Desarrollo de soluciones en series de potencias

Gastón Beltritti

Fernando Mazzone

Departamento de Matemática
FCEFQyN - UNRC.

31 de agosto de 2022

Objetivo

Obtener expresiones de soluciones de ecuaciones diferenciales lineales a coeficientes variables por medio de series de funciones elementales. Demostrar teoremas que nos digan cuando estos desarrollos son posibles.

Método coeficientes indeterminados

Consiste en proponer el desarrollo en serie de la solución

$$y(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots$$

remplazar $y(x)$ por este desarrollo en en la ecuación

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{1}$$

y tratar de resolver la ecuación resultante para los coeficientes (indeterminados) a_n.

Método coeficientes indeterminados

Ejemplo Hallar el desarrollo en serie de la solución del pvi

$$\begin{cases} y' & = y \\ y(0) & = 1 \end{cases}$$

Escribimos

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$
$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + (n+1)a_{n+1} x^n + \cdots$$

Método coeficientes indeterminados

La igualdad $y' = y$ implica que

$$
\begin{aligned}
a_1 &= a_0 \\
a_2 &= \frac{a_1}{2} \\
&\vdots \\
a_{n+1} &= \frac{a_n}{n+1}
\end{aligned}
$$

Método coeficientes indeterminados

Si iteramos la fórmula $a_{n+1} = a_n/(n+1)$, obtenemos

$$a_n = \frac{1}{n} a_{n-1} = \frac{1}{n(n-1)} a_{n-2} = \cdots = \frac{1}{n(n-1)\cdots 1} a_0 = \frac{a_0}{n!}.$$

Pero $a_0 = y(0) = 1$. Luego

$$\boxed{a_n = \frac{1}{n!}} \tag{2}$$

Método coeficientes indeterminados

```
from sympy import *
a=symbols('a0:6')
x=symbols('x')
y=sum([a[i]*x**i for i in range(6)])
Ecua=y.diff(x)-y
Ecuaciones=[Ecua.diff(x,i).subs(x,0)/factorial(i)\
    for i in range(6)]
a_sol=solve(Ecuaciones[:-1],a[1:])
y.subs(a_sol)
```

$$\boxed{y(x) = \frac{a_0x^5}{120} + \frac{a_0x^4}{24} + \frac{a_0x^3}{6} + \frac{a_0x^2}{2} + a_0x + a_0} \quad (3)$$

Relaciones de recurrencia

La expresión $a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1}$ es un ejemplo de relación de recurrencia.

Definición

Una **relación de recurrencia** para una sucesión b_n de números reales es una sucesión de funciones $f_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que relaciona b_{n+1} con los términos anteriores de la sucesión por medio de la expresión

$$b_{n+1} = f_n(b_1, \ldots, b_n). \tag{4}$$

Resolver una relación de recurrencia es encontrar una fórmula explícita de b_n como función de n.

Relaciones de recurrencia

Ejemplo Resolvamos con SymPy la sucesión de Fibonacci $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$.

```
n=symbols('n',integer=True)
y = Function('y')
f=Equality(y(n),y(n-1)+y(n-2))
sol=rsolve(f,y(n))
```

$$a_n = C_0 \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \right)^n + C_1 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \right)^n \tag{5}$$

Las constantes arbitrarias C_0 y C_1 aparecen porque una relación de recurrencia no tiene una única solución.

Relaciones de recurrencia

Definición

Se dice que una relación de recurrencia tiene **orden** k o es de k-términos si el coeficiente a_n se expresa en función de los k anteriores.

Observación En general la solución general de una relación de recurrencia de k-términos tiene k constantes arbitrarias. Por consiguiente, si queremos una única solución debemos tener k relaciones extras. Usualmente esto se consigue dando los valores de los k-primeros términos $a_0, \ldots, a_k$. Por ejemplo, en la sucesión de Fibonacci si pedimos $a_0 = a_1 = 1$.

Relaciones de recurrencia

```
C0,C1=symbols('C0,C1')
A=C0*((1+sqrt(5))/2)**n+C1*((1-sqrt(5))/2)**n
Cval=solve([A.subs(n,0)-1,A.subs(n,1)-1],[C0,C1])
Fib=A.subs(Cval)
Fibonacci10=[Fib.subs(n,i).expand()\
    for i in range(10)]
```

Los primeros **números de Fibonacci** que

$$[1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55]$$

Serie binomial

Usamos el método de coeficientes indeterminados para encontrar desarrollos en serie de una función f.

Ejemplo Encontrar el desarrollo en serie de la función

$$y(x) = (1+x)^p \quad p \in \mathbb{R}$$

La función $y(x)$ resuelve el pvi $(1+x)y'(x) = py$, $y(0) = 1$.

Serie binomial

Apliquemos el método de coeficientes indeterminados a este pvi. Como

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$
$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + (n+1)a_{n+1}x^n + \cdots$$

Tenemos

$$\begin{aligned} py =& pa_0 + pa_1 x + pa_2 x^2 + \cdots + pa_n x^n + \cdots \\ (1+x)y' =& a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + (n+1)a_{n+1}x^n + \cdots \\ & + a_1 x + 2a_2 x^2 + 3a_3 x^3 + \cdots + na_n x^n + \cdots \end{aligned}$$

— —

$$\begin{aligned} 0 = (1+x)y' - py =& (a_1 - pa_0) + (a_1 + 2a_2 - pa_1)x + \cdots \\ & + ((n+1)a_{n+1} + na_n - pa_n)x^n + \cdots \end{aligned}$$

Serie binomial

Tenemos la relación

$$a_{n+1} = \frac{(p-n)}{n+1} a_n.$$

$$a_n = \frac{(p-n+1)}{n} a_{n-1} = \frac{(p-n+1)(p-n+2)}{n(n-1)} a_{n-2} = \cdots$$
$$= \frac{(p-n+1)(p-n+2)\cdots p}{n!} a_0.$$

Como $a_0 = y(0) = 1$ vemos que

$$\boxed{a_n = \frac{(p-n+1)(p-n+2)\cdots p}{n!}.} \qquad (6)$$

Serie binomial

Si $p \in \mathbb{N}$ entonces $a_n = 0$ para $n > p$. Esto es claro, por otro lado, ya que en este caso $(1+x)^p$ es un polinomio. Por la fórmula del binomio de Newton los coeficientes para $p \in \mathbb{N}$ no son más que los coeficientes binomiales

$$a_n = \binom{p}{n}$$

Cuando $p \in \mathbb{R}$ aún vamos a seguir denominado a a_n, dado por la fórmula (6), **coeficiente binomial**. La serie resultante se llama la serie binomial. Cuando $p \in \mathbb{R} - \mathbb{N}$ es una serie infinita y no un polinomio. Notar que para p no entero positivo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|p-n|}{|n+1|} = 1$$

Serie binomial

Luego la serie tiene radio de convergencia 1. Hemos demostrado asi que vale la siguiente fórmula, que es una generalización de la fórmula binomial de Newton

$$\boxed{(1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2!}x^2 + \cdots = 1 + \binom{p}{1}x + \binom{p}{2}x^2 + \cdots} \tag{7}$$

Esta importante serie se denomina **serie binomial**.

Serie binomial

```
a=symbols('a0:6')
x,p=symbols('x,p')
y=sum([a[i]*x**i for i in range(6)])
Ecua=(1+x)*y.diff(x)-p*y
Ecuaciones=[Ecua.diff(x,i).subs(x,0)/factorial(i)\
    for i in range(6)]
Ecuaciones=Ecuaciones[:-1]+[a[0]-1]
a_sol=solve(Ecuaciones,a)
y.subs(a_sol)
```

$$y(x) = px + x^5\left(\frac{p^5}{120} - \frac{p^4}{12} + \frac{7p^3}{24} - \frac{5p^2}{12} + \frac{p}{5}\right) + x^4\left(\frac{p^4}{24} - \frac{p^3}{4} + \frac{11p^2}{24} - \frac{p}{4}\right) + x^3\left(\frac{p^3}{6} - \frac{p^2}{2} + \frac{p}{3}\right) + x^2\left(\frac{p^2}{2} - \frac{p}{2}\right) + 1$$

Serie binomial

```
y.subs(a_sol).coeff(x**4).factor()
```

$$\frac{p(p-3)(p-2)(p-1)}{24}$$

Oscilador armónico

Ejemplo Consideremos la ecuación

$$y'' + \omega^2 y = 0.$$

Esta es una ecuación de segundo orden. Veamos si el método de coeficientes indeterminados nos lleva a la solución. Se tiene

$$\begin{aligned} \omega^2 y &= \omega^2 a_0 + \omega^2 a_1 x + \omega^2 a_2 x^2 + \cdots + \omega^2 a_n x^n + \cdots \\ y'' &= 2a_2 + 2\cdot 3a_3 x + \cdots + (n+1)(n+2)a_{n+2}x^n + \cdots \end{aligned}$$

$$-- -----------------------$$

$$0 = y'' + \omega^2 y = (\omega^2 a_0 + 2a_2) + (\omega^2 a_1 + 2\cdot 3a_3)x + \cdots + (\omega^2 a_n + (n+1)$$

Encontramos la relación de recurrencia de dos términos

$$\boxed{a_{n+2} = -\frac{\omega^2 a_n}{(n+1)(n+2)}.} \qquad (8)$$

Oscilador armónico

Si $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$,

$$a_{2k} = -\frac{\omega^2}{2k(2k-1)} a_{2k-2} = \cdots = (-1)^k \frac{\omega^{2k}}{(2k)!} a_0.$$

En cambio si $n = 2k+1$ es impar

$$a_{2k+1} = -\frac{\omega^2}{(2k+1)2k} a_{2k-1} = \cdots = (-1)^k \frac{\omega^{2k}}{(2k+1)!} a_1.$$

Entonces

$$\boxed{\begin{aligned} y(x) &= a_0 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k)!} (\omega x)^{2k} + \frac{a_1}{\omega} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} (\omega x)^{2k+1} \\ &= a_0 \cos \omega x + \frac{a_1}{\omega} \operatorname{sen} \omega x \end{aligned}}$$

Oscilador armónico

```
a=symbols('a0:6')
orden=6
x,omega=symbols('x,omega')
y=sum([a[i]*x**i for i in range(orden)])
Ecua=y.diff(x,2)+omega**2*y
Ecuaciones=[Ecua.diff(x,i).subs(x,0)/factorial(i)\
    for i in range(orden)]
Ecuaciones=Ecuaciones[:-2]
a_sol=solve(Ecuaciones,a[2:])
y.subs(a_sol)
```

$$y(x) = \frac{a_0\omega^4x^4}{24} - \frac{a_0\omega^2x^2}{2} + a_0 + \frac{a_1\omega^4x^5}{120} - \frac{a_1\omega^2x^3}{6} + a_1x$$

Ecuación de Legendre

$$\boxed{(1-x^2)y'' - 2xy' + p(p+1)y = 0,} \tag{10}$$

donde $p > 0$.

$$\begin{aligned}
p(p+1)y &= p(p+1)a_0 + p(p+1)a_1x + p(p+1)a_2x^2 + \cdots + p(p+1)a_nx\\
-2xy' &= -2a_1x - 4a_2x^2 - 6a_3x^3 + \cdots - 2na_nx^n + \cdots\\
(1-x^2)y'' &= 2a_2 + 2\cdot 3a_3x + \cdots + (n+1)(n+2)a_{n+2}x^n + \cdots\\
&\quad - 2a_2x^2 - 2\cdot 3a_3x^3 - \cdots - (n-1)na_nx^n - \cdots
\end{aligned}$$

$- -$

$$\begin{aligned}
0 =&(1-x^2)y'' - 2xy + p(p+1)y\\
=&(p(p+1)a_0 + 2a_2) + (p(p+1)a_1 - 2a_1 2\cdot 3a_3)x + \cdots\\
&+ ((p(p+1) - n(n+1))\, a_n + n(n+1)a_{n+2})x^n + \cdots
\end{aligned}$$

Ecuación de Legendre

$$\boxed{a_{n+2} = -\frac{(p-n)(p+n+1)}{(n+1)(n+2)} a_n} \tag{11}$$

Dividimos la serie en los términos pares e impares

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} x^{2k+1}$$

A cada una de estas series le podemos aplicar el criterio de la razón usando la fórmula de recuerrencia de arriba. Por ejemplo para los términos pares

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|a_{2k+2}x^{2k+2}|}{|a_{2k}x^{2k}|} = \lim_{k\to\infty} \frac{|p_0 - 2k||p_0 + 2k + 1|}{(2k+1)(2k+2)} |x|^2 = |x|^2$$

Ecuación de Legendre

La serie tiene radio de convergencia 1. La misma situación ocurre con la serie de términos impares. Esto muestra que la serie en su conjunto tambien tiene radio de convergencia igual a 1.

Ecuación de Legendre

```
from sympy import *
a=symbols('a0:8')
x,p=symbols('x,p')
y=sum([a[i]*x**i for i in range(8)])
Ecua=(1-x**2)*y.diff(x,2)-2*x*y.diff(x)+p*(p+1)*y
Ecuaciones=[Ecua.diff(x,i).subs(x,0)/factorial(i)\
    for i in range(8)]
Ecuaciones=Ecuaciones[:-2]
a_sol=solve(Ecuaciones,a[2:])
for ind in a[2:]:
    a_sol[ind].factor()
```

Ecuación de Legendre

$$a_2 = -\frac{a_0 p (p+1)}{2}$$

$$a_3 = -\frac{a_1 (p-1)(p+2)}{6}$$

$$a_4 = \frac{a_0 p (p-2)(p+1)(p+3)}{24}$$

$$a_5 = \frac{a_1 (p-3)(p-1)(p+2)(p+4)}{120}$$

$$a_6 = -\frac{a_0 p (p-4)(p-2)(p+1)(p+3)(p+5)}{720}$$

$$a_7 = -\frac{a_1 (p-5)(p-3)(p-1)(p+2)(p+4)(p+6)}{5040}$$

Ecuación de Legendre

$$\boxed{\begin{aligned} a_{2n} &= \frac{(p+1)(p+3)\cdots(p+2n-1)\times p(p-2)\cdots(p-2n+2)}{(2n)!}a_0 \\ a_{2n+1} &= \frac{(p+2)(p+4)\cdots(p+2n)\times(p-1)(p-3)\cdots(p-2n+1)}{(2n+1)!}a_1 \end{aligned}} \tag{12}$$

Ecuación de Legendre, caso $p \in \mathbb{N}$

En esa situación

$$\boxed{\forall n : n > p \wedge n \equiv p(2) \Rightarrow a_n = 0} \tag{13}$$

Hay dos casos

Caso p es entero positivo impar Tomamos $a_0 = 0$

Caso p es entero positivo par Tomamos $a_1 = 0$

Eligiendo de esta manera

$$\boxed{\forall n : n > p \Rightarrow a_n = 0} \tag{14}$$

Es decir la solución es un polinomio.

Polinomios de Legendre

Definición: polinomios de Legendre

El **polinomio de Legendre** P_n de orden n se define como la solución $y(x)$ descripta arriba donde además se elige a_0 (o a_1 acorde a cual de los dos no lo tomamos igual a 0) de modo que $y(1) = 1$.

Programando polinomios de Legendre

```
def Legendre(n):
    orden=n+2
    a=symbols('a0:%s' %orden)
    x=symbols('x')
    y=sum([a[i]*x**i for i in range(orden)])
    Ecua=(1-x**2)*y.diff(x,2)\
        -2*x*y.diff(x)+n*(n+1)*y
    Ecuaciones=[Ecua.diff(x,i).subs(x,0)/factorial(i)\
        for i in range(orden-2)]
    s=symbols('s')
    if n%2==0:
        Ecuaciones+=[a[0]-s,a[1]]
    else:
        Ecuaciones+=[a[0],a[1]-s]
    Sol_a_n=solve(Ecuaciones,a)
    y=y.subs(Sol_a_n)
    sol=solve(y.subs(x,1)-1,s)
    return y.subs(s,sol[0])
```

Programando polinomios de Legendre

```
for n in range(1,6):
    Legendre(n)
```

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{3x^2}{2} - \frac{1}{2}$$

$$P_3(x) = \frac{5x^3}{2} - \frac{3x}{2}$$

$$P_4(x) = \frac{35x^4}{8} - \frac{15x^2}{4} + \frac{3}{8}$$

$$P_5(x) = \frac{63x^5}{8} - \frac{35x^3}{4} + \frac{15x}{8}$$

Graficando polinomios de Legendre

```
p=plot(Legendre(1),(x,-1,1),show=False)
for n in range(2,8):
    p1=plot(Legendre(n),(x,-1,1),show=False)
    p.append(p1[0])
p.show()
```

Graficando polinomios de Legendre

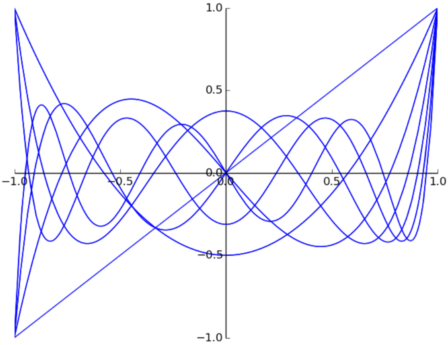

Figura: Polinomios de Legendre hasta el orden 8

Puntos ordinarios

Definición (puntos ordinarios)

Dada la ecuación diferencial

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$$

donde p, q son funciones definidas en algún intervalo abierto I, diremos que $x_0 \in I$ es un **punto ordinario** de la ecuación si p y q son analíticas en x_0. Un punto no ordinario se llama **singular**.

Puntos ordinarios

Ejemplo En la ecuación del oscilador armónico

$$y'' + \omega^2 y = 0$$

todo punto es ordinario.
Ejemplo En la ecuación de Legendre

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + p(p + 1)y = 0$$

1 y -1 son puntos singulares, otros valores de x son puntos ordinarios.

Teorema Fundamental Sobre Puntos Ordinarios

Teorema

Sea x_0 un punto ordinario de la ecuación

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$$

y sean $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$. Existe una solución de la ecuación que es analítica en un entorno de x_0 y que satisface $y(x_0) = a_0$ e $y'(x_0) = a_1$. El radio de convergencia del desarrollo en serie de y es al menos tan grande como el mínimo de los radios de convergencia de los desarrollos en serie de p y q.

Demostración Teorema Fundamental

Supongamos que $x_0 = 0$. Desarrollemos en serie p y q.

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \quad \text{y} \quad q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n. \tag{15}$$

Supongamos que ambas series convergen en $|x| < R$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = a_1 + 2a_2 x + \cdots + (n+1) a_{n+1} x^n + \cdots$$

$$\begin{aligned} y'' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n \\ &= 2a_2 + 2 \cdot 3 a_3 x + \cdots + (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n + \cdots . \end{aligned}$$

Demostración Teorema Fundamental

$$q(x)y = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k q_{n-k}\right) x^n,$$

$$\begin{aligned} p(x)y' &= \left(\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}(k+1)a_{k+1}p_{n-k}\right)x^n. \end{aligned}$$

Obtenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{(n+1)(n+2)a_{n+2} + \sum_{k=0}^{n} a_k q_{n-k} + \sum_{k=0}^{n}(k+1)a_{k+1}p_{n-k}\right\}x^n.$$

Singularidades

Sigularidades, Polos

Diremos que f posee un **polo de orden k** en $x_0 \in \mathbb{R}$, si la función $(x - x_0)^k f(x)$ es analítica en un entorno de x_0. Es decir

$$(x - x_0)^k f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n.$$

En consecuencia

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^{n-k} = \frac{a_0}{(x - x_0)^k} + \cdots + \frac{a_{k-1}}{(x - x_0)} + a_k + a_{k+1}(x - x_0) + \cdots .$$

Este tipo de desarrollo es una **serie de Laurent**.
Cuando el orden de un polo es 1 se lo denomina **polo simple**.

Singularidades de ecuaciones

Singularidades regulares

Un punto singular x_0 de la ecuación

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$$

se llama **singular regular** si $p(x)$ tiene un polo a lo sumo simple en x_0 y $q(x)$ tiene un polo a lo sumo de orden 2 en x_0. Es decir

$$(x - x_0)p(x) \quad \text{y} \quad (x - x_0)^2 q(x)$$

son analíticas en x_0.

Singularidades de ecuaciones, ejemplos

Algunas de las ecuaciones más importantes de la Física-Matemática tienen puntos singulares regulares.

Ejemplo 1 y -1 son puntos singulares regulares de la ecuación de Legendre de orden p

$$y'' - \frac{2x}{1-x^2}y' + \frac{p(p+1)}{1-x^2}y = 0$$

Ejemplo 0 es un punto singular regular de la ecuación de Bessel de orden p

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{p^2}{x^2}\right)y = 0$$

Ejemplo: ecuación de Euler

Ejemplo Consideremos la ecuación de Euler, para $p, q \in \mathbb{R}$

$$y'' + \frac{p}{x}y' + \frac{q}{x^2}y = 0$$

o equivalentemente

$$x^2y'' + pxy' + qy = 0$$

Aquí es facil verificar que las funciones

$$P(x) := \frac{p}{x} \quad \text{y} \quad Q(x) := \frac{q}{x^2}$$

satisfacen que

$$\frac{Q' + 2PQ}{Q^{\frac{3}{2}}} \quad \text{es constante.}$$

Ejemplo: ecuación de Euler

Ejercicio Si en una ecuación de segundo orden $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ se tiene

$$\frac{Q' + 2PQ}{Q^{\frac{3}{2}}} \quad \text{es constante,}$$

entonces el cambio de variables

$$z = \int \sqrt{Q}dx,$$

reduce la ecuación a una de coeficientes constantes.
En la ecuación de Euler, el cambio de variables que debemos hacer es

$$z = \ln(x)$$

Ejemplo: ecuación de Euler

Asumimos $x > 0$. La ecuación de Euler se transforma en

$$y'' + (p-1)y' + qy = 0.$$

Cuya ecuación característica es

$$\lambda^2 + (p-1)\lambda + q = 0$$

Cuyas raíces son

$$s_1 = -\frac{p-1}{2} \pm \frac{\sqrt{p^2 - 2p - 4q + 1}}{2} \quad .$$

Si $s_1 \neq s_2$ dos soluciones linealmente independientes son:

$$y_1(z) = e^{s_1 z} \quad \text{y} \quad y_2(z) = e^{s_2 z}$$

Si $s_1 = s_2$

$$y_1(z) = e^{s_1 z} \quad \text{y} \quad y_2(z) = ze^{s_1 z}$$

Ejemplo: ecuación de Euler

Asumamos que las raices s_1 y s_2 son reales, entonces como $z = \ln(x)$, las soluciones en términos de la variable x son

$$y_1(x) = x^{s_1} \quad \text{y} \quad y_2(x) = x^{s_2} \quad \text{para } s_1 \neq s_2$$

y

$$y_1(x) = x^{s_1} \quad \text{y} \quad y_2(x) = \ln(x)x^{s_1} \quad \text{para } s_1 = s_2$$

Observaciones

- Las funciones $y = x^s$, $s \in \mathbb{R}$y $y = \ln(x)x^s$ no son analíticas en general en $x = 0$.
- **El ejemplo nos enseña que en las ecuaciones (o al menos en la de Euler) con singularidades regulares aparecen potencias no enteras y logarítmos**

Serie de Frobenius

Definición

A una expresión de la forma

$$y(x) = (x - x_0)^m (a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots),$$

donde $m \in \mathbb{R}$ y $a_0 \neq 0$, lo llamaremos **Serie de Frobenius**.

Método de Frobenius

Consiste en proponer como solución de una ecuación diferencial una serie de Frobenius. Este método tiene éxito, por ejemplo, en los puntos sigulares regulares de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden.

Método de Frobenius

Ejemplo Consideremos la ecuación

$$y'' + \left(\frac{1}{2x} + 1\right) y' - \left(\frac{1}{2x^2}\right) y = 0. \qquad (16)$$

$x = 0$ es regular singular.
Proponemos como solución

$$y(x) = x^m \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+m}$$

Método de Frobenius

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+m}$$

$$-\frac{1}{2x^2} y = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2} x^{m+n-2} = x^{m-2} \sum_{n=0}^{\infty} \boxed{\left(-\frac{a_n}{2}\right)} x^n$$

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (m+n) a_n x^{m+n-1} = x^{m-2} \sum_{n=0}^{\infty} \boxed{(m+n) a_n} x^{n+1}$$

$$\frac{1}{2x} y' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(m+n) a_n}{2} x^{m+n-2} = x^{m-2} \sum_{n=0}^{\infty} \boxed{\frac{(m+n) a_n}{2}} x^n$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (m+n)(m+n-1) a_n x^{m+n-2}$$

$$= x^{m-2} \sum_{n=0}^{\infty} \boxed{(m+n)(m+n-1) a_n} x^n.$$

Método de Frobenius

Obtenemos infinitas ecuaciones para los *an*. **Conviene separar la primera del resto**

$$\begin{gathered} \frac{1}{2}(2m+1)(m-1)a_0 = 0 \\ (2a_{n-1} + (2(m+n)+1)a_n)(m+n-1) = 0, \quad n \geq 1 \end{gathered} \tag{17}$$

Método de Frobenius

Obtenemos infinitas ecuaciones para los *an*. **Conviene separar la primera del resto**

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}\left(2m+1\right)\left(m-1\right)a_0 = 0 \\ &\left(2a_{n-1} + \left(2(m+n)+1\right)a_n\right)\left(m+n-1\right) = 0, \quad n \geq 1 \end{aligned} \tag{17}$$

Ecuación Indicial

Método de Frobenius

$$\boxed{a_n = -\frac{2a_{n-1}}{2(m+n)+1}, \quad n \geq 1.} \tag{18}$$

Ecuación Indicial $\Rightarrow m = 1 \wedge m = -\frac{1}{2}$.
Si $m = 1$.

$$a_n = -\frac{2a_{n-1}}{2n+3}, \quad n = -1, 0, \ldots.$$

Para el radio de convergencia

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n x^n|}{|a_{n-1}x^{n-1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{2|x|}{2n+3} = 0.$$

Por consiguiente $R = \infty$.

Método de Frobenius

Iterando la relación de recurrencia llegamos

$$a_n = -\frac{2}{2n+3}a_{n-1} = \frac{2}{(2n+3)(2n+1)}a_{n-2} = \cdots$$
$$= \frac{(-1)^n 2^n}{(2n+3)(2n+1)\cdots 5}a_0.$$

Si elegimos $a_0 = 1$ obtenemos la solución

$$\boxed{y_1(x) = x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{(2n+3)(2n+1)\cdots 5}x^n.} \tag{19}$$

Método de Frobenius

Cuando $m = -\frac{1}{2}$, la relación de recurrencia es

$$a_n = -\frac{a_{n-1}}{n}.$$

Por ende, si $a_0 = 1$,

$$a_n = -\frac{a_{n-1}}{n} = \frac{1}{n(n-1)}a_{n-2} = \cdots = \frac{(-1)^n}{n!}a_0 = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Conseguimos la solución

$$\boxed{y_2(x) = x^{-\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^n = \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}} \qquad (20)$$

Como $y_1(0) = 0$ y $\lim_{x\to 0+} y_2(x) = +\infty$ no es posible $c_1y_1 + c_2y_2 = 0$ a menos que $c_1 = c_2 = 0$. Las soluciones son L.I.

Usando SymPy

```
orden=5
a=symbols('a0:%s' %orden)
x,m=symbols('x,m')
y=x**m*sum([a[i]*x**i for i in range(orden)])
Ecua=y.diff(x,2)+(1/(2*x)+1)*y.diff(x,1)\
    -(1/(2*x**2))*y
Ecua=Ecua/x**(m-2)
Ecua=Ecua.expand()
Ecuaciones=[Ecua.diff(x,i).subs(x,0)/factorial(i)\
    for i in range(orden)]
```

Usando SymPy

$$0 = \frac{a_0 (m-1)(2m+1)}{2}$$

$$0 = \frac{m (2a_0 + 2a_1 m + 3a_1)}{2}$$

$$0 = \frac{(m+1)(2a_1 + 2a_2 m + 5a_2)}{2}$$

$$0 = \frac{(m+2)(2a_2 + 2a_3 m + 7a_3)}{2}$$

$$0 = \frac{(m+3)(2a_3 + 2a_4 m + 9a_4)}{2}$$

Usando SymPy

```
Sol_Ecua_Ind=solve(Ecuaciones[0],m)
```

$$m \in \left[-\frac{1}{2},\ 1\right].$$

```
Ecuaciones1=[ec.subs(m,Sol_Ecua_Ind[1])\
    for ec in Ecuaciones]
Ecuaciones1[0]=a[0]-1
sol=solve(Ecuaciones1,a)
y1=y.subs(sol).subs(m,Sol_Ecua_Ind[1])
```

Usando SymPy

$$y_1(x) = x\left(\frac{16x^4}{3465} - \frac{8x^3}{315} + \frac{4x^2}{35} - \frac{2x}{5} + 1\right)$$

La segunda solución

```
Ecuaciones2=[ec.subs(m,Sol_Ecua_Ind[0])\
    for ec in Ecuaciones]
Ecuaciones2[0]=a[0]-1
sol=solve(Ecuaciones2,a)
y2=y.subs(sol).subs(m,Sol_Ecua_Ind[0])
```

$$y_2(x) = \frac{\frac{x^4}{24} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} - x + 1}{\sqrt{x}}$$

Ecuación de Bessel

Definición

Recordemos a la ecuación de Bessel de orden p $(p > 0)$

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{p^2}{x^2}\right)y = 0$$

En $x = 0$ la ecuación de Bessel tiene un punto singular regular. Vamos a aplicarle el método de Frobenius. Trabajeremos exclusivamente con SymPy.

Ecuación de Bessel

```
orden=8
a,x,m,p=symbols(['a0:%s' %orden, 'x','m','p'] )
y=x**m*sum([a[i]*x**i for i in range(orden)])
EDif=y.diff(x,2)+1/x*y.diff(x,1)+(1-p**2/x**2)*y
EDif=(EDif/x**(m-2)).simplify()
ECoef=[EDif.diff(x,i).subs(x,0)/factorial(i)\
    for i in range(orden)]
SolEInd=solve(ECoef[0],m)
```

Las raíces de la ecuación indicial son

$$\boxed{m=-p \quad \text{y} \quad m=p} \tag{21}$$

Ecuación de Bessel, $m = p$

```
ECoefA=[ec.subs(m,SolEInd[1]) for ec in ECoef]
```

$$
\begin{aligned}
0 &= 0\\
0 &= a_1\left(2p+1\right)\\
0 &= a_0 + 4a_2p + 4a_2\\
0 &= a_1 + 6a_3p + 9a_3\\
0 &= a_2 + 8a_4p + 16a_4\\
0 &= a_3 + 10a_5p + 25a_5\\
0 &= a_4 + 12a_6p + 36a_6\\
0 &= a_5 + 14a_7p + 49a_7
\end{aligned}
$$

Ecuación de Bessel, $m = p$

Se puede observar que estas ecuaciones relacionan a_n con a_{n-2}, i.e. que son relaciones de dos términos. Podemos hacer explícita la relación

```
for i in range(1,orden):
    iter=solve(ECoefA[i],a[i])[0].factor()
    print(str(a[i])+'='+str(iter))
```

Ecuación de Bessel, $m = p$

$$a_1 = 0$$

$$a_2 = -\frac{a_0}{4(p+1)}$$

$$a_3 = -\frac{a_1}{3(2p+3)}$$

$$a_4 = -\frac{a_2}{8(p+2)}$$

$$a_5 = -\frac{a_3}{5(2p+5)}$$

$$a_6 = -\frac{a_4}{12(p+3)}$$

$$a_7 = -\frac{a_5}{7(2p+7)}$$

Ecuación de Bessel, $m = p$

Observación. La ecuación $a_1(2p+1) = 0$ no fue correctamente resuelta por SymPy. SymPy consigna la solución $a_1 = 0$, pero si $p = -1/2$ cualquier a_1 es solución. Este caso lo estudiaremos separadamente después, por ahora supondremos $p \neq -1/2$.

Ecuación de Bessel, $m = p$

Tendremos $a_n = 0$ cuando n es impar.

La relación de recurrencia es

$$\boxed{a_{2n} = -\frac{1}{4n(p+n)}a_{2n-2}} \tag{22}$$

Iterando esta relación

$$\begin{aligned} a_{2n} &= -\frac{1}{4n(p+n)}a_{2n-2} \\ &= \frac{1}{4n(p+n-1)} \cdot \frac{1}{4(n-1)(p+n-1)}a_{2n-4} = \cdots \\ &= (-1)^n \frac{1}{4^n n!(p+n)(p+n-1)\cdots(p+1)}a_0. \end{aligned}$$

Ecuación de Bessel, $m = p$

Obtenemos la solución

$$\boxed{y(x) = x^p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a_0}{4^n n!(p+n)(p+n-1)\cdots(p+1)} x^{2n}} \tag{23}$$

Más adelante veremos que cierta elección especial de a_0 no lleva a lo que denominaremos **funciones de Bessel**.

Función Gamma

Definición

Para $p > 0$ definimos la **función Gamma** por

$$\Gamma(p) := \int_0^\infty t^{p-1} e^{-t} dt \tag{24}$$

Propiedades

$$\boxed{\begin{aligned} \Gamma(1) &= 1 \\ \Gamma(p+1) &= p\Gamma(p) \end{aligned}} \tag{25}$$

Si $p = n \in \mathbb{N}$

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = \cdots = n!\Gamma(1) = n!.$$

Función Gamma

Definición $\Gamma(p)$ para $-1 < p < 0$

$$\boxed{\Gamma(p) := \frac{\Gamma(p+1)}{p}.} \tag{26}$$

Observar que el segundo miembro esta bien definido pues $p + 1 > 0$.

Función Gamma

$$\lim_{p\to 0+} \Gamma(p) = \lim_{p\to 0+} \frac{\Gamma(p+1)}{p} = +\infty.$$

$$\lim_{p\to 0-} \Gamma(p) = \lim_{p\to 0-} \frac{\Gamma(p+1)}{p} = -\infty.$$

y

$$\lim_{p\to -1+} \Gamma(p) = \lim_{p\to -1+} \frac{\Gamma(p+1)}{p} = -\infty.$$

Función Gamma

Ahora podemos extender Γ a $p \in (-2, 1)$. Pues podemos usar la fórmula (26) y el hecho de que ya tenemos definida la función Gamma en $(-1, 0)$. Continuando de esta forma, definimos Γ para cualquier valor de $p < 0$ y $p \notin \mathbb{Z}$. Si n es un entero negativo ocurre que

$$\lim_{p \to n+} \Gamma(p) = (-1)^n \infty \quad \text{y} \quad \lim_{p \to n-} \Gamma(p) = (-1)^{n-1} \infty.$$

Función Gamma

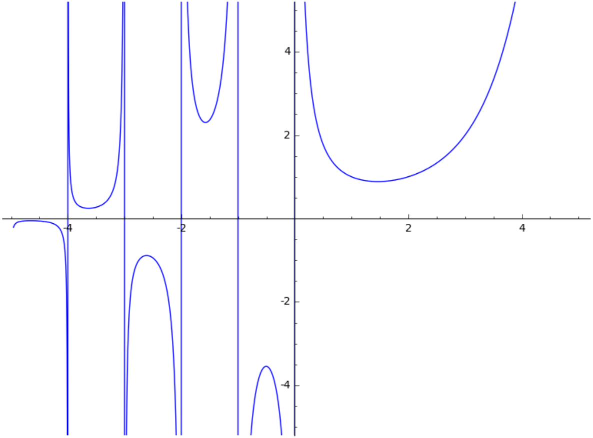

Figura: La función gamma Γ

Función de Bessel de primera especie

Definición

Tomando $a_0 = 1/2^p\Gamma(p+1)$ en (23) definimos la **función de Bessel de primera especie**

$$J_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(p+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}$$

```
p,x=symbols('p,x')
J= sum([(-1)**n/factorial(n)/gamma(p+n+1)\
    *(x/2)**(2*n+p) for n in range(30)])
```

Función de Bessel de primera especie

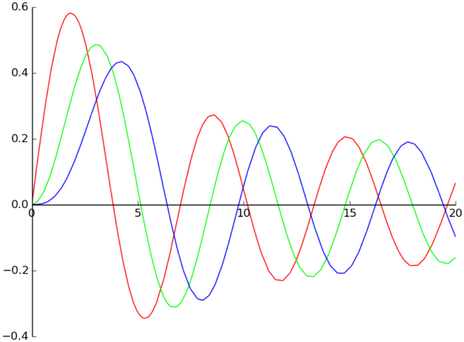

Figura: Funciones de Bessel J_p, $p = 1, 2, 3$

Caso $m=-p$ y $2p \notin \mathbb{N}$

```
ECoefA=[ec.subs(m,SolEInd[0]) for ec in ECoef]
```

$$
\begin{aligned}
0 &= 0\\
0 &= -a_1\left(2p-1\right)\\
0 &= a_0 - 4a_2p + 4a_2\\
0 &= a_1 - 6a_3p + 9a_3\\
0 &= a_2 - 8a_4p + 16a_4\\
0 &= a_3 - 10a_5p + 25a_5\\
0 &= a_4 - 12a_6p + 36a_6\\
0 &= a_5 - 14a_7p + 49a_7
\end{aligned}
$$

Caso $m = -p$ y $2p \notin \mathbb{N}$

Son las mismas ecuaciones (22) con $-p$ en lugar de p.

$$\boxed{a_n = \frac{a_{n-2}}{n(2p-n)}} \tag{27}$$

Atención! Si $p \in \frac{1}{2}\mathbb{N} = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots$ la expresión en el denominador en la relación se puede anular. Esto ocurre cuando $p - (-p) = 2p \in \mathbb{N}$.

Caso $m = -p$ y $p \notin \mathbb{N}$

Si $p = \frac{2k+1}{2}$ el problema se resuelve. Pues para $n = 2k+1$

$$0 = n(2p - n)a_n = a_{n-2} = \frac{a_{n-4}}{(n-2)(2p-n+2)} = \cdots = \text{Factor} \times a_1 = 0$$

De modo que la ecuación para $n = 2k+1$ se satisface.
Cuando $p = 0$ hay una única solución en serie de Frobenius pues $p = -p$.

Caso $m = -p$ y $p \notin \mathbb{N}$

Función de Bessel J_{-p} $(p \notin \mathbb{N})$

Si $p \notin \mathbb{N}$ definimos

$$\boxed{J_{-p}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(-p+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-p}} \tag{28}$$

Más adelante justificaremos que J_p y J_{-p} son linealmente independientes, por tanto

$$\boxed{y = c_1 J_p + c_2 J_{-p}} \tag{29}$$

es la solución general de la ecuación de Bessel

Caso $m = -p$ y $p \notin \mathbb{N}$

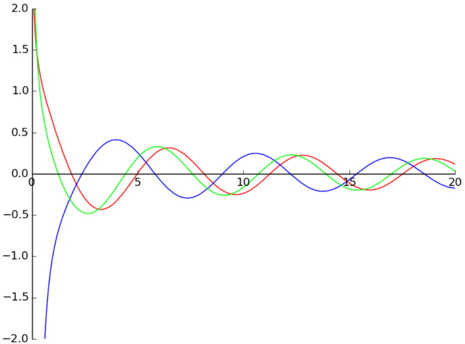

Figura: Funciones de Bessel $J_{-1/3}$, $J_{-2/3}$ y $J_{-5/3}$.

Funciones de Bessel de segunda especie

Ahora volvamos al caso $p \in \mathbb{Z}$ La idea es expresar la segunda solución para $p = n \in \mathbb{Z}$ como límite de soluciones de la forma (29) cuando $p \to n$. Más concretamente.

Definición

Para $p \notin \mathbb{Z}$ definimos la función de Bessel Y_p de segunda especie por

$$Y_p = \frac{\cos p\pi \, J_p - J_{-p}}{\operatorname{sen} p\pi}. \tag{30}$$

La función Y_p es una solución puesto que es una expresión del tipo (29). Además es no acotada cerca de 0 dado que J_p es acotada y J_{-p} no.

Funciones de Bessel de segunda especie

La razón de esta llamativa definición es el siguiente resultado.

Lema

Para n entero no negativo, el límite $\lim_{p\to n} Y_p$ existe. Por consiguiente, podemos definir

$$Y_n(x) := \lim_{p\to n} Y_p(x). \tag{31}$$

Esta función es solución de la ecuación de Bessel de orden n y se denomina, también, **función de Bessel de segunda especie o Funciones de Neumann**. También resulta ser una función no acotada cerca de 0 y por consiguiente, linealmente idependiente de J_n.

Funciones de Bessel de segunda especie

Se puede demostrar que

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi}\left[\left(\gamma + \ln\frac{x}{2}\right)J_0(x) + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}H_m}{2^{2m}(m!)^2}x^{2m}\right], \quad x > 0$$

donde

$$H_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \cdots + \frac{1}{2} + 1$$

y γ es la **constante de Euler-Máscheroni** que se define por la ecuación

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}(H_n - \ln n) \cong 0{,}5772\ldots.$$

Relación recurrencia general

Supongamos $x = 0$ un punto regular singular de la ecuación

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \tag{32}$$

Supongamos que

$$xp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \quad \text{y} \quad x^2 q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$$

Proponemos como solución

$$y = x^m \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{m+n}.$$

Relación recurrencia general

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (m+n) a_n x^{m+n-1} \tag{33a}$$

$$\begin{aligned} y'' &= \sum_{n=0}^{\infty} (m+n)(m+n-1) a_n x^{m+n-2} \\ &= x^{m-2} \sum_{n=0}^{\infty} (m+n)(m+n-1) a_n x^n. \end{aligned} \tag{33b}$$

Relación recurrencia general

$$\begin{aligned} p(x)y'(x) &= \frac{1}{x}\left(\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}(m+n)a_n x^{m+n-1}\right) \\ &= x^{m-2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}(m+n)a_n x^n\right) \\ &= x^{m-2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} p_{n-k}(m+k)a_k\right)x^n \\ &= x^{m-2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1} p_{n-k}(m+k)a_k + p_0(m+n)a_n\right)x^n \end{aligned} \tag{34}$$

Relación recurrencia general

$$\begin{aligned} q(x)y(x) &= \frac{1}{x^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{m+n}\right) \\ &= x^{m-2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \\ &= x^{m-2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} q_{n-k}a_k\right)x^n \\ &= x^{m-2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1} q_{n-k}a_k + q_0 a_n\right)x^n \end{aligned} \tag{35}$$

Relación recurrencia general

A partir de (43), (35),(34) y (33b) obtenemos

$$\begin{aligned}0 =&x^{m-2}\sum_{n=0}^{\infty}\Big\{ \left[(m+n)(m+n-1)+p_0(m+n)+q_0\right]a_n \\ &+\sum_{k=0}^{n-1}a_k\left[p_{n-k}(m+k)+q_{n-k}\right]\Big\}x^n.\end{aligned} \tag{36}$$

Entonces se debe satisfacer

$$\boxed{\begin{aligned}&\left[(m+n)(m+n-1)+p_0(m+n)+q_0\right]a_n \\ &+\sum_{k=0}^{n-1}a_k\left[p_{n-k}(m+k)+q_{n-k}\right]=0,\end{aligned}} \tag{37}$$

Relación recurrencia general

Definimos

$$\boxed{f(m) = m(m-1) + p_0 m + q_0.} \tag{38}$$

Entonces (37) se escribe

$$\boxed{f(m+n)a_n = -\sum_{k=0}^{n-1} a_k \left[p_{n-k}(m+k) + q_{n-k}\right], \quad n = 0, 1, \ldots} \tag{39}$$

Relación recurrencia general

La primera de estas ecuaciones es

Definición

Definimos la **ecuación indicial** por

$$f(m) = m(m-1) + p_0 m + q_0 = 0. \tag{40}$$

¿Cuándo es posible resolver las relaciones de recurrencia?

Suposición: las raíces de la ecuación indicial son reales y $m_2 \leq m_1$.
El único problema que podría ocurrir es que

$$f(m+n) = 0$$

para algún valor de $n = 1, 2, \ldots$.
Esto ocurre solo si $m = m_2$ y $m_1 - m_2 \in \mathbb{N}$.

Caso problemático $m = m_2$, $m_1 = m_2 + n$

Las n-ésima relación de recurrencia es:

$$0 = -\sum_{k=0}^{n-1} a_k \left[p_{n-k}(m+k) + q_{n-k} \right]. \tag{41}$$

Pero los coeficientes a_k, $k = 0, \ldots, n-1$ ya fueron determinados y la relación **podría** no cumplirse.

Relación recurrencia general

Conclusiones

- Si $m = m_1$ existe una solución para a_n, $n \geq 1$ para cualquier a_0 dado y $m = m_1$.
- Si $m_1 - m_2 \notin \mathbb{N}$ existe una solución para a_n, $n \geq 1$ para cualquier a_0 dado y $m = m_2$.
- Si $m_1 = m_2$ hay sólo una solución en serie de Frobenius.
- Si $m_1 - m_2 = n \in \mathbb{N}$ puede haber o no haber una segunda solución.

Independencia lineal

Si $m_2 < m_1$ y hay dos soluciones, ellas resultan L.I. pues si estas soluciones son

$$y_1 = x^{m_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{y} \quad y_2 = x^{m_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n,$$

con $a_0 \neq 0 \neq b_0$ y si y_1/y_2 fuera una constante c no nula. Entonces

$$c = \lim_{x \to 0} \frac{y_1}{y_2} = \lim_{x \to 0} x^{m_1 - m_2} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n} = 0.\frac{a_0}{b_0} = 0.$$

Si no hay una segunda solución en serie de Frobenius

Método de reducción de orden a partir de la solución conocida $y_1 = x^{m_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

$$y_2(x) = v(x) y_1(x), \quad \text{donde } v'(x) = \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)dx}.$$

Teniendo en cuenta que

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^{n-1} = \frac{p_0}{x} + p_1 + p_2 x + \cdots .$$

Si no hay una segunda solución en serie de Frobenius

$$
\begin{aligned}
v'(x) &= \frac{1}{x^{2m_1}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)^2} e^{-\int\left(\frac{p_0}{x}+p_1+p_2x+\cdots\right)dx} \\
&= \frac{1}{x^{2m_1}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)^2} e^{-p_0 \ln x - p_1 x - \cdots} \\
&= \frac{1}{x^{2m_1+p_0}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)^2} e^{-p_1 x - \cdots}
\end{aligned}
$$

La función

$$
g(x) = \frac{e^{-p_1 x - \cdots}}{\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)^2},
$$

es analítica en 0 puesto que el denominador no se anula en cero.

Si no hay una segunda solución en serie de Frobenius

Por consiguiente tenemos un desarrollo en serie

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \quad b_0 \neq 0.$$

Llamemos

$$k := 2m_1 + p_0.$$

Se tiene que

$$m_1 + m_2 = 1 - p_0.$$

$$2m_1 + p_0 = 2m_1 + 1 - m_1 - m_2 = m_1 - m_2 + 1 \in \mathbb{N}$$

.

Si no hay una segunda solución en serie de Frobenius

Tenemos que

$$v'(x) = \frac{b_0}{x^k} + \frac{b_1}{x^{k-1}} + \cdots + \frac{b_{k-1}}{x} + b_k + \cdots$$

Entonces

$$v(x) = \frac{b_0}{(-k+1)x^{k-1}} + \frac{b_1}{(-k+2)x^{k-2}} + \cdots + b_{k-1}\ln x + b_k x + \cdots$$

Si no hay una segunda solución en serie de Frobenius

Reemplazando esta identidad en la expresión para y_2,

$$
\begin{aligned}
y_2 &= vy_1 \\
&= y_1 \left(\frac{b_0}{(-k+1)x^{k-1}} + \frac{b_1}{(-k+2)x^{k-2}} + \cdots + b_{k-1} \ln x + b_k x + \cdots \right) \\
&= b_{k-1} \ln x y_1 + x^{m_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \left(\frac{b_0}{(-k+1)x^{k-1}} + \frac{b_1}{(-k+2)x^{k-2}} \cdots \right) \\
&= b_{k-1} \ln x y_1 + x^{m_1-k+1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \left(\frac{b_0}{(-k+1)} + \frac{b_1}{(-k+2)} x + \cdots \right)
\end{aligned}
$$

Ahora $m_1 - k + 1 = m_1 - 2m_1 - p_0 + 1 = -p_0 - m_1 + 1 = m_2$.

Si no hay una segunda solución en serie de Frobenius

Conclusión

Si no se puede encontrar un segunda solución en Serie de Frobenius tenemos una segunda solución de la forma.

$$\boxed{y_2(x) = b_{k-1} y_1 \ln x + x^{m_2} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.} \tag{42}$$

Convergencia solución en serie de Frobenius

Teorema (Frobenius)

Supongamos $x = 0$ un punto regular singular de la ecuación

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \qquad (43)$$

Supongamos que $xp(x)$ y $x^2q(x)$ poseen los siguientes desarrollos en serie

$$xp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \quad \text{y} \quad x^2 q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$$

y que estas series convergen para $|x| < R$ $(R > 0)$.

Convergencia solución en serie de Frobenius

Teorema (Frobenius)

Supongamos que la ecuación indicial tiene la raíces reales m_1, m_2 con $m_2 \leq m_1$. Entonces la ecuación (43) tiene una solución dada por

$$y_1 = x^{m_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad a_0 \neq 0.$$

La serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge en $|x| < R$. Si $m_1 - m_2$ no es un entero no negativo entonces tenemos una segunda solución en serie de Frobenius con m_2 en lugar de m_1 y satisfaciendo las mismas condiciones que la primera serie.