma/2}} (x_i - x_{i-1}) < \varepsilon$$

si $i \notin I_{\sigma/2} \Longrightarrow \omega(f, I_i) \leq \sigma/2$. luego

si $x \in I_i^{o} \overset{i\notin I_{\sigma/2}}{\Longrightarrow} \omega(f, x) \leq \sigma/2$.

Veamos que si $\omega(f,x)>\sigma$ entonces $x \in \bigcup_{i\in I_{\sigma/2}} [x_{i-1}, x_i]$.



De no ser así $x \in \partial I_i$ en dos distintos i (i_1, i_2) tales que $i \notin I_\sigma$. Entonces si $y \in I_{i_1}$ y $z \in I_{i_2}$ con $x \in I_{i_1} \cap I_{i_2}$ tenemos $f(z) - f(y) \leq f(z) - f(x) + f(x) - f(y) \leq \sigma/2 + \sigma/2 \leq \sigma$.

Así

$$c_e(\{x \mid \omega(f,x) > \sigma\}) \leq \sum_{i \in I_0} (x_i - x_{i-1}) < \varepsilon \qquad \square$$

Ejemplos a) Sea $\mathbb{Q} \cap [0,1] = \{q_1, \dots$

y

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} H(x - q_n).$$

f es integrable. f es continua en $x \notin \mathbb{Q}$
si $x \in \mathbb{Q}$ $x = q_n$.
si $x < y$

$$f(y) - f(x) = \sum_{\substack{n=1 \\ q_n \in (x,y]}}^{\infty} \frac{1}{2^n} H(x - q_n).$$

Hay que tomar un $\delta > 0$ tal en $(x, x+\delta]$ sólo haya q_n con n grande. hay que tomar

$$\delta < d(x, \{q_1, \dots, q_n\} \setminus \{q_n\}).$$

Hay una cantidad finita de x con $\omega(f,x) > \sigma$.

$- x_0 < \dots x_1 < \dots \quad x_n = b.$

b) Función de Thomae

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{q} & x=p/q \quad \text{m.c.d}(p,q) \\ 0 & x\notin\mathbb{Q}.\end{cases}$$

Integrales impropias

Definición: supongamos $a<c\leq b$. Si f es acotada en $[a,c-\varepsilon]$ y $[c+\varepsilon,b]$ para todo $\varepsilon>0$.

Podemos definir

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Lo definimos como

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx+\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{c+\varepsilon}^{a} f(x)\,dx.$$

Ejemplo $f(x)=|x|^{\alpha}$.

Similarmente $\int_a^{\infty} f(x)\,dx.$

Propiedades elementales de la Integral

1) $\int_a^b f(x)+\alpha g(x)\,dx = \int_a^b f(x) + \alpha \int_a^b g(x)\,dx$

2) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

3) Definición Si $b<a$ $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$.

3') $f \leq g \Rightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b g$. $a<b$

4). Si f_n son integrables Riemann. y $f_n \to f$ unif. en $[a,b] \Rightarrow f$ es int. y $\int_a^b f_n \to \int_a^b f$

Teorema Fundamental del Cálculo

Dada f integrable en $[a,b]$ definimos.

$$\phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad x \in [a,b]$$

Ejemplos a) $\phi(x) = \int_0^x t\,dt = \frac{x^2}{2}$ ... y además $\phi'(t)=t$

b) $\phi(x) = \int_0^x t^n dt = \frac{x^{n+1}}{n+1}$. Lo mismo

c) $\phi(x) = \int_0^x \operatorname{sen} t\,dt = -\cos x$

Teorema (Fundamental del Cálculo).
Si f es integrable en $[a,b]$
ϕ es diferenciable en cada punto
de continuidad de f y

$$\phi'(x) = f(x).$$

Dem. Supongamos f continua en x
$\forall \varepsilon>0 \; \exists \delta>0$ tal que

$$|y-x|<\delta \Rightarrow |f(y)-f(x)|<\varepsilon$$

$$\Longrightarrow \quad f(x)-\varepsilon < f(y) < f(x)+\varepsilon$$

$\left|\int_x^{x+h} f\right| = -\int_{x+h}^{x}$
$< -f(x)|h| + \varepsilon|h|$

Luego ya sea $h>0$ o $h<0$

$$|h| f(x) - \varepsilon|h| < \int_x^{x+h} f(y) < |h| f(x) + \varepsilon|h|$$

$-(f(x)+\varepsilon)|h|$

Luego

$$\frac{\phi(x+h)-\phi(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

Entonces si $h>0$

$$f(x)-\varepsilon < \frac{\phi(x+h)-\phi(x)}{h} < f(x)+\varepsilon$$

Entonces

$$\lim_{h\to 0} \frac{\phi(x+h)-\phi(x)}{h} = f(x) \quad \square$$

Corolario: Si f es continua en $[a,b]$ y $F'(x) = f(x)$ $x \in [a,b]$

Entonces

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,dt = F(b)-F(a)}$$

Problema que funciones tienen una derivada F' integrable y

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b)-F(a)$$

Ejemplo 1.3.1 $0 \leq a < b$

$$\int_a^b x\,dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}.$$

Dem Consideramos particiones uniformes (igual longitud). Sea $n \in \mathbb{N}$

$$x_k = a + \frac{k}{n}(b-a) \quad k=0,\dots,n.$$

$$m_i = \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f \quad f(x) = x_{i-1} = a + \frac{i-1}{n}(b-a)$$

$$M_i = \sup_{[x_{i-1}, x_i]} \quad f(x) = x_i = a + \frac{i}{n}(b-a)$$

$P_n = \{x_0, \dots, x_n\}$

$$\overline{S}(f, P_n) - \underline{S}(f, P) = \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1})$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} \cdot \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n}$$

Que se hace $< \varepsilon$ tomando n suficientemente grande.

Esto prueba que $f(x)=x$ es integrable (2)
por el primer criterio de integrabilidad.
Para justificar el valor de la integral.
hacemos lo siguiente

$$\overline{S}(f,P_n)=\sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_i-x_{i-1})=$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1} x_i(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=0}^{n-1}\left(a+\frac{i}{n}(b-a)\right)\frac{b-a}{n}$$

$$=a(b-a)+\left(\frac{b-a}{n}\right)^2\sum_{i=0}^{n-1} i$$

$$=a(b-a)+\left(\frac{b-a}{n}\right)^2\cdot n\,\frac{n+1}{2}.$$

$$=(b-a)\left(a+\frac{n+1}{2n}(b-a)\right)$$

Observar que $\lim_{n\to\infty}\overline{S}(f,P_n)=\frac{b^2-a^2}{2}$

A la misma conclusión se llega con $\underline{S}(f,P_n)$

Luego, como

$$\underline{S}(f, P_n) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \overline{S}(f, P_n)$$

tomando $n \to \infty$ sale. □

Ejemplo 1.3.2 Podríamos usar particiones uniformes, pero eso nos obligaría a hallar fórmulas para $\sum_{i=0}^{n-1} i^m$. Usando particiones no uniformes evitamos este inconveniente.

Tomamos $n \in \mathbb{N}$ y

$$q = \sqrt[n]{\frac{b}{a}} > 1$$

Consideramos

$$x_i = a q^i \quad i = 0, \dots, n$$

$$P_n = \{x_0, \dots, x_n\}$$

se tiene

$$x_i - x_{i-1} = a q^{i-1}(q-1)$$

Supongamos $m>0$ ⑦

$$m_i = \inf_{[x_{i-1}, x_i]} x^m = x_{i-1}^m = a^m q^{m(i-1)}$$

$i=1,\dots,n.$

Similarmente

$$M_i = a^m q^{mi} \quad i=1,\dots,n$$

Si $m<0$ queda al revés (Lo desarrollamos?)

$$\overline{S}(f,P_n) = \sum_{i=1}^{n} a^m q^{mi} a q^{i-1}(q-1)$$

$$= \frac{a^{m+1}(q-1)}{q} \sum_{i=1}^{n} (q^{m+1})^{i} \leftarrow \text{geométrica}$$

$$= \frac{a^{m+1}(q-1)}{q}\left[\frac{q^{(m+1)(n+1)}-1}{q^{m+1}-1}-1\right] = \frac{a^{m+1}(q-1)}{q}\left[\frac{q\left(\frac{b}{a}\right)^{m+1}-1}{q^{m+1}-1}-1\right]$$

Ahora $\lim_{n\to\infty} q = 1.$

y: $\lim_{n\to\infty} \frac{q^{m+1}-1}{q-1} = \lim_{q\to 1} \frac{q^{m+1}-1}{q-1} = m+1$

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, P_n) = a^{n+1}\left[\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{n+1}-1}{n+1}\right]$$

$$= \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

Similarmente $\lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, P_n) = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}$

Ahora el razonamiento se completa diciendo

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, P_n) - \underline{S}(f, P_n) = 0$$

Luego $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n$

$$\overline{S}(f, P_n) - \underline{S}(f, P_n) < \varepsilon$$

Luego f es integrable y como en el ejemplo 1.7.1

$$\int_a^b x^n \, dx = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

Ejemplo 1.3.3 Usamos particiones equiespaciadas

$$x_i = a + \frac{i}{n}(b-a) \qquad i=0,\dots,n$$

$$P_n = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$$

$$x_i - x_{i-1} = \frac{1}{n}$$

$$\left.\begin{array}{l} M_i = \operatorname{sen} x_i \\ m_i = \operatorname{sen} x_{i-1} \end{array}\right\} \text{ sen es creciente en } [a,b]. \qquad h := \frac{b-a}{n}$$

$$\overline{S}(f, P_n) = h\sum_{i=1}^{n} \operatorname{sen}\left(a + \frac{i}{n}(b-a)\right) = h\sum_{i=1}^{n} \operatorname{sen}(a+ih)$$

Un truco para calcular sumas es expresar los términos de la suma como diferencia. Usamos la fórmula

$$2 \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v = \cos(u-v) - \cos(u+v)$$

con $u = a + ih \qquad v = h/2$

$$2 \operatorname{sen}(a+ih) \operatorname{sen} h/2 = \cos\left(a + (i-\tfrac{1}{2})h\right) - \cos\left(a + (i+\tfrac{1}{2})h\right).$$

Luego:

$$\overline{S}(f,P_n) = h\,\frac{1}{2\,\mathrm{sen}\,\frac{h}{2}}\sum_{i=1}^{n}\cos\left(a+\left(i-\tfrac{1}{2}\right)h\right)-\cos\left(a+\left(i+\tfrac{1}{2}\right)h\right)$$

$$= h\,\frac{1}{2\,\mathrm{sen}\,\frac{h}{2}}\left\{\cos\left(a+\frac{h}{2}\right)\cancel{-\cos\left(a+\frac{3}{2}h\right)+\cos\left(a+\frac{3}{2}h\right)}\right.$$

$$\left.\cancel{-\cos\left(a+\frac{5}{2}h\right)}+\ldots\ldots-\cos\left(a+\left(n+\tfrac{1}{2}\right)h\right)\right\}$$

$$= h\,\frac{1}{2\,\mathrm{sen}\,\frac{h}{2}}\left\{\cos\left(a+\frac{h}{2}\right)-\cos\left(b+\frac{h}{2}\right)\right\}$$

Cuando $n\to\infty$, $h\to 0$ y $h=\frac{b-a}{n}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{h}{2\,\mathrm{sen}\,\frac{h}{2}} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{\frac{\mathrm{sen}\,h/2}{h/2}}$$

$$\left(\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sen}\,x}{x}=1\right)$$

$$=1$$

Así

$$\lim_{n\to\infty}\overline{S}(f,P_n) = \cos a - \cos b.$$

De manera similar

$$\lim_{n \to \infty} \underline{S}(f, P_n) = \cos(a) - \cos(b)$$

Por el argumento empleado en los otros ejemplos $\operatorname{sen} x$ es integrable y

$$\int_a^b \operatorname{sen} x \, dx = \cos(a) - \cos(b) = \left[-\cos x \Big|_a^b \right]$$

La fórmula vale $\forall a, b$. La limitación $0 \leq a < b \leq \frac{\pi}{2}$ la pusimos para simplificar el razonamiento. De lo contrario hay que distinguir los intervalos donde $\operatorname{sen} x$ es creciente de donde es decreciente.

Demostración 2^do^ Criterio de integrabilidad (1)

Sea $\varepsilon > 0$.

Por el primer criterio de integrabilidad

$\exists P^* = \{y_0, \dots, y_m\}$

$$\overline{S}(f, P^*) - \underline{S}(f, P^*) < \varepsilon/2$$

Como f es acotada $\exists M$:

$$|f| \leq M.$$

Elijamos:

$$\delta < \min\left\{\frac{\varepsilon}{6Mm}, \min_j (y_j - y_{j-1})\right\}$$

Sea ahora $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ con

$$x_{i+1} - x_i < \delta, \quad i = 0, \dots, n-1$$

Definimos

$$I = \{i \in \{1, \dots, n\} \mid \exists j \in \{1, \dots, m\} : [x_{i-1}, x_i] \subset [y_{j-1}, y_j]\}$$

$$J = \{1, \dots, n\} - I$$

A su vez dividimos el conjunto I

$$I = I_1 \cup \dots \cup I_m .$$

donde

$$I_j = \{ i \in I \mid [x_{i-1}, x_i] \subset [y_{j-1}, y_j] \}$$

Puede ocurrir que $I_j = \emptyset$.

Escribimos

$$m_i = \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f(x) , \quad M_i = \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

$$m_j^* = \inf_{[y_{j-1}, y_j]} f(x) , \quad M_j^* = \sup_{[y_{j-1}, y_j]} f(x)$$

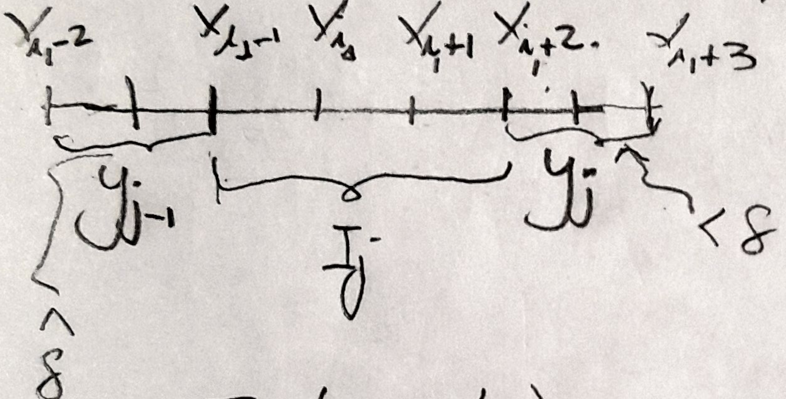
Si $i \in I_j \Rightarrow [x_{i-1}, x_i] \subset [y_{j-1}, y_j]$

$\Longrightarrow m_i \geq m_j^*$ y $M_i \leq M_j^*$.

Luego si $i \in I_j$

$$\sum_{i\in I_k} m_i(x_i - x_{i-1}) \geq \sum_{i\in I_k} m_j^*(x_i - x_{i-1})$$

$$\geq m_j^*(y_j - y_{j-1} - 2\delta)$$



$$\sum_{i\in I_k}(x_i - x_{i-1}) \geq y_j - y_{j-1} - 2\delta$$

-0

$$\sum_{i\in I_j} M_i(x_i - x_{i-1}) \leq M_j^*(y_j - y_{j-1})$$

$n < 2\delta$

Si $i \in I \Longrightarrow \exists j:\ x_{i-1} < y_j < x_i$

Finalmente

$$\overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) = \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1})$$

$$= \sum_j \sum_{i\in I_j}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) +$$

$$+ \sum_{i\notin I}\underbrace{(M_i - m_i)}_{\leq 2M}\underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{<\delta} \leq$$

$\# i \in I \leq n$

$$\leq \sum_j \left\{ M_j^* (y_j - y_{j-1}) - m_j^* (y_j - y_{j-1} - 2\delta) \right.$$

$$+ 2M\delta m$$

$$\leq \sum_j (M_j^* - m_j^*)(y_j - y_{j-1}) + \sum_j \underbrace{m_j^*}_{\leq M} 2\delta, (\ast)$$

$$+ 2M\delta m \leq$$

$$\overline{S}(f, P^*) - \underline{S}(f, P_*) + 3Mm\delta$$

$$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Le satisface el 1er criterio de integrabilidad. $\square$