

# Problemas de Sturm-Liouville

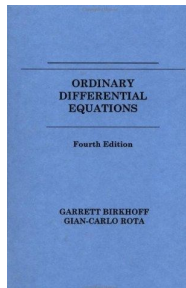
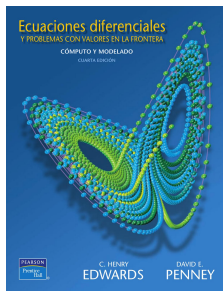
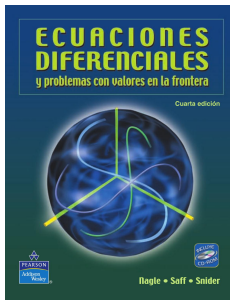
Depto de Matemática  
Facultad de Ciencias Exactas Físico-Químicas y Naturales  
Universidad Nacional de Río Cuarto

27 de septiembre de 2022



Problemas físicos que llevan a problemas de Sturm-Liouville  
Problemas de contorno  
Problemas regulares de Sturm-Liouville  
Nociones básicas análisis funcional  
Propiedades operadores autoadjuntos  
Problemas singulares de Sturm-Liouville

## Bibliografía



# Ecuación del Calor

Recordemos la ecuación diferencial del Calor

$$\frac{\partial c \rho u}{\partial t} - \operatorname{div}(k \nabla u) = S$$

con:

- $u$  temperatura del medio
- $c$  calor específico
- $\rho$  densidad
- $k$  coeficiente conductividad térmica
- $S$  fuente externa de calor

$c, \rho, k, S$  son funciones del tiempo  $t$  y el espacio  $(x, y, z)$ .

## Ley Enfriamiento de Newton

En algunos problemas la fuente externa  $S$  además de contener términos  $h(x, y, z, t)$  que dependen de la posición y el tiempo contiene otros que dependen de la temperatura  $u$ .

Por ejemplo en la [Ley Enfriamiento de Newton](#) el calor que ingresa a un cuerpo es proporcional a la diferencia de temperatura entre el cuerpo y el medio circundante.

La ecuación se transforma

$$\frac{\partial c \rho u}{\partial t} - \operatorname{div} k \nabla u - q u = h. \quad (1)$$

También  $q$  podría ser función de  $t$  y  $(x, y, z)$ .

## Ecuación del calor uni-dimensional

Para mayor simplicidad nos restringiremos al caso de un alambre recto y tan delgado que la asumimos uni-dimensional. La única variable espacial es  $x \in [a, b]$  y  $t > 0$ .

$$c(x)\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \left[ k(x)\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right] + q(x)u(x, t) + h(x, t). \quad (2)$$

## Condiciones de contorno e iniciales

**Condiciones de contorno:** en  $x = a$  o  $x = b$

Extremos fijos (Dirichlet)  $u = 0$

Alambre aislado (Neuman)  $\partial u / \partial x = 0$

Condiciones mixtas  $\partial u / \partial x + cu = 0$ .

Para generalizar la situación, supondremos

$$\begin{cases} a_1 u(a, t) + a_2 \frac{\partial u}{\partial x}(a, t) = 0 \\ b_1 u(b, t) + b_2 \frac{\partial u}{\partial x}(b, t) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

**Condiciones iniciales**

$$u(x, 0) = f(x)$$

# Problema

Para simplificar nuestro problema supondremos que  $h(x, t) \equiv 0$ . Vamos a estudiar el siguiente problema de contorno y valores iniciales.

$$\left\{ \begin{array}{ll} r(x) \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \left[ p(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right] + q(x)u(x, t) & a < x < b, t > 0, \\ a_1 u(a, t) + a_2 \frac{\partial u}{\partial x}(a, t) = 0 & t > 0, \\ b_1 u(b, t) + b_2 \frac{\partial u}{\partial x}(b, t) = 0 & t > 0, \\ u(x, 0) = f(x) & a < x < b. \end{array} \right.$$

donde  $r(x) = c(x)\rho(x)$  y  $p(x) = k(x)$ .

# Problemas Sturm-Liouville

## Ejercicio [Separación Variables]

Supongamos  $u(x, t) = y(x)T(t)$  resuelve la ecuación, reemplazando en la ecuación principal demostrar que existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  (es un número por determinar)

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{dy}{dx} \right] + q(x)y + \lambda r(x)y = 0 & a < x < b, \\ a_1 y(a) + a_2 y'(a) = 0, \\ b_1 y(b) + b_2 y'(b) = 0 \end{cases}$$

Este sistema se llama un **problema de Sturm-Liouville** con valores en la frontera.

Excluimos las condiciones triviales en la frontera, donde  $a_1 = a_2 = 0$  o  $b_1 = b_2 = 0$ .



# Clasificación problemas Sturm-Liouville

## Definición

Cuando:

- $p(x)$ ,  $q(x)$  y  $r(x)$  son continuas en  $[a, b]$ ,
- $p'$  derivable en  $(a, b)$ ,
- $p(x) > 0$  y  $r(x) > 0$  en  $[a, b]$ ,

decimos que tenemos un **problema regular de Sturm-Liouville**.

Decimos que la ecuación es **singular** si:

- $p$  se anula en  $a$  o  $b$ ,
- si  $p(x)$ ,  $q(x)$  o  $r(x)$  no están acotadas cuando  $x$  tiende a  $a$  o a  $b$ ,
- cuando el intervalo  $(a, b)$  no está acotado.

## Clasificación problemas Sturm-Liouville

**Ejemplo (problema singular):** Problema contorno para la Ecuación de Bessel en  $[0, b]$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dx} \left[ x \frac{dy}{dx} \right] + \lambda xy = 0, \quad 0 < x < b \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} y(x) \text{ y } \lim_{x \rightarrow 0^+} y'(x) \text{ existen y son finitos,} \\ y(b) = 0. \end{array} \right.$$

Este problema surge al estudiar el flujo de calor en un cilindro. En este caso,  $p(x) = r(x) = x$ , que se anula en  $x = 0$ .

# Problemas contorno ecuaciones lineales ordinarias de segundo orden

Supongamos el problema de contorno

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), & 0 < x < b \\ a_{11}y(a) + a_{12}y'(a) + b_{11}y(b) + b_{12}y'(b) = c_1 \\ a_{21}y(a) + a_{22}y'(a) + b_{21}y(b) + b_{22}y'(b) = c_2 \end{cases}$$

Estas son condiciones de contorno lineales. Cuando  $c_1 = c_2 = 0$ , decimos que las condiciones de contorno son **homogéneas**; en caso contrario, son **no homogéneas**.

# Clasificación condiciones de contorno

Ciertas condiciones en la frontera aparecen con frecuencia en las aplicaciones; estas condiciones son

Separadas:

$$a_1 y(a) + a_2 y'(a) = c_1,$$

$$b_1 y(b) + b_2 y'(b) = c_2$$

Dirichlet:

$$y(a) = c_1, \quad y(b) = c_2.$$

Neumann:

$$y'(a) = c_1, \quad y'(b) = c_2$$

Periódicas

$$y(-T) = y(T), \quad y'(-T) = y'(T),$$

$$y(0) = y(2T), \quad y'(0) = y'(2T),$$

donde el periodo es  $2T$

## Conjunto de soluciones

Hay tres posibilidades para la ecuación homogénea con condiciones homogéneas en la frontera

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, & 0 < x < b \\ a_{11}y(a) + a_{12}y'(a) + b_{11}y(b) + b_{12}y'(b) = 0 \\ a_{21}y(a) + a_{22}y'(a) + b_{21}y(b) + b_{22}y'(b) = 0 \end{cases}$$

- Si  $\phi(x)$  es solución no trivial entonces también lo es  $A\phi$  para cualquier  $A \in \mathbb{R}$ . Tenemos una **familia uniparamétrica de soluciones**.
- Si  $\phi_1(x)$  y  $\phi_2(x)$  son dos soluciones linealmente independientes, entonces  $A_1\phi_1(x) + A_2\phi_2(x)$  también es solución para cualesquiera  $A_1, A_2 \in \mathbb{R}$ . Tenemos una **familia biparamétrica de soluciones**.
- La otra posibilidad es que  $\phi(x) \equiv 0$  sea la única solución, en cuyo caso existe una única solución.

**Conclusión.** Hay tres situaciones: el problema de contorno tiene una única solución, una familia uniparamétrica de soluciones, o una familia bi-paramétrica de soluciones.

## Ejemplo 1

Determinar todas las soluciones de

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 5y = 0; \\ y(0) = 2, \quad y(\pi/4) = 1. \end{cases}$$

**Solución.** La ecuación característica es:

$$r^2 + 2r + 5 = 0,$$

que tiene las raíces  $r = -1 \pm 2i$ . La solución general es:

$$y(x) = c_1 e^{-x} \cos 2x + c_2 e^{-x} \sin 2x.$$

Determinamos  $c_1$  y  $c_2$  usando las condiciones de contorno

$$y(0) = c_1 = 2, \quad y(\pi/4) = c_2 e^{-\pi/4} = 1.$$

Por consiguiente,  $c_1 = 2$  y  $c_2 = e^{\pi/4}$ , y hay solución única

$$y(x) = 2e^{-x} \cos 2x + e^{x/4} e^{-x} \sin 2x$$

## Ejemplo 2

Determinar todas las soluciones del problema con valores en la frontera

$$\begin{cases} y'' + y = \cos 2x; \\ y'(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0. \end{cases}$$

**Solución** Ecuación característica:

$$r^2 + 1 = 0,$$

Solución general para la ecuación homogénea:

$$y_h(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x.$$

Usamos el método de coeficientes indeterminados. Una solución particular del problema no-homogéneo tiene la forma

$$y_p(x) = A \cos 2x + B \sin 2x.$$

## Ejemplo 2 (continuación)

Al sustituir  $y_p$  y despejar  $A$  y  $B$ , vemos que  $A = -1/3$  y  $B = 0$ . Por lo tanto,  $y_p(x) = -(1/3) \cos 2x$ . Así, una solución general es

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x - (1/3) \cos 2x.$$

Sustituimos la solución general en las condiciones de contorno

$$y'(0) = c_2 = 0, \quad y'(\pi) = -c_2 = 0.$$

Así,  $c_2 = 0$  y  $c_1$  es arbitrario. El problema tiene una familia uni-paramétrica de soluciones:

$$y(x) = c_1 \cos x - (1/3) \cos 2x, \quad c_1 \in \mathbb{R}$$



## Ejemplo 3

Determinar las soluciones de

$$\begin{cases} y'' + 4y = 0; \\ y(-\pi) = y(\pi), \quad y'(-\pi) = y'(\pi). \end{cases}$$

**Solución.** Ecuación característica es

$$r^2 + 4 = 0,$$

Solución general

$$y(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x.$$

Cualquiera sea  $c_1$  y  $c_2$  se tiene

$$y(-\pi) = y(\pi), \quad y'(-\pi) = y'(\pi).$$

Así hay una familia a bi-parámetrica de soluciones.

## Ejemplo 3 (continuación)

Si, en el ejemplo anterior, reemplazamos la ecuación diferencial (10) por la ecuación no homogénea

$$y'' + 4y = 4x$$

Una solución general es

$$y(x) = x + c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x.$$

Como

$$y(-\pi) = -\pi + c_1, \quad y(\pi) = \pi + c_1,$$

no existen soluciones de que satisfagan  $y(-\pi) = y(\pi)$ . Así, el problema no homogéneo con valores en la frontera no tiene soluciones.

# Autovalores

## Objetivo

Los problemas de Sturm-Liouville con valores en la frontera son ejemplos de problemas con valores en la frontera en dos puntos que contienen un parámetro  $\lambda$ . Nuestro objetivo es **determinar para qué valores de  $\lambda$  el problema con valores en la frontera**

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{dy}{dx} \right) + q(x)y + \lambda r(x)y = 0, & a < x < b \\ a_1 y(a) + a_2 y'(a) = 0, \\ b_1 y(b) + b_2 y'(b) = 0, \end{cases} \quad (4)$$

**tiene soluciones no triviales.** Tales problemas se llaman **problemas de valores propios**. Las soluciones no triviales se llaman **funciones propias o autofunciones** y el número correspondiente  $\lambda$  es un **valor propio o autovalor**.

## Ejemplo 1

La importancia de los problemas de valores propios es que surgen al usar el método de separación de variables para resolver ecuaciones diferenciales parciales.

### Ejemplo

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases}$$

Se concluye

$$\lambda = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \quad n = 1, 2, \dots$$

son los autovalores del problema, y las funciones

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad n = 1, 2, \dots$$

son las correspondientes autofunciones.

## Ejemplo 2

El problema

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 & 0 < x < L \\ X'(0) = X'(L) = 0 \end{cases}$$

tenía los autovalores y autofunciones

$$\lambda = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad \text{y} \quad X(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

respectivamente

## Ejemplo 3

Determinar todos los valores propios reales y funciones propias correspondientes para

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0; \\ y(0) = 0, \quad 3y(\pi) - y'(\pi) = 0. \end{cases}$$

**Solución.** Ecuación característica

$$r^2 + \lambda = 0.$$

Hay tres casos

**Caso 1.**  $\lambda = -\mu^2 < 0$ . Raíces:

$$r = \pm \mu,$$

Solución general:

$$y(x) = c_1 e^{\mu x} + c_2 e^{-\mu x}.$$

## Ejemplo 3 (continuación)

Equivalentemente

$$y(x) = C_1 \cosh \mu x + C_2 \sinh \mu x.$$

Al sustituir en las condiciones en la frontera:

$$C_1 = 0, \quad 3(C_1 \cosh \mu\pi + C_2 \sinh \mu\pi) - (\mu C_1 \sinh \mu\pi + \mu C_2 \cosh \mu\pi) = 0$$

Para  $C_1 = 0$ , la última ecuación se convierte en

$$C_2(3 \sinh \mu\pi - \mu \cosh \mu\pi) = 0.$$

Para obtener una solución no trivial, debemos tener  $C_2 \neq 0$ , de modo que:

$$3 \sinh \mu\pi - \mu \cosh \mu\pi = 0;$$

es decir,  $\mu$  debe satisfacer

$$\tanh \mu\pi = \frac{1}{3}\mu.$$

## Ejemplo 3 (continuación)

En el plano  $\mu y$ , la recta  $y = \mu/3$  corta a la curva  $y = \tanh \mu\pi$  sólo una vez para  $\mu > 0$  (véase la figura). Por lo tanto, sólo existe una solución positiva de, que denotaremos  $\mu_0$ .

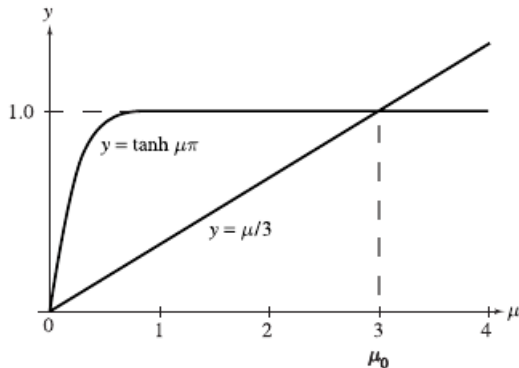


Figura 11.1 Gráficas de  $y = \mu/3$  y  $y = \tanh \mu\pi$



## Ejemplo 3 (continuación)

**Conclusión.** En el caso  $\lambda < 0$  el problema con valores en la frontera tiene un valor propio negativo

$$\lambda_0 = -\mu_0^2,$$

tal que

$$\tan \mu_0 \pi = \mu_0/3,$$

y las funciones propias correspondientes son

$$y_0(x) = c_0 \sinh \mu_0 x, \quad c_0 \in \mathbb{R}.$$

## Ejemplo 3 (continuación)

**Caso 2.**  $\lambda = 0$ . Cero es una raíz doble de la ecuación auxiliar, la solución general es:

$$y(x) = c_1 x + c_2.$$

Al sustituir en las condiciones de contorno

$$c_2 = 0, \quad 3\pi c_1 + 3c_2 - c_1 = 0$$

que tiene la solución  $c_1 = c_2 = 0$ .

No tenemos funciones propias.

## Ejemplo 3 (continuación)

**Caso 3.**  $\lambda = \mu^2 > 0$  para  $\mu > 0$ . Raíces:

$$r = \pm \mu i,$$

Solución general:

$$y(x) = c_1 \cos \mu x + c_2 \sin \mu x.$$

Sustituyendo en condiciones de contorno

$$c_1 = 0, \quad 3(c_1 \cos \mu\pi + c_2 \sin \mu\pi) - (-\mu c_1 \sin \mu\pi + \mu c_2 \cos \mu\pi) = 0.$$

Al hacer  $c_1 = 0$  en la última ecuación, obtenemos

$$c_2(3 \sin \mu\pi - \mu \cos \mu\pi) = 0.$$

Para que existan soluciones no triviales,  $\mu$  debe satisfacer

$$\tan \mu\pi = \frac{1}{3}\mu.$$

## Ejemplo 3 (continuación)

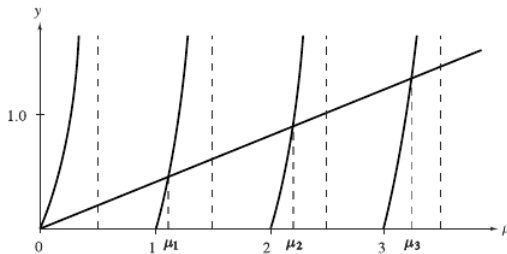


Figura 11.2 Gráficas de  $y = \mu/3$  y  $y = \tan \mu\pi$

Hay una infinidad de soluciones  $\mu_1 < \mu_2 < \dots$  por ende de autovalores  $\lambda_n = \mu_n^2, n = 1, 2, 3, \dots$  con autofunciones correspondientes

$$y_n(x) = c_2 \sin \mu_n x, \text{ con } c_2 \neq 0,$$

## Problemas regulares de Sturm-Liouville

Retornemos al problema general de hallar los valores propios y funciones propias de:

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{dy}{dx} \right) + q(x)y + \lambda r(x)y = 0, & a < x < b \\ a_1 y(a) + a_2 y'(a) = 0, \\ b_1 y(b) + b_2 y'(b) = 0, \end{cases} \quad (5)$$

donde

- $p(x)$ ,  $p'(x)$ ,  $q(x)$  y  $r(x)$  son funciones continuas en  $[a, b]$
- $p(x) > 0$  y  $r(x) > 0$  en  $[a, b]$ .
- Se excluye el caso en que  $a_1 = a_2 = 0$  o  $b_1 = b_2 = 0$ .

## Llevando a la forma de Sturm-Liouville

**Disgresión:** cualquier ecuación de la forma

$$A_2(x)y''(x) + A_1(x)y'(x) + A_0(x)y(x) + \lambda\rho(x)y(x) = 0 \quad (6)$$

se puede convertir en una ecuación del tipo que (5).

Debemos determinar  $p$  de modo que

$$(py')' = py'' + p'y' = A_2y'' + A_1y'.$$

Es decir

$$p = A_2, \quad p' = A_1.$$

Pero en general,  $A_2' \neq A_1$ , de modo que este método directo no siempre es aplicable.

## Llevando a la forma de Sturm-Liouville

**Idea!** Buscar **factor integrante**  $\mu(x)$  tal que al multiplicar (6) por  $\mu$ , obtenemos coeficientes tales que  $(\mu A_2)' = \mu A_1$ .  
 Lamemos  $p = \mu A_2$ , queremos

$$p' = \mu A_1 = p A_1 / A_2.$$

Es una ecuación en variables separables. Resolviendo

$$p(x) = C e^{\int A_1(x)/A_2(x) dx}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Tomamos  $C = 1$

$$\mu(x) = p/A_2 = [1/A_2(x)] e^{\int A_1(x)/A_2(x) dx}.$$

Al multiplicar (6) por  $\mu$  se tiene

$$(py')' + qy + \lambda ry = 0,$$

donde  $p = \mu A_2$ ,  $q = \mu A_0$ ,  $r = \mu \rho$ . Necesitamos que  $A_2(x) \neq 0$

## Ejemplo

Convertir la siguiente ecuación a la forma de una ecuación de Sturm-Liouville:

$$3x^2 y''(x) + 4xy'(x) + 6y(x) + \lambda y(x) = 0, \quad x > 0.$$

**Solución.**  $A_2(x) = 3x^2$  y  $A_1(x) = 4x$ .

$$\begin{aligned} \mu(x) &= \frac{1}{3x^2} e^{\int A_1(x)/A_2(x) dx} = \frac{1}{3x^2} e^{\int (4x)/3x^2 dx} \\ &= \frac{1}{3x^2} e^{(4/3) \int x^{-1} dx} = \frac{1}{3x^2} e^{(4/3) \ln x} = \frac{x^{4/3}}{3x^2} = \frac{1}{3x^{2/3}}. \end{aligned}$$

Al multiplicar la ecuación por  $\mu(x) = 1/(3x^{2/3})$ , obtenemos

$$\left( x^{4/3} y'(x) \right)' + 2x^{-2/3} y(x) + \lambda \left( 3x^{2/3} \right)^{-1} y(x) = 0.$$



# Identidad de Lagrange

Definimos

$$L[y](x) := (p(x)y'(x))' + q(x)y(x)$$

la ecuación se escribe

$$L[y](x) + \lambda r(x)y(x) = 0.$$

**Teorema [Identidad de lagrange]**

Supongamos que  $p$  y  $q$  son funciones continuas en  $[a, b]$  con valores en  $\mathbb{R}$ . Sean  $u$  y  $v$  funciones con segundas derivadas continuas en el intervalo  $[a, b]$  con valores en  $\mathbb{C}$ . Entonces,

$$uL[v] - L[u]v = \frac{d}{dx}(pW[u, v]),$$

donde el **wronskiano** de  $u$  y  $v$  se define  $W[u, v] = uv' - vu'$

## Identidad de Lagrange (Demostración)

Usamos la regla del producto y sumamos y restamos  $pu'v'$  para tener

$$\begin{aligned}
 uL[v] - vL[u] &= u \left[ (pv')' + qv \right] - v \left[ (pu')' + qu \right] \\
 &= u(pv')' + quv - v(pu')' - quv \\
 &= u(pv')' + u'(pv') - v'(pu') - v(pu')' \\
 &= [u(pv')] - [v(pu')] \\
 &= [p(uv' - vu')] \\
 &= \frac{d}{dx} [pW[u, v]]
 \end{aligned}$$

## Fórmula de Green

### Corolario [Fórmula de Green]

Bajo las hipótesis del Teorema anterior

$$\int_a^b (uL[v] - vL[u])(x)dx = (pW[u, v])(x)|_a^b. \quad (7)$$

Si además  $u$  y  $v$  satisfacen las condiciones en la frontera de (5), la fórmula de Green se simplifica a

$$\int_a^b (uL[v] - vL[u])(x)dx = 0. \quad (8)$$

## Fórmula de Green (Demostración)

La primera fórmula surge de integrar la identidad de Lagrange.  
 Para la segunda notar que si  $a_2 \neq 0$  y  $b_2 \neq 0$ , entonces

$$\begin{aligned} u'(a) &= -(a_1/a_2) u(a), & u'(b) &= -(b_1/b_2) u(b) \\ v'(a) &= -(a_1/a_2) v(a), & v'(b) &= -(b_1/b_2) v(b) \end{aligned}$$

Al sustituir estos valores en el lado derecho de la primera fórmula

$$\begin{aligned} & p(b)W[u, v](b) - p(a)W[u, v](a) \\ &= p(b) [u(b)v'(b) - u'(b)v(b)] - p(a) [u(a)v'(a) - u'(a)v(a)] \\ &= p(b) [u(b)(-b_1/b_2)v(b) - (-b_1/b_2)u(b)v(b)] \\ &\quad - p(a) [u(a)(-a_1/a_2)v(a) - (-a_1/a_2)u(a)v(a)] \\ &= 0 \end{aligned}$$

## Fórmula de Green (Demostración)

Cuando  $a_2 = 0$  (de modo que  $a_1 \neq 0$ ), las condiciones de contorno implican que  $u(a)$  y  $v(a)$  se anulan. Por lo tanto,

$$[u(a)v'(a) - u'(a)v(a)] = 0.$$

De manera análoga, cuando  $b_2 = 0$ , obtenemos

$$[u(b)v'(b) - u'(b)v(b)] = 0.$$



## Espacio $L_r^2([a, b])$

### Definición [Espacio $L_r^2([a, b])$ ]

Dado un intervalo  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  y  $w: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  positiva en  $(a, b)$ , definimos

$$L_r^2([a, b]) = \left\{ f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_a^b |f(x)|^2 r(x) dx < \infty \right\}$$

Si  $f \in L_r^2([a, b])$ :

$$\|f\|_{L_r^2} = \left\{ \int_a^b |f(x)|^2 r(x) dx \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Asumiremos las funciones continuas a trozos

# Producto interno

## Producto interno

Para  $f, g \in L_r^2([a, b])$  se define

$$\langle f | g \rangle_r = \int_a^b \overline{f(x)} g(x) r(x) dx. \quad (9)$$

**Convención de notación** Cuando  $r \equiv 1$  vamos a escribir por simplicidad  $L_1^2([a, b]) = L^2([a, b])$  y  $\langle \cdot | \cdot \rangle_1 = \langle \cdot | \cdot \rangle$ .

## Espacio $L_r^2([a, b])$ .

### Teorema

$L_r^2([a, b])$  es un espacio vectorial.

**Demostración** si  $f, g \in L_r^2([a, b])$  y  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

$$\int_a^b |\alpha f|^2 r(x) dx = \alpha^2 \int_a^b |f(x)|^2 r(x) dx < \infty.$$

Luego  $\alpha f \in L_r^2([a, b])$ .



## Espacio $L_r^2([a, b])$ .

Usamos

$$ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}, \quad a \geq 0, b \geq 0. \quad (10)$$

Luego

$$\begin{aligned} \int_a^b |f + g|^2 r(x) dx &\leq \int_a^b |f|^2 r(x) dx + 2 \int_a^b |f| |g| r(x) dx + \int_a^b |g|^2 r(x) dx \\ &\leq 2 \int_a^b |f|^2 r(x) dx + 2 \int_a^b |g|^2 r(x) dx < \infty. \end{aligned}$$

Luego  $f + g \in L_r^2([a, b])$ .



# Propiedades producto Interno

## Propiedades Producto Interno

$\langle \cdot | \cdot \rangle_r : L^2_r([a, b]) \times L^2_r([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$  satisface para  $f, g, h \in L^2([a, b])$  y  $\alpha \in \mathbb{C}$ :

**Multilinealidad**

- $\langle f + g | h \rangle_r = \langle f | h \rangle_r + \langle g | h \rangle_r$ ,  
 $\langle h | f + g \rangle_r = \langle h | f \rangle_r + \langle h | g \rangle_r$
- $\langle \alpha f | g \rangle_r = \overline{\alpha} \langle f | g \rangle_r$ ,  $\langle f | \alpha g \rangle_r = \alpha \langle f | g \rangle_r$

**Simetría**  $\langle f | g \rangle_r = \overline{\langle g | f \rangle_r}$

**No degeneración**  $\langle f | f \rangle_r \geq 0$  y  $\langle f | f \rangle_r = 0 \Leftrightarrow f = 0$ .

**Desigualdad de Cauchy-Schwartz**

$$|\langle f | g \rangle_r| \leq \|f\|_{L^2_r} \|g\|_{L^2_r}. \quad (11)$$

## Propiedades producto Interno

Sólo demostraremos la desigualdad de Cauchy-Schwartz. Las otras propiedades son sencillas.

Asumimos  $f, g \neq 0$ . Entonces

$$\frac{|f|}{\|f\|_{L_r^2}} \frac{|g|}{\|g\|_{L_r^2}} \leq \frac{1}{2\|f\|_{L_r^2}^2} |f|^2 + \frac{1}{2\|g\|_{L_r^2}^2} |g|^2$$

Multiplicando por  $r(x)$  e integrando

$$\int_a^b \frac{|f|}{\|f\|_{L_r^2}} \frac{|g|}{\|g\|_{L_r^2}} r(x) dx \leq \frac{1}{2\|f\|_{L_r^2}^2} \int_a^b |f|^2 r(x) dx + \frac{1}{2\|g\|_{L_r^2}^2} \int_a^b |g|^2 r(x) dx = 1$$

De aca sale



## Propiedades de la norma

### Propiedades norma

Si  $f, g \in L^2([a, b], r)$  y  $\alpha \in \mathbb{C}$ :

**No degeneración**  $\|f\|_{L_r^2} \geq 0$  y  $\|f\|_{L_r^2} = 0 \Leftrightarrow f = 0$ .

**Homogeneidad**  $\|\alpha f\|_{L_r^2} = |\alpha| \|f\|_{L_r^2}$ .

**Desigualdad Triangular o Minkowski**

$$\|f + g\|_{L_r^2} \leq \|f\|_{L_r^2} + \|g\|_{L_r^2}. \quad (12)$$

## Propiedades de la norma

Sólo demostraremos la desigualdad de Minkowski

$$\begin{aligned}
 \|f + g\|_{L_r^2}^2 &= \int_a^b \overline{(f + g)}(f + g)r(x)dx = \int_a^b (|f|^2 + 2\operatorname{Re}(f\bar{g}) + |g|^2)r(x)dx. \\
 &\leq \int_a^b |f|^2 r(x)dx + 2 \int_a^b |f\bar{g}|r(x)dx + \int_a^b |g|^2 r(x)dx \\
 &= \|f\|_{L_r^2}^2 + 2\|f\|_{L_r^2}\|g\|_{L_r^2} + \|g\|_{L_r^2}^2 = (\|f\|_{L_r^2} + \|g\|_{L_r^2})^2
 \end{aligned}$$

## Autoadjunción

Si  $v$  satisface las condiciones de contorno (5),  $\bar{v}$  también lo hace. Luego si aplicamos (8) con  $\bar{v}$  en lugar de  $v$  y usamos que  $L[\bar{v}] = \overline{L[v]}$  vemos que

$$\langle u | L[v] \rangle = \langle L[u] | v \rangle. \quad (13)$$

Recordar que aquí  $r \equiv 1$ .

### Definición [Operadores autoadjuntos]

Un operador diferencial lineal  $L$  que satisface (13) para todas las funciones  $u$  y  $v$  en un espacio vectorial  $V$  se llama un **operador autoadjunto**. o **hermitiano** sobre  $V$ .

**Observación.** Hemos mostrado que si  $L[y] = (py')' + qy$  y  $V$  es el conjunto de funciones que tienen segundas derivadas continuas en  $[a, b]$  y satisfacen las condiciones en la frontera en (5), entonces  $L$  es un operador autoadjunto en  $V$ .

## Autoadjunción $\Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$

### Teorema

Los valores propios de un problema regular de Sturm-Liouville (5) son reales y tienen funciones propias con valores reales.

**Demostración.** Supongamos que  $\lambda \in \mathbb{C}$  es un valor propio, con función propia  $\phi(x)$  a valores complejos. Es decir,

$$L[\phi](x) + \lambda r(x)\phi(x) = 0.$$

y  $\phi \not\equiv 0$  satisface las condiciones en la frontera en (5). Como  $p, q$  y  $r$  asumen valores reales, obtenemos

$$\overline{L[\phi](x) + \lambda r(x)\phi(x)} = L[\bar{\phi}](x) + \bar{\lambda} r(x)\bar{\phi}(x) = 0$$

Como  $a_1, a_2, b_1$  y  $b_2$  son reales  $\bar{\phi}$  también satisface las condiciones en la frontera en (5). Por lo tanto,  $\bar{\lambda}$  es un valor propio con función propia  $\bar{\phi}$

## Autoadjunción $\Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$

Por otro lado

$$\int_a^b L[\phi](x) \bar{\phi}(x) dx = -\lambda \int_a^b r(x) \phi(x) \bar{\phi}(x) dx = -\lambda \int_a^b r(x) |\phi(x)|^2 dx.$$

Además por la segunda identidad de Green y el hecho de que  $\bar{\lambda}$  sea un valor propio con función propia  $\bar{\phi}$ , vemos que

$$\int_a^b L[\phi](x) \bar{\phi}(x) dx = \int_a^b \phi(x) L[\bar{\phi}](x) dx = -\bar{\lambda} \int_a^b r(x) |\phi(x)|^2 dx$$

Pero los lados izquierdos de las ecuaciones anteriores son los mismos, de modo que

$$-\lambda \int_a^b r(x) |\phi(x)|^2 dx = -\bar{\lambda} \int_a^b r(x) |\phi(x)|^2 dx$$



## Autoadjunción $\Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$

Como  $r(x) > 0$  y  $\phi \neq 0$ , entonces

$$\int_a^b r(x)|\phi(x)|^2 dx > 0.$$

Obtenemos  $\lambda = \bar{\lambda}$ , vale decir  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Tomando partes real e imaginaria de  $\phi$  obtenemos funciones propias con valores reales correspondientes a  $\lambda$ . □

# Multiplicidad de autovalores

## Definición [Autovalores simples]

Si todas las funciones propias asociadas a un valor propio particular son sólo múltiplos escalares entre sí, entonces el valor propio se llama **simple**.

## Teorema [Autovalores simples]

Todos los valores propios del problema regular de Sturm-Liouville con valores en la frontera (5) son simples.

## Multiplicidad de autovalores

**Demostración.** Si  $\phi(x)$  y  $\psi(x)$  son autofunciones correspondientes a  $\lambda$ :

$$a_1\phi(a) + a_2\phi'(a) = 0, \quad a_1\psi(a) + a_2\psi'(a) = 0$$

Supongamos que  $a_2 \neq 0$ . ( si  $a_2 = 0$  y  $a_1 \neq 0$  queda de **ejercicio**.)  
 Despejando

$$\phi'(a) = (-a_1/a_2)\phi(a), \quad \psi'(a) = (-a_1/a_2)\psi(a)$$

Calculemos el wronskiano de  $\phi$  y  $\psi$  en  $x = a$

$$\begin{aligned} W[\phi, \psi](a) &= \phi(a)\psi'(a) - \phi'(a)\psi(a) \\ &= \phi(a)(-a_1/a_2)\psi(a) - (-a_1/a_2)\phi(a)\psi(a) = 0 \end{aligned}$$

Si el wronskiano de dos soluciones de una ecuación lineal homogénea de segundo orden se anula en un punto, entonces las dos soluciones son linealmente dependientes. Así,  $\lambda$  es un valor propio simple. □

# Ortogonalidad

## Teorema [Ortogonalidad]

Las funciones propias que corresponden a valores propios distintos de un problema regular de Sturm-Liouville con valores en la frontera (5) son **ortogonales** con respecto de la función de ponderación  $r(x)$  en  $[a, b]$ . Vale decir si  $\phi$  y  $\psi$  son autofunciones asociadas a los autovalores  $\lambda$  y  $\mu$  con  $\lambda \neq \mu$  entonces

$$\langle \phi | \psi \rangle_r = \int_a^b \phi(x)\psi(x)r(x)dx = 0. \quad (14)$$

# Ortogonalidad

**Demostración.** Tenemos

$$L[\phi] = -\lambda r\phi \quad \text{y} \quad L[\psi] = -\mu r\psi.$$

Podemos suponer que  $\phi$  y  $\psi$  tienen valores reales. Por la fórmula de Green

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b (\phi L[\psi] - \psi L[\phi])(x) dx \\ &= \int_a^b (-\phi \mu r\psi + \psi \lambda r\phi)(x) dx \\ &= (\lambda - \mu) \int_a^b \phi(x) \psi(x) r(x) dx \end{aligned}$$

Como  $\lambda \neq \mu$ , tenemos

$$\int_a^b \phi(x) \psi(x) r(x) dx = 0$$



## Ortogonalidad, Ejemplo

**Ejercicio** Demostrar que el problema

$$y'' + \lambda y = 0; \quad y(0) = y(\pi) = 0$$

tiene autovalores  $\lambda_n = n^2$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , con funciones propias correspondientes  $\phi_n(x) = \sin nx$ . Verificar la ortogonalidad de manera directa.

## Infinitud de autovalores

### Teorema

Los valores propios del problema regular de Sturm-Liouville con valores en la frontera (5) forman una sucesión numerable y creciente

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots$$

con:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = +\infty.$$

**Demostración.** Será omitida, ver por ejemplo Garrett Birkhoff y Gian-Carlo Rota. Ordinary Differential Equations

## Desarrollos en serie

Si  $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots$  son valores propios del problema (5) con funciones propias  $\{\phi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ , ortogonales respecto a  $r(x)$  en  $[a, b]$ . Como

$$\frac{\phi_n}{\|\phi_n\|_{L_r^2}},$$

también es autofunción, se puede asumir que  $\{\phi_n\}$  son **ortonormales**

$$\int_a^b \phi_n(x) \phi_m(x) r(x) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 1, & m = n, \end{cases}.$$

Ahora vamos a asociar a una función  $f$  un denominado **desarrollo ortogonal**.

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x), \quad \text{donde } c_n = \int_a^b f(x) \phi_n(x) r(x) dx. \quad (15)$$



## Ortonormalización

**Ejercicio** Considerar el problema de Sturm-Liouville con valores en la

$$y'' + \lambda y = 0; \quad y(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0.$$

- $\lambda_n = (2n - 1)^2/4, n = 1, 2, 3, \dots$  valores propios.
- $\phi_n(x) = a_n \sin\left(\frac{2n-1}{2}x\right)$  x funciones propias ortogonales respecto  $r(x) \equiv 1$  en  $[0, \pi]$ .
- Si  $a_n = \sqrt{2/\pi}$  el sistema es ortonormal.

## Desarrollos en serie

### Teorema

Sea  $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$  un sistema ortonormal de funciones propias para el problema regular de Sturm-Liouville con valores en la frontera (5), entonces  $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$  es completo en el conjunto de funciones continuas de cuadrado integrable en  $[a, b]$ , es decir si  $f$  es continua:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x), \quad a \leq x \leq b,$$

donde la convergencia de la serie es en media. Si además  $f$  continua por partes en  $[a, b]$  y satisface las condiciones en la frontera la serie converge uniformemente en  $[a, b]$ .

**Demostración.** Será omitida, ver por ejemplo Garrett Birkhoff y Gian-Carlo Rota. Ordinary Differential Equations

## Desarrollos en serie

Expresar

$$f(x) = \begin{cases} 2x/\pi, & 0 \leq x \leq \pi/2 \\ 1, & \pi/2 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

mediante el sistema:

$$\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin\left(\frac{2n-1}{2}x\right).$$

$$\begin{aligned} c_n &= \int_0^\pi f(x) \sqrt{2/\pi} \sin\left(\frac{2n-1}{2}x\right) dx \\ &= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{3/2} \int_0^{\pi/2} x \sin\left(\frac{2n-1}{2}x\right) dx + \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_{\pi/2}^\pi \sin\left(\frac{2n-1}{2}x\right) dx \\ &= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{3/2} \left[ \frac{-2x}{2n-1} \cos\left(\frac{2n-1}{2}x\right) + \frac{4}{(2n-1)^2} \sin\left(\frac{2n-1}{2}x\right) \right] \Big|_0^{\pi/2} \\ &\quad - \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \left[ \frac{2}{2n-1} \cos\left(\frac{2n-1}{2}x\right) \right] \Big|_{\pi/2}^\pi, \end{aligned}$$

## Desarrollos en serie

Entonces

$$c_n = \frac{2^{7/2}}{\pi^{3/2}(2n-1)^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sqrt{2}/\pi \sin\left(\frac{2n-1}{2}x\right) \\ &= \frac{2^{7/2}}{\pi^2} \sin(x/2) + \frac{2^{7/2}}{9\pi^2} \sin(3x/2) - \frac{2^{7/2}}{25\pi^2} \sin(5x/2) - \frac{2^{7/2}}{49\pi^2} \sin(7x/2) + \dots, \end{aligned}$$

Como  $f(0) = 0$  y  $f'(\pi) = 0$ ,  $f$  satisface las condiciones en la frontera.

Además,  $f$  es continua y  $f'$  es continua por partes en  $[0, \pi]$ . Por lo tanto, la serie converge uniformemente a  $f$  en  $[0, \pi]$ .

## Otro resultado de convergencia

### Teorema

Sea  $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$  una sucesión ortonormal de funciones propias para el problema regular de Sturm-Liouville con valores en la frontera (5). Sean  $f$  y  $f'$  continuas por partes en  $[a, b]$ . Entonces, para cualquier  $x$  en  $(a, b)$ ,

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x) = \frac{1}{2} [f(x^+) + f(x^-)], \quad (16)$$

donde las  $c_n$  están dadas por la fórmula (15).

## Problemas periodicos de Sturm-Liouville

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{dy}{dx} \right) + q(x)y + \lambda r(x)y = 0, & a < x < b \\ y(0) = y(T), \\ y'(0) = y'(T), \end{cases} \quad (17)$$

## Problemas singulares de Sturm-Liouville

### Propiedades problema periódico

Supongamos que  $p, q, r$  son funciones continuas y que  $p(0) = p(T)$ ,  $q(0) = q(T)$ , y  $r(0) = r(T)$ . Sea  $V$  el espacio vectorial de las funciones continuas que satisfacen las condiciones de contorno periódicas y  $L[u] = (pu')' + qu$ .

- 1 Demostrar que  $L$  es hermitiano en  $V$ .
- 2 A partir de allí demostrar que los autovalores son reales y las autofunciones se pueden tomar a valores reales.
- 3 ¿Serán simples los autovalores?

**Observación** Las afirmaciones sobre que los autovalores forman una sucesión y sobre desarrollos en serie de autofunciones continúan siendo ciertos.

## Problemas singulares de Sturm-Liouville

Supongamos el operador

$$L[y](x) := \frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{dy}{dx} \right] + q(x)y$$

y consideremos la ecuación

$$L[y](x) + \lambda r(x)y(x) = 0, \quad a < x < b.$$

donde  $p(x)$ ,  $p'(x)$ ,  $q(x)$  y  $r(x)$  son continuas en  $(a, b)$  con valores reales, y además  $p(x)$  y  $r(x)$  son positivas en  $(a, b)$ . Llamamos a la ecuación una ecuación **singular de Sturm-Liouville** si una de las siguientes situaciones ocurren:

- $\lim_{x \rightarrow a^+} p(x) = 0$  o  $\lim_{x \rightarrow b^-} r(x) = 0$ .
- $p(x)$ ,  $q(x)$  o  $r(x)$  se vuelven no acotadas cuando  $x$  tiende a  $a$  o  $b$ .
- El intervalo  $(a, b)$  no está acotado (por ejemplo,  $(a, \infty)$ ,  $(-\infty, b)$  o  $(-\infty, \infty)$ ).



## Ejemplos: Ecuación Bessel

La ecuación de Bessel de orden  $\nu$

$$t^2 y''(t) + ty'(t) + (t^2 - \nu^2) y = 0, \quad 0 < t < \sqrt{\lambda} b \quad (18)$$

se puede transformar mediante la sustitución  $t = \sqrt{\lambda} x$  en la ecuación singular de Sturm-Liouville

$$\frac{d}{dx} \left[ x \frac{dy}{dx} \right] - \frac{\nu^2}{x} y + \lambda xy = 0, \quad 0 < x < b. \quad (19)$$

En este caso,  $p(x) = x$ , que se anula para  $x = 0$ . Además, para  $\nu \neq 0$ , la función  $q(x) = -\nu^2/x$  no está acotada cuando  $x \rightarrow 0^+$ .

## Ejemplos: Ecuación de Legendre

$$(1 - x^2) y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0, \quad -1 < x < 1 \quad (20)$$

se puede escribir como la ecuación singular de Sturm-Liouville

$$\frac{d}{dx} \left[ (1 - x^2) \frac{dy}{dx} \right] + \lambda y = 0, \quad -1 < x < 1, \quad (21)$$

donde  $\lambda = n(n+1)$ . En este caso,  $p(x) = 1 - x^2$  se anula en los dos extremos  $\pm 1$ .

## Ejemplos: Ecuación de Hermite

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad (22)$$

al ser multiplicada por  $e^{-x^2}$ , se convierte en la ecuación singular de Sturm-Liouville

$$\frac{d}{dx} \left[ e^{-x^2} \frac{dy}{dx} \right] + \lambda e^{-x^2} y = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad (23)$$

donde  $\lambda = 2n$ . En este caso, el intervalo  $(-\infty, \infty)$  no está acotado.

# Autoadjunción

¿Cuáles condiciones en la frontera convierten a una ecuación singular de Sturm-Liouville en un problema autoadjunto?

Debemos tener

$$\int_a^b (uL[v] - vL[u])(x) dx = \lim_{x \rightarrow b} p(x)W[u, v](x) - \lim_{x \rightarrow a^+} p(x)W[u, v](x).$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a^+} p(x) [u(x)v'(x) - u'(x)v(x)] \\ = \lim_{x \rightarrow b^-} p(x) [u(x)v'(x) - u'(x)v(x)] = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

## Condiciones singulares en la frontera

### Lema

Cualquiera de las condiciones siguientes garantizan la ecuación (24) en  $a$ :

- 1  $\lim_{x \rightarrow a^+} p(x) = p(a)$  existe y  $u, v$  satisfacen la condición en la frontera

$$a_1 y(a) + a_2 y'(a) = 0, \text{ con } a_1, a_2 \text{ no ambos nulos.} \quad (25)$$

- 2  $\lim_{x \rightarrow a^+} p(x) = 0$  y  $u, v$  satisfacen la condición en la frontera

$$y(x), y'(x) \text{ permanecen acotados cuando } x \rightarrow a^+. \quad (26)$$

- 3 Las funciones  $u, v$  satisfacen la condición en la frontera

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \sqrt{p(x)} y(x) = 0 \text{ y } \lim_{x \rightarrow a^+} \sqrt{p(x)} y'(x) = 0 \quad (27)$$

## Condiciones singulares en la frontera

### Demostración.

(1) Sin pérdida de generalidad, suponemos que  $a_1 \neq 0$ , Entonces, implica que  $u(a) = -(a_2/a_1) u'(a)$  y  $v(a) = -(a_2/a_1) v'(a)$ . Al sustituir

$$\begin{aligned} p(a) [u(a)v'(a) - u'(a)v(a)] &= p(a) [-(a_2/a_1) u'(a)v'(a) + (a_2/a_1) u'(a)v'(a)] \\ &= 0 \end{aligned}$$

(2) Si  $u, u', v$  y  $v'$  permanecen acotadas cuando  $x$  tiende a  $a$  por la derecha, entonces  $W[u, v]$  permanece acotado. Como  $\lim_{x \rightarrow a^+} p(x) = 0$  y el producto de un factor acotado, por un factor que tiende a cero tiende a cero, se cumple (24).

## Condiciones singulares en la frontera

(3) Si  $u$  y  $v$  satisfacen (27), entonces

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a^+} p(x) [u(x)v'(x) - u'(x)v(x)] &= \left( \lim_{x \rightarrow a^+} \sqrt{p(x)} u(x) \right) \left( \lim_{x \rightarrow a^+} \sqrt{p(x)} v'(x) \right) \\ &\quad - \left( \lim_{x \rightarrow a^+} \sqrt{p(x)} u'(x) \right) \left( \lim_{x \rightarrow a^+} \sqrt{p(x)} v(x) \right) \\ &= 0 - 0 = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, se cumple la ecuación (24).

Se puede establecer similarmente las mismas afirmaciones para el punto  $b$

## Ejemplo: Ecuación de Bessel

Un problema singular de Sturm-Liouville con valores en la frontera típico asociado a la ecuación de Bessel de orden  $\nu$  es

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dx} \left[ x \frac{dy}{dx} \right] - \frac{\nu^2}{x} y + \lambda xy = 0, \quad 0 < x < 1. \end{array} \right. \quad (28)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y(x), y'(x) \text{ permanecen acotadas cuando } x \rightarrow 0^+, \end{array} \right. \quad (29)$$

$$y(1) = 0. \quad (30)$$

Este problema es autoadjunto, pues la condición (2) del lema se cumple en  $a = 0$  y la condición (1) se cumple en  $b = 1$ .

Si  $\lambda > 0$ , la sustitución  $t = \sqrt{\lambda}x$  transforma la ecuación en la ecuación de Bessel

$$t^2 y'' + t y' + (t^2 - \nu^2) y = 0.$$



## Ejemplo: Ecuación de Bessel

En cursos básicos de ecuaciones diferenciales se demuestra que la solución general se escribe

$$y(t) = c_1 J_\nu(t) + c_2 Y_\nu(t)$$

o

$$y(x) = c_1 J_\nu(\sqrt{\lambda}x) + c_2 Y_\nu(\sqrt{\lambda}x)$$

- $J_\nu$  se llama **Función de Bessel de primera especie** y satisface las hipótesis (2) del Lema en  $x = 0$  para  $\nu = 0$  y  $\nu \geq 1$ .
- $Y_\nu$  se llama **Función de Bessel de segunda especie** y no está acotada cerca de  $x = 0$ .

## Ejemplo: Ecuación de Bessel

Para que se cumpla la condición de contorno en  $x = 0$  debemos tener  $c_2 = 0$

Para que se cumpla la condición de contorno en  $x = 1$  con  $y(x) = c_1 J_\nu(\sqrt{\lambda}x)$ , necesitamos que  $c_1 = 0$  o

$$J_\nu(\sqrt{\lambda}) = 0$$

### Teorema

La función de Bessel  $J_\nu$  tiene una sucesión creciente de ceros reales:

$$0 < \alpha_{\nu 1} < \alpha_{\nu 2} < \alpha_{\nu 3} < \dots$$

## Ejemplo: Ecuación de Bessel

Por lo tanto,

$$\lambda_{\nu n} = \alpha_{\nu n}^2, \nu, n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

son valores propios con funciones propias correspondientes

$$y_{\nu n}(x) = c_1 J_{\nu}(\alpha_{\nu n} x).$$

Éstos son los únicos valores propios positivos. Además, se puede mostrar que no existen valores propios no positivos.

Las funciones propias en son ortogonales con respecto de la función de ponderación  $r(x) = x$ :

$$\int_0^1 J_{\nu}(\alpha_{\nu n} x) J_{\nu}(\alpha_{\nu m} x) x dx = 0, \quad n \neq m$$

## Ejemplo: Ecuación de Bessel

Si  $f(x)$  es una función dada, entonces un desarrollo mediante funciones propias asociado a  $f$  es

$$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_{\nu}(\alpha_{\nu n} x)$$

donde

$$a_n = \frac{\int_0^1 f(x) J_{\nu}(\alpha_{\nu n} x) x dx}{\int_0^1 J_{\nu}^2(\alpha_{\nu n} x) x dx}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Cuando  $f$  y  $f'$  son continuas por partes en  $[0, 1]$ , el desarrollo converge a

$$[f(x^+) + f(x^-)] / 2$$

para cada  $x$  en  $(0, 1)$ .

## Ejemplo: Ecuación de Legendre

Un problema singular de Sturm-Liouville con valores en la frontera típico asociado a la **ecuación de Legendre** es

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{dy}{dx} \right] + \lambda y = 0, \quad -1 < x < 1 \\ y(x), y'(x) \text{ permanecen acotadas cuando } x \rightarrow \pm 1. \end{array} \right. \quad (31)$$

$$(32)$$

Es autoadjunto, pues se cumple la condición (2) del lema en  $x = \pm 1$ . En cursos de ecuaciones diferenciales ordinarias se ve que la ecuación tiene soluciones polinomiales para  $\lambda = n(n+1)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Estas soluciones son múltiplos constantes de los **polinomios de Legendre**

$$P_n(x) = 2^{-n} \sum_{m=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^m (2n-2m)!}{(n-m)! m! (n-2m)!} x^{n-2m}$$

donde  $\lfloor n/2 \rfloor$  es la parte entera.

## Ejemplo: Ecuación de Legendre

$P_n(x)$  son ortogonales en  $[-1, 1]$  con respecto de  $r(x) = 1$  :

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = 0, \quad n \neq m$$

Si  $f(x)$  es una función dada, entonces un desarrollo mediante funciones propias para  $f(x)$ , en términos de los polinomios de Legendre es

$$f \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x),$$

donde

$$a_n = \frac{\int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx}{\int_{-1}^1 P_n^2(x) dx}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

## Ejemplo: Ecuación de Hermite

Un problema singular de Sturm-Liouville con valores en la frontera asociado a la ecuación de Hermite es

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dx} \left[ e^{-x^2} \frac{dy}{dx} \right] + \lambda e^{-x^2} y = 0, \quad -\infty < x < \infty \end{array} \right. \quad (33)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2/2} y(x) = 0 \text{ y } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2/2} y'(x) = 0. \end{array} \right. \quad (34)$$

Por la condición (3) del lema, el operador lineal asociado al problema es autoadjunto.

Se puede demostrar que se puede transformar la ecuación del problema en la ecuación de Hermite

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0.$$

También que esta ecuación tiene soluciones polinomiales que son múltiplos constantes de los **polinomios de Hermite**  $H_n(x)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$

## Ejemplo: Ecuación de Hermite

Las soluciones polinomiales son las únicas que satisfacen las condiciones en la frontera. Se deduce que los valores propios son  $\lambda_n = 2n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , con funciones propias correspondientes  $H_n(x)$ . Los polinomios de Hermite  $H_n(x)$  son ortogonales en  $(-\infty, \infty)$  con respecto de la función de ponderación  $r(x) = e^{-x^2}$  :

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) H_m(x) e^{-x^2} dx = 0, \quad n \neq m. \quad (35)$$



## Ejemplo: Ecuación de Hermite

Si  $f$  es una función dada, entonces un desarrollo con funciones propias asociado a  $f$  está dado por

$$f \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n H_n(x)$$

donde

$$a_n = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f(x) H_n(x) e^{-x^2} dx}{\int_{-\infty}^{\infty} H_n^2(x) e^{-x^2} dx}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

## Vibraciones transversales de una membrana elástica

Membrana elástica, por ejemplo un tambor, que es mantenida fija a un aro circular. Viene gobernada por la ecuación de [ondas bidimensional](#)

$$u_{tt} = \Delta u := u_{xx} + u_{yy}$$

# Variables y suposiciones

## Variables

- $t$  es el tiempo,
- $x, y, u$  son las coordenadas de un punto sobre la membrana en un sistema de coordenadas cartesiano ortogonal.

## Suposiciones.

- No actúa otra fuerza más que la tensión de la membrana.
- El material de esta membrana es uniforme.
- La dirección de desplazamientos de un punto sobre la membrana es perpendiculares al plano que contiene al aro de sujeción.
- El aro de sujeción se supone de radio 1 y centro en  $(0, 0)$  y está contenido en el plano  $x, y$ .
- $B$  denota la bola de centro  $(0, 0)$  y radio 1.

## Condiciones de contorno e iniciales

### Condición de contorno

$$u = 0 \text{ en } \partial B \quad \text{membrana fija en el aro.} \quad (36)$$

**Condiciones iniciales** nos dicen cual es el estado de la membrana en  $t = 0$ ,

$$\begin{cases} u(x, y, 0) = f(x) & x \in B, \\ u_t(x, y, 0) = g(x) & x \in B. \end{cases}$$

Supondremos, para simplificar los cálculos,  $g \equiv 0$

$$\begin{cases} u(x, y, 0) = f(x), & (x, y) \in B, \\ u_t(x, y, 0) = 0, & (x, y) \in B. \end{cases} \quad (37)$$

$$(38)$$

## Separación variables

Reemplazando  $u(x, y, t) = v(x, y)T(t)$  en la ecuación:

$$v(x, y)T''(t) = T(t)(v_{xx}(x, y) + v_{yy}(x, y)). \quad (39)$$

Vale decir

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{v_{xx}(x, y) + v_{yy}(x, y)}{v(x, y)}.$$

Esto implica  $T''/T$  y  $\Delta v/v$  son constantes. Existe  $\lambda$  tal que

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{v_{xx}(x, y) + v_{yy}(x, y)}{v(x, y)} = -\lambda.$$

Tenemos así dos ecuaciones

$$\begin{cases} T''(t) + \lambda T(t) = 0, t \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (40)$$

$$\begin{cases} v_{xx}(x, y) + v_{yy}(x, y) + \lambda v(x, y) = 0, (x, y) \in B \end{cases} \quad (41)$$

## Positividad del autovalor

### Ejercicio

a) Sean  $u, v \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ . Aplicar ejercicio de identidad de Green a) con  $M = uv$  y  $N = 0$  y deducir la **fórmula de integración por partes**

$$\iint_{\Omega} uv_x dx dy = - \iint_{\Omega} u_x v dx dy + \oint uv n_x ds,$$

donde  $\vec{n} = (n_x, n_y)$  es el vector normal exterior a  $\partial\Omega$ . Por supuesto vale una fórmula similar con la derivada respecto a  $y$ .

b) Suponer  $v \not\equiv 0$ . Multiplicar la ecuación (41) por  $v$  la segunda ecuación en (39) integrar en  $\Omega$  y usar la fórmula del inciso a) para deducir que

$$\lambda = \frac{\iint_{\Omega} v_x^2 + v_y^2 dx dy}{\iint_{\Omega} v^2 dx dy} > 0$$

## condiciones de contorno

Las condiciones de contorno

$$u(x, y, t) = 0, \quad (x, y) \in \partial B \Rightarrow v = 0 \text{ en } \partial B$$

La condición inicial (38) implica

$$u_t(x, y, 0) = v(x, y) T'(0) = 0 \Rightarrow T'(0) = 0 \text{ en } \partial B$$

No es posible satisfacer las condiciones iniciales con la función propuesta, pues

$$u(x, y, 0) = v(x, y) T(0) = f(x, y).$$

lo se cumpliría si, por casualidad, elegimos  $f$  solución de

$$v_{xx}(x, y) + v_{yy}(x, y) + \lambda v(x, y) = 0.$$

Más adelante veremos como tratar las condiciones iniciales.

## Resolviendo

Escribamos  $\lambda = \omega^2$ . La solución general de la ecuación (40) con la condición  $T'(0) = 0$  es

$$T(t) = k \cos(\omega t), \quad k \in \mathbb{R}. \quad (42)$$

La ecuación (41) se conoce como la ecuación de autovalores del Laplaciano o [ecuación de Helmholtz](#). Los valores de  $\lambda$  para los que esta ecuación tiene solución se llaman autovalores del operador de Laplace. Para encontrar estos autovalores vamos a usar coordenadas polares  $v = v(r, \theta)$ . Escribiendo el Laplaciano en estas coordenadas

$$v_{rr} + \frac{1}{r} v_r + \frac{1}{r^2} v_{\theta\theta} + \omega^2 v = 0 \quad (43)$$



## Separando variables otra vez

Nuevamente vamos a considerar la técnica de separación de variables.  
Proponemos que

$$v(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$$

Reemplazando en (43)

$$R''\Theta + \frac{1}{r}R'\Theta + \frac{1}{r^2}R\Theta'' + \omega^2 R\Theta = 0.$$

Multiplicando por  $r^2/R\Theta$  y depejando los términos conteniendo  $\Theta$

$$\frac{r^2 R''}{R} + \frac{r R'}{R} + \omega^2 r^2 = -\frac{\Theta''}{\Theta}. \quad (44)$$

## Resolviendo

Cada miembro depende de variables independientes entre si, por consiguiente las funciones deben ser constantes. Debe existir  $\mu$  tal que

$$r^2 R'' + rR' + (\omega^2 r^2 - \mu)R = 0 \quad (45)$$

$$\Theta'' + \mu\Theta = 0. \quad (46)$$

Además la condición de contorno implica

$$R(1) = 0. \quad (47)$$

Queremos una solución acotada cuando  $r \rightarrow 0^+$ , esto lo escribimos

$$|R(0)| < \infty. \quad (48)$$

La función  $\Theta$  al depender de  $\theta$  debería ser periódica. Para que esto sea así  $\mu$  debe ser positivo, puesto que las soluciones de 45 son periódicas solo para estos valores de  $\mu$ . Por consiguiente

$$\Theta(\theta) = c_1 \cos \sqrt{\mu}\theta + c_2 \sin \sqrt{\mu}\theta. \quad (49)$$

## Resolviendo

Como más específicamente el período debe ser  $2\pi$ , el valor de  $\mu$  debe ser un entero cuadrado, es decir que existe un entero positivo  $n$  tal que  $\mu = n^2$ . Así (49) se convierte en

$$\Theta(\theta) = c_1 \cos n\theta + c_2 \sin n\theta.$$

Obtendremos dos soluciones linealmente independientes eligiendo  $c_1 = 0$  y  $c_2 = 1$  y permutando estos valores.

$$\Theta_{1n}(\theta) = \cos n\theta, \quad \Theta_{2n}(\theta) = \sin n\theta. \quad (50)$$

## Resolviendo

Reemplazando  $\mu$  por  $n^2$  en (45)

$$r^2 R'' + rR' + (\omega^2 r^2 - n^2)R = 0, \quad (51)$$

La podemos convertir fácilmente en la ecuación de Bessel por el cambio de variable independiente  $s = \omega r$ . Tenemos

$$\frac{dR}{dr} = \frac{dR}{ds} \frac{ds}{dr} = \frac{dR}{ds} \omega$$

y

$$\frac{d^2 R}{dr^2} = \frac{d^2 R}{ds^2} \omega^2$$

Reemplazando las igualdades anteriores y  $r$  por  $s/\omega$  en (51) llegamos a

$$s^2 R''(s) + sR' + (s^2 - n^2)R = 0$$

## Resolviendo

Obtuvimos la ecuación de Bessel de orden  $n$ , con  $n$  entero no negativo.  
La solución general se escribe:

$$R = c_1 J_n + c_2 Y_n$$

donde  $J_n$  es continua en 0 e  $Y_n$  es no acotada en 0. Pero  $(48) \Rightarrow c_2 \neq 0$ .  
Sin perder generalidad, supongamos  $c_1 = 1$ . Así tenemos que  $R$  como  
función de  $r$  es

$$R(r) = J_n(\omega r). \quad (52)$$

## Resolviendo

Ahora la condición de contorno (46) implica que

$$J_n(\omega) = 0. \quad (53)$$

Sabemos que los ceros de la ecuación de Bessel forman una sucesión

$$\omega_{n0} < \omega_{n1} < \cdots, \quad \text{con } \omega_{nk} \nearrow \infty, \text{ cuando } k \rightarrow \infty$$

Tenemos una solución distinta por cada  $n$  entero positivo y por cada  $\omega_{nk}$  en la lista de ceros de  $J_n$

$$u_{1nk}(r, \theta, t) = \cos(\omega_{nk}t) v_{1nk}(r, \theta) = \cos(\omega_{nk}t) \cos(n\theta) J_n(\omega_{nk}r) \quad (54)$$

$$u_{2nk}(r, \theta, t) = \cos(\omega_{nk}t) v_{2nk}(r, \theta) = \cos(\omega_{nk}t) \sin(n\theta) J_n(\omega_{nk}r) \quad (55)$$

## Tonos normales

Las funciones  $u_{1nk}$ ,  $u_{2nk}$  se llaman **tonos normales**. Todos los puntos de la membrana vibran a la misma frecuencia  $\omega_{nk}$ . Si es un tambor se produce una nota pura.

$$n = 0, k = 0$$

$$n = 0, k = 1$$

$$n = 1, k = 1$$

# Ortogonalidad

## Ejercicio

La familia de funciones  $\{v_{1nk}\}_{n,k=0}^{\infty} \cup \{v_{2nk}\}_{n,k=0}^{\infty}$  es ortogonal en  $B$  con ponderación  $r$ . Es decir si  $(n, k) \neq (n', k')$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \cos(n\theta) \cos(n'\theta) J_n(\omega_k r) J_{n'}(\omega_{k'} r) r d\theta dr = 0 \quad (56)$$

y  $\forall (n, k), (n', k')$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \cos(n\theta) \sin(n'\theta) J_n(\omega_k r) J_{n'}(\omega_{k'} r) r d\theta dr = 0 \quad (57)$$



## Desarrollo en serie, completitud

### Teorema

La familia de funciones  $\{v_{1nk}\}_{n,k=0}^{\infty} \cup \{v_{2nk}\}_{n,k=0}^{\infty}$  es un sistema ortogonal completo en  $B$  con ponderación  $r$ . Si  $f: B \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua de cuadrado integrable entonces

$$f(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} J_n(\omega_{km}r) (a_{nk} \cos n\theta + b_{nk} \sin n\theta) \quad (58)$$

Con convergencia en media. Los coeficientes vienen dados por

$$a_{nk} = \frac{2}{\pi J_{n+1}(\omega_{nk})} \int_0^{2\pi} \int_0^1 f(r, \theta) J_n(\omega_{nk}r) \cos n\theta dr d\theta \quad (59)$$

$$b_{nk} = \frac{2}{\pi J_{n+1}(\omega_{nk})} \int_0^{2\pi} \int_0^1 f(r, \theta) J_n(\omega_{nk}r) \sin n\theta dr d\theta \quad (60)$$

## Separación variables

Finalmente se propone una solución al problema original de la forma

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \cos(\omega_{nk}t) J_n(\omega_{km}r) (a_{nk} \cos n\theta + b_{nk} \sin n\theta)$$

(61)

Esta  $u$  será solución pues es una suma de soluciones, satisface que  $u = 0$  en  $\partial B$  y que  $u_t(x, y, 0) = 0$ . Debería cumplirse

$$f(x, y) = u(x, y, 0),$$

y el Teorema anterior nos dice como elegir  $a_{nk}, b_{nk}$  para conseguir esto.