Teoría de la medida

$\mathbb{R}^d$ espacio euclídeo dimensión d.

$x \in \mathbb{R}^d \Rightarrow x = (x_1, \ldots, x_d)$, $x_i \in \mathbb{R}$

$|x| = (x_1^2 + \ldots + x_d^2)^{1/2}$ norma de x

$d(x,y) = |x-y|$ distancia x a y

Si $E \subset \mathbb{R}^d$: $E^c = \{x : x \notin E\}$. complemento

Si $E, F \subset \mathbb{R}^d$.

$$E - F = E \cap F^c = \{x : x \in E, x \notin F\}$$

$$d(E,F) = \inf\{d(x,y) : x \in E, y \in F\}$$

Si $E \subset \mathbb{R}^d$, $\operatorname{diam}(E) = \sup\{d(x,y) | x, y \in E\}$

$B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^d : d(x,y) < r\}$ bola abierta de centro x y radio r.

$E \subset \mathbb{R}^d$ es abierto si $\forall x \in E\ \exists r > 0$
$B(x,r) \subset E$

$F \in \mathbb{R}^d$ es cerrado ssi F^c es abierto

- Si $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ son abiertos $\Longrightarrow$

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda \text{ es abierto}$$

- Si Λ es finito

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda \text{ es abierto}$$

Con cerrados pasa lo mismo cambiando uniones $\longleftrightarrow$ intersecciones

$E\subset\mathbb{R}^d$ es acotado si $E\subset B$ para alguna bola B

- $E\subset\mathbb{R}^d$ es compacto si es cerrado y acotado.

Teorema (Cubrimiento Heine-Borel)

Si $E\subset\mathbb{R}^d$ es compacto y $E\subset\bigcup_\alpha \mathcal{O}_\alpha$ con $\mathcal{O}_\alpha$ abiertos $\forall\alpha$, entonces

Existe finitos $\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_N$ tal que
$E \subset \bigcup_{k=1}^{N} O_{\alpha_i}$

- $x \in \mathbb{R}^d$ es un punto límite (Clausura) de $E \subset \mathbb{R}^d$ si $\forall r > 0$ $B(x,r) \cap E \neq \phi$. $x \in E$
- es un punto aislado de E si $\exists r > 0$ $B(x,r) \cap E = \{x\}$.
- $x \in E$ es interior a E si $\exists r > 0$ $B(x,r) \subset E$.

- $E^{\circ} = \{x \mid x \text{ es interior a } E\}$.
- $\overline{E} = \{x \mid x \text{ es pto límite de } E\}$
- $\partial E = \overline{E} - E^{\circ}$

Ejercicio a) $\overline{E}$ es cerrado b) E es cerrado ssi $E = \overline{E}$
c) E es abierto ssi $E = E^{\circ}$ d) $\partial E = \partial E^c$ e) $E^{\circ} = \overline{E^c}$

Un conjunto $E \subset \mathbb{R}^d$ se llama perfecto si no tiene puntos aislados

Rectángulos y cubos

- $R \subset \mathbb{R}^d$ es rectángulo si

$$R = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$$

$a_j \leq b_j \quad j = 1, \dots, d$.

Por definición un rectángulo es cerrado y tiene lados paralelos a los ejes.

- $d = 1$ intervalo cerrado
- $d = 2$ rectángulo cerrado lados paralelos
- $d = 3$ paralelepípedo

Si R es rectángulo, longitud de lado $b_i - a_i$. Volumen de R

$$|R| = (b_1 - a_1) \dots (b_d - a_d)$$

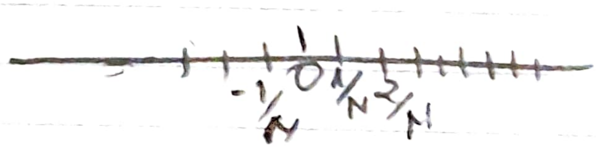
- Un rectángulo abierto se define como es natural.
- Un cubo es un rectángulo con todos los lados de la misma longitud ℓ. Si Q es un cubo con lados de long. ℓ entonces $|Q| = \ell^d$

Una flia de rectángulos $\{R_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ se dice casi disjunta si

$$\mathring{R}_{\lambda_1} \cap \mathring{R}_{\lambda_2} = \emptyset \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$$

Considerar el conjunto (para $N>0$)

$$\frac{1}{N}\mathbb{Z} = \left\{\frac{m}{N} : m\in\mathbb{Z}\right\}$$



Sea I un intervalo de $\mathbb{R}$ con longitud ℓ. Queremos estimar

$$\#\left(I \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z}\right)$$

⑥

Lema 1

$$Nl-1 \leq \#\left(I \cap \tfrac{1}{N}\mathbb{Z}\right) \leq Nl+1$$

Dem

Supongamos $k = \#\left(I \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z}\right)$.

Supongamos $k>0$ y $\overbrace{a_1, \dots, a_k}^{\text{consecutivos}} \in I \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z}$

$a_1 < a_2 < \dots < a_k$ $\quad a_1 = \frac{J}{N}, \; a_2 = \frac{J+1}{N}, \; a_k = \frac{J+k-1}{N}$

$I = [a,b]$. Entonces.

$$a \leq \frac{J}{N} \leq \frac{J+k-1}{N} \leq b$$

$$l = b-a \geq \frac{k-1}{N} \quad ✓$$

$$\frac{J-1}{N} < a \leq b < \frac{J+k}{N}$$

$$l = b-a < \frac{k+1}{N} \quad ✓.$$

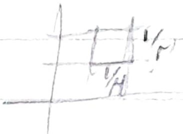
Corolario 2 Si I es un intervalo de long. l.

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\#\left(I \cap \tfrac{1}{N}\mathbb{Z}\right) = l = |I|$$

Si R es un rectángulo de $\mathbb{R}^d$ con

$$R = \underbrace{[a_1, b_1]}_{I_1} \times \dots \times \underbrace{[a_d, b_d]}_{I_d}.$$

$$\#\left(R \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z}^d\right) = \#\left(I_1 \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z}\right) \cdots \#\left(I_d \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z}\right)$$



luego

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N^d} \#\left(R \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z}^d\right) = |R|.$$

Como:

$$\#\left(R^\circ \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z}^d\right) \leq \#\left(R \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z}^d\right) \leq \#\left(R^\circ \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z}^d\right) + 2^d$$

Tenemos que también

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N^d} \#\left(R^\circ \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z}^d\right) = |R|$$

Corolario 3 Si R es un rectángulo y $R=\bigcup_{j=1}^{N} R_j$ con $\{R_j\}_{j=1}^{N}$ una flía casi disjunta de rectángulos entonces

$$|R|=\sum_{j=1}^{N}|R_j|$$

Dem

$$|R| = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N^d}\#\left(R\cap\frac{1}{N}\mathbb{Z}^d\right) \leq$$

$$\leq \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N^d}\sum_{j=1}^{N}\#\left(R_j\cap\frac{1}{N}\mathbb{Z}^d\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{N}|R_j|.$$

$$\sum_{j=1}^{N}|R_j| = \frac{1}{N^d}\sum_{j=1}^{N}\lim_{N\to\infty}\#\left(R_j^{\circ}\cap\frac{1}{N}\mathbb{Z}\right)$$

$$= \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N^d}\#\left(\bigcup_{j=1}^{N}R_j^{\circ}\right)\cap\frac{1}{N}\mathbb{Z} \leq |R|$$

Lema 4 Si R es rectángulo y $R \subset \bigcup_{j=1}^{N} R_j$, R_j rectángulos entonces

$$|R| \leq \sum_{j=1}^{N} |R_j|.$$

Dem Ejercicio ✓

Teorema 5 Todo conjunto abierto $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}$ es unión numerable (única) de intervalos abiertos disjuntos.

Dem Sea $x \in \mathcal{O}$, definimos

$$I_x = \bigcup \{ I : I \text{ intervalo}, \overset{\text{abierto}}{} I \subset \mathcal{O}, x \in I \}$$

a) I_x abierto.

b) I_x es intervalo, si $y, z \in I \Rightarrow \exists I_1, I_2$ intervalos con $I_1, I_2 \subset \mathcal{O}$, $x \in I_1 \cap I_2$ y $y \in I_1$, $z \in I_2$. Luego $I_1 \cup I_2$ es intervalo, $I_1 \cup I_2 \subset \mathcal{O}$. Luego $[y, z] \subset I_x$.

c) Si $I_x \cap I_y \neq \emptyset \Rightarrow I_x = I_y$.

Sale de que $I_x \cup I_y$ es intervalo

d) Hayalo suma una cantidad numerable de intervalos disjuntos (Ejercicio)

e) la unicidad ejercicio

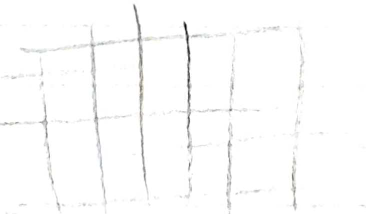
Problemas generalización a $\mathbb{R}^d$ $(d>1)$

<u>Teorema</u> <u>6</u> Todo abierto de $\mathbb{R}^d$ se puede escribir como unión numerable de cubos casi disjuntos.

<u>Dem</u> Sea $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ abierto. Vamos a construir una flia $\mathcal{G}$ de cubos casi disjuntos con $\mathcal{O} = \bigcup_{Q \in \mathcal{G}} Q$

Procedemos inductivamente por etapas.

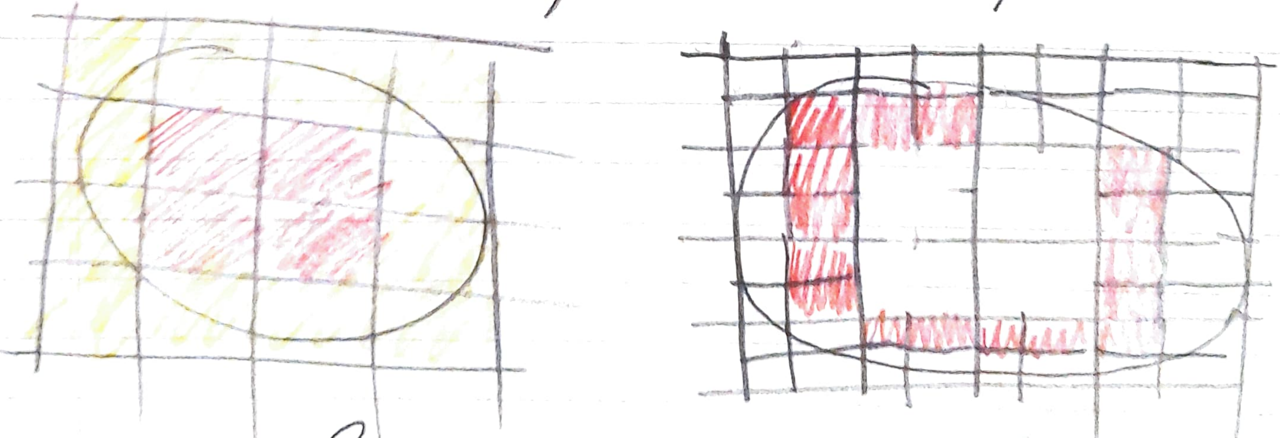
<u>1.er etapa</u> Consideremos la flia de cubos con vertices en $\mathbb{Z}^d$



que cubre $\mathbb{R}^d$.

Todos aquellos cubos que quedan contenidos en $\mathcal{O}$ se agregan a la $\mathcal{G}$. Los cubos que son disjuntos de $\mathcal{O}$ se tiran y los que tienen parte en $\mathcal{O}$ y en $\mathcal{O}^c$ se dejan como candidatos.

En la etapa k tomamos los candidatos de la etapa $k-1$ y dividimos sus lados en 2 y procedemos como en la primera etapa



La flia $\mathcal{G}$ es numerable, casi disjunta

Sea $x \in \mathcal{O}$. x pertenece a un cubo Q

de cada etapa, N, cuyos lados miden 2^{-N}. Si N es suficientemente grande $Q \subset \Omega$. Entonces o bien Q es agregado a G en la etapa N o un padre de Q fue agregado en una etapa anterior.

Discusión sobre medidas de abiertos

Expresiones diádicas *

Conjunto de Cantor

Ver antes expresiones

Sea $C_0 = [0,1]$

$C_1 = [0,1] - (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$

$C_2 = C_1 - (\frac{1}{9}, \frac{2}{9}) - (\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$

$\vdots$

$$C = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k$$

Propiedades: C es compacto, C es totalmente disconexo y perfecto (Ejercicio). $\#C = \#\mathbb{R}$

Expresiones s-ádicas.

Objetivo representar números con series.

Sea $d = 2, 3, \dots$

Supongamos $x \in [0,1)$. Dividamos el $[0,1]$ en d partes iguales.

$$0 < \frac{1}{d} < \frac{2}{d} < \dots < \frac{d-1}{d} < 1.$$

Hay un solo j tal que

$$x \in \left[\frac{j}{d}, \frac{j+1}{d}\right).$$

Llamamos a ese j a_1

Notar que $|x - \frac{a_1}{d}| < 1/d$.

Ahora dividimos $\left[\frac{a_1}{d}, \frac{a_1+1}{d}\right)$ en d partes.

$$\frac{a_1}{d} < \frac{a_1}{d} + \frac{1}{d^2} < \frac{a_1}{d} + \frac{2}{d^2} < \dots < \frac{a_1}{d} + \frac{d-1}{d^2}$$

$$< \frac{a_1+1}{d}.$$

Hay un único j con $x \in \left[\frac{a_1}{d} + \frac{j}{d^2}, \frac{a_1}{d} + \frac{j+1}{d^2}\right)$

Llamaremos a a_2 es $j \cdot a_2$.

Notar que

$$\left| x - \left(\frac{a_1}{d} + \frac{a_2}{d^2} + \cdots + \right) \right| < \frac{1}{d^2}$$

Continuando de esta forma; obtenemos una sucesión $a_1, \dots, a_n$ con

$$\left| x - \left(\frac{a_1}{d} + \frac{a_2}{d^2} + \cdots + \frac{a_n}{d^n} \right) \right| < \frac{1}{d^n}$$

Hemos encontrado $a_j \in \{0, 1, \dots, d-1\}$ tales que:

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{d^j}$$

Que se denomina expresión d-ádica de x. Cuando $d=10$ se llama expresión decimal. ~~decim~~

Se suele escribir:

$$x = (0.a_1 a_2 \dots)_d$$

Cuando $d=2$ se llama binario.

Lamentablemente la expresión no es única. El problemas son sucesiones quee toman el valor $d-1$ de un momento k en adelante: Pues.

$$\sum_{j=k}^{\infty} \frac{d-1}{d^j} = \frac{d-1}{d^k} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{d^j} = \frac{d-1}{d^k} \frac{1}{1-1/d}$$

$$= \frac{1}{d^{k-1}}.$$

Luego

$$(0.a_1 \dots a_{k-1}(d-1)(d-1)\dots)_d$$

$$= (0.a_1 \dots (a_{k-1}+1))_d.$$

si $a_{k-1}+1 = d \Rightarrow$

$$= (0.a_1 \dots (a_{k-2}+1)0 \dots).$$

y si $a_{k-2}+1 = d$ se sigue igual.

Medida exterior

Definición 1 Dado $E \subset \mathbb{R}^d$

$$m_*(E) = \inf \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j|$$

donde el ínfimo se toma sobre todos los cubrimientos $E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$ de E por medio de cubos.

- Claramente $0 \leq m_*(E) \leq \infty$

Observaciones a) Permitir uniones infinitas es importante. (Ej. 14 SS)
b) Se pueden usar rectángulos o bolas para el cubrimiento.

Ejemplo 1 La medida exterior de un punto es cero

Ejemplo 2 Si Q es un cubo

$$m_*(Q) = |Q|$$

Como Q se cubre a sí mismo $m_*(Q) \leq |Q|$

Sea $\{Q_j\}_{j=1}^{\infty}$ un cubrimiento por cubos de Q. Construyamos cubos abiertos $S_j \supset Q_j$ con (14)

$$|S_j| \leq (1+\varepsilon)|Q_j|$$

Como Q es compacto hay finitos S_j que cubren Q

$$Q \subset \bigcup_{j=1}^{N} S_j \subset \bigcup_{j=1}^{N} \overline{S_j}$$

Por Lema 4.

$$|Q| \leq \sum_{j=1}^{N} |\overline{S_j}| = \sum_{j=1}^{N} |S_j|$$
$$\leq (1+\varepsilon) \sum_{j=1}^{N} |Q_j| \leq$$
$$\leq (1+\varepsilon) \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j|$$

Como ε es arbitrario tenemos

$$|Q| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j|$$

Ejemplo 5 Si $R \subset \mathbb{R}^d$ es un rectángulo $|R| = m_*(R)$..

Como en el ejemplo anterior $|R| \le m_*(R)$

Para la otra desigualdad $R = I_1 \times \dots \times I_d$

$$|R| = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^d} \#\left(R \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z}^d\right)$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \#\left(I_1 \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z}\right) \cdots \frac{1}{N} \#\left(I_d \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z}\right)$$

Si $I_j \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z} = \left\{\frac{\alpha_j}{N}, \frac{\alpha_j+1}{N}, \dots, \frac{\alpha_j+\beta_j-1}{N}\right\}$

$$\#\left(I_j \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z}\right) = \beta_j$$

Consideremos los cubos que generan Sea $\mathcal{G}_N$ la Ma

$\frac{\alpha_j-1}{N}, \frac{\alpha_j}{N}, \dots, \frac{\alpha_j+\beta_j}{N}$

Hay $(\beta_1+2)\cdots(\beta_d+2)$ de ellos y miden $\frac{1}{N^d}$.

$$|R| = \lim_{N\to\infty} \frac{\beta_1}{N}\cdot\ldots\cdot\frac{\beta_d}{N}.$$

Pero

$$m_*(R) \leq \lim_{N\to\infty}\sum_{Q\in\mathcal{G}_N}|Q|$$

$$= \lim_{N\to\infty}\frac{(\beta_1+2)\cdots(\beta_d+2)}{N^d}.$$

$$= \lim_{N\to\infty}\Big\{\frac{\beta_1\cdots\beta_d}{N^d}$$

$$+\frac{2}{N^d}(\beta_2\cdots\beta_d+\beta_1\beta_3\cdots\beta_d+\cdots\beta_1\cdots\beta_{d-1})$$

$$+\frac{4}{N^d}(\beta_3\cdots\beta_d+\cdots+\beta_1\cdots\beta_{d-2})$$

$$\Big\}$$

$$= |R|.$$

$\square$

Ejemplo 4 $m_*(\mathbb{R}^d) = +\infty$.

Un cubrimiento de $\mathbb{R}^d$ es un cubrimiento de cualquier cubo Q de modo que

$$|Q| = m_*(Q) \leq m_*(\mathbb{R}^d)$$

Podemos encontrar $|Q_k| \to +\infty$

Ejemplo 5 Si C es el conjunto de Cantor $m_*(C) = 0$.

Dem $C \subset C_k$ donde C_k es una unión de 2^k intervalos de long. 3^{-k}.

$$m_*(C) \leq \left(\frac{2}{3}\right)^k \xrightarrow{k \to \infty} 0$$

Ejemplo 6 $m_*(\mathbb{Q}) = 0$

Propiedades de la medida exterior

Observación Sea $E \subset \mathbb{R}^d$ y $\varepsilon > 0$, existe un cubrimiento por cubos casi disjuntos $E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$

$$\sum_{j=1}^{\infty} m_*(Q_j) \leq m_*(E) + \varepsilon.$$

(18)

Observación 2 Monotonía. Si $E_1 \subset E_2$

$m_*(E_1) \leq m_*(E_2)$.

Observación 2 Numerable subaditividad

Si $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ entonces $m_*(E) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m_*(E_j)$

Podemos suponer $m_*(E_j) < \infty$ $\forall j$

Sean las flia $\{Q_{jk}\}_{k=1}^{\infty}$ de cubos

con:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |Q_{jk}| < m_*(E_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}$$

Luego $\{Q_{jk}\}_{j,k=1}^{\infty}$ es un cubrimiento

por cubos de $\bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$ y por ende de E

$$m_*(E) \leq \sum_{j,k=1}^{\infty} |Q_{jk}| \leq \sum_{j=1}^{\infty} m_*(E_j) + \varepsilon$$

Observación 3 Si $E \subset \mathbb{R}^d$ entonces

$$m_*(E) = \inf\{m_*(\mathcal{O}) : \mathcal{O} \supset E \text{ abierto}\},$$

$\leq$ sale de la monotonía

Sea $\varepsilon > 0$ y Q_j cubos con

$$\sum_{j=1}^{\infty} m_*(Q_j) < m_*(E) + \varepsilon/2.$$

Sean $\tilde{Q}_j$ cubos abiertos con

$$m_*(\tilde{Q}_j) < m_*(Q_j) + \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}.$$

Entonces $\mathcal{O} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \tilde{Q}_j$

es abierto y

$$m_*(\mathcal{O}) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m_*(\tilde{Q}_j) <$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} m_*(Q_j) + \varepsilon/2.$$

$$< m_*(E) + \varepsilon.$$

Observación 4 Si $E = E_1 \cup E_2$ con $d(E_1, E_2) > 0$ entonces

$$m_*(E) = m_*(E_1) + m_*(E_2)$$

≤ ya está

≥) Sea $0 < \delta < d(E_1, E_2)$ y $\varepsilon > 0$. Consideremos un cubrimiento $E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$ con $\sum_{j=1}^{\infty} m_*(Q_j) < m_*(E) + \varepsilon$. Podemos suponer que el diam$(Q_j) < \delta$, sino lo dividimos en más cubos. Luego cada cubo Q_j puede intersecar a solo uno de los conjuntos E_1 ó E_2.

Sea

$$J_1 = \{ j \mid Q_j \cap E_1 \neq \emptyset \}$$

$$J_2 = \mathbb{N} - J_1.$$

Luego $E_1 \subset \bigcup_{j\in J_1} Q_j \quad E_2 \subset \bigcup_{j\in J_2} Q_j$.

$$m_*(E)+\varepsilon > \sum_{j=1}^{\infty} m_*(Q_j) = \sum_{j\in J_1} m_*(Q_j) + \sum_{j\in J_2} m_*(Q_j)$$

$$\geq m_*(E_1) + m_*(E_2). \qquad \square$$

Observación 5 Si $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$ con los Q_j casi disjuntos entonces.

$$m_*(E) = \sum_{j=1}^{\infty} m_*(Q_j).$$

Sea $\varepsilon > 0$ y $\tilde{Q}_j \subset Q_j^{\circ}$ cubos cerrados.

y $m_*(\tilde{Q}_j) \geq m_*(Q_j^{\circ}) - \varepsilon/2^j$

Entonces $d(\tilde{Q}_{j_1}, \tilde{Q}_{j_2}) > 0$.

Luego

$$m_*(E) = m_*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j\right) \geq m_*\left(\bigcup_{j=1}^{M} Q_j\right) \geq$$

$$m_*\left(\bigcup_{j=1}^{M} \tilde{Q}_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} m_*(\tilde{Q}_j) \geq \sum_{j=1}^{\infty} m_*(Q_j) - \varepsilon$$

(22) La observación anterior se aplica a los abiertos. pues si $\mathcal{O}$ es abierto

$$\mathcal{O} = \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$$

donde Q_j son casi disjuntos.

Conjuntos Medibles y medida de Lebesgue

Conjuntos Medibles y medida de Lebesgue.

Un conjunto $E \subset \mathbb{R}^d$ se llama medible si $\forall \varepsilon > 0$ existe un abierto $\mathcal{O} \supset E$ con

$$m_*(\mathcal{O} - E) < \varepsilon.$$

Si E es medible.

$$m(E) := m_*(E).$$

Propiedad 1 Si $\mathcal{O}$ es abierto, $\mathcal{O}$ es medible.

Propiedad 2 Si $m_*(E) = 0 \Rightarrow E$ es medible. Si $F \subset E$ y $m_*(E) = 0 \Rightarrow F$ es medible.

Dem Por una observación, dado $\varepsilon > 0$ existe $\mathcal{O}$ abierto con

$$m_*(\mathcal{O}) < m_*(E) + \varepsilon = \varepsilon.$$

Entonces

$$m_*(\mathcal{O} - E) < \varepsilon.$$

Observación: $\emptyset$ es medible.

Propiedad 3: Si E_j, $j=1,2,\dots$, son medibles. $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ es medible.

Dem: Sea $\varepsilon>0$, existe $\mathcal{O}_j$ abiertos con $\mathcal{O}_j \supset E_j$
$j=1,2,\dots$

$$m_*(\mathcal{O}_j - E_j) < \varepsilon/2^j$$

Ahora $\bigcup_{j=1}^{\infty} \mathcal{O}_j$ es abierto y $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathcal{O}_j$

Además

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} \mathcal{O}_j - \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathcal{O}_j - E_j$$

Entonces

$$m_*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} \mathcal{O}_j - \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m_*(\mathcal{O}_j - E_j) < \varepsilon$$

Propiedad 4 Los conjuntos cerrados son medibles.

Dem: Primero supongamos E cerrado y acotado. $m_*(E) < +\infty$ Sea $\varepsilon>0$. Existe un abierto $\mathcal{O}$ con

$$m_*(\mathcal{O}) < m_*(E) + \varepsilon.$$

$\mathcal{O}-E$ es abierto, luego

$$\mathcal{O}-E=\bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$$

con Q_j cubos casi disjuntos. El conjunto

$$K=\bigcup_{j=1}^{N} Q_j$$

es compacto $\forall N\in\{1,2,\dots\}$ y $K\cap E=\emptyset$ con E cerrado. Entonces $d(K,E)>0$.

Luego

$$m_*(\mathcal{O})\geq m_*(K\cup E)=m_*(K)+m_*(E)$$

$$=m_*(E)+\sum_{j=1}^{N} m_*(Q_j).$$

Luego

$$\sum_{j=1}^{N} m_*(Q_j) < m_*(\mathcal{O})-m_*(E)\leq\varepsilon.$$

Haciendo $N\to\infty$.

$$\sum_{j=1}^{\infty} m_*(Q_j)\leq\varepsilon$$

Así

$$m_*(\mathcal{O}-E)\leq\sum_{j=1}^{\infty} m_*(Q_j)\leq\varepsilon$$

si E [illegible] $E=\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ [illegible]

Propiedad Si E es medible y $F \subset E$ con $m_*(F)=0$ entonces $E-F$ es medible.

Dem Sea $\varepsilon>0$ y $\mathcal{O}$ abierto con

$$m_*(\mathcal{O}-E)<\varepsilon.$$

Ahora

$$\mathcal{O}-(E-F) \subset (\mathcal{O}-E) \cup F.$$

Luego

$$m_*(\mathcal{O}-(E-F)) \leq m_*(\mathcal{O}-E)+m_*(F)$$
$$<\varepsilon. \quad \square.$$

Corolario: Si E es medible y $m_*(F \Delta E)=0$ entonces F es medible.

Dem

$$F=\underbrace{(F-E)}_{\text{medible}} \cup \underbrace{(E-\underbrace{(E-F)}_{\text{medible}})}_{\text{medible}}$$

Propiedad 5. E medible $\Rightarrow E^c$ medible.

Dem $\forall n \in \mathbb{N}$ existe un abierto $\mathcal{O}_n \supset E$

$$m_*(\mathcal{O}_n-E)<1/n$$

$\mathcal{O}_n^c$ son cerrados y por ende medibles.

$$S = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{O}_n^c \text{ es medible.}$$

y $S \subset E^c$. Además.

$$m_*(E^c - S) \leq m_*(\mathcal{O}_n - E) \leq 1/n$$

Luego E^c es medible, pues $m_*(E^c - S) = 0$ □

Propiedad si E_j, $j = 1, 2, \ldots, \infty$, son medibles entonces. $\bigcap_{j=1} E_j$ es medible.

Dem

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j = \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j^c\right)^c$$

Uniones ó intersecciones no numerables no se consideran.

Propiedad. Si E es medible, $\forall \varepsilon > 0$ existe un cerrado $F \subset E$ con

$$m_*(E - F) < \varepsilon$$

Dem E^c es medible $\Rightarrow \exists \mathcal{O}$ abierto, $E^c \subset \mathcal{O}$

y $m_*(\mathcal{O} - E^c) < \varepsilon \Rightarrow m_*(E - \mathcal{O}^c) < \varepsilon$ y $\mathcal{O}^c \subset E$ y es cerrado

Teorema: Si E_j, $j=1,2,\dots$ son conjuntos medibles y disjuntos entonces.

$$m(E)=\sum_{j=1}^{\infty} m(E_j).$$

Dem: supongamos cada E_j acotado y sea $F_j\subset E_j$ cerrado con

$$m_*(E_j-F_j)<\varepsilon/2^j \qquad m_*(E_j)<m(F_j)+\varepsilon/2^j$$

Cada F_j son compacto y disjuntos. Luego $d(F_j,F_k)>0$ $j\neq k$.

Luego
$$m\left(\bigcup_{j=1}^{N} F_j\right)=\sum_{j=1}^{N} m(F_j).$$

Luego

$$m(E)\geq m\left(\bigcup_{j=1}^{N} F_j\right)=\sum_{j=1}^{N} m(F_j)$$

$$\geq \sum_{j=1}^{N} E_j-\varepsilon.$$

Haciendo $N\to\infty$ y como $\varepsilon>0$ es arbitrario.

$$\sum_{j=1}^{\infty} m(E_j)\leq m(E).$$

En el caso general consideraremos cubos Q_j con $\mathbb{R}^d = \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$

$Q_j \subset Q_{j+1}$.

Ahora pongamos $E_{jk} = E_j \cap (Q_k - Q_{k-1})$ $k \geq 2$

Los E_{jk} son acotados medibles.

y.
$$E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=2}^{\infty} E_{jk}$$

Luego
$$m(E) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=2}^{\infty} m(E_{jk}) = \sum_j m(E_j) =$$

<u>Corolario</u>: Si $F \subset E$ son medibles y $m(F) < \infty \Rightarrow m(E-F) = m(E) - m(F)$

<u>Definición</u> Si $E_j \subset \mathbb{R}^d$, $E_j \subset E_{j+1}$ y $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j = E$ pondremos $E_j \nearrow E$.

Si en cambio $E_j \supset E_{j+1}$ y $E = \bigcap_j E_j$

Escribiremos $E_j \searrow E$.

Corolario: Si E_j, $j = 1, 2, \ldots$ son medibles en $\mathbb{R}^d$

i) Si $E_k \nearrow E$ entonces $m(E) = \lim_{n\to\infty} m(E_n)$.

ii) Si $E_k \searrow E$ y $m(E_k)$ para algún k entonces $m(E) = \lim_{n\to\infty} m(E_n)$.

Dem Sea $G_1 = E_1$, $G_2 = E_2 - E_1$, ...

Los G_j son medibles y mutuamente disjuntos. Además

$$\bigcup G_j = \bigcup E_j = E.$$

$$m(E) = \sum_j m(G_j) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} m(G_j)$$

$$= \lim_{n\to\infty} m\left(\bigcup_{j=1}^{n} E_j\right) = \lim_{n\to\infty} m(E_n)$$

Para (ii) Asumamos $m(E_1) < +\infty$.

Sea $G_j = G_{j-1} - G_j \quad j \geq 2$.

$$E_1 = E \cup \bigcup_{j=1}^{\infty} G_j$$

Todos medibles y mutuamente disjuntos.

$$m(E_1) = m(E) + \sum G_j = m(E) + \lim_{n\to\infty} m\left(\bigcup_{j=1}^{n} G_j\right)$$

$$= m(E) + \lim_{n\to\infty} m(E_1 - E_n) = m(E) - \lim_{n\to\infty} m(E_n) + m(E_1)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} m(E_n) = m(E_1).$$

<u>Comentario</u>: (ii) es falsa sin la hipótesis $m(E_k) < \infty$. Ejemplo $E_n = (n, +\infty)$

<u>Teorema</u>: $E \subset \mathbb{R}^d$ medible. Entonces $\forall \varepsilon > 0$

(i) $\exists \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ abierto con $m(\mathcal{O} - E) \leq \varepsilon$.
(ii) $\exists F \subset \mathbb{R}^d$ cerrado con $m(E - F) \leq \varepsilon$
(iii) Si $m(E) < \infty$ $\exists K \subset E$ compacto con $m(E - K) < \varepsilon$
(IV) Si $m(E) < \infty$ existe cubos Q_j, $j = 1, \dots, N$ con.

$$m\left(E \triangle \bigcup_{j=1}^{N} Q_j\right) \leq \varepsilon$$

<u>Dem</u> (i) y (ii) ya están.

(iii) Sea $F \subset E$ cerrado con $m(E - F) < \varepsilon$

Sea $Q_n = [-n, n]^d$. Entonces.

$Q_n \cap F \nearrow F$ y $E - Q_n \cap F \searrow E - F$

$$\lim_{n \to \infty} m(E - Q_n \cap F) = m(E - F) \leq \varepsilon/2.$$

Luego existe n tal que. $m(E - Q_n \cap F) \leq \varepsilon$.

(IV) Sea Q_j cubos con

$E \subset \bigcup_j Q_j \qquad \sum_j |Q_j| < m_*(E) + \varepsilon/2$

Como $m_*(E)<\infty$ la serie converge.

$\exists N: \sum_{j=N+1}^{\infty} |Q_j| < \varepsilon/2$. Luego

$$m\left(E \triangle \bigcup_{j=1}^{N} Q_j\right) \leq m\left(\bigcup_{j=N+1}^{\infty} Q_j\right) + m\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j - E\right)$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j| - m(E) \leq \varepsilon.$$

Ahora dado $h \in \mathbb{R}^d$ pondremos

$T_h(x) = x+h$ & $T_h(E) = E+h$.
y si $\delta \in \mathbb{R}^+$. $\delta x = \delta \cdot x$.

Teorema E es medible ssi $E+h$ lo es y ssi δE lo es. Además

$$m(E+h) = m(E)$$
$$m(\delta E) = \delta^d m(E).$$

~~Dem~~ Ejercicio.

Hacer Traslaciones

σ-Álgebras

<u>Definición</u> Sea X un conjunto.
Una conjunto $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X.
$\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ se llama una σ-álgebra si

a) $\emptyset \in \mathcal{A}$.

b) Si $E_j \in \mathcal{A}$, $j = 1, 2, \ldots \Rightarrow \bigcup_j E_j \in \mathcal{A}$.

c) Si $E \in \mathcal{A} \Rightarrow E^c \in \mathcal{A}$.

<u>Ejemplos</u> (i) $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ es σ-algebra

(ii) Los medibles.

(iii) Ejercicio $\mathcal{A} = \{E \subset \mathbb{R} \mid E$ es a.l.s.n. o E^c es a.l.s.n.$\}$

Si $\mathcal{A}_i$, $i \in I$, son σ-álgebras de subconjuntos de X, entonces $\bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$ es σ-algebra.

Dado $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$:

$$\sigma(\mathcal{E}) = \sigma\text{-álgebra generada} = \bigcap \{\mathcal{A} : \mathcal{A} \text{ es } \sigma\text{-algebra}, \ \mathcal{E} \subset \mathcal{A}\}$$

Sea $\mathcal{G} = \{ \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d : \mathcal{O}$ es abierto$\}$

$\sigma(\mathcal{G}) = \sigma$-álgebra de borel $=: \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$

Como los medibles $\mathcal{M}$ son σ-álgebra

$\sigma(\mathcal{G}) \subset \mathcal{M}$. Pero $\sigma(\mathcal{G}) \neq \mathcal{M}$ (dificil)

Si $\mathcal{O}_n$, $n=1, \dots$, son abiertos $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{O}_n$

no es necesariamente abierto. Pero

si ocurre que $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{O}_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

A la clase de estos conjuntos las llamaremos G_δ.

$$F_\sigma = \{ F : F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n,\ F_n \text{ cerrado} \}$$

$G_\delta, F_\sigma \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$

<u>Definición</u> Si $\mathcal{A}$ es σ-álgebra y $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^+$ satisface

a) $\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j)$ $\quad E_j$ mutuamente disjuntos

μ es una medida.

Teorema Son equivalentes.

a) $E \subset \mathbb{R}^d$ es medible.

b) $E = G - Z$, $G \in G_\delta$ y $m(Z) = 0$.

c) $E = F \cup Z$ $F \in F_\sigma$ y $m(Z) = 0$.

a) $\Rightarrow$ b). Sea O_n con $O_n \supset E$ abierto

$$m(O_n - E) \leq 1/n .$$

y $G \doteq \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n \in G_\delta$.

$$m(G - E) \leq m(O_n - E) \leq 1/n \xrightarrow{n \to \infty} 0 .$$

b) $\Rightarrow$ c) Si E es medible $\Longrightarrow$ E^c es medible. $\Longrightarrow$ $E^c = G - Z$, $G = \bigcap_{j=1}^{\infty} O_j$

$$E^c = \bigcap_{j=1}^{\infty} O_j \cap Z^c$$

$$E = \underbrace{\bigcup_{j=1}^{\infty} O_j^c}_{\in F_\sigma} \cup Z .$$

c) $\Longrightarrow$ a) F, Z son medibles.

26

Conjuntos no medibles

Sea $E = [0,1]$.

Definimos un relación en E

$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}$.

$\sim$ es de equivalencia.

~~Para cada~~ Por el axioma de elección formamos un conjunto M obtenido sacando un elemento de cada clase de equivalencia de la relación $\sim$.

Sea ahora $\mathbb{Q} \cap [-1,1] = \{r_1, r_2, \ldots\}$.

Si $(M + r_1) \cap (M + r_2) \neq \phi \Rightarrow$

$\exists x, y \in M$. $x + r_1 = y + r_2 \Rightarrow x \sim y \Rightarrow x = y$.

$\Rightarrow r_1 = r_2$.

Luego $M + r_k$ son mutuamente disjuntos.

Sea $a = m_*(M)$. se tiene (37)

que.

$$E \subset \bigcup_k M + r_k \subset [-1, 2].$$

Si M fuese medible cada $M + r_k$

lo sería y.

$$1 = m(E) = \sum_k m(M + r_k) = a + a + \cdots \leq 3$$

!!