Luego la serie

$$\varphi_1 + (\varphi_1 - \varphi_2) + \dots$$

converge uniformemente a una función continua $\varphi$. que se llama función de Cantor. $\varphi$ es monótona creciente.

## Capítulo 5

Integral de Lebesgue.

Se define para $f: \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$, $E \subset \mathbb{R}^n$ y $f \geq 0$ sobre $E$ medible.

$$\int_E f(x)\,dx = \sup\left\{\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \, m(E_i)\right\}.$$

donde el supremo se toma sobre.

toda descomposición del conjunto $E$ en unión de conjuntos medibles $E_i$ y mutuamente disjuntos y donde

$$\alpha_i = \inf_{E_i} f$$

Se usa la convención $0 \cdot +\infty = +\infty \cdot 0 = 0$

De la definición se deduce que si $f \equiv c \in \mathbb{R}$ sobre $E$, entonces.

$$\int_E f\,dx = c\,m(E)$$

<u>Teorema</u>: Si $E = A \cup B$ y $f \geq 0$ en $E$, entonces

$$\int_E f = \int_A f + \int_B f.$$

Dem. Sea $E = \bigcup E_i$, $\alpha_i = \inf_{E_i} f$, $A_i = A \cap E_i$, $B_i = B \cap E_i$.

$\beta_i = \inf_{A_i} f$, $\gamma_i = \inf_{B_i} f$. Luego $\alpha_i \leq \beta_i$, $\alpha_i \leq \gamma_i$

$$\sum_{i=1}^{N} \alpha_i m(E_i) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \left( m(A_i) + m(B_i) \right) =$$

$$\leq \sum \beta_i m(A_i) + \sum \gamma_i m(B_i) \leq \int_A f + \int_B f$$

Luego $$\int_E f \leq \int_A f + \int_B f.$$

Sea $A = \bigcup_{i=1}^{N} A_i$ $B = \bigcup_{i=1}^{M} B_i$ $\beta_i$, $\gamma_i$ como antes

Luego $$\sum_{i=1}^{N} \beta_i m(A_i) + \sum_{i=1}^{M} \gamma_i m(B_i) \leq \int_E f.$$

Luego $$\int_A f + \int_B f \leq \int_E f.$$

- Si $0 \leq f \leq g \implies \int_E f \leq \int_E g$.

pues $\inf_{E_i} f \leq \inf_{E_i} g$.

- Si $f \geq 0$ sobre $E$ y $A \subset E \implies$

$$\int_A f \leq \int_E f.$$

pues $\int_E f = \int_A f + \int_{E-A} f$.

- Si $m(E) = 0$ y $f \geq 0$ sobre $E \implies$

$$\int_E f = 0.$$

- Si $f = g$ c.t. p de $E \implies \int_E f = \int_E g$.

Sea $F = \{f \neq g\}$ entonces

$$\int_E f = \int_{E-A} f = \int_{E-A} g = \int_E g.$$

- Si $f \geq 0$ en $E$, entonces

$$\int_E f = \int_{\mathbb{R}^n} f \chi_E \, dx.$$

Cuando $E = \mathbb{R}^n$ ponemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} f = \int f$$

Si $E = (a,b) \subset \mathbb{R}$ ponemos

$$\int_E f = \int_a^b f.$$

## 2. Integral de funciones simples.

**Teorema** Sea $E = E_1 \dot\cup \dots \dot\cup E_n$ y $\beta_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, $\beta_i \geq 0$. Luego

$$\int_E \sum_i \beta_i \chi_{E_i} = \sum_i \beta_i m(E_i).$$

Dem.

$$\int_E \sum_i \beta_i \chi_{E_i} = \sum_j \int_{E_j} \sum_i \beta_i \chi_{E_i}$$

$$= \sum_j \beta_j m(E_j) \qquad \square$$

**Teorema** Si $\psi$ y $\varphi$ son simples no negativas y $c \in \mathbb{R}^+$, entonces:

$$\int_E (\varphi + \psi) = \int_E \varphi + \int_E \psi \quad \text{y} \quad \int_E c\varphi = c \int_E \varphi.$$

M-Test. de Weierstrass

Sea $\varphi = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \chi_{E_i}$ y $\psi = \sum_{i=1}^{M} \beta_i \chi_{F_i}$

Tenemos:

$$\varphi + \psi = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} (\alpha_i + \beta_j) \chi_{E_i \cap F_j}.$$

Así

$$\int_E \varphi + \psi = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} (\alpha_i + \beta_j) m(E_i \cap F_j).$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \sum_{j=1}^{M} m(E_i \cap F_j) + \sum_{j=1}^{M} \beta_j \sum_{i=1}^{N} m(E_i \cap F_j)$$

$$= \int_E \varphi + \int_E \psi. \qquad \square$$

Como $c\varphi = \sum_{i=1}^{N} c\alpha_i \chi_{E_i}$

$$\int_E c\varphi = \sum_{i=1}^{N} c\alpha_i m(E_i) = \alpha \int_E \varphi. \qquad \square$$

<u>Teorema</u> Si $f \geq 0$

$$\int_E f = \sup_{0 \leq \varphi \leq f} \int_E \varphi.$$

<u>Dem</u>: Sea $E = E_1 \cup \ldots \cup E_N$ y $\alpha_i = \inf_{E_i} f$

Supongamos $\alpha_i < +\infty$. Luego si $\varphi = \sum_i \alpha_i \chi_{E_i}$

tenemos

$$\int_E \varphi = \sum_i \alpha_i m(E_i) \quad y \quad \alpha \leq \varphi \leq f$$

En gral. pongamos, para $k \in \mathbb{N}$.

$$\alpha_{ik} = \min\{k, \alpha_i\}.$$

y

$$\varphi_k = \sum_{i=1}^{N} \alpha_{ik} \chi_{E_i}.$$

Ahora $0 \leq \varphi_k \leq f$, $\alpha_{i1} \leq \alpha_{i2} \leq \dots \nearrow \alpha_i$

Luego

$$\sum_{i=1}^{N} \alpha_i m(E_i) = \lim_{k \to \infty} \sum_{i=1}^{N} \alpha_{ik} m(E_i)$$

$$= \lim_{k \to \infty} \int_E \varphi_k \leq \sup_{0 \leq \varphi \leq f} \int_E \varphi$$

Luego

$$\int_E f \leq \sup_{0 \leq \varphi \leq f} \int_E \varphi.$$

La otra desigualdad es inmediata $\square$

<u>Lema</u>: Sean $f_1 \leq f_2 \leq \dots$ funciones no negativas y $\varphi$ simple no negativa con $\varphi \leq \lim_{k \to \infty} f_k$

<u>Dem</u>: Sean $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_N$ los distintos valores ordenados que toma $\varphi$, y sea

$$A_i = \{\varphi = \alpha_i\}$$

Supongamos probado el teorema cuando $\alpha_1 > 0$. Entonces sale para $\alpha_1 = 0$. Pues aplicando el caso probado en $E - A_1$ tenemos

$$\int_E \varphi = \int_{E-A_1} \varphi \leq \lim_{k \to \infty} \int_{E-A_1} f_k \leq \lim_{k \to \infty} \int_E f_k$$

Supongamos, así $\alpha_1 > 0$. Sea $0 < \varepsilon$ con $0 < \varepsilon < \alpha_1$

Luego $\varphi - \varepsilon$ es una función simple que toma los valores $\alpha_i - \varepsilon$ sobre $A_i$.

Poniendo

$$E_k = \{x \in E : f_k(x) > \varphi(x) - \varepsilon\}.$$

Por hipótesis

$$E_k \subset E_{k+1} \text{ y } \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = E.$$

Luego $m(E_k) \to m(E)$, cuando $k \to \infty$

Tenemos dos casos.

1) $m(E) < \infty$. Aquí tenemos $m(E - E_k) \xrightarrow{k \to \infty} 0$

y

$$\int_E f_k \geq \int_{E_k} f_k \geq \int_{E_k} \varphi(x) - \varepsilon.$$

$$= \int_E \varphi(x) - \varepsilon - \int_{E - E_k} \varphi(x) - \varepsilon.$$

$$\geq \int_E \varphi - \varepsilon m(E) - (\alpha_M - \varepsilon) m(E - E_k)$$

Luego

$$\lim_{n \to \infty} \int_E f_n \geq \int_E \varphi - \varepsilon m(E)$$

Como $\varepsilon$ es arbitrario sale.

2) Si $m(E) = \infty$. $m(E_k) \nearrow +\infty$

y

$$\int_E f_k \geq \int_{E_k} f_k \geq \int_{E_k} \varphi - \varepsilon \geq (\alpha_1 - \varepsilon)\, m(E_k) \nearrow \infty$$

y la desigualdad sigue. $\square$

3. Paso al límite bajo el signo de integral

Teorema (Beppo-Levi). Sea $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \ldots \nearrow f$. Entonces.

$$\int_E f = \lim_{k \to \infty} \int_E f_k$$

Dem Sea $\varphi$ simple, $0 \leq \varphi \leq f$. Luego.

$$\varphi \leq \lim_{k \to \infty} f_k.$$

Luego

$$\int_E \varphi \leq \lim_{k \to \infty} \int_E f_k.$$

Así

$$\int_E f = \sup_{0 \leq \varphi \leq f} \int_E \varphi \leq \lim_{k \to \infty} \int_E f_k.$$

La otra desigualdad es inmediata $\square$.

Teorema Si $f, g \geq 0$ y $c \in \mathbb{R}$, entonces.

$$\int_E (f+g) = \int_E f + \int_E g \; ; \; \int_E cf = c \int_E f.$$

**Dem.** Sea $\varphi_k$ y $\psi_k$ simples con $\varphi_k \nearrow f$, $\psi_k \nearrow g$

Luego $\varphi_k + \psi_k \nearrow f+g$ Así

$$\int_E f+g = \lim_{k\to\infty} \int_E \varphi_k + \psi_k = \lim_{k\to\infty} \int_E \varphi_k + \int_E \psi_k$$

$$= \int_E f + \int_E g.$$

**Corolario** Si $f_k \geq 0$, $k=1,2,\ldots$ entonces

$$\int_E \sum_{k=1}^{\infty} f_k = \sum_{k=1}^{\infty} \int_E f_k$$

**Dem** Sea

$$s_M = \sum_{k=1}^{M} f_k \quad , \quad s = \sum_{k=1}^{\infty} f_k = \lim_{M\to\infty} s_M$$

Luego $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \ldots \nearrow s$. Así

$$\int_E s = \lim_{M\to\infty} \int_E s_M = \lim_{M\to\infty} \sum_{k=1}^{M} \int_E f_k$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \int_E f_k. \qquad \square$$

**Lema de Fatou.** Si $f_k \geq 0$

$$\int_E \liminf_{n\to\infty} f_k \leq \liminf_{n\to\infty} \int_E f_k$$

Dem. Pongamos

$$g(x) = \liminf_{n \to \infty} f_k \quad g_k(x) = \inf_{j \geq k} f_j$$

Así $g_1 \leq g_2 \leq \dots \nearrow g$. $g$

$$g(x) = \sup_k g_k(x) = \lim_{k \to \infty} g_k(x)$$

Como $g_k \leq f_k$.

$$\int_E g = \lim_{k \to \infty} \int_E g_k = \liminf_{n \to \infty} \int_E g_k$$

$$\leq \liminf_{k \to \infty} \int_E f_k.$$

Corolario: Si $f_k \to f$ en $E$

$$\int_E f \leq \liminf_{n \to \infty} \int_E f_k \qquad \square$$

4. Integrales de funciones de distinto signo

Definición Si $f = f^+ - f^-$ diremos que $f$ es integrable sobre $E$ si

$$\int_E f^+ \text{ y } \int_E f^-$$

son finitas, en ese caso escribimos

$$\int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^-$$

M-test de Weierstrass

<u>Teorema</u> $f$ es integrable sobre $E$ si $|f|$ lo es y en ese caso:

$$\left|\int_E f\right| \leq \int_E |f|$$

<u>Dem</u> Como $|f| = f^+ + f^-$ si $f$ es integrable $|f|$ lo es. Si $|f|$ es integrable, como $f^+ \leq |f|$ y $f^- \leq |f|$; $f$ lo es $\square$

<u>Teorema</u> Si $f_1, f_2 \geq 0$ son integrables sobre $E$ y $f = f_1 - f_2$ entonces $f$ es integrable y

$$\int_E f_1 - f_2 = \int_E f_1 - \int_E f_2$$

<u>Dem</u> $f^+ \leq f_1$ y $f^- \leq f_2$ de lo que se deduce que $f$ es integrable. Como $f = f_1 - f_2$.

$\Rightarrow f^+ + f_2 = f_1 + f^-$ y:

$$\int_E f^+ + \int_E f_2 = \int_E f_1 + \int_E f^- \qquad \square$$

<u>Teorema</u> Si $f \geq g$ es integrable y $|g| \leq L$ sobre de $g^+ \leq f$ $g^- \leq L$

<u>Teorema</u> Si $f$ y $g$ son integrables sobre $E$ y $c \in \mathbb{R} \Rightarrow f+g$ y $cf$ son integrables sobre $E$ y además:

$$\int_E f+g = \int_E f + \int_E g \quad y \quad \int_E cf = c\int_E f.$$

<u>Dem</u> Como $f+g = f^+ + g^+ - (f^- + g^-)$ aplicando lo anterior. $f+g$ es integrable y:

$$\int_E f+g = \int_E f^+ + g^+ - \int_E f^- + g^-$$

$$= \int_E f^+ + \int_E g^+ - \int_E f^- - \int_E g^-$$

$$= \int_E f + \int_E g. \quad \blacksquare$$

Si $c \geq 0$, $cf = cf^+ - cf^-$ y sale por teor anterior y el caso $\geq 0$.

Si $c<0$ sale por $cf = (-c)f^- - (-c)f^+$

Corolario Si $f \leq g$ son int. $\Rightarrow \int_E f \leq \int_E g$.

M-test de Weierstrass

Así $L(E) = \{ f : f$ es integrable sobre $E \}$ es un espacio vectorial y la aplicación

$$f \mapsto \int_E f.$$

es una aplicación lineal.

<u>Convergencia</u> <u>Mayorada</u>.

Si $f_k$ son integrables y $f_k \xrightarrow{t.p} f$ integrable no es cierto en general que

$$\int_E f_k \to \int_E f.$$

<u>Ejemplo</u> $f_k = k\chi_{(0,k)} \longrightarrow 0.$

<u>Teorema</u> (Convergencia Mayorada de Lebesgue)

Sea $\Phi$ es integrable sobre $E$. Si $f_k$ son funciones tales que

$$|f_k| \leq \Phi \text{ en } E$$

Entonces $g = \liminf f_k$. $h = \limsup f_k$ son integrables sobre $E$ y:

$$\int_E \underbrace{\liminf f_k}_{g} \leq \liminf \int_E f_k \leq \limsup \int_E f_k \leq \int_E h$$

<u>Dem</u> Se tiene que $-\phi \leq f_k \leq \phi$ de donde $-\Phi \leq g, h \leq \Phi$. $\therefore$ $g$ y $h$ son integrables sobre $E$. Como $f_k + \Phi \geq 0$ y $\phi - f_k \geq 0$ y:

$$\liminf_{k \to \infty} f_k + \phi = g + \Phi$$

$$\liminf_{k \to \infty} \Phi - f_k = \phi - h.$$

Tenemos.

$$\int_E g + \int_E \phi = \int_E g + \phi \leq \liminf_{k \to \infty} \int_E f_k + \Phi$$

$$= \liminf_{k \to \infty} \int_E f_k + \int_E \Phi$$

Luego.

$$\int_E g \leq \liminf \int_E f_k.$$

El otro sale igual.

Corolario Si $f_k \to f$ en cada punto de $E$ y $|f_k| \leq \Phi \in L(E)$ entonces $f \in L(E)$ y.

$$\lim_{n \to \infty} \int_E f_k = \int_E f.$$

6. La integral y los conjuntos de medida nula

Si $f, g \geq 0$ y $f = g$ c.t.p entonces

$$\int_E f = \int_E g.$$

En particular sobre un conjunto de medida nula cualquier $f$ es medible e integrable con integral 0.

Veamos la desigualdad de Chebyshev, que dice que si $f$ es medible sobre $E$

$$m(\{x \in E : |f(x)| > \lambda\}) \leq \frac{1}{\lambda} \int_E |f|.$$

Para demostrarla

$$\int_E |f| \geq \int_{\{|f| \geq \lambda\}} |f| \geq \lambda m(\{|f| \geq \lambda\}).$$

**Teorema** Si $f \geq 0$ sobre $E$ y $\int_E f = 0 \Rightarrow$ $f = 0$ c.t.p en $E$.

**Dem** Tenemos, llamando $Z_k = \{f > \frac{1}{k}\}$ y $Z = \{f > 0\}$

$$Z = \bigcup_{k=1}^{\infty} Z_k$$

Ahora

$$m(Z_k) = m(\{f > \tfrac{1}{k}\}) \leq k \int_E f = 0$$

luego $m(Z) = 0$ $\square$

**Teorema** Si $f \in L(E) \Rightarrow |f| < +\infty$ c.t.p $E$.

**Dem** Sea $Z_k = \{|f| > k\}$ y $Z = \{|f| = +\infty\}$

Nuevamente

$$Z = \bigcap_{k=1}^{\infty} Z_k$$

Además

$$m(Z) \leq m(Z_k) = m(\{|f| > k\}) \leq \frac{1}{k} \int_E f \longrightarrow 0 \quad \square$$

8. Invarianza bajo traslaciones

**Teorema** Sea $f \geq 0$, entonces $\forall h \in \mathbb{R}^n$

(a) $\int f(x+h) = \int f(x)$

(b) $\int_E f(x+h) = \int_{E+h} f(x)$

<u>Dem</u> (a) si $f = \chi_E$; entonces

$$f(x+h) = \chi_E(x+h) = \chi_{E-h}(x)$$

Así

$$\int f(x+h) = \int \chi_{E-h}(x) = m(E-h)$$

$$\int f(x) = \int \chi_E(x) = m(E)$$

y son iguales.

Si $f$ es simple.

$$f = \sum_1 \alpha_i f_i \qquad \alpha_i \geq 0;\ f_i = \chi_{E_i}$$

Luego $\int f(x+h) = \sum_1 \alpha_i \int f_i(x+h) =$

$$= \sum_1 \alpha_i \int f_i = \int f.$$

Sea $f$ arbitraria no negativa. Sean $\varphi_k$ simples no negativas tales que $\varphi_k \nearrow f$.

Así $\varphi_k(x+h) \longrightarrow f(x+h)$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$

Por Beppo-Levi.

$$\int f(x+h)\,dx = \lim_{k\to\infty} \int \varphi_k(x+h)\,dx = \lim_{k\to\infty} \int \varphi_k(x)$$
$$= \int f$$

Así se demuestra (a).

(b) es consecuencia (a). En efecto

$$\int_E f(x+h) = \int \chi_{E+h}(x+h) f(x+h)$$
$$= \int \chi_{E+h}(x) f(x)\,dx = \int_{E+h} f(x)\,dx. \quad \square$$

(a) y (b) son ciertas para $f \in L(E)$ como se ve descomponiendo $f = f^+ - f^-$.

9. La integral como función de conjunto

Sea $f \in L(\mathbb{R})$ definimos $\phi : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ por

$$\phi(E) = \int_E f.$$

$\phi$ se llama integral indefinida de $f$.

Teorema: Si $E_j \in \mathcal{M}$ son mutuamente disjuntos y sea $E = \bigcup E_j$ entonces $\phi(E) = \sum_{j=1}^{\infty} \phi(E_j)$.

Dem Si $f \geq 0$ tenemos $\sum_j \chi_{E_j} = \chi_E$, luego

$$\phi(E) = \int_E f = \int f \chi_E = \int \sum_j f \chi_{E_j} = \sum_j \int f \chi_{E_j}$$

$$= \sum_j \phi(E_j).$$

Si $f \in L(E)$ ponemos $f = f^+ - f^-$

<u>Definición</u>: Si $X$ es un conjunto y $\Sigma$ es un $\sigma$-álgebra de subconjuntos de $X$. Una función $\mu : \Sigma \to \mathbb{R}^+$ se llama medida si

a) $\mu(\emptyset) = 0$

b) $\mu(\bigcup_j E_j) = \sum_j \mu(E_j)$. $E_j \in \Sigma$ mutuamente disjuntos.

Para una medida valen los teoremas de conv. monótona de conjuntos. Se puede definir una integral y vale casi todo (por ejemplo la inv. por traslaciones no vale)

Así $\phi$ es una medida. ¿Será toda medida sobre $M$ de la forma $\phi$ para alguna $f$?

Teorema Radon-Nikodim.

La propiedad siguiente se llama continuidad absoluta.

<u>Teorema</u>: Sea $f \in L(\mathbb{R}^n)$, entonces $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tal que

$$m(E) < \delta \Longrightarrow |\phi(E)| < \varepsilon$$

<u>Demostración</u>: Se puede suponer $f \geq 0$.

Sea $f_k = \min\{f, k\}$, entonces $f_k \nearrow f$.

Por Beppo-Levi $\int f_k \nearrow \int f$ y

$$\int f - f_k \longrightarrow 0.$$

Así existe $k$ con $\int f - f_k < \varepsilon/2$.

Sea $\delta < \varepsilon/2k$. Así si $m(E) < \delta$

$$\int_E f = \int_E f - f_k + \int_E f_k < \frac{\varepsilon}{2} + k\, m(E) < \varepsilon \quad \square$$

## 10. <u>Comparación con la Integral de Riemann</u>

Sea $f$ acotada en $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Si $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$, llamamos suma inferior de Riemann y sup. ~~S~~ a:

$$s = \sum_1 m_i (x_i - x_{i-1}) \; ; \; S = \sum_1 M_i (x_i - x_{i-1})$$

donde $m_i = \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f$ $M_i = \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f$.

Una función $f$ se llama integrable según Riemann ssi $\forall \varepsilon > 0$ existe una partición para la cual

$$S - s < \varepsilon.$$

La integral de Riemann se define:

$$(R) \int_a^b f = \sup s = \inf S.$$

<u>Teorema</u>: Si $f$ es integrable Riemann sobre $[a,b]$ entonces $f$ es medible e integrable Lebesgue. Además

$$(R) \int_a^b f = \int_a^b f.$$

Dem. Si $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, definimos las escalonadas

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{N} m_i \chi_{J_i} \quad , \quad \psi = \sum_{i=1}^{N} M_i \chi_{J_i}$$

donde $J_i = [x_{i-1}, x_i]$. Entonces $\varphi \leq f \leq \psi$ c.t.p.

Si $f$ es integrable Riemann existen dos sucesiones de funciones escaleras $\varphi_k$ y $\psi_k$ tales que: $\varphi_k \leq f \leq \psi_k$.

$$\int_a^b \psi_k - \varphi_k < \frac{1}{k}$$

Además si $g = \sup \varphi_k$ ; $h = \inf \psi_k$.

Entonces $g, h$ son borelianas y $g \leq f \leq h$.

Además

$$\int_a^b h - g \leq \int_a^b \psi_k - \varphi_k < \frac{1}{k}$$

Así $\int_a^b h - g = 0$ y, como $h \geq g \geq 0$ c.t.p., $f = h = g$ c.t.p.

Luego $f$ es medible. Además

$$\int_a^b \varphi_k \leq \int_a^b f \leq \int_a^b \psi_k$$

$$(R) \int_a^b \varphi_k \leq (R) \int_a^b f \leq (R) \int_a^b \psi_k .$$

de donde

$$\left| \int_a^b f - (R) \int_a^b f \right| \leq \int_a^b \psi_k - \varphi_k < 1/k \qquad \square$$

## 11. Integración Parcial: Teorema de Fubini

Notaciones: si $u \in \mathbb{R}^{n+m}$, podremos $u=(x,y)$ con $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$.

Si $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$ y $x \in \mathbb{R}^n$

$$E_x = \{y \in \mathbb{R}^m : (x,y) \in E\}.$$

Se llama la sección de $E$ en $x$. Análogamente se definirá $E_y$.

Se demuestra que

$$\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right)_x = \bigcup_{k=1}^{\infty} (E_k)_x \; ; \; \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right)_x = \bigcap_{k=1}^{\infty} (E_k)_x$$

Si $E_1 \subset E_2 \Rightarrow (E_1)_x \subset (E_2)_x$ y

$$(E_1 - E_2)_x = (E_1)_x - (E_2)_x \quad \forall E_1, E_2$$

Teorema (Principio de Cavalieri) Sea $E$ medible en $\mathbb{R}^{n+m}$ entonces.

a) $E_x$ es medible de $\mathbb{R}^{n+m}$ c.t. $x \in \mathbb{R}^n$

b) $m(E_x)$ es medible como función de $x$.

c) $m(E) = \int m(E_x)\,dx$

Dem

Primer Paso) Si $E$ es un intervalo; entonces $E = I \times J$ con $I$ int. de $\mathbb{R}^n$, $J$ intervalo de $\mathbb{R}$

$E_x = J \ \forall x \in I$. y $E_x = \phi$ si $x \notin I$.

Así $E_x$ es medible $\forall x$. y $m(E_x) = \chi_I m(J)$ es medible. y

$$\int m(E_x)\,dx = m(J)m(I) = m(E)$$

2do Paso) Si $E$ es abierto, entonces.

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$$

$I_k$ intervalos mut. disj. y.

$$E_x = \bigcup_{k=1}^{\infty} (I_k)_x$$

Así $E_x$ es medible. Además

$$m(E_x) = \sum_{k=1}^{\infty} m((I_k)_x)$$

Es medible. y

$$\int m(E_x) = \sum_{k=1}^{\infty} \int m((I_k)_x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} m(I_k) = m(E)$$

Tercer Paso) $E$ acotado y $G_\delta$. Así existe una bola $B$. y $G_k$ abiertos.

$$E \subset B \ ; \ E = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$$

M-Teo

Tomando $G'_k = B \cap G_1 \cap \dots \cap G_k$. Podemos suponer

$$B \cap G_1 \supset \dots \supset E$$

Ahora $E_x = \bigcap_{k=1}^{\infty} (G_k)_x$ es medible y

$$m(E_x) = \lim_{k \to \infty} m((G_k)_x) \text{ es medible.}$$

Además

$$m((G_n)_x) \leq m(B_x) \in L(\mathbb{R}^n)$$

Por convergencia mayorada:

$$\int m(E_x)\,dx = \lim_{k \to \infty} \int m((G_n)_x)\,dx$$

$$= \lim_{k \to \infty} m(G_k) = m(E).$$

4 paso) $E \in G_\delta$. Sean $B_k = B(0,k)$ y $E_k = E \cap B_k$ es $G_\delta$ $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ y $E_1 \subset E_2 \dots$ Luego $E_x = \bigcup_{k=1}^{\infty} (E_k)_x$

$(E_1)_x \subset (E_2)_x \subset \dots$

Así $E_x$ es medible y

$$m(E_x) = \lim_{k \to \infty} m((E_k)_x).$$

Como $m((E_k)_x)$ es una suc. monótona creciente de medibles. por Beppo-Levi

$$\int m(E_x)dx = \lim_{k \to \infty} \int m((E_k)_x)dx =$$

$$= \lim_{k \to \infty} m(E_k) = m(E).$$

5$^{to}$ paso) E de medida nula. Existe $H \in G_\delta$ con $E \subset H$ y $m(H) = 0$. Como

$$\int m(H_x)dx = m(H) = 0$$

$$m(E_x) \leq m(H_x) = 0 \text{ c.t.p } x.$$

Luego $m(E_x) = 0$ c.t.p. y $\therefore$ es medible.

Además

$$\int m(E_x)dx \leq \int m(H_x)dx = 0 = m(E)$$

6$^{to}$ paso). E medible. Existen $H \in G^\delta$ y Z medida 0 tal que $E = H - Z$.

Luego

$$E_x = H_x - Z_x.$$

y $m(Z_x) = 0$ c.t.p Así $E_x$ es medible c.t.p $x$.

Así

$$m(E_x) = m(H_x) - m(Z_x) = m(H_x) \text{ c.t.p}$$

Luego $m(E_x)$ es medible.

Definimos $m(E_x) = 0$ donde $E_x$ no es medible. Así

$$\int m(E_x)\,dx = \int m(H_x)\,dx = m(H) = m(E)$$

Ejemplos sea $H$ un hiperplano de ecuación $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = a$. Veamos por inducción que $m(H) = 0$

Si $n=1$ trivial. Supongamos $(a_2,\dots,a_n) \neq 0$

Luego $H_{x_1} = \{(x_2,\dots,x_n) \mid a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = a - a_1x_1\}$.

Luego.

$$m(H) = \int m(H_{x_1})\,dx_1 = 0.$$

2) El simplex $S$ de altura $a$ es $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq a$, $x_i \geq 0$. Veamos por inducción que $m(S) = \frac{a^n}{n!}$

Si $n=1$ es trivial. Si $n>1$. $S_{x_1} = \phi$ si $x_1 \notin [0,a]$

y si $x_1 \in [0,a]$ $\quad S_{x_1} = \{(x_2,\dots,x_n) : x_2 + \dots + x_n \leq a - x_1\}$
el simple de altura $a - x_1$. Luego

$$m(S) = \int_0^a m(S_{x_1})\,dx_1 = \int_0^a \frac{(a-x_1)^{n-1}}{(n-1)!}\,dx_1$$

$$= a^n/n!$$

Teorema (Fubini-Tonelli) Si $f(u) = f(x,y)$ es medible no negativa sobre $\mathbb{R}^{n+m}$, entonces

(1) $f(x,y)$ es medible en $y$ para c.t.p $x$.

(2) $g(x) = \int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)\,dy$ es medible sobre $\mathbb{R}^n$

(3) $\int g(x)\,dx = \int dx \int f(x,y)\,dy = \int f(u)\,du$.

<u>Dem</u> Paso 1) Si $f = \chi_E$, vale que

$$\chi_E(x,y) = \chi_{E_x}(y)$$

$E_x$ es medible p.c.t.p $x$. Así $f$ es medible en $y$ para c.t.p $x$. Además

$$\int dx \int \chi_{E_x}(y)\,dy = \int m(E_x)\,dx = m(E) = \int f(u)\,du$$

Paso 2) Si $f$ es simple. Entonces

$$f(x,y) = \sum_1 \alpha_k f_k(x,y)$$

donde $\alpha_k > 0$ y $f_k$ son características $\chi_{E_k}$.

Por el paso 1) $f_k(x,y)$ es medible en $y$ si $x$ está en conjunto de la forma $\mathbb{R}^m - Z_k$, donde $m(Z_k) = 0$

llamando $Z = \bigcup_k Z_k$ $f$ será medible en $y$ si $x \in \mathbb{R}^m - Z$. Así $f$ es medible en $y$ para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$. Si $x \in \mathbb{R}^n - Z$.

$$g(x) = \int f(x,y)\,dy = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \int f_k(x,y)\,dy$$

Así $g$ es medible. Además por paso 1)

$$\int g(x)\,dx = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \int dx \int f_k(x,y)\,dy =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \int f_k(u)\,du = \int f(u)\,du.$$

3er Paso) Si $f$ es medible no negativa. Existen simples $f_k$ sobre $\mathbb{R}^{n+m}$ tales que $0 \le f_1 \le f_2 \le \dots$ y $f_k(u) \nearrow f(u)$ $\forall u \in \mathbb{R}^{n+m}$

como $f_k$ es simple existe $Z_k$ tal que $f_k(x,y)$ es medible en $y$. si $x \notin Z_k$.

Sea $Z = \bigcup_{k=1}^{\infty} Z_k$. $m(Z) = 0$ y cada $f_k(x,y)$ es medible en $y$ si $x \notin Z$. Así $f$ es medible en $y$ $\forall x \notin Z$. Por Beppo-Levi si $x \notin Z$.

$$g(x) = \int f(x,y)\,dy = \lim_{k \to \infty} \int f_k(x,y)\,dy$$

y $g$ es medible. (definimos $g=0$ en $Z$)

Por último, por Beppo-Levi

$$\int g(x)\,dx = \lim_{k \to \infty} \int dx \int f_k(x,y)\,dy$$

$$= \lim_{k \to \infty} \int f_k(u)\,du = \int f(u)\,du$$

<u>Teorema</u> (Fubini) Si $f(u) = f(x,y) \in L(\mathbb{R}^{n+m})$ entonces

(1) para casi todo $x$, $f(x,y)$ es integrable en $y$.

(2) la función $g(x) = \int f(x,y)\,dy$ es integrable en $x$.

(3) $\int g(x)\,dx = \int dx \int f(x,y)\,dy = \int f(u)\,du$

<u>Dem</u>. Por Fubini-Tonelli.

$$\int dx \int f^+(x,y)\,dy = \int f^+(u)\,du < \infty.$$

$$\int dx \int f^-(x,y)\,dy = \int f^-(u)\,du < \infty.$$

Las funciones no negativas.

$$g_1(x) = \int f^+(x,y)\,dy \qquad g_2(x) = \int f^-(x,y)\,dy$$

son integrables y por ende finitas en casi todo punto. Luego

$$g(x) = \int f(x,y)\,dy = g_1(x) - g_2(x)$$

es integrable en $y$ para casi todo $x$.

Además $g \in L_1(\mathbb{R}^n)$ y:

$$\int g(x)\,dx = \int g_1(x)\,dx - \int g_2(x)\,dx = \int f^+(u)\,du - \int f^-(u)\,du$$

$$= \int f(u)\,du. \qquad \square$$

<u>Corolario</u> Si $f$ satisface que

$$\int dx \int |f(x,y)|\,dy < \infty \text{ o } \int dy \int |f(x,y)|\,dx < \infty$$

valen Fubini.

Si $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$ vale que.

$$\int_E f(u)\,du = \int dx \int_{E_x} f(x,y)\,dy.$$