Soluciones Periódicas a Ecuaciones con Medidas mediante el Método Shoothing.

Fernando D. Mazzone. [1]

Sonia E. Acinas. [2]

Lorenzo F. Sierra. [3]

Debe haber una formato para las tesis.

Generalmente en la caràtula aparece el postulante

y debajo los directores

[1]SECyT-UNRC, FCEyN-UNLPam and CONICET.

[2]FCEyN-UNLPam and CONICET

[3]FCEyN-UNLPam.

Dedicatoria

Agradecimientos

Sería bueno que agradezcas también a la UNLPam y a la UNSL por darte la oportunidad de realizar estudios de posgrado, a los profesores de la maestría, a la facultad por el financiamiento recibido por el proyecto. También podes agradecer a tus afectos, generalmente se dice “por la paciencia que te tuvieron todos estos años”, en fin ....esto es personal tuyo pero es bueno recordar acordarse de todo lo que contribuyó al logro.v Por ahí me olvido de algo

En primer lugar quisiera agradecer al Dr. Fernando Mazzone y a la Dra. Sonia Acinas, por haberme guiado en la realización de esta tesis, por el tiempo dedicado, por su constante ayuda y paciencia.

Al Cluster Tecnológico Río Cuarto por brindar acceso a “Dorotea”: un equipo de análisis de datos de última generación con una gran capacidad de procesamiento de cómputos, destinado a fomentar el desarrollo de modelos de IA.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

El objetivo de esta tesis es encontrar soluciones periódicas a ecuaciones diferenciales con medidas o MDE, las cuales se pueden definir de manera general como

[**1**] Le cambiaría la función F por la f (hay una F más abajo que no es la misma que la que aparece aca)

$$\begin{cases} d\varphi = F(t, \varphi(t))\, d\mu \\ \varphi(0) - \varphi(T) = 0, \end{cases} \tag{MDE}$$

donde $F : [0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n \times m}$ es una función con valores matriciales, μ es una medida vectorial con valores en $\mathbb{R}^m$, $\varphi : [0, T] \to \mathbb{R}^n$ es una función de variación acotada y $d\varphi$ es la medida vectorial Lebesgue-Stieltjes asociada a φ.

Las MDE intervienen en modelos no suaves de varias ramas de la ciencia, como los modelos que describen el movimiento de moléculas en gases ideales hasta el análisis de la dinámica de la pelota raqueta. En física e ingeniería mecánica intervienen en el estudio de materia granular y motores de arena; en la robótica, se usan para estudiar impactos en las articulaciones (ver [7] y [14]). Un caso particular donde intervienen MDE es aquel~~aquél~~ dado por los modelos impulsivos, ver [4],[3] y [20]. Por ejemplo, en los sistemas mecánicos se puede pensar que el impacto entre dos cuerpos es un fenómeno de muy corta duración que implica un cambio brusco en la dinámica de los cuerpos. Es por eso que, se suele representar a los impactos como fuerzas muy grandes que actúan en un tiempo infinitamente corto. Supongamos que durante el impacto o colisión actúa una fuerza F y que este ocurre en un intervalo $[t_0, t_0 + \Delta t]$, entonces el cambio en la cantidad de movimiento es igual al impulso que

[**2**] No quedará mejor expresado si decimos "de los impactos de una pelota en una raqueta"?

[**3**] Qué son los motores de arena?. Lo googlie y me parece que son como filtros de pileta. No los denominaremos de otra forma en argentina?

[**4**] Para mi no iría

[**5**] Está en rojo

genera la fuerza [19], o sea

$$I = \Delta p = \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} F(s)ds.$$

[6] Le buscaría un sinónimo a actúa, está muy repetido

Si suponemos que la fuerza actúa en un intervalo muy chico, tanto que podemos decir que es instantánea, entonces el impulso es

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} F(s)ds.$$

Para que el impulso I sea distinto de cero, $F(\cdot)$ debe tomar valores infinitos ya que la medida de Lebesgue del intervalo tiende a cero. Por eso, es conveniente tomar a la fuerza como una medida de Dirac concentrada en el tiempo t_0 (la cual expresaremos como δ_{t_0}) y de magnitud I, es decir $F(t) = I\delta_{t_0}$. A este tipo de fuerza se la denomina fuerza impulsiva.

[7] No lo diría así, en realidad hacer infinito a F tampoco arreglaría nada. ¿Qué te aparece decir lo siguiente? Si en la integral tuviesemos una función integrada respecto a la medida de lebesgue el límite sería cero por la absoluta continuidad de la integral. Por eso necesitamos integrar respecto a medidas que no sean absolutamente continuas respecto a la medida de lebesgue

Otra fuente de problemas con medidas son los problemas de control. Podes agregar una breve mención sobre eso (podes sacar una idea del primer párrafo en el prefacio de [21]). También agregaría algo asi: «Más allá de las aplicaciones, los problemas de ecuaciones diferenciales con medidas son, desde el punto de vista exclusivamente matemático, una generalización natural de las ecuaciones diferenciales ordinarias y a nuestro juicio este hecho ya justificaría su estudio. Varias teorías de integración han sido utilizadas para abordar problemas como los planteados en esta tesis, a saber integrales de Lebesgue-Stieltjes, Perron-Stieltjes, Kurzweil-Henstock (ver por ejemplo [18, 13, 17, 6]).»

Ejemplo 1. Supongamos que un cuerpo de masa m se mueve con velocidad constante sobre una recta, y se somete a impulsos I_k en los instantes t_k. Como el impulso es el cambio en la cantidad de movimiento ([19]), entonces $I_k = mv(t_k^+) - mv(t_k^-)$. Podemos decir que si el movimiento del cuerpo está dado por la función $x(t)$, entonces cumple la siguiente ecuación

$$\begin{cases} x''(t) = 0 & \text{si} \quad t \neq t_k, \\ x'(t_k^+) - x'(t_k^-) = \dfrac{I_k}{m} & \text{para} \quad k = 1, .., r. \end{cases} \tag{PI}$$

Si ahora consideramos la fuerza impulsiva $F(t) = \sum_{k=1}^{r} I_k \delta_{t_k}$, entonces podemos ~~puedo~~ escribir el problema impulsivo PI como una MDE

$$d(x'(t)) = \sum_{k=1}^{r} \frac{I_k}{m} \delta_{t_k}$$

No escribiría $d(x'(t))$ porque reigurosamente hablando sería el diferencial de una constante, sería 0. Pondría simplemente dx' (fijate que en el miembro de la derecha no hay

Los modelos impulsivos intervienen en otras ciencias, además de física o matemática, como por ejemplo en biología.

Ejemplo 2. La ecuación

$$x' = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right), \tag{1.0.1}$$

describe los cambios en el número de individuos $x(t)$ en una población aislada, de alguna especie biológica con una taza de reproducción r, en un ambiente estacionario con una capacidad máxima de K. Para ser más precisos, supondremos que $x(t)$ es la cantidad de biomasa de una determinada especie de microorganismo cultivado en un biorreactor. Los efectos externos sobre el desarrollo de la especie pueden provocar saltos en la cantidad de biomasa $x(t)$. Esto es posible, por ejemplo, con una sola extracción de una parte de la biomasa o con la introducción de una cantidad adicional de biomasa. Los efectos externos en el momento $t = t_k$ generan que la cantidad de biomasa sufra un incremento, es decir

$$I_k = \Delta x(t_k) = x(t_k^+) - x(t_k^-).$$

Como en el ejemplo anterior, este tipo de problemas puede ser descripto usando MDE. En este caso, tendríamos una parte de la ecuación no impulsiva o suave $f(t,x) = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)$, en donde actuaría la medida de Lebesgue (usaremos el símbolo $d\lambda$, para diferenciarla de otras medidas) y otra parte impulsiva o no suave donde estaría el impulso I_k con la medida de Dirac.

[8] ya está dicho

$$d(x) = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) d\lambda + g(x) d\delta_{t_k}.$$

Las ecuaciones impulsivas se pueden generalizar para casos donde actúan fuerzas no impulsivas $f(t,x)$ y/o donde se aplique una cantidad infinita de impulso. Un caso general se puede ver en [4], está dado por

$$\begin{cases} x'' = f(t, x(t)) \text{ si } \ t \neq t_k \\ x'(t_k^+) - x'(t_k^-) = I_k \ \text{ donde } \ k = 1, 2, ..., \end{cases}$$

donde, como vimos en el ejemplo 1, se pude pensar a los impulsos como suma de deltas de Dirac concentradas en t_k y empleando la medida de Lebesgue $d\lambda$.

$$dx' = f(t, x(t))d\lambda + \sum_{k=1}^{\infty} I_k \, d\delta_{t_k}$$

Para resolver ecuaciones como (MDE), usaremos una metodología inspirada en la sección 1.3 del libro de Pablo Amster. Allí utiliza el método Shooting para hallar soluciones al problema de contorno periódico

$$\begin{cases} u' = f(t, u(t)) \\ u(0) - u(T) = 0, \end{cases}$$

donde f es una función continua y Lipschitz en la segunda variable $u \in \mathbb{R}^2$. La idea que propone Pablo Amster consiste~~conciste~~ en buscar una solución u_α al problema de valores iniciales

$$\begin{cases} u' & = & f(t, u(t)) \\ u(0) & = & \alpha, \end{cases}$$

y buscar un valor de $\alpha \in \mathbb{R}^2$ tal que $u_\lambda(T) = \alpha$. Es decir, u_α no es otra cosa que un punto fijo del operador de Poíncare $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definido como $P(\alpha) = u_\alpha(T)$. Bajo ciertas condiciones, aplicando el Teorema de Brouwer [1] al operador podemos asegurar la existencia de la solución al problema periódico.

En el capítulo 2 haremos una breve introducción a la medida de Lebesgue-Stieltjes y sus propiedades. En el capitulo 3 se encuentran los resultados principales de este trabajo de tesis. En la sección 3.1 vamos a ver como transformar el problema (MDE) con medidas vectoriales a uno donde intervenga una sola medida positiva. En la sección 3.2 estableceremos las condiciones para la existencia de soluciones al problema de valores iniciales y su continuación a intervalos máximos. En la sección 3.3 enunciaremos y demostraremos una versión del teorema de Gronwall que hemos obtenido para medidas de Borel. A partir de este teorema, probaremos la continuidad del operador de Poincaré y finalmente podremos usar el Teorema Brouwer y hallar un punto fijo para el operador de Poincaré.

Capítulo 2

Medida de Lebesgue-Stieltjes

En este trabajo denotaremos por $\mathbb{R}$ al conjunto de todos los números reales y por $\mathbb{R}^n$ al conjunto de todas las n-uplas con componentes reales. Si $x \in \mathbb{R}^n$, escribiremos la norma euclídea como $|x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots x_n^2}$, y otra norma que usaremos será la del caminante $|x|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|$. El producto interno que usaremos es el usual en $\mathbb{R}^n$, definido por $x \cdot y = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$. Se puede pensar al vector x como una matriz de $n \times 1$, y notaremos con x^* a la matriz traspuesta $1 \times n$ de x.

El conjunto de todas las funciones continuas, $f : [0, T] \to \mathbb{R}^n$ será denotado como $C([0, T], \mathbb{R}^n)$ o simplemente $C([0, T])$ si su codominio es $\mathbb{R}$. Escribiremos $f'(x)$ para la derivada de funciones escalares como para funciones de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^n$.

Sea $\mathcal{X}$ un espacio topológico. Se define la σ-álgebra de Borel como ~~a~~ la σ-álgebra generada por los conjuntos abiertos de $\mathcal{X}$, y la denotaremos $\mathscr{B}(\mathcal{X})$. En particular, $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ será la σ-álgebra generada por los intervalos abiertos de $\mathbb{R}$ y $\mathscr{B}([a, b])$ la generada por los intervalos abiertos relativos de $[a, b]$. Diremos que una medida es de Borel si esta definida sobre la σ-álgebra de Borel. Dados dos conjuntos A y B, notaremos $A \backslash B$ al complemento de B respecto de A.

[**9**] Pondría en otro lado esta notación de diferencia de conjuntos

Después de haber avanzado en la lectura del capítulo me parece que va a quedar mejor si adoptas como criterio ir de lo más general a lo más particular. Por ejemplo, yo empezaría recordando la definición de medida vectorial y pondría las propiedades de la medidas vectoriales.

Las funciones de variación acotada y la medida de Lebesgue-Stieltjes la dejaría más bien para el último, dado que son ejemplos más concretos de medidas. En el mismo sentido, noté que algunas cosas las decis para funciones no decrecientes y después las repetis para funciones de variación acotada. Te sugiero decirlo (si se puede) para funciones de variación acotada y después decir en el caso particular de que la función sea no decreciente que pasa.

2.1. Funciones de variación acotada

Cuando definimos MDE dijimos que φ era una función de variación acotada y que entendíamos a $d\varphi$ como la medida de Lebesgue-Stieltjes de φ. En esta sección daremos las definiciones y principales resultados, que nos permitan definir la medida de Lebesgue-Stieltjes de una función de variación acotada.

[10] En esta y las definiciones de abajo, no vamos a necesitar funciones con valores a $\mathbb{R}^n$?

Definición 2.1. *Dada $u : [0,T] \to \mathbb{R}$, definimos la variación de u como*

$$\mathrm{V}(u,[0,T]) = \sup_{\substack{t_i \in [0,T] \\ 0 \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_n \leqslant T}} \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} |u(t_{i+1}) - u(t_i)| \right\}$$

Pondría $0 = t_1$ y $t_n = T$ y debajo del supremo solo el símbolo de la partición P

donde el supremo se toma sobre todas las particiones $P = \{t_1, \ldots, t_n\}$ del intervalo $[0,T]$

La variación nos permite introducir una clase de funciones y su correspondiente espacio.

Definición 2.2. *Una función $u : [0,T] \to \mathbb{R}$ es de variación acotada en el intervalo $[0,T]$ si $\mathrm{V}(u,[0,T]) < \infty$. El conjunto de todas las funciones de variación acotada en $[0,T]$ se denota como $BV([0,T],\mathbb{R})$. Si además $u(0) = \alpha$ diremos que $u \in BV_\alpha([0,T],\mathbb{R}^n)$.*

El espacio de las funciones de variación acotada está incrustado dentro del espacio de las funciones acotadas.

Lema 2.3. *$u \in BV_\alpha([0,T],\mathbb{R}^n)$, entonces para todo $t \in [0,T]$ existe $K > 0$ tal que $|u(t)| \leqslant K$.*

Dem. Si $u \in BV_\alpha([0,T],\mathbb{R}^n)$, entonces

$$|u(t)| \leqslant |u(t)-u(0)|+|\alpha| \leqslant V(u,[0,t])+|\alpha| \leqslant V(u,[0,T])+|\alpha|. \quad (2.1.1)$$

Luego llamando $K = V(u,[0,T]) + |\alpha|$, tenemos que $|u(t)| \leqslant K$.

□

Podemos dotar a $BV_\alpha([0,T],\mathbb{R}^n)$ de una métrica.

Proposición 2.4. *Si* $d(u,v) = V(u-v,[0,T])$ *, entonces* $(BV_\alpha([0,T],\mathbb{R}^n),d)$ *es un espacio métrico completo.*

Dem. Para que $(BV_\alpha([0,T],\mathbb{R}^n),d)$ sea un espacio métrico la función d tiene que ser una métrica. Sean $u,v,w \in BV_\alpha([0,T]$:

- Si $d(u,v) = 0$ entonces $V(u-v,[0,T]) = 0$, por lo tanto $v-u$ es constante y como $u(0) = v(0)$ resulta que $u = v$.
- $d(u,u) = V(u-u,[0,T]) = 0.$
- $d(u,v) = V(u-v,[0,T]) > |u(0)-v(0)-u(T)+v(T)| > 0.$
- Usando la definición de variación 2.1

$$\begin{aligned} d(u,v) &= \sup_{\substack{t_i\in[0,T] \\ 0\leqslant t_1<t_2<\ldots<t_n\leqslant T}} \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} |u(t_{i+1})-v(t_{i+1})-u(t_i)+v(t_i)| \right\} \\ &= \sup_{\substack{t_i\in[0,T] \\ 0\leqslant t_1<t_2<\ldots<t_n\leqslant T}} \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} |v(t_{i+1})-u(t_{i+1})-v(t_i)+u(t_i)| \right\} \\ &= d(v,u). \end{aligned}$$

- Sea $0 = t_1, t_2, \ldots t_k = T$ una partición del intervalo $[0,T]$, entonces

$$\begin{aligned} |u(t_{i+1})-v(t_{i+1})-u(t_i)+v(t_i)| \leqslant{}& |u(t_{i+1})-w(t_{i+1})-u(t_i)+w(t_i)| \\ &+ |w(t_{i+1})-v(t_{i+1})-w(t_i)+v(t_i)|, \end{aligned}$$

sumando para $i = 1$ hasta $k-1$ y tomando supremo sobre todas las particiones del intervalo $[0,T]$ tenemos que

$$V(u-v,[0,T]) \leqslant V(u-w,[0,T]) + V(w-v,[0,T]).$$

Por lo tanto $d(u,v) \leqslant d(u,w) + d(w,v)$.

[11] Me parece que este y el inciso que sigue son redundantes, porque el primero de todos era un si y solo si

Veamos que $(BV_\alpha([0,T],\mathbb{R}^n),d)$ es completo. Sea $\{u_n\}$ una sucesión de Cauchy. Como toda sucesión de Cauchy es acotada,~~, luego~~ existe una constante K tal que $\forall n\ d(u_n,0) = V(u_n,[0,T]) \leqslant K$. Además por Lema 2.3 para cualquier $t \in [0,T]$

$$|u_n(t)| \leqslant |u_n(t) - u_n(0)| + |u_n(0)| \leqslant V(u_n,[0,T]) + |\alpha| \leqslant K. \quad (2.1.2)$$

[12] Va a quedar mejor si identificas con más presisión el teorema

Luego por el Primer Teorema de Helly~~teorema de Helly's~~ (ver [15])~~[15]~~ existe una subsucesión~~subsecesión~~ convergente. Una sucesión de Cauchy que posee una subsucesión convergente es, en si misma, convergente. Por ~~, y por~~ lo tanto la sucesión es convergente. □

El siguiente resultado permite caracterizar a las funciones de variación acotada.

[13] Me parece que va a quedar mejor así, si en cada teorema pones la referencia de donde se puede ver

Teorema 2.5 ([12, Teorema 3.27]). *$u \in BV([0,T],\mathbb{R})$ si y sólo si u se puede escribir como la diferencia de dos funciones crecientes en $[0,T]$.*

La demostración de este teorema y más información sobre funciones de variación acotada puede encontrarse en [8].

Corolario 2.6. *Si $u \in BV([0,T],\mathbb{R})$, entonces*

- *para $0 < t < T$ los siguientes límites existen y son finitos*

$$u(t^+) = \lim_{s\to t^+} u(s) \qquad u(t^-) = \lim_{s\to t^-} u(s);$$

- *$u(0^+)$ y $u(T^-)$ existen y son finitos.*

2.2. Medida de Lebesgue-Stieltjes

[14] Revisa por otros Stieljes

A continuación, vamos a enumerar algunos resultados necesarios para definir la medida de Lebesgue-Stieltjes~~Stieljes~~ asociada a una función de variación acotada. Para un desarrollo mas detallado ver [12].

2.2.1. Medida de Lebesgue-Stieltjes en $\mathbb{R}$

[15] El creciente que debería sustiuirse por no decreciente aparece un montón de veces, no te lo voy a corregir

Vamos a definir la medida de Lebesgue~~Labesgue~~-Stieltjes para una función no decreciente~~de creciente~~ y continua a izquierda. El mismo desarrollo se puede hacer para funciones no crecientes~~decrecientes~~, con la salvedad de que la medida generada es~~en~~ negativa.

Vamos a recordar un procedimiento general para construir medidas que aplicaremos para definir la medida de Lebesgue-Stieltjes (ver [12] para más detalles)

Definición 2.7. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de subconjuntos de X, es decir $\mathcal{A}$ es cerrado para uniones e intersecciones finitas y $\varnothing, X \in \mathcal{A}$. Diremos que la función $\mu_0 : \mathcal{A} \to [0, \infty)$ es una premedida, si cumple*

- $\mu_0(\varnothing) = 0$,
- *si* $\{A_i\}_1^\infty$ *es una familia de conjuntos disjuntos tal que* $\bigcup\limits_1^\infty A_i \in \mathcal{A}$, *entonces* $\mu_0\left(\bigcup\limits_1^\infty A_i\right) \leqslant \sum\limits_1^\infty \mu_0(A_i)$.

Me parece que va el =. Chequealo del libro

[16] Aca traería la cuestión de la medida exterior, porque eso forma parte del método general, es decir con la definición que das extendes cualquier premedida

Vamos a denotar~~notar~~ con $\mathcal{A}$ a la colección de todos los conjuntos que se escriben como unión finita de intervalos disjuntos de la forma $[a, b)$ con $-\infty < a < b < \infty$, más el conjunto $\varnothing$. En proposición 1.2 y 1.7 de [12] se muestra que $\mathcal{A}$ es un álgebra y que además genera la σ-álgebra de Borel.

Sea $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ creciente y continua a izquierda y sean $[a_j, b_j)$ intervalos disjuntos para $j = 1, \cdots, m$. Por la proposición 1.15 de [12], la función μ_0 definida como

$$\mu_0\left(\bigcup_{j=1}^m [a_j, b_j)\right) = \sum_{j=1}^m (u(b_j) - u(a_j))$$

es una premedida en $\mathcal{A}$. A partir de una premedida podemos definir medida exterior para cualquier conjunto arbitrario $E \subset \mathbb{R}$ de la siguiente manera

$$\mu^*(E) = \text{ínf}\left\{\sum_{j=1}^\infty \mu_0(A_j) \mid \; A_j \in \mathcal{A}, \;\; E \subset \bigcup_{j=1}^\infty A_j\right\}.$$

En $\mathscr{B}(\mathbb{R})$, μ^* satisface los axiomas de medida [12, Proposición 1.13].

[17] En lugar de creciente deberías decir no decreciente, fijate por otras veces que aparece

Definición 2.8. *Si $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es creciente y continua a izquierda, llamaremos medida de Lebesgue-Stieltjes μ_u a la medida inducida por μ_0 mediante el procedimiento anterior.*

El siguiente teorema nos permite escribir cualquier medida finita sobre la σ-álgebra de Borel como una medida de Lebesgue-Stieltjes. La demostración es análoga a [12, Teorema 1.16].

Teorema 2.9. *Si $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es creciente y continua a izquierda, existe una única medida de Borel μ_u tal que $\mu_u([a, b)) = u(b) - u(a)$ para todo a,b. Si G es otra función creciente y continua a izquierda, entonces $\mu_u = \mu_G$ si y sólo si $u - G$ es constante. Recíprocamente, si μ es una medida de Borel en $\mathbb{R}$ finita sobre cualquier conjunto acotado de Borel y se considera*

$$F(x) = \begin{cases} \mu([0, x)) & si \quad x > 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \\ -\mu([0, -x)) & si \quad x < 0. \end{cases}$$

Entonces F es creciente ,~~y~~ continua izquierda~~,~~ y $\mu = \mu_F$.

Observación 2.10.

- Si $u(x) = x$, entonces la medida μ_u no es otra que la medida de Lebesgue.

- Si u es continua en x, entonces usando [11, Teorema 3.28] tenemos que

$$\begin{aligned} \mu_u(\{x\}) &= \mu_u\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} [x, x + 1/n)\right) = \lim_{n\to\infty} \mu_u\left([x, x + 1/n)\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(x + \frac{1}{n}\right) - u(x) = u(x) - u(x) = 0. \end{aligned}$$

- Si u es continua en b, entonces

$$\mu_u([a, b]) = \mu_u\left([a, b) \cup \{b\}\right) = \mu_u([a, b)) = u(b) - u(a).$$

2.2.2. Medida de Lebesgue-Stieltjes en un dominio acotado

Por la Proposición~~proposición~~ 1.2 de [12], la familia de conjuntos $\mathcal{E} = \{(-\infty, x), | \, x \in \mathbb{R}\}$ genera la $\sigma-$álgebra de Borel. Llamaremos $\mathscr{B}([a, b])$ a la σ-álgebra de Borel restringida al intervalo $[a, b]$, la cual está generada por la familia de intervalos $\mathcal{E} \cap [a, b] = \{[a, x) \mid x \leqslant b\}$.

[18] Al principio de todo habías definido la σ-álgebra de Borel, no es necesario que la vuelvas a definir. La σ-álgebra de Borel es la que generan lo abiertos, en este caso los abiertos del $[0, T]$.

Sea $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función creciente y continua a izquierda, podemos extender su dominio a todos los números reales, de la siguiente forma:

$$\overline{u}(t) = \begin{cases} u(a) & si \quad t < a \\ u(t) & si \quad a \leqslant t < b \\ u(b) & si \quad t \geqslant b. \end{cases}$$

Observación 2.11. La función $\overline{u}$ tiene las siguientes propiedades:

- $\overline{u}$ es creciente, continua a izquierda y en b es continua.
- La medida de Lebesgue-Stieltjes generada por $\overline{u}$ cumple que

  I. $\mu_{\overline{u}}(\{b\}) = 0$,

  II. $\mu_{\overline{u}}([a,b]) = \mu_{\overline{u}}([a,b))$.

Definición 2.12. *Sea $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función creciente y continua a izquierda. Para $A \subset [a,b]$ definimos la medida de Lebesgue-Stieltjes μ_u por*

No le pondría el ínfimo, es la defi-

considerar uniones infinitas.

$$\mu_u(A) = \mu_{\overline{u}}(A) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{n} [\overline{u}(b_j) - \overline{u}(a_j)] \mid A \subset \bigcup_{j=1}^{n} [a_j, b_j) \right\}.$$

[19] Estas observaciones las citas después?

Observación 2.13.

- $\mu_u([a,b]) = \mu_{\overline{u}}([a,b]) = \overline{u}(b) - \overline{u}(a) = u(b) - u(a)$.
- Sea $[s,t) \subset [a,b]$ entonces
$$\mu_u([s,t)) = \mu_{\overline{u}}([s,t)) = \overline{u}(t) - \overline{u}(s) = u(t) - u(s).$$
- Sea$[s,t) \supset [a,b]$ entonces
$$\mu_u([s,t)) = \mu_{\overline{u}}([s,t)) = \overline{u}(t) - \overline{u}(s) = u(b) - u(a).$$

[20] Lo que viene, no sería más apropiado ponerlo en la

Si en la definición 2.7 tomamos a la función $\mu_0 : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$, entonces la medida generada se llama medida con signo. Veamos que para $f \in BV([a,b], \mathbb{R}^n)$ la medida asociada a f, es una medida con signo.

[21] Sería más enfático sobre, estuve rato para darme cuenta lo que querías decir. Te lo escribo en verde

Si en la definición 2.7 asumimos que μ_0 toma valores en $\mathbb{R}$, en lugar de los reales no negativos, llamaremos a μ_0 una *premedida con signo*. Ahora podemos asociar una medida con signo a μ_0 por el mismo procedimiento que usamos para premedidas (no negativas).

Teorema 2.14. *Sea $u \in BV([a,b], \mathbb{R})$ y continua a izquierda. Existe una medida de Borel con signo μ_u, tal que*

$$\mu_u([a,b)) = u(b) - u(a).$$

Calculo que lo que queres decir es que para todo $[a_1, b_1) \subset [a,b]$ vale que $\mu_u([a_1,b_1)) = u(b_1) - u(a_1)$.

Para cualquier función f μ_u-integrable y cualquier conjunto de Borel A, notaremos

$$\int_A f(s)\, d\mu_u(s) = \int_A f(s)\, du(s).$$

Dem. Por el teorema 2.5, si $u \in BV([a,b],\mathbb{R})$ y es continua a izquierda, entonces existen u_1 y u_2 funciones crecientes y continuas a izquierda tal que $u = u_1 - u_2$. Luego, por el teorema 2.9, las medidas generadas por u_1 y u_2 son medidas de Borel. Ahora si llamamos $\mu_u = \mu_{u_1} - \mu_{u_2}$, entonces

$$\mu_u([a,b)) = u(b) - u(a).$$

□

2.3. Medida de Lebesgue-Stieltjes~~Stieljes~~ con signo

[22] El título dice medidas de Lebesgue-Stieltjes, sin embargo la sección no se refiere a esas medidas parti

Las siguientes definiciones y resultados están basados en [12, Capitulo 3].

Definición 2.15. *Diremos que la medida con signo ν es absolutamente continua respecto de la medida con signo μ, y notaremos $\nu \ll \mu$, si $\nu(A) = 0$ cada vez que $\mu(A) = 0$.*

[23] Me parece que o bien μ es medida (sin signo), o pones $|\mu|(A) = 0$

Esto te lo comento más en general, me refiero para toda la tesis, busca agregar un poco de texto para elazar los resultados.sino fijate por ejemplo aca tenes como cuatro definiciones y un teorema uno detras de otro. Por ejemplo en este punto podrías decir «El siguiente concepto es en cierto sentido el opuesto del de la definición anterior.»

Definición 2.16. *Diremos que dos medidas con signo μ y η son mutuamente singulares, y notaremos $\mu \perp \eta$, si existen conjuntos $E, F \in \mathscr{B}([0,T])$ disjuntos tal que $E \cup F = [0,T]$, $\mu(E) = 0$ y $\eta(F) = 0$.*

[24] Aca también hay que o decir que son medidas o que son las variaciones las que cumplen eso por que si no aparecen otras cosas

Aca podrías decir «Para aquel acostumbrado a trabajar con la medida de Lebesgue, le será natural que los conjuntos unitarios tienen medida cero. Sin embargo, hay que tener presente que este no es el caso para una medida de Borel en general. Vamos introducir una definición relativa a este punto .»

[25] Pasaría esta definición y la observación junto a la Definición 2.28, más aún podrías agregarlo dentro de aquella, como que tuviera dos partes,

Definición 2.17. *Diremos que una medida con signo μ es continua si para todo $t \in I$ $\mu(\{t\}) = 0$*

Observación 2.18. Sea h una función continua. Entonces la medida con signo μ_h es continua. Pues $\forall t \in [0,T]$

$$\mu_h(\{t\}) = \mu_h\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}[t,t+1/n)\right) = \lim_{n\to\infty} \mu_h\left([t,t+1/n)\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} h(t+1/n) - h(t) = h(t^+) - h(t) = 0.$$

[26] No se porque definis esto aquí, me parece que no lo volves a mencionar en este capítulo. Si lo necesitas lo

Definición 2.19. *Diremos que un conjunto A está compactamente incluido en el conjunto B, si y sólo si $\overline{A}$ es compacto y $\overline{A} \subset B^{\circ}$. Lo notaremos como $A \Subset B$.*

Teorema 2.20. *Sea μ una medida con signo, entonces existen μ^- y μ^+ medidas positivas tal que $\mu = \mu^+ - \mu^-$, y además $\mu^+ \perp \mu^-$.*

[27] No es común ni frecuente en la literatura enfatizar poniendo mayúsculas o small caps como usas aquí. Latex tiene un comando específico "emph" para enfatizar

El teorema anterior se denomina DESCOMPOSICIÓN DE JORDAN ver [12, Capitulo 3.1], y a las medidas μ^+ y μ^- se las llama variación positiva y negativa de μ, respectivamente.

[28] Enfatiza los conceptos que definis. En el glosario ingresa el concepto de variación y lo de positiva y negativa como subconceptos

Definición 2.21. *Sea μ una medida con signo. Definimos la variación total de μ, como*

$$|\mu| = \mu^+ + \mu^-.$$

[29] la primera y la última son bastante inmediatas, a la segunda y tercera le buscaría referencias

Observación 2.22. Sea μ una medida con signo, entonces valen las siguientes propiedades:

- $|\mu|$ es una medida de Borel positiva.
- Para cualquier conjunto E μ-medible, se verifica
$$|\mu|(E) = \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} |\mu(E_i)| \text{ donde } \bigcup_{i=1}^{n} E_i = E,\ E_i \text{ disjuntos}\right\}. \tag{2.3.1}$$
- Para cualquier función $f \in L^1(\mu)$ y E un conjunto μ-medible, vale que
$$\left|\int_E f\, d\mu\right| \leqslant \int_E |f|\, d|\mu|.$$
- $\mu^{\pm} \ll |\mu|$.

Recordemos a los bien conocidos espacios L^p.

Definición 2.23. *Sean μ una medida de Borel positiva y $u : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ una función μ-medible. Diremos que:*

a) $u \in L^p([0,T],\mu)$ *con* $1 \leqslant p < \infty$ *si*

$$\|u\|_{L^p(\mu)} = \left[\int_{[0,T)} |u(t)|^p d\mu\right]^{1/p} < \infty.$$

En caso de que el dominio de u esté sobrentendido~~sobreentendido~~ notaremos $u \in L^p(\mu)$ y cuando μ sea la medida de Lebesgue se denotará~~denotara~~ simplemente $L^p([0,T])$.

b) *Sea μ una medida de Borel positiva. Diremos que $u \in L^\infty([0,T],\mu)$ si*

$$\|u\|_{L^\infty(\mu)} = \text{ínf}\{M \mid |u(t)| < M, \textit{para } \mu\text{- c.t.p.}\} < \infty.$$

[30] Que μ era una medida de Borel positiva estaba puesto como hipotésis general al comienzo

Definición 2.24. *Sea μ una medida de Borel con signo, entonces definimos $L^p(\mu) = L^p(|\mu|)$.*

[31] Para mi esta definición no hace falta, llegado el momento se habla de $L^p(|\mu|)$ en lugar de $L^p(\mu)$.

Dadas dos medidas, el siguiente célebre teorema nos muestra como podemos descomponer una de ellas en suma de dos medidas una absolutamente continua y otra mutuamente singular respecto a la segunda. Además nos permite relacionar integrales entre medidas distintas.

Teorema 2.25 (Radon-Nikodym~~Nikodyn~~). *Sea ρ una medida finita con signo y μ una medida positiva finita en el espacio $([0,T],\mathscr{B}([0,T]))$. Entonces existen λ y ν medidas finitas con signo tal que*

$$\lambda \perp \mu, \quad \nu \ll \mu \quad y \quad \rho = \lambda + \nu.$$

Más aún, existe una función $h : [0,T] \to \mathbb{R}$ μ-integrable tal que para todo $A \in \mathscr{B}([0,T])$

$$\nu(A) = \int_A h(s)\, d\mu(s).$$

[32] Hay que revisar la definición, pero en general las medidas con signo son siempre finitas, porque con estas medidas de admitir que pueden tomar valores infinitos puede presentarse la indeterminación $\infty - \infty$, que con las medidas positivas no pasa

A la función h se la suele llamar la derivada de Radon-Nikodym de ν respecto a la medida μ, y se denota~~nota~~ $\dfrac{d\nu}{d\mu}$. La siguiente proposición es consecuencia del Teorema~~teorema de~~ 2.25 y está demostrada~~demostrado~~ en [12, Proposición 3.9].

[33] punto y aparte

Proposición 2.26. *Sean μ una medida de Borel con signo ~~y finita,~~ y $f \in L^1(|\mu|)$ ~~$f \in L^1(\mu)$~~. Si definimos*

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu,$$

entonces ν es una medida con signo absolutamente continua respecto a $|\mu|$ y para toda función $g \in L^1(|\nu|)$ ~~$g \in L^1(\nu)$~~ vale que $gf \in L^1(|\mu|)$ ~~$gf \in L^1(\mu)$~~ y

$$\int_A g(s) \, d\nu = \int_A g(s) f(s) \, d\mu.$$

El siguiente resultado lo necesitaremos usar más adelante. Si bien es elemental, no encontramos referencias para el mismo. Por este motivo incluímos una breve demostración.

[34] Tres cosas: 1)la medida μ no juega ningún rol en el teorema ni en su demostración. Para mi podrías sacarla y llamar μ a μ^* 2) que tipo de medidas son ν y μ^*? 3) El resultado, como está escrito, no vale. Sale si $\psi \geqslant 0$ Fijate que en la demostración si uno de los a_i fuera negativo una desigualdad se te invertiría

Lema 2.27. *Supongamos que $\nu \ll \mu$ y sea μ^* una medida tal que $\nu(A) \leqslant \mu^*(A)$, entonces para toda función no negativa $\psi \in L^1(\nu)$ vale que*

$$\int_A \psi(r) \, d\nu(r) \leqslant \int_A \psi(r) \, d\mu^*.$$

Dem. Vamos a tomar el conjunto A como un intervalo abierto I.

[35] Me parece que no usas en ningun momento que I sea un intervalo, con la misma demostración te sale para cualquier A

- Si ψ es una función característica, es decir, $\psi(t) = X_E(t)$. Tenemos

$$\int_I \psi(r) \, d\nu(r) = \int_{I \cap E} d\nu(r) = \nu(I \cap E) \leqslant \mu^*(I \cap E)$$
$$\leqslant \int_{I \cap E} d\mu^*(r) = \int_I \psi(r) \, d\mu^*(r).$$

- Si ψ es una función simple, dada por $\psi(t) = \sum_{i=1}^{m} a_i X_{E_i}(t)$, $a_i \geqslant 0$, entonces

$$\int_I \psi(r) \, d\nu(r) = \sum_{i=1}^{m} \left(a_i \int_I X_{E_i}(r) \, d\nu(r) \right)$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{m} a_i \left(\int_I X_{E_i}(r) \, d\mu^*(r) \right) = \int_I \psi(r) \, d\mu^*(r).$$

Esta desigualdad se te invertiría si $a_i < 0$

- Si ψ es una función integrable positiva, entonces existe una sucesión de funciones simples $f_1(t) \leqslant f_2(t) \leqslant \cdots$ tal que $\lim_{k\to\infty} f_k(t) = \psi(t)$. Luego, usando el Teorema de Beppo-Levi [11, Teorema 5.6],

$$\int_I \psi(r) \, d\nu(r) = \lim_{k\to\infty} \int_I f_k(r) \, d\nu(r)$$
$$\leqslant \lim_{k\to\infty} \int_I f_k(r) \, d\mu^*(r) = \int_I \psi(r) \, d\mu^*(r).$$

[36] La demostración terminaría aca

- ~~Si ψ es cualquier función integrable, entonces se puede descomponer como diferencia de dos funciones positivas, es decir $\psi = \psi^+ - \psi^-$ y por el ítem anterior satisface que~~

$$\cancel{\int_I \psi(r)\, d\nu(r) \leqslant \int_I \psi(r)\, d\mu^*.}$$

~~Luego, si se verifica para cualquier intervalo abierto I entonces, como este tipo de conjuntos generan la σ-álgebra de Borel, se satisface para cualquier conjunto boreliano A.~~

□

Como veremos más adelante el conjunto de puntos donde una medida es discontinua jugará un rol importante en la Teoría de Integración.

Definición 2.28. *Sea μ una medida con signo. Llamaremos D_μ o simplemente D, al conjunto de los puntos de discontinuidad de μ, es decir,*

[37] Aca y en enunciados previos, sería bueno que aclares donde estan definidas estas medidas

$$D = \{t \in [0, T] \mid \mu(\{t\}) \neq 0\}.$$

Lema 2.29. *Si $\mu : \mathscr{B}([0,T]) \to \mathbb{R}$ es una medida finita y positiva, entonces el conjunto D es numerable.*

Dem. Para $n \in \mathbb{N}$ definimos el conjunto $D_n = \{\tau \mid \mu(\{\tau\}) > 1/n\}$, entonces $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$. Cada conjunto D_n es finito, porque de lo contrario va a existir una sucesión de elementos $\{a_k\}_{k=1}^{\infty} \subset D_n$ tal que

$$\mu([0,T]) \geqslant \mu(D_n) \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu(\{a_k\}) > \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty,$$

lo cual es un absurdo, pues μ es una medida finita. Por lo tanto, como D_n es finito entonces D es la unión numerable de conjuntos finitos. □

Capítulo 3

Soluciones periódicas a MDE

3.1. Ecuaciones diferenciales con medidas vectoriales

Los problemas impulsivos pueden pensarse como problemas donde intervienen medidas. En el ejemplo 1 del capitulo 1, al problema impulsivo (PI) lo escribimos como una MDE de la siguiente manera

No son necesarios los paréntesis

$$d(x') = \sum_{k=1}^{r} \frac{I_k}{m} \delta_{t_k}.$$

[38] No es una forma muy habitual de denotar un sistema, tengo miedo que no se entienda, te sugiero lo verde (use el paquete `empheq` que es bastante comodo para escribir ecuaciones

Si realizamos la sustitución $v = x'$ tendremos el sistema

$$\begin{cases} x' = v d\lambda, \\ v' = \dfrac{1}{m} \displaystyle\sum_{k=1}^{r} I_k \delta_{t_k}. \end{cases} \tag{3.1.1}$$

Podemos re-escribir este sistema como un producto matricial, al menos de un punto de vista formal, de una función a valores matriciales f y una medida vectorial μ. Concretamente poniendo

$$f(x,v) = \begin{pmatrix} 0 & v \\ \frac{1}{m} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mu = \begin{pmatrix} d\lambda \\ \sum_{k=1}^{r} I_k \delta_{t_k} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \varphi = \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}$$

entonces el sistema (3.1.1) se escribe como $\varphi' = f(t,\varphi) d\mu$.

$$(x', v') = \left(v, \frac{1}{m}\right) \cdot \left(d\lambda, \sum_{k=1}^{r} I_k \delta_{t_k}\right),$$

donde el término de la derecha del producto escalar es una medida vectorial. En [9] se define medida vectorial para espacios de Banach X y?...no sé si este comentario es conveniente aquí.... Cuando X es un espacio euclídeo m-dimensional, una medida vectorial se puede pensar como un vector de medidas, es decir $\nu = (\nu_1, \nu_2, ..., \nu_m)$ donde cada ν_i es una medida de Borel con signo. La variación total de una medida vectorial ν se define para un conjunto de Borel E, (ver definición 4 de [9], tomando $\mathbb{R}^m$ con la norma de l^1) como

$$||\nu||(E) = sup \left\{ \sum_{j=1}^{r} |\nu(E_j)|_1 \text{ donde } \bigcup_{j=1}^{r} E_j = E \right\},$$

teniendo en cuenta que $|\nu(E_j)|_1 = \sum_{i=1}^{m} |\nu_i(E_j)|$.

En esta sección mostraremos que las soluciones a ecuaciones diferenciales donde intervienen medidas vectoriales son también soluciones a ecuaciones donde interviene una medida de Borel positiva.

3.1.1. Medidas vectoriales

El siguiente resultado nos permite expresar la variación total de una medida vectorial de una manera simple.

Lema 3.1. *Sea $\nu = (\nu_1, \nu_2, ..., \nu_m)$ una medida vectorial, entonces*

$$||\nu||(E) = \sum_{i=1}^{m} |\nu_i|(E), \tag{3.1.2}$$

para cualquier conjunto de Borel E.

Dem. Por (2.22) y como $|\nu(E)|_1 = \sum_{i=1}^{m} |\nu_i(E)|$, tenemos

$$\sum_{i=1}^{m} |\nu_i|(E) = \sum_{i=1}^{m} \left[sup \left\{ \sum_{j=1}^{r} |\nu_i(E_j)| \middle| \bigcup_{j=1}^{r} E_j = E \right\} \right]$$

$$\sum_{i=1}^{m} |\nu_i|(E) \geqslant sup \left\{ \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{r} |\nu_i(E_j)| \mid \bigcup_{j=1}^{r} E_j = E \right\}$$

$$\sum_{i=1}^{m} |\nu_i|(E) \geqslant sup \left\{ \sum_{j=1}^{r} \sum_{i=1}^{m} |\nu_i(E_j)| \mid \bigcup_{j=1}^{r} E_j = E \right\}$$

$$\sum_{i=1}^{m} |\nu_i|(E) \geqslant ||\nu||(E).$$

En la frase que sigue se mezcla la descomposición con las componentes (o como se llamen...) de la descomposición.

[40] Empezaría recordando la definición del concepto de meddia vectorial. Formulala en un espacio de Banach y después particu-

Los supremos e ínfimos se escriben con el comando \sup y \inf. Las normas con \|. Produce un resultado más agradable que dos palitos juntos $\|\nu\|$-$||\nu||$.

[41] Acota que si bien el resultado es bastante esperable no se encontró su enunciado y demostración en la literatura y por ese motivo incluis la de-

Para hacer legible la fórmula me parece que hay que hacer la barra del “tal que” de distinto tamaño que la de las normas. Podes usar el comando

[42] No entiendo que queres decir

[39] Para mi tenes que poner todo lo que tenes sobre medidas vectoriales desde aca y lo de la sección siguiente en el capítuo anterior de todos los prerequisitos.

Para demostrar la desigualdad que resta, sea~~Sea~~ E_i^+ y E_i^- la descomposición de Hahn del conjunto E respecto de la medida ν_i (ver [12]), entonces

$$|\nu_i|(E) = \nu_i(E_i^+) - \nu_i(E_i^-). \tag{3.1.3}$$

Sea $I = \{\alpha \in \mathbb{R}^m, \mid \alpha_i \in \{+,-\}\}$ y para cada $\alpha \in I$ definimos $F_\alpha = \bigcap_{i=1}^{m} E_i^{\alpha_i}$.

Afirmación 1: $\{F_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es una familia de conjuntos mutuamente disjuntos. Ya que, si $\alpha \neq \beta$, existe i tal que $\alpha_i \neq \beta_i$ y por lo tanto $E_i^{\alpha_i} \cap E_i^{\beta_i} = \varnothing$. Luego

$$F_\alpha \cap F_\beta = \bigcap_{i=1}^{m} E_i^{\alpha_i} \cap \bigcap_{i=1}^{m} E_i^{\beta_i} = \bigcap_{i=1}^{m} E_i^{\alpha_i} \cap E_i^{\beta_i} = \varnothing.$$

Afirmación 2: Para $i = 1, ..., m$

$$|\nu_i|(E) = \sum_{\substack{\alpha \in I \\ \alpha_i = +}} \nu_i(F_\alpha) - \sum_{\substack{\alpha \in I \\ \alpha_i = -}} \nu_i(F_\alpha). \tag{3.1.4}$$

Si $\alpha_i \neq \beta_i$ vale que $E_i^{\alpha_i} \cup E_i^{\beta_i} = E$. Entonces

$$\begin{aligned}\bigcup_{\substack{\alpha \in I \\ \alpha_i = +}} F_\alpha &= \bigcup_{\substack{\alpha \in I \\ \alpha_i = +}} \left(E_1^{\alpha_1} \cap .. \cap E_i^+ \cap ... \cap E_m^{\alpha_m}\right) \\ &= E_i^+ \cap \left(\bigcup_{j=1}^{m} E_j^+ \cup E_j^-\right) = E_i^+ \cap E = E_i^+,\end{aligned}$$

estas igualdades me parecen ciertas, pero no entiendo porque escribis esta

y de igual manera

$$\bigcup_{\substack{\alpha \in I \\ \alpha_i = -}} F_\alpha = E_i^- \cap E = E_i^-.$$

Ahora reemplazamos en (3.1.3), tenemos que

$$|\nu_i|(E) = \nu_i\left(\bigcup_{\substack{\alpha \in I \\ \alpha_i = +}} F_\alpha\right) + \nu_i\left(\bigcup_{\substack{\alpha \in I \\ \alpha_i = -}} F_\alpha\right) = \sum_{\substack{\alpha \in I \\ \alpha_i = +}} \nu_i(F_\alpha) - \sum_{\substack{\alpha \in I \\ \alpha_i = -}} \nu_i(F_\alpha).$$

Aca me parece que va $-$

Como $F_\alpha \subset E_i^{\alpha_i}$ tenemos que, si $\alpha_i = +$ entonces $\nu_i(F_\alpha) > 0$, y si $\alpha_i = -$ entonces $\nu_i(F_\alpha) < 0$. Luego de (3.1.4)

$$|\nu_i|(E) = \sum_{\substack{\alpha \in I \\ \alpha_i = +}} |\nu_i(F_\alpha)| + \sum_{\substack{\alpha \in I \\ \alpha_i = -}} |\nu_i(F_\alpha)| = \sum_{\alpha \in I} |\nu_i(F_\alpha)|,$$

y sumando la variación total de cada medida ν_i,

$$\sum_{i=1}^{m} |\nu_i|(E) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{\alpha \in I} |\nu_i(F_\alpha)|\right) = \sum_{\alpha \in I} \sum_{i=1}^{m} |\nu_i(F_\alpha)|.$$

Por lo tanto

Esto antes lo escribiste asi $|\nu(F_\alpha)|_1$

$$\sum_{i=1}^{m} |\nu_i|(E) = \sum_{\alpha \in I} |\nu(F_\alpha)| \leqslant ||\nu||(E).$$

$\square$

Observación 3.2. Por (2.22), $\nu_i \ll |\nu_i|$ y por el Lema~~lema~~ 3.1 cada $|\nu_i|$ es absolutamente continua respecto a la medida $||\nu||$. Entonces para toda $i = 1, ..., m$ vale que $\nu_i \ll ||\nu||$. Por el teorema Radon-Nikodyn (2.25), existe $h_i \in L^1(||\nu||)$ tal que para todo conjunto de Borel A se puede escribir

$$\nu_i(A) = \int_A h_i(s)\, d||\nu||.$$

Proposición 3.3. *Sea ν una medida vectorial, entonces existe $H \in L^1(\mathbb{R}^m, ||\nu||)$ tal que para todo conjunto de Borel A,*

$$\nu(A) = \int_A H(s)\, d||\nu||.$$

Dem. El resultado se obtiene por aplicación de la Observación (3.2). □

[43] Al menos diría que $H = (h_1, \ldots, h_m)$ y que, como en el caso de medidas escalares, la función H es la Derivada de Radon-Nikodym de ν respecto a $\|\nu\|$ y que se denotará $\frac{d\nu}{d\|\nu\|}$

3.1.2. Soluciones a ecuaciones con medidas vectoriales

[44] Te sugiero elevar el rango de esto a sección, además te pedi llevar la sección que lo contiene al capítulo anterior

Sea $F : [0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times m}$ con $F(t, x)$ suficientemente buena o continua y localmente Lipschitz con respecto a x, y ν una medida vectorial con valores en $\mathbb{R}^m$. Vamos a considerar la ecuación

$$d\varphi(t) = F(t, \varphi(t))d\nu. \tag{3.1.5}$$

Definición 3.4. *Una solución de* (3.1.5) *es una función $\varphi \in BV([0, T], \mathbb{R}^n)$ y continua a izquierda, tal que*

[45] Me parece que funciones de variación acotada a valores vectoriales nunca fue definido

$$\int_{[0,t)} d\varphi = \varphi(t) - \varphi(0) = \int_{[0,t)} F(s, \varphi(s))\, d\nu. \tag{3.1.6}$$

Te conviene reemplazar en la integral el intervalo $[0, t)$ por A y decir que la

El Teorema de Radon-Nikodym nos permite convertir un problema con medidas vectoriales en uno con medidas postivas.

Teorema 3.5. *Una solución de* (3.1.5) *es también solución de*

[46] Me parece conveniente que recuerdes «Sea H como en ..... y μ bla bla»

$$d\varphi = f(t, \varphi(t))d\mu, \tag{3.1.7}$$

donde $f = F[H]^* : [0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ y μ es una medida de Borel positiva.

[47] ¿Qué es H^*?¿La transpuesta? ¿Es lo mismo que el H^τ de más abajo? no es usual el símbolo τ para la transpuesta. No se por qué hay necesidad de transponer

Dem. De la Proposición~~proposición~~ (3.3) se tiene que existe $H : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ en $L^1(||\nu||)$ tal que podemos escribir la definición (3.1.6) como

[48] Aca me parece que también necesitas la Proposición 2.26

$$\varphi(t) - \varphi(0) = \int_{[0,t)} F(s, \varphi(s))\, d\nu = \int_{[0,t)} F(s, \varphi(s))[H(s)]^\tau\, d||\nu||.$$

De esta manera, podemos decir que una~~la~~ solución de (3.1.5), es también solución de un problema donde la medida que interviene no es vectorial. En efecto, si llamamos $f(t, x) = F(t, x)[H(t)]^\tau$ y $\mu = ||\nu||$ tenemos

[49] (3.1.5) no te determina una sola solución como para decir «la solución»

$$d\varphi = f(t, \varphi(t))d\mu,$$

Fijate que volves a reescribir la misma ecuación que tenes escrita y numerada un poco más arriba

donde $f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ y μ es una medida de Borel positiva. □

En el siguiente ejemplo mostramos cómo una solución a problemas impulsivos del estilo de 1 y 2, son soluciones a MDE para una medida de Borel positiva.

Ejemplo 1. Sea $\varphi : [0, T] \to \mathbb{R}$ solución de la ecuación impulsiva

$$d\varphi = F(t, \varphi) + \sum_{k=1}^{r} g_k(t)\, d\delta_{t_k}, \tag{3.1.8}$$

Me parece que en una integral $\int g_k(t)\, d\delta_{t_k}$ el único valor que importa de $g(t)$ es $g(t_k)$, porque $\mathbb{R} - \{t_k\}$ tiene δ_{t_k} medida

donde $g_i : [0, T] \to \mathbb{R}$ y F son funciones continuas. Cuando F no esté acompañada de ninguna medida vamos a convenir que se trata de la medida de Lebesgue $d\lambda$. A la expresión anterior podemos escribirla de manera vectorial como

$$d\varphi = (F(t, \varphi(t)), g_1(t), ..., g_r(t))\, (d\lambda, d\delta_{t_1}, ..., d\delta_{t_r})^\tau .$$

Ojo con los productos entre vectores, pues pusiste productos con significados diferenctes a lo largo de la tesis.

[50] Para citar teoremas se usa el comando \ref en lugar del \eqref que es específico para ecuaciones. Ahora bien, para mi la conclusión que sigue es más consecuencia del Lema 3.1 que del Teorema (3.5)

Si llamamos $\nu = (\lambda, \delta_{t_1}, ..., \delta_{t_r})$ y aplicamos el Teorema~~teorema~~ (3.5) que $||\nu|| = \lambda + \sum_{k=1}^{r} \delta_{t_k}$.

Vamos a calcular la derivada de Radon-Nikodym $d\nu/d\|\nu\|$. Como

[51] para que se entienda más lo que vas a hacer

$$\delta_{t_k}(A) = \int_A \chi_{\{t_k\}}\, d||\nu||$$

y

$$\lambda(A) = \int_A 1 - \chi_{\{t_1,..t_r\}} \cancel{\chi_{A-\{t_1,..t_r\}}}\, d||\nu||,$$

entonces

$$\frac{d\nu}{d\|\nu\|} = (1 - \chi_{\{t_1,..t_r\}}, \chi_{\{t_1\}}, .., \chi_{\{t_r\}}).$$

Consecuentemente, una~~notando $H(t) = (1, \chi_{\{t_1\}}, ..., \chi_{\{t_r\}})$ la~~ solución de (3.1.8) es también solución de la ecuación

$$d\varphi = (F(t,x), g_1(t), ..., g_r(t)) \left[\frac{d\nu}{d\|\nu\|}\right]^{\tau} \cancel{H(t)^{\tau}}\, d||\nu||.$$

que es una ecuación de la forma de la ecuación~~Si escribimos $f(t,x) = (F(t,x), g_1(t), ..., g_r(t))H(t)^{\tau}$ y $||\nu|| = \mu$ entonces φ es solución de~~ (3.1.7).

En la definición 3.4, dijimos que una solución de la MDE (3.1.7)

$$\cancel{d\varphi = f(t, \varphi(t))d\mu,}$$

es una función $\varphi \in BV([0,T], \mathbb{R}^n)$ ~~y~~ continua a izquierda, que cumple con la ecuación integral (3.1.6). Sin embargo, no es la única forma de definir solución ~~solución~~ que podemos encontrar en la literatura de la materia ~~obtener~~ para esta ecuación.

[52] No entiendo. ¿Estas queriendo decir que las distin-

Dependiendo de a qué consideramos solución, ésta puede variar. Si en la construcción de la medida de Lebesgue-Stieltjes (hecha en el capítulo 2) tomamos funciones continuas a derecha, entonces la solución a (3.1.7) será distinta.

[53] Me parece que la medida de Lebesgue-Stieljes no cambia. La medida asociada es la misma sea continua para una lado o para otro. Lo que cambia es la integral $\int f(t,\varphi)d\nu$

ejemplo, consideremos el siguiente problema de valores iniciales

[54] Por qué no un \begin{ejemplo}?

$$\begin{cases} dx = -ax(t)\, d\delta_1 \quad t \in [0,2] \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{3.1.9}$$

donde δ_1 es la medida delta de Dirac concentrada en 1. La solución continua a izquierda es

$$x(t) = \begin{cases} x_0 & si \quad t \in [0,1] \\ 0 & si \quad t \in (1,2]. \end{cases}$$

Me parece que es $(1-a)x_0$

Si modificasemos nuestra Definición 3.4 exigiendo que una solución sea continua a derecha, la solución sería~~En cambio, la solución continua a derecha es~~

[55] Nunca hablamos de soluciones continuas a derecha, porque en la Definición 3.4 dice expresamente que son continuas a izquierda. Por eso te propongo lo que escribí en verde

$$x(t) = \begin{cases} x_0 & si \quad t \in [0,1) \\ \frac{x_0}{2} & si \quad t \in [1,2]. \end{cases}$$

Me parece que va $\frac{x_0}{1+a}$. Creo que estas poniendo los resultados como si $a = 1$. Sería interesante acotar que si $x_0 \neq 0$ y $a = -1$ entonces las funciones dejan de estar definidas para $t > 2$ y que ese problema no se presenta con la Definición 3.4. Otra cosa remplaza ``si''<->``\text{si}

Otras definiciones de solución para la ecuación (3.1.7) pueden encontrarse en el marco de la teoría de distribuciones (pongo referencia??), y como límite puntual de una sucesión de soluciones a ecuaciones sin medida. Es decir, una sucesión φ_k de soluciones a la ecuación

$$d\varphi_k = f(t, \varphi_k(t))v_k(t), \tag{3.1.10}$$

donde v_k son continuas y $v_k' \to \dfrac{d\mu}{d\lambda}$ en la topología debil-* de $C([0,T])^*$

Veamos este tipo de solución para el ejemplo (3.1.9). La sucesión de funciones

[56] le daría más relevancia a este ejemplo con un \begin{ejemplo}. Explicaría más que queres decir con «este tipo de solu-

$$h_k(t) = \begin{cases} 0 & si \quad t \in [0, 1 - 1/k] \\ k(t-1)+1 & si \quad t \in (1 - 1/k, 1) \\ 1 & si \quad t \in [1, 2], \end{cases}$$

son continuas y convergen a la función de Heaviside H_1, cuya derivada es δ_1. Luego la solución a

[57] Siempre que se dice «converge» hay que decir como

[58] No es un luego, por que lo que sigue no se infiere de lo anterior

$$\begin{cases} dx = -ax(t)h_k(t) & t \in [0, 2] \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{3.1.11}$$

es $x_k(t) = x_0 \exp\left(-a \int_0^t h_k(s\cancel{t})ds\cancel{t}\right)$. Cuando $k \to \infty$, x_k tiende a

$$x(t) = \begin{cases} x_0 & si \quad t \in [0, 1) \\ x_0 e^{a(1-t)} & si \quad t \in [1, 2], \end{cases}$$

que es la solución a (3.1.9). Como vemos podemos tener distintas soluciones para la misma ecuación, dependiendo de qué entendamos como solución. Este fenómeno fue descripto por J. Persson (ver[16, 21])se ~~conoce~~ como la paradoja de las MDE.

[59] Poner cita, creo que el primero que se refirió a esto fue un tal Persson. Sugiero lo verde

3.2. Existencia de Soluciones a MDE

Para ser más precisos llamaría a esta sección “Existencia de soluciones a problemas de valores iniciales para MDE”. No pondría el teorema de cambio de variables en esta sección, le haría una sección propia a ese teorema.

En esta sección vamos a presentar algunos resultados, probados en [5], sobre existencia de soluciones locales a problemas de valores iniciales.

Al final, demostraremos un teorema de cambio de variables para integrales de Lebesgue-Stieltjes (L-S).

[60] Esto,para mi, debería ir en otra sección, en una propia para ese resultado

3.2.1. Soluciones locales

Vamos a considerar el problema de valores iniciales con medida (MDE)

$$\begin{cases} d\varphi \cancel{d(\varphi)} = f(t, \varphi(t))d\mu \\ \varphi(0) = x_0, \end{cases} \tag{P}$$

donde $f : \Omega \subset [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, μ es una medida de Borel finita y $d\varphi$ es la medida de Lebesgue-Stieltjes generada por φ. En adelante, cuando hablemos de medidas de Borel, estaremos refiriéndonos a medidas positivas. En cualquier otro caso, lo aclararemos.

Definición 3.6. *Sea $t_0 \in [0,T)$, $h > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$, diremos que $f : \Omega = [t_0, t_0 + h] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es localmente Lipschitz respecto a la segunda variables, si existe $L > 0$ tal que*

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leqslant L \|x - y\| \tag{3.2.1}$$

para todo $(t,x,y) \in I \times \overline{B(x_0,r)} \times \overline{B(x_0,r)}$.

La primera oración de la siguiente definición está confusa o desordenada en la presentación de los elementos. No se si está confusa. Si me parece que venis como preparando el terreno para considerar medidas positivas, yo hubiera formulado el teorema para esas medidas, sino es como que se pierde el rumbo de para que se hacen las cosas. Le cambiaría los supuestos a μ y f. Pero a todo esto, ya habías definido solución, no es como redundante volver a definir lo mismo. Por otro lado, decis definir "solución al problema (P)" pero la definición no considera la condición inicial. En fin hay varias cosas en esta definición mejor lo hablamos.

Definición 3.7 (Solución del problema (P)). *Sean~~Sea~~ $I = [t_0, t_0 + h) \subset \mathbb{R}$, $\mu : I \to \mathbb{R}^m$ una medida vectorial de Borel, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $\Omega \subset I \times \mathbb{R}^n$ un entorno abierto de (t_0, x_0). Si supongamos que $f : \Omega \to \mathbb{R}^{n\times m}$ cumple con*

(I) *Para cada $x \in \mathbb{R}^n$, $f(t,x)$ es medible Borel~~μ-medible~~ respecto a la variable t.*

[61] creo que hace falta "para casi todo "

(II) *Para cada t, $f(t,x)$ es continua con respecto a la variable x.*

(III) *Existe $\alpha : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ continua y $\beta \in L^1(\mathbb{R}, |\mu|)$ no negativa tal que*

$$\|f(t,x)\| \leqslant \beta(t)\alpha(x).$$

Entonces el par (φ, I) es solución de (P), si para todo $t \in I$, se verifica que $(t,\varphi(t)) \in \Omega$, $\varphi \in BV(I, \mathbb{R}^n)$ y continua a izquierda en I; y además para todo conjunto de Borel A vale que

$$\mu_\varphi(A) = \int_A f(t,\varphi(t))\, d\mu.$$

Teorema 3.8 (Picard–Lindelöf). *Supongamos que f está acotada (es decir $\|f\|_\infty \leqslant M$), y satisface las condiciones (I) y (II) y* (3.2.1)*. Asumimos que μ es una medida de Borel definida en I y existe $\delta_1 > 0$ tal que $|\mu|([t_0, t_0 + \delta_1)) \leqslant r/M$. Si $\delta = min\{\delta_1, h\}$, el problema (P) tiene una única solución en el intervalo $[t_0, t_0 + \delta)$.*

[62] Pongamos medidas positivas

[63] Le falta algo al teorema, el r nunca fue presentado. Cuando traes cosas de otro lado tenes que adaptarlas al contexto en el que estas vos.

La demostración del teorema está en [5, Teorema 4.1]

3.2.2. Extensión de las soluciones

Definición 3.9 (Solución Máxima). *Sean $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $(t_0, x_0) \in \Omega$ y μ una medida de Borel finita. Si φ es solución del problema (P) en el intervalo $I = [t_0, t_0 + \delta)$, diremos que (φ, I) es la solución máxima si no hay otra solución (ψ, J) tal que $I \subset J$ y para todo $t \in I$ $\varphi(t) = \psi(t)$.*

Definición 3.10. *Sean μ una medida de Borel finita y $f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Diremos que f cumple con la* ***condiciones de teletransportación*** *en $\overline{B(0, R)}$, si para todo $t \in [0, T]$ tal que $\mu(\{t\}) \neq 0$ y $x \in \overline{B(0, R)}$ vale que*

$$x + f(t, x)\mu(\{t\}) \in \overline{B(0, R)},$$

donde $B(0, R)$ denota la bola abierta de $\mathbb{R}^n$ de radio R y centrada en el origen.

[64] Esta definición no la usas en esta sección, recién la usas por primera vez, creo, en el Teorema 3.30. Mejor introducila en ese lugar.

Teorema 3.11. *Sean μ una medida de Borel finita, f localmente Lipschitz respecto a la segunda variable ~~vectorial~~ y φ solución máxima de (P) en $I = [t_0, t_1)$. Entonces una y sólo una de las siguientes afirmaciones es verdadera:*

[65] Sería bueno especificar dominio y codominio de f, o decir que es igual que en otro enunciado

(I) *Para todo $K \Subset \Omega$ existe $t_2 \in I$ tal que $(t, \varphi(t)) \notin K$ para todo $t \in (t_2, t_1)$.*

(II) *Existe el límite $x_1 = \lim\limits_{t \to t_1^-} \varphi(t)$ y este límite satisface que, ~~tal que~~ $(t_1, x_1) \in \Omega$ y*

$$\Big(t_1, x_1\cancel{\varphi(t_1)} + f(t_1, x_1\cancel{\varphi(t_1)})\mu(\{t_1\})\Big) \notin \Omega.$$

La demostración de este resultado se puede ver en [5, Teorema 5.5].

3.2.3. Teorema de Cambio de Variables

[**66**] Esta es una subsección de la sección “Existencia de Soluciones de MDE”. Me parece que no tiene tanto que ver con eso. La recategorizaría como sección

[**67**] Te sugiero ingresar de siguiente modo en el glosario: `\index{Teorema!Cambio` `Variables}`. Si vos ahora pones (por ejemplo) `\index{Teorema!Radon-` va a escribir una vez la palabra Teorema y cada Teorema va a ser una subentrada de la palabra Teorema

[68] Todavía no apareció F, el que lee no le va a decir mucho

Vamos a demostrar una generalización ~~del Teorema de Cambio de Variables~~ [5, Teorema 6.1] que es un resultado sobre cambios de variables en integrales respecto a medidas de Lebesgue-Stieltjes. , para el caso donde $|F''| < M$, . En [5, Teorema 6.1] el resultado fue probado cuando cierta función F es convexa, aquí lo extenderemos para funciones con derivada segunda acotada. Posteriormente ~~el cual~~ usaremos nuestro resultado para demostrar una desigualdad del tipo de la desigualdad de Gronwall.

Empecemos enunciando el siguiente lema de cubrimiento demostrado en [10, Corolario I, p 35].

En la sección Bibliografía, habría que uniformizar la presentación de los autores (en algunos casos aparecen los nombres completos, en otros sólo la inicial).

Lema 3.12 (Lema de cubrimiento)**.** *Sea μ una medida de Borel en $\mathbb{R}^n$, y $\mathcal{F}$ cualquier colección de bolas cerradas. Sea A el conjunto de los centros de las bolas en $\mathcal{F}$. Supongamos que $\mu(A) < \infty$ y que $\inf\{r \mid B(a,r) \in \mathcal{F}\} = 0$ para cada $a \in A$. Entonces, para todo conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ existe una sucesión numerable $\mathcal{G}$ de bolas de $\mathcal{F}$ tal que*

$$\bigcup_{B \in \mathcal{G}} B \subset U \quad y \quad \mu\left((A \cap U) \setminus \bigcup_{B \in \mathcal{G}} B\right) = 0.$$

Teorema 3.13. *Asumamos que $J \subset \mathbb{R}$ es un intervalo abierto. Sea $F : J \to \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que F' es acotada y absolutamente continua. Además, supongamos que existe $M \geqslant 0$ tal que $F'' \geqslant \cancel{\geqslant} -M$ λ-en casi todo punto. Entonces, para toda función $g : I \to J$ no decreciente y continua a izquierda, donde I es un intervalo abierto, y para todo $A \in \mathcal{B}(I)$ vale que*

$$\int_A F'(g(s))\, dg \leqslant \mu_{F \circ g}(A) + \frac{M}{2} \sum_{t \in D \cap A} \mu_g(\{\tau\})^2,$$

donde $D = \{\tau \in I \mid \mu_g(\{\tau\}) > 0\}$.

Observación 3.14. El Teorema 6.1 de [5] se deduce del Teorema 3.13 tomando $M = 0$, pues F sería convexa y

$$\int_A F'(g(s))\, dg \leqslant \mu_{F \circ g}(A),$$

para todo $A \in \mathcal{B}(I)$.

Antes de comenzar con la demostración, vamos a ver los siguientes lemas que nos serán utiles.

Lema 3.15. *Sea F bajo las hipótesis del Teorema 3.13. Supongamos que $|F'| \leqslant R$, entonces para cualquier función $g : I \to J$ creciente y continua a izquierda, y para $[a,b) \subset I$ vale que .*

[69] Demostrar la desigual para todo boreliano $A \subset I$, no solo para $A = [a,b)$

$$|\mu_{F\circ g}([a,b))| \leqslant R\mu_g([a,b)). \tag{3.2.2}$$

En particular, vale que $\mu_{F\circ g} \ll \mu_g$.

Dem. Para $[a,b) \subset I$, llamemos $x = g(a)$ e $y = g(b)$. Como g es creciente entonces $x \leqslant y \cancel{x < y}$, y dado que F' es continua, podemos aplicar el teorema del valor medio del cálculo diferencial. Luego, existe en $c \in (x,y)$ tal que

[70] hay un pequeño detalle, como I es abierto podría ocurrir que $b \notin I$

$$\frac{|F(y) - F(x)|}{y - x} = |F'(c)| \leqslant \sup_{t\in J} |F'(t)|,$$

y como $|F'| \leqslant R \cancel{|F'| < R}$ para $R > 0$, entonces

$$|F(y) - F(x)| \leqslant R(y - x). \tag{3.2.3}$$

Por lo tanto, para todo intervalo $[a,b) \in I$

$$|\mu_{F\circ g}([a,b))| \leqslant R\mu_g([a,b)).$$

Ahora, para $(a,b) \in \mathcal{B}(I)$ se tiene que

$$\begin{aligned}|\mu_{F\circ g}((a,b))| = \left|\mu_{F\circ g}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[a + \frac{1}{n}, b\right)\right)\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\mu_{F\circ g}\left(\left[a + \frac{1}{n}, b\right)\right)\right| \\ &\leqslant R\lim_{n\to\infty}\mu_g\left(\left[a + \frac{1}{n}, b\right)\right) = R\mu_g((a,b)). \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

Sea $A \in \mathcal{B}(I)$, $\forall\epsilon > 0$ existe una sucesión de intervalos disjuntos (a_i,b_i) tal que $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i,b_i)$ y por [12, Lema 1.7]

$$\sum_{i=1}^{\infty}\mu_g(a_i,b_i) \leqslant \mu_g(A) + \epsilon,$$

No sería $\mu_g((a_i,b_i))$?

luego por (3.2.4)

$$\mu_{F\circ g}(A) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty}\mu_{F\circ g}(a_i,b_i) \leqslant R\sum_{i=1}^{\infty}\mu_g(a_i,b_i) \leqslant R\mu_g(A) + R\epsilon.\cancel{\mu_g(A) + \epsilon}. \tag{3.2.5}$$

En la primera desigualdad de la cadena anterior usas la monotonía de la medida ($A \subset B \Rightarrow \mu_{F\circ g}(A) \leqslant \mu_{F\circ g}(B)$. Sin embargo las medidas con signo dejan de tener esta propiedad pues podría ser que $\mu_{F\circ g}(B - A) < 0$. Mejor charlemos sobre la demostración de este resultado, para mi una vez que lo demostraste para intervalos $[x, y)$ pasas al álgebra que generan y de allí a la definición de medida.

Por otro lado, existe una sucesión de intervalos disjuntos (a_j, b_j) tal que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu_{F\circ g}(a_j, b_j) \leqslant \mu_{F\circ g}(A) + \epsilon,$$

usando nuevamente (3.2.4) llegamos a que

$$-R\sum_{j=1}^{\infty} \mu_g(a_j, b_j) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \mu_{F\circ g}(a_j, b_j) \leqslant \mu_{F\circ g}(A) + \epsilon.$$

Tomando supremo sobre los intervalos (a_j, b_j) cuya unión numerable contienen al conjunto A, vemos que

$$-R\mu_g(A) = R\sup\left\{-\sum_{j=1}^{\infty} \mu_g(a_j, b_j) \mid A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty}(a_j, b_j)\right\}$$
$$\leqslant \mu_{F\circ g}(A) + \epsilon. \quad (3.2.6)$$

Luego de (3.2.5) y (3.2.6), tenemos que $\forall\epsilon > 0$

$$-\mu_g(A) - \epsilon \leqslant \mu_{F\circ g}(A) \leqslant \mu_g(A) + \epsilon. \quad (3.2.7)$$

Por lo tanto, para todo conjunto $A \in \mathcal{B}(I)$ vale que

$$|\mu_{F\circ g}(A)| \leqslant R\mu_g(A).$$

De lo anterior, podemos deducir que $\forall\epsilon > 0$ existe $\delta = \epsilon/R$ tal que si $\mu_g(A) \leqslant \delta$ entonces $|\mu_{F\circ g}(A)| \leqslant \epsilon$, y por el [12, Teorema 3.5] es necesario y suficiente que $\mu_{F\circ g} \ll \mu_g$.

□

Lema 3.16. *Asumamos $J \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto. Sea $F : J \to \mathbb{R}$ con las hipótesis del Teorema (3.13). Entonces, para cualquier función continua y creciente $g : I \to J$, donde I es un intervalo abierto, y para todo $A \in \mathcal{B}(I)$ vale que*

$$\int_A F'(g(s))\, dg = \mu_{F\circ g}(A). \quad (3.2.8)$$

Observación 3.17. Como g es continua, entonces $F \circ g$ también lo es. Por lo tanto

$$\mu_{F\circ g}([a,b)) = \mu_{F\circ g}((a,b)) = \mu_{F\circ g}([a,b]),$$

lo cual no es verdadero si g es únicamente continua a izquierda (ver [8, Ejemplo 4.1.1]).

Dem. Para todo intervalo $(t_1, t_2) \subset I$, como g es continua y creciente resulta que $(g(t_1), g(t_2))$ es un intervalo de J, luego por [8, Teorema 6.2.1]

$$\begin{aligned}\mu_{F\circ g}((t_1,t_2)) &= F(g(t_2)) - F(g(t_1)) \\ &= \int_{g(t_1)}^{g(t_2)} F'(s)ds = \int_{(t_1,t_2)} F'(g(s))\, dg. \quad (3.2.9)\end{aligned}$$

Como para todo conjunto abierto $A \in \mathcal{B}(I)$, existe una sucesión de intervalos disjuntos y abiertos tal que $A = \bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i)$. Entonces vale que

$$\begin{aligned}\mu_{F\circ g}(A) &= \mu_{F\circ g}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i,b_i)\right) = \sum_{i=1}^{\infty}\mu_{F\circ g}((a_i,b_i)) \\ &= \int_{\bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i,b_i)} F'(g(s))\, dg = \int_A F'(g(s))\, dg.\end{aligned}$$

□

Dem. Teorema (3.13). Sea $A \in \mathcal{B}(I)$, vamos a ver primero el caso particular cuando $A \cap D$ se reduce a un punto. Para cualesquiera x e y en J, por el teorema de Taylor (ver [10, pg 13]), existe c entre x e y tal que

$$F(y) = F(x) + F'(x)(y-x) + 1/2F''(c)(y-x)^2.$$

Como $F'' > -M$, entonces

$$F(y) > F(x) + F'(x)(y-x) - \frac{M}{2}(y-x)^2,$$

o equivalentemente

$$F'(x)(y-x) < F(y) - F(x) + \frac{M}{2}(y-x)^2. \quad (3.2.10)$$

Como dijimos, supongamos $A \cap D = \{\tau_0\}$, entonces para $n \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$\int_A F'(g(s))\,dg =$$
$$\int_{\{\tau_0\}} F'(g(s))\,dg + \int_{(\tau_0,\tau_0+\frac{1}{n})} F'(g(s))\,dg + \int_{A\setminus[\tau_0,\tau_0+\frac{1}{n})} F'(g(s))\,dg$$
$$=: I_1 + I_2 + I_3.$$

Vamos a estimar cada integral por separado.

Por (3.2.10) tenemos que

$$I_1 = \int_{\{\tau_0\}} F'(g(s))dg(s) = F'(g(\tau_0))\left[g(\tau_0^+) - g(\tau_0)\right] \leqslant$$
$$\leqslant F(g(\tau_0^+)) - F(g(\tau_0)) + \frac{M}{2}\left[g(\tau_0^+) - g(\tau_0)\right]^2,$$

es decir

$$I_1 \leqslant \mu_{F\circ g}(\{\tau_0\}) + \frac{M}{2}\left[\mu_g(\{\tau_0\})\right]^2. \tag{3.2.11}$$

Para acotar I_2, como

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\tau_0, \tau_0 + \frac{1}{n}\right) = \varnothing \text{ y } \left(\tau_0, \tau_0 + \frac{1}{n}\right) \supset \left(\tau_0, \tau_0 + \frac{1}{n+1}\right)$$

entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_g\left(\left(\tau_0, \tau_0 + \frac{1}{n}\right)\right) = 0$. Luego, para todo $\epsilon > 0$ existe un n_0 tal que $\forall n > n_0$ vale que $\mu_g\left(\left(\tau_0, \tau_0 + \frac{1}{n}\right)\right) < \epsilon$; y, como F' está acotada, existe $R > 0$ tal que

$$|I_2| \leqslant \int_{(\tau_0,\tau_0+\frac{1}{n})} |F'(g(s))|\,dg \leqslant R\mu_g\left(\left(\tau_0, \tau_0 + \frac{1}{n}\right)\right) < R\epsilon.$$

Finalmente para estimar I_3, como para todo $t \in A\setminus\left[\tau_0, \tau_0 + \frac{1}{n}\right)$ vale que $\mu_g(\{t\}) = 0$, entonces por la observación 2.18 g es continua en $A\setminus\left[\tau_0, \tau_0 + \frac{1}{n}\right)$. Luego podemos aplicar el lema 3.16 en I_3,

$$I_3 = \int_{A\setminus\left[\tau_0,\tau_0+\frac{1}{n}\right)} F'(g(s))\,dg = \mu_{F\circ g}\left(A\setminus\left[\tau_0, \tau_0 + \frac{1}{n}\right)\right).$$

Luego por (I_1), (I_2) y (I_3) tenemos que $\forall \epsilon > 0$

$$\begin{aligned}\int_A F'(g(s))\,dg &= \int_{\{\tau_0\}} F'(g(s))\,dg + \int_{(\tau_0,\tau_0+\frac{1}{n})} F'(g(s))\,dg \\ &+ \int_{A\setminus[\tau_0,\tau_0+\frac{1}{n})} F'(g(s))\,dg \\ &\leqslant \mu_{F\circ g}(\{\tau_0\}) + \frac{M}{2}\left[\mu_g(\{\tau_0\})\right]^2 + R\epsilon \\ &+ \mu_{F\circ g}\left(A\setminus\left[\tau_0, \tau_0 + \frac{1}{n}\right)\right).\end{aligned}$$

Como $\mu_{F\circ g}(\{\tau_0\})+\mu_{F\circ g}\left(A\backslash\left[\tau_0,\tau_0+\frac{1}{n}\right)\right)=\mu_{F\circ g}\left(A\backslash\left(\tau_0,\tau_0+\frac{1}{n}\right)\right)$ y además $\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\tau_0,\tau_0+\dfrac{1}{n}\right)=\varnothing$, entonces

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A\backslash\left(\tau_0,\tau_0+\frac{1}{n}\right)=A \quad \text{y} \quad \mu_{F\circ g}(A)=\lim_{n\to\infty}\mu_{F\circ g}\left(A\backslash\left(\tau_0,\tau_0+\frac{1}{n}\right)\right).$$

Tomando n suficientemente grande obtenemos

$$\mu_{F\circ g}\left(A\backslash\left(\tau_0,\tau_0+\frac{1}{n}\right)\right)\leqslant \epsilon+\mu_{F\circ g}(A).$$

Luego,

$$\int_A F'(g(s))\,dg\leqslant\frac{M}{2}\left[\mu_g(\{\tau_0\})\right]^2+R\epsilon+\epsilon+\mu_{F\circ g}\left(A\right),$$

y haciendo tender ϵ a 0 concluimos que

$$\int_A F'(g(s))\,dg\leqslant\mu_{F\circ g}(A)+\frac{M}{2}\left[\mu_g(\{\tau_0\})\right]^2. \tag{3.2.12}$$

Supongamos ahora que $A\in\mathcal{B}(I)$ es un conjunto abierto cualquiera. Luego por el lema 3.15 y [12, Teorema 3.5], para cualquier $\epsilon>0$ va a existir $\delta_1=\epsilon/R$ tal que si $\mu_g(A)<\delta_1$, entonces

$$\int_A |F'(g(s))|dg(s)<\epsilon. \tag{3.2.13}$$

Por otro lado, como F' es uniformemente continua entonces existe $\delta_2<\epsilon$ tal que

$$|t_1-t_2|\leqslant\delta_2\Rightarrow|F'(t_1)-F'(t_2)|\leqslant\epsilon. \tag{3.2.14}$$

Sea $B=\{s\in A\mid\mu_g(\{s\})\geqslant\delta_2\}$, como μ_g es una medida finita, entonces B es un conjunto finito, es decir $B=\{s_1,s_2,\cdots,s_m\}$. Para $j\in\mathbb{N}$ consideremos el conjunto $B_j=\bigcup_{i=1}^{m}(s_i,s_i+1/j]$. Como $\bigcap_{j=1}^{\infty}B_j=\varnothing$ entonces $\lim_{j\to\infty}\mu_g(B_j)=0$, por lo tanto existe $j_0\in\mathbb{N}$ tal que $\mu_g(B_{j_0})<\delta_1$, y por (3.2.13)

$$\int_{B_{j_0}}|F'(g(s))|\,dg(s)<\epsilon.$$

Sea $C=A\backslash B_{j_0}$, observemos que

- C es un conjunto abierto.
- Si $t\in C$ entonces

$$\delta_2>\mu_g(\{t\})=\mu_g\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}[t-1/k,t+1/k]\right)=\lim_{k\to\infty}\mu_g\left([t-1/k,t+1/k]\right)$$

y existe k_0 tal que $\forall k > k_0$

$$\mu_g\left([t-1/k, t+1/k]\right) \leqslant \delta_2,$$

luego llamando $\delta_t = 1/k_0$ podemos decir que $\mu_g\left([t-\delta_t, t+\delta_t]\right) < \delta_2$.

Por lo tanto, para cada $t \in C$ existe δ_t tal que $\mu_g\left([t-\delta_t, t+\delta_t]\right) < \delta_2$, es decir podemos cubrir el conjunto C con elementos de la familia de bolas cerradas $\mathcal{F} = \{[t-\delta, t+\delta] \text{ tal que } t \in C \text{ y } \delta \leqslant \delta_t\}$.

Usando el Lema de cubrimiento 3.12 tomando $U = C$, existen un subcubrimiento numerable, es decir, existe $t_n \in C$ y $\delta_n > 0$ tal que los intervalos
$[t_n-\delta_n, t_n+\delta_n]$ son disjuntos, $\bigcup_{n=1}^{\infty}[t_n-\delta_n, t_n+\delta_n] \subset C$ y

$$\mu_g\left(C \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty}[t_n-\delta_n, t_n+\delta_n]\right) = 0. \tag{3.2.15}$$

Además, si $r_1, r_2 \in [t_n-\delta_n, t_n+\delta_n]$ entonces

$$|g(r_1)-g(r_2)| \leqslant \mu_g\left([t_n-\delta_n, t_n+\delta_n]\right) < \delta_2 \tag{3.2.16}$$

y por (3.2.14),

$$|F'(g(r_1)) - F'(g(r_2))| \leqslant \epsilon \quad \forall r_1, r_2 \in [t_n-\delta_n, t_n+\delta_n] \tag{3.2.17}$$

Luego, como $A = \overline{B_{j_0}} \cup C = B \cup B_{j_0} \cup C$,

$$\int_A F'(g(s))dg(s) = \sum_{i=1}^{m}\left[\int_{\{s_i\}} F'(g(s))dg(s)\right] + \int_{B_{j_0}} F'(g(s))dg(s) + \int_C F'(g(s))dg(s).$$

Dado que $|\mu_g(B_{j_0})| < \delta_1$, por (3.2.13),(3.2.15) y (3.2.10)

$$\begin{aligned}
&\int_A F'(g(s))dg(s) \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{m}\left[F'(g(s_i)\left(g(s_i^+)-g(s_i)\right)\right] + \epsilon + \sum_{n=1}^{\infty}\int_{[t_n-\delta_n, t_n+\delta_n]} F'(g(s))dg(s) \\
&\qquad \leqslant \sum_{i=1}^{m}\left[\left(F(g(s_i^+)-F(g(s_i))\right) + \frac{M}{2}\left(g(s_i^+)-g(s_i)\right)^2\right] + \epsilon \\
&\qquad\qquad + \sum_{n=1}^{\infty}\int_{[t_n-\delta_n, t_n+\delta_n]} F'(g(s))dg(s),
\end{aligned}$$

sumo y resto $F'(g(t_n-\delta_n))$ en la última integral,

$$\begin{aligned}\int_A F'(g(s))dg(s) &\leqslant \mu_{F\circ g}(B)+\frac{M}{2}\sum_{i=1}^{m}\left[\mu_g(\{s_i\})\right]^2+\epsilon\\ &+\sum_{n=1}^{\infty}\int_{[t_n-\delta_n,t_n+\delta_n]}F'(g(s))-F'(g(t_n-\delta_n))dg(s)\\ &+\sum_{n=1}^{\infty}\int_{[t_n-\delta_n,t_n+\delta_n]}F'(g(t_n-\delta_n))dg(s).\end{aligned}$$

Integrando en la primera sumatoria, y usando (3.2.17) en la segunda, tenemos que

$$\begin{aligned}\int_A F'(g(s))dg(s) &\leqslant \mu_{F\circ g}(B)+\frac{M}{2}\sum_{i=1}^{m}\left[\mu_g(\{s_i\})\right]^2\\ &+\epsilon\sum_{n=1}^{\infty}\mu_g\left([t_n-\delta_n,t_n+\delta_n]\right)\\ &+\sum_{n=1}^{\infty}F'(g(t_n-\delta_n))\mu_g([t_n-\delta_n,t_n+\delta_n])+\epsilon,\end{aligned} \tag{3.2.18}$$

la ultima sumatoria la podemos acotar de la siguiente manera,

$$\begin{aligned}&F'(g(t_n-\delta_n))\mu_g([t_n-\delta_n,t_n+\delta_n])\\ &\qquad = F'(g(t_n-\delta_n))\left[g((t_n+\delta_n)^+)-g(t_n-\delta_n)\right],\end{aligned}$$

vuelvo a usar (3.2.10)

$$\begin{aligned}F'(g(t_n-\delta_n))\mu_g([t_n-\delta_n,t_n+\delta_n]) &\leqslant F(g((t_n+\delta_n^+)))-F(g(t_n-\delta_n))\\ &+\frac{M}{2}\left[g((t_n+\delta_n)^+)-g(t_n-\delta_n)\right]^2\end{aligned}$$

o equivalentemente,

$$\begin{aligned}F'(g(t_n-\delta_n))\mu_g([t_n-\delta_n,t_n+\delta_n]) &\leqslant \mu_{F\circ g}\left([t_n-\delta_n,t_n+\delta_n]\right)\\ &+\frac{M}{2}\left[\mu_g\left([t_n-\delta_n,t_n+\delta_n]\right)\right]^2,\end{aligned}$$

Por lo tanto la ecuación (3.2.18) nos queda

$$\begin{aligned}\int_A F'(g(s))dg(s) &\leqslant \mu_{F\circ g}(B)+\frac{M}{2}\sum_{i=1}^{m}\left[\mu_g(\{s_i\})\right]^2\\ &+\epsilon+\epsilon\mu_g\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}[t_n-\delta_n,t_n+\delta_n]\right)\\ &+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\mu_{F\circ g}\left([t_n-\delta_n,t_n+\delta_n]\right)+\frac{M}{2}\left[\mu_g\left([t_n-\delta_n,t_n+\delta_n]\right)\right]^2\right].\end{aligned}$$

Como los intervalos $[t_n+\delta_n, t_n-\delta_n]$ son disjuntos y cubren casi todo C, salvo en un conjunto μ_g-nulo, entonces

$$\int_A F'(g(s))dg(s) \leqslant \mu_{F\circ g}(B) + \frac{M}{2}\sum_{i=1}^{m}\left[\mu_g(\{s_i\})\right]^2 + \epsilon + \epsilon\mu_g\left(C\right)$$
$$+\,\mu_{F\circ g}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}[t_n+\delta_n, t_n-\delta_n]\right) + \frac{M}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\mu_g\left([t_n+\delta_n, t_n-\delta_n)\right)\right]^2.$$

Dado que $\bigcup_{n=1}^{\infty}[t_n+\delta_n, t_n-\delta_n]$ cubre todo el conjunto C salvo un conjunto $\mu_{F\circ g}$-nulo y (3.2.16), tenemos que

$$\int_A F'(g(s))dg(s) \leqslant \mu_{F\circ g}(B) + \frac{M}{2}\sum_{i=1}^{m}\left[\mu_g(\{s_i\})\right]^2 + \epsilon + \epsilon\mu_g\left(C\right)$$
$$+\,\mu_{F\circ g}\left(C\right) + \frac{M}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\delta_2\mu_g\left([t_n+\delta_n, t_n-\delta_n)\right).$$

Dado que $C = A\backslash\overline{B_{j_0}} = A\backslash(B\bigcup B_{j_0})$ entonces, por el modo en que elegimos B_{j_0} vale que

$$\mu_{F\circ g}(A) = \mu_{F\circ g}(B) + \mu_{F\circ g}(B_{j_0}) + \mu_{F\circ g}(C).$$

Además por (3.2.3) tenemos que

$$|\mu_{F\circ g}(B_{j_0})| \leqslant R\mu_g(B_{j_0}) \leqslant R\delta_1 = \epsilon,$$

entonces

$$\mu_{F\circ g}(A) \geqslant \mu_{F\circ g}(B) - \epsilon + \mu_{F\circ g}(C).$$

Reemplazando en (3.2.3) tenemos que

$$\int_A F'(g(s))dg(s) \leqslant \mu_{F\circ g}(A) + \frac{M}{2}\sum_{i=1}^{m}\left[\mu_g(\{s_i\})\right]^2 + \epsilon\left(2 + \mu_g(C)\right)$$
$$+\,\frac{M}{2}\delta_2\sum_{n=1}^{\infty}\mu_g\left([t_n+\delta_n, t_n-\delta_n)\right).$$

Como $\delta_2 \leqslant \epsilon$

$$\int_A F'(g(s))dg(s) \leqslant \mu_{F\circ g}(A) + \frac{M}{2}\sum_{i=1}^{m}\left[\mu_g(\{s_i\})\right]^2 + \epsilon(2+\mu_g\left(C\right)) + \frac{M\epsilon}{2}\mu_g\left(C\right),$$

cuando $\epsilon \to 0$, entonces $\delta_2 \to 0$ y por lo tanto el conjunto $B = \{s \in A \mid \mu_g(\{s\}) \geqslant \delta_2\}$ es igual a $D \cap A = \{s \in A \mid \mu_g(\{s\}) > 0\}$ y tenemos que

$$\int_A F'(g(s))dg(s) \leqslant \mu_{F\circ g}(A) + \frac{M}{2}\sum_{s\in D\cap A}[\mu_g(\{s\})]^2\,. \tag{3.2.19}$$

□

Podemos generalizar el Teorema 3.13 de la siguiente manera

Teorema 3.18. *Sea $J \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto, $F : J \to \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que F' es acotada y absolutamente continua. Además, supongamos que existe $M \geqslant 0$ tal que $|F''| < M$. Entonces, para toda función $g : I \to J$ creciente y continua a izquierda, donde I es un intervalo y para todo $A \in \mathcal{B}(I)$ vale que*

$$\left|\int_A F'(g(s))\,dg - \mu_{F\circ g}(A)\right| \leqslant \frac{M}{2}\sum_{\tau\in D\cap A}[\mu_g(\{\tau\})]^2\,,$$

donde $D = \{\tau \in I \mid \mu_g(\{\tau\}) > 0\}$.

Dem. Como $|F''| > M$, entonces $F'' > -M$ y usando el teorema 3.13

$$\int_A F'(g(s))\,dg - \mu_{F\circ g}(A) \leqslant \frac{M}{2}\sum_{\tau\in D\cap A}[\mu_g(\{\tau\})]^2\,. \tag{3.2.20}$$

Por otro lado, si $H = -F$ vale que $H'' = -F''$ y $F'' < M$ entonces $H'' > -M$ y podemos aplicar el teorema 3.13 a H, y tenemos que

$$\int_A H'(g(s))\,dg \leqslant \mu_{H\circ g}(A) + \frac{M}{2}\sum_{\tau\in D\cap A}[\mu_g(\{\tau\})]^2\,. \tag{3.2.21}$$

Como para todo intervalo $[a, b) \subset I$

$$\mu_{H\circ g}([a,b)) = H(g(b)) - H(g(a)) = -\left(F(g(b)) - F(g(a))\right) = -\mu_{F\circ g}([a,b))$$

por el [12, Lema 1.17] podemos extender la igualdad a todo conjunto $A \in \mathcal{B}(I)$. Luego, de (3.2.21) tenemos que

$$\int_A -F'(g(s))\,dg \leqslant -\mu_{F\circ g}(A) + \frac{M}{2}\sum_{\tau\in D\cap A}[\mu_g(\{\tau\})]^2\,,$$

o equivalentemente,

$$-\frac{M}{2}\sum_{\tau\in D\cap A}\mu_g(\{\tau\}) \leqslant \int_A F'(g(s))\,dg - \mu_{F\circ g}(A). \tag{3.2.22}$$

Por lo tanto, de (3.2.20) y (3.2.22), concluimos que

$$-\frac{M}{2}\sum_{\tau\in D\cap A}\mu_g(\{\tau\}) \leqslant \int_A F'(g(s))\,dg - \mu_{F\circ g}(A) \leqslant \frac{M}{2}\sum_{\tau\in D\cap A}[\mu_g(\{\tau\})]^2$$

$$\left|\int_A F'(g(s))\,dg - \mu_{F\circ g}(A)\right| \leqslant \frac{M}{2}\sum_{\tau\in D\cap A}[\mu_g(\{\tau\})]^2\,.$$

□

3.3. Método Shooting

Como vimos en la sección anterior, bajo las hipótesis del teorema 3.8 existe $\varphi_\alpha : [0,T] \to \mathbb{R}^n$, solución al problema de valores iniciales

$$\begin{cases} d(\varphi) = f(t,\varphi(t))d\mu \\ \varphi(0) = \alpha. \end{cases} \tag{P}$$

El método Shooting consiste en hallar un $\alpha \in \mathbb{R}^n$ tal que $\varphi_\alpha(T) = \alpha$. Por lo tanto, para ese valor de α la solución al problema de valores iniciales $\varphi_\alpha(t)$ es también solución al problema periódico

$$\begin{cases} d(\varphi) = f(t,\varphi(t))d\mu \\ \varphi(0) = \varphi(T). \end{cases}$$

3.3.1. Desigualdad de Gronwall

Enunciaremos primero una generalización para medidas de Borel del teorema de integración por partes, a continuación demostraremos una desigualdad del tipo Gronwall pero para medidas continuas y por último una desigualdad mejorada para una medida de Borel positiva cualquiera.

Teorema 3.19. *Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y sean $f, g \in BV(I,\mathbb{R})$ continuas a izquierda. Supongamos que D es el conjunto donde f y g son simultáneamente discontinuas. Entonces para todo conjunto de Borel $A \subset I$*

$$\int_A f \quad dg + \int_A g \quad df = \mu_{fg}(A) - \sum_{\tau \in D \bigcap A} \mu_f(\{\tau\})\mu_g(\{\tau\}). \tag{3.3.1}$$

La demostración de este teorema se puede ver en [8, Teorema 6.2.2].

Lema 3.20. *Sea μ una medida finita, positiva y continua. Si $u \in L^1(\mu)$ tal que*

$$u(t) \leqslant c + \int_{[0,t)} u(r)\, d\mu.$$

Entonces $u(t) \leqslant ce^{\mu([0,t))}$.

Dem. Si llamamos $w(t) = c + \int_{[0,t)} u(r)\, d\mu(r)$, la medida de Lebesgue-Stieljes μ_w asociada w satisface

$$\mu_w([t_1,t_2)) = w(t_2) - w(t_1) = \int_{[t_1,t_2)} u(r)\, d\mu.$$

Luego, por ~~el~~ [12, Teorema 3.5], $\mu_w \ll \mu$ y para toda función $g \in L^1(\mu)$ y cualquier conjunto A de Borel, vale que

$$\int_A g(r)\, dw = \int_A u(r)g(r)\, d\mu.$$

Como $u(r) \leqslant w(r)$,

$$\begin{aligned}\int_{[0,t)} \exp\left(-\mu([0,r))\right)\, dw &= \int_{[0,t)} \exp\left(-\mu([0,r))\right) u(r)\, d\mu \\ &\leqslant \int_{[0,t)} \exp\left(-\mu([0,r))\right) w(r)\, d\mu.\end{aligned} \tag{3.3.2}$$

Sea $F(s) = -e^{-s}$ y $h(t) = \mu([0,t))$, entonces la desigualdad (3.3.2) se puede escribir como

$$\int_{[0,t)} -F(h(r))\, dw \leqslant \int_{[0,t)} F'(h(r))w(r)\, d\mu, \tag{3.3.3}$$

como F es una función diferenciable, su derivada está acotada y es absolutamente continua y $F'' > -2$ en $[0,T]$; y h es una función continua pues la medida es continua. Entonces podemos aplicar el lema 3.16, por lo cual tenemos

$$\int_{[0,t)} F'(h(r))\, d\mu = \mu_{F\circ h}([0,t))$$

y como $w \in L^1(\mu)$ entonces

$$\int_{[0,t)} F'(h(r))w(r)\, d\mu = \int_{[0,t)} w(r)\, d\mu_{F\circ h}.$$

Si reemplazo en la ecuación (3.3.3), tenemos que

$$\int_{[0,t)} -F\left(h(r)\right)\, dw \leqslant \int_{[0,t)} F'\left(h(r)\right) w(r)\, d\mu = \int_{[0,t)} w(r)\, d\mu_{F\circ h},$$

en otras palabras

$$0 \leqslant \int_{[0,t)} F(h(r))\, dw + \int_{[0,t)} w(r)\, d\mu_{F\circ h}.$$

Luego usando el Teorema 3.19 y que la medida μ es continua, tenemos que

$$0 \leqslant \int_{[0,t)} F(h(r))\, dw + \int_{[0,t)} w(r)\, \mu_{F\circ h} = \mu_{(F\circ h)w}([0,t))$$

y como $F(h(r)) = -\exp\left(-\mu([0,r))\right)$ entonces

$$0 \leqslant F(h(t)).w(t) - F(h(0))w(0) = -\exp\left(-\mu([0,t))\right) w(t) - (-1)c.$$

Entonces

$$\exp\left(-\mu([0,t))\right) w(t) \leqslant c$$

luego

$$u(t) \leqslant w(t) \leqslant c \exp\left(\mu([0,t))\right)$$

□

Definición 3.21. *Sea μ una medida positiva finita. Si*

$$D = \{\tau \in [0,T] \mid \mu(\{\tau\}) > 0\},$$

para todo A conjunto de Borel definimos

$$\mu_a(A) = \sum_{\tau \in D \cap A} \mu\{(\tau\}).$$

Observación 3.22.

1. Sea μ_a una medida y sea $\{E_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathscr{B}$ una sucesión de conjuntos disjuntos, entonces

$$\begin{aligned} \mu_a\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) &= \sum_{\tau \in D \cap (\cup E_j)} \mu(\{\tau\}) = \sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{\tau \in D \cap E_j} \mu(\{\tau\})\right) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \mu_a(E_j). \end{aligned}$$

2. La medida $\mu_a \leqslant \mu$.

3. Si llamamos $\bar{\mu} = \mu - \mu_a$, luego $\bar{\mu}$ es una medida positiva, finita y además, $\bar{\mu} \leqslant \mu$. Como para todo τ tenemos que $\mu(\{\tau\}) = \mu_a(\{\tau\})$, entonces $\bar{\mu}$ es una medida continua.

Vamos a necesitar un resultado elemental cuya demostración está en [2, Teorema 8.1.1].

Teorema 3.23. *Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales positivos. Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ si y sólo si $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ es convergente. En tal caso, vale la desigualdad*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leqslant \prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n) \leqslant \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right).$$

Teorema 3.24 (**Desigualdad Mejorada de Gronwall**)**.** *Sea μ una medida finita, positiva. Si $u \in L^1(\mu)$ tal que*

$$u(t) \leqslant c + \int_{[0,t)} u(r)\, d\mu.$$

Entonces

$$u(t) \leqslant cK(t)e^{K(t)\bar{\mu}([0,t))},$$

donde $K(t) = \prod_{\tau \in D \cap [0,t)} (1 + \mu(\{\tau\}))$.

Dem. Sea $[0,t) \subset [0,T]$, como μ es una medida finita, por el Lema 2.29, D es un conjunto numerable, y podemos suponer que $D \cap [0,t) = \{t_n\}_{n=1}^{\infty}$. Además, dado que

$$\mu(D \cap [0,t)) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{t_n\}) < \infty, \tag{3.3.4}$$

entonces por el Teorema 3.23

$$K(t) = \prod_{\tau \in D \cap [0,t)} (1 + \mu(\{\tau\})) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + \mu(\{t_n\})) < \infty.$$

Sea $\epsilon > 0$, por la absoluta continuidad de la integral existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } \mu(A) \leqslant \delta \quad \text{entonces} \quad \left| \int_A u(r)\, d\mu \right| \leqslant \epsilon.$$

Ahora por (3.3.4) existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=N+1}^{\infty} \mu(\{t_n\}) \leqslant \delta$. Sin perder generalidad, al conjunto $\{t_1, \cdots t_N\}$ lo puedo considerar ordenado de menor a mayor ya que es finito. Si llamamos $w(t) = c + \int_{[0,t)} u(s)\, d\mu$, entonces para $t > t_N$ vale que

$$w(t) = c + \int_{[0,t_N)} u(s)\, d\mu + \int_{\{t_N\}} u(s)\, d\mu + \int_{(t_N,t)} u(s)\, d\mu.$$

Escribiendo la primera integral como $w(t_N)$ y dado que $u(t_N) \leqslant w(t_N)$ tenemos que

$$\begin{aligned} w(t) &= w(t_N) + u(t_N)\mu(\{t_N\}) + \int_{(t_N,t)} u(s)\, d\mu \\ &\leqslant w(t_N)\,[1 + \mu(\{t_N\})] + \int_{(t_N,t)} u(s)\, d\mu, \end{aligned}$$

es decir,

$$w(t) \leqslant w(t_N)\,[1 + \mu(\{t_N\})] + \int_{(t_N,t)} u(s)\, d\mu. \tag{3.3.5}$$

Calculando $w(t_N)$ obtenemos la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned} w(t_N) &= c + \int_{[0,t_{N-1})} u(s)\, d\mu(s) + \int_{\{t_{N-1}\}} u(s)\, d\mu + \int_{(t_{N-1},t_N)} u(s)\, d\mu \\ w(t_N) &\leqslant w(t_{N-1})\,[1 + \mu(\{t_{N-1}\})] + \int_{(t_{N-1},t_N)} u(s)\, d\mu. \end{aligned} \tag{3.3.6}$$

Reemplazando en la ecuación (3.3.5) y dado que $1 < [1 + \mu(\{t_N\})]$, tenemos que

$$w(t) \leqslant w(t_{N-1})\,[1 + \mu(\{t_{N-1}\})]\,[1 + \mu(\{t_N\})] + [1 + \mu(\{t_N\})] \int_{(t_{N-1},t)-\{t_N\}} u(s)\, d\mu.$$

Si en la ecuación (3.3.6) cambiamos t_N por t_{N-1} y así sucesivamente, obtendremos que

$$w(t) \leqslant w(t_1)\,[1 + \mu(\{t_1\})] \cdots [1 + \mu(\{t_N\})] + [1 + \mu(\{t_2\})] \cdots [1 + \mu(\{t_N\})] \int_{(t_1,t)-\{t_2,\cdots,t_N\}} u(s)\, d\mu,$$

por como definimos a w deducimos que

$$w(t) \leqslant [1 + \mu(\{t_1\})] \cdots [1 + \mu(\{t_N\})] \left(c + \int_{[0,t_1)} u(s)\, d\mu \right) + [1 + \mu(\{t_2\})] \cdots [1 + \mu(\{t_N\})] \int_{(t_1,t)-\{t_2,\ldots,t_N\}} u(s)\, d\mu$$

como $1 < [1 + \mu(\{t_2\})] \cdots [1 + \mu(\{t_N\})] < \prod_{i=1}^{N} [1 + \mu(\{t_i\})] < K(t)$ y la medida μ es positiva

$$w(t) \leqslant cK(t) + K(t) \int_{[0,t)-\{t_1,\cdots,t_N\}} u(s)\, d\mu. \tag{3.3.7}$$

Si descomponemos la medida μ como la suma de dos medidas $\mu = \mu_a + \bar{\mu}$, donde μ_a se define como en la Definición 3.21, entonces

$$w(t) \leqslant cK(t) + K(t) \int_{[0,t)-\{t_1,\cdots,t_N\}} u(s)\, d\mu_a + K(t) \int_{[0,t)-\{t_1,\cdots,t_N\}} u(s)\, d\bar{\mu}. \tag{3.3.8}$$

Por otro lado, dado que D es el conjunto de todos los puntos de discontinuidad de μ, entonces tenemos que

$$\int_{[0,t)-\{t_1,\cdots,t_N\}} u(s)\, d\mu_a = \int_{[0,t)-D} u(s)\, d\mu_a + \int_{D-\{t_1,\cdots,t_N\}} u(s)\, d\mu_a.$$

Dado que

$$\int_{[0,t)-\{t_1,\cdots,t_N\}} u(s)\, d\mu_a = \int_{D-\{t_1,\cdots,t_N\}} u(s)\, d\mu_a$$

y que además $\mu\,(D - \{t_1, \cdots, t_N\}) = \mu_a\,(D - \{t_1, \cdots, t_N\}) = \sum_{j=N+1}^{\infty} \mu(\{t_j\}) \leqslant \delta$, entonces

$$\int_{[0,t)-\{t_1,\cdots,t_N\}} u(s)\, d\mu_a \leqslant \epsilon.$$

Reemplazando en la ecuación (3.3.8), obtenemos

$$w(t) \leqslant cK(t) + K(t)\epsilon + K(t)\int_{[0,t)-\{t_1,\cdots,t_N\}} u(s)\ d\bar{\mu},$$

dado que $\bar{\mu}\left(\{t_1,\cdots,t_N\}\right) = 0$, entonces

$$w(t) \leqslant cK(t) + K(t)\epsilon + K(t)\int_{[0,t)} u(s)\ d\bar{\mu}.$$

Cuando $\epsilon \to 0$, nos queda la siguiente desigualdad

$$u(t) \leqslant w(t) \leqslant cK(t) + K(t)\int_{[0,t)} u(s)\ d\bar{\mu},$$

y como $K(r)$ es creciente para todo $r \in [0,t]$ tenemos que

$$u(r) \leqslant w(r) \leqslant cK(t) + K(t)\int_{[0,r)} u(s)\ d\bar{\mu}.$$

Si llamamos $\eta(A) = K(t)\bar{\mu}(A)$, η es una medida continua al igual que $\bar{\mu}$ y la ecuación anterior se convierte en

$$u(r) \leqslant w(r) \leqslant C + \int_{[0,r)} u(s)\ d\eta,$$

tomando $C = cK(t)$. Luego, podemos aplicar el Lema 3.20 y por lo tanto

$$u(r) \leqslant Ce^{\eta([0,r))};$$

ahora volviendo a la medida $\bar{\mu}$ y reemplazando C, tenemos que para todo $r \leqslant t$

$$u(r) \leqslant cK(t)e^{K(t)\bar{\mu}([0,r))};$$

en particular, si tomamos $r = t$,

$$u(t) \leqslant cK(t)e^{K(t)\bar{\mu}([0,t))}.$$

□

3.3.2. Operador de Poincaré

Llamaremos φ_α a solución del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} d\varphi = f(t,\varphi(t))d\mu \\ \varphi(0) = \alpha, \end{cases} \tag{3.3.9}$$

definida en 3.7. De aquí en adelante vamos a suponer que $f : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ está acotada, es decir $||f||_\infty < M$ y cumple con:

(P-1) Para cada $x \in \mathbb{R}^n$, $f(t,x)$ μ-medible en la variable t y continua.

(P-2) Para cada $t \in [0,T]$, $f(t,x)$ es continua y acotada en la variable x.

(P-3) Existen a, b positivos tal que

$$|f(t,x)| \leqslant a|x| + b.$$

(P-4) Existe $L \in \mathbb{R}$ tal que

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leqslant L\,|x-y|\,.$$

Por el Teorema 3.8, para cada α existe una solución φ_α del problema de valores iniciales (3.3.9). Veamos qué propiedades tiene esta solución.

Proposición 3.25. *Sea φ_α solución de* (3.3.9)*. Entonces $\varphi_\alpha \in L^\infty([0,T],\mathbb{R}^n)$, y además si $s \leqslant t$, vale que*

$$|\varphi_\alpha(t) - \varphi_\alpha(s)| \leqslant M\mu([s,t)).$$

Dem: Dado que φ_α es solución del problema (3.3.9), entonces por Definición 3.7 tenemos que

$$\varphi_\alpha(t) = \varphi_\alpha(0) + \int_{[0,t)} f(s,\varphi_\alpha(s))\,d\mu,$$

y por la desigualdad triangular vale que

$$|\varphi_\alpha(t)| \leqslant |\varphi_\alpha(0)| + \int_{[0,t)} |f(s,\varphi_\alpha(s))|\,d\mu.$$

Luego por (P-3)

$$\begin{aligned}|\varphi_\alpha(t)| &\leqslant |\varphi_\alpha(0)| + \int_{[0,t)} (a|\varphi_\alpha(s))| + b)\ d\mu \\ &\leqslant |\varphi_\alpha(0)| + b\mu([0,T]) + a\int_{[0,t)} |\varphi_\alpha(s)|\,d\mu.\end{aligned}$$

Si llamamos $C = |\varphi_\alpha(0)| + b\mu([0,T])$ y $\nu = a\mu$, entonces

$$|\varphi_\alpha(t)| \leqslant C + \int_{[0,t)} |\varphi_\alpha(s)|\,d\nu,$$

aplicando el Teorema 3.24 obtenemos que para $t \in [0,T]$

$$|\varphi_\alpha(t)| \leqslant CK(T)\exp\left(K(T)a\bar{\mu}([0,T])\right) < \infty.$$

Tomando supremo sobre todo el intervalo $[0,T]$, tenemos que $\varphi_\alpha \in L^\infty([0,T],\mathbb{R}^n)$. Por otro lado, como $||f||_\infty \leqslant M$, para $s \leqslant t$ vale que

$$|\varphi_\alpha(t) - \varphi_\alpha(s)| \leqslant \int_{[s,t)} |f(r,\varphi_\alpha(r))|\,d\mu \leqslant M\ \mu\left([s,t)\right).$$

$\square$

Corolario 3.26. *Sea φ_α solución de* (3.3.9)*. Si $t_0 \in [0,T]$ cumple que $\mu(\{t_0\}) = 0$, entonces φ_α es continua en t_0.*

Dem. Como

$$0 = \mu(\{t_0\}) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[t_0 - \frac{1}{n}, t_0 + \frac{1}{n}\right]\right) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(\left[t_0 - \frac{1}{n}, t_0 + \frac{1}{n}\right]\right)$$

Para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$, entonces

$$\mu\left(\left[t_0 - \frac{1}{n}, t_0 + \frac{1}{n}\right]\right) < \epsilon/M.$$

Sea $\delta > 0$ tal que $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \subset \left[t_0 - \frac{1}{n}, t_0 + \frac{1}{n}\right]$, entonces por la proposición 3.25, para $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ vale que

$$|\varphi_\alpha(t) - \varphi_\alpha(t_0)| \leqslant M\mu\left(\left[t_0 - \frac{1}{n}, t_0 + \frac{1}{n}\right]\right) < \epsilon$$

□

El siguiente teorema muestra que las soluciones de (3.3.9) están definidas en todo $[0,T]$.

Teorema 3.27 (**Dominio de la solución**)**.** *Sea μ una medida de Borel finita. Si $f : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ cumple con las condiciones (P-1) a (P-4), entonces la solución del problema* (3.3.9) *está definida en todo el intervalo* $[0,T]$*.*

Dem. Supongamos que la solución máxima está definida en el intervalo $[0,t_1]$, donde $t_1 < T$. Entonces por el Teorema 3.11 se debe cumplir alguna de las dos condiciones:

A) $\forall K \Subset [0,T)\times\mathbb{R}^n$ existe $t_2 \in [0,t_1)$ tal que $(t,\varphi(t)) \notin K$ $\forall t \in (t_2,t_1)$.

B) Existe $x_1 = \lim_{t\to t_1^-} \varphi(t)$, $(t_1,x_1) \in [0,T) \times \mathbb{R}^n$ y

$$(t_1, \varphi(t_1) + f(t_1,\varphi(t_1))\mu(\{t_1\})) \notin [0,T) \times \mathbb{R}^n.$$

Si la condición (A) es verdadera, entonces para $\epsilon \in \left(0, \dfrac{T-t_1}{2}\right)$ definimos el conjunto $K_\epsilon = [0, t_1 + \epsilon] \times B(0,R)$ donde $||\varphi||_\infty \leqslant R$. Como K_ϵ es cerrado y acotado, entonces K_ϵ está compactamente incluido en $[0,T) \times \mathbb{R}^n$. Luego existe $t_2 \in [0,t_1)$ tal que $(t,\varphi(t)) \notin K_\epsilon$ para todo $t \in (t_2,t_1)$. Como $\varphi(t) \in B(0,R)$, la única manera de que $(t,\varphi(t)) \notin K_\epsilon$ es que $t > t_1 + \epsilon$, lo cual es un absurdo. Por otro lado, es inmediato que (B) es falso, porque si no lo fuese, resultaría que $\varphi(t_1) + f(t_1,\varphi(t_1))\mu(\{t_1\}) \notin \mathbb{R}^n$. Luego el intervalo donde está definida φ es $[0,T]$. □

Definición 3.28. *Llamaremos operador de Poincaré al operador* $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *tal que para cada valor inicial* α, $P(\alpha) = \varphi_\alpha(T)$, *donde* φ_α *es solución de* (3.3.9).

Lema 3.29. *El operador de Poincaré es continuo.*

Dem. Sean φ_α y φ_β dos soluciones del problema (3.3.9). Como f es Lipschitz

$$\begin{aligned}|\varphi_\alpha(t) - \varphi_\beta(t)| &\leqslant |\alpha - \beta| + \int_{[0,t)} |f(r, \varphi_\alpha(r)) - f(t, \varphi_\beta(t))| \, d|\mu| \\ &\leqslant |\alpha - \beta| + L \int_{[0,t)} |\varphi_\alpha(r) - \varphi_\beta(t)| \, d|\mu|.\end{aligned}$$

Si aplicamos el Teorema 3.24 tomando $u(t) = |\varphi_\alpha(t) - \varphi_\beta(t)|$, $c = |\alpha - \beta|$ y $\nu = L|\mu|$, conseguimos

$$|\varphi_\alpha(t) - \varphi_\beta(t)| \leqslant K(t)|\alpha - \beta| e^{K(t)L|\bar{\mu}|([t_0,t))}.$$

Luego, si evaluamos en $t = T$ y llamamos $K = K(T) = \prod_{\tau \in D} \mu(\{\tau\}) < \infty$.

$$|P(\alpha) - P(\beta)| = |\varphi_\alpha(T) - \varphi_\beta(T)|_1 \leqslant K|\alpha - \beta|_1 e^{KL|\bar{\mu}|([0,T))} \to 0$$

cuando $|\alpha - \beta| \to 0$. □

Teorema 3.30. *Sea* $R > 0$ *y* f *satisface las condiciones (P-1) a (P-4), 3.10 para* $B(0, R)$ *y además que*

$$f(t, u) \cdot u < 0 \text{ para todo par } (t, u) \text{ donde } |u| = R \text{ y } \mu(\{t\}) = 0. \quad (3.3.10)$$

Entonces el operador de Poincaré definido en 3.28 cumple que $P\left(\overline{B(0, R)}\right) \subset \overline{B(0, R)}$.

Dem. Sea φ_α la solución a 3.3.9 y sea $A = \{t \in [0, T] \mid \varphi_\alpha(s) \in \overline{B(0, R)},\ \forall s \in [0, t]\}$, veamos que el conjunto A es simultáneamente abierto y cerrado relativo al intervalo $[0, T]$, y como $[0, T]$ es conexo, entonces $A = [0, T]$.

Veamos primero que A es un conjunto cerrado respecto al $[0, T]$. Para ello, sea t_n una sucesión de A que converge a t, veamos que $t \in A$. Si para algún n, $t_n \geqslant t$ entonces $\forall s \in [0, t] \subset [0, t_n]$ vale que $\varphi_\alpha(s) \in \overline{B(0, R)}$, por lo tanto en $t \in A$. Si por el contrario $\forall n$ tenemos que $t_n < t$, como

φ_α es continua a izquierda, entonces $\lim_{n\to\infty} \varphi_\alpha(t_n) = \varphi_\alpha(t)$ y como cada $\varphi_\alpha(t_n) \in \overline{B(0,R)}$ es inmediato que $\varphi_\alpha(t) \in \overline{B(0,R)}$, es decir $t \in A$. Por lo tanto, A es cerrado.

Si A es un conjunto abierto relativo al $[0,T]$, entonces $[0,T]\backslash A$ es cerrado, es decir para toda sucesión $\{t_n\} \subset [0,T]\backslash A$ si $t_n \to t$ entonces $t \in [0,T]\backslash A$. Por lo tanto si suponemos que A no es abierto relativo al intervalo $[0,T]$, entonces $\exists t_0 \in A$ y $\{t_n\} \not\subset A$ tal que $t_n \to t_0$. Podemos asegurar que si $t > t_0$ entonces $t \notin A$, pues existe n_0 tal que $t_0 < t_{n_0} < t$ y como tengo que $t_{n_0} \notin A$, en particular $|\varphi_\alpha(t_{n_0})| > R$.

Veamos que como $t_0 \in A$, entonces $\varphi_\alpha(t_0) \in B(0,R)$ o $\varphi_\alpha(t_0) \in \partial B(0,R)$, y siempre existe $t > t_0$ tal que $t \in A$.

- Supongamos que $\varphi_\alpha(t_0) \in B(0,R)$.

En el problema (3.3.9) podemos tomar como condición inicial $\varphi(0) = \varphi_\alpha(t_0) = \beta \in B(0,R)$, entonces por el Teorema 3.8 existe una solución, que notaremos φ_β. Luego, tenemos que para todo $t \in [0,\delta)$ el par $(t, \varphi_\beta(t)) \in \Omega$, donde Ω es un entorno de $[0,T] \times B(0,R)$. Ahora podemos extender a φ_α de la siguiente manera

$$\varphi_\alpha(t) = \begin{cases} \varphi_\alpha(t) & si \quad t \in [0,t_0) \\ \varphi_\beta(t-t_0) & si \quad t \in [t_0, t_0+\delta) \end{cases}$$

Por lo tanto para todo $t \in [t_0, t_0+\delta)$ vale que $|\varphi_\alpha(t)| = |\varphi_\beta(t-t_0)| \leqslant R$. Es decir existe $t > t_0$ tal que $t \in A$.

- Supongamos que $\varphi(t_0) \in \partial B(0,R)$ y $\mu(\{t_0\}) \neq 0$.

Por (3.10) $x_1 = \varphi(t_0) + f(t, \varphi(t_0))\mu(\{t_0\}) \in B(0,R)$, y tomando la medida $\hat{\mu} = \mu - \mu(\{t_0\})\delta_{t_0}$, es claro que $\hat{\mu}(\{t_0\}) = 0$, puedo aplicar el Teorema 3.8 para la condición inicial $\varphi(0) = x_1$, pero con la medida $\hat{\mu}$. Luego, existe $\delta > 0$ y φ_{x_1} tal que $|\varphi_{x_1}(t)| \leqslant R$ para todo $t \in [0, 0+\delta)$. Ahora puedo extender la solución φ_α al intervalo $[0, t_0+\delta)$ de la siguiente manera

$$\varphi_\alpha(t) = \begin{cases} \varphi_\alpha(t) & si \quad t \in [0,t_0] \\ \varphi_{x_1}(t-t_0) & si \quad t \in (t_0, t_0+\delta) \end{cases}$$

Por lo tanto existe $t > t_0$ tal que $|\varphi_\alpha(t)| < R$, es decir vale que $t \in A$.

- Supongamos $\varphi(t_0) \in \partial B(0,R)$ y $\mu(\{t_0\}) = 0$

De (3.3.10) existe $b > 0$ tal que $f(t_0, \varphi(t_0)) \cdot \varphi(t_0) < -b$.

Por (3.2.1) y Corolario 3.26, para $\epsilon = \frac{b}{3RL}$ existe $\delta_1 > 0$ tal que si $t \in [t_0, t_0 + \delta_1)$ entonces

$$\begin{aligned}\int_{[t_0,t)} f(s, \varphi_\alpha(s)) - f(s, \varphi_\alpha(t_0))\, d\mu \leqslant \int_{[t_0,t)} |\varphi_\alpha(s)\varphi_\alpha(t_0)|\, d\mu \\ \leqslant \frac{b}{3R}\mu((t_0, t)).\end{aligned} \tag{3.3.11}$$

Además, como f es continua en t_0 $\exists\delta_2 > 0$ tal que si $s \in [t_0, t_0 + \delta_2)$, entonces

$$|f(s, \varphi_\alpha(t_0)) - f(t_0, \varphi_\alpha(t_0))| \leqslant \frac{b}{3R}. \tag{3.3.12}$$

Para todo $t \in [t_0, t_0 + \delta)$, donde $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$, usando (3.3.11) y (3.3.12) tenemos que

$$\begin{aligned}\varphi_\alpha(t) - \varphi_\alpha(t_0) &= \int_{(t_0,t)} [f(s, \varphi_\alpha(s)) - f(s, \varphi_\alpha(t_0))]\ d\mu \\ &+ \int_{(t_0,t)} [f(s, \varphi_\alpha(t_0)) - f(t_0, \varphi_\alpha(t_0))]\ d\mu \\ &+ \int_{(t_0,t)} f(t_0, \varphi_\alpha(t_0))\, d\mu, \\ &\leqslant \frac{b}{3R}\mu((t_0, t)) + \int_{(t_0,t)} \frac{b}{3R}\, d\mu + \int_{(t_0,t)} f(t_0, \varphi_\alpha(t_0))\, d\mu.\end{aligned}$$

Si multiplicamos por el vector $\varphi_\alpha(t_0)$ y como $|\varphi_\alpha(t_0)| = R$, entonces

$$\begin{aligned}[\varphi_\alpha(t) - \varphi_\alpha(t_0)] \cdot \varphi_\alpha(t_0) \leqslant &\varphi_\alpha(t_0)\frac{2b}{3R}\mu((t_0, t)) \\ &+ \int_{(t_0,t)} f(t_0, \varphi_\alpha(t_0)) \cdot \varphi_\alpha(t_0)\, d\mu \\ &\leqslant \frac{2b}{3}\mu((t_0, t)) - b\mu((t_0, t)) = -\frac{b}{3}\mu((t_0, t)).\end{aligned}$$

Luego por la Proposición?? (3.25)

$$\begin{aligned}|\varphi_\alpha(t)|^2 =& |\varphi_\alpha(t_0)|^2 + 2\,[\varphi_\alpha(t) - \varphi_\alpha(t_0)] \cdot \varphi_\alpha(t_0) + |\varphi_\alpha(t) - \varphi_\alpha(t_0)|^2 \\ &\leqslant R^2 - \frac{2b}{3}\mu((t_0, t)) + M^2\mu((t_0, t))^2.\end{aligned}$$

O equivalentemente

$$|\varphi_\alpha(t)|^2 - R^2 \leqslant \mu((t_0, t))\left[M^2\mu((t_0, t)) - \frac{2b}{3}\right]. \tag{3.3.13}$$

El término de la derecha es una expresión cuadrática respecto a $\mu((t_0, t))$, y tiene como raíces t_0 y otro valor a derecha de t_0, es decir existe $t_1 > t_0$ tal que $|\varphi_\alpha(t_1)|^2 - R^2 \leqslant 0$, por lo tanto $t_1 \in A$.

Por lo tanto, mostramos que existe $t_1 > t_0$ tal que $t \in A$, lo cual contradice que no sea abierto relativo al $[0,T]$. Finalmente, si A es abierto y cerrado relativo al intervalo $[0,T]$, entonces $A = [0,T]$.

Luego, para cualquier $\alpha \in \overline{B(0,R)}$,

$$P(\alpha) = \varphi_\alpha(T) \in \overline{B(0,R)}.$$

□

Teorema 3.31 (**Teorema de Brouwer**). *Sea $B(0,R)$ una bola de $\mathbb{R}^n$ y sea $P : \overline{B(0,R)} \to \overline{B(0,R)}$ continua. Entonces existe $x \in \overline{B(0,R)}$ tal que $P(x) = x$.*

Teorema 3.32. *Sea μ una medida de Borel finita, y sea $f : [0,T]\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función que cumple con las condiciones (P-1) a (P-4). Además, existe una bola $B(0,R)$ tal que si $x \in \overline{B(0,R)}$, entonces $x+f(t,x)\mu(\{t\}) \in \overline{B(0,R)}$ para todo $t \in [0,T]$, y*

$$f(t,x)\cdot x < 0 \ \text{ para todos } |x| = R \text{ y } \mu(\{t\}) = 0.$$

Entonces el problema

$$\begin{cases} d(\varphi) = f(t,\varphi(t))d\mu \\ \varphi(0) = \varphi(T) \end{cases} \tag{PP}$$

tiene al menos una solución.

Dem. Por el Teorema 3.27 y el Lema 3.29, el operador P está bien definido y es continuo. Luego, por el Teorema 3.30 se tiene que $P\left(\overline{B(0,R)}\right) \subset \overline{B(0,R)}$, y ahora aplicando el Teorema de Brouwer se llega a que existe una solución φ al problema (3.3.9) tal que $\varphi(T) = \varphi(0)$. □

Ejemplo 1. Sea $u : [0,T] \to \mathbb{R}$, y sean $g_{1,2} : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ funciones suficientemente buenas, definimos el siguiente problema impulsivo

$$\begin{cases} u'' = g_1(t,u,u')d\lambda + g_2(t,u,u')\displaystyle\sum_{i=1}^{r} d\delta_{t_i} \\ u'(0) = u'(T) \\ u(0) = u(T), \end{cases} \tag{3.3.14}$$

donde $t_i \in (0,T)$ y δ_{t_i} es la medida delta de Dirac concentrada en t_i. Veamos como podemos aplicar el teorema 3.32 a este tipo de problemas.

Si llamamos $u' = v$ podemos transformar el problema (3.3.14) en un sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} (u', v') = (v, g_1(t, u, v))\, d\lambda + \sum_{i=1}^{r} (0, g_2(t, u, v))\, d\delta_{t_i} \\ (u(0), v(0)) = (u(T), v(T)). \end{cases}$$

A este sistema de ecuaciones lo podemos escribir de manera vectorial, tomando $\varphi = (u, v)$, $G_1(t, \varphi) = (v, g(t, u, v))$ y $G_2(t, \varphi) = (0, g_2(t, u, v))$.

$$\begin{cases} \varphi' = G_1(t, \varphi) d\lambda + G_2(t, \varphi) \sum_{i=1}^{r} d\delta_{t_i} \\ \varphi(0) = \varphi(T). \end{cases}$$

Si llamamos $F(t, \varphi) = \big(G_1(t, \varphi)\chi_{[0,T]-\{t_1,..,t_r\}} + G_2(t, \varphi)\chi_{\{t_1,...,t_r\}}\big)$ y tomando $d\mu = d\left(\lambda + \sum_{i=1}^{r} \delta_{t_i}\right)$, entonces la ecuación vectorial se transforma en la del Teorema 3.32.

Apéndice A

Método Shooting

Aca iria el codigo

Glosario

Indice de Símbolos

Bibliografía

[1] P. Amster. *Topological Methods in the Study of Boundary Value Problems*. Springer, oct 2013.

[2] D. Applebaum. *Limits, Limits Everywhere: The Tools of Mathematical Analysis*. Oxford University Press, may 2012.

[3] D. Bainov and P. Simeonov. *Impulsive Differential Equations: Periodic Solutions and Applications*. CRC Press, jul 1993.

[4] D. D. Bainov and P. S. Simeonov. *Impulsive Differential Equations: Asymptotic Properties of the Solutions*. World Scientific, mar 1995.

[5] G. Beltritti, S. Demaria, G. Giubergia, and F. Mazzone. *The Picard-Lindelöf theorem and continuation of solutions for measure differential equations*. Czechoslovak Mathematical Journal, may 2023.

[6] E. M. Bonotto, M. Federson, and J. G. Mesquita. *Generalized Ordinary Differential Equations in Abstract Spaces and Applications*. wiley, 2021.

[7] B. Brogliato. *Nonsmooth Mechanics: Models, Dynamics and Control*. Springer, dic 100.

[8] M. Carter. *The Lebesgue-Stieltjes Integral: A Practical Introduction*. Springer, dic 2012.

[9] J. Diestel and J. J. Uhl. *Vector Measures*. American Mathematical Soc., jun 1977.

[71] fijate, hay algo mal en la cita

[10] E. L. C. et. al. *Measure Theory and Fine Properties of Functions, Revised Edition*. Chapman and Hall/CRC, ene 2018.

[11] N. A. Fava and F. Zo. *Medida e integral de Lebesgue*. Instituto Argentino de Matemática, oct 1996.

[12] G. B. Folland. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*. Wiley, may 2007.

[13] J. Kurzweil. *Generalized Ordinary Differential Equations: Not Absolutely Continuous Solutions*. World Scientific, ene 2012.

[14] G. A. Leonov, H. Nijmeijer, A. Y. Pogromsky, and A. L. Fradkov. *Dynamics and Control of Hybrid Mechanical Systems*. World Scientific, ene 2010.

[15] I. P. Natanson. *Theory of Functions of a Real Variable*. Literary Licensing, LLC, mar 2013.

[16] J. Persson. Regularization of non-linear measure differential equations. *Le matematiche*, 44(1):113–130, 1989.

[17] S. Schwabik. *Generalized Ordinary Differential Equations*. World Scientific, oct 1992.

[18] S. Schwabik, M. Tvrdý, and O. Vejvoda. *Differential and Integral Equations: Boundary Value Problems and Adjoints*. Academia Praha, may 1979.

[19] R. A. Serway. *Física para ciencias e ingeniería 1 (10a. ed.)*. CENGAGE Learning, nov 2018.

[20] L. Vangipuram, B. D. D, and S. Pavel. *Theory of Impulsive Differential Equations*. World Scientific, may 1989.

[21] S. T. Zavalishchin and A. N. Sesekin. *Dynamic Impulse Systems: Theory and Applications*. Springer, feb 1997.