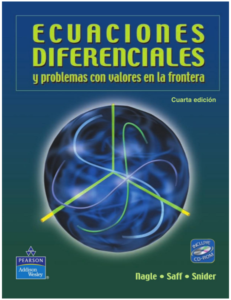
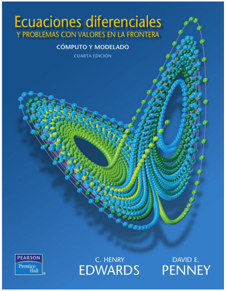
Problemas de Sturm-Liouville

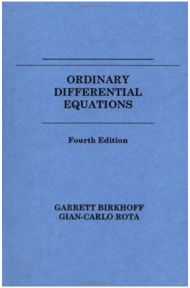
Depto de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas Físico-Químicas y Naturales
Universidad Nacional de Río Cuarto

20 de septiembre de 2022

Bibliografía







Ecuación del Calor

Recordemos la ecuación diferencial del Calor

$$\frac{\partial c\rho u}{\partial t} - \mathrm{div}(k\nabla u) = S$$

con:

- u temperatura del medio
- c calor específico
- ρ densidad
- k coeficiente conductividad térmica
- S fuente externa de calor

c, ρ, k, S son funciones del tiempo t y el espacio (x, y, z).

Ley Enfriamiento de Newton

En algunos problemas la fuente externa S además de contener términos $h(x, y, y, t)$ que dependen de la posición y el tiempo contiene otros que dependen de la temperatura u.
Por ejemplo en la Ley Enfriamiento de Newton el calor que ingresa a un cuerpo es proporcional a la diferencia de temperatura entre el cuerpo y el medio circundante.
La ecuación se transforma

$$\boxed{\frac{\partial c\rho u}{\partial t} - \operatorname{div} k\nabla u - qu = h.} \tag{1}$$

También q podría ser función de t y (x, y, z).

Ecuación del calor uni-dimensional

Para mayor simplicidad nos restringiremos al caso de un alambre recto y tan delgado que la asumimos uni-dimensional. La única variable espacial es $x \in [a, b]$ y $t > 0$.

$$c(x)\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left[k(x)\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right] + q(x)u(x,t) + h(x,t). \qquad (2)$$

Condiciones de contorno e iniciales

Condiciones de contorno: en $x = a$ o $x = b$

Extremos fijos (Dirichlet) $u = 0$

Alambre aislado (Neuman) $\partial u / \partial x = 0$

Condiciones mixtas $\partial u / \partial x + cu = 0$.

Para generalizar la situación, supondremos

$$\begin{cases} a_1 u(a,t) + a_2 \frac{\partial u}{\partial x}(a,t) & = 0 \\ b_1 u(b,t) + b_2 \frac{\partial u}{\partial x}(b,t) & = 0 \end{cases} \tag{3}$$

Condiciones iniciales

$$u(x,0) = f(x)$$

Problema

Para simplificar nuestro problema supondremos que $h(x,t) \equiv 0$. Vamos a estudiar el siguiente problema de contorno y valores iniciales.

$$\begin{cases} r(x)\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left[p(x)\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right] + q(x)u(x,t) & a < x < b, t > 0, \\ a_1 u(a,t) + a_2 \frac{\partial u}{\partial x}(a,t) = 0 & t > 0, \\ b_1 u(b,t) + b_2 \frac{\partial u}{\partial x}(b,t) = 0 & t > 0, \\ u(x,0) = f(x) & a < x < b. \end{cases}$$

donde $r(x) = c(x)\rho(x)$ y $p(x) = k(x)$.

Problemas Sturm-Liouville

Ejercicio [Separación Variables]

Supongamos $u(x,t) = y(x)T(t)$ resuelve la ecuación, reemplazando en la ecuación principal demostrar que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ (es un número por determinar)

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] + q(x)y + \lambda r(x)y = 0 \quad a < x < b, \\ a_1 y(a) + a_2 y'(a) = 0, \\ b_1 y(b) + b_2 y'(b) = 0 \end{cases}$$

Este sistema se llama un problema de Sturm-Liouville con valores en la frontera.
Excluimos las condiciones triviales en la frontera, donde $a_1 = a_2 = 0$ o $b_1 = b_2 = 0$.

Clasificación problemas Sturm-Liouville

Definición

Cuando:

- $p(x), q(x)$ y $r(x)$ son continuas en $[a, b]$,
- p' derivable en (a, b),
- $p(x) > 0$ y $r(x) > 0$ en $[a, b]$,

decimos que tenemos un problema regular de Sturm-Liouville.
Decimos que la ecuación es singular si:

- p se anula en a o b,
- si $p(x), q(x)$ o $r(x)$ no están acotadas cuando x tiende a a o a b,
- cuando el intervalo (a, b) no está acotado.

Clasificación problemas Sturm-Liouville

Ejemplo (problema singular): Problema contorno para la Ecuación de Bessel en $[0, b]$

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}\left[x\frac{dy}{dx}\right] + \lambda xy = 0, \quad 0 < x < b \\ \text{lím}_{x\to 0^+} y(x) \text{ y } \text{lím}_{x\to 0^+} y'(x) \text{ existen y son finitos,} \\ y(b) = 0. \end{cases}$$

Este problema surge al estudiar el flujo de calor en un cilindro. En este caso, $p(x) = r(x) = x$, que se anula en $x = 0$.

Problemas contorno ecuaciones lineales ordinarias de segundo orden

Supongamos el problema de contorno

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \quad 0 < x < b \\ a_{11}y(a) + a_{12}y'(a) + b_{11}y(b) + b_{12}y'(b) = c_1 \\ a_{21}y(a) + a_{22}y'(a) + b_{21}y(b) + b_{22}y'(b) = c_2 \end{cases}$$

Estas son condiciones de contorno lineales. Cuando $c_1 = c_2 = 0$, decimos que las condiciones de contorno son homogéneas; en caso contrario, son no homogéneas.

Clasificación condiciones de contorno

Ciertas condiciones en la frontera aparecen con frecuencia en las aplicaciones; estas condiciones son

Separadas:

$$a_1 y(a) + a_2 y'(a) = c_1,$$
$$b_1 y(b) + b_2 y'(b) = c_2$$

Dirichlet:

$$y(a) = c_1, \quad y(b) = c_2.$$

Neumann:

$$y'(a) = c_1, \quad y'(b) = c_2$$

.

Periódicas

$$y(-T) = y(T), \quad y'(-T) = y'(T),$$
$$y(0) = y(2T), \quad y'(0) = y'(2T),$$

donde el periodo es $2T$

Conjunto de soluciones

Hay tres posibilidades para la ecuación homogénea con condiciones homogéneas en la frontera

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad 0 < x < b \\ a_{11}y(a) + a_{12}y'(a) + b_{11}y(b) + b_{12}y'(b) = 0 \\ a_{21}y(a) + a_{22}y'(a) + b_{21}y(b) + b_{22}y'(b) = 0 \end{cases}$$

- Si $\phi(x)$ es solución no trivial entonces también lo es $A\phi$ para cualquier $A \in \mathbb{R}$. Tenemos una familia uniparamétrica de soluciones.
- Si $\phi_1(x)$ y $\phi_2(x)$ son dos soluciones linealmente independientes, entonces $A_1\phi_1(x) + A_2\phi_2(x)$ también es solución para cualquieras $A_1, A_2 \in \mathbb{R}$. Tenemos una familia biparamétrica de soluciones.
- La otra posibilidad es que $\phi(x) \equiv 0$ sea la única solución, en cuyo caso existe una única solución.

Conclusión. Hay tres situaciones: el problema de contorno tiene una única solución, una familia uniparamétrica de soluciones, o una familia bi-paramétrica de soluciones.

Ejemplo 1

Determinar todas las soluciones de

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 5y = 0; \\ y(0) = 2, \quad y(\pi/4) = 1. \end{cases}$$

Solución. La ecuación carascterística es:

$$r^2 + 2r + 5 = 0,$$

que tiene las raíces $r = -1 \pm 2i$. La solución general es:

$$y(x) = c_1 e^{-x} \cos 2x + c_2 e^{-x} \operatorname{sen} 2x.$$

Determinamos c_1 y c_2 usando las condiciones de contorno

$$y(0) = c_1 = 2, \quad y(\pi/4) = c_2 e^{-\pi/4} = 1.$$

Por consiguiente, $c_1 = 2$ y $c_2 = e^{\pi/4}$, y hay solución única

$$y(x) = 2e^{-x} \cos 2x + e^{x/4} e^{-x} \operatorname{sen} 2x$$

Ejemplo 2

Determinar todas las soluciones del problema con valores en la frontera

$$\begin{cases} y'' + y = \cos 2x; \\ y'(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0. \end{cases}$$

Solución Ecuación característica:

$$r^2 + 1 = 0,$$

Solución general para la ecuación homogénea:

$$y_h(x) = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x.$$

Usamos el método de coeficientes indeterminados. Una solución particular del problema no-homogéneo tiene la forma

$$y_p(x) = A \cos 2x + B \operatorname{sen} 2x.$$

Ejemplo 2 (continuación)

Al sustituir y_p y despejar A y B, vemos que $A = -1/3$ y $B = 0$. Por lo tanto, $y_p(x) = -(1/3)\cos 2x$. Así, una solución general es

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x - (1/3)\cos 2x.$$

Sustituimos la solución general en las condiciones de contorno

$$y'(0) = c_2 = 0, \quad y'(\pi) = -c_2 = 0.$$

Así, $c_2 = 0$ y c_1 es arbitrario. El problema tiene una familia uni-paramétrica de soluciones:

$$y(x) = c_1 \cos x - (1/3)\cos 2x, \quad c_1 \in \mathbb{R}$$

Ejemplo 3

Determinar las soluciones de

$$\begin{cases} y'' + 4y = 0; \\ y(-\pi) = y(\pi), \quad y'(-\pi) = y'(\pi). \end{cases}$$

Solución. Ecuación característica es

$$r^2 + 4 = 0,$$

Solución general

$$y(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x.$$

Cualquiera sea c_1 y c_2 se tiene

$$y(-\pi) = y(\pi), \quad y'(-\pi) = y'(\pi).$$

Así hay una familia a bi-parámetrica de soluciones.

Ejemplo 3 (continuación)

Si, en el ejemplo anterior, reemplazamos la ecuación diferencial (10) por la ecuación no homogénea

$$y'' + 4y = 4x$$

.

Una solución general es

$$y(x) = x + c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x.$$

Como

$$y(-\pi) = -\pi + c_1, \quad y(\pi) = \pi + c_1,$$

no existen soluciones de que satisfagan $y(-\pi) = y(\pi)$. Así, el problema no homogéneo con valores en la frontera no tiene soluciones.

Autovalores

Objetivo

Los problemas de Sturm-Liouville con valores en la frontera son ejemplos de problemas con valores en la frontera en dos puntos que contienen un parámetro λ. Nuestro objetivo es determinar para qué valores de λ el problema con valores en la frontera

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + q(x)y + \lambda r(x)y = 0, \quad a < x < b \\ a_1 y(a) + a_2 y'(a) = 0, \\ b_1 y(b) + b_2 y'(b) = 0, \end{cases} \tag{4}$$

tiene soluciones no triviales. Tales problemas se llaman problemas de valores propios. Las soluciones no triviales se llaman funciones propias o autofunciones y el número correspondiente λ es un valor propio o autovalor.

Ejemplo 1

La importancia de los problemas de valores propios es que surgen al usar el método de separación de variables para resolver ecuaciones diferenciales parciales.

Ejemplo (de unidad 7)

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases}$$

Se concluyó

$$\lambda = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \quad n = 1, 2, \ldots$$

son los autovalores del problema, y las funciones

$$X_n(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad n = 1, 2, \ldots$$

son las correspondientes autofunciones.

Ejemplo 2

En la unidad 7 se vió que el problema

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \quad 0 < x < L \\ X'(0) = X'(L) = 0 \end{cases}$$

tenía los autovalores y autofunciones

$$\lambda = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots \quad \text{y } X(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

respectivamente

Ejemplo 3

Determinar todos los valores propios reales y funciones propias correspondientes para

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0; \\ y(0) = 0, \quad 3y(\pi) - y'(\pi) = 0. \end{cases}$$

Solución. Ecuación característica

$$r^2 + \lambda = 0.$$

Hay tres casos
Caso 1. $\lambda = -\mu^2 < 0$. Raíces:

$$r = \pm\mu,$$

Solución general:

$$y(x) = c_1 e^{\mu x} + c_2 e^{-\mu x}.$$

Ejemplo 3 (continuación)

Equivalentemente

$$y(x) = C_1 \cosh \mu x + C_2 \operatorname{senh} \mu x.$$

Al sustituir en las condiciones en la frontera:

$$C_1 = 0, \quad 3\,(C_1 \cosh \mu\pi + C_2 \operatorname{senh} \mu\pi) - (\mu C_1 \operatorname{senh} \mu\pi + \mu C_2 \cosh \mu\pi) = 0$$

Para $C_1 = 0$, la última ecuación se convierte en

$$C_2(3 \operatorname{senh} \mu\pi - \mu \cosh \mu\pi) = 0.$$

Para obtener una solución no trivial, debemos tener $C_2 \neq 0$, de modo que:

$$3 \operatorname{senh} \mu\pi - \mu \cosh \mu\pi = 0;$$

es decir, μ debe satisfacer

$$\tanh \mu\pi = \frac{1}{3}\mu.$$

Ejemplo 3 (continuación)

En el plano μy, la recta $y = \mu/3$ corta a la curva $y = \tanh \mu\pi$ sólo una vez para $\mu > 0$ (véase la figura). Por lo tanto, sólo existe una solución positiva de, que denotaremos μ_0.

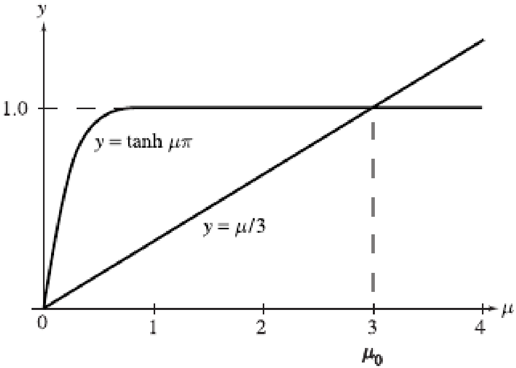


Figura 11.1 Gráficas de $y = \mu/3$ y $y = \tanh \mu\pi$

Ejemplo 3 (continuación)

Conclusión. En el caso $\lambda < 0$ el problema con valores en la frontera tiene un valor propio negativo

$$\lambda_0 = -\mu_0^2,$$

tal que

$$\tan \mu_0 \pi = \mu_0/3,$$

y las funciones propias correspondientes son

$$y_0(x) = c_0 \operatorname{senh} \mu_0 x, \quad c_0 \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo 3 (continuación)

Caso 2. $\lambda = 0$. Cero es una raíz doble de la ecuación auxiliar, la solución general es:

$$y(x) = c_1 x + c_2.$$

Al sustituir en las condiciones de contorno

$$c_2 = 0, \quad 3\pi c_1 + 3c_2 - c_1 = 0$$

que tiene la solución $c_1 = c_2 = 0$.
No tenemos funciones propias.

Ejemplo 3 (continuación)

Caso 3. $\lambda = \mu^2 > 0$ para $\mu > 0$. Raíces:

$$r = \pm \mu i,$$

Solución general:

$$y(x) = c_1 \cos \mu x + c_2 \operatorname{sen} \mu x.$$

Sustituyenco en condiciones de contorno

$$c_1 = 0, \quad 3\left(c_1 \cos \mu\pi + c_2 \operatorname{sen} \mu\pi\right) - \left(-\mu c_1 \operatorname{sen} \mu\pi + \mu c_2 \cos \mu\pi\right) = 0.$$

Al hacer $c_1 = 0$ en la última ecuación, obtenemos

$$c_2 (3 \operatorname{sen} \mu\pi - \mu \cos \mu\pi) = 0.$$

Para que existan soluciones no triviales, μ debe satisfacer

$$\tan \mu\pi = \frac{1}{3}\mu.$$

Ejemplo 3 (continuación)

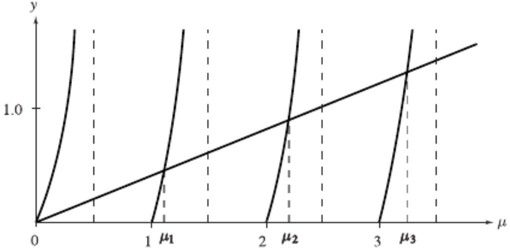


Figura 11.2 Gráficas de $y = \mu/3$ y $y = \tan \mu\pi$

Hay una infinidad de soluciones $\mu_1 < \mu_2 < \ldots$ por ende de autovalores $\lambda_n = \mu_n^2, n = 1, 2, 3, \ldots$ con autofunciones correspondientes

$$y_n(x) = c_2 \operatorname{sen} \mu_n x, \text{ con } c_2 \neq 0,$$

Problemas regulares de Sturm-Liouville

Retornemos al problema general de hallar los valores propios y funciones propias de:

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + q(x)y + \lambda r(x)y = 0, \quad a < x < b \\ a_1 y(a) + a_2 y'(a) = 0, \\ b_1 y(b) + b_2 y'(b) = 0, \end{cases} \tag{5}$$

donde

- $p(x), p'(x), q(x)$ y $r(x)$ son funciones continuas en $[a, b]$
- $p(x) > 0$ y $r(x) > 0$ en $[a, b]$.
- Se excluye el caso en que $a_1 = a_2 = 0$ o $b_1 = b_2 = 0$.

Llevando a la forma de Sturm-Liouville

Disgresión: cualquier ecuación de la forma

$$A_2(x)y''(x) + A_1(x)y'(x) + A_0(x)y(x) + \lambda\rho(x)y(x) = 0 \qquad (6)$$

se puede convertir en una ecuación del tipo que (5).
Debemos determinar p de modo que

$$(py')' = py'' + p'y' = A_2 y'' + A_1 y'.$$

Es decir

$$p = A_2, \quad p' = A_1.$$

Pero en general, $A_2' \neq A_1$, de modo que este método directo no siempre es aplicable.

Llevando a la forma de Sturm-Liouville

Idea! Buscar factor integrante $\mu(x)$ tal que al multiplicar (6) por μ, obtenemos coeficientes tales que $(\mu A_2)' = \mu A_1$.
Lamemos $p = \mu A_2$, queremos

$$p' = \mu A_1 = pA_1/A_2.$$

Es una ecuación en variables separables. Resolviendo

$$p(x) = Ce^{\int A_1(x)/A_2(x)dx}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Tomamos $C = 1$

$$\mu(x) = p/A_2 = [1/A_2(x)]\, e^{\int A_1(x)/A_2(x)dx}.$$

Al multiplicar (6) por μ se tiene

$$(py')' + qy + \lambda ry = 0,$$

donde $p = \mu A_2, q = \mu A_0 \mathrm{y} r = \mu\rho$. Necesitamos que $A_2(x) \neq 0$

Ejemplo

Convertir la siguiente ecuación a la forma de una ecuación de Sturm-Liouville:

$$3x^2y''(x) + 4xy'(x) + 6y(x) + \lambda y(x) = 0, \quad x > 0.$$

Solución. $A_2(x) = 3x^2$ y $A_1(x) = 4x$.

$$\begin{aligned}\mu(x) &= \frac{1}{3x^2}e^{\int A_1(x)/A_2(x)dx} = \frac{1}{3x^2}e^{\int (4x)/3x^2 dx}\\ &= \frac{1}{3x^2}e^{(4/3)\int x^{-1}dx} = \frac{1}{3x^2}e^{(4/3)\ln x} = \frac{x^{4/3}}{3x^2} = \frac{1}{3x^{2/3}}.\end{aligned}$$

Al multiplicar la ecuación por $\mu(x) = 1/\left(3x^{2/3}\right)$, obtenemos

$$\left(x^{4/3}y'(x)\right)' + 2x^{-2/3}y(x) + \lambda\left(3x^{2/3}\right)^{-1}y(x) = 0.$$

Identidad de Lagrange

Definimos

$$L\left[y\right](x) := (p(x)y'(x))' + q(x)y(x)$$

la ecuación se escribe

$$L[y](x) + \lambda r(x)y(x) = 0.$$

Teorema [Identidad de lagrange]

Suponmgamos que p y q son funciones continuas en $[a, b]$ con valores en $\mathbb{R}$. Sean u y v funciones con segundas derivadas continuas en el intervalo $[a, b]$ con valores en $\mathbb{C}$. Entonces,

$$uL[v] - L[u]v = \frac{d}{dx}(pW[u, v]),$$

donde el wronskiano de u y v se define $W[u, v] = uv' - vu'$

Identidad de Lagrange (Demostración)

Usamos la regla del producto y sumamos y restamos $pu'v'$ para tener

$$
\begin{aligned}
uL[v] - vL[u] &= u\left[(pv')' + qv\right] - v\left[(pu')' + qu\right] \\
&= u(pv')' + quv - v(pu')' - quv \\
&= u(pv')' + u'(pv') - v'(pu') - v(pu')' \\
&= [u(pv')]' - [v(pu')]' \\
&= [p(uv' - vu')]' \\
&= \frac{d}{dx}[pW[u,v]]
\end{aligned}
$$

Fórmula de Green

Corolario [Fórmula de Green]

Bajo las hipótesis del Teorema anterior

$$\int_a^b (uL[v] - vL[u])(x)dx = (pW[u, v])(x)|_a^b . \tag{7}$$

Si además u y v satisfacen las condiciones en la frontera de (5), la fórmula de Green se simplifica a

$$\int_a^b (uL[v] - vL[u])(x)dx = 0. \tag{8}$$

Fórmula de Green (Demostración)

La primera fórmula surge de integrar la identidad de Lagrange.
Para la segunda notar que si $a_2 \neq 0$ y $b_2 \neq 0$, entonces

$$\begin{aligned} u'(a) &= -\left(a_1/a_2\right)u(a), \quad & u'(b) &= -\left(b_1/b_2\right)u(b) \\ v'(a) &= -\left(a_1/a_2\right)v(a), \quad & v'(b) &= -\left(b_1/b_2\right)v(b) \end{aligned}$$

Al sustituir estos valores en el lado derecho de la primera fórmula

$$\begin{aligned} & p(b)W[u,v](b) - p(a)W[u,v](a) \\ &\quad = p(b)\left[u(b)v'(b) - u'(b)v(b)\right] - p(a)\left[u(a)v'(a) - u'(a)v(a)\right] \\ &\quad = p(b)\left[u(b)\left(-b_1/b_2\right)v(b) - \left(-b_1/b_2\right)u(b)v(b)\right] \\ &\qquad\quad - p(a)\left[u(a)\left(-a_1/a_2\right)v(a) - \left(-a_1/a_2\right)u(a)v(a)\right] \\ &\quad = 0 \end{aligned}$$

Fórmula de Green (Demostración)

Cuando $a_2 = 0$ (de modo que $a_1 \neq 0$), las condiciones de contorno implican que $u(a)$ y $v(a)$ se anulan. Por lo tanto,

$$[u(a)v'(a) - u'(a)v(a)] = 0.$$

De manera análoga, cuando $b_2 = 0$, obtenemos

$$[u(b)v'(b) - u'(b)v(b)] = 0.$$

$\square$

Espacio $L^2_r([a,b])$

Definición [Espacio $L^2_r([a,b])$]

Dado un intervalo $[a,b] \subset \mathbb{R}$ y $w:[a,b] \to \mathbb{R}$ positiva en (a,b), definimos

$$L^2_r([a,b]) = \left\{ f:[a,b] \to \mathbb{C} \middle| \int_a^b |f(x)|^2 r(x)dx < \infty \right\}$$

Si $f \in L^2_r([a,b])$:

$$\|f\|_{L^2_r} = \left\{ \int_a^b |f(x)|^2 r(x)dx \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Asumiremos las funciones continuas a trozos

Producto interno

Producto interno

Para $f, g \in L^2_r([a,b])$ se define

$$\boxed{\langle f \mid g \rangle_r = \int_a^b \overline{f(x)}g(x)r(x)dx.} \tag{9}$$

Convención de notación Cuando $r \equiv 1$ vamos a escribir por simplicidad $L^2_1([a,b]) = L^2([a,b])$ y $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_1 = \langle \cdot \mid \cdot \rangle$.

Espacio $L_r^2([a, b])$.

Teorema

$L_r^2([a, b])$ es un espacio vectorial.

Demostración si $f, g \in L_r^2([a, b])$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\int_a^b |\alpha f|^2 \, r(x) dx = \alpha^2 \int_a^b |f(x)|^2 \, r(x) dx < \infty.$$

Luego $\alpha f \in L_r^2([a, b])$.

Espacio $L_r^2([a,b])$.

Usamos

$$ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}, \quad a \geq 0, b \geq 0. \tag{10}$$

Luego

$$\begin{aligned}\int_a^b |f+g|^2 r(x)dx &\leq \int_a^b |f|^2 r(x)dx + 2\int_a^b |f||g| r(x)dx + \int_a^b |g|^2 r(x)dx \\ &\leq 2\int_a^b |f|^2 r(x)dx + 2\int_a^b |g|^2 r(x)dx < \infty.\end{aligned}$$

Luego $f+g \in L_r^2([a,b])$. □

Propiedades producto Interno

Propiedades Producto Interno

$\langle \cdot \mid \cdot \rangle_r : L^2_r([a,b]) \times L^2_r([a,b]) \to \mathbb{R}$ satisface para $f, g, h \in L^2([a,b])$ y $\alpha \in \mathbb{C}$:

Multilinealidad

- $\langle f+g \mid h \rangle_r = \langle f \mid h \rangle_r + \langle g \mid h \rangle_r$, $\langle h \mid f+g \rangle_r = \langle h \mid f \rangle_r + \langle h \mid g \rangle_r$
- $\langle \alpha f \mid g \rangle_r = \overline{\alpha} \langle f \mid g \rangle_r$, $\langle f \mid \alpha g \rangle_r = \alpha \langle f \mid g \rangle_r$

Simetría $\langle f \mid g \rangle_r = \overline{\langle g \mid f \rangle_r}$

No degeneración $\langle f \mid f \rangle_r \geq 0$ y $\langle f \mid f \rangle_r = 0 \Leftrightarrow f = 0$.

Desigualdad de Cauchy-Schwartz

$$\boxed{|\langle f \mid g \rangle_r| \leq \|f\|_{L^2_r} \|g\|_{L^2_r}.} \tag{11}$$

Propiedades producto Interno

Sólo demostraremos la desigualdad de Cauchy-Schwartz. Las otras propiedades son sencillas.
Asumimos $f, g \neq 0$. Entonces

$$\frac{|f|}{\|f\|_{L_r^2}} \frac{|g|}{\|g\|_{L_r^2}} \leqslant \frac{1}{2\|f\|_{L_r^2}} |f|^2 + \frac{1}{2\|g\|_{L_r^2}} |g|^2$$

Multiplicando por $r(x)$ e integrando

$$\int_a^b \frac{|f|}{\|f\|_{L_r^2}} \frac{|g|}{\|g\|_{L_r^2}} r(x) dx \leq \frac{1}{2\|f\|_{L_r^2}^2} \int_a^b |f|^2 r(x) dx + \frac{1}{2\|g\|_{L_r^2}^2} \int_a^b |g|^2 r(x) dx = 1$$

De aca sale $\square$

Propiedades de la norma

Propiedades norma

S $f, g \in L^2([a,b], W)$ y $\alpha \in \mathbb{C}$:

No degeneración $|f|_{L^2} \geq 0$ y $|f|_{L^2} = 0 \Leftrightarrow f = 0$.

Homogeneidad $\|\alpha f\|_{L_r^2} = |\alpha| \|f\|_{L_r^2}$.

Desigualdad Triangular o Minkowski

$$\|f+g\|_{L_r^2} \leq \|f\|_{L_r^2} + \|g\|_{L_r^2}. \tag{12}$$

Propiedades de la norma

Sólo demostraremos la desigualdad de Minkowski

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_{L_r^2}^2 &= \int_a^b \overline{(f+g)}(f+g)r(x)dx = \int_a^b \left(|f|^2 + 2\,\mathrm{Re}(f\overline{g}) + |g|^2\right) r(x)dx. \\
&\leq \int_a^b |f|^2 r(x)dx + 2\int_a^b |f\overline{g}| r(x)dx + \int_a^b |g|^2 r(x)dx \\
&= \|f\|_{L_r^2}^2 + 2\|f\|_{L_r^2}\|g\|_{L_r^2} + \|g\|_{L_r^2}^2 = (\|f\| + \|g\|)^2
\end{aligned}$$

Autoadjunción

Si v satisface las condiciones de contorno (5), $\bar{v}$ también lo hace. Luego si aplicamos (8) con $\bar{v}$ en lugar de v y usamos que $L[\bar{v}] = \overline{L[v]}$ vemos que

$$\boxed{\langle u \mid L[v] \rangle = \langle L[u] \mid v \rangle.} \tag{13}$$

Recordar que aquí $r \equiv 1$.

Definición [Operadores autoadjuntos]

Un operador diferencial lineal L que satisface (13) para todas las funciones u y v en un espacio vectorial V se llama un operador autoadjunto. o hermitiano sobre V.

Observación. Hemos mostrado que si $L[y] = (py')' + qy$ y V es el conjunto de funciones que tienen segundas derivadas continuas en $[a, b]$ y satisfacen las condiciones en la frontera en (5) , entonces L es un operador autoadjunto en V.

Autoadjunción $\Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$

Teorema

Los valores propios de un problema regular de Sturm-Liouville (5) son reales y tienen funciones propias con valores reales.

Demostración. Supongamos que $\lambda \in \mathbb{C}$ es un valor propio, con función propia $\phi(x)$ a valores complejos. Es decir,

$$L[\phi](x) + \lambda r(x)\phi(x) = 0.$$

y $\phi \not\equiv 0$ satisface las condiciones en la frontera en (5). Como p, q y r asumen valores reales, obtenemos

$$\overline{L[\phi](x) + \lambda r(x)\phi(x)} = L[\bar{\phi}](x) + \bar{\lambda} r(x)\bar{\phi}(x) = 0$$

Como a_1, a_2, b_1 y b_2 son reales $\bar{\phi}$ también satisface las condiciones en la frontera en (5). Por lo tanto, $\bar{\lambda}$ es un valor propio con función propia $\bar{\phi}$

Autoadjunción $\Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$

Por otro lado

$$\int_a^b L[\phi](x)\bar{\phi}(x)dx = -\lambda \int_a^b r(x)\phi(x)\bar{\phi}(x)dx = -\lambda \int_a^b r(x)|\phi(x)|^2 dx.$$

Además por la segunda identidad de Green y el hecho de que $\bar{\lambda}$ sea un valor propio con función propia $\bar{\phi}$, vemos que

$$\int_a^b L[\phi](x)\bar{\phi}(x)dx = \int_a^b \phi(x)L[\bar{\phi}](x)dx = -\bar{\lambda} \int_a^b r(x)|\phi(x)|^2 dx$$

Pero los lados izquierdos de las ecuaciones anteriores son los mismos, de modo que

$$-\lambda \int_a^b r(x)|\phi(x)|^2 dx = -\bar{\lambda} \int_a^b r(x)|\phi(x)|^2 dx$$

Autoadjunción $\Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$

Como $r(x) > 0$ y $\phi \neq 0$, entonces

$$\int_a^b r(x)|\phi(x)|^2 dx > 0.$$

Obtenemos $\lambda = \bar{\lambda}$, vale decir $\lambda \in \mathbb{R}$.
Tomando partes real e imaginaria de ϕ obtenemos funciones propias con valores reales correspondientes a λ. $\square$

Multiplicidad de autovalores

Definición [Autovalores simples]

Si todas las funciones propias asociadas a un valor propio particular son sólo múltiplos escalares entre sí, entonces el valor propio se llama simple.

Teorema [Autovalores simples]

Todos los valores propios del problema regular de Sturm-Liouville con valores en la frontera (5) son simples.

Multiplicidad de autovalores

Demostración. Si $\phi(x)$ y $\psi(x)$ son autofunciones correspondientes a λ:

$$a_1\phi(a) + a_2\phi'(a) = 0, \quad a_1\psi(a) + a_2\psi'(a) = 0$$

Supongamos que $a_2 \neq 0$. (si $a_2 = 0$ y $a_1 \neq 0$ queda de **ejercicio**.)
Despejando

$$\phi'(a) = (-a_1/a_2)\,\phi(a), \quad \psi'(a) = (-a_1/a_2)\,\psi(a)$$

Calculemos el wronskiano de ϕ y ψ en $x = a$

$$\begin{aligned} W[\phi,\psi](a) &= \phi(a)\psi'(a) - \phi'(a)\psi(a) \\ &= \phi(a)\,(-a_1/a_2)\,\psi(a) - (-a_1/a_2)\,\phi(a)\psi(a) = 0 \end{aligned}$$

Si el wronskiano de dos soluciones de una ecuación lineal homogénea de segundo orden se anula en un punto, entonces las dos soluciones son linealmente dependientes. Así, λ es un valor propio simple. □

Ortogonalidad

Teorema [Ortogonalidad]

Las funciones propias que corresponden a valores propios distintos de un problema regular de Sturm-Liouville con valores en la frontera (5) son ortogonales con respecto de la función de ponderación $r(x)$ en $[a, b]$. Vale decir si ϕ y ψ son autofunciones asociadas a los autovalores λ y μ con $\lambda \neq \mu$ entonces

$$\langle \phi \mid \psi \rangle_r = \int_a^b \phi(x)\psi(x)r(x)dx = 0. \tag{14}$$

Ortogonalidad

Demostración. Tenemos

$$L[\phi] = -\lambda r\phi \quad \text{y} \quad L[\psi] = -\mu r\psi.$$

Podemos suponer que ϕ y ψ tienen valores reales. Por la fórmula de Green

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b (\phi L[\psi] - \psi L[\phi])(x)dx \\ &= \int_a^b (-\phi\mu r\psi + \psi\lambda r\phi)(x)dx \\ &= (\lambda - \mu)\int_a^b \phi(x)\psi(x)r(x)dx \end{aligned}$$

Como $\lambda \neq \mu$, tenemos

$$\int_a^b \phi(x)\psi(x)r(x)dx = 0$$

$\square$

Ortogonalidad, Ejemplo

Ejercicio Demostrar que el problema

$$y'' + \lambda y = 0; \quad y(0) = y(\pi) = 0$$

tiene autovalores $\lambda_n = n^2, n = 1, 2, 3, \ldots$, con funciones propias correspondientes $\phi_n(x) = c_n$ sen nx. Verificar la ortogonalidad de manera directa.

Ejercicio Analizar el caso de condiciones de contorno periódicas.

Infinitud de autovalores

Teorema

Los valores propios del problema regular de Sturm-Liouville con valores en la frontera (5) forman una sucesión numerable y creciente

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \cdots$$

con:

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty.$$

Demostración. Será omitida, ver por ejemplo Garrett Birkhoff y Gian-Carlo Rota. Ordinary Differential Equations

Desarrollos en serie

Si $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \cdots$ son valores propios del problema (5) con funciones propias $\{\phi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, ortogonales respecto a $r(x)$ en $[a, b]$. Como

$$\frac{\phi_n}{\|\phi_n\|_{L_r^2}},$$

también es autofunción, se puede asumir que $\{\phi_n\}$ son ortonormales

$$\int_a^b \phi_n(x)\phi_m(x)r(x)dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 1, & m = n, \end{cases}.$$

Ahora vamos a asociar a una función f un denominado desarrollo ortogonal.

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n\phi_n(x), \quad \text{donde } c_n = \int_a^b f(x)\phi_n(x)r(x)dx. \tag{15}$$

Ortonormalización

Ejercicio Considerar el problema de Sturm-Liouville con valores en la

$$y'' + \lambda y = 0; \quad y(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0.$$

- $\lambda_n = (2n-1)^2/4, n = 1, 2, 3, \ldots$ valores propios.
- $\phi_n(x) = a_n \operatorname{sen}\left(\frac{2n-1}{2}\right) x$ funciones propias ortogonles respecto $r(x) \equiv 1$ en $[0, \pi]$.
- Si $a_n = \sqrt{2/\pi}$ el sistema es ortonormal.

Desarrollos en serie

Teorema

Sea $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ un sistema ortonormal de funciones propias para el problema regular de Sturm-Liouville con valores en la frontera (5), entonces $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ es completo en el conjunto de funciones continuas de cuadrado integrable en $[a, b]$, es decir si f es continua:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x), \quad a \leq x \leq b,$$

donde la convergencia de la serie es en media. Si además f' continua por partes en $[a, b]$ y satisface las condiciones en la frontera la serie converge uniformemente en $[a, b]$.

Demostración. Será omitida, ver por ejemplo Garrett Birkhoff y Gian-Carlo Rota. Ordinary Differential Equations

Desarrollos en serie

Expresar

$$f(x) = \begin{cases} 2x/\pi, & 0 \leq x \leq \pi/2 \\ 1, & \pi/2 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

mediante el sistema:

$$\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{sen}\left(\frac{2n-1}{2}\right) x.$$

$$\begin{aligned}
c_n &= \int_0^\pi f(x)\sqrt{2/\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{2n-1}{2} x\right) dx \\
&= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{3/2} \int_0^{\pi/2} x \operatorname{sen}\left(\frac{2n-1}{2} x\right) dx + \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_{\pi/2}^{\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{2n-1}{2} x\right) dx \\
&= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{3/2} \left[\frac{-2x}{2n-1} \cos\left(\frac{2n-1}{2} x\right) + \frac{4}{(2n-1)^2} \operatorname{sen}\left(\frac{2n-1}{2} x\right)\right]\Bigg|_0^{\pi/2} \\
&\quad - \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \left[\frac{2}{2n-1} \cos\left(\frac{2n-1}{2} x\right)\right]\Bigg|_{\pi/2}^{\pi},
\end{aligned}$$

Desarrollos en serie

Entonces

$$c_n = \frac{2^{7/2}}{\pi^{3/2}(2n-1)^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sqrt{2}/\pi \operatorname{sen}\left(\frac{2n-1}{2}x\right) \\ &= \frac{2^{7/2}}{\pi^2} \operatorname{sen}(x/2) + \frac{2^{7/2}}{9\pi^2} \operatorname{sen}(3x/2) - \frac{2^{7/2}}{25\pi^2} \operatorname{sen}(5x/2) - \frac{2^{7/2}}{49\pi^2} \operatorname{sen}(7x/2) + \cdots , \end{aligned}$$

Como $f(0) = 0$ y $f'(\pi) = 0$, f satisface las condiciones en la frontera. Además, f es continua y f' es continua por partes en $[0, \pi]$. Por lo tanto, la serie en converge uniformemente a f en $[0, \pi]$.

Otro resultado de convergencia

Teorema

Sea $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión ortonormal de funciones propias para el problema regular de Sturm-Liouville con valores en la frontera (5). Sean f y f' continuas por partes en $[a, b]$. Entonces, para cualquier x en (a, b),

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x) = \frac{1}{2}\left[f\left(x^{+}\right) + f\left(x^{-}\right)\right],} \tag{16}$$

donde las c_n están dadas por la fórmula (15).