Problemas Impulsiva función δ

Em um problema lineal de 2^{do} orden no homogéneo

$$u'' + pu' + qu = f(t).$$

$f(x)$ suele representar una fuerza

Una fuerza suele ser una magnitud distribuida en el tiempo, esto es para lograr um cambio se requiere aplicar la fuerza en um intervalo $[t, t+\Delta t]$ com $\Delta t > 0$. Em ese caso el cambio de velocidad debido a la fuerza (asumiendo que no hay otras fuerzas $p = q = 0$)

$$u'(t+\Delta t) - u'(t) = \int_t^{t+\Delta t} f(s)\,ds.$$

Algunas veces aparecen fuerzas o acciones que ocurren en un intervalo de tiempo tan pequeño que conviene pensarlo instantaneo. Supongamos una tal fuerza, que llamaremos δ, que logra incrementar en 1 la velocidad en el instante $t_0 = 0$. Una tal delta tendría la propiedad que:

$$\int_a^b \delta(s)\,ds = u(b) - u(a) = \begin{cases} 0 & 0 \leq a < b \\ 1 & a < 0 \leq b \\ 0 & b < 0 \end{cases}$$

<u>Teorema (Medio Trucho)</u> Si $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua y acotada.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\,\delta(t)\,dt = \varphi(0)$$

Demostración (Más trocha).

Sea $\varepsilon > 0$. $\exists \delta > 0$: $|t| < \delta \Rightarrow |\varphi(t) - \varphi(0)| < \varepsilon$

$\exists M$: $|\varphi(t)| \leq M$.

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\,\delta(t)\,dt - \varphi(0) \right| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\,\delta(t)\,dt - \varphi(0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt \right|$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t) - \varphi(0)|\,\delta(t)\,dt =$$

$$\leq \int_{|t| > \delta} 2M\,\delta(t)\,dt + \varepsilon \int_{|t| \leq \delta} \delta(t)\,dt = \varepsilon$$

Como ε es arbitrariamente chico

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\,\delta(t)\,dt = \varphi(0). \quad \square.$$

Los razonamiento anteriores carecen de rigor puesto que asumen que una función δ con las propiedades enunciadas existe.. Sin embargo se puede ver que si tal función existiese debería ocurrir que.

$$\delta(t) \equiv 0 \quad \text{si } t \neq 0$$

De ser así

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt = 0.$$

El caso es que existe un ente matemático con las propiedades deseadas. Sin embargo su definición requiere concepto que van mas allá de las pretensiones de este curso. Algunas veces se piensa la δ por aproximación. Por ejemplo

$$f_\sigma(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$$

Entonces $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_\sigma(t)\,dt = 1$

y si $a>0$ ó $b<0$ $\displaystyle\int_a^b f_\sigma(t)\,dt \xrightarrow{\sigma \to 0} 0$

Em cierta forma

$$f_\sigma \xrightarrow{\sigma \to 0} \delta.$$

Hecho estas aclaraciones vamos a trabajar con δ como si existiese y fuese una función común y corriente.

- Vamos a escribir $\delta(t-t_0)$ para la traslación horizontal de δ.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\,\delta(t-t_0)\,dt = \varphi(t_0).$$

- Problema. Sea $p, q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuas y dado $\xi \in \mathbb{R}$ resolver

$$\begin{cases} y'' + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = \delta(x-\xi) \\ y(-\infty) = 0 \\ y'(-\infty) = 0 \end{cases}$$

supuesto dadas y_1, y_2 soluciones L.I. del problema homogéneo.

Usamos la fórmula variación parámetros

$$C_1(x) = -\int_{-\infty}^{x} \frac{\delta(s-\xi)\, y_2(s)}{W(s)}\, ds = \begin{cases} 0 & x<\xi \\ -\dfrac{y_2(\xi)}{W(\xi)} & x>\xi \end{cases}$$

$$C_2(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{\delta(s-\xi)\, y_1(s)}{W(s)}\, ds = \begin{cases} 0 & x<\xi \\ \dfrac{y_1(\xi)}{W(\xi)} & x>\xi \end{cases}$$

Luego la solución es

$$G(x;\xi) = C_1(x)\,y_1(x) + C_2(x)\,y_2(x)$$

$$= \begin{cases} 0 & x<\xi \\ \dfrac{y_1(\xi)\,y_2(x) - y_1(x)\,y_2(\xi)}{W(\xi)} & x>\xi \end{cases}$$

G se llama función de Green.

Tiene la siguiente propiedad importante

Teorema Sea G la función de Green de

$$L[y] = y'' + py' + qy$$

y $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y acotada. Entonces

$$(*) \quad y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x;\xi) f(\xi)\, d\xi$$

satisface

$$\begin{cases} L[y] = f \\ y(-\infty) = y'(-\infty) = 0 \end{cases}$$

Demostración Asumiendo que podemos entrar las derivadas bajo el signo de integral.

$$(**) \quad y'(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial G}{\partial x} f(\xi)\, d\xi$$

$$(***) \quad y''(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} f(\xi)\, d\xi$$

Multiplicando (**) por $p(x)$ y (***) por $q(x)$ y sumando

$$y'' + py' + qy = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + p(x)\frac{\partial G}{\partial x} + q(x)\, G \right) f_{(\xi)} d\xi$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-\xi) f(\xi)\, d\xi = f(x)$$

$$y(-\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} G(-\infty, \xi) f(\xi)\, d\xi = 0$$

$$y'(-\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial G}{\partial x}(-\infty, \xi) f(\xi)\, d\xi = 0 \qquad \square.$$

<u>Ejemplo</u> Resolvamos

$$y'' + \omega^2 y = f(x).$$

$y_1(x) = \cos \omega x \qquad y_2(x) = \operatorname{sen} \omega x.$

$$W = \det \begin{pmatrix} \cos \omega x & \operatorname{sen} \omega x \\ -\omega \operatorname{sen} \omega x & \omega \cos \omega x \end{pmatrix} = \omega$$

$$G(x;\xi) = \begin{cases} 0 & x < \xi. \\ \dfrac{\cos\omega\xi \,\text{sen}\,\omega x - \cos\omega x \,\text{sen}\,\omega\xi}{\omega} & x \geq \xi. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & x < \xi. \\ \dfrac{\text{sen}\left(\omega(x-\xi)\right)}{\omega} & x \geq \xi \end{cases}$$

La solución es

$$y(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{\text{sen}\left(\omega(x-\xi)\right)}{\omega} f(\xi)\, d\xi.$$

Observar que la función de Green satisface.

i) $G(x;\xi) = 0 \quad x \leq \xi.$

ii) $\dfrac{\partial^2 G}{\partial x^2} + p(x)\dfrac{\partial G}{\partial x} + q(x) G = 0 \quad x > \xi$

iii) $G(\xi;\xi) = 0$

iv) $\left.\dfrac{\partial G}{\partial x}\right|_{x=\xi} = 1.$

i) – iv) Caracterizan G.

Función de Green de un intervalo.

Cuando trabajamos en un intervalo acotado:

$$(*) \quad y'' + py' + qy = 0 \quad \text{en } [a,b].$$

la única diferencia es que hay que escribir la integral

$$y(x) = \int_a^b G(x;\xi) f(\xi)\, d\xi$$

y resuelve $(*)$ y $y(a) = y'(a) = 0$

<u>Ejemplo</u> a) Hallar la función de Green del Operador:

$$L[y] = y'' - \frac{1}{t^2} y$$

b) resolver $L[y] = 1$. $y(1) = y'(1) = 0$

<u>Solución:</u>

1) Hallar base de $L[y]=0$

Es una ecuación de Euler, se resuelven con la sustitución $x=\ln t$.

Entonces

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}=\frac{1}{t}\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{1}{t^2}\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{1}{t^2}\frac{dy}{dx}$$

Así

$$0=\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{1}{t^2}y(t)=\frac{1}{t^2}\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{1}{t^2}\frac{dy}{dx}-\frac{1}{t^2}y$$

Multiplicando por t^2

$$0=y''(x)-y'(x)-y=0$$

$$\lambda^2-\lambda-1=0 \qquad \lambda=\frac{1\pm\sqrt{1+4}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

Así $y_1(x)=e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}x}$ $y_2(x)=e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}x}$

son solución. Volviendo a t. (95)

$$y_1(t) = t^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \qquad y_2(t) = t^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$$

$$\boxed{W(y_1,y_2)(t) = \det\begin{pmatrix} t^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} & t^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}} \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} t^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} t^{-\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \end{pmatrix} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} - \frac{1+\sqrt{5}}{2} = -\sqrt{5}}$$

$$G(t;\xi) = \begin{cases} 0 & t<\xi \\ \dfrac{\xi^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} t^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}} - t^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \xi^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}}{\sqrt{5}} & t \geq \xi \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & t<\xi \\ \dfrac{\xi^{1/2} t^{1/2}}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{\xi}{t}\right)^{\frac{\sqrt{5}}{2}} - \left(\frac{t}{\xi}\right)^{\sqrt{5}/2} \right] \end{cases}$$

Para el otro inverso usé Sympy. 96

$$y(t) = -\frac{\sqrt{t}\left(-10t^{3/2} t^{\frac{\sqrt{5}}{2}} + 5t^{\sqrt{5}} + 3\sqrt{5}t^{\sqrt{5}} - 3\sqrt{5} + 5\right)}{10\, t^{\sqrt{5}/2}}$$

$$\int_1^t G(t,\xi)\cdot 1 \, d\xi \quad \text{(con sympy)}$$