FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Universidad Nacional de La Pampa

Depto de Matemática.
Primer Cuatrimestre de 2022
Teoría de la Medida
Práctica 2: Integral de Riemann

0.1 Práctica II: Integral de Riemann

Ejercicio 1. Obtener la fórmula del área de:

1. rectángulos con lados enteros, racionales e irracionales;
2. paralelogramos;
3. triángulos;
4. trapecios;
5. polígonos regulares.

Ejercicio 2. Explicar por qué si P y Q son particiones del mismo intervalo y Q es un refinamiento de P ($Q \supseteq P$) y si f es cualquier función acotada sobre el intervalo, entonces

$$\underline{S}(P; f) \leq \underline{S}(Q; f) \leq \overline{S}(Q; f) \leq \overline{S}(P; f)$$

EN EL APUNTE: Ejercicio 3. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada y P, P' particiones de $[a, b]$ con $P \subset P'$. Demostrar que

$$\underline{S}(P, f) \leq \underline{S}(P', f) \quad \text{y} \quad \overline{S}(P', f) \leq \overline{S}(P, f).$$

Inferir que para cualesquiera P, P' (sin importar que una este o no contenida dentro de la otra)

$$\underline{S}(P, f) \leq \overline{S}(P, f).$$

Ejercicio 4. Considerar la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ x & 0 < x < 1 \\ 0 & x = 1, \end{cases} \tag{1}$$

y la partición $P = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right\}$ de $(0, 1)$.
Hallar las sumas inferior y superior de Darboux $\underline{S}(P; f)$ y $\overline{S}(P; f)$.

Ejercicio 5. Usando la función f definida por (1) y $\epsilon = \frac{1}{2}$, encontrar $\delta > 0$ tal que para cualquier partición P en intervalos de longitud menor que δ, la diferencia entre $\overline{S}(P; f)$ y $\underline{S}(P; f)$ sea menor que $\frac{1}{2}$.

Ejercicio 6. Considerar la función

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n-1}} \left\lfloor \frac{2^n x + 1}{2} \right\rfloor \quad 0 \leq x \leq 1, \tag{2}$$

donde $\lfloor \alpha \rfloor$ denota el mayor entero menor o igual a α.
Mostrar que la serie converge para todo $x \in [0, 1]$, que la función $g(x)$ es monótona creciente, que $g(0) = 0$ y $g(1) = 1$.
Encontrar todos los puntos en los cuales la función g es discontinua y en estos puntos calcular la diferencia entre los límites laterales.

Ejercicio 7. Mostrar que la función g definida en (2) es integrable de Riemann sobre $[0,1]$.

Ejercicio 8. Hallar el valor de $\int_0^1 g(x)\,dx$ siendo g la función definida por (2). Indicar claramente los motivos que llevan a su conclusión.

Ejercicio 9. Encontrar todos los valores positivos de α para los cuales la integral impropia

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{|x|^\alpha}\,dx$$

tiene un valor. Explicar las razones que conducen a su conclusión.

Ejercicio 10. Probar que $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{((nx))}{n^2}$ converge uniformemente, siendo

$$((x)) = \begin{cases} x-\lfloor x\rfloor\,, & \lfloor x\rfloor \le x < \lfloor x\rfloor + \frac{1}{2} \\ 0 & x = \lfloor x\rfloor + \frac{1}{2} \\ x-\lfloor x\rfloor - 1 & \lfloor x\rfloor + \frac{1}{2} < x < \lfloor x\rfloor + 1. \end{cases}$$

Ejercicio 11. Probar que f es continua en c si y sólo si la oscilación de f en el punto c es cero.
EN EL APUNTE:
f es continua en x si y solo si $w(f;x)=0$.

Ejercicio 12. Sea f definida por $f(x)=\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x\neq 0$ y $f(0)=0$. ¿Cuál es la oscilación de f en 0? Justificar su respuesta.

Ejercicio 13. Hallar la oscilación en $x=\frac{1}{3}$ de la función

$$g(x) = \begin{cases} x & x\in\mathbb{Q} \\ -x & x\notin\mathbb{Q} \end{cases}$$

Justificar la respuesta.

Ejercicio 14. Usando sumas de Darboux y **Python ????**, aproximar:

1. $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$ y comparar con $\ln(2)$;
2. $\int_{-1}^1 x^2\,dx$.
   ¿A qué parecen aproximarse las sumas inferiores y superiores?
3. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$
   ¿Por qué el resultado puede usarse para aproximar π?

Ejercicio 15. Usando sumas de Darboux obtener:

1. $\int_a^b x^2\,dx$;
2. $\int_a^b \cos x\,dx$;
3. $\int_a^b \frac{1}{x}\,dx = \ln b - \ln a$.

EN EL APUNTE:

Ejercicio 16. Sea $0\le a<b$ veamos que

$$\int_a^b x^2dx = \frac{b^3}{3}-\frac{a^3}{3}.$$

Ayuda: Usar particiones uniformes y la fórmula $\sum_{i=1}^{n} n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$.

Ejercicio 17. Sea $0 \leq a < b$ y n un entero negativo, veamos que

$$\int_a^b x^n dx = \begin{cases} \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1} & \text{si } n \neq -1 \\ \ln(b) - \ln(a) & \text{si } n = -1 \end{cases}$$

Ejercicio 18. Sea $0 \leq a < b \leq \pi$, veamos que

$$\int_a^b x dx = -(\cos(b) - \cos(a)).$$

Ejercicio 19. Sea $n(x) = \begin{cases} 1 & x = \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}. \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$
Probar que n es integrable sobre $[0,1]$ y que $\int n(x)\,dx = 0$.

Ejercicio 20. Sea $p(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor & \text{en otro caso} \end{cases}$
Probar que p es integrable sobre $[0,1]$.

Ejercicio 21. Hallar el contenido exterior de los siguientes conjuntos:

1. $\mathbb{Q} \cap [0,1]$;
2. $[0,1] - \mathbb{Q}$;
3. $\left\{ \frac{n}{n+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$;
4. $\left\{ \frac{2k-1}{2^n} \mid n \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq 2^{n-1} \right\}$;
5. $\left\{ \frac{k}{n} \mid n \in \mathbb{N},\ k = 1, 2 \text{ ó } 3 \right\}$;
6. $(0,1) \cup (3,4)$;
7. $\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1} \right)$.

Ejercicio 22. Probar que si S tiene contenido exterior 0 y T es cualquier conjunto acotado, entonces

$$c_e(S \cup T) = c_e(T)$$

donde c_e se lee como *contenido exterior*.