FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
Universidad Nacional de La Pampa

Depto de Matemática.
Primer Cuatrimestre de 2022
Teoría de la Medida
Práctica 5: Integral de Lebesgue

Ejercicio 1. Por medio de la definición de integral de función no negativa, hallar el valor de las integrales:

$$\int_0^\infty \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{[n,n+\frac{1}{2^n})} \quad \text{y} \quad \int_0^\infty \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \chi_{[n,n+\frac{1}{2})},$$

donde $\alpha_n \geq 0$.

Ejercicio 2: Criterio de Lebesgue para la integrabilidad Riemann; El criterio establece que si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es acotada entonces son equivalentes

a) f es integrable Riemann.

b) Si Z es el conjunto de puntos donde f es discontinua entonces $m_*(Z) = 0$.

Ayuda: Para a)$\Rightarrow$ b) observar que

$$Z = \{x : \omega(f;x) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n := \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{x : \omega(f;x) \geq \frac{1}{n}\right\}.$$

Luego usar que $m_*(S_n) \leq c_e(S_n)$.

Para b)$\Rightarrow$ a). Notar que $m_*(S_n) = 0$. Luego, para todo $\varepsilon > 0$ se puede hallar una colección de intervalos abiertos y disjuntos I_j tales que $S_n \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$ y $\sum_j m(I_j) < \varepsilon$. Demostrar que S_n es compacto y de allí se cubre por finitos I_j. Finalemnte invocar la caracterización de Haenkel.

Ejercicio 3. Mostrar que la función $x^{p-1}e^{-x}$ es integrable sobre $(0,\infty)$ si y sólo si $p > 0$. Quizás es más importante que aprenda cuando las funciones $1/x^p$ son integrales en $(0,1)$ y $(1,\infty)$. ¿no?

Ejercicio 4. La función $\frac{\text{sen}\, x}{x}$ no es integrable sobre $(0,\infty)$, aunque existe el límite $\lim_{R\to\infty} \int_0^R \frac{\text{sen}\, x}{x}\, dx$.

Ejercicio 5. Probar que la integral $\int_0^1 \frac{1}{x}\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\, dx$ existe como integral impropia de Riemann pero no existe como integral de Lebesgue.

Ejercicio 6. Este resultado no estaría contemplado con el ejercicio 9a?

Supóngase que f es integrable de Riemann sobre un intervalo infinito (tal integral sólo puede existir en el sentido impropio). Demostrar que f es integrable de Lebesgue sobre el mismo intervalo si y sólo si la integral impropia converge absolutamente.

Ejercicio 7. Probar, usando el Teorema de la Convergencia Mayorada, la fórmula

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{n^{\frac{3}{2}} x}{1+n^2x^2}\, dx = 0.$$

Ejercicio 8. Usando integración término a término probar que

$$\int_0^\infty \frac{x}{e^x - 1}\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Ejercicio 9.

1. Supóngase que $f \geq 0$, integrable de Riemann en $[0, a]$ $\forall a > 0$ y que además tiene integral impropia. Probar que f es integrable de Lebesgue en $\mathbb{R}$ ¿Capaz que sea en $[0, +\infty)$, no?.

2. Supóngase que $f \geq 0$, integrable de Riemann en $[a + \epsilon, b]$ y que existe la integral impropia. Probar que f es integrable de Lebesgue en $[a, b]$.

Ejercicio 10.ea f una función medible no negativa sobre $\mathbb{R}$ y sea (E_k) una sucesión creciente de conjuntos cuya unión es E.

1. Probar que $\int_E f = \lim_{k\to\infty} \int_{E_k} f$.

2. Extender a cualquier función f integrable sobre E.

Ejercicio 11. Si se considera la sucesión de funciones $f_n(x) = n\chi_n(x)$ en el intervalo $0 \leq x \leq 1$, donde χ_n es la función característica del intervalo $(0, \frac{1}{n})$, ¿es posible que exista una función $g(x)$ integrable en dicho intervalo, tal que $f_n(x) \leq g(x)$ para cualquier n y cualquier x?

Ejercicio 12. Yo creo Sonia que esto estaría bueno dejarlo para los L^p Si $\varphi(x)f(x)$ es integrable sobre E para cualquier función f integrable sobre E, entonces existe una constante finita C, tal que $|\varphi(x)| \leq C$ en c.t.p x de E.

Ejercicio 13. Sea f una función medible no negativa sobre $\mathbb{R}^1$ tal que $\int_a^b f(x)\,dx > 0$ siempre que $a < b$, ¿puede concluirse que $f(x) > 0$ en c.t.p x?

Ejercicio 14.Capaz lo trabaje en el teórico **Absoluta continuidad de la integral de Lebesgue.** Supóngase que f es integrable de Lebesgue sobre E. Probar que para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\int_E |f|\,dx < \epsilon$ siempre que $m(E) < \delta$.

Ejercicio 15. Probar que el Teorema de la Convergencia Mayorada se extiende a una familia de funciones medibles $f_t(x)$, $a < t < b$, dependiente de un parámetro real t, de la manera siguiente:
Supongamos que $\tau \in (a, b)$ y que en cada punto de E existe el límite $f(x) = \lim_{t\to\tau} f_t(x)$. Si existe una función $\Phi(x)$ integrable sobre E, tal que $|f_t(x)| \leq \Phi(x)$ para $x \in E$ y $a < t < b$; entonces f es integrable sobre E y además

$$\int_E f(x)\,dx = \lim_{t\to\tau} \int_E f_t(x)\,dx.$$

Ejercicio 16. **Derivación de una integral paramétrica**. Supongamos que la integral

$$\varphi(t) = \int_E f(t, x)\,dx \qquad (a < t < b),$$

existe para cada $t \in (a, b)$; que $f(t, x)$ es derivable con respecto a t y existe una función $g(x)$ integrable sobre E, tal que

$$\left|\frac{\partial f(t, x)}{\partial t}\right| \leq g(x)$$

para $x \in E$ y $a < t < b$. Probar que φ es derivable y además

$$\varphi'(t) = \int_E \frac{\partial f(t, x)}{\partial t}\,dx$$

para $a < t < b$.
Sugerencia: Escribir el cociente $\frac{\varphi(t+h)-\varphi(t)}{h}$, emplear el Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial y el ejercicio anterior.

Ejercicio 17. **Transformada de Fourier**. Si f es integrable sobre $\mathbb{R}$, la función

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)\,dx$$

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
Universidad Nacional de La Pampa

es acotada y uniformemente continua.
Si $x^k.f(x)$ es integrable, entonces g es de clase C^k y además

$$g^{(k)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}(ix)^k f(x)\,dx.$$

DE ACA EN ADELANTE, EJERCICIOS DE MEDIDA PRODUCTO. HABRIA QUE VER SI QUEDAN TODOS.

Ejercicio 18. Como vamos a adoptar el enfoque de Fava y Zó no sería adecuado este ejercicio Si $(\mathbb{R}, \mathscr{B})$ denota el espacio medible que consiste de los números reales junto con los conjuntos de Borel, mostrar que todo subconjunto abierto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ pertenece a $\mathscr{B} \times \mathscr{B}$. De hecho, esta σ-álgebra es la sigma-álgebra generada por los subconjuntos abiertos de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. (En otras palabras, $\mathscr{B} \times \mathscr{B}$ es el álgebra de Borel de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$).

Ejercicio 19. Integrar la función no negativa $xe^{-x^2(1+y^2)}$ sobre el conjunto $(0,\infty)\times(0,\infty)$ en dos formas diferentes. Concluir a partir de sus cálculos que

$$\int_0^{\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Ejercicio 20.

1. Integrar la función sen$x e^{-xy}$ sobre el conjunto $(0,a) \times (0,\infty)$. Mostrar que

$$\int_0^a \frac{\text{sen} x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2} - \cos a \int_0^{-\infty} \frac{e^{-ay}}{1+y^2}\,dy - a\int_0^{\infty} \frac{ye^{-ay}}{1+y^2}\,dy \qquad (1)$$

2. Mostrar que

$$\int_0^{\infty} \frac{\text{sen} x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

Ayuda: Demostrar que las integrales de miembro derecho de (1) tienden a 0 cuando $a \to \infty$.

Ejercicio 21.

1. Mostrar que

$$\int_0^{\infty} \frac{\text{sen} ax}{x}\,dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & si \quad a>0 \\ 0 & si \quad a=0 \\ -\frac{\pi}{2} & si \quad a<0 \end{cases}$$

2. Integrando por partes en el item anterior mostrar que

$$\int_0^{\infty} \frac{1-\cos ax}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}|a|.$$

3. Probar que $\frac{1-\cos ax}{x^2}$ es una función integrable en $(0,\infty)$.

Ejercicio 22. Por integración de e^{-xy} sobre una región apropiada mostrar que

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx = \ln\frac{b}{a} \quad \text{si } a>0, \quad b>0.$$

Los siguientes ejericios me gustan todos, pero ¿No quedará demasiado larga la práctica?. ¿NO te parece que asterisquemos 23,25,26,27?

Ejercicio 23. Sean $a_i > 0$ para $1 \le i \le n$ y $J = (0,1) \times \ldots \times (0,1)$. Probar que

$$\int_J \frac{1}{x_1^{a_1} + x_2^{a_2} + \ldots + x_n^{a_n}}\,dx < \infty \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} > 1.$$

Ayuda: Sea $G_i = \{x \in J | x_j^{a_j} \leq x_i^{a_i} \text{ para todo } j\}$.
Notar que para $x \in G_i$, $x_i^{a_i} \leq x_1^{a_1} + x_2^{a_2} + \ldots + x_n^{a_n} \leq n x_i^{a_i}$ y $J = \bigcup_{i=1}^{n} G_i$.
Calcular

$$\int_G \frac{dx}{x_i^{a_i}} = \int_0^1 x_i^{a_i\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{a_j} - 1\right) - 1} dx_i,$$

y usar el hecho de que $\int_0^1 t^{s-1}\, dt < \infty \Leftrightarrow s > 0$.

Ejercicio 24. Sobre $(0,1) \times (0,1)$ considerar

$$f(x,y) = \begin{cases} x^{-2} & si \quad y < x < 1 \\ -y^{-2} & si \quad x < y < 1 \end{cases}$$

y probar que $\int_0^1 \, dx \int_0^1 f(x,y)\, dy = 1$ y $\int_0^1 \, dy \int_0^1 f(x,y)\, dx = -1$.

Ejercicio 25. Mostrar que si $f(x,y) = \frac{(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$, entonces

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \, dx \int_0^1 f(x,y)\, dy \neq \int_0^1 \, dy \int_0^1 f(x,y)\, dx = -\frac{\pi}{4}.$$

Ejercicio 26. Mostrar que la función $f(x,y) = \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}$ verifica

$$\int_{-1}^1 \, dx \int_{-1}^1 f(x,y)\, dy = \int_{-1}^1 \, dy \int_{-1}^1 f(x,y)\, dx$$

a pesar de que f no es integrable sobre el cuadrado $Q = [-1,1] \times [-1,1]$.

Ejercicio 27. Una función no negativa f, definida sobre $\mathbb{R}^1$, se llama una **densidad** (de probabilidad) si su integral sobre toda la recta es igual a uno. Probar que:

1. La convolución de dos densidades es otra densidad.
2. Para cada $p > 0$, la función
$$f_p(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$
es una densidad.
3. Si $p > 0$ y $q > 0$, entonces $f_p * f_q = f_{p+q}$ y además
$$\int_0^1 (1-t)^{p-1} t^{q-1}\, dt = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$
La integral biparamétrica del primer miembro se denota por $B(p,q)$ y se llama **función beta**.